# Capítulo 22

# Grupos de Lie e Álgebras de Lie. Uma Breve Introdução

## Sumário



Este capítulo pretende ser uma modesta introdução ao estudo de grupos e álgebras de Lie. Algumas observações prévias são necessárias. Para a discussão do conceito geral de grupo de Lie são indispensáveis algumas noções básicas sobre espaços topológicos. Para tal, vide Capítulos 25, 28, 31 e 33, páginas 1410, 1528, 1615 e 1697, respectivamente, assim como outras referências lá citadas. De relevância especial é a noção de variedade diferenciável. Esse importante conceito, proveniente da Geometria, desempenha um papel em várias áreas de Física, tais como a Teoria da Relatividade Geral e as Teorias de Calibre. O conceito de variedade diferenciável nasceu inspirado na noção mais familiar de superfície em espaços $\mathbb{R}^n$ e não se desvincula totalmente daquela. Não pressuporemos da parte do leitor conhecimento prévio do conceito de variedade diferenciável e, por isso, vamos introduzí-lo adiante. Não iremos, no entanto, desenvolver esse assunto em detalhe no presente capítulo e, para tal, remetemos o estudante interessado aos Capítulos 34, 35 e 37, páginas 1802, 1871 e 2013, respectivamente, e aos (inúmeros) bons livros sobre Geometria Diferencial, por exemplo, aqueles listados no Capítulo 34.

Trataremos primordialmente de grupos de Lie matriciais, o que simplifica um pouco o tratamento e reduz um tanto o escopo destas notas introdutórias. No entanto, a grande maioria dos grupos de Lie de interesse (especialmente em Física) é formada por grupos de Lie matriciais. Para o tratamento de grupos de Lie matriciais discutiremos com certo detalhe aspectos algébricos e topológicos de grupos de matrizes.

Mais de 100 anos de pesquisa intensa nos separam dos primórdios do estudo dos grupos e álgebras de Lie e nossas pretensões aqui são a de uma modesta introdução a esse vastíssimo assunto. Para tratamentos gerais e abrangentes de grupos de Lie recomendamos as referências [431], [394], [93], [217], [298], [559], [244], [245], [43], [402] ou [488]. Para álgebras de Lie, recomendamos [273] e [461]. Alguns textos clássicos são [561], [562] e [576] .

Vários grupos de Lie são importantes na Física e seu tratamento é particularmente importante na Mecânica Quântica e nas Teorias Quânticas de Campos. Exemplos de grupos de Lie importantes para a Física são discutidos com certo detalhe no Capítulo 21, tais como os grupos SO(3), SU(2) e o grupo de Lorentz. Aplicações de Grupos de Lie à Física das Partículas Elementares podem ser vistas, por exemplo, em [189] e [436]. Aplicações à Teoria das Equações Diferenciais podem ser encontradas em [408] e [552]. Para aplicações à Mecânica Quântica, destacamos [223].

# 22.1 Variedades e Grupos de Lie

• **Variedades diferenciáveis**

Uma *variedade diferenciável* real de dimensão $n$ é um espaço topológico Hausdorff segundo-contável $V$ dotado de uma família de abertos $\mathcal{F} = \{U_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ ($\Lambda$ sendo um conjunto em princípio arbitrário de índices) com as seguintes propriedades:

1. $V = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$.
2. Para cada $U_\alpha \in \mathcal{F}$ existe um conjunto aberto $C_\alpha$ de $\mathbb{R}^n$ e uma bijeção contínua com inversa contínua $\phi_\alpha : U_\alpha \to C_\alpha$.
3. Para todo par $U_\alpha,\ U_\beta \in \mathcal{F}$ com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ a função

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \ \ \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \ \to \ \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é infinitamente diferenciável como função de (um subconjunto de) $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$.

Uma discussão mais extensa da noção de variedade é feita no Capítulo 34, página 1802. Lá discutimos, por exemplo, a necessidade de acrescentar à definição de variedade a condição de ser um espaço topológico segundo-contável ou paracompacto.

Uma *variedade analítica* complexa de dimensão $n$ é definida analogamente, substituindo-se $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{C}^n$ e substituindo-se a condição de diferenciabilidade infinita do item 3, acima, por analiticidade.

*Observação 1.* Acima, $\Lambda$ é apenas um conjunto de índices usados para rotular os elementos de $\mathcal{F}$ e não tem nenhum papel especial. $\Lambda$ pode ser finito ou não, contável ou não.

*Observação 2.* As funções $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ acima são denominadas *funções de transição.* Em uma *variedade $k$-diferenciável* exige-se apenas que as funções de transição sejam $k$-vezes diferenciáveis. Esses objetos têm, porém, interesse relativamente limitado.

*Observação 3.* Os pares $(\phi_\alpha,\ U_\alpha)$ são frequentemente denominados *cartas locais* da variedade ou simplesmente *cartas.* A coleção das cartas é frequentemente denominada *atlas.*

*Observação 4.* Um espaço topológico com a propriedade 2 é dito *localmente euclidiano.* Vide Capítulo 34, página 1802.

Vamos à interpretação das condições acima. A condição 1 diz apenas que a família $\{U_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ é um recobrimento de $V$, ou seja, todo elemento de $V$ pertence a pelo menos um aberto $U_\alpha$, podendo naturalmente ocorrer que alguns pontos de $V$ pertençam a vários elementos da família $\mathcal{F}$, ou seja, os elementos de $\mathcal{F}$ podem ter intersecções não-vazias. A condição 2 é importante e diz que os elementos de cada $U_\alpha$ podem ser rotulados (univocamente) por uma $n$-upla de números reais (ou complexos). Ou seja, podemos dotar cada $U_\alpha$ de um *sistema de coordenadas.* Note que esses sistemas podem ser diferentes para $U_\alpha$'s diferentes. Como dissemos, pontos de $V$ podem pertencer a vários $U_\alpha$'s e, portanto, podem ter a si atribuídas coordenadas diferentes, uma para cada $U_\alpha$ ao qual pertence. Assim, os pontos de $U_\alpha \cap U_\beta$ têm a si atribuídos pelo menos dois sistemas de coordenadas: as coordenadas $C_\alpha$ de $U_\alpha$ e as coordenadas $C_\beta$ de $U_\beta$. A condição 3 diz-nos como esses sistemas de coordenadas devem relacionar-se, a saber, o que se deseja é que a passagem das coordenadas $C_\beta$ para as coordenadas $C_\alpha$, a qual é definida pela função $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$, seja infinitamente diferenciável (ou analítica).

Como mencionamos, a conceito de variedade foi inspirado na noção de superfície em conjuntos como $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$. Sem entrarmos em detalhes técnicos, toda superfície em $\mathbb{R}^n$ convenientemente definida (tais como a superfície da esfera e o toro, em $\mathbb{R}^3$) é uma variedade, ou seja, tem um sistema de coordenadas local. Isso pode ser garantido, por exemplo, pelo conhecido teorema da função implícita da análise real. Note-se porém que variedades não são apenas conjuntos de pontos, como as superfícies de $\mathbb{R}^n$ o são, podendo ser também conjuntos de outros tipos de objetos, como funções, curvas, vetores, matrizes etc. A ideia intuitiva básica em torno da noção de variedade é que a mesma representa uma coleção contínua de objetos que podem ser rotulados por sistemas de coordenadas e de tal forma que possamos, ao menos localmente, manipular essas coordenadas de modo (infinitamente) diferenciável, como se faz em $\mathbb{R}^n$.

**E. 22.1** *Exercício*. Mostre que o conjunto de matrizes $\left\{R = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a\end{smallmatrix}\right),\ a,\ b \in \mathbb{R} \text{ com } \det(R) = 1\right\}$ é uma variedade diferenciável de dimensão 1. ✠

## • Grupos topológicos

Vamos agora apresentar a definição de *grupo topológico*, da qual precisaremos para discutir grupos de Lie.

Seja $G$ um grupo. Para cada $g \in G$ podemos definir uma função $\lambda_g : G \to G$ por $\lambda_g(h) := gh$. A função $\lambda_g$ é denominada *multiplicação à esquerda* (por $g \in \mathbb{G}$) Fora isso tem-se também em $G$ a função $\text{inv} : G \to G$ definida por $\text{inv}(h) := h^{-1}$.

**Definição.** Um grupo $G$ é dito ser um *grupo topológico* em relação a uma topologia $\tau$ definida em $G$ se nessa topologia a função inv e todas as funções $\lambda_g$ forem contínuas. ♠

*Comentário*. Podemos definir também para cada $g \in G$ a função $\rho_g : G \to G$ por $\rho_g(h) = hg$, que representa a *multiplicação à direita* por $g \in G$. É fácil de se ver, porém, que $\rho_g = \text{inv} \circ \lambda_{g^{-1}} \circ \text{inv}$. Portanto, se inv for contínua, as funções $\rho_g$, $g \in G$, serão todas contínuas se e somente se todas as funções $\lambda_g$, $g \in G$, forem contínuas. Dessa forma, em um grupo topológico as funções $\rho_g$ são contínuas. ♣

*Comentário*. Um grupo pode ser topológico em relação a uma topologia mas não em relação a outra. Veremos exemplos. ♣

Informalmente, um grupo $G$ é topológico se as operações de produto por elementos do grupo e inversão forem contínuas.

Em termos mais precisos um grupo topológico é formado por um grupo $G$ e uma coleção $\mathfrak{G}$ de subconjuntos de $G$, $\mathfrak{G} \subset \mathbb{P}(G)$, satisfazendo as condições definidoras de um Espaço Topológico (vide Capítulo 28):

1. $\emptyset \in \mathfrak{G}$ e $G \in \mathfrak{G}$,
2. Se $\mathcal{A} \in \mathfrak{G}$ e $\mathcal{B} \in \mathfrak{G}$ então $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in \mathfrak{G}$,
3. Se $I$ é um conjunto arbitrário de índices e $\mathcal{A}_\lambda \in \mathfrak{G}$ para todo $\lambda \in I$ então $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in I} \mathcal{A}_\lambda$ também é um elemento de $\mathfrak{G}$,

e tais que para todo $\mathcal{O} \in \mathfrak{G}$ as imagens inversas $\text{inv}^{-1}(\mathcal{O})$ e $\lambda_g^{-1}(\mathcal{O})$, para todo $g \in G$, são igualmente elementos de $\mathfrak{G}$.

Os elementos de $\mathfrak{G}$ são ditos ser os conjuntos abertos de $G$. Como em geral se faz em espaços topológicos, um conjunto $\mathcal{F} \subset G$ é dito ser *fechado* se seu complementar $G \setminus \mathcal{F}$ for aberto.

## • Grupos de Lie

Um grupo topológico que, enquanto espaço topológico, seja uma variedade real diferenciável (complexa analítica) é dito ser um *Grupo de Lie*[1] real (complexo) se as operações de multiplicação à esquerda e inversão forem infinitamente diferenciáveis (analíticas).

**E. 22.2** *Exercício*. Verifique que $(\mathbb{R},\ +)$ (o grupo aditivo dos reais) e $(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\},\ \cdot\ )$ (o grupo multiplicativo dos reais não-negativos) são grupos de Lie reais. ✠

**E. 22.3** *Exercício*. Verifique que $\left\{R = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a\end{smallmatrix}\right),\ a,\ b \in \mathbb{R} \text{ com } \det(R) = 1\right\}$ é um grupo de Lie real. ✠

Na Seção 22.3.2, página 1287, mostraremos com detalhe que $\text{GL}(n,\ \mathbb{C})$ é um grupo de Lie. Mais exemplos importantes

[1] Marius Sophus Lie (1842-1899). Lie introduziu esse conceito em cerca de 1870 em seus estudos de propriedades de invariância de equações diferenciais parciais.

são apontados na Seção 22.3.5.1, página 1299, muitos dos quais são discutidos com mais detalhe no Capítulo 21, página 1114.

### • Diferenciabilidade ou apenas continuidade? Nota para um estudante mais avançado

Na definição que apresentamos de grupo de Lie ocorre a exigência de a multiplicação à esquerda e a inversão serem infinitamente diferenciáveis. Essa é também a postura da maioria dos livros-texto e corresponde às hipóteses originais de Lie (a referência [43] exige que essas aplicações sejam real-analíticas). Em uma famosa e muito influente palestra proferida em 1900 no Congresso Internacional de Matemática em Paris, Hilbert[2] questionou a necessidade dessa imposição de diferenciabilidade. Em suas palavras, *"Até que ponto o conceito de Lie de grupos contínuos de transformações é acessível em nossas investigações sem a suposição da diferenciabilidade das funções?"*. Essa questão ficou conhecida como *Quinto Problema de Hilbert*[3].

A resposta a esse problema foi apresentada na década de 1950 por Gleason[4], Montgomery[5] e Zippin[6], e pode ser resumida na seguinte afirmação (na formulação de [43]): todo grupo topológico localmente Euclidiano é isomorfo a um grupo de Lie real-analítico. Uma demonstração desse profundo resultado pode ser encontrada em [379]. Assim, supormos que um grupo é uma variedade diferenciável (analítica) com as funções de multiplicação à esquerda e inversão contínuas (sem a suposição de diferenciabilidade) é suficiente para que essas operações sejam infinitamente diferenciáveis e até real-analíticas, ou seja, que o grupo seja um grupo de Lie, segundo nossa definição.

A razão profunda por trás disso é parcialmente revelada em um contexto mais simples, na prova (originalmente devida a von Neumann) da Proposição 22.6, página 1289: a suposição das propriedades de grupo e de continuidade são fortes o suficiente para garantir diferenciabilidade.

Por fim, o motivo de a maioria dos textos assumir explicitamente diferenciabilidade ou analiticidade das funções de multiplicação à esquerda e inversão é que essas hipóteses são suficientes para a obtenção dos principais resultados da teoria dos grupos de Lie e reduzí-las a hipóteses mais básicas obrigaria moralmente os autores a apresentar uma demonstração dos resultados profundos e difíceis de Gleason, Montgomery e Zippin, um dispensável desvio de rota.

A realidade é que o Quinto Problema de Hilbert, por maior que seja o prestígio de seu formulador e por maiores que tenham sido os esforços para resolvê-lo, não tem consequências de monta para a Teoria de Grupos, sendo a ele reservada uma importância conceitual.

### • Há grupos de Lie não matriciais

Em quase a totalidade deste capítulo, especialmente na Seção 22.3, página 1286, lidaremos com grupos de Lie que são grupos de matrizes, ou seja, subgrupos de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, para algum $n \in \mathbb{N}$, que sejam também grupos de Lie. Tais grupos compõem a grande maioria dos grupos de interesse e certas demonstrações são neles facilitadas pelo emprego de resultados de Álgebra Linear (como aqueles descritos no Capítulo 11, página 652).

Ao estudante devemos ressalvar, porém, que há grupos de Lie que não são grupos matriciais, nem são isomorfos a grupos de Lie matriciais, ou possuem representações fieis[7] como grupos matriciais. Um exemplo de livro-texto é o seguinte:

**E. 22.4** *Exercício-exemplo.* Considere-se a variedade diferenciável tridimensional $\mathscr{L} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ e adote-se nela a topologia usual. (Aqui descrevemos o círculo unitário $\mathbb{S}^1$ com o conjunto das fases $e^{i\phi}$, com $\phi \in (-\pi, \pi])$. Seja definido em $\mathscr{L}$ o seguinte produto:

$$\left(a_1, b_1, e^{ic_1}\right) \cdot \left(a_2, b_2, e^{ic_2}\right) := \left(a_1 + a_2, b_1 + b_2, e^{i(c_1+c_2+a_1b_2)}\right),$$

para todos $a_1, a_2, b_2, b_2 \in \mathbb{R}$ e $c_1, c_2 \in (-\pi, \pi]$. Mostre que esse produto é associativo, tem por elemento neutro $(0, 0, 1) \in \mathscr{L}$ e a inversa de cada elemento $\left(a, b, e^{ic}\right) \in \mathscr{L}$ é $\left(-a, -b, e^{i(ab-c)}\right) \in \mathscr{L}$. Com essa operação, $\mathscr{L}$ é, portanto, um grupo. Mostre que se trata de um grupo de Lie. Esse grupo é comutativo? ✠

Podemos nos perguntar se $\mathcal{L}$ é isomorfo a um grupo Lie matricial, e a resposta é não. Uma demonstração encontra-se em [217] (seção 4.8 daquela referência) e faz uso de propriedades elementares do grupo de Heisenberg $\mathrm{GH}_3(\mathbb{R})$, discutidas na Seção 21.2.2.1, página 1127, com o qual o grupo $\mathscr{L}$ é aparentado

[2] David Hilbert (1862–1943).
[3] Para a palestra original de Hilbert, listando esse e outros problemas, vide, *e.g.*, https://en.wikisource.org/wiki/Mathematical_Problems
[4] Andrew Mattei Gleason (1921–2008).
[5] Deane Montgomery (1909–1992).
[6] Leo Zippin (1905–1995).
[7] Uma representação $\rho : H \to \mathrm{GL}(V)$ de um grupo $H$ em um espaço vetorial $V$ é dita fiel se for injetiva.

# 22.2 Breves Considerações sobre Grupos Topológicos

Nesta seção nos limitaremos a apresentar alguns poucos resultados sobre grupos topológicos, dos quais faremos uso adiante ao tratarmos de grupos de Lie. O estudo de grupos topológicos gerais é bastante vasto e para um texto clássico recomendamos fortemente [431].

Introduzimos aqui a seguinte notação. Seja $G$ um grupo topológico. Se $U$ é algum subconjunto de $G$ e $g \in G$ definimos

$$gU \ := \ \{x \in G | \ x = gu \text{ para algum } u \in U\} \ .$$

Analogamente,

$$Ug \ := \ \{x \in G | \ x = ug \text{ para algum } u \in U\} \ .$$

**E. 22.5** *Exercício*. Se $U$ é um conjunto aberto de $G$ mostre que para todo $g \in G$ os conjuntos $gU$ e $Ug$ são também conjuntos abertos de $G$. ✠

• **Grupos topológicos conexos e desconexos**

Um grupo topológico $H$ é dito ser *desconexo* se for a união disjunta de dois conjuntos $A$ e $B$, ambos não-vazios e ambos simultaneamente abertos e fechados. Ou seja, $H = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ com $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, onde $A$ e $B$ são abertos e fechados. Um grupo topológico $H$ é dito ser *conexo* se não for desconexo.

• **Alguns fatos sobre grupos topológicos**

Vamos aqui provar alguns fatos básicos sobre grupos topológicos gerais. Faremos uso da Proposição 22.3 abaixo quando falarmos da relação entre álgebras de Lie matriciais e álgebras de Lie.

Seja $H$ um grupo topológico e $G \subset H$ um subgrupo de $H$. Dizemos que $G$ é um *subgrupo topologicamente aberto* de $H$ (ou simplesmente *subgrupo aberto* de $H$) se $G$ for um subconjunto aberto de $H$. Analogamente, dizemos que $G$ é um *subgrupo topologicamente fechado* de $H$ (ou simplesmente *subgrupo fechado* de $H$) se $G$ for um subconjunto fechado de $H$. A seguinte proposição é relevante nesse contexto.

**Proposição 22.1** *Seja $H$ um grupo topológico e $G$ um subgrupo aberto de $H$. Então, $G$ é igualmente um subgrupo fechado de $H$.* □

Prova. Seja $g' \in \overline{G}$, onde $\overline{G}$ é o fecho de $G$. Então, se $U_{g'}$ é qualquer aberto de $H$ que contém $g'$, tem-se $U_{g'} \cap G \neq \emptyset$ (Proposição 28.9, página 1547). Vamos escolher cuidadosamente um tal aberto $U_{g'}$. Seja $U_e$ um aberto de $H$ que contém a identidade. Como $G$ é aberto, $V = U_e \cap G$ é igualmente aberto. Escolhemos $U_{g'} = g'V := \{x \in H, \ x = g'v \text{ para algum } v \in V\}$. Então, como $U_{g'} \cap G \neq \emptyset$ existe algum elemento $g \in G$ que é também elemento de $U_{g'}$, ou seja, $g = g'v$ para algum elemento $v \in V$. Isso, todavia, implica que $g' = gv^{-1}$. Agora, $v \in V = U_e \cap G \subset G$ e, portanto, $g' \in G$ por ser o produto de dois elementos de $G$, que é um grupo. ■

**Proposição 22.2** *Seja $H$ um grupo topológico conexo e $G$ um subgrupo aberto de $H$. Então, $G = H$.* □

Prova. Vamos supor que $G \neq H$, ou seja, $H \setminus G \neq \emptyset$. Como $G$ é um conjunto aberto e fechado (pela proposição anterior) $H \setminus G = H \cap G^c$ é um conjunto aberto e fechado. Assim, $H$ é a união disjunta de dois conjuntos abertos e fechados, a saber $G$ e $H \setminus G$. Isso é uma contradição com o fato de $H$ ser conexo. Logo, $G = H$. ■

**Proposição 22.3** *Seja $H$ um grupo topológico conexo e $U$ um aberto de $H$ que contém a identidade e que seja tal que para todo $u \in U$ tem-se $u^{-1} \in U$. Então,*

$$H \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n \ ,$$

*onde $U^1 := U$ e $U^n := \Big\{x \in H \Big| \ x = u_n \cdots u_1 \text{ para } u_i \in U, \ i = 1, \ \ldots, \ n\Big\}$, $n > 1$.* □

Prova. Todos os conjuntos $U^n$ são conjuntos abertos. Isso é fácil de se ver. De fato,

$$U^2 = \bigcup_{u_2 \in U} u_2 U$$

e, assim, $U^2$ é aberto, pois é uma união de abertos (vide exercício à página 1284). Analogamente,

$$U^n = \bigcup_{u_n \in U} u_n U^{n-1} , \qquad n > 2 . \tag{22.1}$$

Por indução, segue facilmente que todo $U^n$ é aberto.

Assim $\mathcal{U} := \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ é igualmente um conjunto aberto (por ser uma união de abertos). Se provarmos que $\mathcal{U}$ é um grupo, a proposição anterior garante a prova desejada.

É evidente que $\mathcal{U}$ contém a identidade $e$ (que está contida em $U$). Fora isso, se $g_1 \in U^{n_1}$ e $g_2 \in U^{n_2}$, então $g_1 = u_{n_1} \cdots u_1$ e $g_2 = u'_{n_2} \cdots u'_1$ para certos $u_i$ e $u'_i \in \mathcal{U}$. Logo, $g_1 g_2 = u_{n_1} \cdots u_1 u'_{n_2} \cdots u'_1$, mostrando que $g_1 g_2 \in U^{n_1+n_2} \subset \mathcal{U}$. Finalmente, se $g \in U^n$ e $g = u_n \cdots u_1$, então $g^{-1} = u_1^{-1} \cdots u_n^{-1} \in U^n \subset \mathcal{U}$. Isso completa a prova que $\mathcal{U}$ é um grupo. ■

Informalmente, a Proposição 22.2 diz que se $H$ é um grupo topológico conexo, então qualquer aberto $\mathcal{U}$ que contém a identidade *gera* o grupo $H$, ou seja, todo elemento de $H$ pode ser escrito como o produto finito de elementos de $\mathcal{U}$.

*Observação.* Como a identidade $e$ é um elemento de $U$, segue facilmente de (22.1) que $U^{n-1} \subset U^n$ para todo $n \geq 1$. ♣

Seja $H$ um grupo topológico. Dizemos que uma coleção de conjuntos abertos $\mathcal{A}_\lambda \in H$, $\lambda \in \Lambda$, é um *recobrimento* de $H$ se

$$H = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda .$$

Um grupo topológico é dito ser *compacto*[8] se possuir a seguinte propriedade: para todo recobrimento $\mathcal{A}_\lambda \in H$, $\lambda \in \Lambda$, de $H$ existir um subconjunto finito $\mathcal{A}_{\lambda_1}, \ldots, \mathcal{A}_{\lambda_n}$ de conjuntos abertos que também é um recobrimento de $H$:

$$H = \mathcal{A}_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \mathcal{A}_{\lambda_n} .$$

A seguinte proposição é imediata:

**Proposição 22.4** *Seja $H$ um grupo topológico conexo e compacto e seja $U$ um aberto de $H$ que contém a identidade e que seja tal que para todo $u \in U$ tem-se $u^{-1} \in U$. Então, existe um $n$ tal que*

$$H = U^n .$$

□

Prova. Como $H$ é conexo, pela Proposição 22.3 tem-se $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$. O lado direito é, portanto, um recobrimento de $H$ por abertos. Assim, como $H$ é compacto, $H$ tem um recobrimento finito pelos abertos $U^n$: existem $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ tais que $H = U^{n_1} \cup \cdots \cup U^{n_k}$. Como $U^{n_1} \subset \cdots \subset U^{n_k}$, tem-se $H = U^{n_k}$, como queríamos provar. ■

*Comentário*. Na proposição acima, a igualdade $H = U^n$ afirma que todo elemento de $H$ é obtido por um produto de no máximo $n$ elementos de $U$. O número $n$ é dependente de $U$ e é intuitivo dizer que quanto "menor" for o aberto $U$ que contém a identidade, maior será $n$. ♣

## • Continuidade uniforme de funções em grupos topológicos

Seja $G$ um grupo topológico. Uma função $f : G \to \mathbb{C}$ é dita ser *uniformemente contínua*se para cada $\epsilon > 0$ existir uma vizinhança aberta $V_\epsilon$ do elemento neutro de $G$ tal que $\left|f(g) - f(h)\right| \leq \epsilon$ sempre que $g$ e $h$ pertencerem a $V_\epsilon$.

A seguinte afirmação é importante no presente contexto.

[8]Para a definição da noção de compacidade e suas propriedades, vide Seção 33.3, página 1724.

**Proposição 22.5** *Seja $G$ um grupo topológico. Seja $f_1 : G \to \mathbb{C}$ uma função uniformemente contínua e seja $f_2 : G \to G$ uma função contínua com $f_2(e) = e$. Então, a função composta $f_1 \circ f_2 : G \to \mathbb{C}$ é uma função uniformemente contínua.* □

Prova. Como $f_1$ é uniformemente contínua, existe para cada $\epsilon > 0$ uma vizinhança aberta $V_\epsilon$ do elemento neutro de $G$ tal que $\big|f_1(g) - f_1(h)\big| \leq \epsilon$ sempre que $g$ e $h$ pertencerem a $V_\epsilon$. Defina-se $W_\epsilon := f_2^{-1}(V_\epsilon)$. Trata-se de um aberto em $G$, pois $V_\epsilon$ é aberto e $f_2$ contínua. Além disso, $e \in W_\epsilon$, pois $e \in V_\epsilon$ e $f_2(e) = e$. Logo, se $g$ e $h$ são ambos elementos de $W_\epsilon$, teremos $f_2(g) \in V_\epsilon$ e $f_2(h) \in V_\epsilon$. Portanto, valerá também $\big|f_1 \circ f_2(g) - f_1 \circ f_2(h)\big| \leq \epsilon$, completanto a prova que $f_1 \circ f_2 : G \to \mathbb{C}$ é uma função uniformemente contínua. ■

# 22.3 Grupos de Lie Matriciais

Nosso objetivo nesta seção e nas que se seguem é introduzir os grupos de Lie matriciais e discutí-los. Trataremos de alguns exemplos ilustrativos com algum detalhe, começando com o grupo $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$. Comentemos que essencialmente todas as nossas afirmações adiante sobre $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ são também válidas para o grupo real $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$.

## 22.3.1 Uma Topologia Métrica em $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$

Como preparação, façamos alguns comentários topológicos sobre $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$. A topologia métrica de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ discutida na Seção 11.1, página 653, pode ser introduzida naturalmente em $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$, que afinal é um subconjunto de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$, ao definirmos para $A,\ B \in \mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ a métrica $d(A,\ B) = \|A - B\|$, sendo $\|\cdot\|$ a norma operatorial de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$. Mostremos que $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ é um conjunto aberto e denso de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$.

• $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ **é um conjunto aberto de** $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$

É relevante notarmos que $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ não é um subconjunto fechado de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$. Isso se vê tomando o exemplo da sequência de matrizes diagonais $2 \times 2$ da forma $A_m = \begin{pmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{N}$, sequência essa formada por elementos de $\mathrm{GL}(2,\ \mathbb{C})$ mas que converge para a matriz nula, que obviamente não é elemento de $\mathrm{GL}(2,\ \mathbb{C})$.

Em verdade, $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ é um conjunto aberto de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$. Para mostrar isso temos que provar[9] que se $A \in \mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ e $B$ é uma matriz tal que $\|B - A\|_{\mathbb{C}}$ é suficientemente pequena, então $B$ é inversível e, portanto, também pertence a $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$. Observemos que $B = A\big(\mathbb{1} + A^{-1}(B - A)\big)$. Se provarmos que $\mathbb{1} + A^{-1}(B - A)$ é inversível então teremos que $B^{-1}$ existe, sendo dada por $\big(\mathbb{1} + A^{-1}(B - A)\big)^{-1} A^{-1}$.

Escolhendo $B$ próximo o suficiente de $A$ de modo que $\|B - A\|_{\mathbb{C}} < 1/\|A^{-1}\|_{\mathbb{C}}$ então $A^{-1}(B - A)$ terá norma menor que 1 e, portanto, $\mathbb{1} + A^{-1}(B - A)$ tem uma inversa dada pela série de Neumann[10] convergente[11]

$$\big(\mathbb{1} + A^{-1}(B - A)\big)^{-1} \;=\; \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \big(A^{-1}(B - A)\big)^m \ .$$

Isso prova que $B$ tem inversa e completa a prova que $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ é um conjunto aberto.

**E. 22.6** *Exercício.* Há uma maneira alternativa "rápida" de provar que $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ é um conjunto aberto. Pela Proposição 11.18, página 691, a função $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n) \ni A \mapsto \det(A) \in \mathbb{C}$ é contínua em qualquer norma matricial. Conclua que $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ é um conjunto aberto, observando para tal que se trata do conjunto de todas as matrizes complexas com determinante não-nulo e notando que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{C}$. ✠

[9] Vide a definição de conjunto aberto em espaços métricos dada à página 1433.
[10] Karl Neumann (1832-1925).
[11] A justificativa dessa expressão foi apresentada na Seção 11.2. Note que a expansão de Taylor da função analítica $\frac{1}{1+z}$ para $|z| < 1$ em torno de $z = 0$ é precisamente $1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m z^m$.

• $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ **é denso em** $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$

Provemos que todo elemento de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ pode ser aproximado em norma por uma matriz inversível. Isso equivale a dizer que $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ é denso em $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$. Seja $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ e seja $\sigma(A) = \{\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_r\}$ o conjunto de seus autovalores distintos ($r \leq n$). É claro que se $\alpha \notin \sigma(A)$ então $\det(\alpha\mathbb{1} - A) \neq 0$ e $A - \alpha\mathbb{1}$ tem inversa (recorde que os autovalores de $A$ são os zeros do polinômio característico de $A$). Seja agora, $\alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de números complexos tais que $\alpha_n \notin \sigma(A)$ para todo $n$, e tais que $\alpha_n \to 0$ para $n \to \infty$. Teremos que as matrizes $A_n := A - \alpha_n\mathbb{1}$ são todas inversíveis e $d(A,\ A_n) = \|A - A_n\| = |\alpha_n|\,\|\mathbb{1}\| = |\alpha_n| \to 0$ para $n \to \infty$. Isso prova nossa afirmação.

### 22.3.2 O Grupo de Lie $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$

Nesta seção mostraremos que $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ é um grupo de Lie. Para isso mostraremos primeiro que $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ é um grupo topológico e depois que é uma variedade analítica, para então mostrar que o produto e a inversão são analíticos. Esses resultados, além de importantes em si, servem ao propósito pedagógico de ilustrar os conceitos de grupo topológico e de variedade.

• $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ **é um grupo topológico**

Para provarmos que $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ é um grupo topológico precisamos mostrar que o produto em $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ e a inversão de matrizes em $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ são operações contínuas.

Sejam $G,\ G',\ H \in \mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$. Temos que

$$\|G'H - GH\|_{\mathbb{C}} \ = \ \|(G'-G)H\|_{\mathbb{C}} \ \leq \ \|G'-G\|_{\mathbb{C}}\|H\|_{\mathbb{C}} \ ,$$

mostrando que $\|G'H - GH\|_{\mathbb{C}} \to 0$ se $\|G'-G\|_{\mathbb{C}} \to 0$. Assim, o produto à esquerda é contínuo.

Sejam agora $G,\ H \in \mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$. Fixemos $H$ e tomemos $\|G-H\|_{\mathbb{C}} < \epsilon$ com $\epsilon > 0$ escolhido pequeno o suficiente de modo que $\epsilon\|H^{-1}\|_{\mathbb{C}} < 1$. É claro que $G = H + (G-H) = H(\mathbb{1} + H^{-1}(G-H))$, de maneira que $G^{-1} = \big[\mathbb{1} + H^{-1}(G-H)\big]^{-1} H^{-1}$. Logo,

$$G^{-1} - H^{-1} \ = \ \Big\{\big[\mathbb{1} + H^{-1}(G-H)\big]^{-1} - \mathbb{1}\Big\} H^{-1}.$$

Assim, como pela escolha de $\epsilon$ temos $\|H^{-1}(G-H)\|_{\mathbb{C}} \leq \epsilon\|H^{-1}\|_{\mathbb{C}} < 1$, podemos escrever

$$G^{-1} - H^{-1} \ = \ \left[\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \big[H^{-1}(G-H)\big]^m\right] H^{-1} \ .$$

A justificativa dessa expressão[12] foi apresentada na Seção 11.2. Tem-se, então,

$$\|G^{-1} - H^{-1}\|_{\mathbb{C}} \ \leq \ \left[\sum_{m=1}^{\infty} \|H^{-1}\|_{\mathbb{C}}^m \, \|G-H\|_{\mathbb{C}}^m\right] \|H^{-1}\|_{\mathbb{C}} \ \leq \ \frac{\epsilon\|H^{-1}\|_{\mathbb{C}}^2}{1 - \epsilon\|H^{-1}\|_{\mathbb{C}}} \ .$$

Portanto $\|G^{-1} - H^{-1}\|_{\mathbb{C}} \to 0$ quando $\|G-H\|_{\mathbb{C}} \to 0$, provando a continuidade da operação de inversão de matrizes. Isso completa a prova que $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ é um grupo topológico.

**E. 22.7** *Exercício*. Há uma maneira alternativa "rápida" de provar que a operação de inversão é contínua: use a regra de Laplace, expressão (10.20), página 534, para calcular a inversa de uma matriz e evoque o fato que o determinante é contínuo. ✠

• $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ **é uma variedade analítica**

Vamos agora mostrar que $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ é uma variedade analítica. Seja, para cada $\epsilon > 0$, o subconjunto $\mathcal{C}_\epsilon$ de $\mathbb{C}^{n^2}$ definido por

$$\mathcal{C}_\epsilon \ := \ \Big\{(x_{11},\ \ldots,\ x_{1n},\ x_{21},\ \ldots,\ x_{2n},\ \ldots,\ x_{n1},\ \ldots,\ x_{nn}) \in \mathbb{C}^{n^2} \text{ com } |x_{ij}| < \epsilon \text{ para todos } i,\ j = 1,\ \ldots,\ n\Big\} \ .$$

[12] Note que a expansão de Taylor da função analítica $\frac{1}{1+z} - 1$ para $|z| < 1$ em torno de $z = 0$ é precisamente $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m z^m$.

Para $x = (x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nn}) \in \mathcal{C}_\epsilon$, denotemos por $X$ a matriz cujo elemento $ij$ é $X_{ij} = x_{ij}$ e denotemos $\mathbb{1} + X$ por $A(x)$. Obviamente $A(x)_{ij} = \delta_{ij} + x_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

É bem claro que cada $\mathcal{C}_\epsilon$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^{n^2}$. Seja também $\mathcal{U}_\epsilon := \{A(x) \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n) |\, x \in \mathcal{C}_\epsilon\}$.

**E. 22.8** *Exercício*. Mostre que cada $\mathcal{U}_\epsilon$ é um subconjunto aberto de $\mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n)$. ✠

É bem claro que para toda matriz $A(x)$ como acima tem-se $\det\big(A(x)\big) = 1 + p(x)$, onde $p(x)$ é um polinômio nas variáveis $x_{ij}$ que se anula quanto todas as $x_{ij}$ são nulas. Assim, se $x \in \mathcal{C}_\epsilon$ vê-se que $\det\big(A(x)\big) \neq 0$ caso $\epsilon$ seja pequeno o suficiente, pois isso garante que $|p(x)| < 1$. Portanto, se escolhermos $\epsilon$ pequeno o suficiente, teremos que $\mathcal{U}_\epsilon$ é um subconjunto aberto de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, o que suporemos daqui por diante.

Seja agora $g$ uma matriz arbitrária de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ e seja

$$U_g \;=\; \big\{gA(x), \text{ com } A(x) \in \mathcal{U}_\epsilon\big\} \,.$$

Pela notação que apresentamos quando discutimos grupos topológicos, $U_g = g\mathcal{U}_\epsilon$, e $U_g$ é um aberto de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Fora isso, $g \in U_g$, pois $\mathbb{1} = A(0) \in \mathcal{U}_\epsilon$. Concluímos que

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \;=\; \bigcup_{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})} U_g \,,$$

ou seja, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ possui um recobrimento por abertos.

Vamos agora mostrar que cada $U_g$ é bijetivamente mapeado em um aberto de $\mathbb{C}^{n^2}$. Isso é bem simples pois, se para cada $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ definirmos funções $\phi^g_{ij} : U_g \to \mathbb{C}$ por

$$\phi^g_{ij}\big(gA(x)\big) \;=\; \phi^g_{ij}(g + gX) \;:=\; (gX)_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n \,,$$

ou seja,

$$\phi^g_{ij}\big(gA(x)\big) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} g_{ik}x_{kj}, \qquad i, j = 1, \ldots, n \,,$$

vemos facilmente que todo $h \in U_g$ é da forma $h_{ij} = g_{ij} + \phi^g_{ij}\big(gA(x)\big)$. Assim, o conjunto $C_g \subset \mathbb{C}^{n^2}$ formado pelas variáveis $\overline{x_{ij}} = \sum_{k=1}^{n} g_{ik}x_{kj}$ com $x_{ij} \in \mathcal{C}_\epsilon$ é um sistema de coordenadas para $U_g$.

Por fim, para todo $h \in U_g \cap U_{g'}$, teremos $h = gA(x) = g'A(x')$, ou seja, $A(x') = (g')^{-1}gA(x)$ e

$$x'_{ij} \;=\; -\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{n} \big[(g')^{-1}g\big]_{ik} (\delta_{kj} + x_{kj}) \;=\; \big((g')^{-1}g - \mathbb{1}\big)_{ij} + \sum_{k=1}^{n} \big[(g')^{-1}g\big]_{ik} x_{kj} \,,$$

o que mostra que as coordenadas $x'$ são expressas em termos de polinômios nas variáveis $x$. Portanto, a mudança nas coordenadas de $U_g$ para as de $U_{g'}$ é expressa em termos de funções analíticas (em verdade, polinômios). Isso provou que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ é uma variedade analítica.

### • $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ é um grupo de Lie

Para finalmente provarmos que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ é um grupo de Lie, resta-nos provar que a multiplicação à esquerda e a inversão são analíticas. A primeira parte é elementar. Tomemos $g, h \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Os elementos de $U_h$ são da forma $hA(x)$ e os de $gU_h$ são da forma $ghA(x) \in U_{gh}$. Agora, as funções de $\mathcal{C}_\epsilon$ em $\mathbb{C}$ dadas por

$$\mathcal{C}_\epsilon \ni x \mapsto \phi^{gh}_{ij}\big(ghA(x)\big) \;=\; \sum_{k=1}^{n} (gh)_{ik}x_{kj} \,, \qquad i, j = 1, \ldots, n \,,$$

são polinômios nas variáveis $x_{ij}$ e, portanto, são analíticas. Assim, o produto é analítico.

Para provar que a inversão é analítica tomemos $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Um elemento genérico de $U_g$ é da forma $gA(x) = g(\mathbb{1} + X)$. Agora,

$$\big(gA(x)\big)^{-1} \;=\; (\mathbb{1} + X)^{-1}g^{-1} \;=\; g^{-1}\big(\mathbb{1} + gY(x)g^{-1}\big), \qquad \text{com } Y(x) \;:=\; \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m X^m \,.$$

Cada elemento de matriz de $Y(x)$ é uma função analítica dos $x_{ij}$, pois a série de Neumann[13] acima converge absolutamente (claramente, temos que escolher $\epsilon$ pequeno o suficiente). Agora, as funções

$$\mathcal{C}_\epsilon \ni x \mapsto \phi_{ij}^{g^{-1}}\left(\big(gA(x)\big)^{-1}\right) = \phi_{ij}^{g^{-1}}\Big(g^{-1}\big(\mathbb{1} + gY(x)g^{-1}\big)\Big) = \big(gY(x)g^{-1}\big)_{ij}$$

são funções analíticas dos $x_{ij}$, provando que a aplicação de inversão é analítica. Isso estabelece finalmente que $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ é um grupo de Lie de dimensão $n^2$.

**E. 22.9** *Exercício*. Há uma maneira alternativa "rápida" de provar que a operação de inversão é analítica: use a regra de Laplace, expressão (10.20), página 534, para calcular a inversa de uma matriz e evoque o fato que o determinante é analítico. ✠

Na Seção 22.3.5.1, página 1299, apresentaremos mais alguns exemplos de grupos matriciais, subgrupos de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$, que são grupos de Lie: os grupos $\mathrm{SL}(n,\ \mathbb{C})$ e os grupos de invariâncias de formas bilineares e sesquilineares. Esses exemplos abarcam muitos dos grupos estudados no Capítulo 22.3.5.1, página 1299, e são de forte interesse na Geometria e na Física. Esses fatos são decorrência do importante Teorema 22.2, página 1296, apresentado e demonstrado na Seção 22.3.5, página 1296, que afirma que subgrupos fechados de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ são também grupos de Lie.

### 22.3.3 Subgrupos Uniparamétricos e seus Geradores Infinitesimais

Subgrupos uniparamétricos são muito importantes na teoria dos grupos de Lie. Vamos apresentá-los no caso de matrizes.

**Definição.** Um *subgrupo uniparamétrico* de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ é um homomorfismo contínuo[14] do grupo $(\mathbb{R},\ +)$ em $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$. Em outras palavras, é uma função que a cada $t$ real associa continuamente uma matriz inversível $\gamma(t)$ de modo que

$$\gamma(t)\gamma(t') = \gamma(t+t') \tag{22.2}$$

para todos $t,\ t' \in \mathbb{R}$. Note que de (22.2) segue automaticamente que $\gamma(0) = \mathbb{1}$ (por quê?). ♠

A importância dos subgrupos uniparamétricos reside na seguinte proposição, a qual também começa a revelar a relevância das exponenciais de matrizes na teoria dos grupos de Lie.

**Proposição 22.6** *Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ um subgrupo uniparamétrico contínuo. Então, existe uma matriz $M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$, univocamente definida, tal que $\gamma(t) = \exp(tM)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Esse fato, em particular, mostra que $\gamma$ é real-analítica (e, portanto, diferenciável) e que $M = \gamma'(0)$. A matriz $M$ é dita ser o gerador infinitesimal do subgrupo uniparamétrico $\gamma$.* □

**Prova.**[15] Se supuséssemos que $\gamma$ é uma matriz diferenciável próximo a $t = 0$, teríamos que para qualquer $t$

$$\gamma'(t) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\big(\gamma(t+s) - \gamma(t)\big) = \gamma(t)\left(\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\big(\gamma(s) - \gamma(0)\big)\right) = \gamma(t)\gamma'(0)\ .$$

Definindo $M := \gamma'(0)$, concluiríamos que $\gamma$ satisfaz a equação diferencial $\gamma'(t) = \gamma(t)M$, cuja solução é única (vide Capítulo 14) e dada por $\gamma(t) = \exp(tM)$, como queríamos provar.

A demonstração estaria completa, não fosse o fato de que no enunciado supomos apenas que $\gamma$ é contínua, o que em geral não implica que $\gamma$ seja também diferenciável em $t = 0$. É, no entanto, possível provar que se $\gamma$ é contínua, então pelo fato de ser um homomorfismo de $(\mathbb{R},\ +)$ segue que $\gamma$ é também diferenciável próximo a $t = 0$! A ideia é construir a partir de $\gamma$ uma função $\tilde{\gamma}$ infinitamente diferenciável e posteriormente mostrar que $\gamma$ pode ser recuperada de $\tilde{\gamma}$ por operações diferenciáveis.

Para tal seja $\theta$ uma função real, positiva infinitamente diferenciável, com suporte compacto contendo $t = 0$ e tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\theta(s)ds = 1\ .$$

[13] Karl Neumann (1832-1925).
[14] Vide nota à página 1292.
[15] Extraída de [244]. A observação de que no enunciado da Proposição 22.6 é suficiente supor-se que o subgrupo uniparamétrico $\gamma$ é apenas contínuo (dispensando uma condição de diferenciabilidade) é devida a von Neumann (John von Neumann (1903–1957)).

Um exemplo de uma tal função seria (para $a < 0 < b$)

$$\theta(s) \;=\; \begin{cases} K\exp\left(-\frac{1}{(s-a)^2(s-b)^2}\right), & \text{para } s\in(a,\ b) \\ 0, & \text{de outra forma,} \end{cases}$$

que tem suporte $[a,\ b] \ni 0$. Uma escolha conveniente da constante $K$ garante que $\int_{-\infty}^{\infty}\theta(s)ds = 1$.

Assim, seja uma tal função $\theta$ desse tipo e com suporte em, digamos, $[-a,\ a]$ para algum $a > 0$, e seja

$$\tilde{\gamma}(t) \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty}\theta(t-s)\gamma(s)ds \;.$$

É fácil (Exercício!) ver que $\tilde{\gamma}$ assim definida é infinitamente diferenciável. Fora isso,

$$\tilde{\gamma}(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\theta(t-s)\gamma(s)ds \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\theta(u)\gamma(t-u)du \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\theta(u)\gamma(t)\gamma(-u)du \;=\; \gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty}\theta(u)\gamma(-u)du \;=\; \gamma(t)Y \;,$$

com $Y := \int_{-\infty}^{\infty}\theta(u)\gamma(-u)du$. Temos que

$$Y - \mathbb{1} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\theta(u)(\gamma(-u)-\mathbb{1})du \;,$$

pois $\int_{-\infty}^{\infty}\theta(u)du = 1$, por hipótese. Logo,

$$\|Y-\mathbb{1}\|_{\mathbb{C}} \;\leq\; \int_{-\infty}^{\infty}\theta(u)\,\|\gamma(-u)-\mathbb{1}\|_{\mathbb{C}}\,du \;=\; \int_{-a}^{a}\theta(u)\,\|\gamma(-u)-\mathbb{1}\|_{\mathbb{C}}\,du \;\leq\; c\int_{-a}^{a}\theta(u)\,du \;=\; c\int_{-\infty}^{\infty}\theta(u)\,du \;=\; c \;,$$

onde $c := \sup_{u\in[-a,\ a]}\|\gamma(-u)-\mathbb{1}\|_{\mathbb{C}}$. Como $\gamma$ é contínua e $\gamma(0) = \mathbb{1}$, podemos fazer $c$ arbitrariamente pequena, escolhendo $a$ pequeno. Isso, no entanto, diz que $Y = \mathbb{1} - (\mathbb{1} - Y)$ é inversível, com $Y^{-1}$ dado pela série convergente $\sum_{m=0}^{\infty}(\mathbb{1}-Y)^m$. Assim, com $a$ pequeno teremos $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)Y^{-1}$, o que prova que $\gamma(t)$ é infinitamente diferenciável. ■

**Definição.** O que essa proposição provou é que todo subgrupo uniparamétrico contínuo de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ é da forma $\exp(tM)$ para alguma matriz $M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$. Essa matriz $M$ é dita ser o *gerador infinitesimal* do subgrupo uniparamétrico em questão. ♠

Comentemos brevemente que a Proposição 22.6, que acabamos de provar, tem generalizações importantes na teoria dos espaços de Hilbert e de Banach, onde é conhecida como Teorema de Stone[16]. Vide, por exemplo, [439].

- **A coleção de todos os geradores infinitesimal de subgrupos uniparamétricos**

Seja $G$ um subgrupo de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$. Seja definido o seguinte conjunto:

$$\mathcal{L}(G) \;:=\; \left\{M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)\middle|\ \exp(tM)\in G,\quad \forall t\in\mathbb{R}\right\} .$$

Analogamente, seja $G$ um subgrupo de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$. Seja definido o seguinte conjunto:

$$\mathcal{L}(G) \;:=\; \left\{M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R},\ n)\middle|\ \exp(tM)\in G,\quad \forall t\in\mathbb{R}\right\} .$$

Em palavras, $\mathcal{L}(G)$ é a coleção de todos os geradores infinitesimais de todos os subgrupos uniparamétricos de $G$. É claro, pela definição, que $\mathcal{L}(G)$ contém sempre pelo menos a matriz nula (pois $\exp(t0) = \mathbb{1} \in G$, $\forall t \in \mathbb{R}$), mas não é nem um pouco evidente que esse não seja o único elemento de $\mathcal{L}(G)$. Por exemplo, se $G$ for um grupo discreto então $\mathcal{L}(G) = \{0\}$. Mesmo no caso de $G$ ser um grupo contínuo não é nada óbvio que $G$ possua subgrupos uniparamétricos não-triviais. Logo abaixo estudaremos essa questão no caso do grupo $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ e, um pouco mais adiante, no caso de subgrupos fechados (não-discretos) de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$. Em tais casos veremos que $\mathcal{L}(G)$ não consiste apenas na matriz nula.

[16]Marshall Harvey Stone (1903-1989).

Chamamos a atenção do estudante para o fato que, para um grupo $G$ genérico, não é necessariamente verdade que todo elemento de $G$ pode ser escrito na forma $\exp(tM)$ para algum $M \in \mathcal{L}(G)$ e algum $t \in \mathbb{R}$. Ou seja, existem grupos $G$ nos quais encontram-se elementos que não pertencem a nenhum subgrupo uniparamétrico de $G$. Na Proposição 11.11, página 667, vimos que isso ocorre no grupo real $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, pois esse grupo não é conexo, mas esse fenômeno pode ocorrer mesmo em grupos conexos. Um exemplo será discutido na página 1315, adiante.

*

A coleção de todos os geradores infinitesimais de todos os subgrupos uniparamétricos de um dado grupo $G$ é um objeto muito importante, especialmente na teoria dos grupos de Lie. Discutiremos esse fato adiante. No caso do grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ podemos facilmente identificar o que é $\mathcal{L}\big(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})\big)$. Faremos isso agora.

• **Subgrupos uniparamétricos de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ e a álgebra de Lie associada a $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$**

A coleção de todos os geradores infinitesimais de todos os subgrupos uniparamétricos do grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ será denotada aqui por $\mathcal{L}\big(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})\big)$ ou por $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$. Vamos identificar esse conjunto.

Na Proposição 11.12, página 667, demonstramos que todo elemento $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ pode ser escrito na forma $A = \exp(B)$ para algum $B \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C}, n)$. Consequentemente, $A$ pertence ao subgrupo uniparamétrico composto pelas matrizes da forma $\exp(tB)$, $t \in \mathbb{R}$. Assim, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ possui subgrupos uniparamétricos não-triviais. Reciprocamente, para todo $B \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C}, n)$ o conjunto de matrizes da forma $\exp(tB)$, $t \in \mathbb{R}$, forma um subgrupo uniparamétrico de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Concluímos disso que a álgebra de Lie de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ é

$$\mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) \;=\; \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C}, n) \;.$$

Já discutimos por diversas vezes (vide página 148 e seguintes) que o conjunto $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C}, n)$ é uma álgebra de Lie com relação ao produto definido pelo comutador de matrizes. Um pouco mais adiante, veremos que esse fato é geral: o conjunto de todos os geradores infinitesimais de um subgrupo fechado (não-discreto) de um grupo de Lie é também uma álgebra de Lie. Esse fato é de importância central na teoria dos grupos de Lie.

**E. 22.10** *Exercício*. Para $a, b = 1, \ldots, n$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, sejam $\gamma_\alpha^{ab}(t)$, matrizes definidas da seguinte forma:

$$\gamma_\alpha^{ab}(t) \;:=\; \begin{cases} \mathbb{1} + \alpha t E^{ab}, & \text{para } a \neq b \;, \\[2mm] \mathbb{1} + (e^{\alpha t} - 1)E^{aa}, & \text{para } a = b \;, \end{cases} \qquad \text{com } t \in \mathbb{R} \;.$$

Aqui $E^{ab}$ é a matriz cujos elementos $ij$ são dados por $\big(E^{ab}\big)_{ij} = \delta_{i\,a}\delta_{j\,b}$, ou seja, $E^{ab}$ é a matriz cujos elementos de matriz são todos nulos, exceto o elemento $ab$, que vale $1$. Mostre que as matrizes $\gamma_\alpha^{ab}$ são subgrupos uniparamétricos de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, ou seja, que $\gamma_\alpha^{ab}(t)$ são contínuas e que $\gamma_\alpha^{ab}(t)\gamma_\alpha^{ab}(t') = \gamma_\alpha^{ab}(t + t')$ para todo $a$, $b$ e todo $\alpha$. (*Sugestão:* mostre que $\big(E^{ab}\big)^2 = \delta_{ab}E^{ab}$ e use esse fato). Mostre que seus geradores infinitesimais são as matrizes $\alpha E^{ab}$. Constate também explicitamente que $\gamma_\alpha^{ab}(t) = \exp\big(\alpha t E^{ab}\big)$. ✠

Note que a coleção formada por todas combinações lineares reais dos geradores infinitesimais dos subgrupos uniparamétricos $\gamma_\alpha^{ab}$ de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ coincide com $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C}, n)$ (por quê?).

• **Constantes de estrutura para $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$**

**E. 22.11** *Exercício dirigido importante*. Determinação das constantes de estrutura da álgebra de Lie $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$.

Dado que $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C}, n)$ podemos adotar o conjunto $\big\{E^{ab},\ a, b \in \{1, \ldots, n\}\big\}$ como uma base em $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ e determinar as constantes de estrutura dessa álgebra de Lie nessa base. Para os elementos de matriz, dos elementos da base temos $\big(E^{ab}\big)_{ij} = \delta_{i\,a}\delta_{j\,b}$. Assim,

$$\big[E^{ab},\ E^{cd}\big]_{ij} \;=\; \sum_{l=1}^{n}\Big(\big(E^{ab}\big)_{il}\big(E^{cd}\big)_{lj} - \big(E^{cd}\big)_{il}\big(E^{ab}\big)_{lj}\Big) \;=\; \sum_{l=1}^{n}\left(\delta_{i\,a}\delta_{l\,b}\delta_{l\,c}\delta_{j\,d} - \delta_{i\,c}\delta_{l\,d}\delta_{l\,a}\delta_{j\,b}\right)$$

$$=\; \delta_{i\,a}\delta_{b\,c}\delta_{j\,d} - \delta_{i\,c}\delta_{a\,d}\delta_{j\,b} \;=\; \delta_{b\,c}\big(E^{ad}\big)_{ij} - \delta_{a\,d}\big(E^{cb}\big)_{ij} \;,$$

ou seja,

$$\big[E^{ab},\ E^{cd}\big] \;=\; \delta_{b\,c}E^{ad} - \delta_{a\,d}E^{cb}\;. \tag{22.3}$$

Isso pode ser reescrito na forma

$$\big[E^{ab},\ E^{cd}\big] \;=\; \sum_{i,\,j=1}^{n} c_{(ij)}{}^{(ab)(cd)}E^{ij}$$

com

$$c_{(ij)}{}^{(ab)(cd)} \;=\; \delta_{b\,c}\delta_{i\,a}\delta_{j\,d} - \delta_{a\,d}\delta_{i\,c}\delta_{j\,b}\;. \tag{22.4}$$

Essas são as constantes de estrutura da álgebra de Lie $\mathrm{gl}(n,\ \mathbb{C})$ na base considerada.

Complete os detalhes da demonstração das diversas relações acima.

Usaremos essas expressões mais adiante (Exercício E. 22.18, página 1309) para determinar a forma de Killing da álgebra de Lie $\mathrm{gl}(n,\ \mathbb{C})$. ✣

• **Homomorfismos não-contínuos de $(\mathbb{R},\ +)$**

Contemplando a definição de subgrupo uniparamétrico que apresentamos acima, como sendo um homomorfismo contínuo de $(\mathbb{R},\ +)$ em um grupo $G$, o estudante pode legitimamente questionar se existem, afinal, homomorfismos não-contínuos desse grupo que justifiquem a necessidade de evocar a condição de continuidade na Proposição 22.6. Talvez um tanto surpreendentemente, a resposta é positiva. Há até mesmo automorfismos não-contínuos de $(\mathbb{R},\ +)$ em si mesmo, os quais foram apresentados à página 201, onde discutimos a existência de funções descontínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que satisfazem $f(t)+f(t')=f(t+t')$ para todos $t,\ t'\in\mathbb{R}$. Assim, com o uso de uma tal função $f$, é relativamente fácil construir um homomorfismo não-contínuo de $(\mathbb{R},\ +)$ em um grupo $G$ dado, caso conheçamos um homomorfismo contínuo de $(\mathbb{R},\ +)$ em $G$. De fato, se $\gamma(t)$, $t\in\mathbb{R}$, é um homomorfismo contínuo de $(\mathbb{R},\ +)$ em $G$ então $\gamma(f(t))$, $t\in\mathbb{R}$, é um homomorfismo de $(\mathbb{R},\ +)$ em $G$, mas que não é contínuo. Dada a "artificialidade" daquelas funções $f$, tais exemplos são um tanto patológicos, mas explicam a necessidade de incluir a condição de continuidade na definição de subgrupo uniparamétrico e na Proposição 22.6, página 1289.

## 22.3.4 Subgrupos Uniparamétricos e Álgebras de Lie

• **Subgrupos uniparamétricos em subgrupos fechados**

**Definição.** Seja $H$ um subgrupo fechado mas não discreto de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$. Definimos,

$$\mathcal{L}(H) \;:=\; \big\{X\in\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)\ \text{tais que}\ e^{tX}\in H\ \text{para todo}\ t\in\mathbb{R}\big\}\;.$$

♠

Como se vê, trata-se do conjunto dos geradores infinitesimais de todos os subgrupos uniparamétricos de $H$. É claro, pela definição acima, que $\mathcal{L}(H)$ possui pelo menos um elemento, a saber a matriz nula, pois, obviamente $e^{t0}=\mathbb{1}\in H$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Não é nem um pouco óbvio, porém, que haja outros elementos em $\mathcal{L}(H)$ que não o elemento nulo. Não é sequer óbvio que existam subgrupos uniparamétricos não-triviais[17] em $H$. Na Proposição 22.7 adiante, provaremos que $\mathcal{L}(H)$, de fato, é não-trivial e que há, de fato, subgrupos uniparamétricos não-triviais em $H$. Para demonstrarmos a Proposição 22.7 precisamos de algumas definições e de alguns resultados preparatórios. Seguiremos muito proximamente a exposição de [394] (vide todo o §2 do Capítulo XI daquela referência), mas com ligeiras correções e aperfeiçoamentos.

Para simplificar a notação denotaremos aqui o grupo $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ por $G$ e sua álgebra de Lie $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ por $\mathfrak{g}$.

Fixemos doravante um número $r>0$, arbitrário mas conveniente, e seja $\mathfrak{w}_r$ a bola fechada de raio $r$ centrada na origem em $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{w}_r \;:=\; \Big\{X\in\mathfrak{g}\Big|\quad \|X\|\leq r\Big\}\;. \tag{22.5}$$

Notemos que $\mathfrak{w}_r$ é simétrica, ou seja, se $X\in\mathfrak{w}_r$ então $-X\in\mathfrak{w}_r$. Denotaremos por $\mathfrak{w}_r^O$ a bola aberta de raio $r$ centrada na origem em $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{w}_r^O \;:=\; \Big\{X\in\mathfrak{g}\Big|\quad \|X\|< r\Big\}\;. \tag{22.6}$$

[17] Um subgrupo uniparamétrico $\gamma(t)$ é trivial se $\gamma(t)$ for igual ao elemento neutro para todo $t\in\mathbb{R}$.

Vamos denotar por $W_r$ a imagem de $\mathfrak{w}_r$ pela exponenciação:

$$W_r \ := \ \Big\{ \exp(X), \ X \in \mathfrak{w}_r \Big\} \ . \tag{22.7}$$

É claro que $W_r \subset G$ e é claro que $W_r$ é simétrico, ou seja, se $Y \in W_r$ então $Y^{-1} \in W_r$.

Como $H$ é um subconjunto fechado de $G$, o conjunto $H \cap W_r$ é fechado. Seja $\mathfrak{f}_r$ o subconjunto de $\mathfrak{w}_r$ formado pelos elementos cuja exponencial está em $H \cap W_r$:

$$\mathfrak{f}_r \ := \ \Big\{ X \in \mathfrak{w}_r \Big| \ \exp(X) \in H \cap W_r \Big\} \ . \tag{22.8}$$

Comentemos que, pela Proposição 11.12, página 667, todo elemento de $H$ é uma exponencial de algum elemento de $\mathfrak{g} = \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, \ n)$. Portanto, todo $h \in H \cap W_r$ é da forma $h = \exp(f)$ para algum $f \in \mathfrak{f}_r$. Simbolicamente, podemos escrever

$$\exp(\mathfrak{f}_r) \ = \ H \cap W_r \ . \tag{22.9}$$

É bastante claro que $\mathfrak{f}_r$ é também simétrico. Como exp é contínua, $\mathfrak{f}_r$ é também fechado (vide Seção 31.5.2, página 1629). Fora isso, $\mathfrak{f}_r \subset \mathfrak{w}_r$, por definição. Logo, $\mathfrak{f}_r$ é limitado. Por ser fechado e limitado, $\mathfrak{f}_r$ é compacto.

Definamos $\mathcal{M}(H, \ W_r) \equiv \mathcal{M}_r$ por

$$\mathcal{M}_r \ := \ \Big\{ X \in \mathfrak{g} \text{ tais que, para algum } \epsilon > 0, \text{ tem-se } \exp(tX) \in H \cap W_r \text{ sempre que } |t| < \epsilon \Big\} \ . \tag{22.10}$$

Alternativamente, é claro que

$$\mathcal{M}_r \ = \ \Big\{ X \in \mathfrak{g} \text{ tais que, para algum } \epsilon > 0, \text{ tem-se } tX \in \mathfrak{f}_r \text{ sempre que } |t| < \epsilon \Big\} \ .$$

Note-se que $\mathcal{M}_r$ contém sempre ao menos um elemento, a saber, 0. Não é nada óbvio, porém, se esse é o único elemento de $\mathcal{M}_r$. No Corolário 22.1, adiante, provaremos que tal não é o caso, ou seja, $\mathcal{M}_r$ não é trivial. Antes disso precisamos de dois lemas preparatórios.

**Lema 22.1** *Com as definições acima, valem as seguintes afirmações.* **I.** *Se $X \in \mathcal{M}_r$ então $\lambda X \in \mathcal{M}_r$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.* **II.** $\mathfrak{w}_r \cap \mathcal{M}_r \subset \mathfrak{f}_r$. □

Prova do Lema 22.1. Se $X \in \mathcal{M}_r$ então, para algum $\epsilon > 0$ tem-se $tX \in \mathfrak{f}_r$ sempre que $|t| < \epsilon$. Mas, então, se $\lambda \neq 0$, vale $t(\lambda X) \in \mathfrak{f}_r$ sempre que $|t| < \epsilon/|\lambda|$. Isso prova a afirmativa **I**.

Seja agora $X \in \mathfrak{w}_r \cap \mathcal{M}_r$. Queremos provar que $X \in \mathfrak{f}_r$. Como $X \in \mathcal{M}_r$ então, para algum $\epsilon > 0$ tem-se $\exp(tX) \in H \cap W_r$ sempre que $|t| < \epsilon$. Assim, para $n \in \mathbb{N}$ grande o suficiente ($n > \epsilon^{-1}$) teremos $\exp(n^{-1}X) \in H \cap W_r$ o que, em particular, diz que $\exp(n^{-1}X) \in H$. Como $H$ é um grupo, tem-se que $(\exp(n^{-1}X))^n \in H$. Mas o lado esquerdo é $\exp(X)$ e, portanto, concluímos que $\exp(X) \in H$. Agora, por hipótese, $X \in \mathfrak{w}_r$, o que implica, pela definição de $W_r$, que $\exp(X) \in W_r$. Logo, mostramos que $\exp(X) \in H \cap W_r$, o que significa que $X \in \mathfrak{f}_r$. Provamos, assim, que $\mathfrak{w}_r \cap \mathcal{M}_r \subset \mathfrak{f}_r$. Isso completa a prova do Lema 22.1. ■

Podemos agora demonstrar o seguinte lema, de importância central no presente contexto e, talvez, o resultado preparatório tecnicamente mais difícil.

**Lema 22.2** *Seja $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de elementos de $\mathfrak{f}_r$ tais que $X_n \neq 0$. Suponhamos que $X_n \to 0$ para $n \to \infty$ e que $X_n/\|X_n\| \to Y$ para algum $Y \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, \ n)$. Então*[18], $Y \in \mathcal{M}_r$. □

Prova do Lema 22.2. Notemos antes de mais nada que se $Y_n := X_n/\|X_n\| \to Y \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, \ n)$ então $Y \neq 0$. Em verdade, $\|Y\| = 1$ pois, fazendo uso da desigualdade (3.27), página 277, temos $\big| \|Y_n\| - \|Y\| \big| \leq \|Y_n - Y\|$. Como o lado direito vai a zero quando $n \to \infty$, segue que $\|Y\| = 1$, pois $\|Y_n\| = 1$.

[18] Após a demonstração do Lema 22.2, discutiremos à página 1295 que de fato existem sequências satisfazendo essas hipóteses.

Fixemos também um número $m \in \mathbb{N}$ não-nulo. Podemos escrever $\mathfrak{w}_r$ como a união

$$\mathfrak{w}_r = \bigcup_{k=1}^{m} \mathfrak{s}_k ,$$

onde

$$\mathfrak{s}_k \equiv \mathfrak{s}_k^r := \left\{ X \in \mathfrak{w}_r \,\middle|\, \frac{k-1}{m} r \leq \|X\| \leq \frac{k}{m} r \right\} ,$$

ou seja, podemos escrever $\mathfrak{w}_r$ como uma união de "fatias", ou cascas esféricas, de vetores com normas entre $\frac{k-1}{m}r$ e $\frac{k}{m}r$. Note-se que $\mathfrak{s}_1$ é a bola fechada de raio $r/m$ centrada em 0:

$$\mathfrak{s}_1 = \left\{ X \in \mathfrak{w}_r \,\middle|\, \|X\| \leq \frac{r}{m} \right\} .$$

Como $X_n$ converge a 0, existe um número $N_m$ (que pode depender de $m$) tal que $X_n \in \mathfrak{s}_1$ para todo $n > N_m$. Seja agora um $k_0 \in \mathbb{N}$ fixo, escolhido de modo que $1 < k_0 \leq m$. Vamos mostrar que para cada $n > N_m$ podemos encontrar um número <u>inteiro</u> $j_n$ (eventualmente dependente de $n$) de modo que $j_n X_n \in \mathfrak{s}_{k_0}$, ou seja, tal que

$$\frac{(k_0 - 1)r}{m} \leq \|j_n X_n\| \leq \frac{k_0 r}{m} .$$

Para isso, é suficiente escolhermos um $j_n$ inteiro satisfazendo

$$\frac{(k_0 - 1)r}{m\|X_n\|} \leq |j_n| \leq \frac{k_0 r}{m\|X_n\|} .$$

Haverá inteiros no intervalo entre $\frac{(k_0-1)r}{m\|X_n\|}$ e $\frac{k_0 r}{m\|X_n\|}$? Para ver isso, notemos que o comprimento desse intervalo é

$$\frac{k_0 r}{m\|X_n\|} - \frac{(k_0 - 1)r}{m\|X_n\|} = \frac{r}{m\|X_n\|} \geq 1 ,$$

pois $\|X_n\| \leq \frac{r}{m}$, dado que $X_n \in \mathfrak{s}_1$. Então, uma tal escolha de $j_n$ é sempre possível para cada $n$ (pois todo intervalo fechado de comprimento igual ou maior que 1 contém ao menos um inteiro).

Vamos denominar $j_n X_n$ por $Y_n^{(k_0)}$ (com $k_0$ fixo). É evidente que $Y_n^{(k_0)} \in \mathfrak{s}_{k_0} \subset \mathfrak{w}_r$. Isso implica que $\exp\left(Y_n^{(k_0)}\right) \in W_r$. Fora isso, $\exp\left(Y_n^{(k_0)}\right) = \exp(j_n X_n) = (\exp(X_n))^{j_n}$. Como $\exp(X_n)$ pertence ao grupo $H$ (pois $X_n \in \mathfrak{f}_r$), segue pela propriedade de grupo que também tem-se $\exp\left(Y_n^{(k_0)}\right) \in H$ (é por essa razão que escolhemos $j_n$ inteiro). Com isso, provamos que $\exp\left(Y_n^{(k_0)}\right) \in H \cap W_r$, o que significa que[19] $Y_n^{(k_0)} \in \mathfrak{f}_r$.

O conjunto $\mathfrak{f}_r$ é fechado e limitado e, portanto, compacto. Isso significa que existe uma subsequência $Y_{n_l}^{(k_0)}$, $l \in \mathbb{N}$, que é convergente em $\mathfrak{f}_r$. Agora, como $Y_n = X_n/\|X_n\|$ converge a $Y$, isso significa que $Y_{n_l}^{(k_0)}$ converge a um múltiplo de $Y$, digamos $\lambda^{(k_0)} Y$, pois $Y_{n_l}^{(k_0)}$ é um múltiplo de $Y_{n_l}$, a saber, $Y_{n_l}^{(k_0)} = j_{n_l}\|X_{n_l}\| Y_{n_l}$. Portanto, para um tal $\lambda^{(k_0)}$ temos $\lambda^{(k_0)} Y \in \mathfrak{f}_r$. Note que também tem-se $-\lambda^{(k_0)} Y \in \mathfrak{f}_r$, bastando para tal trocar $X_n$ por $-X_n$ na argumentação acima, o que é permitido pois $\mathfrak{f}_r$ é simétrico.

Assim, $\lambda^{(k_0)} = \lim_{l\to\infty} j_{n_l}\|X_{n_l}\|$ e, consequentemente,

$$\frac{(k_0 - 1)r}{m} \leq \left|\lambda^{(k_0)}\right| \leq \frac{k_0 r}{m} .$$

O que provamos acima vale para cada $k_0 \in \mathbb{N}$ com $1 < k_0 \leq m$. Resumindo nossas conclusões, provamos que para <u>todo</u> $m \in \mathbb{N}$, <u>cada</u> intervalo $I_{k_0,\, m} := \left[\frac{(k_0-1)}{m} r,\ \frac{k_0}{m} r\right]$ com $1 < k_0 \leq m$ contém pelo menos um $\lambda^{(k_0)}$ tal que $\pm\lambda^{(k_0)} Y \in \mathfrak{f}_r$.

[19] Em [394] o argumento que prova que $Y_n^{(k_0)} \in \mathfrak{f}_r$ não está correto, lamentavelmente.

A união $\bigcup_{k_0=2}^{m} I_{k_0,\, m}$ é o conjunto $\left[\frac{1}{m}r,\ r\right]$. Esses intervalos $I_{k_0,\, m}$ podem ser feitos mais finos e em maior número, fazendo $m \to \infty$, sendo que $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{m}r,\ r\right] = (0,\ r]$.

Concluímos disso que existe um conjunto contável denso de números $\lambda$ no intervalo $(0,\ r]$ tais que $\pm\lambda Y \in \mathfrak{f}_r$. Como $\mathfrak{f}_r$ é fechado, isso implica que $\lambda Y \in \mathfrak{f}_r$ para todo $\lambda \in [-r,\ r]$. Agora, isso significa precisamente que $Y \in \mathcal{M}_r$, que é o que queríamos provar.

A prova do Lema 22.2 está completa. ■

Podemos nos perguntar agora, será que existem sequências $X_n$ satisfazendo as hipóteses do Lema 22.2, ou seja, tais que $X_n/\|X_n\|$ convirja para algum $Y$? É fácil ver que sim. Notemos para isso que para qualquer sequência $X_n \in \mathfrak{f}_r$ com $X_n \to 0$ a sequência $Y_n = X_n/\|X_n\|$ está contida no conjunto compacto formado pelos vetores de norma 1. Assim, $Y_n$ sempre tem uma subsequência convergente a algum $Y$, que também tem norma 1. A essa subsequência aplica-se então o Lema 22.2 e tem-se $Y \in \mathcal{M}_r$. Isso, em particular, mostra-nos que $\mathcal{M}_r$ é não-trivial, ou seja, contém elementos não-nulos. Provamos então:

**Corolário 22.1** *O conjunto $\mathcal{M}_r$ definido acima contém elementos diferentes de 0.* □

Esse simples corolário é crucial para o que segue[20], pois tem a seguinte consequência.

**Proposição 22.7** *Seja $H$ um subgrupo fechado e não-discreto de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$. Então, valem as seguintes afirmativas.* **I.** *$\mathcal{M}_r = \mathcal{L}(H)$ para qualquer $r > 0$.* **II.** *$\mathcal{L}(H)$ é não-trivial, ou seja, não consiste apenas na matriz nula. Há, portanto, subgrupos uniparamétricos não-triviais em $H$.* □

Prova. Seja o conjunto $\mathcal{M}_r \equiv \mathcal{M}(H,\ W_r)$ definido em (22.10), com $W_r$ definido em (22.5)-(22.7) para algum $r > 0$. Provaremos que $\mathcal{M}(H,\ W_r) = \mathcal{L}(H)$.

Em primeiro lugar, é claro (por definição!) que se $X \in \mathcal{L}(H)$ teremos $\exp(tX) \in H$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Se $X = 0$ então $X \in \mathcal{M}(H,\ W_r)$ trivialmente. Se $X \neq 0$ então, se escolhermos $|t| < r/\|X\|$, teremos que $tX \in \mathfrak{w}_r$. Logo, $X \in \mathcal{M}(H,\ W_r)$. Isso mostra que $\mathcal{L}(H) \subset \mathcal{M}(H,\ W_r)$.

Seja $X \in \mathcal{M}(H,\ W_r)$ com $X \neq 0$. Pelo Corolário 22.1, um tal $X$ existe. Assim, existe um $\epsilon > 0$ tal que $\exp(t'X) \in H$ para todo $t' \in (-\epsilon,\ \epsilon)$. Seja agora $t \in \mathbb{R}$ qualquer. Se escolhermos $n \in \mathbb{Z}$ com $|n|$ grande o suficiente, teremos $|t/n| < \epsilon$. Daí, $\exp((t/n)X) \in H$ e, como $H$ é um grupo, $\exp(tX) = (\exp((t/n)X))^n \in H$. Como isso vale para qualquer $t \in \mathbb{R}$ provamos que $X \in \mathcal{L}(H)$.

Com isso provamos que $\mathcal{M}(H,\ W_r) \subset \mathcal{L}(H)$ e, portanto, $\mathcal{M}(H,\ W_r) = \mathcal{L}(H)$. Assim, pelo Corolário 22.1, $\mathcal{L}(H)$ é não-trivial. Consequentemente existem em $H$ subgrupos uniparamétricos não-triviais, a saber aqueles que têm como geradores infinitesimais os elementos não-nulos de $\mathcal{M}(H,\ W_r)$. ■

*

Chegamos agora ao ponto em que boa parte do que fizemos será unificado e revelaremos a importância de subgrupos uniparamétricos para os grupos de Lie matriciais.

## • Subgrupos uniparamétricos e álgebras de Lie

Seja $H$ um subgrupo fechado e não-discreto de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$. O seguinte teorema, o qual é uma consequência das fórmulas de Lie-Trotter e do comutador (fórmulas (11.41) e (11.42) da Proposição 11.13, página 669. Vide Capítulo 11), é de importância fundamental:

[20] Infelizmente, alguns textos como [488], [559] e mesmo (surpreendentemente) [431], não provam que $\mathcal{M}_r$ é não-trivial, o que torna suas demonstrações do Teorema 22.2 incompletas. Mesmo [394], que prova os Lemas 22.1 e 22.2, não menciona o Corolário 22.1, embora o mesmo fique implícito pela sua análise. A referência [244]-[245] , que segue outra e muito interessante linha de raciocínio, é explícita quanto ao Corolário 22.1.

**Teorema 22.1** *Se $H$ é um subgrupo fechado e não-discreto de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *então* $\mathcal{L}(H)$*, definida acima, é uma álgebra de Lie real*[21]. □

Prova. Vamos primeiramente mostrar que $\mathcal{L}(H)$ é um espaço vetorial real. Para tal, precisamos mostrar que se $X$ e $Y$ são geradores infinitesimais de dois subgrupos uniparamétricos de $H$, então $\alpha X + \beta Y$ também o é, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Comecemos observando que $\gamma(t) := \exp\big(t(\alpha X + \beta Y)\big)$ é um subgrupo uniparamétrico contínuo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ cujo gerador infinitesimal é obviamente $\alpha X + \beta Y$. Tudo o que precisamos fazer é mostrar que $\gamma(t) \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Pela fórmula de Lie-Trotter (fórmula (11.41) da Proposição 11.13, página 669),

$$\exp\big(t(\alpha X + \beta Y)\big) \;=\; \lim_{m\to\infty}\left[\exp\left(\frac{t\alpha}{m}X\right)\exp\left(\frac{t\beta}{m}Y\right)\right]^m . \tag{22.11}$$

Observemos então o seguinte. Pela hipótese, as matrizes $\exp\left(\frac{t\alpha}{m}X\right)$ e $\exp\left(\frac{t\beta}{m}Y\right)$ pertencem ao grupo $H$, pois supomos que $X$ e $Y$ são geradores infinitesimais de subgrupos uniparamétricos de $H$. Portanto, os produtos $\exp\left(\frac{t\alpha}{m}X\right)\exp\left(\frac{t\beta}{m}Y\right)$ são também elementos de $H$, pois $H$ é um grupo. Ora, o lado direito de (22.11) é, portanto, o limite de uma sequência de elementos de $H$. Como supomos que $H$ é <u>fechado</u>, segue que o limite é igualmente um elemento de $H$, como queríamos mostrar. Isso provou então que $\alpha X + \beta Y \in \mathcal{L}(H)$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e, portanto, $\mathcal{L}(H)$ é um espaço vetorial real.

Vamos mostrar agora que $\mathcal{L}(H)$ é uma álgebra de Lie. Se $X, Y \in \mathcal{L}(H)$ temos, pela fórmula do comutador (fórmula 11.42 da Proposição 11.13, página 669), e usando $[tX, Y] = t[X, Y]$, que

$$\exp\big(t[X, Y]\big) \;=\; \lim_{m\to\infty}\left[\exp\left(\frac{t}{m}X\right)\exp\left(\frac{1}{m}Y\right)\exp\left(-\frac{t}{m}X\right)\exp\left(-\frac{1}{m}Y\right)\right]^{m^2} . \tag{22.12}$$

Raciocínio idêntico ao que empregamos acima conclui que $\exp\big(t[X, Y]\big) \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}$, mostrando que $[X, Y]$ é o gerador infinitesimal de um subgrupo uniparamétrico contínuo de $H$, ou seja, $[X, Y] \in \mathcal{L}(H)$. Isso provou que $\mathcal{L}(H)$ é uma álgebra de Lie. ■

<u>*Comentário*</u>. Se para todo $X \in \mathcal{L}(H)$ tivermos também $\alpha X \in \mathcal{L}(H)$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, conclui-se pela demonstração acima que $\mathcal{L}(H)$ é uma álgebra de Lie complexa. ♣

## 22.3.5 Subgrupos Fechados de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

Nesta Seção provaremos o seguinte teorema fundamental, atribuido a Elie Cartan[22]:

**Teorema 22.2** *Se $H$ é um subgrupo topologicamente fechado de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *(na topologia métrica induzida de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$*), então $H$ é também um grupo de Lie (na topologia métrica induzida de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$*).* □

Observamos que o enunciado desse teorema é válido mesmo no caso de $H$ ser um subgrupo discreto, pois nesse caso $H$ é um grupo de Lie enquanto variedade de dimensão zero. No correr da demonstração, adiante, suporemos $H$ não discreto, eliminando esse caso trivial.

O Teorema 22.2 é particularmente importante pois muitos grupos encontrados em aplicações são subgrupos fechados de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ou de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Tal é o caso, por exemplo, dos grupos $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{U}(p, q)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{SU}(p, q)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$ e dos grupos simpléticos. Assim, o Teorema 22.2 informa-nos que tais grupos são grupos de Lie!

A prova desse teorema será oferecida à página 1298. Antes de chegarmos lá precisaremos apresentar vários teoremas preparatórios. Chamamos a atenção do leitor para o fato que as demonstrações de alguns desses resultados preparatórios são bastante técnicas e talvez devam ser omitidas em uma primeira leitura.

Seja $H$ um subgrupo fechado não-discreto de $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Sabemos pelo Teorema 22.1 que $\mathcal{L}(H)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(G) = \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C}, n)$. Seja $\mathcal{L}(H)^\perp$ seu complemento ortogonal (em relação a algum produto escalar em $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C}, n)$, por

[21] Álgebras de Lie foram definidas à página 148.
[22] Elie Joseph Cartan (1869-1951).

exemplo $\langle A,\ B\rangle = \mathrm{Tr}\big(A^*B\big)$). Todo elemento $A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$ pode ser escrito de modo único na forma $A = A^{\parallel} + A^{\perp}$, com $A^{\parallel} \in \mathcal{L}(H)$ e $A^{\perp} \in \mathcal{L}(H)^{\perp}$.

Seja assim a função $\Phi_H : \mathcal{L}(G) \to G$ definida por

$$\Phi_H(A) \ := \ \exp\left(A^{\parallel}\right)\exp\left(A^{\perp}\right) \ .$$

**Lema 22.3** *Para $H$, subgrupo fechado e conexo de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$, existe $r_0 > 0$ tal que a aplicação $\Phi_H$ definida acima é um homeomorfismo do aberto $\mathfrak{w}^O_{r_0}$ em um aberto $\Phi_H(\mathfrak{w}^O_{r_0}) \supset W_{r_0'}$ para um certo $r_0' > 0$.* □

Acima, $\mathfrak{w}^O_{r_0}$ é a bola aberta de raio $r_0$ em torno da matriz nula. Vide (22.6).

Prova. Escolhamos $r_0$ pequeno o suficiente para que valha a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff[23]. Considere-se a aplicação $\phi_H : \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(G)$ definida por $\phi_H(A) = \ln(\Phi_H(A))$, ou seja,

$$\phi_H(A) \ := \ \ln\left(\exp\left(A^{\parallel}\right)\exp\left(A^{\perp}\right)\right) \ = \ A^{\parallel} * A^{\perp} \ = \ A + \varphi_H(A) \ ,$$

(lembre-se que $A^{\parallel} + A^{\perp} = A$) onde

$$\varphi_H(A) \ := \ \frac{1}{2}\left[A^{\parallel},\ A^{\perp}\right] + \frac{1}{12}\left(\left[A^{\parallel},\ \left[A^{\parallel},\ A^{\perp}\right]\right] + \left[A^{\perp},\ \left[A^{\perp},\ A^{\parallel}\right]\right]\right) + \cdots \ .$$

Como facilmente se constata, $\frac{\|\varphi_H(A)\|}{\|A\|} \to 0$ para $\|A\| \to 0$. Assim, $\phi_H$ é contínua e diferenciável em uma vizinhança de 0 e sua derivada em 0 é a identidade. Assim, pelo bem conhecido Teorema da Aplicação Inversa (vide, Seção 26.3, página 1502, ou por exemplo, [340]), $\phi_H$ é um homeomorfismo entre $\mathfrak{w}^O_{r_0}$ e sua imagem. Como $\Phi_H = \exp\circ\phi_H$ e a exponencial é também um homeomorfismo local (Proposição 11.4, página 659), a prova do Lema 22.3 está completa. ■

Seja $H$ um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$. Vimos acima que $\mathcal{L}(H) \subset \mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$ é uma álgebra de Lie real e, como tal, um subespaço de $\mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$. É evidente que se $A \in \mathcal{L}(H)$ então $\exp(A) \in H$. Vamos denotar por $\widetilde{H}$ o subgrupo de $H$ cujos elementos são produtos finitos de exponenciais de elementos de $\mathcal{L}(H)$:

$$\widetilde{H} \ := \ \Big\{h \in H,\ \ h = \exp(A_1)\cdots\exp(A_m) \text{ para algum } m \in \mathbb{N}, \text{ sendo } A_k \in \mathcal{L}(H),\ k = 1,\ \ldots,\ m\Big\} \ .$$

$\widetilde{H}$ é de fato um grupo, pois

1. $\mathbb{1} \in \widetilde{H}$,
2. se $h = \exp(A_1)\cdots\exp(A_m) \in \widetilde{H}$ então $h^{-1} = \exp(-A_m)\cdots\exp(-A_1) \in \widetilde{H}$ e
3. se $h = \exp(A_1)\cdots\exp(A_m)$ e $h' = \exp(A_1')\cdots\exp(A_{m'}') \in \widetilde{H}$ então tem-se, evidentemente,

$$hh' \ = \ \exp(A_1)\cdots\exp(A_m)\exp(A_1')\cdots\exp(A_{m'}') \in \widetilde{H}.$$

O grupo $\widetilde{H}$ é denominado *subgrupo gerado por $\mathcal{L}(H)$*. Vamos provar o seguinte teorema:

**Teorema 22.3** *Se $H$ é fechado e conexo então $\widetilde{H} = H$.* □

Prova. Já é evidente, pela definição, que $\widetilde{H} \subset H$, de modo que queremos apenas provar que $H \subset \widetilde{H}$. Seja $r > 0$, fixo. O que faremos é provar que $\mathfrak{f}_r \subset \mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}$ para algum $r' > 0$. Se isso for verdadeiro, então, pela definição de $\mathfrak{f}_r$ em (22.8) e por (22.9), os elementos de $H \cap W_r$ são da forma $\exp(A)$ com $A \in \mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}$. Agora, pelo fato de $H$ ser conexo, sabemos pela Proposição 22.3, que todo elemento de $H$ pode ser escrito como um produto finito de elementos do interior de $H \cap W_r$. Logo, todo elemento de $H$ pode ser escrito como um produto finito $\exp(A_1)\cdots\exp(A_m)$, para algum $m \in \mathbb{N}$, com $A_k \in \mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}$. Ora, isso está precisamente dizendo que $H \subset \widetilde{H}$, que é o que queríamos provar.

[23]Vide Capítulo 11, página 652. A fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff é dada em (11.68) à página 682.

Vamos então mostrar que $\mathfrak{f}_r \subset \mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}$ para algum $r' > 0$. A demonstração será feita por absurdo, ou seja, supondo que não existam $r$ e $r' > 0$ tais que $\mathfrak{f}_r \subset \mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}$ e chegando-se daí a uma contradição.

É muito fácil ver pela definição dos conjuntos $\mathfrak{f}_r$ em (22.8) que $\mathfrak{f}_{r_1} \subset \mathfrak{f}_{r_2}$ sempre que $r_1 \leq r_2$. Além disso, $\bigcap_{r>0} \mathfrak{f}_r = \{0\}$.

Para um $r'$ arbitrário, fixo, vamos então supor que não haja nenhum $\mathfrak{f}_r$ com $\mathfrak{f}_r \subset \mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}$. Isso implica que $\mathfrak{f}_r \setminus (\mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}) \neq \emptyset$ para todo $r$. Fixando $r$, poderíamos escolher uma sequência $r_n < r$, $r_n \to 0$ com $\mathfrak{f}_{r_n} \setminus (\mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}) \neq \emptyset$. Escolhendo para cada $n$ um elemento $X_n \in \mathfrak{f}_{r_n} \setminus (\mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'})$, teremos que $X_n \in \mathfrak{f}_r \setminus (\mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'})$ para todo $n$ e $X_n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Como $X_n \to 0$, teremos $\exp(X_n) \in W_{r'_0}$ para todo $n$ grande o suficiente, onde $r'_0$ é referido no enunciado do Lema 22.3. Assim, pelo mesmo lema, existirá para cada um de tais $n$'s um elemento $Z_n \in \mathfrak{w}_{r_0}$, $Z_n = Z_n^{\parallel} + Z_n^{\perp}$, tal que $\exp(X_n) = \Phi_H(Z_n) = \exp\left(Z_n^{\parallel}\right) \exp\left(Z_n^{\perp}\right)$.

Antes de prosseguirmos, façamos algumas observações sobre $Z_n^{\parallel}$ e $Z_n^{\perp}$. Como $X_n \to 0$, deve valer também $Z_n \to 0$ já que, pelo Lema 22.3, $\Phi_H$ e sua inversa são contínuas. Assim, tem-se igualmente $Z_n^{\parallel} \to 0$ e $Z_n^{\perp} \to 0$. Pela parte **II** do Lema 22.1 e pela parte **I** da Proposição 22.7, segue que $\mathfrak{w}_r \cap \mathcal{L}(H) \subset \mathfrak{f}_r$. Daí, para $n$ grande o suficiente, ter-se-á $Z_n^{\parallel} \in \mathfrak{f}_r$. Note-se também que, como $X_n \notin \mathcal{L}(H)$ para $n$ grande, teremos $Z_n^{\perp} \neq 0$, pois, se assim não fosse, valeria $\exp(X_n) = \exp\left(Z_n^{\parallel}\right)$ e, tomando-se o logaritmo (o que é permitido para $n$ grande, já que $\|X_n\|$ e $\|Z_n^{\parallel}\|$ estão ambos próximos a zero), obteríamos $X_n = Z_n^{\parallel} \in \mathcal{L}(H)$, o que é impossível.

Como consequência das observações acima, teremos que $\exp\left(Z_n^{\perp}\right) = \exp\left(-Z_n^{\parallel}\right) \exp(X_n)$. Sucede que $\exp(X_n) \in H \cap W_r$ e $\exp\left(-Z_n^{\parallel}\right) \in H \cap W_r$. Assim $\exp\left(Z_n^{\parallel}\right) \in H$ e, $\|Z_n^{\perp}\| \leq \|Z_n\| < r_0$. Logo, $\exp\left(Z_n^{\perp}\right) \in H \cap W_{r_0}$. Portanto, $Z_n^{\perp} \in \mathfrak{f}_{r_0}$.

Como consequência do Lema 22.2, da parte **I** da Proposição 22.7 e da compacidade de $\mathfrak{f}_{r_0}$, a sequência de vetores de norma 1 dada por $Z_n^{\perp}/\|Z_n^{\perp}\|$ tem uma subsequência que converge a um elemento de $\mathcal{M}_{r_0} = \mathcal{L}(H)$. Porém, como $Z_n^{\perp} \in \mathcal{L}(H)^{\perp}$, isso é impossível e tem-se aí uma contradição. Logo, deve valer $\mathfrak{f}_r \subset \mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}$ para certos $r$, $r' > 0$. Isso completa a prova do Teorema 22.3. ■

Podemos agora reunir os resultados que provamos acima e passar à

Prova do Teorema 22.2. Seja $H$ um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Como veremos, é suficiente provarmos o teorema considerando apenas a componente de $H$ que é conexa ao elemento neutro, componente essa que denominaremos $H_0$. Isso pois se provarmos que $H_0$ é uma variedade, a demonstração facilmente se estenderá para todo $H$. Esse ponto será discutido com mais detalhe ao final da demonstração, de modo que, por ora, nos limitamos a considerar o caso em que $H$ é conexo (o que, no caso geral, equivale a nos restringirmos a $H_0$).

Pelo Teorema 22.3, basta provarmos que $\widetilde{H}$ é um grupo de Lie. Pelo Teorema 11.4, podemos encontrar uma vizinhança aberta de $V$ de 0 em $\mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n)$ e uma vizinhança aberta $W$ de $\mathbb{1}$ em $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tais que $\exp : V \to W$ é um difeomorfismo. Seja $V_H$ a vizinhança de 0 em $\mathcal{L}(H)$ definida por $V_H = V \cap \mathcal{L}(H)$ e seja $W_H$ sua imagem em $\widetilde{H}$ pela exponencial. A aplicação $\exp : V_H \to W_H$ é também um difeomorfismo, pois é a restrição de um difeomorfismo (a saber $\exp : V \to W$) por uma função suave (a projeção $V \to V_H$). Existe naturalmente um sistema de coordenadas em $V_H$, pois $\mathcal{L}(H)$ é um espaço vetorial e, portanto, isomorfo a $\mathbb{C}^k$, $k$ sendo a dimensão de $\mathcal{L}(H)$. Dessa forma como $\exp : V_H \to W_H$ é uma bijeção, $\exp^{-1} : W_H \to V_H$ estabelece um sistema de coordenadas em $W_H$. Para estabelecer um sistema de coordenadas em todo $\widetilde{H}$, por exemplo, em torno de um elemento $h \in \widetilde{H}$, podemos transladar o sistema de coordenadas de $W_H$ para uma vizinhança de $h$, a saber, $hW_H$. As cartas locais assim obtidas serão compatíveis (infinitamente diferenciáveis ou analíticas) devido ao fato de $\exp : V_H \to W_H$ ser um difeomorfismo e pelo fato de a multiplicação por um $h$ constante não alterar esse caráter. O argumento de translação pode ser aplicado mesmo a elementos de $H$ que não estão na componente conexa à identidade, de modo que todo $H$ se torna uma variedade de dimensão $k$. O produto e a inversa são contínuas e infinitamente diferenciáveis por o serem em $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ e também devido ao fato de $\exp : V_H \to W_H$ ser um difeomorfismo. A demonstração do Teorema 22.2 está então completa ■

*Comentário*. Segundo [394], o Teorema 22.2 é devido a Cartan[24]. Demonstrações desse importante teorema podem ser encontradas em vários livros-texto, como por exemplo [394] ou [431]. Devemos, porém, notar ao leitor e advertir o estudante que alguns textos (inclusive alguns

[24] Elie Joseph Cartan (1869-1951). E. J. Cartan foi um dos mais importantes contribuidores à teoria de grupos de Lie.

clássicos) apresentam certas falhas na sua demonstração, falhas essas que procuramos corrigir e evitar nas demonstrações acima. Vários textos apresentam demonstrações incompletas (por exemplo, [488], [559] e mesmo, parcialmente, [431]), pois deixam por exemplo, de provar que o conjunto $\mathcal{M}_r$, definido acima, não é apenas formado pelo elemento nulo, um ponto crucial. A demonstração que apresentamos é essencialmente (mas não exatamente) a de [394] (vide todo §2 do Capítulo XI daquela referência). Um outro tratamento excelente é o de [245] (vide também [244]). ♣

• **Comentário sobre o Teorema 22.2**

Um ponto importante do Teorema 22.2 é que o subgrupo fechado $H$ é um grupo de Lie com a topologia induzida em $H$ por $G$. Em verdade, vale para grupos de Lie um teorema mais ainda forte que o Teorema 22.2:

**Teorema 22.4** *Todo subgrupo $H$ de um grupo de Lie $G$ é também um grupo de Lie, mas não necessariamente em relação à topologia induzida por $G$ em $H$.* □

Como se vê, esse teorema generaliza o Teorema 22.2 pois não é necessário requerer que $H$ seja um subgrupo fechado de $G$. Porém, a topologia na qual $H$ é um grupo de Lie pode não ser a topologia induzida em $H$ por $G$. Um exemplo ilustrativo será discutido na Seção 22.5.2. A demonstração do Teorema 22.4 está além dos limites dessas notas e pode ser encontrada em textos como [431], [245] ou [244].

*

O Teorema 22.1, página 1296, revela um sentido da relação fundamental entre grupos de Lie e álgebras de Lie. Ele mostra que é possível construir uma álgebra de Lie a partir de um grupo de Lie fechado. A teoria geral dos grupos de Lie revela que muitas propriedades importantes de grupos de Lie podem ser estudadas a partir das álgebras de Lie associadas a seus subgrupos uniparamétricos. Essa relação se mostra particularmente relevante no estudo de representações de grupos de Lie. É possível provar (e faremos isso no exemplo do grupo SO(3) no Capítulo 23) que existe uma correspondência um-a-um entre as representações de um grupo de Lie e as representações de sua álgebra de Lie. Sucede que (devido à estrutura linear) é muito mais simples estudar as representações de uma álgebra de Lie do que de um grupo de Lie. Infelizmente ainda está fora do modesto alcance destas notas explorar completamente esse vasto terreno e remetemos o estudante aos bons livros supra-citados sobre grupos e álgebras de Lie.

Iremos no que segue deste capítulo limitar-nos a discutir algumas questões as quais são importantes para um estudo mais abrangente. Particularmente nos deteremos na questão de identificar algumas situações nas quais podemos prosseguir no caminho inverso ao que apontamos acima, ou seja, na questão de quando um grupo de Lie pode ser recuperado a partir da álgebra de Lie dos seus geradores infinitesimais por aplicação da exponenciação.

### 22.3.5.1 Mais Alguns Exemplos Importantes de Grupo de Lie

• **$\mathrm{SL}(n,\ \mathbb{C})$ é um grupo de Lie**

O grupo especial $\mathrm{SL}(n,\ \mathbb{C})$ é composto pelos elementos de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ cujo determinante é igual a 1. Se considerarmos a função $F : \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n) \to \mathbb{C}$ dada por $F(M) = \det(M)$, podemos identificar $\mathrm{SL}(n,\ \mathbb{C}) = F^{-1}\big(\{1\}\big)$, a pré-imagem do conjunto fechado $\{1\}$ de $\mathbb{C}$. Como $F$ é uma função contínua na topologia da norma matricial (pela Proposição 11.18, página 691), concluímos disso que $\mathrm{SL}(n,\ \mathbb{C})$ é um subconjunto fechado de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ e, assim, é um grupo de Lie.

A coleção de todos os geradores infinitesimais de todos os subgrupos uniparamétricos do grupo $\mathrm{SL}(n,\ \mathbb{C})$ será denotada aqui por $\mathcal{L}\big(\mathrm{SL}(n,\ \mathbb{C})\big)$ ou por $\mathrm{sl}(n,\ \mathbb{C})$. Vamos identificar esse conjunto. Seja $\mathbb{R} \ni \alpha \mapsto A(\alpha) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ uma função contínua e diferenciável. Da *Fórmula de Jacobi*[25], (10.39), página 547, segue que

$$\mathrm{Tr}\left(A(\alpha)^{-1}\frac{d}{d\alpha}A(\alpha)\right) \;=\; 0$$

pois $\det\big(A(\alpha)\big) = 1$, constante, já que $A(\alpha) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Se $\mathbb{R} \ni t \mapsto U(t) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ é um subgrupo uniparamétrico, temos $U(0) = \mathbb{1}_n$ e, portanto,

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{d}{dt}U(0)\right) \;=\; 0\;.$$

[25]Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851).

Vemos, com isso, que os geradores infinitesimais dos subgrupos uniparamétricos de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ são matrizes de traço nulo. De fato, se $\mathbb{R} \ni t \mapsto U(t) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ é um subgrupo uniparamétrico de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, sabemos que $U(t) = e^{tA}$, sendo $A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n)$ o gerador desse subgrupo. Pela Proposição 10.14, página 548, ou pela Proposição 11.7, página 662, temos $1 = \det\big(U(t)\big) = e^{t\mathrm{Tr}(A)}$ e, como isso vale para todo $t \in \mathbb{R}$, concluímos novamente que $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Resumindo essas conclusões,

$$\mathrm{sl}(n, \mathbb{C}) \;=\; \big\{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}),\ \mathrm{Tr}(A) \;=\; 0\big\} \;.$$

Que se trata de uma álgebra de Lie já encontra-se comentado no Exercício E. 2.44, página 149.

**E. 22.12** *Exercício*. Mostre similarmente que $\mathrm{sl}(n, \mathbb{R}) = \big\{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(A) \;=\; 0\big\}$. ✠

## • Grupos de invariância de formas sesquilineares e bilineares em dimensão finita são grupos de Lie

Na Seção 21.2.3, página 1134, introduzimos grupos de invariância de formas bilineares e sesquilineares definidas em espaços vetoriais. No caso de espaços de dimensão finita apresentamos em (21.46) e (21.47), os grupos $\Omega(\mathbb{R}^n,\ \omega_A)$ e $\Omega(\mathbb{C}^n,\ \omega_A)$, respectivamente, que mantêm invariantes, respectivamente, a forma bilinear real $\omega_A(u,\ v) := \langle u,\ Av\rangle_{\mathbb{R}}$ (com $u,\ v \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R},\ n)$) e a forma sesquilinear $\omega_A(u,\ v) := \langle u,\ Av\rangle_{\mathbb{C}}$ (com $u,\ v \in \mathbb{C}^n$ e $A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$).

Os grupos $\Omega(\mathbb{R}^n,\ \omega_A)$ e $\Omega(\mathbb{C}^n,\ \omega_A)$ possuem subgrupos (ditos especiais) de matrizes com determinante igual a 1, denotados por $\mathrm{S}\Omega(\mathbb{R}^n,\ \omega_A)$ e $\mathrm{S}\Omega(\mathbb{C}^n,\ \omega_A)$, respectivamente.

Para esses diversos grupos vale o seguinte resultado fundamental, já anunciado anteriormente sem demonstração (Proposição 21.3, página 1137):

**Proposição 22.8** *Os grupos $\Omega(\mathbb{C}^n,\ \omega_A)$ (ou $\Omega(\mathbb{R}^n,\ \omega_A)$), com $\det A \neq 0$, definidos acima, e que mantêm invariantes as formas sesquilineares (ou bilineares) definidas por $A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$, são subgrupos topologicamente fechados de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ e, portanto (pelo Teorema 22.2, página 1296), são grupos de Lie. O mesmo se dá para os grupos $\mathrm{S}\Omega(\mathbb{C}^n,\ \omega_A)$ (e $\mathrm{S}\Omega(\mathbb{R}^n,\ \omega_A)$).* □

Prova. Tomemos o exemplo dos grupos $\Omega(\mathbb{C}^n,\ \omega_A)$, definidos em (21.48), página 1136, que mantêm invariante a forma sesquilinear $\omega_A(u,\ v) := \langle u,\ Av\rangle_{\mathbb{C}}$, com $A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$, sendo $u,\ v \in \mathbb{C}^n$. É claro que $\Omega(\mathbb{C}^n,\ \omega_A)$ é um subgrupo de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$, o grupo das matrizes complexas inversíveis $n \times n$. É sabido que $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ é um grupo de Lie (vide Seção 22.3.2, página 1287). Sucede que, como logo veremos, $\Omega(\mathbb{C}^n,\ \omega_A)$ é um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ (na topologia métrica induzida pela norma operatorial. Vide Seção 22.3.1, página 1286) e, assim, pelo Teorema 22.2, página 1296, concluímos que $\Omega(\mathbb{C}^n,\ \omega_A)$ é também um grupo de Lie.

A mesma argumentação se aplica ao grupo $\mathrm{S}\Omega(\mathbb{C}^n,\ \omega_A)$.

Para provar que $\Omega(\mathbb{C}^n,\ \omega_A)$ é fechado, consideremos uma sequência $M_m \in \Omega(\mathbb{C}^n,\ \omega_A)$, $m \in \mathbb{N}$, que converge em norma a uma matriz $M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$, ou seja, tal que $\|M_m - M\| \to 0$ para $m \to \infty$. Por definição, temos que $M_m^* A M_m = A$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Desejamos provar que $M^*AM = A$. De fato, vale para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$M^*AM - A \;=\; (M - M_m)^*AM + M_m^*A(M - M_m) \;,$$

como facilmente se constata. Logo,

$$\Big\|M^*AM - A\Big\| \;\leq\; \Big\|(M - M_m)^*AM\Big\| + \Big\|M_m^*A(M - M_m)\Big\| \;\leq\; \big\|M - M_m\big\|\,\|A\|\,\|M\| + \|M_m\|\,\|A\|\,\big\|M - M_m\big\|$$

$$=\; \big\|M - M_m\big\|\,\|A\|\,\big(\|M\| + \|M_m\|\big) \;\leq\; \big\|M - M_m\big\|\,\|A\|\,\big(2\|M\| + \|M - M_m\|\big) \;, \quad (22.13)$$

sendo que, na última passagem usamos $\|M_m\| \leq \|M\| + \|M - M_m\|$, o que decorre trivialmente de $M_m = M + (M_m - M)$. Assim, tomando-se $m \to \infty$ no lado direito de (22.13), concluímos que $M^*AM - A = 0$, estabelecendo o que desejávamos.

No caso dos grupos $\mathrm{S}\Omega(\mathbb{C}^n,\ \omega_A)$ resta ainda verificar que se $M_m \in \mathrm{S}\Omega(\mathbb{C}^n,\ \omega_A)$, $m \in \mathbb{N}$, é uma sequência que converge em norma a $M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$, então $\det M = 1$. Isso, porém, é uma consequência da continuidade do determinante na norma operatorial, demonstrada na Seção 11.7, página 691 (Proposição 11.18, página 691). ■

# 22.4 Resultados Sobre a Estrutura de Álgebras de Lie (Incompleto)

## 22.4.1 Aplicações Adjuntas

• **Os endomorfismos adjuntos, ou aplicações adjuntas**

Uma relevante ecomonia notacional pode ser obtida da seguinte forma. Para $a \in \mathcal{L}$ denotamos por $\mathbf{ad}_a \equiv \mathbf{ad}[a] : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ a aplicação linear definida por

$$\mathbf{ad}_a(b) \equiv \mathbf{ad}[a](b) := [a, b], \qquad b \in \mathcal{L}.$$

Na literatura matemática, cada $\mathbf{ad}_a$ é dito ser um *endomorfismo adjunto*, ou *aplicação adjunta*, de $\mathcal{L}$. No contexto de matrizes essa noção foi introduzida na Seção 11.4.2, página 677.

Nestas Notas usamos ambas as notações $\mathbf{ad}_a(b)$ ou $\mathbf{ad}[a]$. Por simplicidade, uma composição de aplicações adjuntas, como $\mathbf{ad}_{a_1} \circ \mathbf{ad}_{a_2} \circ \cdots \circ \mathbf{ad}_{a_n}$, com $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{L}$, será denotada na forma de produto $\mathbf{ad}_{a_1}\mathbf{ad}_{a_2}\cdots\mathbf{ad}_{a_n}$, como habitualmente se faz com aplicações lineares.

Expressões envolvendo comutadores múltiplos, como $\Big[a_1, \Big[a_2, \ldots, \big[a_{n-1}, [a_n, b]\big]\cdots\Big]\Big]$, podem ser escritas simplesmente como $\mathbf{ad}_{a_1}\cdots\mathbf{ad}_{a_n}(b)$. Em particular, se $a_1 = \cdots = a_n = a$, escrevemos $\Big[a, \Big[a, \ldots, \big[a, [a, b]\big]\cdots\Big]\Big] = (\mathbf{ad}_a)^n(b)$.

• **Algumas identidades relevantes**

As aplicações adjuntas possuem algumas propriedades simples mas dignas de menção. A primeira são duas consequências evidentes da definição e da linearidade do produto em álgebra de Lie:

$$\mathbf{ad}_{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2}(b) = \alpha_1 \mathbf{ad}_{a_1}(b) + \alpha_2 \mathbf{ad}_{a_2}(b), \tag{22.14}$$

$$\mathbf{ad}_a(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) = \beta_1 \mathbf{ad}_a(b_1) + \beta_2 \mathbf{ad}_a(b_2), \tag{22.15}$$

válidas para todos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$ e todos $a, b, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{L}$.

A segunda é uma consequência evidente e elementar da definição e da antissimetria do produto de Lie:

$$\mathbf{ad}_a(b) = -\mathbf{ad}_b(a), \tag{22.16}$$

válida para todos $a, b \in \mathcal{L}$. A terceira é uma consequência da identidade de Jacobi (2.37), página 148, válida, por suposição, para o produto em álgebras de Lie: para todos $a$, $b$ e $c \in \mathcal{L}$ vale $\big[a, [b, c]\big] + \big[c, [a, b]\big] + \big[b, [c, a]\big] = 0$. Segue disso que para todos $a$, $b$ e $c \in \mathcal{L}$ vale

$$\mathbf{ad}_a\mathbf{ad}_b(c) = \big[a, [b, c]\big] \stackrel{\text{Jacobi}}{=} \big[[a, b], c\big] + \big[b, [a, c]\big] = \mathbf{ad}_{[a, b]}(c) + \mathbf{ad}_b\mathbf{ad}_a(c),$$

o que significa que

$$\mathbf{ad}_a\mathbf{ad}_b - \mathbf{ad}_b\mathbf{ad}_a = \mathbf{ad}_{[a, b]} \tag{22.17}$$

para todos $a, b \in \mathcal{L}$.

Mais algumas identidades podem ser obtidas procedendo em (22.17) as substituições $a \to [a, b]$ e $b \to c$, obtemos

$$\mathbf{ad}_{[a, b]}\mathbf{ad}_c - \mathbf{ad}_c\mathbf{ad}_{[a, b]} = \mathbf{ad}_{\big[[a, b], c\big]}. \tag{22.18}$$

Nessa expressão, procedendo as substituições cíclicas $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$, obtemos

$$\mathbf{ad}_{[b, c]}\mathbf{ad}_a - \mathbf{ad}_a\mathbf{ad}_{[b, c]} = \mathbf{ad}_{\big[[b, c], a\big]}. \tag{22.19}$$

e repetindo isso mais uma vez, temos

$$\mathbf{ad}_{[c, a]}\mathbf{ad}_b - \mathbf{ad}_b\mathbf{ad}_{[c, a]} = \mathbf{ad}_{\big[[c, a], b\big]}. \tag{22.20}$$

Somando os lados direitos e esquerdos de (22.18), (22.19) e (22.18), obtemos, usando novamente a identidade de Jacobi,

$$\mathbf{ad}_{[a,\,b]}\mathbf{ad}_c + \mathbf{ad}_{[b,\,c]}\mathbf{ad}_a + \mathbf{ad}_{[c,\,a]}\mathbf{ad}_b \;=\; \mathbf{ad}_c\mathbf{ad}_{[a,\,b]} + \mathbf{ad}_a\mathbf{ad}_{[b,\,c]} + \mathbf{ad}_b\mathbf{ad}_{[c,\,a]}\ . \tag{22.21}$$

O seguinte resultado útil pode ser facilmente demonstrado por indução: para $a,\,b,\,c \in \mathcal{L}$ e para todo $p \in \mathbb{N}$ vale

$$(\mathbf{ad}_a)^p\big([b,\,c]\big) \;=\; \sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}\Big[(\mathbf{ad}_a)^{p-q}(b),\,(\mathbf{ad}_a)^q(c)\Big]\ . \tag{22.22}$$

Essa é uma espécie de *binômio de Newton para a aplicação adjunta*. Para o caso $p = 1$ sabemos que

$$(\mathbf{ad}_a)\big([b,\,c]\big) \;=\; \big[a,\,[b,\,c]\big] \;\stackrel{\text{Jacobi}}{=}\; -\big[c,\,[a,\,b]\big] - \big[b,\,[c,\,a]\big] \;=\; \big[\mathbf{ad}_a(b),\,c\big] + \big[b,\,\mathbf{ad}_a(c)\big]\ , \tag{22.23}$$

que coincide com (22.22) se $p = 1$. Vamos então supor (22.22) válida para um dado $p \in \mathbb{N}$ e demonstrá-la para $p + 1$. Temos,

$$(\mathbf{ad}_a)^{p+1}\big([b,\,c]\big) \;=\; \mathbf{ad}_a\Big((\mathbf{ad}_a)^p\big([b,\,c]\big)\Big) \;=\; \mathbf{ad}_a\left(\sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}\Big[(\mathbf{ad}_a)^{p-q}(b),\,(\mathbf{ad}_a)^q(c)\Big]\right)$$

$$\stackrel{(22.23)}{=}\; \sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}\Big[(\mathbf{ad}_a)^{p-q+1}(b),\,(\mathbf{ad}_a)^q(c)\Big] + \sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}\Big[(\mathbf{ad}_a)^{p-q}(b),\,(\mathbf{ad}_a)^{q+1}(c)\Big]$$

$$=\; \sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}\Big[(\mathbf{ad}_a)^{p+1-q}(b),\,(\mathbf{ad}_a)^q(c)\Big] + \sum_{q'=1}^{p+1}\binom{p}{q'-1}\Big[(\mathbf{ad}_a)^{p+1-q'}(b),\,(\mathbf{ad}_a)^{q'}(c)\Big]\ ,$$

onde, na segunda soma, fizemos a mudança de variável $q' = q + 1$. A última expressão pode ser escrita como

$$\sum_{q=0}^{p+1}F(p,\,q)\Big[(\mathbf{ad}_a)^{p+1-q}(b),\,(\mathbf{ad}_a)^q(c)\Big]\ ,$$

onde,

$$F(p,\,q) \;=\; \begin{cases} \binom{p}{0} \;=\; 1 & \text{para } q = 0\ , \\[2ex] \binom{p}{p} \;=\; 1 & \text{para } q = p + 1\ , \\[2ex] \binom{p}{q} + \binom{p}{q-1} & \text{para } 1 \leq q \leq p\ . \end{cases}$$

Segundo a bem conhecida identidade de Pascal (6.2), página 378, temos $F(p,\,q) = \binom{p+1}{q}$ para $0 \leq q \leq p + 1$. Assim, provamos que

$$(\mathbf{ad}_a)^{p+1}\big([b,\,c]\big) \;=\; \sum_{q=0}^{p+1}\binom{p+1}{q}\Big[(\mathbf{ad}_a)^{p+1-q}(b),\,(\mathbf{ad}_a)^q(c)\Big]\ ,$$

estabelecendo (22.22) para todo $p \in \mathbb{N}$.

### 22.4.2 Álgebras de Lie Nilpotentes, Solúveis, Simples e Semissimples

Nesta seção estudaremos propriedades de natureza mais estrutural de álgebras de Lie. Por simplicicade, vamos nos limitar a considerar apenas álgebras de Lie sobre o corpo dos reais ou dos complexes, que designamos genericamente por $\mathbb{K}$. Na literatura matemática considera-se amiúde casos em que os corpos sobre os quais as álgebras de Lie são consideradas são ainda mais gerais, podendo ter característica finita ou não serem fechados. Nossa opção leva a uma perda de generalidade que é compensada por maior clareza pedagógica e amplitude de aplicações relevantes.

**• Motivação**

Já comentamos anteriormente que se $A$ e $B$ são matrizes $n \times n$ reais ou complexas tais que $AB = BA$, então $\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B)$. O que ocorre caso $A$ e $B$ não comutem entre si? A resposta a esta questão é dada por uma expressão conhecida como *fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff*, a qual foi discutida e demonstrada no Capítulo 11, página 652. Essa fórmula permite expressar o produto $\exp(A)\exp(B)$ para duas matrizes $A$ e $B \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$ (ou $\in \mathrm{Mat}(\mathbb{R},\ n)$) novamente como uma exponencial de matrizes:

$$\exp(A)\exp(B) \ = \ \exp(A * B) \ ,$$

onde $A * B$ é uma expressão um tanto complexa envolvendo somas de comutadores múltiplos das matrizes $A$ e $B$, e cujos primeiros termos são os seguintes:

$$A * B \ = \ A + B + \frac{1}{2}[A,\ B] + \frac{1}{12}\big[A,\ [A,\ B]\big] + \frac{1}{12}\big[B,\ [B,\ A]\big] + \cdots \ .$$

A expressão completa encontra-se em (11.68), à página 682. Devemos notar que a série, acima, não é sempre convergente, com a convergência se dando , porém, se $\|A\|$ e $\|B\|$ forem suficientemente "pequenas" (vide a discussão da Seção 11.5, página 682) ou se os comutadores múltiplos de $A$ e $B$ forem nulos a partir de algum ponto, o que se dá no caso de álgebras nilpotentes.

Vamos agora fazer uma pausa e, antes de entrarmos na discussão das consequências da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff e da exponenciação de álgebras de Lie e sua relação com grupos de Lie, vamos nos dedicar a discutir alguns aspectos algébricos das álgebras de Lie (com o perdão do pleonasmo).

A fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff nos chama a atenção para a importância de comutadores múltiplos de elementos de uma álgebra de Lie e vamos aproveitar a oportunidade para introduzir algumas noções muito empregadas no estudo dessas álgebras. Falaremos da sua relevância adiante.

No que segue trataremos apenas de álgebras de Lie sobre o corpo dos números reais ou complexos ou, com mais generalizade, sobre um corpo com característica zero. Esse corpo será denotado genericamente por $\mathbb{K}$ quando nenhuma especificação for requerida.

$$\Big[\Big[\big[[\,]\big]\Big]\Big]$$

**• Séries centrais descendentes e séries derivadas. Álgebras de Lie nilpotentes e álgebras de Lie solúveis**

Seja $\mathcal{L}$ uma álgebra de Lie e $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dois subconjuntos de $\mathcal{L}$. Por $[\mathcal{A},\ \mathcal{B}]$ denotamos o conjunto de todos os elementos de $\mathcal{L}$ que são iguais ao comutador de algum elemento de $\mathcal{A}$ por algum elemento de $\mathcal{B}$. Em símbolos:

$$[\mathcal{A},\ \mathcal{B}] \ = \ \Big\{[a,\ b],\ a \in \mathcal{A},\ b \in \mathcal{B}\Big\} \ . \tag{22.24}$$

Seja uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$. Com a notação acima, denotaremos por $\mathcal{L}^{[n]}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, a sequência de conjuntos obtida da seguinte forma: $\mathcal{L}^{[0]} := \mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^{[n]} := \Big[\mathcal{L},\ \mathcal{L}^{[n-1]}\Big]$, $n = 1, 2, \ldots$. Ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{[0]} \ &:= \ \mathcal{L}, \\
\mathcal{L}^{[1]} \ &:= \ \Big[\mathcal{L},\ \mathcal{L}^{[0]}\Big] \ = \ [\mathcal{L},\ \mathcal{L}] \ , \\
\mathcal{L}^{[2]} \ &:= \ \Big[\mathcal{L},\ \mathcal{L}^{[1]}\Big] \ = \ \big[\mathcal{L},\ [\mathcal{L},\ \mathcal{L}]\big] \ , \\
\mathcal{L}^{[3]} \ &:= \ \Big[\mathcal{L},\ \mathcal{L}^{[2]}\Big] \ = \ \Big[\mathcal{L},\ \big[\mathcal{L},\ [\mathcal{L},\ \mathcal{L}]\big]\Big] \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

A sequência $\mathcal{L}^{[n]}$, $n \in \mathbb{N}_0$, é denominada *série central descentente* da álgebra de Lie $\mathcal{L}$.

**Definição.** Uma álgebra de Lie é dita ser *álgebra de Lie nilpotente* se $\mathcal{L}^{[m]} = \{0\}$ para algum $m \in \mathbb{N}$. ♠

O menor $m$ para o qual $\mathcal{L}^{[m]} = \{0\}$ é dito ser o *grau* ou *índice* da álgebra de Lie nilpotente. Note-se que se $\mathcal{L}^{[m]} = \{0\}$ então $\mathcal{L}^{[m']} = \{0\}$ para todo $m' > m$.

Um exemplo de álgebra de Lie nilpotente é a álgebra de Heisenberg tri-dimensional $\mathrm{gh}_3$, com geradores infinitesimais $p$, $q$ e $\hbar$, satisfazendo $[p, \ \hbar] = 0$, $[q, \ \hbar] = 0$ e $[p, \ q] = -i\hbar$. Para ela vale $(\mathrm{gh}_3)^{[2]} = \{0\}$. Essa álgebra foi apresentada e discutida na Seção 21.2.2 à página 1126.

Há várias razões por que as álgebras de Lie nilpotentes são relevantes. Uma delas reside no fato de as álgebras de Lie nilpotentes serem igualmente álgebras de Lie solúveis (vide o que segue) e a importância destas será discutida. O leitor pode reconhecer uma outra razão da importância das álgebras de Lie nilpotentes na seguinte observação: para uma álgebra de Lie nilpotente a série de Baker-Campbell-Hausdorff em (11.68) e (11.69) é uma série finita! Voltaremos a isso quando retomarmos adiante a discussão da fórmula Baker-Campbell-Hausdorff.

Em paralelo à noção de álgebra de Lie nilpotente que apresentamos acima, existe a noção de *álgebra de Lie solúvel*.

Para uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$, denotaremos por $\mathcal{L}^{(n)}$, $n = 0, \ 1, \ \ldots$, a sequência de conjuntos obtida da seguinte forma: $\mathcal{L}^{(0)} := \mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^{(n)} := \left[\mathcal{L}^{(n-1)}, \ \mathcal{L}^{(n-1)}\right]$, $n = 1, \ 2, \ \ldots$. Ou seja,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(0)} &:= \mathcal{L} \ , \\
\mathcal{L}^{(1)} &:= \left[\mathcal{L}^{(0)}, \ \mathcal{L}^{(0)}\right] = [\mathcal{L}, \ \mathcal{L}] \ , \\
\mathcal{L}^{(2)} &:= \left[\mathcal{L}^{(1)}, \ \mathcal{L}^{(1)}\right] = \big[[\mathcal{L}, \ \mathcal{L}], \ [\mathcal{L}, \ \mathcal{L}]\big] \qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

A sequência $\mathcal{L}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, é denominada *série derivada* da álgebra de Lie $\mathcal{L}$.

**Definição.** Uma álgebra de Lie é dita ser uma *álgebra de Lie solúvel* se $\mathcal{L}^{(m)} = \{0\}$ para algum $m \in \mathbb{N}$. ♠

Para qualquer álgebra de Lie $\mathcal{L}$ é bastante evidente, pelas definições acima, que $\mathcal{L}^{(n)} \subset \mathcal{L}^{[n]}$. De fato, $\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}^{[0]}$ e $\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{[1]}$ e, se $\mathcal{L}^{(n)} \subset \mathcal{L}^{[n]}$ para algum $n$, segue que $\mathcal{L}^{(n+1)} = \left[\mathcal{L}^{(n)}, \ \mathcal{L}^{(n)}\right] \subset \left[\mathcal{L}, \ \mathcal{L}^{(n)}\right] \subset \left[\mathcal{L}, \ \mathcal{L}^{[n]}\right] = \mathcal{L}^{[n+1]}$, provando a afirmativa por indução. Segue dessa observação que toda álgebra de Lie nilpotente é também solúvel.

A recíproca dessa última afirmação é falsa: nem toda álgebra de Lie solúvel é nilpotente. Considere-se com exemplo a álgebra de Lie bidimensional com geradores infinitesimais $\lambda_1$ e $\lambda_2$ satisfazendo $[\lambda_1, \ \lambda_2] = \lambda_2$. Essa álgebra não é nilpotente, pois

$$
(\mathbf{ad}_{\lambda_1})^n(\lambda_2) = \underbrace{\Big[\lambda_1, \ \Big[\lambda_1, \ \big[\cdots, \ [\lambda_1, \ \lambda_2]}_{n \text{ vezes}} \cdots\big]\Big]\Big] \ = \ \lambda_2
$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Porém, essa álgebra é solúvel, pois $\big[[\lambda_1, \ \lambda_2], \ [\lambda_1, \ \lambda_2]\big] = [\lambda_2, \ \lambda_2] = 0$. Uma álgebra similar aparecerá concretamente em um exemplo discutido à página 1315.

Há várias razões por que as álgebras de Lie solúveis são relevantes. Uma delas será discutida após apresentarmos o Teorema de Levi, abaixo.

## • Ideais de álgebras de Lie. Álgebras de Lie simples e semissimples

O estudo e a classificação de ideais desempenha um papel central no estudo de álgebras e isso não é diferente no caso de álgebras de Lie. Se $\mathcal{L}$ é uma álgebra de Lie, dizemos que um subespaço vetorial $\mathcal{J}$ de $\mathcal{L}$ é uma *subálgebra* (de Lie) se

$$
[\mathcal{J}, \ \mathcal{J}] \ \subset \ \mathcal{J} \ .
$$

Se $\mathcal{L}$ é uma álgebra de Lie, dizemos que um subespaço vetorial $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}$ é um *ideal* se

$$
[\mathcal{L}, \ \mathcal{I}] \ \subset \ \mathcal{I} \ .
$$

Pela definição, todo ideal de $\mathcal{L}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathcal{L}$. Justifique!

As álgebras de Lie nilpotentes e as solúveis possuem "muitos" ideais. Contrapostas às mesmas estão as chamadas álgebras de Lie simples e semissimples, que possuem "poucos" ideais.

**Definição.** Uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$ é dita ser *simples* se seus únicos ideais forem $\{0\}$ e a própria $\mathcal{L}$. ♠

**Definição.** Uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$ é dita ser *semissimples* se não possuir ideais solúveis (que não $\{0\}$). ♠

É bem claro que toda álgebra de Lie simples é semissimples. Vale notar que a recíproca não é necessariamente verdadeira. A álgebra de Lie $\mathrm{so}(4,\ \mathbb{C})$ é semissimples mas não é simples! Os grupos ortogonais complexos $\mathrm{O}(n,\ \mathbb{C})$ e $\mathrm{SO}(n,\ \mathbb{C})$ foram definidos à página 1138.

Há várias razões por que as álgebras de Lie semissimples são relevantes. Uma delas será discutida após apresentarmos o Teorema de Levi, abaixo.

**Exemplo 22.1** A álgebra de Lie $\mathrm{sl}(n,\ \mathbb{C})$ é a subálgebra de $\mathrm{gl}(n,\ \mathbb{C})$ composta pelos elementos de traço nulo de $\mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$. Para todo $A \in \mathrm{gl}(n,\ \mathbb{C})$ e todo $B \in \mathrm{sl}(n,\ \mathbb{C})$ vale trivialmente $\mathrm{Tr}\big([A,\ B]\big) = 0$, devido à propriedade cíclica do traço. Portanto, $\mathrm{sl}(n,\ \mathbb{C})$ é um ideal de $\mathrm{gl}(n,\ \mathbb{C})$ e, assim, $\mathrm{gl}(n,\ \mathbb{C})$ não é simples. No Exercício E. 22.18, página 1309 veremos, usando o critério de Cartan, que $\mathrm{gl}(n,\ \mathbb{C})$ também não é semissimples. Também veremos no Exercício E. 22.19, página 1310, que $\mathrm{sl}(n,\ \mathbb{C})$ é semissimples (em verdade, $\mathrm{sl}(n,\ \mathbb{C})$ é simples). ♦

## • Soma direta e soma semidireta de álgebras de Lie

**Definição.** Uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$ é dita ser a *soma direta* de duas de suas subálgebras $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ se

$$[\mathcal{L}_1,\ \mathcal{L}_2] \;=\; \{0\}$$

e se todo elemento $x \in \mathcal{L}$ puder ser escrito de modo único da forma $x = x_1 + x_2$ com $x_1 \in \mathcal{L}_1$ e $x_2 \in \mathcal{L}_2$.

Se $\mathcal{L}$ for a soma direta de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ escrevemos $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$. Note-se que se $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$, então $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são ideais de $\mathcal{L}$. ♠

**Definição.** Uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$ é dita ser a *soma semidireta* de duas de suas subálgebras $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ se

$$[\mathcal{L}_1,\ \mathcal{L}_2] \;\subset\; \mathcal{L}_2$$

e se todo elemento $x \in \mathcal{L}$ puder ser escrito de modo único da forma $x = x_1 + x_2$ com $x_1 \in \mathcal{L}_1$ e $x_2 \in \mathcal{L}_2$.

Se $\mathcal{L}$ for a soma semidireta de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ escrevemos $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \boxplus \mathcal{L}_2$. Note que $\mathcal{L}_2$ deve ser um ideal de $\mathcal{L}$. ♠

Neste contexto, o seguinte teorema, devido ao matemático italiano Eugenio E. Levi[26], é importante. Sua demonstração (vide, e.g., [394, 273]) está além das pretensões destas Notas, mas é, em espírito, similar à demonstração do Teorema de Decomposição de Jordan, Teorema 10.21, página 597.

**Teorema 22.5 (Teorema de Levi)** *Toda álgebra de Lie $\mathcal{L}$ de dimensão finita é uma soma semidireta*

$$\mathcal{L} \;=\; \mathcal{S} \boxplus \mathcal{R}\,,$$

*onde $\mathcal{S}$ é semissimples e $\mathcal{R}$ solúvel. A subálgebra $\mathcal{R}$ acima é denominada radical de $\mathcal{L}$.* □

**Exemplo 22.2** Considere-se o *grupo Euclidiano*[27] em três dimensões $\mathbf{E}_3$ (vide Seção 21.5, página 1196), cuja álgebra de Lie denotamos por $\mathcal{L}$. Esse grupo possui seis geradores infinitesimais $J_1,\ J_2,\ J_3$ (geradores infinitesimais de rotações) e $P_1,\ P_2,\ P_3$ (geradores infinitesimais de translações), satisfazendo as relações (vide (21.205), página 1198)

$$[J_i,\ J_j] \;=\; \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} J_k\ , \qquad [J_i,\ P_j] \;=\; \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} P_k\ , \qquad [P_i,\ P_j] \;=\; 0\ ,$$

$i,\ j \in \{1,\ 2,\ 3\}$, onde $\epsilon_{ijk}$ é o símbolo antissimétrico de Levi-Civita definido em (21.105), página 1156. Se denominarmos por $\mathcal{P}$ a subálgebra gerada por $P_1,\ P_2,\ P_3$ e por $\mathcal{J}$ a subálgebra gerada por $J_1,\ J_2,\ J_3$, veremos que $\mathcal{P}$ é solúvel (pois é Abeliana) e que $\mathcal{J}$ é simples (e, portanto, semissimples). Do exposto, vemos também que $\mathcal{L}$ não é simples (possui um ideal não trivial $\mathcal{P}$) nem semissimples (esse ideal é solúvel). É também imediato que $\mathcal{L} = \mathcal{J} \boxplus \mathcal{P}$. ♦

[26] Eugenio Elia Levi (1883–1917).
[27] Euclides, de Alexandria (ci. 325 A.C., ci. 265 A.C.).

*

O Teorema de Levi diz-nos que o estudo geral de álgebras de Lie, e consequentemente, de grupos de Lie, reduz-se ao estudo das álgebras de Lie solúveis (dentre as quais estão as nilpotentes) e das álgebras de Lie semissimples. Um dos resultados mais importantes da teoria das álgebras de Lie é uma célebre classificação completa de todas as álgebras de Lie semissimples, feito devido a Killing[28] e a Cartan[29]. Para o caso das álgebras solúveis uma classificação completa está ainda longe de ser alcançada.

## 22.4.3 A Forma de Killing

Esta seção é dedicada à introdução da noção de *Forma de Killing* de uma álgebra de Lie de dimensão finita. Diversas propriedades de uma álgebra de Lie de dimensão finita refletem-se de forma importante na sua forma de Killing, e vice-versa, daí a relevência do tema.

Quando estudamos uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$ de dimensão finita $l \in \mathbb{N}$ é prático e conveniente lidarmos com uma base específica de elementos dessa álgebra, ou seja, com um conjunto de $l$ vetores linearmente independentes de $\mathcal{L}$. No entanto, é natural esperar que nenhum resultado geral e relevante sobre $\mathcal{L}$ possa depender da particular base escolhida e, dessa forma, é natural procurar grandezas invariantes pela escolha de base. Essa procura por grandezas invariantes é familiar na Geometria, na Geometria Diferencial, na Análise Funcional, na Relatividade Geral e em várias outras áreas da Matemática e da Física. A Forma de Killing de uma álgebra de Lie, que ora apresentamos, possui exatamente essa propriedade de invariância.

**• O traço de aplicações adjuntas em álgebras de Lie de dimensão finita**

Consideremos agora que $\mathcal{L}$ seja uma álgebra de Lie de dimensão finita, $l$. Por $\mathbf{ad}_a$ ser uma aplicação linear de $\mathcal{L}$ em si mesmo e por $\mathcal{L}$ ser um espaço vetorial, podemos associar a $\mathbf{ad}_a$ um traço, noção introduzida no contexto de matrizes na Seção 10.2.3, página 545. Essa noção desempenha um papel na teoria das álgebras de Lie.

Se $\{\boldsymbol{\ell}^1, \ldots, \boldsymbol{\ell}^l\}$ é uma base em $\mathcal{L}$, podemos escrever um elemento genérico $b \in \mathcal{L}$ como $b = \sum_{j=1}^{l} b_j \boldsymbol{\ell}^j$. Similarmente, para cada $j \in \{1, \ldots, l\}$, escrevemos

$$\mathbf{ad}_a\big(\boldsymbol{\ell}^j\big) \;=\; \sum_{k=1}^{l} \big(\mathbf{ad}_a\big)_k^{\;j}\, \boldsymbol{\ell}^k$$

e com isso, usando a linearidade de $\mathbf{ad}_a$, temos

$$\mathbf{ad}_a(b) \;=\; \sum_{k=1}^{l} \left( \sum_{j=1}^{l} \big(\mathbf{ad}_a\big)_k^{\;j}\, b_j \right) \boldsymbol{\ell}^k$$

Reconhecemos que os números $\big(\mathbf{ad}_a\big)_k^{\;j}$, com $k, j \in \{1, \ldots, l\}$, são as entradas (elementos de matriz) do operador linear $\mathbf{ad}_a$ (uma matriz) na base $\{\boldsymbol{\ell}^1, \ldots, \boldsymbol{\ell}^l\}$. Definimos, com isso,

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{L}}\big(\mathbf{ad}_a\big) \;:=\; \sum_{j=1}^{l} \big(\mathbf{ad}_a\big)_j^{\;j} \;.$$

Cabe aqui recordar, como fizemos na citada Seção 11.4.2, que a grandeza assim definida é independente da particular base $\{\boldsymbol{\ell}^1, \ldots, \boldsymbol{\ell}^l\}$ adotada em $\mathcal{L}$.

O traço acima definido pode também ser escrito em termos das *constantes de estrutura* da álgebra de Lie $\mathcal{L}$, introduzidas à página 146: dada uma base $\{\boldsymbol{\ell}^1, \ldots, \boldsymbol{\ell}^l\}$ em $\mathcal{L}$ escrevemos

$$[\boldsymbol{\ell}^i, \boldsymbol{\ell}^j] \;=\; \sum_{k=1}^{l} c_k^{\;ij}\, \boldsymbol{\ell}^k \;.$$

[28] Wilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923).
[29] Elie Joseph Cartan (1869-1951).

As $l^3$ constantes ${c_k}^{ij}$ são denominadas *constantes de estrutura* da álgebra de Lie $\mathcal{L}$ na base em questão. Com isso, vemos que para $a, b \in \mathcal{L}$ com $a = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \boldsymbol{\ell}^i$ e $b = \sum_{j=1}^{l} \beta_j \boldsymbol{\ell}^j$, sendo $\alpha_i$, $\beta_i \in \mathbb{K}$, temos

$$\mathbf{ad}_a(b) = \sum_{k=1}^{l} \left( \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} \alpha_i \beta_j {c_k}^{ij} \right) \boldsymbol{\ell}^k .$$

Assim,

$$\big(\mathbf{ad}_a\big)_k^{\ j} = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i {c_k}^{ij} \tag{22.25}$$

e, em particular, tem-se

$$\big(\mathbf{ad}_{\boldsymbol{\ell}^i}\big)_k^{\ j} = {c_k}^{ij} . \tag{22.26}$$

Concluímos dessa forma que

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{L}}\big(\mathbf{ad}_a\big) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} \alpha_i {c_j}^{ij} ,$$

o que expressa $\mathrm{Tr}_{\mathcal{L}}\big(\mathbf{ad}_a\big)$ em termos das componentes de $a \in \mathcal{L}$ na base $\{\boldsymbol{\ell}^1, \ldots, \boldsymbol{\ell}^l\}$ e em termos das correspondentes constantes de estrutura nessa base.

Uma outra propriedade simples do traço acima definido pode ser obtida da relação (22.17), página 1301. Tomando-se o traço de ambos os lados e usando a propriedade cíclica do traço, vemos que

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{L}}\big(\mathbf{ad}_{[a,\, b]}\big) = 0$$

para quaisquer $a, b \in \mathcal{L}$.

## • A forma de Killing em álgebras de Lie de dimensão finita

Para $a, b \in \mathcal{L}$, com $\mathcal{L}$ tendo dimensão finita, $l$, a composição $\mathbf{ad}_a \mathbf{ad}_b : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ é também uma aplicação linear de $\mathcal{L}$ em si mesma e, assim, seu traço está igualmente bem definido.

No contexto de álgebras de Lie de dimensão finita é muito importante considerarmos a forma bilinear e simétrica $\mathsf{K} : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{K}$ definida por

$$\mathsf{K}(a,\, b) := \mathrm{Tr}_{\mathcal{L}}\big(\mathbf{ad}_a\, \mathbf{ad}_b\big) , \qquad a,\, b \in \mathcal{L} . \tag{22.27}$$

Que $\mathsf{K}$ é bilinear decorre da linearidade de $\mathbf{ad}_a$ e $\mathbf{ad}_b$ em relação a $a$ e $b$, respectivamente. Que $\mathsf{K}$ é simétrica, $\mathsf{K}(a, b) = \mathsf{K}(b, a)$ para todos $a, b \in \mathcal{L}$, decorre da propriedade cíclica do traço de operadores lineares, estabelecida na Seção 10.2.3, página 545 (vide Proposição 10.12, página 546). A forma bilinear (22.27) é denominada *forma de Killing*[30], ainda que a mesma tenha sido, em verdade, introduzida por Cartan[31] em 1894, em mais um exemplo da chamada *Lei de Stiegler* (vide página 35)[32]. Essa forma desempenha um papel central na classificação de certas álgebras de Lie de dimensão finita.

Segue facilmente da regra de produto de matrizes e de (22.25) que

$$\mathsf{K}(a,\, b) = \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} \big(\mathbf{ad}_a\big)_k^{\ j} \big(\mathbf{ad}_b\big)_j^{\ k} = \sum_{m=1}^{l} \sum_{n=1}^{l} \alpha_m \beta_n \mathsf{K}^{mn} , \tag{22.28}$$

novamente com $a = \sum_{m=1}^{l} \alpha_m \boldsymbol{\ell}^m$ e $b = \sum_{n=1}^{l} \beta_n \boldsymbol{\ell}^n$, para $\alpha_m$, $\beta_n \in \mathbb{K}$, sendo

$$\mathsf{K}^{mn} := \mathsf{K}(\boldsymbol{\ell}^m,\, \boldsymbol{\ell}^n) = \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} \big(\mathbf{ad}_{\boldsymbol{\ell}^m}\big)_k^{\ j} \big(\mathbf{ad}_{\boldsymbol{\ell}^n}\big)_j^{\ k} \overset{(22.26)}{=} \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} {c_k}^{mj} {c_j}^{nk} , \tag{22.29}$$

para $m, n \in \{1, \ldots, l\}$. As constantes $\mathsf{K}^{mn}$ são por vezes denominadas *elementos de matriz* da forma de Killing $\mathsf{K}$ na base $\{\boldsymbol{\ell}^1, \ldots, \boldsymbol{\ell}^l\}$.

[30] Wilhelm Karl Joseph Killing (1847–1923).
[31] Elie Joseph Cartan (1869-1951).
[32] Em reverso, descobertas de Killing na teoria de grupos honraram outros nomes.

**E. 22.13** *Exercício.* Verifique! Verifique também diretamente da fórmula (22.29) que $K^{mn} = K^{nm}$, $\forall m, n \in \{1, \ldots, l\}$, indicando novamente que a forma de Killing é simétrica. Há, assim, em princípio, $l(l+1)/2$ elementos de matriz independentes para a forma de Killing de uma álgebra de Lie de dimensão $l$. ✠

Como vemos na Seção 22.4.2, página 1302, álgebras de Lie podem ser classificadas em nilpotentes, solúveis, simples e semissimples (e combinações dessas possibilidades) e, no caso de dimensão finita, isso manifesta-se em diferentes propriedades das formas de Killing. Adiantando-nos, estabeleceremos dentre outros os seguintes fatos fundamentais: 1º a forma de Killing de uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão finita é identicamente nula e 2º uma álgebra de Lie de dimensão finita é semissimples se e somente se sua forma de Killing for não degenerada (propriedade denominada *critério de Cartan*).

• **A forma de traço de álgebras de Lie matriciais**

Um caso de particular interesse se dá na situação em que $\mathcal{L}$ é uma álgebra de Lie de matrizes agindo em um espaço vetorial de dimensão finita $\mathcal{V}$ e temos, para $A, B \in \mathcal{L}$, que $\mathbf{ad}_A(B) = [A, B] = AB - BA$, o comutador de $A$ e $B$. Esse tipo de situação é relevante quando se lida com *representações* de álgebras de Lie em espaços vetoriais de dimensão finita. Em tais casos, além da forma de Killing, definida acima, há uma outra forma bilinear simétrica que pode ser definida em $\mathcal{L}$ e ambas não necessariamente coincidem.

Seja $\{E^1, \ldots, E^l\} \subset \mathcal{L}$ uma base em $\mathcal{L}$ com as relações de comutação $[E^i, E^j] = \sum_{i=1}^{l} c_k{}^{ij} E^k$, com os $c_k{}^{ij}$ sendo as constantes de estrutura na base em questão.

Para $A, B \in \mathcal{L}$ a espressão $\mathsf{Tr}(A, B) := \mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}(AB)$ define uma forma bilinear simétrica em $\mathcal{L}$, com $\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}$ sendo o traço matricial usual definido em $\mathcal{V}$. Essa forma é denominada *forma de traço*.

Se representamos $A, B \in \mathcal{L}$ por $A = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i E^i$ e, respectivamente, $B = \sum_{j=1}^{l} \beta_j E^j$, temos para a forma de traço

$$\mathsf{Tr}(A, B) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} \alpha_i \beta_j \mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}(E^i E^j) .$$

A forma de traço possui a seguinte propriedade para todos $A, B, C \in \mathcal{L}$ a relação

$$\mathsf{Tr}\big(A, [B, C]\big) = \mathsf{Tr}\big([A, B], C\big) . \tag{22.30}$$

De fato,

$$\mathsf{Tr}\big(A, [B, C]\big) - \mathsf{Tr}\big([A, B], C\big) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}\big(A[B, C] - [A, B]C\big) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}\big(ABC - ACB - ABC + BAC\big) = 0 ,$$

devido à propriedade cíclica do traço.

• **Formas invariantes**

Uma forma bilinear simétrica $\mathsf{W} : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{K}$ definida em uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$ que satisfaça

$$\mathsf{W}\big(a, [b, c]\big) = \mathsf{W}\big([a, b], c\big)$$

para todos $a, b, c \in \mathcal{L}$ é dita ser uma *forma invariante*. Como vimos em (22.30) a forma de traço em álgebras matriciais é uma forma invariante.

Como veremos, se $\mathcal{L}$ é semissimples de dimensão finita, então sua forma de Killing é invariante e se $\mathcal{L}$ é uma álgebra de Lie simples (e, portanto, semissimples) de dimensão finita, então toda forma bilinear simétrica e invariante é um múltiplo escalar da forma de Killing.

### 22.4.3.1 Critérios de Cartan

### 22.4.3.2 Exemplos de Cálculo de Formas de Killing

**E. 22.14** *Exercício-Exemplo.* Considere-se a álgebra de Lie su(2) do grupo SU(2) (vide Seção 21.3.4, página 1177 ou Seção 21.8, página 1234). Trata-se de uma álgebra de Lie real de dimensão 3 e podemos adotar como base as matrizes $j_k = -\frac{i}{2}\sigma_k$, $k = 1, 2, 3$, com $\sigma_k$ sendo as matrizes de Pauli (vide (21.161), página 1177):

$$j_1 := -\frac{i}{2}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad j_2 := -\frac{i}{2}\left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad j_3 := -\frac{i}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right).$$

Para elas temos as relações de comutação $[j_a,\ j_b] = \sum_{c=1}^{3}\varepsilon_{abc}j_c$, com $a,\ b \in \{1,\ 2,\ 3\}$ (vide (21.298), página 1234). Portanto, as constantes de estrutura nessa base são, pelas nossas convenções, ${c_c}^{ab} = \varepsilon_{abc}$ (não nos preocupamos aqui em distinguir índices superiores e inferiores). Assim, de acordo com (22.28) e (22.29),, página 1307, os elementos de matriz da forma de Killing são, usando (4.8), página 322,

$$\mathsf{K}^{ij} = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\varepsilon_{inm}\varepsilon_{jmn} \stackrel{(4.8)}{=} -2\delta^{ij}.$$

Isso mostra que, nesse caso, a forma de Killing é não degenerada. Como comentamos, isso decorre de $\mathrm{su}(2)$ ser semissimples.

Para a forma de traço usamos os fatos que $\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab}\mathbb{1}_2 + i\sum_{c=1}^{3}\varepsilon_{abc}\sigma_c$ (vide (21.164), página 1177), e que $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^2}(\sigma_c) = 0$ para estabelecer que

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^2}(j_aj_b) = -\frac{1}{2}\delta_{ab}.$$

Isso mostra que a forma de traço e a forma de Killing de $\mathrm{su}(2)$ são proporcionais, novamente uma decorrência de $\mathrm{su}(2)$ ser semissimples.

Complete os detalhes e verifique todas as relações acima.

Comentamos que as conclusões são as mesmas para a álgebra de Lie $\mathrm{sl}(2,\ \mathbb{C})$, associada ao grupo $\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{C})$ (Seção 21.3.5, página 1183). Trata-se de uma álgebra de Lie complexa de dimensão 3, mas que tem como possível base as mesmas matrizes $j_1$, $j_2$ e $j_3$ da álgebra de Lie real $\mathrm{su}(2)$. ✠

**E. 22.15** *Exercício.* Repita os mesmos cômputos para a álgebra de Lie $\mathrm{so}(3)$, do grupo $\mathrm{SO}(3)$, estudado na Seção 21.3.2, página 1153. ✠

**E. 22.16** *Exercício.* Determine a forma de Killing da álgebra de Lie real do grupo Euclidiano em 3 dimensões, discutida no Exemplo 22.2, página 1305. Constate que essa forma de Killing é denegerada, em concordância com o fato de a álgebra não ser semissimples. ✠

**E. 22.17** *Exercício-Exemplo.* Considere-se a álgebra de Lie complexa $\mathrm{gh}_3(\mathbb{C})$ do grupo de Heisenberg $\mathrm{GH}_3(\mathbb{C})$, estudado na Seção 21.2.2.1, página 1127. Podemos adorar como base em $\mathrm{gh}_3(\mathbb{C})$ as matrizes

$$\mathbf{h}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \mathbf{h}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \mathbf{h}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

apresentadas em (21.17), página 1128. Para elas temos as relações de comutação

$$[\mathbf{h}_1,\ \mathbf{h}_2] = \mathbf{h}_3, \quad [\mathbf{h}_1,\ \mathbf{h}_3] = 0, \quad [\mathbf{h}_2,\ \mathbf{h}_3] = 0.$$

Portanto, as aplicações autoadjuntas correspodem às seguintes matrizes (na base $\{\mathbf{h}_1,\ \mathbf{h}_2,\ \mathbf{h}_3\}$):

$$\mathbf{ad}_{\mathbf{h}_1} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad \mathbf{ad}_{\mathbf{h}_2} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad \mathbf{ad}_{\mathbf{h}_3} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Com isso, temos para os elementos de matriz da forma de Killing o seguinte resultado:

$$\mathsf{K}^{11} = 0, \quad \mathsf{K}^{12} = 0, \quad \mathsf{K}^{13} = 0, \quad \mathsf{K}^{22} = 0, \quad \mathsf{K}^{23} = 0, \quad \mathsf{K}^{33} = 0.$$

Verifique todas as afirmações acima. Como se vê, a forma de Killing é identidamente nula, uma decorrência, como mencionamos, do fato de a álgebra de Lie $\mathrm{gh}_3(\mathbb{C})$ ser nilpotente.

Para as componentes da forma de traço, temos

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^3}(\mathbf{h}_1\mathbf{h}_1) = 0, \quad \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^3}(\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2) = 0, \quad \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^3}(\mathbf{h}_1\mathbf{h}_3) = 0, \quad \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^3}(\mathbf{h}_2\mathbf{h}_2) = 0, \quad \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^3}(\mathbf{h}_2\mathbf{h}_3) = 0, \quad \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^3}(\mathbf{h}_2\mathbf{h}_3) = 0,$$

o que revela que também a forma de traço é identicamente nula. ✠

**E. 22.18** *Exercício dirigido.* Consideremos agora a forma de Killing da álgebra de Lie $\mathrm{gl}(n,\ \mathbb{C}) = \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$, $n \in \mathbb{N}$. Constantes de estrutura para essa álgebra foram obtidas no Exercício E. 22.11, página 1291 para a base $\left\{E^{ab},\ a,\ b \in \{1,\ \ldots,\ n\}\right\}$ onde $E^{ab}$ são as matrizes cujos elementos de matriz são $\left(E^{ab}\right)_{ij} = \delta_{i\,a}\delta_{j\,b}$ para $i,\ j \in \{1,\ \ldots,\ n\}$. Em palavras, os elementos de matriz de $E^{ab}$ são todos nulos, exceto o elemento de matriz na posição $ab$, que vale 1.

Uma matriz $A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n) = \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ pode ser expressa na base acima como $A = \sum_{a, b=1}^{n} A_{ab}E^{ab}$, com $A_{ab}$ sendo seus elementos de matriz. Assim, para $X \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{ad}_A(X) &= \sum_{a,b=1}^{n}\sum_{c,d=1}^{n} A_{ab}X_{cd}\big[E^{ab}, E^{cd}\big] \stackrel{(22.3)}{=} \sum_{a,b=1}^{n}\sum_{c,d=1}^{n} A_{ab}X_{cd}\Big(\delta_{b\,c}E^{ad} - \delta_{a\,d}E^{cb}\Big) \\
&= \sum_{a=1}^{n}\sum_{d=1}^{n}(AX)_{ad}E^{ad} - \sum_{b=1}^{n}\sum_{c=1}^{n}(XA)_{cb}E^{cb} = [A, X] ,
\end{aligned}
$$

sendo que temos à direita o comutador usual de matrizes de $\mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n)$. O resultado $\mathbf{ad}_A(X) = [A, X]$ certamente não surge como surpresa! Usando (22.26), página 1307 e usando a forma das constantes de estrutura oferecida em (22.4), página 1292, temos para os elementos de matriz da aplicação adjunta $\mathbf{ad}_A$, $A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n)$, na base acima,

$$
\big(\mathbf{ad}_A\big)_{(kl)}{}^{(ij)} = \sum_{a,b=1}^{l} A_{ab}c_{(kl)}{}^{(ab)(ij)} = A_{ki}\delta_{l\,j} - A_{jl}\delta_{k\,i} .
$$

Verifique!

Usando (22.29), página 1307, e usando a forma das constantes de estrutura oferecida em (22.4), página 1292, podemos escrever os elementos de matriz da forma de Killing de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ como

$$
\begin{aligned}
\mathsf{K}^{(ab)(cd)} &= \sum_{k,\,l=1}^{l}\sum_{i,j=1}^{l} c_{(kl)}{}^{(ab)(ij)}c_{(ij)}{}^{(cd)(kl)} \stackrel{(22.4)}{=} \sum_{k,\,l=1}^{l}\sum_{i,j=1}^{l}\Big(\delta_{b\,i}\delta_{k\,a}\delta_{l\,j} - \delta_{a\,j}\delta_{k\,i}\delta_{l\,b}\Big)\Big(\delta_{d\,k}\delta_{i\,c}\delta_{j\,l} - \delta_{c\,l}\delta_{i\,k}\delta_{j\,d}\Big) \\
&= 2\Big(n\delta_{b\,c}\delta_{a\,d} - \delta_{b\,a}\delta_{c\,d}\Big) .
\end{aligned}
$$

Verifique! Portanto, para $A, B \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n)$, temos por (22.28), página 1307,

$$
\mathsf{K}(A, B) \stackrel{(22.28)}{=} \sum_{a,b=1}^{n}\sum_{c,d=1}^{n} A_{ab}B_{cd}\mathsf{K}^{(ab)(cd)} = 2\sum_{a,b=1}^{n}\sum_{c,d=1}^{n} A_{ab}B_{cd}\Big(n\delta_{b\,c}\delta_{a\,d} - \delta_{b\,a}\delta_{c\,d}\Big)
$$

e após alguns cômputos simples, obtemos finalmente

$$
\mathsf{K}(A, B) = 2\Big(n\mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)\Big) , \tag{22.31}
$$

com $\mathrm{Tr}$ sendo o traço usual em $\mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n)$.

Vemos dessa expressão que a forma de Killing de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ é <u>degenerada</u> pois, por exemplo, para $A = B = \mathbb{1}_n$, temos $\mathsf{K}(\mathbb{1}_n, \mathbb{1}_n) = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, pelo critério de Cartan para álgebras de Lie semisimples, a álgebra de Lie $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ não pode ser semissimples (e, portanto, não pode ser simples).

Adicionalmente, para $A, B, C \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ vale

$$
\mathsf{K}\big(A, [B, C]\big) = 2\Big(n\mathrm{Tr}\big(A[B, C]\big) - \mathrm{Tr}(A)\underbrace{\mathrm{Tr}\big([B, C]\big)}_{=0}\Big) = 2n\Big(\mathrm{Tr}(ABC) - \mathrm{Tr}(ACB)\Big) ,
$$

o que mostra que, exceto para $n = 1$, $\mathsf{K}\big(A, [B, C]\big)$ não é identicamente nula. Assim, pelo critério de Cartan para álgebras de Lie solúveis, $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ também não é uma álgebra de Lie solúvel (exceto para o caso trivial onde $n = 1$). ✠

**E. 22.19** <u>*Exercício*</u>. Já comentamos que os elementos de $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$, $n \geq 2$ (o caso $n = 1$ é trivial), são elementos de traço nulo de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$. Conclua dos resultados do Exercício E. 22.18, página 1309, em particular, de (22.31), que a forma de Killing para $A, B \in \mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$ é dada por

$$
\mathsf{K}(A, B) = 2n\mathrm{Tr}(AB) . \tag{22.32}
$$

Mostre que essa forma não é degenerada (usar que $\langle A, B\rangle := \mathrm{Tr}(A^*B)$ é um produto escalar em $\mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n)$) e, portanto, pelo critério de Cartan para álgebras de Lie semisimples, $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$ é semissimples (em verdade, $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$ é simples). Constate também, sem surpresa, que $\mathsf{K}\big(A, [B, C]\big)$ não é identicamente nula e, portanto, $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$ não é solúvel. ✠

### 22.4.4 Alguns Resultados Sobre a Estrutura de Álgebras de Lie

#### 22.4.4.1 Alguns Resultados Sobre Álgebras de Lie Solúveis

#### 22.4.4.2 Alguns Resultados Sobre Álgebras de Lie Semissimples

#### 22.4.4.3 Alguns Resultados Sobre Álgebras de Lie Nilpotentes

## 22.5 A Relação entre Grupos de Lie Matriciais e suas Álgebras de Lie

Vimos nas seções anteriores que se $H$ é um subgrupo não-discreto fechado de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ existe associada ao mesmo uma álgebra de Lie a qual é (obviamente) uma subálgebra da álgebra de Lie de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ que é $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$. Será a recíproca verdadeira, ou seja, se $\mathcal{A}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ haverá um grupo de Lie fechado associado a $\mathcal{A}$? A reposta, em geral, é não. Um contraexemplo (para $n = 2$) é o seguinte: Seja $a$ um número real irracional e seja a álgebra de Lie formada pelas matrizes $2 \times 2$ dadas por $\begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & iat \end{pmatrix}$ com $t \in R$. Exponenciando os elementos dessa álgebra de Lie obtemos as matrizes $\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{iat} \end{pmatrix}$ com $t \in R$. Esse conjunto de matrizes forma certamente um grupo. Sucede, porém, que não se trata de um subgrupo topologicamente fechado de $\mathrm{GL}(2,\ \mathbb{C})$, como veremos com um pouco mais de detalhe na Seção 22.5.2 (a qual o leitor poderá passar sem perdas). Felizmente é possível dizer um pouco mais se enfraquecermos a condição de $H$ ser um subgrupo fechado. Tem-se, por exemplo, o seguinte:

**Proposição 22.9** *Seja $G$ um subgrupo fechado não-discreto de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ cuja álgebra de Lie é $\mathcal{L}(G)$ e seja $H$ um subgrupo (não discreto) de $G$. Seja $\mathcal{L}(H) := \{M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)|\ \exp(tM) \in H, \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$ e suponha que se saiba que $\mathcal{L}(H)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(G)$. Então, $\mathcal{L}(H)$ é também uma subálgebra de $\mathcal{L}(G)$.* □

Prova. Sejam $A,\ B \in \mathcal{L}(H)$. Então, é claro que para todos $t$ e $s \in \mathbb{R}$ teremos $e^{sA}e^{tB}e^{-sA} \in H$ pois $H$ é um grupo e $e^{sA},\ e^{tA} \in H$. Podemos escrever $e^{sA}e^{tB}e^{-sA} = \exp\left(te^{sA}Be^{-sA}\right)$ e isso prova que $e^{sA}Be^{-sA} \in \mathcal{L}(H)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Como por hipótese $\mathcal{L}(H)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(G)$, $\mathcal{L}(H)$ é fechado (pois estamos em dimensão finita). Logo,

$$\mathcal{L}(H) \ \ni \ \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(e^{sA}Be^{-sA} - B\right) \ = \ \frac{d}{ds}\left(e^{sA}Be^{-sA}\right)\bigg|_{s=0} \ = \ [A,\ B]\ ,$$

completando a prova. ■

Comparando a demonstração acima com a do Teorema 22.1, vemos que a diferença é que não supomos que $H$ seja fechado. Podemos ir mais um pouco além e estabelecer o seguinte:

**Teorema 22.6** *Seja $G$ um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ cuja álgebra de Lie é $\mathcal{L}(G)$ e seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Lie real de $\mathcal{L}(G)$. Então, existe um único subgrupo conexo $H$ de $G$ cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{h}$. $H$ é um grupo de Lie (em uma certa topologia).* □

Não apresentaremos a demonstração dessa afirmação aqui no caso geral, a qual é uma consequência da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. Mais adiante (página 1312) discutiremos como $H$ pode ser construída a partir de $\mathfrak{h}$ no caso dessa última ser uma álgebra de Lie nilpotente, o caso mais fácil de tratar.

### 22.5.1 Questões sobre a Exponenciação de Álgebras de Lie

Apesar de sua importância, a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff apresenta uma restrição quanto à norma das matrizes $A$ e $B$, necessária para garantir a convergência da série que ocorre em (11.68). Há, porém, uma classe de álgebras de Lie para a qual essa questão não é importante, as chamadas álgebras de Lie nilpotentes, das quais trataremos agora.

• **Grupos de Lie nilpotentes**

A importância das álgebras de Lie nilpotentes no contexto da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (11.68), página 682, é a seguinte. Se $\mathcal{L} \subset \mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$ é uma álgebra de Lie nilpotente de grau $m$ de matrizes, então para quaisquer $A,\ B \in \mathcal{L}$ teremos que $A * B$ definida em (11.68) é uma soma finita, contendo no máximo comutadores múltiplos de ordem $m$.

Com isso, vemos que para uma álgebra de Lie nilpotente de matrizes $\mathcal{L} \subset \mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$ não existe o problema da convergência da série de (11.68), e a mesma vale para todo $A,\ B \in \mathcal{L}$, independente da norma desses elementos. Fora isso $A * B \in \mathcal{L}$, já que é dado por uma soma finita de elementos de $\mathcal{L}$. Uma consequência é a seguinte proposição.

**Proposição 22.10** *Seja $G$ um subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ e $\mathcal{L}_G \subset \mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$ sua álgebra de Lie. Vamos supor que $\mathcal{L}_G$ seja nilpotente. Então, o produto $* : \mathcal{L}_G \times \mathcal{L}_G \to \mathcal{L}_G$ definido pela fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff é associativo. Fora isso, a álgebra de Lie $\mathcal{L}_G$ é, ela mesma, um grupo com o produto $*$.* □

*Nota*. Para evitar mal-entendidos, observamos que o produto $* : \mathcal{L}_G \times \mathcal{L}_G \to \mathcal{L}_G$ é associativo mas não faz de $\mathcal{L}_G$ uma álgebra associativa, pois ele não é bilinear. ♣

Prova da Proposição 22.10. Sejam $A^1$, $A^2$ e $A^3$ três elementos de $\mathcal{L}_G$. Se $L_1,\ \ldots,\ L_m$ formam uma base em $\mathcal{L}_G$ podemos escrever $A^i = \sum_{k=1}^m \alpha_k^i L_k$, onde $\alpha_k^i$ são números complexos. Como a soma de comutadores que ocorre na fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff é finita, concluímos que

$$\left(A^1 * A^2\right) * A^3 \;=\; \sum_{k=1}^m p_k(\alpha) L_k \quad \text{e} \quad A^1 * \left(A^2 * A^3\right) \;=\; \sum_{k=1}^m q_k(\alpha) L_k \;,$$

onde $p_k(\alpha)$ e $q_k(\alpha)$ são polinômios nas variáveis $\alpha_j^i$, $i = 1,\ 2,\ 3$, $j = 1,\ \ldots,\ m$. Desejamos provar que para cada $k$ tem-se $p_k = q_k$. Como ambos são polinômios, é suficiente provar isso para quando as variáveis $\alpha_j^i$ estão restritas a algum aberto de $\mathbb{C}$.

Sejam $G_i = \exp(A^i)$, $i = 1,\ 2,\ 3$, elementos de $G$. Como o produto do grupo é associativo, temos $(G_1 G_2)G_3 = G_1(G_2 G_3)$ e, portanto, $\exp\Big(\left(A^1 * A^2\right) * A^3\Big) = \exp\Big(A^1 * \left(A^2 * A^3\right)\Big)$. Se escolhermos as variáveis $\alpha_j^i$ suficientemente próximas de zero, teremos $p_k(\alpha)$ e $q_k(\alpha)$ igualmente próximas de zero (convença-se disso checando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff) e, portanto, $\left\|\left(A^1 * A^2\right) * A^3\right\|_{\mathbb{C}}$ e $\left\|A^1 * \left(A^2 * A^3\right)\right\|_{\mathbb{C}}$ podem ser ambas feitas menores que $\ln 2$. Pela Proposição 11.5, página 659, podemos tomar o logaritmo das exponenciais acima e concluir que $\left(A^1 * A^2\right) * A^3 = A^1 * \left(A^2 * A^3\right)$. Assim,

$$\sum_{k=1}^m p_k(\alpha) L_k \;=\; \sum_{k=1}^m q_k(\alpha) L_k$$

pelo menos para $\alpha_j^i$ pequenos o suficiente. Como os elementos $L_k$ da base são linearmente independentes, concluímos que $p_k(\alpha) = q_k(\alpha)$ para todo $k = 1,\ \ldots,\ m$, pelo menos quando os $\alpha_j^i$ são pequenos o suficiente. Como $p_k$ e $q_k$ são polinômios, isso vale para todos $\alpha_j^i \in \mathbb{C}$. Isso provou a associatividade.

Para provar que $\mathcal{L}_G$ é um grupo, devemos mostrar que há um elemento neutro em $\mathcal{L}_G$ para o produto $*$ e que para cada elemento de $\mathcal{L}_G$ existe uma inversa. Pela fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff é fácil constatar que

$$A * 0 \;=\; 0 * A \;=\; A$$

para todo $A \in \mathcal{L}_G$. Assim o zero é o elemento neutro procurado. Fora isso, também pela fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff é fácil constatar que

$$A * (-A) \;=\; A + (-A) + \text{ comutadores de } A \text{ com } -A \;=\; 0 \;.$$

Logo, $(\mathcal{L}_G, *)$ é um grupo. ■

Esses fatos têm ainda uma consequência importante. Seja $\mathcal{L} \subset \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n)$ uma álgebra de Lie nilpotente de matrizes. Definamos por $\exp(\mathcal{L})$ o conjunto de todas as matrizes que são exponenciais de elementos de $\mathcal{L}$:

$$\exp(\mathcal{L}) = \Big\{ G \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n) \big| \; G = \exp(A) \text{ para algum } A \in \mathcal{L} \Big\} .$$

Afirmamos que $\exp(\mathcal{L})$ é um grupo (em relação ao produto usual de matrizes), em verdade um subgrupo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. De fato, $\mathbb{1} \in \exp(\mathcal{L})$, pois, $0 \in \mathcal{L}$. Se $G = \exp(A)$ com $A \in \mathcal{L}$, então sua inversa é $G^{-1} = \exp(-A)$, que também pertence a $\exp(\mathcal{L})$ pois $-A \in \mathcal{L}$. Por fim, se $G_1 = \exp(A_1)$ e $G_2 = \exp(A_2)$ com $A_1$ e $A_2$ dois elementos quaisquer de $\in \mathcal{L}$, então, pela fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, $G_1 G_2 = \exp(A_1 * A_2) \in \exp(\mathcal{L})$, pois $A_1 * A_2 \in \mathcal{L}$.

A conclusão é que a partir de uma álgebra de Lie nilpotente $\mathcal{L}$ podemos construir um grupo, denominado *grupo de Lie associado à álgebra* $\mathcal{L}$ pelo procedimento de exponenciação. É importante notar que $\mathcal{L}$ é um conjunto conexo. Portanto, como a exponencial é contínua, o grupo $\exp(\mathcal{L})$ é igualmente conexo.

Interessantemente vale também a recíproca. Seja $G$ um grupo de Lie *conexo* fechado (de matrizes) e $\mathcal{L}_G$ sua álgebra de Lie e vamos supor que $\mathcal{L}_G$ seja *nilpotente*. Considere, para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o subconjunto $V_\epsilon$ de $\mathcal{L}_G$ definido por

$$V_\epsilon := \left\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k L_k, \text{ com } |\lambda_i| < \epsilon \text{ para todo } i = 1, \ldots, m \right\} ,$$

e o subconjunto $U_\epsilon$ de $G$ definido por

$$U_\epsilon := \left\{ \exp\left( \sum_{k=1}^{m} \lambda_k L_k \right), \text{ com } |\lambda_i| < \epsilon \text{ para todo } i = 1, \ldots, m \right\} ,$$

onde $L_1, \ldots, L_m$ formam uma base em $\mathcal{L}_G$.

Note-se que $V_\epsilon$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{L}_G$. Note-se também que $\mathbb{1} \in U_\epsilon$ e que se $g = \exp\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k L_k\right) \in U_\epsilon$ então $g^{-1} = \exp\left(-\sum_{k=1}^m \lambda_k L_k\right) \in U_\epsilon$. Assim, se provarmos que $U_\epsilon$ é aberto poderemos usar a Proposição 22.3, página 1284.

Se $\epsilon$ for pequeno o suficiente poderemos garantir que $\|\sum_{k=1}^m \lambda_k L_k\|_{\mathbb{C}} < \ln 2$ sempre que $|\lambda_i| < \epsilon$ para todo $i = 1, \ldots, m$ e, pela Proposição 11.5, página 659, teremos $\ln\Big(\exp\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k L_k\right)\Big) = \sum_{k=1}^m \lambda_k L_k$. Logo, $U_\epsilon$ é a imagem inversa pela função ln do conjunto aberto $V_\epsilon$. Como ln é uma função contínua (Proposição 11.3, página 658) concluímos que $U_\epsilon$ é igualmente aberto.

Logo, pela Proposição 22.3, cada elemento $g$ de $G$ pode ser escrito como um produto de $n$ elementos de $U_\epsilon$: $g = g_1 \cdots g_n$, onde $g_i = \exp(l_i)$ com $l_i \in V_\epsilon$. Agora, como a álgebra é nilpotente, vale $\exp(l_1) \cdots \exp(l_n) = \exp(l_1 * \cdots * l_n)$. Com isso, fica demonstrada a seguinte afirmação: se $G$ é um subgrupo conexo fechado de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ e se sua álgebra de Lie $\mathcal{L}_G$ é nilpotente, então todo elemento de $G$ pode ser escrito como exponencial de um elemento de $\mathcal{L}_G$. Um exemplo dessa situação é o grupo de Heisenberg $\mathrm{GH}_3$, tratado à página 1127.

*Observação 1.* O número $n$ mencionado no último parágrafo pode não ser o mesmo para todo $g \in G$ (vide o enunciado da Proposição 22.3), podendo eventualmente crescer arbitrariamente quando $g$ varia no grupo. Porém, como a álgebra $\mathcal{L}_G$ é nilpotente, o produto $l_1 * \cdots * l_n$ está sempre definido para qualquer $n$. ♣

*Observação 2.* Nas circunstâncias descritas acima, é fácil constatar que a função exponencial $\exp : \mathcal{L}_G \to G$ é um isomorfismo do grupo $(\mathcal{L}_G, *)$ em $G$. ♣

Grupos de Lie com álgebras de Lie nilpotentes não são os únicos grupos de Lie para os quais vale que todo seu elemento pode ser escrito como exponencial de um elemento da sua álgebra de Lie. É possível mostrar que grupos de Lie compactos com álgebras de Lie semissimples também têm essa propriedade. Para uma demonstração vide, por exemplo, [488]. Vimos isso de modo explícito quando tratarmos dos grupos SO(3), SU(2), SU($n$) e SO($n$) no Capítulo 21, página 1114.

Para grupos de Lie não-conexos tipicamente ocorre que não se pode escrever todos os seus elementos como exponenciais de elementos de sua álgebra de Lie. Tal é, por exemplo, o caso do grupo de Lie $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, cuja álgebra de Lie é $\mathrm{Mat}(\mathbb{R}, 2)$. A exponencial de matrizes reais $2 \times 2$ é sempre formada por matrizes com determinante positivo (pela Proposição 10.14, página 548, ou pela Proposição 11.7, página 662), enquanto que GL(2, $\mathbb{R}$) possui também matrizes com determinante negativo. Vide Proposição 11.11, página 667.

Porém, como veremos no exemplo discutido em detalhe à página 1315, não basta que um grupo de Lie seja conexo para que todos os seus elementos possam ser escritos como exponenciais de elementos de sua álgebra de Lie. Em vários casos, todavia, os elementos do grupo podem ser escritos como um produto finito de exponenciais. Tal também ocorre no exemplo da página 1315.

Para um grupo de Lie conexo $G$ é possível, sob hipóteses adequadas que não discutiremos aqui, construir um grupo de Lie simplesmente conexo a partir de sua álgebra de Lie, usando um procedimento semelhante ao que empregamos quando discutimos acima o caso de álgebras de Lie nilpotentes. Constrói-se primeiramente uma vizinhança $U$ da identidade que seja simétrica (ou seja, se $g \in U$ então $g^{-1} \in U$) – por exemplo a vizinhança na qual a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff converge, no caso de matrizes – e em seguida considera-se o conjunto formado por produtos finitos de elementos de $U$, o chamado *grupo gerado por* $U$. Esse conjunto é em geral um grupo de Lie simplesmente conexo que é um recobrimento do grupo original $G$.

## 22.5.2 Alguns Exemplos Especiais

• **Um subgrupo conexo não-fechado de GL(2, $\mathbb{C}$)**

Exibiremos aqui um exemplo de um subgrupo conexo não-fechado de GL(2, $\mathbb{C}$) o qual é um grupo de Lie mas não é um subgrupo de Lie de GL(2, $\mathbb{C}$). Isso significa que a topologia que faz desse subgrupo $H_a$ um grupo de Lie não é a topologia induzida por GL(2, $\mathbb{C}$) em $H_a$.

Esse exemplo é bastante instrutivo e ilustra o porquê de haver certas dificuldades sutis de natureza topológica na teoria dos grupos de Lie (e na geometria diferencial, em geral).

O grupo em questão é o seguinte grupo de matrizes a um parâmetro real:

$$H_a := \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{iat} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \right\},$$

onde $a$ é um número real irracional fixo arbitrário. Para mostrar que esse grupo não é fechado, vamos exibir uma sequência convergente de matrizes de $H_a$ que não converge a um elemento de $H_a$. Considere $t_n = (2n+1)\pi$ com $n \in \mathbb{N}_0$. As matrizes de $H_a$ correspondentes a esses valores de $t$ são $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^{i2\pi a(2n+1)} \end{pmatrix}$. Sucede que, como $a$ é irracional, os números complexos da forma $e^{i2\pi a(2n+1)}$, com $n \in \mathbb{N}_0$, formam um conjunto denso em todo o círculo unitário do plano complexo[33]. Assim, existe uma subsequência $n_k$ tal que $e^{i2\pi a(2n_k+1)}$ converge a $-1$ quando $k \to \infty$. Isso mostra que a matriz $-\mathbb{1}$ está no fecho de $H_a$. Sucede, porém, que $-\mathbb{1} \notin H_a$ pois, para $a$ irracional, não existe nenhum $t$ real tal que valham simultaneamente $e^{it} = -1$ e $e^{iat} = -1$ (prove isso). Isso mostra que $H_a$ não é fechado.

Por outro lado, é claro que há uma aplicação bijetora de $\mathbb{R}$ em $H_a$ dada por $\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{iat} \end{pmatrix}$, a qual induz a topologia usual de $\mathbb{R}$ em $H_a$, topologia essa na qual $H_a$ é um grupo de Lie, como facilmente se vê. Essa topologia não coincide com a topologia induzida em $H_a$ pela norma de matrizes em $H_a$.

Há uma maneira geométrica de entender o que está acontecendo nesse grupo. Considere o seguinte grupo de Lie de matrizes $2 \times 2$:

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{is} \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

[33] O leitor para o qual esse fato não é familiar poderá encontrar demonstrações em bons livros sobre teoria de números, por exemplo [226].

Esse grupo de Lie (a dois parâmetros reais) pode ser visualizado como um toro bidimensional (pois é o produto Cartesiano de dois círculos: o círculo $e^{it}$ com $t \in \mathbb{R}$ e o círculo $e^{is}$ com $s \in \mathbb{R}$). Cada grupo $H_a$ é um subgrupo de $T$ e, nessa imagem, corresponde a uma curva (pois cada $H_a$ é unidimensional) que preenche densamente o toro sem autocruzamentos. Dessa forma entende-se que o fecho de $H_a$ na topologia da norma das matrizes é o grupo $T$.

Se imaginarmos um aberto no toro, veremos que este intersecta a curva que corresponde a $H_a$ em infinitos segmentos. Assim, $H_a$ não é uma subvariedade de $T$ e, portanto, apesar de ser um subgrupo de $T$, $H_a$ não pode ser um subgrupo de Lie de $T$ na topologia de $T$.

### • Exponenciação e álgebras de Lie matriciais. Um contraexemplo

Vamos agora apresentar um exemplo de um grupo de Lie conexo no qual não podemos escrever todos os seus elementos como exponenciais de elementos de sua álgebra de Lie, ou seja, a exponencial de sua álgebra de Lie não é sobrejetora no grupo.

Seja $\alpha$ um número real irracional[34] fixo. Vamos considerar o seguinte conjunto de matrizes complexas $2 \times 2$:

$$\mathcal{H}_\alpha := \{h(t,\ z),\ t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}\} ,$$

onde

$$h(t,\ z) := \begin{pmatrix} e^{it} & z \\ 0 & e^{i\alpha t} \end{pmatrix} . \tag{22.33}$$

Afirmamos que $\mathcal{H}_\alpha$ é um subgrupo de $\mathrm{GL}(2,\ \mathbb{C})$. De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= h(0,\ 0) \in \mathcal{H}_\alpha , \\ h(t,\ z)h(t',\ z') &= h(t+t',\ ze^{i\alpha t'} + z'e^{it}) \in \mathcal{H}_\alpha \quad \text{e} \\ h(t,\ z)^{-1} &= h(-t,\ -ze^{-i(1+\alpha)t}) \in \mathcal{H}_\alpha . \end{aligned}$$

**E. 22.20** *Exercício*. Verifique! ✠

$\mathcal{H}_\alpha$ é um grupo de Lie conexo parametrizado por $t \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$. De fato, o grupo $\mathcal{H}_\alpha$ é homeomorfo à variedade conexa $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$. O homeomorfismo de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ em $\mathcal{H}_\alpha$ é dado pela função $h$ definida em (22.33), isto é, $h : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathcal{H}_\alpha$,

$$(t,\ z) \mapsto h(t,\ z) := \begin{pmatrix} e^{it} & z \\ 0 & e^{i\alpha t} \end{pmatrix} .$$

Claramente, $h$ é contínua. Vamos mostrar que $h$ é bijetora. Suponha que existam $(t,\ z)$ e $(t',\ z') \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ tais que $h(t,\ z) = h(t',\ z')$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} e^{it} & z \\ 0 & e^{i\alpha t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it'} & z' \\ 0 & e^{i\alpha t'} \end{pmatrix} .$$

Isso implica as três seguintes condições simultâneas:

$$e^{it} = e^{it'} \tag{22.34}$$

$$e^{i\alpha t} = e^{i\alpha t'} \tag{22.35}$$

$$z = z' . \tag{22.36}$$

[34] Como veremos abaixo, é crucial para a construção desejada que $\alpha$ não seja racional.

As relações (22.34) e (22.35) implicam

$$t \;=\; t' + 2\pi k \qquad \text{e} \qquad \alpha t \;=\; \alpha t' + 2\pi l \;,$$

respectivamente, para $k,\ l \in \mathbb{Z}$. Assim, multiplicando-se a primeira igualdade por $\alpha$ e subtraindo-se da segunda, teríamos

$$\alpha k \;=\; l$$

para $k,\ l \in \mathbb{Z}$. Isso, porém, é impossível se $\alpha$ for um número irracional, a menos que $k = l = 0$. Com isso, concluímos que $t = t'$, fato esse que, juntamente com (22.36), prova que $h$ é uma bijeção. Mais ainda, é bem claro que $h$ é infinitamente diferenciável e, portanto, é um difeomorfismo.

Vamos determinar os geradores infinitesimais de $\mathcal{H}_\alpha$, que denotaremos por $\lambda_1,\ \lambda_2$:

$$\lambda_1 \;:=\; \frac{\partial}{\partial t}h(t,\ z)\Big|_{t=z=0} \;=\; \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i\alpha \end{pmatrix} ,$$

$$\lambda_2 \;:=\; \frac{\partial}{\partial z}h(t,\ z)\Big|_{t=z=0} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

**E. 22.21** *Exercício*. Verifique! ✠

Um elemento genérico da álgebra de Lie $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\alpha)$ associada a $\mathcal{H}_\alpha$ é, portanto, da forma

$$\mathfrak{h}(\tau,\ w) \;:=\; \tau\lambda_1 + w\lambda_2 \;=\; \begin{pmatrix} i\tau & w \\ 0 & i\alpha\tau \end{pmatrix} ,$$

com $\tau \in \mathbb{R}$ e $w \in \mathbb{C}$.

**E. 22.22** *Exercício*. Constate que $[\lambda_1,\ \lambda_2] = i(1-\alpha)\lambda_2$. Conclua daí que a álgebra de Lie $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\alpha)$ associada a $\mathcal{H}_\alpha$ não é nilpotente, não é simples e não é semissimples, mas é solúvel. ✠

Vamos nos dedicar agora a calcular $\exp(\mathfrak{h}(\tau,\ w))$. É muito fácil provar que

$$\mathfrak{h}(\tau,\ w)^2 \;=\; \begin{pmatrix} (i\tau)^2 & w(i\tau)(1+\alpha) \\ 0 & (i\alpha\tau)^2 \end{pmatrix}$$

e que

$$\mathfrak{h}(\tau,\ w)^3 \;=\; \begin{pmatrix} (i\tau)^3 & w(i\tau)^2(1+\alpha+\alpha^2) \\ 0 & (i\alpha\tau)^3 \end{pmatrix} .$$

Por indução, vê-se também que

$$\mathfrak{h}(\tau,\ w)^n \;=\; \begin{pmatrix} (i\tau)^n & w(i\tau)^{n-1}\left(\sum\limits_{p=0}^{n-1}\alpha^p\right) \\ & \\ 0 & (i\alpha\tau)^n \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} (i\tau)^n & w(i\tau)^{n-1}\left(\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\right) \\ & \\ 0 & (i\alpha\tau)^n \end{pmatrix} ,$$

para todo $n \geq 1$. Na última igualdade usamos a bem conhecida fórmula da progressão geométrica.

**E. 22.23** *Exercício importante*. Prove as afirmações acima. ✠

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \exp(\mathfrak{h}(\tau,\ w)) \;&=\; \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\mathfrak{h}(\tau,\ w)^n \\ &=\; \begin{pmatrix} 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(i\tau)^n & w\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(i\tau)^{n-1}\left(\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\right) \\ & \\ 0 & 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(i\alpha\tau)^n \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} e^{i\tau} & wf(\tau) \\ & \\ 0 & e^{i\alpha\tau} \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

onde

$$f(\tau) \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\tau)^{n-1}\left(\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\right) .$$

Vamos agora expressar melhor a função $f(\tau)$. Note-se que $f(0) = 1$ e que, para $\tau \neq 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\tau)^{n-1}\left(\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\right) \;&=\; \frac{1}{1-\alpha}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\tau)^{n-1} - \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\alpha\tau)^{n-1}\right) \\ &=\; \frac{1}{1-\alpha}\left[\left(\frac{e^{i\tau}-1}{i\tau}\right) - \left(\frac{e^{i\alpha\tau}-1}{i\tau}\right)\right] \\ &=\; \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{e^{i\tau}-e^{i\alpha\tau}}{i\tau}\right) \\ &=\; \frac{e^{i\alpha\tau}}{1-\alpha}\left(\frac{e^{i(1-\alpha)\tau}-1}{i\tau}\right) . \end{aligned}$$

Assim,

$$f(\tau) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{para } \tau = 0, \\ & \\ \dfrac{e^{i\alpha\tau}}{1-\alpha}\left(\dfrac{e^{i(1-\alpha)\tau}-1}{i\tau}\right), & \text{para } \tau \neq 0 \end{cases}$$

e, finalmente,

$$\exp(\mathfrak{h}(\tau,\ w)) \;=\; \begin{pmatrix} e^{i\tau} & wf(\tau) \\ & \\ 0 & e^{i\alpha\tau} \end{pmatrix} . \tag{22.37}$$

A questão que agora se põe é: será o conjunto de matrizes $\exp(\mathcal{L}(\mathcal{H}_\alpha)) := \{\exp(\mathfrak{h}(\tau,\ w)),\ \tau \in \mathbb{R},\ w \in \mathbb{C}\}$ igual a $\mathcal{H}_\alpha$? A resposta é **não**! Para provar isso mostraremos que as matrizes $h\left(\frac{2\pi}{1-\alpha},\ z\right)$ com $z \neq 0$ **não** são elementos do conjunto $\exp(\mathcal{L}(\mathcal{H}_\alpha))$. Se tal não fosse o caso, existiriam $\tau \in \mathbb{R}$ e $w \in \mathbb{C}$ tais que

$$h\left(\frac{2\pi}{1-\alpha},\ z\right) \;=\; \exp(\mathfrak{h}(\tau,\ w)) \;,$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{1-\alpha}} & z \\ & \\ 0 & e^{i\frac{2\pi\alpha}{1-\alpha}} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} e^{i\tau} & wf(\tau) \\ & \\ 0 & e^{i\alpha\tau} \end{pmatrix}.$$

Isso só é possível se as seguintes três condições forem satisfeitas simultaneamente:

$$e^{i\frac{2\pi}{1-\alpha}} \;=\; e^{i\tau}, \tag{22.38}$$

$$e^{i\frac{2\pi\alpha}{1-\alpha}} \;=\; e^{i\alpha\tau} \;, \tag{22.39}$$

$$z \;=\; wf(\tau). \tag{22.40}$$

As condições (22.38) e (22.39) implicam

$$\tau \;=\; \frac{2\pi}{1-\alpha} + 2\pi k \qquad \text{e} \qquad \alpha\tau \;=\; \frac{2\pi\alpha}{1-\alpha} + 2\pi l \;,$$

respectivamente, com $k,\ l \in \mathbb{Z}$. Das duas concluí-se (multiplicando a primeira por $\alpha$) que $2\pi k\alpha = 2\pi l$, ou seja, $k\alpha = l$. Porém, como $\alpha$ foi suposto ser um número <u>irracional</u>, isso só é possível se $k = l = 0$. Portanto

$$\tau \;=\; \frac{2\pi}{1-\alpha} \;.$$

Ocorre agora, porém, que inserindo-se esse valor de $\tau$ no lado direito de (22.40) obtemos

$$wf\left(\frac{2\pi}{1-\alpha}\right) \;=\; w\,\frac{e^{i\frac{2\pi\alpha}{1-\alpha}}}{1-\alpha}\left(\frac{e^{i(1-\alpha)\frac{2\pi}{1-\alpha}}-1}{i\frac{2\pi}{1-\alpha}}\right) \;=\; w\,e^{i\frac{2\pi\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{e^{2\pi i}-1}{2\pi i}\right) \;=\; 0$$

e, consequentemente, (22.40) não pode ser satisfeita para $z \neq 0$.

Esse exemplo ilustra bem o fato mencionado de haver situações nas quais a imagem pela exponenciação da álgebra de Lie $\mathcal{L}(G)$ associada a um grupo de Lie $G$ não coincide com o grupo $G$.

**E. 22.24** *Exercício*. Seja um grupo de Lie simplesmente conexo $G$, cuja álgebra de Lie é $\mathcal{L}$. Um teorema devido a Dixmier [244]-[245] afirma, entre outras coisas, que $\exp(\mathcal{L}) = G$ se exp for injetora. Mostre que $(\tau,\ w) \mapsto \exp(\mathfrak{h}(\tau,\ w))$ definida em (22.37) não é injetora. ✠

No exemplo acima vale, porém, a seguinte afirmação: todo elemento de $\mathcal{H}_\alpha$ pode ser escrito como produto de duas exponenciais de elementos da álgebra de Lie $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\alpha)$, a saber, da forma

$$\exp(\mathfrak{h}(\tau,\ 0))\exp(\mathfrak{h}(0,\ w)) \;.$$

De fato, é bem fácil ver que

$$h(t,\ z) \ = \ \begin{pmatrix} e^{it} & z \\ 0 & e^{i\alpha t} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{-it}z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \exp(\mathfrak{h}(t,\ 0))\exp(\mathfrak{h}(0,\ e^{-it}z)) \ .$$