
Universidade de São Paulo

Departamento de Física Matemática

16 de maio de 2025

Notas de Aula

João Carlos Alves Barata

Versão de 16 de maio de 2025

Estas notas, ou sua versão mais recente, podem ser encontradas no seguinte endereço WWW:

http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula

Lista de Capítulos

I	Capítulos Introdutórios	47
1	Noções Conjuntivistas Básicas	48
2	Estruturas Algébricas Básicas	114
3	Formas Lineares e Normas em Espaços Vetoriais	262
II	Tópicos de Análise Real e Complexa	320
4	Recordações de Cálculo Vetorial em Três Dimensões	321
5	Conjuntos Convexos e Funções Convexas	334
6	Funções Geratrizes. Produtórias Complexas. Algumas Identidades Combinatórias	376
7	A Função Gama de Euler	408
8	Um Mínimo Sobre A Função Zeta de Riemann	451
9	Transformações de Möbius	480
III	Tópicos de Álgebra Linear	527
10	Tópicos de Álgebra Linear. I	528
11	Tópicos de Álgebra Linear. II	652
IV	Equações Diferenciais	696
12	Equações Diferenciais Ordinárias. Uma Introdução	697
13	Alguns Métodos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias	728
14	Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares	744
15	Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares no Plano Complexo	824
16	Propriedades de Algumas Funções Especiais	887
17	Completeza de Algumas Famílias de Funções	958
18	Rudimentos da Teoria das Equações a Derivadas Parciais	973

19	Introdução ao Problema de Sturm-Liouville	1050
20	Alguns Resultados sobre Equações Integrais	1094
V	Grupos	1112
21	Grupos. Alguns Exemplos	1113
22	Grupos de Lie e Álgebras de Lie. Uma Breve Introdução	1280
23	Uma Breve Introdução à Teoria das Representações de Grupos	1320
24	Grupos Conformes	1353
VI	Topologia Geral, Teoria da Medida e Integração	1409
25	Espaços Métricos	1410
26	O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas de Suas Consequências	1476
27	A Métrica de Hilbert e o Teorema de Perron-Frobenius	1509
28	Espaços Topológicos e Espaços Mensuráveis. Definições e Propriedades Básicas	1528
29	Medidas	1556
30	A Medida de Lebesgue e a Medida de Hausdorff	1584
31	Continuidade e Convergência em Espaços Topológicos	1615
32	Elementos da Teoria da Integração	1634
33	Alguns Tópicos Especiais em Topologia e Análise	1697
VII	Geometria Diferencial e Topologia Diferencial	1801
34	Variedades	1802
35	Noções Geométricas em Variedades	1871
36	Formas Diferenciais	1980
37	Capítulo Suplementar: Rudimentos da Geometria de Curvas e Superfícies em \mathbb{R}^3	2013
VIII	Análise Funcional I. Séries e Transformadas de Fourier. Distribuições	2067
38	Aproximação de Funções. Aproximações Polinomiais e Séries de Fourier	2068
39	Introdução às Distribuições e às Transformadas de Fourier	2138
40	Espaços Localmente Convexos e Espaços de Fréchet. Aspectos Topológicos de Distribuições	2260

IX	Análise Funcional II. Espaços de Hilbert e Teoria de Operadores	2287
41	Noções Básicas Sobre Espaços de Hilbert	2288
42	Operadores Lineares Limitados em Espaços de Banach e de Hilbert	2334
43	Operadores Lineares Não-Limitados em Espaços de Hilbert	2531
44	O Limite Indutivo de Álgebras	2572
X	Aplicações e Usos em Física	2581
45	Equações Diferenciais. Problemas Seleccionados de Interesse Físico	2582
46	Rudimentos da Teoria do Potencial	2708
47	Notas Sobre Mecânica Clássica. I	2721
48	Notas Sobre Mecânica Clássica. II. Problemas e Aplicações	2830
49	Spinors e o Grupo de Lorentz. A Equação de Dirac	2904
50	Operadores e a Física Quântica	2921
	Bibliografia	2973
		2992
	Índice Remissivo	2993

Capítulos e Seções

Índice

Prefácio	32
Bons Mots	34
Como Ler Este Livro	37
Notação e Advertências	38
Por Que Precisamos de Demonstrações?	41
I Capítulos Introdutórios	47
1 Noções Conjuntivistas Básicas	48
1.1 Conjuntos, Relações e Funções	49
1.1.1 Rudimentos da Teoria dos Conjuntos	49
1.1.1.1 Conjuntos e os Axiomas que os Delineiam	52
1.1.1.2 Mais Definições e Alguma Notação. Pares Ordenados	61
1.1.2 Relações e Funções	62
1.1.2.1 Operações Básicas com Famílias de Conjuntos	64
1.1.2.2 Funções Características de Conjuntos	66
1.1.2.3 A Diferença Simétrica de Dois Conjuntos	66
1.1.2.4 Propriedades Conjuntivistas Elementares de Funções	69
1.1.2.5 Um Interlúdio. O Teorema de Ponto Fixo de Knaster-Tarski	71
1.1.2.6 Produtos Cartesianos Gerais	72
1.1.2.7 Relações de Incompatibilidade (ou de Compatibilidade)	73
1.1.2.8 Relações de Equivalência	74
1.1.2.9 Relações de Ordem	78
1.1.3 Cardinalidade	85
1.1.3.1 Os Teoremas de Schröder-Bernstein e de Cantor	87
1.1.3.2 Números Naturais	90
1.1.3.3 Conjuntos Enumeráveis e Conjuntos Contáveis	94
1.1.4 Ínfimos e Supremos de Famílias de Conjuntos	98
1.2 Sistemas de Conjuntos	101
1.2.1 Semianéis de Conjuntos	101
1.2.2 Anéis de Conjuntos	102
1.2.3 Álgebras de Conjuntos	103
1.2.4 σ -Anéis de Conjuntos	104
1.2.5 σ -Álgebras de Conjuntos	105
1.2.6 Sistemas Monótonos de Conjuntos	107
1.2.7 Topologias	110
1.2.8 Filtros e Ultrafiltros	111
2 Estruturas Algébricas Básicas	114
2.1 Estruturas Algébricas Básicas	115
2.1.1 Álgebras Universais	117
2.1.2 Reticulados e Álgebras Booleanas	119
2.1.2.1 Álgebras Booleanas	123
2.1.2.2 Reticulados Ortocomplementados e Ortomodulares	126
2.1.3 Semigrupos, Monoides e Grupos	127

2.1.3.1	\mathbb{R}_{0+} Estendido	130
2.1.3.2	Homomorfismos e Isomorfismos entre Grupos	131
2.1.3.3	Os Grupos \mathbb{Z}_n . O Grupo do Círculo	132
2.1.3.4	Subgrupos	135
2.1.4	Corpos	137
2.1.5	Espaços Vetoriais	140
2.1.6	Anéis, Módulos e Álgebras	143
2.1.6.1	Anéis	143
2.1.6.2	Módulos	144
2.1.6.3	Álgebras	144
2.1.7	Exemplos Especiais de Álgebras	147
2.1.7.1	Álgebras de Lie	148
2.1.7.2	Álgebras de Poisson	150
2.1.7.3	Álgebras de Jordan	150
2.1.7.4	Álgebras de Grassmann	151
2.1.7.5	Álgebras de Clifford	152
2.1.8	Mais sobre Anéis	155
2.1.9	Ações e Representações	157
2.1.9.1	Ações de Grupos	157
2.1.9.2	Representações de Grupos e de Álgebras	162
2.1.10	Morfismos, Homomorfismos, Epimorfismos, Isomorfismos, Monomorfismos, Endomorfismos e Automorfismos	163
2.1.11	Induzindo Estruturas Algébricas	165
2.2	Grupos. Estruturas e Construções Básicas	169
2.2.1	Cosets	169
2.2.1.1	O Teorema de Lagrange	171
2.2.2	Subgrupos Normais e o Grupo Quociente	173
2.2.2.1	Alguns Teoremas Sobre Isomorfismos e Homomorfismos de Grupos	176
2.2.2.2	O Centro de um Grupo. Centralizadores e Normalizadores	179
2.2.2.3	O Centro de Alguns Grupos de Interesse	180
2.2.3	Grupos Gerados por Conjuntos. Grupos Gerados por Relações	184
2.2.4	O Produto Direto e o Produto Semidireto de Grupos. O Produto Tensorial de Grupos Abelianos	185
2.2.4.1	O Produto Direto (ou Soma Direta) de Grupos	185
2.2.4.2	O Produto Semidireto de Grupos	186
2.2.4.3	Produtos Tensoriais de Grupos Abelianos	190
2.2.5	O Produto Livre de Grupos. Amálgamas	196
2.3	Espaços Vetoriais. Estruturas e Construções Básicas	198
2.3.1	Bases Algébricas de um Espaço Vetorial	199
2.3.2	O Dual Algébrico de um Espaço Vetorial	203
2.3.3	Subespaços e Espaços Quocientes	210
2.3.4	Somas Diretas de Espaços Vetoriais	211
2.3.4.1	Formas Multilineares	212
2.3.5	Produtos Tensoriais de Espaços Vetoriais	214
2.3.5.1	Produtos Tensoriais, Duais Algébricos e Formas Multilineares	221
2.3.6	Produtos Tensoriais de um Espaço Vetorial com seu Dual	225
2.3.6.1	Tensores Associados a Formas Bilineares Simétricas Não Degeneradas. Métricas	225
2.3.7	Produtos Tensoriais de um mesmo Espaço Vetorial. Os Espaços Simétrico e Antissimétrico	230
2.3.8	O Produto Tensorial de Módulos. Derivações	232
2.4	Anéis e Álgebras. Estruturas e Construções Básicas	234

2.4.1	Ideais em Anéis e Álgebras Associativas	234
2.4.1.1	Ideais em Anéis	234
2.4.1.2	Ideais em Álgebras Associativas	238
2.5	Espaços de Fock, Álgebras Tensoriais e Álgebras Exteriores	241
2.5.1	Álgebras Tensoriais	242
2.5.2	Álgebras Exteriores	243
2.6	Tópicos Especiais	246
2.6.1	O Grupo de Grothendieck	246
2.6.2	Grupóides	248
2.6.3	Quatérnios, Números Complexos e outros Amigos	250
2.6.3.1	Álgebras Comutativas e Associativas em \mathbb{R}^2 . A Álgebra dos Complexos	250
2.6.3.2	A Álgebra dos Números Complexos Hiperbólicos	252
2.6.3.3	Álgebras em \mathbb{R}^3 . A Álgebra do Produto Vetorial	254
2.6.3.4	Quatérnios	255
	APÊNDICES	261
2.A	Prova de (2.186)	261
3	Formas Lineares e Normas em Espaços Vetoriais	262
3.1	Formas Lineares, Sesquilineares e Produtos Escalares em Espaços Vetoriais	262
3.1.1	Formas Multilineares	262
3.1.2	Formas Sesquilineares e as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Minkowski	269
3.1.3	Produtos Escalares	272
3.1.4	Formas Quadráticas	274
3.1.5	Exemplos	275
3.2	Normas em Espaços Vetoriais	276
3.2.1	O Lema da Simetria	284
3.3	Ortogonalidade, Conjuntos Ortonormais e o Procedimento de Gram-Schmidt	286
3.3.1	Conjuntos Ortogonais para Formas Bilineares Simétricas Não Degeneradas	287
3.4	Formas Bilineares, Sesquilineares e Produtos Escalares em Espaços de Dimensão Finita	288
3.5	Isometrias, o Teorema de Mazur-Ulam e Generalizações	295
3.5.1	Isometrias em Espaços Vetoriais Normados	295
3.5.2	O Teorema de Mazur-Ulam	296
3.5.3	Generalizações para Formas Bilineares	299
3.5.4	Generalizações para Formas Sesquilineares	301
3.6	Estruturas Complexas sobre Espaços Vetoriais Reais	304
	APÊNDICES	312
3.A	Equivalência de Normas em Espaços Vetoriais de Dimensão Finita	312
3.B	Prova do Teorema de Fréchet, von Neumann e Jordan	313
3.C	Formas Multilineares Simétricas. Prova da Proposição 3.1	316
3.D	A Identidade de Polarização para Formas Trilineares Simétricas	317

II Tópicos de Análise Real e Complexa **320**

4	Recordações de Cálculo Vetorial em Três Dimensões	321
4.1	Alguns Operadores Diferenciais de Interesse	321
4.2	Teoremas Clássicos sobre Integrais de Volume e de Superfície	325
4.3	O Laplaciano em Sistemas de Coordenadas Gerais	327
4.4	Coordenadas Esféricas em n Dimensões	329

5	Conjuntos Convexos e Funções Convexas	334
5.1	Conjuntos Convexos. Noções Básicas	334
5.1.1	Operações que Preservam Convexidade	336
5.1.2	Um Exemplo. Células e Diagramas de Voronoy	338
5.1.3	Espaços Estritamente Convexos e Uniformemente Convexos	342
5.2	Funções Convexas e Côncavas em Espaços Vetoriais Reais	345
5.2.1	Funções Convexas em Espaços Vetoriais Normados e sua Continuidade	346
5.2.2	Transformações Afins	348
5.2.3	Funções Côncavas e Convexas de uma Variável	350
5.2.4	Funções Convexas de Várias Variáveis	363
5.3	Algumas Conseqüências da Convexidade e da Concavidade	366
5.3.1	A Desigualdade de Jensen	366
5.3.2	A Primeira Desigualdade de Young	367
5.3.3	Médias Geométricas, Aritméticas e Desigualdades Correlatas	369
5.3.3.1	A Desigualdade de Minkowski	372
5.4	Exercícios Adicionais	375
6	Funções Geratrizes. Produtórias Complexas. Algumas Identidades Combinatórias	376
6.1	Funções Geratrizes	376
6.1.1	Algumas Identidades Combinatórias	378
6.1.2	Números de Fibonacci	381
6.1.3	Números de Bernoulli	383
6.1.4	Números de Bell	385
6.2	Notas Sobre Convergência de Produtórias	389
6.2.1	Uma Dedução Elementar do Produto de Wallis	390
6.3	A Fórmula de Inversão de Möbius. As Fórmulas de Viète	392
6.3.1	As Fórmulas de Viète	393
6.3.1.1	Uma Aplicação. Localizando Zeros de Certos Polinômios	394
6.3.1.2	As Desigualdades de Samuelson e Algumas Generalizações	397
6.3.1.3	As Identidades de Girard-Newton	401
6.4	Exercícios Adicionais	406
7	A Função Gama de Euler	408
7.1	Introdução e Motivação	408
7.2	A Função Gama. Definição e Primeiras Propriedades	410
7.3	Outras Representações para a Função Gama	415
7.4	A Função Beta e Propriedades Adicionais da Função Gama	420
7.4.1	A Fórmula de Reflexão de Euler	421
7.4.2	A Fórmula de Duplicação de Legendre	424
7.5	Teoremas Sobre a Unicidade da Função Gama e Outros Resultados	425
7.5.1	O Teorema de Bohr-Mollerup	425
7.5.2	Fórmulas de Duplicação e Unicidade	427
7.5.3	O Teorema de Wielandt e Algumas de Suas Conseqüências	428
7.5.3.1	A Fórmula de Multiplicação de Gauss da Função Gama	429
7.5.4	A Função Gama de Euler e Equações Diferenciais. O Teorema de Hölder	431
7.6	A Aproximação de Stirling e suas Correções	433
7.6.1	A Aproximação de Stirling para Fatoriais e suas Correções. A Série de Gudermann	435
7.6.2	A Aproximação de Stirling para a Função Gama e suas Correções. A Série de Gudermann	441
7.7	Exercícios Adicionais	445

8	Um Mínimo Sobre A Função Zeta de Riemann	451
8.1	Origens. Propriedades Básicas de Números Primos	451
8.2	Definição da Função ζ de Riemann em \mathbb{C}	456
8.3	A Fórmula de Produto de Euler e Outras Relações Envolvendo ζ	457
8.4	Primeiras Relações de ζ com a Função Gama de Euler	462
8.5	Os Valores de ζ nos Inteiros	466
8.5.1	Um Interlúdio. A Fórmula $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -1/12$ (!) e Alguns de Seus Amigos	468
8.6	A Relação Funcional de Riemann	472
8.6.1	Uma Demonstração da Relação Funcional de Riemann	474
8.7	Exercícios Adicionais	476
	APÊNDICES	477
8.A	Prova do Teorema Fundamental da Aritmética	477
9	Transformações de Möbius	480
9.1	Transformações de Möbius. Definição e Propriedades Elementares	480
9.2	O Teorema Fundamental das Transformações de Möbius	486
9.3	Transformações de Möbius sobre Retas e Círculos	488
9.4	Transformações de Möbius e Razões Anarmônicas	491
9.4.1	Razões Anarmônicas em \mathbb{R}^n e Transformações Lineares	495
9.4.2	Razões Anarmônicas no Plano Complexo e Transformações de Möbius	495
9.5	Transformações de Möbius e Automorfismos do Disco Unitário	499
9.5.1	O Teorema do Módulo Máximo	499
9.5.1.1	A Majoração de Cauchy e Algumas de suas Consequências	500
9.5.1.2	O Módulo de uma Função Analítica. O Teorema do Módulo Máximo	501
9.5.1.3	O Lema de Schwarz e Algumas Consequências	504
9.5.2	Transformações de Möbius e Automorfismos do Disco Unitário	506
9.5.3	O Lema de Schwarz-Pick	513
9.5.3.1	Duas Métricas Invariantes em D_1 . Revisitando o Lema de Schwarz-Pick	514
9.6	A Derivada de Schwarz	518
	APÊNDICES	523
9.A	Demonstração Alternativa da Proposição 9.8	523
9.B	Prova do Teorema 9.12	523

III Tópicos de Álgebra Linear 527

10	Tópicos de Álgebra Linear. I	528
10.1	Propriedades Básicas de Determinantes e Inversas de Matrizes	529
10.2	Noções Básicas sobre o Espectro de uma Matriz	539
10.2.1	Autovalores e Polinômios Característicos de Matrizes	540
10.2.2	Autovetores	543
10.2.3	O Traço de uma Matriz	545
10.2.3.1	Algumas Relações entre Determinantes e Traços de Matrizes	547
10.2.4	Localização dos Autovalores. Os Discos de Gershgorin	548
10.3	Polinômios de Matrizes	551
10.3.1	O Teorema de Hamilton-Cayley	553
10.3.1.1	O Teorema da Aplicação Espectral para Matrizes	558
10.4	Matrizes Diagonalizáveis e o Teorema Espectral	559
10.4.1	Diagonalização Simultânea de Matrizes	571

10.5	Matrizes Autoadjuntas, Normais e Unitárias	574
10.5.1	Matrizes Positivas	580
10.5.1.1	Matrizes Pseudoautoadjuntas e Quaseautoadjuntas	582
10.5.2	O Teorema de Inércia de Sylvester. Superfícies Quadráticas	584
10.5.3	Um Resultado Sobre Localização do Espectro de Matrizes Autoadjuntas	589
10.6	Matrizes Triangulares	591
10.7	O Teorema de Decomposição de Jordan e a Forma Canônica de Matrizes	592
10.7.1	Resultados Preparatórios	593
10.7.2	O Teorema da Decomposição de Jordan	597
10.7.3	Matrizes Nilpotentes e sua Representação Canônica	600
10.7.4	A Forma Canônica de Matrizes	604
10.7.5	Mais Alguns Resultados Sobre Matrizes Nilpotentes	606
10.8	Algumas Representações Especiais de Matrizes	608
10.8.1	A Decomposição Polar de Matrizes	608
10.8.2	A Decomposição em Valores Singulares	610
10.8.2.1	Uma Aplicação: a Decomposição de Schmidt	613
10.8.2.2	A Noção de Traço Parcial de Matrizes	615
10.8.2.3	Purificação	617
10.8.3	O Teorema da Triangularização de Schur	618
10.8.4	A Decomposição QR e a Decomposição de Iwasawa (“KAN”)	620
10.8.5	Diagonalização em Blocos de Matrizes Antissimétricas Reais	622
10.8.5.1	Resultado Principal. Enunciado e Demonstração	624
10.8.6	O Teorema de Williamson	629
10.9	A Pseudoinversa de Moore-Penrose	631
10.9.1	Outras Propriedades da Pseudoinversa de Moore-Penrose	633
10.9.1.1	A Regularização de Tikhonov. Existência	635
10.9.1.2	A Pseudoinversa de Moore-Penrose e o Teorema Espectral	638
10.9.2	A Pseudoinversa de Moore-Penrose e Problemas de Otimização Linear	639
10.9.3	Existência e Decomposição em Valores Singulares	640
10.10	Produtos Tensoriais de Matrizes	641
10.11	Propriedades Especiais de Determinantes	643
10.11.1	Expansão do Polinômio Característico	643
10.11.2	A Desigualdade de Hadamard	644
10.12	Exercícios Adicionais	647
11	Tópicos de Álgebra Linear. II	652
11.1	Uma Topologia Métrica em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	653
11.2	Exponenciais, Logaritmos e Funções Analíticas de Matrizes	656
11.2.1	Exponencial de Matrizes Como Limite de Potências	663
11.2.2	A Exponenciação de Matrizes e os Grupos $\text{GL}(\mathbb{C}, n)$ e $\text{GL}(\mathbb{R}, n)$	666
11.3	A Fórmula de Lie-Trotter e a Fórmula do Comutador	669
11.4	Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	672
11.4.1	Alguns Fatos Gerais sobre Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	672
11.4.2	Alguns Exemplos Específicos de Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	677
11.5	A Fórmula de Baker, Campbell e Hausdorff	682
11.6	A Fórmula de Duhamel e Algumas de suas Consequências	687
11.7	Continuidade do Determinante	691
11.8	Exercícios Adicionais	693

IV Equações Diferenciais 696

12 Equações Diferenciais Ordinárias. Uma Introdução	697
12.1 Definição e Alguns Exemplos	698
12.1.1 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares	700
12.1.2 Equações Ordinárias de Segunda Ordem. Exemplos de Interesse	704
12.2 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias	706
12.3 Discussão sobre Problemas de Valor Inicial	711
12.3.1 Problemas de Valor Inicial. Patologias e Exemplos a se Ter em Mente	712
12.3.2 Teoremas de Existência e Unicidade de Soluções	715
12.3.3 Soluções Globais	717
12.3.4 Dependência Contínua de Condições Iniciais e de Parâmetros	719
12.4 Linearização de EDO's e Estabilidade	719
12.5 Equações Periódicas e o Teorema de Floquet	723
13 Alguns Métodos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias	728
13.1 Solução de Equações Ordinárias Lineares de Primeira Ordem	728
13.2 As Equações de Bernoulli e de Riccati	729
13.3 Integração de Equações Separáveis	731
13.4 O Método de Variação de Constantes	732
13.5 O Método de Substituição de Prüfer	733
13.6 O Método de Inversão	735
13.7 Solução de Equações Exatas e o Método dos Fatores Integrantes	736
13.8 Soluções das Equações de D'Alembert-Lagrange e Clairaut	740
14 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares	744
14.1 Introdução	745
14.2 Unicidade e Existência de Soluções	745
14.2.1 Unicidade	745
14.2.2 Existência. A Série de Dyson	748
14.2.3 Propriedades de $D(t, s)$	752
14.3 Equações com Coeficientes Constantes	755
14.3.1 Alguns Exemplos e Aplicações	757
14.4 Perturbações de Sistemas Lineares	761
14.5 Mais sobre a Série de Dyson. Produtos de Tempo Ordenado	765
14.6 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares no Plano Complexo	768
14.6.1 O Caso Analítico	769
14.6.2 Resolução por Séries de Potências	773
14.6.3 Sistemas com Pontos Singulares. Monodromia	774
14.6.4 Sistemas com Pontos Singulares Simples	783
14.7 Sistemas Provenientes de EDOs de Ordem m	786
14.7.1 Pontos Singulares Simples em EDO's de Ordem m	788
14.7.2 Singularidades no Infinito	792
14.7.3 Alguns Exemplos de Interesse	793
14.8 Equações Fuchsianas. Símbolos de Riemann	798
14.8.1 Equações Fuchsianas de Primeira Ordem	799
14.8.2 Equações Fuchsianas de Segunda Ordem	802
14.8.3 A Equação de Riemann-Papperitz. Símbolos de Riemann	810
14.8.3.1 Transformações de Simetria dos Símbolos de Riemann	813

14.8.3.2	Equações Fuchsianas com três pontos singulares e a equação hipergeométrica	816
14.9	Exercícios Adicionais	819
15	Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares no Plano Complexo	824
15.1	Soluções em Séries de Potências para Equações Regulares	825
15.1.1	A Equação do Oscilador Harmônico Simples	826
15.1.2	A Equação de Legendre	827
15.1.3	A Equação de Hermite	830
15.1.4	A Equação de Airy	832
15.1.5	A Equação de Tchebychev	834
15.1.6	O Caso de Equações Regulares Gerais	837
15.2	Solução de Equações Singulares Regulares. O Método de Frobenius	839
15.2.1	Equações Singulares Regulares. O Caso Geral	842
15.2.2	A Equação de Euler Revisitada	849
15.2.3	A Equação de Bessel	851
15.2.4	Equações Relacionadas à de Bessel. A Equação de Bessel Esférica	862
15.2.5	Equações Relacionadas à de Bessel. A Equação de Bessel Modificada	863
15.2.6	A Equação de Laguerre	864
15.2.7	A Equação Hipergeométrica	866
15.2.8	A Equação Hipergeométrica Confluente	870
15.3	Algumas Equações Associadas	872
15.3.1	A Equação de Legendre Associada	872
15.3.2	A Equação de Laguerre Associada	874
15.4	Exercícios Adicionais	876
	APÊNDICES	
15.A	Prova da Proposição 15.1. Justificando os Polinômios de Legendre	878
15.B	Polinômios de Legendre: Provando (15.14)	879
15.C	Justificando os Polinômios de Hermite	881
15.D	Polinômios de Hermite: Provando (15.20)	882
15.E	Porque λ deve ser um Inteiro Positivo na Equação de Laguerre	883
15.F	Polinômios de Tchebychev: Obtendo (15.39) a Partir de (15.36)–(15.38)	885
16	Propriedades de Algumas Funções Especiais	887
16.1	Discussão Preliminar	887
16.1.1	Relações de Ortogonalidade	888
16.1.1.1	Condições de Contorno e a Origem das Relações de Ortogonalidade	893
16.1.2	Fórmulas de Rodrigues	897
16.2	Propriedades de Algumas Funções Especiais	899
16.2.1	Propriedades dos Polinômios de Legendre	899
16.2.2	Propriedades dos Polinômios de Legendre Associados	903
16.2.2.1	As Funções Harmônicas Esféricas	909
16.2.2.2	Fórmula de Adição de Funções Harmônicas Esféricas	911
16.2.3	Propriedades dos Polinômios de Hermite	915
16.2.3.1	As Funções de Hermite	918
16.2.4	Propriedades dos Polinômios de Tchebychev	922
16.2.5	Propriedades dos Polinômios de Laguerre	922
16.2.6	Propriedades dos Polinômios de Laguerre Associados	926
16.2.7	Algumas Propriedades das Funções de Bessel	929
16.2.7.1	Propriedades de Zeros das Funções de Bessel	939

16.2.7.2	Relações de Ortogonalidade das Funções de Bessel no Intervalo $[0, 1]$	941
16.2.7.3	Comentário sobre a equação de Bessel no intervalo $J = [0, \infty)$	947
16.2.7.4	A Expansão de Schlömilch	947
16.2.8	Propriedades das Funções de Bessel Esféricas	951
16.2.8.1	Relações de Ortogonalidade Para as Funções de Bessel Esféricas no Intervalo $[0, 1]$	953
16.3	Exercícios Adicionais	955
	APÊNDICES	956
16.A	Provando (16.54) a Força Bruta	956
17	Completeza de Algumas Famílias de Funções	958
17.1	Completeza de Polinômios Ortogonais em Intervalos Compactos	958
17.2	Completeza dos Polinômios de Hermite	961
17.3	Completeza dos Polinômios Trigonométricos	962
17.4	Completeza das Funções de Bessel e Propriedades de seus Zeros	965
17.4.1	A Equação de Bessel como Problema de Sturm-Liouville	965
17.4.1.1	O Caso $\nu > 0$	966
17.4.1.2	O Caso $\nu > 0$ com $\beta_1 = -\nu\beta_2 \neq 0$	968
17.4.1.3	O Caso $\nu = 0$	969
17.4.2	Conclusões Sobre a Completeza das Funções de Bessel e Propriedades de seus Zeros	971
18	Rudimentos da Teoria das Equações a Derivadas Parciais	973
18.1	Definições, Notações e Alguns Exemplos	974
18.2	Algumas Classificações de Equações a Derivadas Parciais	983
18.2.1	Equações Lineares, Não lineares, Semilineares e Quasilineares	983
18.2.2	Classificação de Equações de Segunda Ordem. Equações Parabólicas, Elípticas e Hiperbólicas	985
18.3	O Método de Separação de Variáveis	988
18.3.1	O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Lineares	989
18.3.2	O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Não Lineares	992
18.4	Problemas de Cauchy e Superfícies Características. Definições e Exemplos Básicos	994
18.5	O Método das Características	1000
18.5.1	Exemplos de Aplicação do Método das Características	1005
18.5.2	Características. Comentários Adicionais	1016
18.5.3	Sistemas de Equações Quasilineares de Primeira Ordem	1017
18.5.3.1	Generalidades Sobre Problemas de Condição Inicial em Sistemas Quasilineares de Primeira Ordem	1022
18.5.3.2	Sistemas Hiperbólicos Semilineares de Primeira Ordem em Duas Variáveis	1025
18.5.3.3	Soluções Ditas Simples de Sistemas Quasilineares, Homogêneos, de Primeira Ordem em Duas Variáveis	1028
18.6	Alguns Teoremas de Unicidade de Soluções de Equações a Derivadas Parciais	1031
18.6.1	Casos Simples. Discussão Preliminar	1031
18.6.2	Unicidade de Solução para as Equações de Laplace e Poisson	1035
18.6.3	Unicidade de Soluções. Generalizações	1037
18.7	Condições de Compatibilidade em Sistemas Sobredeterminados	1044
18.8	Exercícios Adicionais	1049
19	Introdução ao Problema de Sturm-Liouville	1050
19.1	Comentários Iniciais	1051
19.2	O Problema de Sturm	1055
19.2.1	Soluções Fundamentais e Funções de Green	1056
19.2.2	A Função de Green. Resolvendo o Problema de Sturm	1057
19.2.2.1	O Teorema de Green	1060

19.2.2.2	O Problema de Sturm com Condições de Contorno Não Homogêneas	1062
19.3	O Problema de Sturm-Liouville	1063
19.3.1	Propriedades Básicas dos Autovalores e Autofunções de Problemas de Sturm-Liouville	1064
19.3.1.1	A Simplicidade dos Autovalores	1064
19.3.1.2	O Lema de Green	1065
19.3.1.3	Realidade dos Autovalores e Autofunções. Ortogonalidade de Autofunções	1067
19.3.1.4	Propriedades dos Autovalores	1068
19.3.2	A Equação Integral de Fredholm	1072
19.3.3	Uma Aplicação do Problema de Sturm-Liouville	1075
19.3.4	Métodos Variacionais de Determinação de Autovalores	1078
19.4	Comentários Finais	1080
19.4.1	Um Problema de Sturm-Liouville Singular	1080
19.5	Exercícios Adicionais	1083
	APÊNDICES	1086
19.A	Prova do Teorema 19.1. Existência e Unicidade	1086
19.B	Prova da Proposição 19.2	1087
19.C	Comentário Sobre o Determinante Wronskiano	1088
19.D	Demonstração do Teorema 19.3	1089
19.D.1	Prova da Desigualdade (19.D.17)	1092
19.E	Uma Relação Útil	1093
20	Alguns Resultados sobre Equações Integrais	1094
20.1	Descrição	1094
20.2	O Método dos Determinantes de Fredholm	1096
20.2.1	A Equação Integral de Fredholm Linear Não Homogênea	1096
20.2.2	A Equação Integral de Fredholm Linear Homogênea	1100
20.3	A Equação Integral de Schlömilch	1101
20.4	Exercícios Adicionais	1104
	APÊNDICES	1105
20.A	Obtendo os Determinantes de Fredholm	1105
V	Grupos	1112
21	Grupos. Alguns Exemplos	1113
21.1	O Grupo de Permutações	1114
21.1.1	O Grupo de Permutações de n Elementos	1115
21.1.1.1	Ciclos, Transposições e Transposições Elementares	1116
21.1.1.2	O Sinal, ou Paridade, de uma Permutação. O Símbolo de Levi-Civita	1120
21.2	Alguns Grupos Matriciais	1122
21.2.1	Grupos Lineares e Grupos Lineares Especiais	1122
21.2.1.1	Grupos Lineares Projetivos	1124
21.2.2	O Grupo de Borel e o Grupo de Heisenberg	1126
21.2.2.1	O Grupo de Heisenberg	1127
21.2.3	Grupos Associados a Formas Bilineares e Sesquilineares	1134
21.2.3.1	Os Grupos Ortogonais	1137
21.2.3.2	Os Grupos Unitários	1139
21.2.3.3	Os Grupos Simpléticos	1140
21.2.4	A Conectividade por Caminhos de Alguns Grupos Matriciais	1148
21.3	Os Grupos $SO(2)$, $SO(1, 1)$, $SO(3)$, $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{C})$	1148

21.3.1	Os Grupos $SO(2)$, $O(2)$, $SO(1, 1)$ e $O(1, 1)$	1148
21.3.1.1	Os Grupos $SO(2)$ e $O(2)$	1149
21.3.1.2	Os Grupos $SO(1, 1)$ e $O(1, 1)$ (o grupo de Lorentz em 1+1 dimensões)	1151
21.3.2	O Grupo $SO(3)$	1153
21.3.2.1	Mais Propriedades das Matrizes de $SO(3)$	1162
21.3.2.2	$SO(3)$ e os Ângulos de Euler	1165
21.3.2.3	A Parametrização de Cayley de $SO(3)$ (e de $SO(n)$)	1170
21.3.3	O Grupo $O(3)$	1173
21.3.4	O Grupo $SU(2)$	1177
21.3.5	O Grupo $SL(2, \mathbb{C})$	1183
21.4	Generalidades Sobre os Grupos $SU(n)$ e $SO(n)$	1187
21.4.1	Os Grupos $SU(n)$	1187
21.4.1.1	Um Pouco Sobre o Grupo $SU(3)$	1190
21.4.2	Os Grupos $SO(n)$	1191
21.5	Grupos Afins e o Grupo Euclidiano	1196
21.6	O Grupo de Lorentz em 3 + 1-Dimensões	1200
21.6.1	O Espaço-Tempo, a Noção de Intervalo e a Estrutura Causal	1200
21.6.2	A Invariância do Intervalo	1206
21.6.3	O Grupo de Lorentz	1208
21.6.4	Alguns Subgrupos do Grupo de Lorentz	1209
21.6.5	Alguns Fatos Sobre a Estrutura do Grupo de Lorentz	1213
21.6.6	Os Geradores Infinitesimais do Grupo de Lorentz	1217
21.6.6.1	Fórmula de Rodrigues para <i>Boosts</i> de Lorentz	1222
21.6.7	O Grupo de Galilei	1224
21.6.7.1	Comparação Entre os Grupos de Galilei e Lorentz. Contrações	1227
21.7	O Grupo de Poincaré	1230
21.8	A Relação Entre $SO(3)$ e $SU(2)$	1234
21.9	A Relação entre $SL(2, \mathbb{C})$ e o Grupo de Lorentz em 3 + 1 Dimensões	1239
21.9.1	Ações de $SL(2, \mathbb{C})$ e o Grupo de Lorentz	1243
21.10	Mais Sobre Grupos Simpléticos	1247
21.10.1	O Subgrupo Simplético Real Ortogonal	1248
21.10.2	Grupos Simpléticos. Álgebras de Lie e Parametrização de Cayley	1252
21.10.3	O Teorema de Williamson	1255
21.11	Operadores Diferenciais como Geradores Infinitesimais sobre Funções	1255
21.12	Exercícios Adicionais	1261
	APÊNDICES	1263
21.A	Prova do Teorema 21.11	1263
21.B	Um Isomorfismo entre $PSL(2, \mathbb{C})$ e \mathcal{L}_+^\uparrow	1273

22	Grupos de Lie e Álgebras de Lie. Uma Breve Introdução	1280
22.1	Variedades e Grupos de Lie	1281
22.2	Breves Considerações sobre Grupos Topológicos	1284
22.3	Grupos de Lie Matriciais	1286
22.3.1	Uma Topologia Métrica em $GL(n, \mathbb{C})$	1286
22.3.2	O Grupo de Lie $GL(n, \mathbb{C})$	1287
22.3.3	Subgrupos Uniparamétricos e seus Geradores Infinitesimais	1289
22.3.4	Subgrupos Uniparamétricos e Álgebras de Lie	1292
22.3.5	Subgrupos Fechados de $GL(n, \mathbb{C})$	1296

22.3.5.1	Mais Alguns Exemplos Importantes de Grupo de Lie	1299
22.4	Resultados Sobre a Estrutura de Álgebras de Lie (Incompleto)	1301
22.4.1	Aplicações Adjuntas	1301
22.4.2	Álgebras de Lie Nilpotentes, Solúveis, Simples e Semissimples	1302
22.4.3	A Forma de Killing	1306
22.4.3.1	Critérios de Cartan	1308
22.4.3.2	Exemplos de Cálculo de Formas de Killing	1308
22.4.4	Alguns Resultados Sobre a Estrutura de Álgebras de Lie	1311
22.4.4.1	Alguns Resultados Sobre Álgebras de Lie Solúveis	1311
22.4.4.2	Alguns Resultados Sobre Álgebras de Lie Semissimples	1311
22.4.4.3	Alguns Resultados Sobre Álgebras de Lie Nilpotentes	1311
22.5	A Relação entre Grupos de Lie Matriciais e suas Álgebras de Lie	1311
22.5.1	Questões sobre a Exponenciação de Álgebras de Lie	1312
22.5.2	Alguns Exemplos Especiais	1314
23	Uma Breve Introdução à Teoria das Representações de Grupos	1320
23.1	Representações de Grupos	1320
23.2	Médias Invariantes. A Medida de Haar	1326
23.3	Representações de Grupos Compactos	1328
23.3.1	Representações de Grupos Compactos em Espaços de Hilbert Separáveis	1329
23.4	O Teorema de Peter-Weyl	1335
23.5	Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de $SU(2)$	1344
23.6	Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de \mathcal{L}_+^\uparrow	1349
23.7	Exercícios Adicionais	1352
24	Grupos Conformes	1353
24.1	Transformações Conformes Lineares	1354
24.2	Aplicações Conformes	1357
24.2.1	Aplicações Conformes em \mathbb{R}^2	1360
24.2.2	Aplicações Conformes em \mathbb{C} e Funções Holomorfas	1362
24.2.3	Aplicações Conformes em \mathbb{R}^n	1368
24.2.3.1	Transformações de Similaridade	1368
24.2.3.2	Inversões em Relação a uma Forma Quadrática	1369
24.2.3.3	Outras Aplicações Conformes. Aplicações Conformes Especiais	1371
24.2.3.4	Outras Aplicações Conformes. As Transformações de Bateman	1374
24.2.3.5	O Teorema de Liouville	1376
24.2.4	Compactificação Conforme. Realização Linear do Grupo Conforme	1378
24.2.5	Aplicações Conformes. Alguns Usos em Física	1381
24.2.5.1	A Transformação de Kelvin	1381
24.2.5.2	A Transformação de Kelvin em Três Dimensões e o Método das Imagens	1382
24.2.5.3	Generalizações e o Caso do Espaço-Tempo de Minkowski	1385
24.2.5.4	As Equações de Maxwell e as Aplicações Conformes	1386
24.3	Reescalamentos Conformes em Variedades Riemannianas e Pseudo-Riemannianas	1388
	APÊNDICES	1389
24.A	A Projecção Estereográfica como Exemplo de Aplicação Conforme	1389
24.B	Demonstração da Identidade de Kelvin (24.78)	1390
24.C	Demonstração de (24.94)	1391
24.D	Demonstração do Teorema de Liouville, Teorema 24.4	1393
24.D.1	Prova do Teorema 24.5	1401

VI Topologia Geral, Teoria da Medida e Integração 1409

25 Espaços Métricos	1410
25.1 Métricas e Espaços Métricos	1411
25.1.1 Completeza e o Completamento Canônico	1422
25.1.2 Conjuntos de Sequências	1430
25.2 Pseudométricas	1431
25.3 A Noção de Topologia de Espaços Métricos ou Pseudométricos	1433
25.3.1 Comentários sobre Completeza e Topologias Métricas	1436
25.4 Espaços de Funções Limitadas e Completeza	1437
25.5 Espaços de Banach e de Hilbert	1441
25.5.1 Espaços de Banach em Espaços de Sequências	1443
25.5.1.1 Decrescimento das Normas dos Espaços $\ell_p(\mathbb{N})$	1453
25.6 Teorema do Melhor Aproximante em Espaços Normados Uniformemente Convexos	1456
25.7 Exercícios Adicionais	1461
APÊNDICES	1464
25.A Números Reais e p -ádicos	1464
25.A.1 A Construção de Cantor dos Números Reais	1464
25.A.2 Outros Completamentos dos Racionais. Números p -ádicos	1467
25.B Aproximações para π	1470
26 O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas de Suas Consequências	1476
26.1 O Teorema de Ponto Fixo de Banach	1477
26.1.1 Generalizações do Teorema de Ponto Fixo de Banach	1479
26.2 Diversas Aplicações do Teorema de Ponto Fixo de Banach	1482
26.2.1 Aplicação a Equações Numéricas. O Método de Newton	1482
26.2.2 Aplicação a Sistemas Lineares. O Método de Jacobi	1485
26.2.3 Aplicação às Equações Integrais de Fredholm e de Volterra	1487
26.2.4 Aplicações à Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias	1493
26.2.4.1 O Teorema de Picard-Lindelöf	1493
26.2.4.2 A Série de Dyson Revisitada	1497
26.2.4.3 Estendendo o Teorema de Picard-Lindelöf. Soluções Globais	1498
26.2.4.4 Um Teorema de Comparação de Soluções de EDO's	1499
26.3 O Teorema da Função Implícita e o Teorema da Função Inversa	1502
26.3.1 O Teorema da Função Implícita	1503
26.3.2 O Teorema da Função Inversa	1507
APÊNDICES	1508
26.A O Lema de Grönwall	1508
27 A Métrica de Hilbert e o Teorema de Perron-Frobenius	1509
27.1 A Métrica de Hilbert em Conjuntos Convexos Abertos Limitados	1510
27.2 Cones. Definições, Conceitos e Alguns Exemplos Ilustrativos	1516
27.2.1 Métricas Projetivas	1520
27.3 A Métrica Projetiva de Hilbert em Cones Apontados	1521
27.3.1 Estendendo a Métrica de Hilbert para Cones Apontados	1521
27.3.2 A Métrica Projetiva de Hilbert, ou Métrica de Birkhoff	1525
27.4 O Teorema de Perron-Frobenius	1527
28 Espaços Topológicos e Espaços Mensuráveis. Definições e Propriedades Básicas	1528
28.1 Definições, Propriedades Elementares e Exemplos	1528

28.2	Algumas Construções Especiais e Exemplos	1534
28.2.1	Topologias Geradas por Famílias de Conjuntos	1534
28.2.1.1	A Topologia de Sorgenfrey	1536
28.2.2	σ -Álgebras Geradas por Famílias de Conjuntos	1537
28.2.3	Bases de Espaços Topológicos. Bases Locais de Espaços Topológico	1538
28.2.4	Topologias e σ -Álgebras Induzidas	1540
28.2.4.1	A Noção Topologia Induzida (ou “Relativa”)	1540
28.2.4.2	A Noção de σ -Álgebra Induzida	1542
28.2.5	Topologias e σ -Álgebras Produto	1542
28.3	Interior e Fecho de Conjuntos em Espaços Topológicos	1543
28.3.1	Fecho de Conjuntos em Topologias Induzidas	1550
28.3.2	Fecho de Conjuntos em Espaços Métricos	1550
28.4	Espaços Topológicos Separáveis e Segundo-Contáveis	1552
28.4.1	A Segundo-Contabilidade como Propriedade Herdada	1555
29	Medidas	1556
29.1	O Problema da Teoria da Medida	1556
29.2	Medidas de Conjuntos. Definição, Exemplos e Propriedades Básicas	1559
29.3	Construindo Medidas. A Medida Exterior e o Teorema de Carathéodory	1562
29.3.1	Medidas Exteriores Métricas e Conjuntos Borelianos	1569
29.4	Um Esquema de Construção de Medidas Exteriores	1572
29.5	Medidas sobre Anéis e suas Extensões	1575
29.6	Espaços de Medida como Espaços Pseudométricos	1578
29.6.1	O Espaço Quociente como uma Álgebra Booleana	1580
	APÊNDICES	1582
29.A	Prova das Fórmulas de Inclusão-Exclusão	1582
30	A Medida de Lebesgue e a Medida de Hausdorff	1584
30.1	A Construção da Medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n	1584
30.1.1	A σ -álgebra de Borel em \mathbb{R}^n e a Medida de Borel-Lebesgue	1587
30.2	As Medidas de Hausdorff	1589
30.3	Conjuntos de Cantor	1593
30.3.1	O Conjunto de Cantor Ternário	1593
30.3.2	Mais Exemplos de Conjuntos de Cantor	1597
30.4	Exemplos de Conjuntos Mensuráveis por Lebesgue mas não Borelianos	1602
30.4.1	A Função de Cantor e um Exemplo dela Derivado	1603
30.4.2	Bases de Hamel e a Medida de Lebesgue	1607
30.5	Exercícios Adicionais	1610
31	Continuidade e Convergência em Espaços Topológicos	1615
31.1	Primeiras Definições	1615
31.2	Espaços Hausdorff	1617
31.3	Redes e o Caso de Espaços Topológicos Gerais	1618
31.3.1	Redes em Espaços Métricos	1621
31.4	O Limite do Ínfimo e o Limite do Supremo	1622
31.5	Continuidade de Funções em Espaços Topológicos	1625
31.5.1	Outras Noções Associadas à de Continuidade	1627
31.5.1.1	Homeomorfismos e Mergulhos Topológicos	1628
31.5.2	Outras Caracterizações do Conceito de Continuidade em Espaços Topológicos	1629

31.5.3	Continuidade e Convergência	1632
32	Elementos da Teoria da Integração	1634
32.1	Comentários Preliminares	1635
32.2	A Integração no Sentido de Riemann	1636
32.2.1	A Integral de Riemann Imprópria	1644
32.2.2	Diferenciação e Integração em Espaços de Banach	1646
32.3	A Integração no Sentido de Lebesgue	1650
32.3.1	Funções Mensuráveis e Funções Simples	1650
32.3.2	A Integral de Lebesgue. Integração em Espaços Mensuráveis	1655
32.3.3	A Integral de Lebesgue e sua Relação com a de Riemann	1662
32.3.4	Teoremas Básicos sobre Integração e Convergência	1665
32.3.4.1	O Teorema da Convergência Monótona	1666
32.3.4.2	O Lema de Fatou	1667
32.3.4.3	O Teorema da Convergência Dominada	1668
32.3.5	Alguns Resultados de Interesse	1669
32.4	Os Espaços \mathcal{L}_p e L_p	1671
32.4.1	As Desigualdades de Hölder e de Minkowski	1673
32.4.2	O Teorema de Riesz-Fischer. Completeza	1676
	APÊNDICES	1678
32.A	Mais sobre a Integral de Darboux	1678
32.A.1	Equivalência das Definições II e III da Integrabilidade de Riemann	1679
32.B	Caracterizações e Propriedades de Funções Mensuráveis	1680
32.C	Prova do Lema 32.3	1685
32.D	Demonstração de (32.26)	1686
32.E	A Equivalência das Definições (32.27) e (32.28)	1686
32.F	Prova do Teorema da Convergência Monótona	1689
32.G	Prova do Lema de Fatou	1689
32.H	Prova do Teorema da Convergência Dominada	1690
32.I	Prova dos Teoremas 32.2 e 32.3	1691
32.J	Prova das Desigualdades de Hölder e Minkowski	1693
32.K	Prova do Teorema de Riesz-Fischer	1695
33	Alguns Tópicos Especiais em Topologia e Análise	1697
33.1	Uma Coletânea de Definições	1698
33.1.1	Conjuntos Densos em Espaços Topológicos	1698
33.1.2	A Noção de Conjunto Conexo em Espaços Topológicos	1699
33.1.2.1	Conjuntos Conexos por Caminhos	1704
33.2	Axiomas de Separabilidade	1705
33.2.1	Algumas Propriedades de Separação em Espaços Métricos	1706
33.2.2	Postulados de Separabilidade em Espaços Topológicos	1707
33.2.3	O Lema de Urysohn	1716
33.2.3.1	O Teorema de Extensão de Tietze	1720
33.2.4	A Propriedade de Hausdorff como Propriedade Herdada	1723
33.3	Compacidade, Compacidade Local e Paracompacidade	1724
33.3.1	Algumas Definições Gerais	1724
33.3.2	Espaços de Lindelöf. Um Mínimo	1726
33.3.3	Compacidade. Definições e Propriedades em Espaços Topológicos Gerais	1728
33.3.3.1	Compacidade em Espaços Hausdorff	1730

33.3.3.2	Compacidade em Espaços Métricos	1734
33.3.3.3	Compacidade em \mathbb{R}^n	1741
33.3.3.4	Compacidade na Reta de Sorgenfrey	1743
33.3.4	Os Teoremas de Ascoli e de Arzelà	1745
33.3.4.1	Equilimitação e Equicontinuidade de Famílias de Funções	1745
33.3.4.2	Os Teoremas de Ascoli e de Arzelà para Famílias de Funções de um Compacto sobre um Espaço Métrico	1746
33.3.4.3	O Teorema de Peano	1749
33.3.5	Espaços Compactos Hausdorff e Partições da Unidade	1752
33.3.5.1	Uma Excursão pelas Variedades Topológicas Compactas Hausdorff	1754
33.3.6	Compacidade Local	1756
33.3.6.1	Espaços Localmente Compactos Hausdorff	1757
33.3.7	Paracompacidade	1759
33.3.7.1	Espaços Paracompactos Hausdorff	1760
33.4	As Noções de Topologia Inicial e de Topologia Final	1764
33.4.1	A Topologia Inicial de uma Coleção de Funções	1765
33.4.2	A Topologia Final de uma Coleção de Funções	1767
33.4.3	A Topologia Quociente	1768
33.4.4	Somas de Espaços Topológicos	1768
33.5	A Topologia Produto de Espaços Topológicos	1769
33.5.1	Alguns Resultados Envolvendo Compacidade e Topologia Produto	1771
33.5.2	O Cubo de Hilbert	1773
33.6	Mais Construções de Espaços Topológicos	1775
33.6.1	A Noção de Topologia Coerente	1776
33.6.1.1	As Injeções i_γ como Mergulhos Topológicos	1777
33.6.2	Uniões Topológicas e Limites Diretos de Espaços Topológicos	1780
33.6.2.1	A União Topológica de Uma Família de Espaços Topológicos	1780
33.6.3	O Limite Indutivo, ou Direto, de Espaços Topológicos	1781
33.6.3.1	O Limite Indutivo de Espaços Topológicos	1783
33.7	Teoremas de Metrizabilidade	1784
33.7.1	O Teorema de Metrização de Urysohn e Tikhonov	1786
33.8	O Teorema da Categoria de Baire	1789
33.9	A Métrica de Hausdorff	1790
33.9.1	Continuidade do Conjunto de Raízes de Polinômios	1793
	APÊNDICES	1798
33.A	Prova da Proposição 33.42	1798

VII Geometria Diferencial e Topologia Diferencial

1801

34 Variedades	1802
34.1 Variedades Topológicas	1803
34.1.1 Construindo Variedades Topológicas	1808
34.2 Variedades Diferenciáveis	1810
34.2.1 Partições da Unidade Diferenciáveis	1815
34.2.2 A Noção de Espaço Tangente	1817
34.2.2.1 O Espaço Cotangente	1823
34.2.3 Tensores em Variedades	1825
34.2.3.1 Traços de Tensores. Contração de Índices	1827
34.2.3.2 Transposição de Tensores	1829

34.2.4	Aplicações Entre Variedades Diferenciáveis	1830
34.2.4.1	A Diferencial de Uma Aplicação Entre Variedades. “Pullback” e “Pushforward”	1830
34.2.4.2	Imersões, Mergulhos e Subvariedades	1834
34.2.4.3	Imersões e Mergulhos. Exemplos e Contraexemplos Simples	1836
34.3	Campos Vetoriais e Tensoriais	1841
34.3.1	A Derivada de Lie	1844
34.4	Exemplos de Variedades Topológicas e Diferenciáveis	1849
34.4.1	Uma Variedade Topológica Paracompacta não Segundo-Contável	1849
34.4.2	O Gráfico de uma Função Real em \mathbb{R}^n	1850
34.4.2.1	Cones. E Um Estudo de Caso	1852
34.4.3	Superfícies Regulares em \mathbb{R}^n	1854
34.4.4	As Esferas S^n	1856
34.4.5	Toros (e Algumas Generalizações)	1859
34.4.6	Espaços Projetivos Reais	1861
34.4.7	Grupos de Lie	1865
34.4.8	Fibrados, Fibrados Vetoriais e Principais	1865
	APÊNDICES	1867
34.A	Derivadas de Lie. Prova das Relações (34.74) e (34.85)	1867
34.B	Derivadas de Lie. Prova da Relação (34.94)	1868
35	Noções Geométricas em Variedades	1871
35.1	Tensores Métricos Riemannianos e Semi-Riemannianos	1872
35.1.1	Transposição em Relação a Tensores Métricos	1882
35.2	Conexões Afins	1885
35.2.1	Conexões Afins em Campos Vetoriais	1886
35.2.1.1	Conexões Afins em Campos Tensoriais	1891
35.2.2	O Tensor de Torção	1895
35.2.3	Tipos Especiais de Conexões Afins	1896
35.2.3.1	Conexões Simétricas (ou Livres de Torção)	1896
35.2.3.2	Conexões Métricas (ou Riemannianas)	1898
35.2.3.3	Conexões de Levi-Civita	1904
35.2.3.4	Conexões de Weyl e a Origem Histórica das Transformações de Calibre	1905
35.2.4	Gradiente, Divergente e Laplaciano	1908
35.3	O Tensor de Curvatura	1911
35.3.1	As Identidades de Bianchi e Outras Propriedades	1914
35.3.2	O Tensor de Curvatura em Coordenadas Locais	1916
35.3.3	A Curvatura Seccional	1918
35.3.4	O Tensor de Ricci e a Curvatura Escalar	1922
35.3.5	Comentário Sobre a Segunda Identidade de Bianchi e as Equações de Einstein	1925
35.4	Geodésicas. O Mapa Exponencial Geodésico	1927
35.4.1	Geodésicas. Definição	1928
35.4.2	Geodésicas como Curvas Extremizantes do Comprimento (ou do Tempo Próprio)	1929
35.4.3	O Mapa Exponencial Geodésico	1932
35.4.4	Coordenadas Normais de Riemann e de Fermi. O Princípio de Equivalência	1935
35.4.4.1	Coordenadas Normais de Riemann	1935
35.4.4.2	Coordenadas Normais de Fermi	1937
35.4.4.3	O Princípio de Equivalência	1939
35.4.5	O Lema de Gauss	1942
35.4.6	Pontos Conjugados e a Equação de Jacobi	1946

35.4.6.1	A Equação de Jacobi	1946
35.4.6.2	Pontos Conjugados	1949
35.5	Campos de Killing	1950
35.6	A Estrutura Causal de Variedades Lorentzianas	1954
35.6.1	A Identidade de Raychaudhuri	1957
35.7	A Formulação Covariante do Eletromagnetismo	1965
	APÊNDICES	1971
35.A	Demonstração de Algumas Propriedades do Tensor de Curvatura	1971
35.A.1	Prova da Proposição 35.6	1971
35.A.2	Prova da Primeira Identidade de Bianchi, Proposição 35.8	1972
35.A.3	Prova da Segunda Identidade de Bianchi, Proposição 35.9	1973
35.A.4	Prova da Proposição 35.10	1975
35.A.5	Prova da Proposição 35.12	1976
35.B	Propriedades Básicas de Coordenadas Normais de Riemann. Prova da Proposição 35.18	1977
36	Formas Diferenciais	1980
36.1	Formas Diferenciais	1980
36.1.1	A Derivada Exterior de Formas	1984
36.1.2	Formas Exatas e Formas Fechadas	1986
36.1.2.1	O Lema de Poincaré	1989
36.2	Dualidade de Hodge	1993
36.2.1	O Mapa Dual de Hodge	1993
36.2.2	A Coderivada Exterior	1996
36.2.3	O Operador de Laplace-de Rham	1998
36.2.3.1	Definindo Gradiente, Divergente e Rotacional Via Formas Diferenciais	1998
36.2.4	Formas Harmônicas. O Teorema de Decomposição de Hodge e o Teorema de Hodge	2003
36.3	Usos em Física	2005
36.3.1	As Equações de Maxwell e Formas Diferenciais	2005
	APÊNDICES	2007
36.A	Os Símbolos de Levi-Civita	2007
36.B	Composição de Mapas de Hodge. Demonstração de (36.39)	2010
36.C	Demonstração de (36.41) e (36.42)	2011
36.D	Demonstração de (36.50)	2012
37	Capítulo Suplementar: Rudimentos da Geometria de Curvas e Superfícies em \mathbb{R}^3	2013
37.1	Curvas Regulares em \mathbb{R}^3	2014
37.1.1	Torção. Fórmulas de Frenet-Serret	2018
37.1.2	Hélices Circulares e Hélices Gerais	2021
37.1.2.1	Hélices Circulares	2021
37.1.2.2	Hélices Gerais, ou Hélices de Inclinação Constante	2024
37.1.3	Curvatura e Torção em Termos de Outros Parâmetros	2025
37.1.4	Alguns Outros Exemplos	2027
37.2	Superfícies Regulares em \mathbb{R}^3	2031
37.2.1	O Mapa de Gauss	2032
37.2.2	A Primeira e a Segunda Formas Fundamentais	2034
37.2.3	O Mapa de Gauss e sua Diferencial. O Operador de Forma	2037
37.2.3.1	O Operador de Forma e a Segunda Forma Fundamental	2038
37.2.3.2	As Curvaturas Principais. A Curvatura Gaussiana e a Curvatura Média	2039
37.2.4	As Equações Fundamentais da Teoria de Superfícies	2040

37.2.4.1	As Equações de Weingarten	2040
37.2.4.2	As Equações de Gauss	2043
37.2.4.3	Relações de Gauss-Peterson-Mainardi-Codazzi para Superfícies em \mathbb{R}^3	2045
37.2.4.4	Isometrias. O <i>Theorema Egregium</i> de Gauss	2048
37.2.4.5	As Equações Fundamentais em Notação Tensorial. Relação com o Tensor de Curvatura	2050
37.2.5	Derivação Covariante e seu Significado em Superfícies	2053
37.2.5.1	O Transporte Paralelo ao Longo de uma Curva	2059
37.2.5.2	A Conexão em Superfícies é uma Conexão Métrica	2060
37.2.6	A Noção de Curvatura Geodésica. Geodésicas	2061
37.2.6.1	Curvas Geodésicas em Superfícies	2063
	APÊNDICES	2065
37.A	Demonstração das Relações (37.204) e (37.205)	2065
VIII	Análise Funcional I. Séries e Transformadas de Fourier. Distribuições	2067
38	Aproximação de Funções. Aproximações Polinomiais e Séries de Fourier	2068
38.1	Noções de Convergência para Sequências de Funções	2069
38.1.1	Importância da Convergência Uniforme	2070
38.1.1.1	Troca de Ordem entre Limites e Integrais	2071
38.1.1.2	Troca de Ordem entre Limites e Derivadas	2073
38.1.1.3	Troca de Ordem entre Derivadas e Integrais	2073
38.2	Sequências Delta de Dirac	2075
38.3	Aproximação de Funções por Polinômios	2081
38.3.1	O Teorema de Weierstrass	2081
38.3.2	O Teorema de Taylor	2088
38.4	Aproximação de Funções por Polinômios Trigonômétricos	2095
38.4.1	Preliminares	2096
38.4.2	A Série de Fourier de Funções Periódicas de Período T	2099
38.4.3	Polinômios Trigonômétricos e Funções Contínuas e Periódicas	2100
38.4.4	Convergência de Séries de Fourier	2105
38.4.4.1	Séries de Fourier em Senos ou Cossenos para Funções Definidas em Intervalos Compactos	2111
38.4.5	Revisitando a Aproximação Uniforme de Funções Contínuas e Periódicas por Polinômios Trigonômétricos	2114
38.4.6	Somas de Cesàro	2114
38.4.6.1	O Núcleo de Fejér	2116
38.4.7	Séries de Fourier e o Espaço de Hilbert $L^2([-\pi, \pi], dx)$	2118
38.5	O Teorema de Stone-Weierstrass	2119
38.6	Exercícios Adicionais	2124
	APÊNDICES	2132
38.A	Prova do Teorema de Weierstrass Usando Polinômios de Bernstein	2132
38.B	A Demonstração de Weierstrass do Teorema de Weierstrass	2136
39	Introdução às Distribuições e às Transformadas de Fourier	2138
39.1	Funções de Schwartz e Funções de Teste	2139
39.1.1	Funções Gaussianas	2150
39.2	Transformadas de Fourier	2153
39.2.1	Transformadas de Fourier no Espaço de Schwartz	2156
39.2.1.1	As Relações de Weyl e a Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff	2159
39.2.1.2	A Transformada de Fourier de Funções Gaussianas	2162

39.2.1.3	Invertibilidade da Transformada de Fourier no Espaço de Schwartz	2165
39.2.1.4	Transformadas de Fourier, Produtos de Convolação e Identidade de Plancherel	2168
39.2.1.5	“Relações de Incerteza” para Transformadas de Fourier	2170
39.2.2	A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$	2172
39.2.2.1	Mais Algumas Transformadas de Fourier Relevantes em Aplicações	2175
39.2.2.2	A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ e suas Propriedades Espectrais	2177
39.2.3	Transformadas de Fourier: Tópicos Suplementares	2180
39.2.3.1	A Fórmula de Soma de Poisson	2180
39.2.3.2	Usos da Fórmula de Soma de Poisson. A Função θ de Jacobi	2182
39.2.3.3	Transformadas de Fourier e Médias Angulares	2183
39.3	Distribuições e Distribuições Temperadas	2189
39.3.1	Primeiros Exemplos de Distribuições	2191
39.3.2	Outros Exemplos de Distribuições	2196
39.3.2.1	A Distribuição Valor Principal	2196
39.3.2.2	Distribuições do Tipo Parte Finita de Hadamard	2198
39.3.3	Algumas Relações Úteis Envolvendo Distribuições	2204
39.3.4	Derivadas de Distribuições	2208
39.3.4.1	Alguns Exemplos de Derivadas de Distribuições	2211
39.3.4.2	Cálculo da Derivada de Algumas Distribuições de Interesse	2212
39.3.5	Alguns Resultados Estruturais sobre Distribuições	2214
39.3.6	Transformadas de Fourier de Distribuições Temperadas	2215
39.3.6.1	Cálculo de Transformadas de Fourier de Algumas Distribuições Temperadas	2215
39.3.7	Produtos de Distribuições	2219
39.3.7.1	Produto de Convolação de Distribuições	2224
39.3.7.2	Produto de Distribuições	2225
39.4	Equações Diferenciais Distribucionais, Soluções Fundamentais e Funções de Green	2227
39.4.1	Soluções Fundamentais	2230
39.4.1.1	Soluções Fundamentais como Funções Generalizadas	2231
39.4.1.2	O Caso de Operadores Lineares a Coeficientes Constantes	2233
39.4.1.3	Alguns Exemplos Fisicamente Relevantes	2238
39.5	Exercícios Adicionais	2242
	APÊNDICES	2249
39.A	Prova de (39.21)	2249
39.B	Prova da Proposição 39.16	2250
39.C	Prova da Regra de Leibniz (39.6)	2254
39.D	O Uso da Noção de Valor Principal na Eletrostática	2255
39.D.1	Um Exemplo em Três Dimensões	2256
39.D.2	Um Exemplo em Duas Dimensões	2257
40	Espaços Localmente Convexos e Espaços de Fréchet. Aspectos Topológicos de Distribuições	2260
40.1	Espaços Vetoriais Topológicos. Um Mínimo	2262
40.1.1	Propriedades do Interior e do Fecho de Conjuntos em Espaços Vetoriais Topológicos	2264
40.1.2	Propriedades de Vizinhanças do Vetor Nulo em Espaços Vetoriais Topológicos	2266
40.2	Espaços Vetoriais Localmente Convexos	2268
40.2.1	Espaços Localmente Convexos Produzidos por Seminormas	2268
40.2.2	O Funcional de Minkowski e suas Propriedades	2273
40.2.3	Pontos Limite, Redes de Cauchy e Completeza em Espaços Vetoriais Topológicos	2277
40.2.4	Espaços Localmente Convexos Metrizáveis	2278
40.3	Espaços de Fréchet	2279

40.3.1	Revisitando o Espaço de Schwartz e as Distribuições Temperadas	2280
40.3.1.1	O Espaço de Funções de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com Suporte em um Compacto	2283
40.4	Revisitando o Espaço das Funções de Teste e Distribuições	2284

IX Análise Funcional II. Espaços de Hilbert e Teoria de Operadores 2287

41	Noções Básicas Sobre Espaços de Hilbert	2288
41.1	Aspectos Topológicos Básicos de Espaços de Hilbert	2290
41.2	Aspectos Geométricos Básicos de Espaços de Hilbert	2292
41.2.1	Fechos e Complementos Ortogonais. Somas Diretas de Subespaços Fechados	2295
41.2.2	Funcionais Lineares e o Dual Topológico de um Espaço de Hilbert	2298
41.2.2.1	O Teorema da Representação de Riesz	2299
41.2.3	Conjuntos Ortonormais Completos em Espaços de Hilbert	2301
41.2.4	Conjuntos Totais	2312
41.2.4.1	Um Exemplo no Espaço $L^2(\mathbb{R}, dx)$	2312
41.3	Somas Diretas e Produtos Tensoriais de Espaços de Hilbert. Espaços de Fock	2316
41.3.1	Somas Diretas de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert	2316
41.3.2	Somas Diretas de uma Coleção Contável de Espaços de Hilbert	2317
41.3.3	Produtos Tensoriais de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert	2321
41.3.4	Os Espaços de Fock	2324
41.4	Coleções de Subespaços Fechados como Reticulados Ortomodulares	2326
41.5	Exercícios Adicionais	2329
	APÊNDICES	2330
41.A	Um Exemplo: os Sistemas de Rademacher e de Walsh	2330
41.B	Exemplo de Subespaços Fechados cuja Soma não é Fechada	2332
42	Operadores Lineares Limitados em Espaços de Banach e de Hilbert	2334
42.1	Operadores Lineares em Espaços Vetoriais Normados	2336
42.1.1	Espaços de Banach de Operadores	2340
42.1.2	O Dual Topológico de um Espaço de Banach	2344
42.1.3	O Teorema de Hahn-Banach e Algumas Consequências do Mesmo	2348
42.1.4	O Teorema de Banach-Steinhaus ou Princípio de Limitação Uniforme	2353
42.1.5	O Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado	2354
42.2	Operadores Limitados em Espaços de Hilbert	2361
42.2.1	A Noção de Operador Adjunto em Espaços de Hilbert	2362
42.2.2	Operadores Autoadjuntos, Normais, Unitários, Projetores Ortogonais e Isometrias Parciais	2365
42.3	Rudimentos da Teoria das Álgebras de Banach e Álgebras C^*	2374
42.3.1	Álgebras de Banach	2374
42.3.2	Alguns Fatos Estruturais sobre Álgebras C^*	2377
42.3.2.1	Álgebras com Involução e a Unidade	2377
42.3.3	A Inversa de Operadores Limitados	2381
42.3.4	O Espectro de Operadores em Álgebras de Banach	2386
42.3.5	O Operador Resolvente e Propriedades Topológicas do Espectro	2387
42.3.5.1	O Teorema da Aplicação Espectral	2392
42.3.6	O Raio Espectral	2393
42.3.7	O Homomorfismo de Gelfand em Álgebras C^*	2397
42.3.8	Raízes Quadradas de Operadores em Álgebras de Banach	2400
42.3.9	Elementos Positivos de Álgebras C^*	2402

42.3.9.1	Relação de Ordem Decorrente da Positividade em Álgebras C^*	2406
42.3.10	Aproximantes da Unidade em Álgebras C^*	2407
42.3.10.1	Cosets por Bi-Ideais em Álgebras C^*	2410
42.4	Álgebras de von Neumann. Um Mínimo	2414
42.4.1	O Teorema do Bicomutante	2416
42.5	Um Pouco sobre Estados e Representações de Álgebras C^*	2419
42.5.1	Morfismos Entre Álgebras C^*	2419
42.5.2	Representações de Álgebras C^*	2423
42.5.2.1	Estados em Álgebras C^* e a Representação GNS	2424
42.5.2.2	Estados Puros, de Mistura e a Irredutibilidade de Representações GNS	2430
42.5.3	Exemplos em Álgebras de Matrizes. Construção GNS. Estados Puros e a Entropia de von Neumann	2433
42.5.3.1	A Entropia de von Neumann	2437
42.5.3.2	A Construção GNS em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	2441
42.6	O Espectro de Operadores em Espaços de Banach	2443
42.6.1	O Espectro de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert	2447
42.6.2	Espectro em Espaços de Banach. Alguns Exemplos e Contraexemplos	2449
42.7	O Lema da Raiz Quadrada em Espaços de Hilbert	2453
42.7.1	A Decomposição Polar de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert	2458
42.8	Operadores Compactos em Espaços de Banach e de Hilbert	2460
42.8.1	Alguns Fatos Gerais Sobre o Espectro de Operadores Compactos	2469
42.8.1.1	O Teorema da Alternativa de Fredholm	2471
42.8.2	O Teorema Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos	2477
42.9	O Teorema Espectral para Operadores Limitados Autoadjuntos em Espaços de Hilbert	2483
42.9.1	O Cálculo Funcional Contínuo e o Homomorfismo de Gelfand	2483
42.9.2	Generalizando o Cálculo Funcional Contínuo. As Medidas Espectrais	2485
42.9.3	Medidas com Valores em Projeções Ortogonais	2492
42.9.4	Os Projetores Espectrais e o Teorema Espectral	2496
42.10	Operadores Tipo Traço e de Hilbert-Schmidt	2499
42.10.1	Operadores Tipo Traço, ou Traciais	2501
42.10.1.1	O Traço de um Operador Tracial	2505
42.10.2	Operadores de Hilbert-Schmidt	2508
42.10.3	Operadores Traciais e de Hilbert-Schmidt e os Operadores Compactos	2515
42.10.4	Operadores de Hilbert-Schmidt e Operadores Integrais	2517
42.10.5	O Teorema de Lidskii. Traço e Espectro de Operadores Traciais	2520
42.11	O Traço Parcial	2521
42.12	Exercícios Adicionais	2525
	APÊNDICES	2527
42.A	Prova do Teorema 42.19	2527
42.B	Um Lema Sobre Espaços Normados Devido a F. Riesz	2529
43	Operadores Lineares Não-Limitados em Espaços de Hilbert	2531
43.1	Classificando Operadores Não-Limitados	2532
43.1.1	Operadores Fechados	2533
43.1.2	Operadores Fecháveis	2536
43.1.3	O Adjunto de um Operador Linear	2537
43.1.3.1	Operadores Simétricos, Autoadjuntos e Essencialmente Autoadjuntos	2542
43.2	Espaços de Deficiência e Extensões Autoadjuntas de Operadores Simétricos	2548
43.2.1	Considerações Preliminares	2548
43.2.2	Classificação de Extensões Simétricas Fechadas de Operadores Simétricos Fechados. Extensões Autoadjuntas	2549

43.3	Formas Quadráticas e Alguns de Seus Usos	2554
43.3.1	Alguns Usos de Formas Quadráticas	2561
43.3.1.1	A Forma de Soma	2561
43.3.1.2	A Extensão de Friedrichs	2561
43.4	Bestiário de Exemplos e Contraexemplos	2563
	APÊNDICES	2571
43.A	Prova do Lema 43.6	2571
44	O Limite Indutivo de Álgebras	2572

X Aplicações e Usos em Física **2581**

45	Equações Diferenciais. Problemas Selecionados de Interesse Físico	2582
45.1	Dedução de Algumas Equações Diferenciais de Interesse	2583
45.1.1	Dedução Informal da Equação de Difusão de Calor	2583
45.1.2	Dedução Informal da Equação da Corda Vibrante	2587
45.2	As Equações de Helmholtz e de Laplace	2593
45.2.1	Problemas em Duas Dimensões em Coordenadas Polares	2595
45.2.2	Problemas em Três Dimensões em Coordenadas Esféricas	2597
45.3	Problemas de Difusão em uma Dimensão	2600
45.3.1	A Evolução da Temperatura de uma Barra Finita	2600
45.3.2	A Evolução da Temperatura de uma Barra Infinita	2604
45.3.3	A Evolução da Temperatura de uma Barra Semi-Infinita	2609
45.4	A Equação de Ondas	2614
45.4.1	A Equação de Ondas em $1 + 1$ Dimensões	2615
45.4.2	Interlúdio: Ondas Caminhantes e a Equação do Telégrafo	2618
45.4.3	Outro Interlúdio: Sólitons	2620
45.4.3.1	Sólitons na Equação de Korteweg-de Vries	2621
45.4.3.2	Sólitons na Equação de Sine-Gordon	2623
45.4.3.3	Sólitons no Modelo de Poço-Duplo	2624
45.4.3.4	Sólitons na Equação de Schrödinger Não-Linear	2626
45.4.4	A Equação de Ondas e Transformadas de Fourier	2630
45.4.4.1	A Equação de Ondas em $3 + 1$ Dimensões. A Solução de Kirchhoff	2633
45.4.4.2	A Equação de Ondas em $2 + 1$ Dimensões	2634
45.5	O Problema da Corda Vibrante	2636
45.5.1	Corda Vibrante Homogênea	2636
45.5.2	O Problema da Corda Homogênea Pendurada	2639
45.5.3	Corda Vibrante Não-Homogênea	2642
45.5.4	O Problema da Membrana Retangular Homogênea	2645
45.6	O Problema da Membrana Circular Homogênea	2647
45.7	O Oscilador Harmônico na Mecânica Quântica e a Equação de Hermite	2649
45.8	O Átomo de Hidrogênio e a Equação de Laguerre Associada	2651
45.9	Propagação de Ondas em Tanques Cilíndricos	2654
45.10	Equações Hiperbólicas Lineares em $1+1$ Dimensões e Equações Integrais	2661
45.11	Aplicações do Método da Função de Green	2668
45.11.1	A Equação de Poisson em Três Dimensões	2670
45.11.2	A Equação de Difusão Não-Homogênea	2671
45.11.3	A Equação de Ondas Não-Homogênea em $n + 1$ -Dimensões	2673

45.11.3.1	A Equação de Ondas Não-Homogênea em 3 + 1-Dimensões	2677
45.11.3.2	Aplicações à Eletrodinâmica. Potenciais Retardados e Equações de Jefimenko	2679
45.11.3.3	A Equação de Ondas Não-Homogênea em 2 + 1-Dimensões	2684
45.11.3.4	A Equação de Ondas Não-Homogênea em 1 + 1-Dimensões	2686
45.12	Exercícios Adicionais	2688
45.12.1	Problemas Selecionados de Eletrostática	2688
45.12.2	Equação de Difusão em uma Dimensão	2691
45.12.3	Equação de Ondas em uma Dimensão	2693
45.12.4	Modos de Vibração de Membranas	2699
45.12.5	Problemas sobre Ondas e Difusão em Três Dimensões Espaciais	2702
45.12.6	Problemas Envolvendo Funções de Green	2704
	APÊNDICES	2706
45.A	Duas Transformadas de Laplace	2706
46	Rudimentos da Teoria do Potencial	2708
46.1	A Equação de Poisson em Três Dimensões	2708
46.1.1	A Equação de Laplace em Domínios Limitados de \mathbb{R}^3 . O Problema de Dirichlet	2712
46.1.2	A Equação de Poisson em \mathbb{R}^3	2712
46.1.3	A Equação de Poisson Domínios Limitados de \mathbb{R}^3	2713
46.1.3.1	O Caso de Condições de Dirichlet	2713
46.1.3.2	O Caso de Condições de Neumann	2714
46.1.3.3	Existência de Solução	2714
46.1.4	Aplicações à Eletrostática: Capacitância	2714
46.2	O Teorema de Decomposição de Helmholtz	2714
46.2.1	Aplicações ao Eletromagnetismo	2718
46.3	Propriedades Básicas de Funções Harmônicas em \mathbb{R}^3	2719
47	Notas Sobre Mecânica Clássica. I	2721
47.1	Sistemas de Referência e suas Transformações na Mecânica Clássica. Acelerações Inerciais	2722
47.2	Mecânica de Pontos Materiais	2734
47.3	Interlúdio. Aceleração de Coriolis e a Rotação Diurna da Terra	2742
47.3.1	Experimentos de Queda Livre e Mensuração de seu Desvio	2744
47.3.2	O Experimento do Pêndulo de Foucault sob Pequenas Oscilações	2747
47.4	Mecânica de Corpos Rígidos	2754
47.4.1	Propriedades do Tensor Momento de Inércia	2756
47.4.2	As Equações Dinâmicas para Corpos Rígidos	2757
47.4.2.1	Estabilidade de Rotações em Torno dos Eixos Principais. O Teorema do Eixo Intermediário	2762
47.4.3	Movimento de Piões. Algumas Soluções	2765
47.5	O Formalismo Lagrangiano. Fundamentos	2771
47.5.1	O Princípio de Hamilton e as Equações de Euler-Lagrange em Sistemas sem Vínculos	2773
47.5.2	Invariância das Equações de Euler-Lagrange por Mudanças de Coordenadas e de Sistemas de Referência	2778
47.5.3	Sistemas com Vínculos Holonômicos	2780
47.5.4	O Princípio de D'Alembert e o Tratamento de Forças não Conservativas	2781
47.5.4.1	Partícula Carregada em um Campo Eletromagnético. A Força de Lorentz	2787
47.5.5	Sistemas de Coordenadas Não Inerciais no Formalismo Lagrangiano	2789
47.5.5.1	Uma Constante de Movimento	2791
47.5.6	O Formalismo Lagrangiano em Sistemas Não Autônomos	2792
47.6	O Formalismo Lagrangiano. Simetrias Contínuas e Leis de Conservação. O Teorema de Noether	2794
47.6.1	A Noção de Transformação de Simetria	2796

47.6.2	Simetrias Contínuas com $\gamma = 0$ e Leis de Conservação	2797
47.6.3	Similitude Mecânica	2801
47.6.4	Simetrias Contínuas com $\gamma \neq 0$	2802
47.7	O Formalismo Hamiltoniano	2803
47.7.1	Derivação Variacional das Equações de Hamilton	2806
47.7.2	Colchetes de Poisson	2807
47.7.3	Transformações Canônicas	2814
47.8	Exercícios Adicionais	2825
	APÊNDICES	2827
47.A	Mais Algumas Consequências da Proposição 47.1	2827
47.B	Um Lema Útil Sobre Funções Contínuas	2828
48	Notas Sobre Mecânica Clássica. II. Problemas e Aplicações	2830
48.1	As Curvas Tautócrona, Cicloide e Braquistócrona	2830
48.2	Movimento em Potenciais Centrais e o Problema de Kepler	2837
48.2.1	O Problema de Um Corpo sob Forças Centrais	2837
48.2.2	O Problema de Dois Corpos sob Forças Centrais	2840
48.2.3	O Problema de Kepler. Determinação das Órbitas	2840
48.2.4	O Problema de Kepler. Determinação das Trajetórias. A Equação de Kepler	2844
48.3	O Problema de Três Corpos e os Pontos de Lagrange	2849
48.3.1	Os Pontos de Lagrange	2850
48.3.1.1	As Soluções das Equações de Equilíbrio (48.77). O Caso Equilátero	2852
48.3.1.2	As Soluções das Equações de Equilíbrio (48.77). O Caso Não Equilátero	2854
48.3.1.3	Os Pontos de Lagrange L_1, L_2 e L_3 quando $m_1 \gg m_2 \gg m_3$	2858
48.3.2	Generalizações das Soluções Periódicas de Lagrange	2860
48.3.3	O Problema de Três Corpos Restrito e a Integral de Jacobi	2863
48.4	Modos Normais de Oscilação	2868
48.4.1	Modos Normais e a Energia Mecânica	2875
48.5	Ângulos de Euler na Mecânica de Corpos Rígidos	2877
48.5.1	Usos dos Ângulos de Euler. O Pião de Lagrange	2879
48.6	Exercícios Adicionais	2886
	APÊNDICES	2891
48.A	Seções Cônicas	2891
48.A.1	Elipses e Círculos	2891
48.A.2	Hipérbolas	2892
48.A.3	Parábolas	2894
48.A.4	Parametrização Polar de Seções Cônicas	2894
48.B	Soluções Colineares para Pontos de Lagrange	2898
48.C	Cálculo dos Pontos de Lagrange L_1, L_2 e L_3 quando $m_1 \gg m_2 \gg m_3$	2900
49	Spinors e o Grupo de Lorentz. A Equação de Dirac	2904
49.1	Discussão Preliminar	2904
49.2	Spinors	2908
49.2.1	Produtos Escalares Invariantes para Spinors	2909
49.2.2	Spinors de Dirac e a Equação de Dirac	2916
50	Operadores e a Física Quântica	2921
50.1	Algumas Considerações Gerais Sobre Teorias Físicas	2921
50.2	O Modelo da Mecânica Clássica	2924

50.3	O Quadro da Física Quântica e a Relevância do Teorema Espectral	2926
50.4	As Relações de Incerteza	2928
50.4.1	A Relação de Incerteza de Heisenberg	2931
50.4.2	A Relação de Incerteza de Schrödinger	2932
50.4.3	As Relações de Incerteza para Operadores Não Limitados	2936
50.4.3.1	As Relações de Incerteza e Transformações Simpléticas	2938
50.4.4	Discussão Adicional	2939
50.5	As Desigualdades de Bell	2942
50.5.1	O Problema das Variáveis Escondidas	2942
50.5.2	Obtendo as Desigualdades de Bell	2948
50.5.3	Alguns Resultados Matemáticos sobre as Desigualdades de Bell	2953
50.6	Fidelidade e Purificação	2957
50.6.1	Purificação	2960
50.7	O Teorema de Wigner. Simetrias	2963
50.8	Lógica e a Física Quântica	2965
50.8.1	Origem, Motivação e Extensões	2965
50.8.2	O Trabalho de Birkhoff-von Neumann	2967
50.8.3	Prova de uma Versão Parcial do Teorema de Kochen-Specker	2967
	Bibliografia	2973
		2992
	Índice Remissivo	2993

Prefácio



intenção básica deste livro é fornecer a estudantes de Física noções matemáticas necessárias a uma melhor compreensão de desenvolvimentos modernos da Física Teórica e da Matemática. Longe vai o tempo em que o conhecimento matemático requerido a um físico teórico restringia-se a certos métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais. Essa visão, porém, infelizmente impregna até o presente a concepção de certas disciplinas ditas de Física-Matemática (ou de Métodos Matemáticos da Física Teórica) e de certos maus livros sobre o tema. Em contraste, noções sobre Estruturas Algébricas, Topologia Geral, Teoria da Medida e da Integração, Geometria Diferencial, Teoria de Grupos, Teoria de Distribuições, Análise Funcional e Álgebras de Operadores são hoje imprescindíveis ao trabalho de um físico teórico.

Este livro cresceu a partir de notas de aula escritas pelo autor em diversas disciplinas ministradas na graduação e pós-graduação. Diversos de seus capítulos podem ser empregados em disciplinas de graduação ou pós-graduação, mas o mesmo foi concebido primordialmente para servir ao autoestudo de estudantes e docentes. De modo geral, o nível varia entre intermediário e avançado. Também de modo geral, o texto é de leitura autossuficiente, mas vez por outra algum estudo complementar é sugerido. A melhor maneira de um estudante conduzir-se no estudo de assuntos matemáticos é munindo-se de uma boa coleção de exemplos e contraexemplos de várias situações específicas, patologias, casos especiais etc. Além de servirem de auxílio à memória, exemplos ajudam a melhor entender a motivação de certas definições e a compreender restrições mencionadas em enunciados de teoremas. Dessa forma, procuramos sempre que possível apresentar (muitas vezes em exercícios!) um bom número de exemplos e contraexemplos para as várias situações tratadas.

Este texto, porém, não é substituto à leitura dos bons livros especializados nos diversos assuntos aqui tratados. Parte do material aqui apresentado pode ser encontrado em diversas fontes, citadas na bibliografia (página 2973), mas a apresentação e sua ordem são próprias. Há também neste texto demonstrações do próprio autor de resultados conhecidos que são, por alguma razão, dificilmente encontradas na literatura. Mas como comenta o autor de [308] no prefácio daquele livro, “qualquer livro-texto deve mais aos livros e notas de outros do que a seu autor nominal”.

Fazemos notar que este livro está ainda sendo trabalhado e alguns capítulos e seções podem vir a ser alterados, corrigidos, eliminados ou acrescidos de material. Além disso, novos capítulos serão escritos. O material já presente é, porém, útil a todos aqueles que queiram iniciar-se nos assuntos aqui expostos. Versões atualizadas serão colocadas na “rede” (no endereço acima indicado) sempre que possível.

O autor agradece a todos os que apresentarem sugestões. Fabulosas somas em dinheiro são oferecidas a todos aqueles que encontrarem erros no texto. Entre os já aquinhoados encontram-se Prof. Matheus Grasselli, Prof. Alexandre T. Baraviera, Prof. Marcos V. Travaglia, Daniel Augusto Cortez, Djogo F. C. Patrão, Cléber de Mico Muramoto, Profa. Katiúscia Nadyne Cassemiro, Urbano Lopes França Junior, Gustavo Barbagallo de Oliveira, Priscila Vieira Franco Gondeck, Darielder Jesus Ribeiro, Henrique Scemes Xavier, Prof. Daniel Augusto Turolla Vanzella, Leonardo Fernandes Dias da Motta, Krishnamurti José de Andrade, Prof. Pedro Tavares Paes Lopes, Diego Cortegoso Assêncio, Fleury José de Oliveira Filho, Paulo Henrique Reimberg, Fabíola Diacenco Xavier, Márcio André Prieto Aparício Lopez, Dorival Gonçalves Netto, Célia Santos Jordão Alves, Bruno Lima de Souza, Leandro Saccoletto, João Pedro Jericó de Andrade, Ronaldo da Silva Alves Batista, Carolina Dias Alexiou, Arão Benjamin Garcea, Cláudio Mayrink Verdun, Leonardo Hanao Gabriel, Felipe Contatto, Prof. Victor Bernardo Chabu, Bruno Hideki Kimura, Fabrizio Fogaça Bernardi, Alessandro Takeshi Morita Gagliardi, Cedrick Miranda Mello, Thiago Costa Raszeja, Pedro Rangel Caetano, Anderson Seigo Misobuchi, Leandro Silva Pimenta, Alexandre Homrich, Prof. Edélcio Gonçalves de Souza, Lissa de Souza Campos, Ricardo Correa da Silva, Leonardo Almeida Lessa, Marcos Carvalho Brum de Oliveira, Victor Luccas Ramalho Moura, Felipe Dilho Alves, Caio Lopes Junqueira Reis, Bernardo Leal de Oliveira, Jose Eduardo Rodrigues Martins Peres y Peres, Henrique Ay Casa Grande, Ana Camila Costa Esteves, Rafael Grossi e Fonseca, Louis Bergamo Radial, Níckolas de Aguiar Alves, e Pedro de Oliveira Freitas, aos quais somos muito gratos por correções e sugestões. Estas Notas foram escritas durante um intervalo longo de tempo, de sorte que alguns dos seus usuários são hoje colegas professores e fizemos menção a isso na lista acima, quando soubemos. Pedimos desculpas por eventuais omissões.

As Seções 21.B, página 1273, e 26.2.4.1, página 1493, foram originalmente escritas por Daniel Augusto Cortez. A Seção 45.9, página 2654, foi originalmente escrita por André M. Timpanaro, Fleury J. Oliveira e Paulo H. Reimberg. A eles dedicamos agradecimentos especiais.

Bons Mots

- ◇ *“All my life, I have worked as a scientist looking for situations where a little elegant mathematics can help us to understand nature. I found problems that I could solve with a teaspoonful of elegant mathematics, in physics and engineering and astronomy and biology. I never worried whether the problems were important or unimportant. So long as the mathematics was beautiful, I was happy”.*
Freeman J. Dyson (1923–2020), in “Playing with Numbers”, published in “One Hundred Reasons to be a Scientist”, Copyright 2004 by the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP).
- ◇ *“O comportamento de um físico em relação à Matemática é similar a de um ladrão inteligente em relação ao código penal: ele estuda apenas o suficiente para evitar punições”.*
I. M. Gelfand (1913–2009).
- ◇ *“The greatest enemy of knowledge is not ignorance, it is the illusion of knowledge”.*
Daniel J. Boorstin (1914–2004), também atribuído a Stephen W. Hawking (1942–2018).
- ◇ *“A mente não é um vaso a ser repleto, mas uma tocha a ser acesa”.*
Plutarco (46?–120).
- ◇ *“Mathematical proofs really aren’t there to convince you that something is true – they’re there to show you why it is true”.*
Andrew M. Gleason (1921–2008).
- ◇ *“It can be said with complete confidence that any scientist of any age who wants to make important discoveries must study important problems. Dull or piffling problems yield duff of piffling answers. It is not enough that a problem should be ‘interesting’ - almost any problem is interesting if it is studied in sufficient depth. ... No, the problem must be such that it matters what the answer is - whether to science generally or to mankind”.*
Peter Brian Medawar (1915–1987), ‘Advice to a Young Scientist’ (1979).
- ◇ *“Uma nova verdade científica nunca triunfa por conseguir convencer os adversários, mostrando-lhes a luz, mas porque esses adversários morrem e surge uma nova geração para a qual essa verdade é familiar”.*
Max Planck (1858–1947) in [428, 429].
“Uma inovação científica importante dificilmente conquista e converte gradualmente os seus oponentes: raramente acontece de Saulo transformar-se em Paulo. O que de fato ocorre é que seus oponentes desaparecem gradualmente e uma nova geração emergente familiariza-se com suas ideias desde o início. Por esta razão um planejamento adequado do ensino escolar é uma das condições mais importantes para o progresso da Ciência”.
Max Planck (1858–1947) in [430], pg. 53.
Essas ideias são conhecidas como *Princípio de Planck* e podem ser resumidas na afirmação que a Ciência progride um funeral por vez.
- ◇ *“The public has a distorted view of science, because children are taught in school that science is a collection of firmly established truths. In fact, science is not a collection of truths. It is a continuing exploration of mysteries”.*
Freeman Dyson (1923–2020), in *How We Know*, The New York Review of Books, March 10, 2011.
- ◇ *“When a theoretical physicist can not solve a problem he goes for the next more difficult one”.*
Sir Michael Francis Atiyah (1929–2019).
- ◇ *“Mathematics is not a deductive science – that’s a cliché. When you try to prove a theorem, you don’t just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial and error, experimentation, guesswork”.*
Paul R. Halmos, in [222].
- ◇ *“The source of all great mathematics is the special case, the concrete example. It is frequent in mathematics that every instance of a concept of seemingly great generality is in essence the same as a small and concrete special case”.*
Paul R. Halmos, in [222].
- ◇ *“Mathematics is a subarea of Applied Mathematics”.*
Peter Lax (1926–).
- ◇ *“Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap”.*
Vladimir I. Arnold (1937–2010). In “On teaching mathematics”. Address at the discussion on teaching of mathematics in Palais de Découverte in Paris on 7 March 1997.
- ◇ *“In science, self-satisfaction is death. Personal self-satisfaction is the death of the scientist. Collective self-satisfaction is the death of the research. It is restlessness, anxiety, dissatisfaction, agony of mind that nourish science”.*
Jacques Lucien Monod (1910–1976), in *New Scientist*, 1976.
- ◇ *“Um especialista é alguém que já cometeu todos os erros possíveis em um campo muito estreito”.*
Niels Bohr (1885–1962).
- ◇ *“Quem quer que, na busca da ciência, busque utilidade prática imediata pode ter certeza de que buscará em vão”.*
Hermann von Helmholtz (1821–1894).

- ◇ “*Não existe nenhuma categoria da Ciência à qual se possa dar o nome de Ciência Aplicada. O que existe são a Ciência e as aplicações da Ciência, intimamente ligadas, como frutos à árvore que os gerou.*”
Louis Pasteur (1822–1895), in “Pourquoi la France n'a pas trouvé d'hommes supérieurs au moment du péril”, Revue Scientifique (Paris, 1871).
- ◇ “*O acaso favorece a mente preparada.*”
Louis Pasteur (1822–1895).
- ◇ “*Teria a impressão de ter cometido um roubo se passasse um dia sem trabalhar.*”
Louis Pasteur (1822–1895).
- ◇ “*Temei o homem de um só livro.*”
Atribuído a São Tomás de Aquino (1225–1274).
- ◇ “*Disse Kant¹: ‘Eu afirmo que em cada Ciência Natural específica pode-se atingir somente tanto Conhecimento verdadeiro quanto nela houver de Matemática’. De fato, somente dominamos uma teoria das ciências naturais quando expomos seu núcleo matemático e o desvendamos completamente.*”
David Hilbert (1862–1943) em “Naturerkennen und Logik”, palestra apresentada em setembro de 1930, em Königsberg, em Congresso da Associação Alemã de Cientistas Naturais e Médicos.
- ◇ “*Não podemos nos permitir acreditar naqueles que em nossos dias, com cenho filosófico e em tom de superperiodidade, profetizam a decadência cultural e apologizam o Ignorabimus. Para nós não existe o Ignorabimus e, em minha opinião, também não para as Ciências Naturais. Em lugar do tolo Ignorabimus nosso lema é ‘Nós devemos saber, nós iremos saber’.*”
David Hilbert. *ibidem*.
- ◇ “*A geometry implies the heterogeneity of locus, namely that there is a locus of the Other. Regarding this locus of the Other, of one sex as Other, as absolute Other, what do the most recent developments in topology allow us to posit? I will posit here the term compactness. Nothing is more compact than a fault, assuming that the intersection of everything that is enclosed therein is accepted as existing over an infinite number of sets, the result being that the intersection implies this infinite number. That is the very definition of compactness.*”
Jacques Lacan (1901–1981), em *Le Séminaire Jacques Lacan*, Livre XX: Encore, 1972–1973. Texto organizado por Jacques-Alain Miller. Paris: Éditions du Seuil. Traduzido e citado por Alan Sokal e Paul Bricmont in *Intellectual Impostures*.
Para a definição de compacidade, vide Seção 33.3, página 1724.
- ◇ “*Ignorance more frequently begets confidence than does knowledge: it is those who know little, not those who know much, who so positively assert that this or that problem will never be solved by science.*”
Charles Robert Darwin (1809–1882), *The Descent of Man*.
- ◇ “*Um pesquisador não ‘crê’, ele simplesmente pesquisa. [...] Por deformação profissional, talvez. Em todo caso, como se fosse um jogo.*”
Georges Dumézil (1898–1986), filólogo, em entrevista a Laurence Gilbert, do “Le Point”, 1983.
- ◇ “*There is no such thing as a unique scientific vision, any more than there is a unique poetic vision. Science is a mosaic of partial and conflicting visions.*”
Freeman J. Dyson (1923–2020), [141], cap. I.
- ◇ “*For a physicist mathematics is not just a tool by means of which phenomena can be calculated, it is the main source of concepts and principles by means of which new theories can be created.*”
Freeman J. Dyson (1923–2020).
- ◇ “*For me, the important thing about quantum mechanics is the equations, the mathematics. If you want to understand quantum mechanics, just do the math. All the words that are spun around it don't mean very much. It's like playing the violin. If violinists were judged on how they spoke, it wouldn't make much sense.*”
Freeman J. Dyson (1923–2020).
- ◇ Lei das Eponímias de Stiegler: “*Nenhuma descoberta científica é nomeada em honra a seu verdadeiro autor original, inclusive esta.*”
Stephen Mack Stigler (1941–), estatístico americano. A “lei” acima é também atribuída a Mark Twain (1835–1910), Alfred North Whitehead (1861–1947), Carl Benjamin Boyer (1906–1976), Roger King Merton (1910–2003) etc.
* * * * *
- ◇ “*Unprovided with original learning, unformed in the habits of thinking, unskilled in the arts of composition, I resolved to write a book.*”
Edward Gibbon (1737–1794).
- ◇ “*Talvez eu não tenha tido êxito em fazer as coisas difíceis tornarem-se fáceis, mas pelo menos eu nunca fiz um assunto fácil tornar-se difícil.*”
F. G. Tricoli (1897–1978).
- ◇ “*There is nothing noble in being superior to your fellow men. True nobility lies in being superior to your former self.*”
Ernest Hemingway (1899–1961).
- ◇ “*... E costumava dizer que nenhum livro é tão ruim a ponto de nada conter de valor...*”
Plínio, o Novo (61–114), a respeito de seu tio, Plínio, o Velho (23–79).

¹Immanuel Kant (1724–1804).

- ◇ *“But the power of instruction is seldom of much efficacy, except in those happy dispositions where it is almost superfluous”.*
Edward Gibbon (1737–1794), in *The Decline and Fall of the Roman Empire*.
- ◇ *“Would I had phrases that are not known, utterances that are strange, in new language that has not been used, free from repetition, not an utterance that has grown stale, which men of old have spoken”.*
Khakheperresenb (ci. 1900 AC), escriba egípcio. Citado em “The Burden of the Past and the English Poet” de Walter Jackson Bate.
- ◇ *“Tudo que deveria ter sido dito já o foi, mas como ninguém ouvia, tudo tem de ser dito novamente”.*
André Paul Guillaume Gide (1869–1951).
- ◇ *“Uma obra nunca é terminada, ela é apenas abandonada”.*
Atribuído a Paul Valéry (1871–1945).

Como Ler Este Livro

“Reading made Don Quixote a gentleman. Believing what he read made him mad”.

George Bernard Shaw (1856–1950).

O leitor deste livro não deve possuir o temor de que o mesmo deva (nem a expectativa de que o mesmo possa) ser lido linearmente, ou seja, na sequência numérica crescente dos capítulos e seções. Ele não foi concebido dessa forma e tal concepção não seria exequível devido à variedade de assuntos, às diferenças de nível de abordagem e à complexidade das conexões entre os diferentes temas. O *Conhecimento* não é um conjunto totalmente ordenado pela relação de complexidade conceitual ou pela relação de motivação (para a definição da noção de ordem total em conjuntos, vide página 80).

Fizemos um esforço para tornar autosuficientes as diversas seções e os diversos capítulos, incluindo sempre que possível, por vezes de forma repetida, todas as definições localmente necessárias. Como é natural, porém, nem sempre é possível manter essa linha de organização, de modo que ocorrem também muitas referências cruzadas entre seções e capítulos.

Os diversos capítulos não foram escritos em ordem crescente de complexidade. Por vezes, a motivação para um determinado tema é apresentada em um capítulo anterior, mas por vezes essa motivação surge em um capítulo posterior. Nos capítulos sobre equações diferenciais, por exemplo, a discussão de aplicações em Física é postergada para o Capítulo 45, página 2583, e o leitor interessado na motivação para certos tratamentos pode sem perdas consultar esse capítulo antes ou durante o estudo de capítulos que lhe antecedem.

Um problema semelhante ocorre com temas ligados à Topologia e à Análise. Os capítulos dedicados a esses assuntos servem a capítulos que lhes sucedem, mas também, em parte, a capítulos que lhes antecedem. Cabe ao leitor perceber suas necessidades formativas, avançando ou retrocedendo na leitura conforme lhe aprouver. A consulta ao Índice Remissivo (página 2993) ou à lista de Capítulos e Seções que compõem o texto (página 6) deve ser de valia para tal.

Notação e Advertências

Para facilitar a consulta e a leitura, listamos aqui sem muitos comentários um pouco da notação que empregaremos nestas Notas.

- Se z é um número complexo denotaremos seu complexo conjugado por \bar{z} . A notação z^* (mais comum em textos de Física) pode ocorrer mais raramente.
- O símbolo $A := B$ ou $B =: A$ denota que A é definido pela expressão B . O símbolo $A \equiv B$ indica que A e B são duas notações distintas para o mesmo objeto.
- Sejam A e B conjuntos. Se A é um subconjunto de B , denotamos esse fato por $A \subset B$ ou por $B \supset A$. Por $A \subsetneq B$ ou $B \supsetneq A$ denotamos o fato de A ser um subconjunto próprio de B , ou seja, $A \subset B$, mas $A \neq B$.
- Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ são vetores reais com n componentes (ou seja, elementos de \mathbb{R}^n), então

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

define o chamado *produto escalar usual em \mathbb{R}^n* .

- Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ são vetores complexos com n componentes (ou seja, elementos de \mathbb{C}^n), então

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} := \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n$$

define o chamado *produto escalar usual em \mathbb{C}^n* .

- Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ são vetores complexos com n componentes (ou seja, elementos de \mathbb{C}^n), então

$$\beta(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

define a chamada *forma bilinear usual em \mathbb{C}^n* .

- $\text{Mat}(\mathbb{R}, m, n)$ ou $\text{Mat}(m, n, \mathbb{R})$ designa o conjunto de todas as matrizes reais $m \times n$ (m linhas e n colunas). Analogamente, $\text{Mat}(\mathbb{C}, m, n)$ ou $\text{Mat}(m, n, \mathbb{C})$ designa o conjunto de todas as matrizes complexas $m \times n$. O conjunto de todas as matrizes quadradas $n \times n$ com entradas reais (complexas) será denotado simplesmente por $\text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ (por $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$).
- Se A é um elemento de $\text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ ou de $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$, então A^T designa a matriz transposta de A , ou seja, a matriz cujos elementos de matriz ij são $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.
- Se A é um operador linear em um espaço vetorial complexo (com um certo produto escalar), seu adjunto é denotado por A^* . Em textos de Física é mais comum denotá-lo por A^\dagger , mas não usaremos isso aqui. Assim, se $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$, então A^* será a adjunta de A (em relação ao produto escalar usual, acima). O elemento de matriz ij de A^* será $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.
- Denotaremos o operador identidade agindo em um espaço vetorial (a matriz identidade, agindo em um espaço vetorial de dimensão finita) pelo símbolo $\mathbb{1}$. Esse símbolo também representará a unidade de uma álgebra.
- Designaremos um produto escalar entre dois vetores u e v sempre por $\langle u, v \rangle$ e nunca por (u, v) , para não causar confusão com a notação para par ordenado. Outra notação possível é aquela empregada frequentemente em textos de Mecânica Quântica: $\langle u | v \rangle$, mas faremos raramente uso da mesma.
- Ainda sobre produtos escalares, seguiremos sempre a convenção dos textos de Física: um produto escalar em um espaço vetorial sobre os complexos é linear em relação ao segundo argumento e antilinear em relação ao primeiro. Assim, se α e β são números complexos, teremos $\langle \alpha u, \beta v \rangle = \bar{\alpha} \beta \langle u, v \rangle$. Textos de Matemática adotam por vezes a convenção oposta (ou mesmo ambas!).
- Sobre o emprego das palavras *função, aplicação, mapeamento, mapa, funcional, operador, operação, produto e forma*, que por vezes causam perplexidade em estudantes, remetemos ao comentário à página 63.

- Dado um conjunto $X \neq \emptyset$, denota-se por $\mathbb{P}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos de X . $\mathbb{P}(X)$ é denominado o *conjunto das partes* de X .
- A topologia usual da reta real \mathbb{R} será denotada aqui por $\tau_{\mathbb{R}}$.
- A σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} será (quase sempre) denotada aqui por $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$.
- A σ -álgebra dos subconjuntos de \mathbb{R} mensuráveis por Lebesgue será (quase sempre) denotada aqui por \mathcal{M}_{μ_L} .
- Por \mathbb{N} denotamos o conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Por \mathbb{N}_0 denotamos o conjunto dos números naturais, incluindo o zero: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. O leitor deve ser advertido, porém, que essa convenção não é universal. O padrão ISO 31-11 (dedicado a sinais e símbolos matemáticos) recomenda a convenção $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. O leitor deve ter cuidado, portanto, ao comparar textos diferentes.
- Para $x \in \mathbb{R}$, o símbolo $\lfloor x \rfloor$ designa o maior inteiro menor ou igual a x . O símbolo $\lceil x \rceil$ designa o menor inteiro maior ou igual a x .

Em particular, para $n \in \mathbb{Z}$ valem

$$\lfloor n/2 \rfloor = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ (n-1)/2, & n \text{ ímpar}, \end{cases} \quad \lceil n/2 \rceil = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ (n+1)/2, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

- O símbolo \square indica o fim de um enunciado. O símbolo \blacksquare indica o fim de uma demonstração. O símbolo \spadesuit indica o fim do enunciado de um exercício. O símbolo \boxplus indica o fim do enunciado de um exemplo. O símbolo \clubsuit indica o fim de uma observação, nota ou comentário. O símbolo \spadesuit indica o fim de uma definição.
- $\mathcal{B}(X)$ designa o conjunto de operadores limitados agindo em um espaço de Banach X . $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ designa o conjunto de operadores limitados agindo em um espaço de Hilbert \mathcal{H} .
- $C(L)$ designa o conjunto de todas as funções contínuas (reais ou complexas, dependendo do caso), definidas em L (na topologia que se estiver considerando em L).
- $\mathfrak{B}(L)$ designa a coleção de todos os conjuntos Borelianos de L (em relação à topologia que se estiver considerando em L). $B_l(L)$ designa a coleção de todas as funções Borelianas (reais ou complexas, dependendo do caso), definidas em L .
- O domínio de um operador T (agindo em um espaço de Banach ou de Hilbert) será denotado por $D(T)$ ou por $\text{Dom}(T)$. A imagem (“range”) de T será denotada por $R(T)$ ou por $\text{Ran}(T)$ ou, mais raramente, por $\text{Im}(T)$, mas essa última notação pode causar confusão com a da parte imaginária de um número complexo ou mesmo com a da parte imaginária de um operador agindo em um espaço de Hilbert: $\text{Im}(T) := \frac{1}{2i}(T - T^*)$.
- A noção de *propriedade válida quase em toda parte* é definida na página 1562.

• **Intervalos**

Ainda não introduzimos os números reais nem a relação de ordem entre eles mas, como essas noções são conhecidas, vamos colocar aqui uma palavra sobre a nomenclatura usada para descrever intervalos da reta real. Para $a < b \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a < x < b\}$$

é dito ser um intervalo aberto. Para $a \leq b \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a \leq x \leq b\}$$

é dito ser um intervalo fechado. Para $a < b \in \mathbb{R}$ os conjuntos

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a \leq x < b\}$$

e

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a < x \leq b\}$$

são ditos ser intervalos semiabertos (ou semifechados).

É importante dizer que a nomenclatura “aberto” ou “fechado” acima é usada independentemente da topologia usada em \mathbb{R} (a noção de topologia será introduzida adiante).

Salvo menção em contrário, empregaremos por vezes as notações

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R}, x > 0\} = (0, \infty)$$

e

$$\mathbb{R}_{0+} := \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} = [0, \infty).$$

• **Delta de Krönecker**

De i e j pertencem a um conjunto contável C , definimos o chamado *delta de Krönecker* por

$$\delta_{ij} \equiv \delta^{ij} \equiv \delta_i^j \equiv \delta_j^i := \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

para todos $i, j \in C$. As diferentes notações δ_{ij} , δ^{ij} , δ_i^j e δ_j^i ocorrem, por exemplo, na Geometria Diferencial e na Teoria da Relatividade.

• **A esfera unitária**

Para $n \in \mathbb{N}_0$, denotaremos por \mathbb{S}^n a chamada *esfera unitária* em \mathbb{R}^{n+1} : o lugar geométrico de todos os pontos de \mathbb{R}^{n+1} situados a uma distância Euclidiana igual a 1 da origem:

$$\mathbb{S}^n := \left\{ (y^1, \dots, y^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sqrt{(y^1)^2 + \dots + (y^{n+1})^2} = 1 \right\}.$$

Note-se que $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$.

• **Classes C^k**

Por $C(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sejam contínuas. Por $C_0(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sejam contínuas e de suporte compacto.

Denotamos por $C^1(\mathbb{R})$ a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, diferenciáveis e com derivada contínua. Tais funções são ditas *funções continuamente diferenciáveis*, ou de *classe C^1* . Denotamos por $C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$ a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e cujas k primeiras derivadas $f', f'', \dots, f^{(k)}$ existam e sejam igualmente contínuas. Tais funções são ditas ser de *classe C^k* . Por $C^\infty(\mathbb{R})$ denotamos as funções infinitamente diferenciáveis (as quais serão, ocasionalmente, denominadas *funções suaves*). Por $C_0(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções contínuas e de suporte compacto. Por $C_0^\infty(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto.

As diversas notações acima estendem-se de forma natural a funções definidas em subconjuntos de \mathbb{R} , como intervalos abertos ou fechados, compactos ou não. Aqui, o estudante deve tomar certos cuidados. Por exemplo, $C((0, 1))$ contém, entre outras, funções contínuas que divergem em 0 e/ou em 1, mas $C([0, 1])$ só contém funções limitadas.

Por Que Precisamos de Demonstrações?

“My friend G. H. Hardy², who was professor of pure mathematics, enjoyed this pleasure [in mathematical demonstrations] in a very high degree. He told me once that if he could find a proof that I was going to die in five minutes he would of course be sorry to lose me, but this sorrow would be quite outweighed by pleasure in the proof”.
 Bertrand Russell (1872–1970).

Segundo os dicionários, *demonstrar*, ou *provar*, significa estabelecer que algo é correto ou verdadeiro por meio de raciocínio lógico e conclusivo, ou seja, livre de exceções ou de contradições. Uma dúvida que estranhamente acomete alguns estudantes iniciantes no estudo mais avançado de Matemática e Física é: por que é necessário demonstrar afirmações e resultados? Na resposta a essa questão podem ser listadas, naturalmente, razões ligadas à honestidade intelectual e mesmo razões ligadas à estética, mas o fato pragmático é que é muito fácil elaborar conjecturas que, à primeira vista, parecem plausíveis, mas que se revelam falaciosas. Apresentamos a seguir uma pequena, mas significativa, lista delas, algumas com relevância histórica.

Desejamos que essa pequena lista faça os estudantes refletir melhor antes de aceitar resultados não demonstrados.

- Considere a seguinte lista de números inteiros positivos³:

31	é um número primo,
331	é um número primo,
3331	é um número primo,
33331	é um número primo,
333331	é um número primo,
3333331	é um número primo,
33333331	é um número primo.

Isso parece sugerir um padrão: todo número da forma

$$\underbrace{3 \cdots 3}_m 1 \text{ para } m \in \mathbb{N},$$

m vezes

seria primo. Sucede, porém, que o número seguinte da lista (que corresponde a $m = 8$), ou seja, 333333331, não é um número primo, pois

$$333333331 = 17 \times 19.607.843.$$

- Outro exemplo similar, mas de certa forma oposto, provém da contemplação da seguinte lista de números:

12	não é um número primo,
121	não é um número primo,
1211	não é um número primo,
12111	não é um número primo,
121111	não é um número primo,
1211111	não é um número primo,
12111111	não é um número primo,
121111111	não é um número primo,
1211111111	não é um número primo.

Ela sugere que nenhum número da forma

$$12 \underbrace{1 \cdots 1}_m, \quad m \in \mathbb{N},$$

m vezes

²Godfrey Harold Hardy (1877–1947).

³Salvo menção contrária, todos os números que aqui apresentamos são representados na base decimal.

é primo. Essa conjectura é verdadeira até $m = 135$ (!), porém, ela falha, infelizmente, para $m = 136$, onde o número em questão revelou-se como primo! Esse número é da ordem de 10^{138} ! Isso é particularmente notável, pois os números primos vão se tornando mais e mais escassos quando crescem.

Comentário. Uma observação sobre os dois últimos exemplos. Um leitor experiente pode desconfiar que as conjecturas apresentadas acima não podem ser sempre corretas, se observar que a regularidade em números como $\underbrace{3 \cdots 3}_m 1$ ou $12 \underbrace{1 \cdots 1}_m$, ou seja, a repetição sucessiva do dígito 3 ou do dígito 1, só ocorre na representação na base decimal, não existindo em outras bases. O fato de um número ser ou não primo não pode depender da base que é usada em sua representação. ♣

- *Números de Fermat.* Considere-se a sequência $F_n := 2^{2^n} + 1$, com $n = 0, 1, 2, \dots$. Os números F_n são conhecidos como *números de Fermat*⁴. É fácil constatar que eles são primos para $n = 0, 1, 2, 3, 4$. De fato, $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65.537$, todos primos.

Isso levou Fermat a conjecturar em 1650 que todo F_n seria primo. Porém, Euler⁵ verificou em 1732 que $F_5 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417$ e, portanto, F_5 não é primo!

Como os números F_n crescem muito violentamente com n , a verificação de suas propriedades é extremamente difícil, mesmo com os computadores atuais. Até a data presente (2024) os únicos F_n conhecidos por serem primos são justamente os listados acima: F_0, F_1, F_2, F_3 e F_4 . Mais de três centenas de números de Fermat puderam ser fatorizados e, portanto, sabe-se que não são primos.

É uma questão ainda em aberto se há infinitos números primos dentre os números de Fermat.

E. 0.1 *Exercício.* Resolva essa questão. *

- *Números de Eisenstein.* Eisenstein⁶ conjecturou que todos os números da sequência $2^2 + 1, 2^{2^2} + 1, 2^{2^{2^2}} + 1, 2^{2^{2^{2^2}}} + 1$ seriam primos. Eles são definidos iterativamente por $E_{n+1} = 2^{E_n} + 1, n \in \mathbb{N}$, com $E_1 = 2^2 + 1$. Os três primeiros números dessa lista são 5, 17, 65537, os quais, de fato, são primos.

Devido ao fato de os números de Eisenstein crescerem muito violentamente, somente com o advento dos primeiros computadores foi possível dar alguns passos na questão de saber se outros números de Eisenstein eram primos.

Infelizmente, Selfridge⁷ verificou em 1953, usando um computador, que $E_4 = 2^{2^{2^{2^2}}} + 1$ não é primo, pois é divisível por 825.753.601. É uma questão ainda em aberto saber se há infinitos números primos na lista proposta por Eisenstein.

E. 0.2 *Exercício.* Resolva essa questão. *

- *Números de Mersenne.* Os *números de Mersenne*⁸ são números da forma $M_n := 2^n - 1, n \in \mathbb{N}$. Por diversas razões, é uma questão relevante encontrar números primos dentre eles. Uma coisa que facilmente se vê é que se n não é primo, então M_n também não pode ser primo. De fato, se $n = rs$ com r e s naturais e maiores que 1, então é elementar constatar que

$$M_{rs} = 2^{rs} - 1 = (2^r - 1)(1 + 2^r + 2^{2r} + 2^{3r} + \dots + 2^{(s-1)r}).$$

Verifique! Isso claramente diz que M_{rs} não é primo. Assim, cabe perguntar quais números da forma $M_p = 2^p - 1$ com p primo são eles também primos. Tais números primos são denominados *primos de Mersenne*. Originalmente conjecturou-se que todos os números M_p , com p primo, seriam também primos, pois M_2, M_3, M_5 e M_7 o são. Um primeiro contraexemplo surge com $p = 11$, pois $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$, que, assim, não é primo.

É uma questão ainda aberta (2024) saber se há infinitos primos de Mersenne.

E. 0.3 *Exercício.* Resolva essa questão. *

⁴Pierre de Fermat (1607–1665).

⁵Leonhard Euler (1707–1783).

⁶Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823–1852).

⁷John Lewis Selfridge (1927–2010).

⁸Marin Mersenne (1588–1648).

Essa questão é relevante pois gerar números primos “grandes” é importante em Criptografia e é simples gerar números de Mersenne⁹ e relativamente simples, algoritmicamente, determinar seus eventuais fatores primos. Atualmente (2024) são conhecidos 51 primos de Mersenne, o maior deles sendo $M_{82.589.833}$, que é um número da ordem de $10^{24.862.048}$. Os maiores números primos hoje conhecidos são primos de Mersenne.

- É fácil verificar que $3^2 + 4^2 = 5^2$ e que $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Isso parece sugerir um padrão, mas infelizmente tem-se $3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 \neq 7^4$.

Inspirado na possibilidade sugerida pelos dois primeiros casos, Euler lançou em 1769 uma conjectura: se existirem $n + 1$ números naturais A_1, \dots, A_n, B tais que para algum $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$(A_1)^k + \dots + (A_n)^k = B^k,$$

então deve sempre valer que $n \geq k$. Como exemplo, tomemos

$$30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4,$$

onde $n = k = 4$.

Um contraexemplo à conjectura de Euler foi encontrado apenas em 1966. Com auxílio de um dos primeiros supercomputadores, L. J. Lander and T. R. Parkin puderam constatar¹⁰ que

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5,$$

onde $n = 4$ mas $k = 5$ e, portanto, $n < k$. Outro contraexemplo, com $n = 3$ e $k = 4$, é

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4,$$

encontrado por Elkies¹¹ junto a infinitos outros contraexemplos¹².

A conjectura acima foi conhecida como *conjectura de Euler para soma de potências*, e é relacionada à célebre *última conjectura de Fermat*. Para mais sobre essa conjectura de Euler, vide a seção 21.11 de [226].

Os exemplos de conjecturas falhas, acima, são todos provenientes da Aritmética, mas há também conjecturas plausíveis, e erradas, em outras áreas. Seguem alguns exemplos.

- Considere-se a conjectura que sugere que para todo $n \in \mathbb{N}$ valha

$$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{k}\right) \right) \frac{\text{sen}(4x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \approx 1,57079632679 \dots$$

Essa conjectura está correta para todo n entre 1 e 30. Porém, para $n = 31$ tem-se

$$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^{31} \cos\left(\frac{x}{k}\right) \right) \frac{\text{sen}(4x)}{x} dx = 1,57079632533 \dots \neq \frac{\pi}{2}.$$

Observe que a diferença entre os resultados inicia nos três últimos dígitos, ou seja, é da ordem de 10^{-9} !

- A fórmula

$$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^n \frac{\text{sen}(x/(2k-1))}{x/(2k-1)} \right) dx = \frac{\pi}{2}$$

vale para todo $n = 1, 2, \dots, 7$. Porém, para $n = 8$ tem-se

$$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^8 \frac{\text{sen}(x/(2k-1))}{x/(2k-1)} \right) dx = \left(\frac{467.807.924.713.440.738.696.537.864.469}{935.615.849.440.640.907.310.521.750.000} \right) \pi.$$

⁹Na representação binária, usada internamente em computadores digitais, os números de Mersenne são todos da forma $M_n = \underbrace{1 \dots 1}_n$.

¹⁰L. J. Lander and T. T. Parkin, “Counterexample to Euler’s conjecture on sums of like powers”. Bull. Amer. Math. Soc. **72** (6): 1079 (1966). doi:10.1090/S0002-9904-1966-11654-3.

¹¹Noam David Elkies (1966–).

¹²N. Elkies, “On $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$ ”. Mathematics of Computation. **51**, 184: 825-835 (1988). doi:10.1090/S0025-5718-1988-0930224-9.

O fator entre parenteses na última expressão difere de $1/2$ por cerca de $7,35 \times 10^{-12}$.

As integrais acima são conhecidas como *integrais de Borwein*¹³¹⁴ e delas se constroem exemplos ainda mais dramáticos¹⁵. Por exemplo, a identidade

$$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^n \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{100k+1}\right)}{\frac{x}{100k+1}} \right) \frac{\text{sen}(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$$

é válida para todo $n < 9,8 \times 10^{42}$ e seguramente falha para $n > 7,4 \times 10^{43}$. É impossível verificar esses fatos por computador e os mesmos requerem demonstrações. Vide artigo de John Baez¹⁶ in [36] e outros exemplos e referências lá listados.

¹³David Borwein (1924–2021), Jonathan Michael Borwein (1951–2016) e Peter Benjamin Borwein (1953–2020). David Borwein era pai dos outros dois e os três colaboravam.

¹⁴A referência original é David Borwein and Jonathan M. Borwein, “Some remarkable properties of sinc and related integrals”. *The Ramanujan Journal*, **5** (1): 73–89, (2001), doi:10.1023/A:1011497229317.

¹⁵Para uma referência, vide Hanspeter Schmid, “Two curious integrals and a graphic proof”. *Elem. Math.* **69** 11–17 (2014).

¹⁶John Carlos Baez (1961–).

Parte I

Capítulos Introdutórios