Capítulo 30
A Medida de Lebesgue e a Medida de Hausdorff

Sumário

O presente capítulo é dedicado à construção da medida de Lebesgue e da medida de Hausdorff segundo os passos delineados no Teorema de Carathéodory, Teorema 29.1, página 1564 e no Teorema 29.4, página 1573. A medida de Lebesgue[1] em $\mathbb{R}$ é o nome dado à medida de comprimento usual de certos subconjuntos adequados da reta real. O termo "adequado" é crucial aqui pois, como discutimos no início do Capítulo 29, não é para qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ que o conceito de comprimento está definido. É, portanto, essencial determinar σ-álgebras para cujos elementos a noção de comprimento não envolva paradoxos como os que encontramos quando tratamos do comprimento do conjunto de Vitali (página 1557). Fora isso, desejamos que essa medida de comprimento satisfaça certas condições adicionais, a mais importante sendo a invariância por translações. Desejamos também que os intervalos (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$ e $[a, b)$ sejam todos mensuráveis e com medida $b - a$.

Com intuito de atingir maior generalidade apresentaremos a construção da medida de Lebesgue nos espaços $\mathbb{R}^n$. Para construir a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ seguiremos a estratégia sugerida pelo Teorema de Carathéodory (Teorema 29.1, página 1564): vamos primeiro construir uma medida exterior sobre os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que seja conveniente aos nossos propósitos. O Teorema de Carathéodory, então, afirma que existe uma σ-álgebra $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ sobre a qual a medida exterior é uma medida. Essa σ-álgebra é denominada *σ-álgebra de Lebesgue* e a medida correspondente é denominada *medida de Lebesgue*.

Em seguida, na Seção 30.2, página 1589, apresentaremos a construção das chamadas medidas de Hausdorff[2], as quais têm relevância no estudo de conjuntos ditos fractais, os quais aparecem em diversas áreas da Física e da Matemática, notadamente na teoria dos Sistemas Dinâmicos, por exemplo, na forma de atratores de soluções de certas equações diferenciais.

A Seção 30.3, página 1593, é dedicada ao estudo dos chamados conjuntos de Cantor, que exibem ilustrativamente diversas propriedades de interesse.

30.1 A Construção da Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$

Construiremos a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ seguindo o esquema descrito na Proposição 29.2 e no Teorema 29.4 da Seção 29.4, página 1572. Para tal devemos definir os seguintes ingredientes: *1.* uma coleção de conjuntos $\mathfrak{R}$ de $\mathbb{R}^n$; *2.* uma função positiva h definida em $\mathfrak{R}$ e *3.* para cada $A \subset \mathbb{R}^n$ uma coleção $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(A)$ de recobrimentos contáveis de A por elementos de $\mathfrak{R}$, ingredientes estes que devem satisfazer as condições da Proposição 29.2 e do Teorema 29.4.

Para $\mathfrak{R}$ escolhemos a coleção de todos os n-cubos semiabertos limitados da forma $R = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$ com $-\infty < a_k < b_k < \infty$ para todo $k = 1, \ldots, n$. O conjunto vazio é também honorificamente (e convenientemente)

[1] Henri Léon Lebesgue (1875–1941).
[2] Felix Hausdorff (1868–1942).

incluído em $\mathfrak{R}$. A escolha de cubos semiabertos, e não abertos ou fechados, deve-se essencialmente a dois fatos: *1.* com eles torna-se mais fácil demonstrar a invariância por rotações da medida de Lebesgue; *2.* com eles torna-se mais simples provar que a medida de Lebesgue é uma medida métrica.

Por exemplo, para $n = 1$ cada 1-cubo $R \in \mathfrak{R}$ é um intervalo semiaberto limitado $[a,\ b)$ com $-\infty < a < b < \infty$. Para $n = 2$ um 2-cubo $R \in \mathfrak{R}$ é um retângulo semiaberto limitado da forma $[a_1,\ b_1) \times [a_2,\ b_2) \subset \mathbb{R}^2$, de lados $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$, respectivamente, com $-\infty < a_k < b_k < \infty$, $k = 1,\ 2$.

Para cada n-cubo R da forma $R = [a_1,\ b_1) \times \cdots \times [a_n,\ b_n) \subset \mathbb{R}^n$ definimos

$$h(R) \ := \ (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) \tag{30.1}$$

que corresponde ao n-volume do n-cubo R. Definimos também $h(\emptyset) := 0$.

Como na Seção 29.4, para cada $A \subset \mathbb{R}^n$ denotamos por $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(A)$ a coleção de todos os recobrimentos de A por coleções contáveis de n-cubos semiabertos e limitados.

Com essas escolhas é relativamente fácil constatar a validade das hipóteses do Teorema 29.4, página 1573. Em particular, todo $A \subset \mathbb{R}^n$ possui um recobrimento por coleções contáveis de n-cubos semiabertos e limitados. A Proposição 29.2, página 1572, e o Teorema 29.4, página 1573, garantem que

$$\overline{\mu}_L(A) \ := \ \inf\Big\{H(\mathcal{R}),\ \ \mathcal{R} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(A)\Big\} \ := \ \inf\left\{\sum_{R_n \in \mathcal{R}} h(R_n),\ \ \mathcal{R} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(A)\right\} , \tag{30.2}$$

definida para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, é uma medida exterior em $\mathbb{R}^n$, denominada *medida exterior de Lebesgue* de $\mathbb{R}^n$.

Devemos gastar algumas palavras sobre a interpretação de (30.2). A coleção $\mathfrak{R}$ é uma coleção de cubos n-dimensionais e, para um tal n-cubo R, a função $h(R)$ fornece o volume de R. Assim, $H(\mathcal{R})$ fornece a soma de uma coleção contável $\mathcal{R}$ de n-cubos e $\overline{\mu}(A)$ é o menor valor possível (o ínfimo) de $H(\mathcal{R})$ dentre todas as coleções contáveis de n-cubos que recobrem A.

Com isso em mãos, temos agora permissão para evocar o Teorema de Carathéodory (Teorema 29.1, página 1564), e afirmar que a coleção $\mathcal{M}_{\overline{\mu_L}}$ formada por todos os subconjuntos A de $\mathbb{R}^n$ que tenham a propriedade

$$\overline{\mu_L}(E) \ = \ \overline{\mu_L}(E \cap A) + \overline{\mu_L}(E \cap A^c) \ , \qquad \forall E \subset \mathbb{R}^n \ ,$$

é uma σ-álgebra e que $\overline{\mu_L}$ é uma medida em $\mathcal{M}_{\overline{\mu_L}}$, que denotaremos por μ_L. A medida μ_L assim definida é chamada de *medida de Lebesgue* de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_{\overline{\mu_L}}$ é chamada de *σ-álgebra de Lebesgue* de $\mathbb{R}^n$. Os elementos de $\mathcal{M}_{\overline{\mu_L}}$ são chamados de *conjuntos mensuráveis por Lebesgue* de $\mathbb{R}^n$.

Antes de mostrarmos que a coleção $\mathcal{M}_{\overline{\mu_L}}$ é de fato não trivial (um fato que não é óbvio até aqui), o que faremos na Seção 30.1.1, vamos exibir duas propriedades básicas da medida de Lebesgue: invariância por translações e regularidade.

• Invariância de μ_L por translações

A medida e Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ satisfaz um requerimento básico associado à noção usual de volume de conjuntos: invariância por translações. Mais precisamente, tem-se que para todo $A \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}_{\mu_L}$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$ o conjunto transladado $A_x := \{y \in \mathbb{R}^n,\ y - x \in A\}$ é também elemento de $\mathcal{M}_{\mu_L}$ e tem-se $\mu_L(A_x) = \mu_L(A)$. A demonstração desses fatos é simples e é deixada como exercício ao estudante.

E. 30.1 *Exercício*. Prove que para todo $A \in \mathcal{M}_{\mu_L}$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se $A_x \in \mathcal{M}_{\mu_L}$ e que $\mu_L(A_x) = \mu_L(A)$. Sugestão: Prove primeiro que para todo $E \subset \mathbb{R}^n$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se $\overline{\mu_L}(E_x) = \overline{\mu_L}(E)$. Para isso, use a definição (30.2) e o fato evidente que para a função h definida em (30.1) vale

$$h\big([a_1 + x_1,\ b_n + x_1) \times \cdots \times [a_n + x_n,\ b_n + x_n)\big) \ = \ h\big([a_1,\ b_n) \times \cdots \times [a_n,\ b_n)\big) \ .$$

Em seguida, use esse fato para mostrar que se A é mensurável por Lebesgue então A_x também o é (para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$), ou seja, mostre que se $\overline{\mu_L}(E) = \overline{\mu_L}(E \cap A) + \overline{\mu_L}(E \cap A^c)$ para todo $E \subset \mathbb{R}^n$ então $\overline{\mu_L}(E) = \overline{\mu_L}(E \cap A_x) + \overline{\mu_L}(E \cap A_x^c)$ para todo $E \subset \mathbb{R}^n$. Conclua dos fatos acima que $\mu_L(A_x) = \mu_L(A)$ para todo $A \in \mathcal{M}_{\mu_L}$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$. ✠

A invariância da medida de Lebesgue por translações tem a seguinte consequência, que será evocada adiante:

Proposição 30.1 *Seja $A \subset [0,\ 1]$ um conjunto com medida de Lebesgue positiva: $0 < \mu_L(A) \leq \mu_L\big([0,\ 1]\big) = 1$. Então, existem subconjuntos não mensuráveis por Lebesgue em A.* □

Prova. Seguimos um argumento similar ao empregado na construção do conjunto de Vitali, discutido à página 1557 da Seção 29.1.

Consideramos em A a relação de equivalência $x \sim y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}$ e evocamos o Axioma da Escolha (vide página 72 da Seção 1.1.2.6) para construir um novo conjunto $V \subset A$ tomando um, e somente um, representante de cada classe de equivalência. Seja $V_r := V + r$, o transladado de V por $r \in \mathbb{Q}$. Afirmamos que $V_r \cap V_s = \emptyset$ sempre que $r \neq s$, ambos racionais. De fato, se existir $u \in V_r \cap V_s$ teríamos $u = v + r$ e $u = v' + s$ e para $v, \ v' \in V$. Logo, $v - v' = s - r \in \mathbb{Q}$, o que implica $v \sim v'$. Mas isso só é possível se $v = v'$ pois, ao construirmos V, tomamos um e somente um elemento de cada classe de equivalência de A, o que significa dizer que elementos distintos de V não podem ser equivalentes. Por outro lado, se $v = v'$ a relação $v - v' = s - r$ diz que $s = r$, o que contraria as hipóteses. Logo $V_r \cap V_s = \emptyset$ se $r, \ s \in \mathbb{Q}$ com $r \neq s$.

Disso segue que

$$A \ \subset \ \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} V_r \ \subset \ [-1, \ 2] \ , \tag{30.3}$$

onde $\mathbb{Q}_1 := [-1, \ 1] \cap \mathbb{Q}$. A inclusão $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} V_r \ \subset \ [-1, \ 2]$ é óbvia pois V é um subconjunto do intervalo $[0, \ 1]$ e, ao transladarmos V por um número r do conjunto $\mathbb{Q}_1$ podemos no máximo cair dentro de $[-1, \ 2]$.

A inclusão $A \ \subset \ \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} V_r$ pode ser vista da seguinte forma. Se $x \in A$, então x pertence a uma classe de equivalência $\mathcal{V}$. Seja v o elemento de $\mathcal{V}$ que foi escolhido para comparecer em V como o representante de $\mathcal{V}$. Como x e v são membros da mesma classe de equivalência, então $x - v$ é um racional: s. Como x e v são elementos de A, então sua diferença deve ser um elemento de $[-1, \ 1]$. Assim, vemos que $s \in \mathbb{Q}_1$. Logo, $x \in V_s$ com $s \in \mathbb{Q}_1$. Como isso vale para todo $x \in A$, segue que $A \ \subset \ \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} V_r$ como queríamos mostrar.

Segue de (30.3) que $\mu_L(A) \leq \sum_{r \in \mathbb{Q}_1} \mu_L(V_r) \leq \mu_L\big([-1, \ 2]\big)$, ou seja,

$$\mu_L(A) \ \leq \ \sum_{r \in \mathbb{Q}_1} \mu_L(V) \ \leq \ 3 \ , \tag{30.4}$$

sendo o que acima usamos que $\mu_L(V_r) = \mu_L(V)$, pela invariância translacional de μ_L. Ora, as desigualdades em (30.4) são absurdas caso $\mu_L(V)$ exista: se $\mu_L(V) = 0$ a primeira desigualdade é falsa (pois supostamente $\mu_L(A) > 0$) e se $\mu_L(V) > 0$, a segunda desigualdade é absurda. Logo, V não pode ser mensurável por Lebesgue. ■

Vale notar que a conclusão só foi possível pois supusemos $\mu_L(A) > 0$, pois se tivéssemos $\mu_L(A) = 0$, valeria, em lugar de (30.4), $0 \leq \sum_{r \in \mathbb{Q}_1} \mu_L(V) = 3$, o que é compatível com $\mu_L(V) = 0$, e não teríamos um absurdo.

- **Regularidade de μ_L**

A medida μ_L possui as seguintes propriedades. Para todo $B \in \mathcal{M}_{\mu_L}$ vale

$$\mu_L(B) \ = \ \sup\{\mu_L(C), \ \ C \text{ compacto com } C \subset B\} \qquad \text{(regularidade interior)} \ , \tag{30.5}$$

$$\mu_L(B) \ = \ \inf\{\mu_L(A), \ \ A \text{ aberto com } A \supset B\} \qquad \text{(regularidade exterior)} \ . \tag{30.6}$$

Aqui, a topologia considerada é a topologia usual de $\mathbb{R}^n$, $\tau_{\mathbb{R}^n}$. Não apresentaremos as demonstrações aqui e o leitor poderá encontrá-las nos bons livros sobre teoria da medida (por exemplo, em [453] ou em [454]). Mencionamos que as propriedades de regularidade acima são importantes em vários desenvolvimentos.

*

Uma questão muito importante agora é saber se $\mathcal{M}_{\overline{\mu_L}}$ não é uma σ-álgebra trivial e se certos conjuntos “razoáveis”, tais como intervalos abertos, fechados e semiabertos, são mensuráveis por Lebesgue. A resposta a esta questão é dada na próxima seção, onde discutiremos a relação entre a σ-álgebra de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e a σ-álgebra de Borel.

30.1.1 A σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$ e a Medida de Borel-Lebesgue

Até o momento nada indica que a σ-álgebra de Lebesgue construída acima contenha elementos não triviais, mas provaremos agora que todo conjunto Boreliano de $\mathbb{R}^n$ é mensurável por Lebesgue.

A chamada *σ-álgebra de Borel*[3] em $\mathbb{R}^n$ é, por definição, a menor σ-álgebra que contém a topologia usual de $\mathbb{R}^n$, $\tau_{\mathbb{R}^n}$, induzida pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^n$. Ou seja, é a σ-álgebra $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}^n}]$ gerada pela topologia $\tau_{\mathbb{R}^n}$. Vide definição à página 1538.

A afirmação que todo conjunto Boreliano de $\mathbb{R}^n$ é mensurável por Lebesgue é uma consequência, via Teorema 29.3, página 1571, do fato de que a medida exterior de Lebesgue é uma medida métrica.

Proposição 30.2 *A medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, definida em (30.2), é uma medida exterior métrica (para a definição, Seção 29.3.1, página 1569).* □

Prova. Observemos primeiramente que cada n-cubo semiaberto como $R = [a_1,\ b_1) \times \cdots \times [a_n,\ b_n) \subset \mathbb{R}^n$ com $-\infty < a_k < b_k < \infty$ para todo $k = 1,\ \ldots,\ n$, pode ser ser escrito como uma união finita de n-cubos semiabertos menores disjuntos. Por exemplo, em $n = 1$ podemos escrever $[a,\ b) = [a,\ c) \cup [c,\ b)$ com $a < c < b$. O diâmetro desses n-cubos semiabertos menores disjuntos também pode ser escolhido arbitrariamente pequeno. Por exemplo, em $n = 1$ podemos escrever um intervalo do tipo $[a,\ b)$ com $a < b$ na forma $[a,\ b) = [a,\ c_1) \cup [c_1,\ c_2) \cup \cdots \cup [c_{m-1},\ b)$ com $a \equiv c_0 < c_1 < \cdots < c_{m-1} < c_m \equiv b$ da forma

$$c_k \ = \ a + \left(\frac{b-a}{m}\right) k \ , \qquad k = 0,\ \ldots,\ m \ ,$$

e, para qualquer $\delta > 0$ podemos fazer $|c_k - c_{k+1}| = (b-a)/m < \delta$ para todo $k = 0,\ \ldots,\ m$, tomando m grande o suficiente (a saber, $m > (b-a)/\delta$). Com isso, é fácil perceber que a definição (30.2) equivale a

$$\overline{\mu}_L(A) \ = \ \inf_{\delta>0} \inf \Big\{ H(\mathcal{R}),\ \ \mathcal{R} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(A) \Big\} \ = \ \inf_{\delta>0} \inf \left\{ \sum_{R_n \in \mathcal{R}} h(R_n),\ \ \mathcal{R} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(A) \right\} \ , \tag{30.7}$$

para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, onde os elementos de $\mathfrak{R}_\delta$ são n-cubos semiabertos de diâmetro menor ou igual a δ.

Suponhamos agora que A e $B \subset \mathbb{R}^n$ sejam tais $d(A,\ B) = \epsilon > 0$. Se $\mathcal{R}$ é um recobrimento de $A \cup B$ por n-cubos semiabertos de diâmetro menor ou igual a δ e δ for escolhido menor que ϵ, então é possível afirmar que $\mathcal{R}$ é a união de três conjuntos disjuntos: $\mathcal{R}_A$, $\mathcal{R}_B$ e $\mathcal{R}_0$, sendo $\mathcal{R}_A$ um recobrimento de A que não intersecta B, $\mathcal{R}_B$ um recobrimento de B que não intersecta A e $\mathcal{R}_0$ que não intersecta A nem B. Se assim não fosse, existiria um n-cubo em $\mathcal{R}$ intersectando A e B, o que só é possível se seu diâmetro fosse maior que ϵ.

Notemos que $\mathcal{R}_A \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(A)$, que $\mathcal{R}_B \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(B)$ e que, importante, $\mathcal{R}_0$ pode ser vazio. Tem-se, portanto,

$$\sum_{R_n \in \mathcal{R}} h(R_n) \ = \ \sum_{R_n \in \mathcal{R}_A} h(R_n) + \sum_{R_n \in \mathcal{R}_B} h(R_n) + \sum_{R_n \in \mathcal{R}_0} h(R_n)$$

devido à disjunção dos conjuntos e $\mathcal{R}_A$, $\mathcal{R}_B$ e $\mathcal{R}_0$. Logo,

$$\sum_{R_n \in \mathcal{R}} h(R_n) \ \geq \ \sum_{R_n \in \mathcal{R}_A} h(R_n) + \sum_{R_n \in \mathcal{R}_B} h(R_n) \ .$$

Logo, ao tomarmos o ínfimo sobre $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(A \cup B)$ em (30.7) podemos nos restringir a conjuntos $\mathcal{R}$ da forma $\mathcal{R}_A \cup \mathcal{R}_B$ como descritos acima (com $\mathcal{R}_0$ vazio). Disso segue que

$$\overline{\mu}_L(A \cup B) \ = \ \inf_{\delta>0} \inf \left\{ \sum_{R_n \in \mathcal{R}} h(R_n),\ \ \mathcal{R} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(A) \right\} + \inf_{\delta>0} \inf \left\{ \sum_{R_n \in \mathcal{R}} h(R_n),\ \ \mathcal{R} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(B) \right\} \ = \ \overline{\mu}_L(A) + \overline{\mu}_L(B) \ ,$$

completando a prova que $\overline{\mu}_L$ é uma medida exterior métrica. ■

Segue imediatamente do Teorema 29.3, página 1571, a seguinte afirmação:

[3] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956).

Teorema 30.1 *A σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$, denotada por $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}^n}]$ que, por definição, é a menor σ-álgebra que contém a topologia usual $\tau_{\mathbb{R}^n}$ de $\mathbb{R}^n$ (a topologia induzida pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^n$) é um subconjunto da σ-álgebra de Lebesgue $\mathcal{M}_{\overline{\mu}_L}$:*

$$\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}^n}] \subset \mathcal{M}_{\overline{\mu}_L} . \tag{30.8}$$

□

• A cardinalidade de $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$ e de $\mathcal{M}_{\overline{\mu_L}}$

Um fato importante, mas que não provaremos com todos os detalhes aqui, é que a σ-álgebra de Borel $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}^n}]$ é um subconjunto próprio[4] de $\mathcal{M}_{\overline{\mu_L}}$, ou seja, que há conjuntos que são mensuráveis de Lebesgue mas que não são elementos da σ-álgebra de Borel. Exemplos não são simples de exibir, mas alguns deles serão apresentados na Seção 30.4, página 1602. Historicamente, a relação entre $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}^n}]$ e $\mathcal{M}_{\overline{\mu_L}}$ foi estudada em 1916 por Hausdorff[5], que provou também que a cardinalidade[6] de $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}^n}]$ é a de $\mathbb{R}$, enquanto que a de $\mathcal{M}_{\overline{\mu_L}}$ é maior, sendo a de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$).

Para discutirmos o fato de que a σ-álgebra de Borel $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}^n}]$ é um subconjunto próprio de $\mathcal{M}_{\overline{\mu_L}}$ façamos primeiro notar o seguinte resultado (que, ademais, tem importância por si só) e que é um mero corolário do Teorema 29.2, página 1568:

Proposição 30.3 *A medida de Lebesgue μ_L em $\mathbb{R}^n$ é completa. Ou seja, se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto mensurável por Lebesgue e $\mu_L(A) = 0$, então todo $B \subset A$ é também mensurável de Lebesgue (um fato não trivial!) e vale $\mu_L(B) = 0$.* □

Como veremos quando discutirmos o chamado conjunto de Cantor (Seção 30.3, página 1593), há conjuntos na σ-álgebra de Lebesgue que são não contáveis, têm a cardinalidade de $\mathbb{R}$ e têm medida de Lebesgue nula. Como vimos, todos os subconjuntos de tais conjuntos são também mensuráveis e, portanto, a coleção de todos esses subconjuntos tem a cardinalidade de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ (que é maior que a de $\mathbb{R}$). Entretanto, sabe-se (por um teorema de Hausdorff) que $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$ tem a cardinalidade de $\mathbb{R}$ e portanto $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$ deve ser um subconjunto próprio de $\mathcal{M}_{\overline{\mu_L}}$.

• A medida de Borel-Lebesgue

Dada a relação (30.8) podemos considerar a restrição da medida de Lebesgue à σ-álgebra de Borel $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}^n}]$. Essa restrição da medida de Lebesgue é denominada *medida de Borel-Lebesgue*. É importante notar que a maioria dos resultados importantes da Análise, especialmente da teoria de integração, pode ser obtida considerando-se apenas a medida de Borel-Lebesgue e muitos autores tratam-na preferencialmente à medida de Lebesgue. A medida de Borel-Lebesgue não é completa.

• Conjuntos contáveis de $\mathbb{R}^n$ têm medida de Lebesgue nula

É bastante fácil de ver, pela definição, que se $a \in \mathbb{R}^n$ então $\mu_L(\{a\}) = 0$, ou seja, a medida de Lebesgue de um conjunto constituído por apenas um ponto é nula. Pela aditividade da medida, é evidente daí também que a medida de Lebesgue de qualquer subconjunto finito de $\mathbb{R}$ é igualmente nula, pois se $\{a_1, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto com m elementos distintos, tem-se

$$\mu_L\Big(\{a_1, \ldots, a_m\}\Big) = \mu_L\Big(\{a_1\} \cup \cdots \cup \{a_m\}\Big) = \mu_L\big(\{a_1\}\big) + \cdots + \mu_L\big(\{a_m\}\big) = 0 ,$$

pois $\mu_L\big(\{a_k\}\big) = 0$, $\forall k \in \{1, \ldots, m\}$.

Da mesma forma, pela aditividade contável (relação (29.2), página 1559), verifica-se que a medida de Lebesgue de qualquer subconjunto contável da reta é nula. De fato, se $\{a_k \in \mathbb{R}^n | \; k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^n$ é contável, com todos os a_k's distintos, tem-se

$$\mu_L\Big(\{a_k \in \mathbb{R}^n | \; k \in \mathbb{N} \} \Big) = \mu_L \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{a_k\} \right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_L\big(\{a_k\}\big) = 0 ,$$

[4]Aos estudantes: um conjunto A é dito ser um *subconjunto próprio* de um conjunto B se $A \subset B$ mas $A \neq B$.
[5]Felix Hausdorff. "Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen". Math. Ann. **77**: 430-437 (1916).
[6]A definição de cardinalidade de conjuntos e alguns fatos básicos sobre a mesma são introduzidos na Seção 1.1.3, página 85.

também pois $\mu_L\big(\{a_k\}\big) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Assim, concluímos, por exemplo, que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais e o conjunto $\mathbb{A}_0$ dos números algébricos são conjuntos de medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}$.

Recordando a noção de propriedade válida quase em toda a parte, introduzida à página 1562, podemos afirmar que em relação à medida de Lebesgue, quase todo número real é irracional, ou que todo número real é irracional μ_L-*q.t.p.*, pois só não são irracionais os números racionais, que formam um conjunto de medida de Lebesgue nula. Analogamente, em relação à medida de Lebesgue, quase todo número é transcendente, ou seja, todo número real é transcendente μ_L-*q.t.p.*

Um ponto que não pode deixar mencionado é que há também subconjuntos não enumeráveis de $\mathbb{R}$ que também têm medida de Lebesgue nula. Veremos exemplos quando tratarmos dos chamados conjuntos de Cantor na Seção 30.3, página 1593.

30.2 As Medidas de Hausdorff

Esta seção é dedicada à construção das chamadas medidas de Hausdorff. Vamos introduzi-las no contexto geral de espaços métricos e, posteriormente, trataremos do caso dos espaços $\mathbb{R}^n$ com a métrica usual. A importante noção de dimensão Hausdorff de um conjunto Boreliano será discutida com algum detalhe. A referência matemática mais abrangente para tais assuntos é [160]. Vide também [219].

Seja M um conjunto não vazio dotado de uma métrica d e seja τ_d a topologia induzida em M por essa métrica. Definimos o *diâmetro* $\mathfrak{d}(E)$ de um conjunto $E \subset M$ na métrica d por

$$\mathfrak{d}(E) \;:=\; \sup\big\{d(x,\ y),\ x,\ y \in E\big\}\ ,$$

que claramente representa a máxima distância possível entre pontos de E, segundo d.

A chamada *medida de Hausdorff* de dimensão $s \geq 0$ em M é definida, analogamente à medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$, pela prescrição do Teorema 29.4, página 1573, mas usando também a Proposição 29.1, página 1563.

No que segue assumiremos que o espaço métrico $(M,\ d)$ possui a seguinte propriedade:

P. Para todo $\delta > 0$ vale que todo $A \subset M$ possui ao menos um recobrimento por coleções contáveis de conjuntos com diâmetro menor ou igual a δ.

O exemplo mais importante que teremos em mente e que satisfaz a propriedade **P** é $\mathbb{R}^n$ com a métrica usual.

Para $\delta > 0$ e $s \geq 0$ fixos vamos definir os seguintes ingredientes: *1.* uma coleção de conjuntos $\mathfrak{R}_\delta$ de M; *2.* uma função positiva h_s definida em $\mathfrak{R}_\delta$ e *3.* para cada $A \subset M$ uma coleção $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(A)$ de recobrimentos contáveis de A por elementos de $\mathfrak{R}_\delta$, ingredientes estes que devem satisfazer as condições da Proposição 29.2 e do Teorema 29.4.

Para $\mathfrak{R}_\delta$ escolhemos a coleção de todos os subconjuntos de M com diâmetro menor ou igual a δ:

$$\mathfrak{R}_\delta \;:=\; \Big\{R \subset M :\ \ \mathfrak{d}(R)\ \leq\ \delta\Big\}\ .$$

O conjunto vazio é também honorificamente (e convenientemente) incluído em $\mathfrak{R}_\delta$. Para cada $R \in \mathfrak{R}_\delta$

$$h_s(R) \;:=\; \mathfrak{d}(R)^s \tag{30.9}$$

Definimos também $h_s(\emptyset) := 0$. Como na Seção 29.4, para cada $A \subset M$ denotamos por $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(A)$ a coleção de todos os recobrimentos de A por coleções contáveis de subconjuntos de M com diâmetro menor ou igual a δ.

Com nossas escolhas é relativamente fácil constatar a validade das hipóteses do Teorema 29.4, página 1573, e, em particular, a propriedade **P** garante que todo $A \subset M$ possui um recobrimento por coleções contáveis de conjuntos com diâmetro menor ou igual a δ. A Proposição 29.2, página 1572, e o Teorema 29.4, página 1573, garantem que

$$\overline{\mu}_H^{\delta,\,s}(A) \;:=\; \inf\Big\{H_s(\mathcal{R}),\ \ \mathcal{R} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(A)\Big\} \;:=\; \inf\left\{\sum_{R_n \in \mathcal{R}} h_s(R_n),\ \ \mathcal{R} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(A)\right\}\ , \tag{30.10}$$

definida para todo $A \subset M$, é uma medida exterior em M. Pela Proposição 29.1, página 1563,

$$\overline{\mu}_H^{s}(A) \;:=\; \sup_{\delta>0}\overline{\mu}_H^{\delta,\,s}(A) \;=\; \sup_{\delta>0}\inf\Big\{H_s(\mathcal{R}),\ \ \mathcal{R} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(A)\Big\} \;=\; \sup_{\delta>0}\inf\left\{\sum_{R_n \in \mathcal{R}} h_s(R_n),\ \ \mathcal{R} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(A)\right\}\ , \tag{30.11}$$

definida para todo $A \subset M$, é também uma medida exterior em M, denominada *medida exterior de Hausdorff* de dimensão s.

Nota. Segundo [160], se escolhermos $\mathfrak{R}_\delta$ como a coleção de todos os subconjuntos τ_d-abertos ou τ_d-fechados de M com diâmetro menor ou igual a δ obtemos as mesmas medidas exteriores de Hausdorff que construímos acima com nossa escolha mais geral. Essa referência menciona também um teorema, demonstrado por Besicovitch[7], que afirma que uma classe de medidas exteriores diferentes das de Hausdorff é obtida se escolhermos $\mathfrak{R}_\delta$ como sendo formado por bolas abertas de raio δ em M. Vide referências citadas em [160]. ♣

• Algumas propriedades das medidas exteriores de Hausdorff

A proposição que segue fornece uma definição alternativa útil da medida exterior de Hausdorff de dimensão $s \geq 0$.

Proposição 30.4 *Para cada $s \geq 0$ e todo $A \subset M$ vale que $\overline{\mu}_H^{\delta_1,\,s}(A) \geq \overline{\mu}_H^{\delta_2,\,s}(A)$ sempre que $0 < \delta_1 < \delta_2$. Logo, para todo $A \subset M$,*

$$\overline{\mu}_H^{s}(A) \;:=\; \lim_{\delta\to 0}\overline{\mu}_H^{\delta,\,s}(A) \;=\; \lim_{\delta\to 0}\inf\Big\{H_s(\mathcal{R}),\;\; \mathcal{R}\in\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(A)\Big\} \;=\; \lim_{\delta\to 0}\inf\left\{\sum_{R_n\in\mathcal{R}} h_s(R_n),\;\; \mathcal{R}\in\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(A)\right\}. \tag{30.12}$$

□

Prova. Se $\delta_1 < \delta_2$ então $\mathfrak{R}_{\delta_1} \subset \mathfrak{R}_{\delta_2}$, pois todo conjunto de diâmetro menor ou igual a δ_1 tem, evidentemente, diâmetro menor ou igual a δ_2. Logo, para todo $A \subset M$ tem-se $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_{\delta_1}}(A) \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_{\delta_2}}(A)$ e, portanto, $\inf\Big\{H_s(\mathcal{R}),\;\; \mathcal{R}\in\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_{\delta_1}}(A)\Big\} \geq \inf\Big\{H_s(\mathcal{R}),\;\; \mathcal{R}\in\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_{\delta_2}}(A)\Big\}$, estabelecendo que $\overline{\mu}_H^{\delta_1,\,s}(A) \geq \overline{\mu}_H^{\delta_2,\,s}(A)$. As demais afirmações são imediatas. ■

Antes de explorarmos as consequências da Proposição 30.4, provemos o seguinte resultado, que será importante quando discutirmos a noção de dimensão Hausdorff de um conjunto.

Proposição 30.5 *Para todo $\delta > 0$ e para cada $E \subset M$ a função $[0,\, \infty) \ni s \mapsto \delta^{-s}\,\overline{\mu}_H^{\delta,\,s}(E)$ é uma função decrescente, ou seja, vale*

$$\delta^{-s}\,\overline{\mu}_H^{\delta,\,s}(E) \;\geq\; \delta^{-t}\,\overline{\mu}_H^{\delta,\,t}(E) \tag{30.13}$$

sempre que $0 \leq s \leq t$. □

Prova. Por definição, todo conjunto $R \in \mathfrak{R}_\delta$ tem diâmetro menor ou igual a δ e, evidentemente, $0 \leq \frac{\mathfrak{d}(R)}{\delta} \leq 1$. Portanto, para cada $R \in \mathfrak{R}_\delta$ a função de r definida para $r \geq 0$ por

$$[0,\, \infty) \;\ni\; r \;\longmapsto\; \delta^{-r}h_r(R) \;=\; \left(\frac{\mathfrak{d}(R)}{\delta}\right)^r$$

é decrescente, ou seja, $\delta^{-s}h_s(R) \geq \delta^{-t}h_t(R)$ sempre que $0 \leq s \leq t$. A Proposição 30.5 segue imediatamente, então, da definição (30.10). ■

A consequência mais importante da Proposição 30.4 é a seguinte afirmação:

Proposição 30.6 *Para cada $s \geq 0$, a medida exterior de Hausdorff de dimensão s definida em (30.11) ou (30.12) é uma medida exterior métrica (para a definição, Seção 29.3.1, página 1569).* □

Prova. Suponhamos que A e $B \subset M$ sejam tais que $d(A,\, B) = \epsilon > 0$. Se $\mathcal{R}$ é um recobrimento de $A \cup B$ por conjuntos de diâmetro menor ou igual a δ e esse δ for escolhido menor que ϵ, então é possível afirmar que $\mathcal{R}$ é a união de três conjuntos disjuntos: $\mathcal{R}_A$, $\mathcal{R}_B$ e $\mathcal{R}_0$, sendo $\mathcal{R}_A$ um recobrimento de A que não intersecta B, $\mathcal{R}_B$ um recobrimento de B que não intersecta A e $\mathcal{R}_0$ que não intersecta A nem B. Se assim não fosse, existiria um aberto em $\mathcal{R}$ intersectando A e B, o que só é possível se seu diâmetro fosse maior que ϵ.

[7]Abram Samoilovitch Besicovitch (1891–1970). Besicovitch foi um dos nomes que mais contribuiu à teoria matemática dos conjuntos fractais.

Notemos que $\mathcal{R}_A \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(A)$, que $\mathcal{R}_B \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(B)$ e que, importante, $\mathcal{R}_0$ pode ser vazio. Tem-se, portanto,

$$\sum_{R_n \in \mathcal{R}} h_s(R_n) \;=\; \sum_{R_n \in \mathcal{R}_A} h_s(R_n) + \sum_{R_n \in \mathcal{R}_B} h_s(R_n) + \sum_{R_n \in \mathcal{R}_0} h_s(R_n)$$

devido à disjunção dos conjuntos e $\mathcal{R}_A$, $\mathcal{R}_B$ e $\mathcal{R}_0$. Logo,

$$\sum_{R_n \in \mathcal{R}} h_s(R_n) \;\geq\; \sum_{R_n \in \mathcal{R}_A} h_s(R_n) + \sum_{R_n \in \mathcal{R}_B} h_s(R_n) \;.$$

Assim, para todo δ com $0 < \delta < \epsilon$, ao tomar o ínfimo sobre $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(A \cup B)$ em (30.10) podemos nos restringir a conjuntos $\mathcal{R}$ da forma $\mathcal{R}_A \cup \mathcal{R}_B$ como descritos acima (com $\mathcal{R}_0$ vazio). Disso segue que

$$\overline{\mu}_H^{\delta,\,s}(A \cup B) \;=\; \inf\Big\{H_s(\mathcal{R}),\;\; \mathcal{R} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(A)\Big\} + \inf\Big\{H_s(\mathcal{R}),\;\; \mathcal{R} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}_\delta}(B)\Big\} \;=\; \overline{\mu}_H^{\delta,\,s}(A) + \overline{\mu}_H^{\delta,\,s}(B) \;.$$

Logo, ao tomarmos o limite $\delta \to 0$ como em (30.12), teremos

$$\overline{\mu}_H^{s}(A \cup B) \;=\; \lim_{\delta \to 0} \overline{\mu}_H^{\delta,\,s}(A \cup B) \;=\; \lim_{\delta \to 0} \overline{\mu}_H^{\delta,\,s}(A) + \lim_{\delta \to 0} \overline{\mu}_H^{\delta,\,s}(B) \;=\; \overline{\mu}_H^{s}(A) + \overline{\mu}_H^{s}(B) \;.$$

e, portanto, $\overline{\mu}_H^{s}$ é uma medida exterior métrica. ■

• **A medida de Hausdorff de dimensão $s \geq 0$**

De posse da construção e dos fatos acima descritos e evocando o Teorema de Carathéodory, Teorema 29.1, página 1564, o Teorema 29.3, página 1571, e o Teorema 29.2, página 1568, chegamos às conclusões expressas no seguinte teorema:

Teorema 30.2 (A Medida de Hausdorff de Dimensão $s \geq 0$) *Seja M um conjunto não vazio dotado de uma métrica d e seja para cada $s \geq 0$ a medida exterior $\overline{\mu}_H^{s}$ definida em M por (30.12) ou, equivalentemente, por (30.11). Seja $\mathcal{M}_{\overline{\mu}_H^{s}}$ a σ-álgebra formada por todos os conjuntos $A \subset M$ mensuráveis segundo Carathéodory, ou seja, que satisfazem $\overline{\mu}_H^{s}(E) = \overline{\mu}_H^{s}(E \cap A) + \overline{\mu}_H^{s}(E \cap A^c)$ para todo $E \subset M$. A restrição de $\overline{\mu}_H^{s}$ a $\mathcal{M}_{\overline{\mu}_H^{s}}$ define uma medida, denotada por μ_H^{s}, denominada* medida de Hausdorff de dimensão s. *Essa medida é completa e todo conjunto Boreliano de M segundo τ_d é mensurável, ou seja $\mathcal{M}[\tau_d] \subset \mathcal{M}_{\overline{\mu}_H^{s}}$ para todo $s \geq 0$.* □

• **A dimensão Hausdorff de um conjunto Boreliano**

A medida μ_H^{s} restrita a $\mathcal{M}[\tau_d]$ é denominada *medida de Borel-Hausdorff*. Note-se que $\mathcal{M}[\tau_d]$ não depende de s e, portanto, podemos nos perguntar como varia com s a medida de um conjunto Boreliano fixo. A proposição que segue é fundamental para isso.

Proposição 30.7 *Seja $E \in \mathcal{M}[\tau_d]$. Então, valem as seguintes afirmações:*

1. *$\mu_H^{s_1}(E) \geq \mu_H^{s_2}(E)$ sempre que $0 \leq s_1 \leq s_2 < \infty$.*
2. *Se $0 < \mu_H^{t}(E) < \infty$ para algum $t > 0$, então $\mu_H^{s}(E) = \infty$ para todo s com $0 \leq s < t$. Se $0 < \mu_H^{t}(E) < \infty$ para algum $t \geq 0$, então $\mu_H^{u}(E) = 0$ para todo $u > t$.* □

Prova. Por definição, todo conjunto $R \in \mathfrak{R}_\delta$ tem diâmetro menor ou igual a δ. Logo, se $0 < \delta < 1$ teremos $0 \leq \mathfrak{d}(R) < 1$ para todo $R \in \mathfrak{R}_\delta$. Consequentemente, para δ fixo e $0 < \delta < 1$ e para cada $R \in \mathfrak{R}_\delta$, a função de s definida para $s \geq 0$ por

$$[0,\; \infty) \;\ni\; s \;\longmapsto\; h_s(R) \;=\; \big(\mathfrak{d}(R)\big)^s$$

é decrescente, ou seja, $h_{s_1}(R) \geq h_{s_2}(R)$ sempre que $0 \leq s_1 \leq s_2$. Logo, pela definição (30.10), teremos para $0 < \delta < 1$ e $0 \leq s_1 \leq s_2$ que $\overline{\mu}_H^{\delta,\,s_1}(E) \geq \overline{\mu}_H^{\delta,\,s_2}(E)$ para todo $E \subset M$. Pela definição (30.12) tem-se $\overline{\mu}_H^{s}(E) = \lim_{\delta \to 0} \overline{\mu}_H^{\delta,\,s}(E)$ para todo $s \geq 0$ e, portanto, segue que $\mu_H^{s_1}(E) \geq \mu_H^{s_2}(E)$ sempre que $0 \leq s_1 \leq s_2 < \infty$ já que δ é feito menor que 1 no processo de limite $\delta \to 0$.

Pela Proposição 30.5, página 1590, sabemos que para todo $\delta > 0$ vale

$$\overline{\mu}_H^{\delta,\, s}(E) \;\geq\; \delta^{s-t}\left(\overline{\mu}_H^{\delta,\, t}(E)\right) \tag{30.14}$$

sempre que $0 \leq s \leq t$. Logo, se para $t > 0$ valer que $\mu_H^t(E) := \lim\limits_{\delta\to 0}\overline{\mu}_H^{\delta,\, t}(E)$ é finito e não nulo, teremos por (30.14) que $\mu_H^s(E) := \lim\limits_{\delta\to 0}\overline{\mu}_H^{\delta,\, s}(E) = \infty$, para todo s com $0 \leq s < t$.

A mesma (30.14) diz (trocando $t \to u$, $s \to t$) que

$$\overline{\mu}_H^{\delta,\, u}(E) \;\leq\; \delta^{u-t}\left(\overline{\mu}_H^{\delta,\, t}(E)\right) ,$$

sempre que $0 \leq t \leq u$. Logo, se $\mu_H^t(E) := \lim\limits_{\delta\to 0}\overline{\mu}_H^{\delta,\, t}(E) < \infty$ teremos $\mu_H^u(E) := \lim\limits_{\delta\to 0}\overline{\mu}_H^{\delta,\, u}(E) = 0$ sempre que $u > t$. ■

A Proposição 30.7 afirma que para cada E Boreliano pode haver um único número $\dim_H(E)$ com $0 \leq \dim_H(E) \leq \infty$ tal que

$$\mu_H^s(E) \;=\; \begin{cases} \infty\,, & \text{se } 0 \leq s < \dim_H(E) \\ \\ 0\,, & \text{se } \dim_H(E) < s < \infty \end{cases}$$

e com $0 < \mu_H^s(E) < \infty$ para $s = \dim_H(E)$. O número $\dim_H(E)$ é denominado *dimensão Hausdorff* do conjunto Boreliano E.

A seguinte proposição é útil:

Proposição 30.8 *Se E_1 e E_2 são conjuntos Borelianos e $E_1 \subset E_2$, então $\dim_H(E_1) \leq \dim_H(E_2)$.* □

Prova. Como μ_H^s é uma medida em $\mathcal{M}[\tau_d]$ para todo $s \geq 0$, vale $\mu_H^s(E_1) \leq \mu_H^s(E_2)$. Logo, se $\mu_H^s(E_2) = 0$ para algum s segue que $\mu_H^s(E_1) = 0$ para o mesmo s. Assim, a dimensão de Hausdorff de E_2 não pode ser inferior à de E_1. ■

Note-se que, com a generalidade da discussão acima, podemos ter $\dim_H(E) = \infty$ para um dado Boreliano E. No caso em que $M = \mathbb{R}^n$ com a métrica Euclidiana usual, pode-se provar, porém, que $\dim_H(E) \leq n$ para todo Boreliano $E \subset \mathbb{R}^n$. Isso é discutido no que segue.

• A dimensão Hausdorff em $\mathbb{R}^n$

Proposição 30.9 *Seja $M = \mathbb{R}^n$ com a métrica usual. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cubo compacto. Então, $\mu_H^n(K) < \infty$. Segue disso que $\dim_H(K) \leq n$, que $\dim_H(\mathbb{R}^n) \leq n$ e que $\dim_H(E) \leq n$ para todo $E \subset \mathbb{R}^n$ Boreliano.* □

Prova. K é Boreliano, por ser fechado. Tomando $m \in \mathbb{N}$, podemos escrever K como uma união de m^n cubos fechados menores iguais, cada um de arestas $1/m$. O diâmetro de cada um desses cubos fechados menores é $\frac{1}{m}\sqrt{n}$ (justifique!). Logo, se $\delta > \frac{1}{m}\sqrt{n}$ teremos pela definição que $\overline{\mu}_H^{\delta,\, n}(K) \leq m^n(\frac{1}{m}\sqrt{n})^n = n^{n/2}$. Como $n^{n/2}$ independe de m, concluímos que $\overline{\mu}_H^{\delta,\, n}(K) \leq n^{n/2}$ para todo $\delta > 0$ e, portanto, $\mu_H^n(K) \leq n^{n/2}$, provando que $\mu_H^n(K) < \infty$. Disso segue pela Proposição 30.7 que $\mu_H^s(K) = 0$ para todo $s > n$, provando que $\dim_H(K) \leq n$. Como $\mathbb{R}^n$ é a soma contável de cubos fechados limitados (compactos), segue também que $\mu_H^s(\mathbb{R}^n) = 0$ para todo $s > n$ e, portanto, que $\dim_H(\mathbb{R}^n) \leq n$. Da Proposição 30.8, segue disso que $\dim_H(E) \leq n$ para todo $E \subset \mathbb{R}^n$ Boreliano. ■

A conclusão é que todo conjunto Boreliano de $\mathbb{R}^n$ tem uma dimensão Hausdorff finita e menor ou igual a n. A dimensão Hausdorff pode assumir valores não inteiros. Discutiremos à página 1596 que a dimensão Hausdorff do chamado conjunto de Cantor ternário, que introduziremos e estudaremos em detalhe na Seção 30.3, página 1593, vale $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. Vide também Exercícios E. 30.11, página 1610 e E. 30.12, página 1610.

30.3 Conjuntos de Cantor

Dentre os subconjuntos mais interessantes e curiosos da reta real encontram-se os chamados *conjuntos de Cantor*[8]. De forma geral, um conjunto que em uma topologia métrica seja 1) totalmente desconexo, 2) compacto e 3) perfeito, é dito ser um *conjunto de Cantor*. Para essas definições vide Seção 33.1, página 1698, e para a noção de compacidade, vide Seção 33.3, página 1724. Vide também página 1702.

Há vários exemplos de conjuntos ditos de Cantor e iremos aqui apresentar alguns deles, começando pelo mais simples e tradicional, o chamado *conjunto de Cantor ternário*, $C_{1/3}$, o qual será primeiramente definido de maneira informal. Em seguida, trataremos de modo mais preciso do mesmo e também de generalizações. Na Seção 30.4.1, página 1603, apresentaremos um objeto relacionado: a chamada *função de Cantor*.

30.3.1 O Conjunto de Cantor Ternário

O conjunto de Cantor ternário $C_{1/3}$ é informalmente definido da seguinte forma. Começamos com o conjunto fechado $T_0 = [0,\ 1]$ do qual subtraímos o conjunto aberto $(1/3,\ 2/3)$ que consiste no conjunto aberto de largura $1/3$ da largura de T_0 situado bem no meio de T_0. O que se obtemos é o conjunto fechado $T_1 = [0,\ 1/3] \cup [2/3,\ 1]$, formado pela união de dois intervalos fechados disjuntos. Em seguida, subtraímos de cada um desses intervalos fechados os conjuntos abertos situados no meio de ambos e cuja largura é $1/3$ da largura de cada um desses intervalos. Esses abertos serão $(1/9,\ 2/9)$ para o intervalo $[0,\ 1/3]$ e $(7/9,\ 8/9)$ para o intervalo $[2/3,\ 1]$. O que resulta disso é o conjunto fechado $T_2 = [0,\ 1/9] \cup [2/9,\ 1/3] \cup [2/3,\ 7/9] \cup [8/9,\ 1]$. O passo seguinte repete os anteriores: subtraímos de cada um desses intervalos fechados os conjuntos abertos situados no meio de ambos e cuja largura é $1/3$ da largura de cada um desses intervalos.

O processo é ilustrado na Figura 30.1. A linha de cima ilustra os intervalos abertos que vão sendo sucessivamente subtraídos do intervalo fechado $T_0 = [0,\ 1]$ e a linha de baixo os vários intervalos fechados que resultam dessa subtração. O primeiro conjunto aberto subtraído é $(1/3,\ 2/3)$, indicado por 1 na figura. O segundo conjunto aberto subtraído é $(1/9,\ 2/9) \cup (7/9,\ 8/9)$, indicado por 2 na figura, e assim por diante.

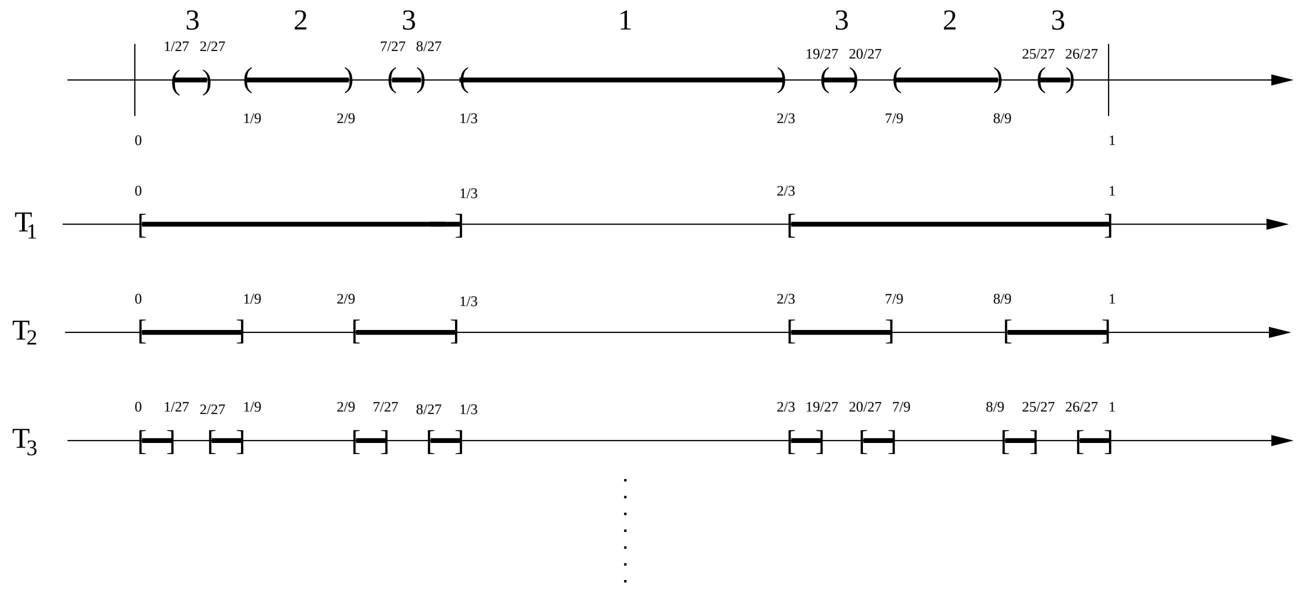

Figura 30.1: As três primeiras etapas da construção do conjunto de Cantor ternário $C_{1/3}$.

O conjunto de Cantor $C_{1/3}$ é o conjunto que resulta desse processo após infinitos passos. $C_{1/3}$ não é vazio, pois os pontos situados nas bordas dos intervalos fechados que vão sendo sucessivamente produzidos sobrevivem ao processo de subtração. Isso se vê na Figura 30.1, pois os conjunto $\{0,\ 1\}$, que forma a borda de T_0, surge novamente em T_1, T_2,

[8] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918).

T_3 etc., assim como o conjunto $\{0,\ 1/3,\ 2/3,\ 1\}$, que forma a borda de T_1, surge novamente em T_2, T_3 etc., e como o conjunto $\{0,\ 1/9,\ 2/9,\ 1/3,\ 2/3,\ 7/9,\ 8/9,\ 1\}$, que forma a borda de T_2, surge novamente em T_3 etc. $C_{1/3}$ é um conjunto fechado por ser o complemento em $[0,\ 1]$ de uma união de abertos (aqueles que vão sendo sucessivamente subtraídos). Outra forma de ver isso é notar que $T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset T_4 \supset \cdots$, ou seja, $T_m \subset T_n$ para todos $m > n$, o que nos leva a concluir que

$$C_{1/3} \;=\; \bigcap_{n=0}^{\infty} T_n \; . \tag{30.15}$$

Como se sabe, uma intersecção de fechados é também um fechado.

Um aspecto um tanto surpreendente sobre $C_{1/3}$ é que seu interior é vazio, ou seja, $C_{1/3}$ não contém nenhum aberto. Isso segue do fato que intervalos fechados que formam os conjuntos T_n têm, cada um, largura $(1/3)^n$ e, portanto, seu interior vai "diminuindo" à medida que n cresce. A afirmação que $C_{1/3}$ não contém nenhum aberto pode ser provada da seguinte forma. Se $C_{1/3}$ contivesse um aberto, conteria algum intervalo aberto $(a,\ b)$ (por quê? Lembre-se da definição de conjuntos abertos em espaços métricos). Assim, $(a,\ b) = (a,\ b) \cap C_{1/3}$. Por (30.15), teríamos

$$(a,\ b) \;=\; (a,\ b) \cap C_{1/3} \;=\; (a,\ b) \cap \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T_n \right) \;=\; \bigcap_{n=0}^{\infty} \Big((a,\ b) \cap T_n \Big) \; . \tag{30.16}$$

Agora, para todo n grande o suficiente tal que $(1/3)^n < b - a$, os conjuntos $(a,\ b) \cap T_n$ são subconjuntos próprios[9] de $(a,\ b)$, pois cada intervalo fechado que compõe T_n tem largura $(1/3)^n$. Portanto, o lado direito de (30.16) é um subconjunto próprio de $(a,\ b)$ e a igualdade em (30.16) passa a ser absurda.

Um conjunto com a propriedade de não conter nenhum aberto é dito ser um *conjunto denso em parte alguma* (para tais definições, vide Seção 33.1).

Por ser fechado, $C_{1/3}$ é um conjunto mensurável por Lebesgue, ou seja, possui um comprimento. Um ponto importante é determinar a medida de Lebesgue de $C_{1/3}$. É fácil perceber que $\mu_L(T_{n+1}) = (2/3)\mu_L(T_n)$, pois a cada etapa é eliminado um terço dos intervalos fechados de T_n. Assim, como $\mu_L(T_0) = 1$, segue que $\mu_L(T_n) = (2/3)^n$. Daí[10] $\mu_L(C_{1/3}) = \lim_{n\to\infty} \mu_L(T_n) = \lim_{n\to\infty}(2/3)^n = 0$, ou seja, o conjunto ternário de Cantor $C_{1/3}$ é um conjunto de medida de Lebesgue nula.

• **A cardinalidade de $C_{1/3}$**

Um outro fato importante sobre $C_{1/3}$ é que o mesmo tem a cardinalidade de $\mathbb{R}$, sendo, portanto, um exemplo de um conjunto não contável de medida de Lebesgue nula. Vamos mostrar isso e, para tal, começaremos provando que $C_{1/3}$ não é contável.

Para provar que $C_{1/3}$ não é contável, demonstremos a seguinte afirmação, que apresentamos para futura referência na forma de uma proposição.

Proposição 30.10 *$C_{1/3}$ é o subconjunto de $[0,\ 1]$ composto por todos os números c que podem ser escritos na forma $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n}$, sendo que cada t_n pode apenas assumir os valores 0 ou 2. Isso equivale a dizer que $c \in C_{1/3}$ se e somente se for representado na base ternária na forma $c = 0, t_1 t_2 t_3 t_4 \ldots$ onde cada "dígito" t_n vale ou 0 ou 2. Essa representação dos elementos de $C_{1/3}$ na base 3, com dígitos em $\{0,\ 2\}$, é única.* □

Essa proposição equivale a uma outra caracterização de $C_{1/3}$ (de fato, alguns autores definem $C_{1/3}$ como o conjunto de pontos de $[0,\ 1]$ em cuja representação na base ternária ocorrem apenas os dígitos 0 ou 2). Antes de entrar na prova dessa proposição, recomendamos ao estudante o seguinte exercício, que esclarece a afirmação de unicidade, acima.

E. 30.2 *Exercício*. Sabemos que $1/3$ pertence a $C_{1/3}$. Esse número pode ser representado na base ternária por $0, 1$, o que parece contradizer a afirmação da Proposição 30.10 sobre os elementos de $C_{1/3}$. Porém, essa não é a única forma de representar $1/3$. Mostre que na base ternária $1/3$ também pode ser escrito como $0, 0222222\ldots$. Generalize isso e mostre que todo número que possua a representação ternária $0, t_1 \cdots t_n 1$ (ou seja, que tenha um número finito de "dígitos", o último deles sendo 1) também pode ser representado na forma $0, t_1 \cdots t_n 0222222\ldots$. ✠

[9] Aos estudantes: um conjunto A é dito ser um *subconjunto próprio* de um conjunto B se $A \subset B$ mas $A \neq B$.

[10] O por quê de valer $\mu_L(C_{1/3}) = \lim_{n\to\infty} \mu_L(T_n)$ é intuitivo, mas será justificado com base em uma propriedade geral de medidas ao discutirmos sua generalização, a equação (30.24), página 1599.

Prova da Proposição 30.10. Dado inteiro $n \geq 1$ tentemos localizar onde, no intervalo $[0, 1]$, encontram-se os números que reúnem as seguintes propriedades: *1.* o n-ésimo "dígito" na base ternária é 1; *3.* entre os "dígitos" seguintes (finitos ou não) pelo menos um é não nulo. Tais números são da forma $0, t_1 \cdots t_{n-1} 1 t_{n+1} \ldots$, sendo que pelo menos um dos t_m com $m \geq n+1$ é não nulo. Alguns segundos (minutos?) de meditação levam-nos a concluir que esses números correspondem a todos os números do intervalo aberto situado entre $0, t_1 \cdots t_{n-1} 1$ e $0, t_1 \cdots t_{n-1} 2$, ou seja, de $\big(0, t_1 \cdots t_{n-1} 1, \quad 0, t_1 \cdots t_{n-1} 2 \big)$. Agora,

$$0, t_1 \cdots t_{n-1} 1 \;=\; 0, t_1 \cdots t_{n-1} + \frac{1}{3^n} \qquad \text{e} \qquad 0, t_1 \cdots t_{n-1} 2 \;=\; 0, t_1 \cdots t_{n-1} + \frac{2}{3^n} \; .$$

Assim, o intervalo $\big(0, t_1, \cdots t_{n-1} 1, \quad 0, t_1 \cdots t_{n-1} 2 \big)$ é o intervalo $\left(\frac{1}{3^n}, \; \frac{2}{3^n} \right)$ transladado de $0, t_1 \cdots t_{n-1}$.

Observe-se, então, que esse intervalo $\left(\frac{1}{3^n}, \; \frac{2}{3^n} \right)$ é um dos intervalo abertos subtraído de T_{n-1} quando do processo de construção do conjunto $C_{1/3}$, a saber, o mais próximo de 0 (vide Figura 30.1). Devemos então nos perguntar: quais são os outros intervalos obtidos transladando $\left(\frac{1}{3^n}, \; \frac{2}{3^n} \right)$ por todos os números da forma $0, t_1 \cdots t_{n-1}$? Como todos os números da forma $0, t_1 \cdots t_{n-1}$ podem ser obtidos somando repetidamente o número $\frac{1}{3^{n-1}}$ (certo?) concluímos que os intervalos podem ser obtidos transladando-se $\left(\frac{1}{3^n}, \; \frac{2}{3^n} \right)$ sucessivamente por $\frac{1}{3^{n-1}}$ à direita. Mais uma curta meditação nos leva a concluir que os intervalos assim obtidos ou são precisamente aqueles subtraídos de T_{n-1} quando do processo de construção do conjunto $C_{1/3}$ ou estão contidos nos intervalos subtraídos anteriormente dos conjuntos T_m com $m < n-1$.

Concluímos, assim, que os números da forma $0, t_1 \cdots t_{n-1} 1 t_{n+1} \ldots$, sendo que pelo menos um dos t_m com $m \geq n+1$ é não nulo, não pertencem a $C_{1/3}$.

O que fizemos não exclui de $C_{1/3}$ números que sejam da forma $0, t_1 \cdots t_{n-1} 1$, com $t_j \in \{0, \; 2\}$, $j = 1, \; \ldots, \; n-1$. Tais números também pertencem a $C_{1/3}$, pois formam uma das bordas de alguns abertos $\big(0, t_1, \; \cdots \; t_{n-1} 1, \quad 0, t_1 \cdots t_{n-1} 2 \big)$ que tratamos acima. Porém, o Exercício E. 30.2, acima, nos ensina que tais números podem ser também representados como $0, t_1 \cdots t_{n-1} 022222\ldots$, com o n-ésimo dígito igual a 0 seguido de infinitos 2's.

E. 30.3 *Exercício*. Certo? ✠

Com isso, a prova da Proposição 30.10 está concluída. ■

A afirmação da Proposição 30.10 conduz diretamente à conclusão que $C_{1/3}$ não é enumerável. Por aquela proposição, todo $c \in C_{1/3}$ é (fatorando o número 2) da forma $c = 2 \times 0, d_1 d_2 d_3 \ldots$ na base ternária com $d_n \in \{0, \; 1\}$ para todo n. Assim, a demonstração que $C_{1/3}$ não é enumerável é, *mutatis mutandis* (i.e., trocando a base decimal pela ternária), idêntica à demonstração de que $\mathbb{R}$ não é contável, fornecida na Seção 1.1.3, página 85, na prova do Teorema 1.6, página 95. Deixamos os detalhes como exercício.

E. 30.4 *Exercício*. Faça-o! ✠

E. 30.5 *Exercício*. Mostre que $1/4$ e $1/13$ pertencem a $C_{1/3}$ pois, na base ternária, $1/4$ pode ser representado como $0,02020202\ldots$ e $1/13$ como $0,002002002002\ldots$. Note que $1/4$ e $1/13$ não pertencem à borda de nenhum T_n! ✠

O seguinte fato será usado em outros lugares.

Lema 30.1 *Todo elemento $x \in [0, \; 1]$ pode ser escrito na forma $x = c_1 + c_2/2$ com $c_1, \; c_2 \in C_{1/3}$.* □

Prova. Todo elemento $x \in [0, \; 1]$ pode ser representado na forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n}$, onde $t_n \in \{0, \; 1, \; 2\}$ (representação na base ternária). A soma acima pode ser quebrada em duas, uma contendo apenas termos onde cada t_n vale 0 ou 2 e outra onde $t_n = 1$: $x = \sum_{n \in \mathbb{N}_x} \frac{t_n}{3^n} + \frac{1}{2} \sum_{n \notin \mathbb{N}_x} \frac{2}{3^n}$, onde $\mathbb{N}_x := \{n | \; t_n \in \{0, \; 2\}\}$. Agora, os elementos de $C_{1/3}$ são precisamente aqueles cujos dígitos na representação na base ternária são 0 ou 2 (Proposição 30.10). Logo, vimos que todo $x \in [0,\ 1]$ pode ser escrito na forma $x = c_1 + c_2/2$, com $c_1,\ c_2 \in C_{1/3}$. ■

Chegamos agora à

Proposição 30.11 *$C_{1/3}$ tem a cardinalidade de $\mathbb{R}$.* □

Prova. Pelo Lema 30.1, todo elemento $x \in [0,\ 1]$ pode ser escrito como $x = c_1 + c_2/2$ com $c_1,\ c_2 \in C_{1/3}$. Isso mostra que $[0,\ 1]$ (e, portanto, $\mathbb{R}$) tem a cardinalidade de um subconjunto de $C_{1/3} \times C_{1/3}$, cuja cardinalidade é menor ou igual a de $\mathbb{R}^2$ que, por sua vez, tem a cardinalidade de $\mathbb{R}$ (Proposição 1.12, página 96). Logo $C_{1/3} \times C_{1/3}$ tem a cardinalidade de $\mathbb{R}$. Paralelamente, o mesmo argumento usado na prova da Proposição 1.12, página 96, conduz à conclusão que $C_{1/3}$ e $C_{1/3} \times C_{1/3}$ têm a mesma cardinalidade. Isso completa a prova. ■

• O conjunto de Cantor ternário é denso em si mesmo e totalmente desconexo

Vamos provar agora que o conjunto de Cantor ternário é denso em si mesmo e totalmente desconexo. Para as definições e fatos básicos que usaremos, recomenda-se a leitura prévia da Seção 33.1, página 1698.

Para mostrar que $C_{1/3}$ é um conjunto denso em si mesmo, sejam $c,\ c' \in C_{1/3}$ e que, portanto, tenham representações em base ternária $0, c_1c_2c_3\ldots$ e $0, c'_1c'_2c'_3\ldots$, respectivamente, com $c_n,\ c'_n \in \{0,\ 2\}$ para todo n (Proposição 30.10). Então, se os primeiros m dígitos de c e c' forem idênticos, teremos $|c - c'| \leq 2/3^m$. Escolhendo m grande o suficiente isso pode ser feito menor que qualquer $\epsilon > 0$ dado. Isso mostra que qualquer aberto contendo $c \in C_{1/3}$ contém outros elementos de $C_{1/3}$ diferentes de c, provando que $C_{1/3}$ é um conjunto denso em si mesmo.

O mesmo tipo de argumento também mostra que arbitrariamente próximo a qualquer elemento $c \in C_{1/3}$ há elementos que não pertencem a $C_{1/3}$. Se c tem a representação ternária $0, c_1c_2c_3\ldots$, escolhamos $x \in [0,\ 1]$ da seguinte forma: seus m primeiros dígitos são iguais ao de c, o m-ésimo dígito de x é 1 e dentre os seguintes pelo menos um é não nulo. Um tal x não pertence a $C_{1/3}$, mas a distância do mesmo a c é menor que $2/3^m$. Essa distância, porém, pode ser feita menor que qualquer $\epsilon > 0$ dado, se escolhermos m grande o suficiente.

É fácil de se ver que $C_{1/3}$ é um subconjunto desconexo de $\mathbb{R}$ na topologia $\tau_{\mathbb{R}}$, pois um par de abertos como $A_1 = (-1,\ 1/2)$ e $A_2 = (1/2,\ 2)$ desconecta $C_{1/3}$ (verifique!). Pelo que acabamos de ver, dados $c,\ c' \in C_{1/3}$ com $c < c'$, existe $x \notin C_{1/3}$ tal que $c < x < c'$. Assim, os abertos $A_{1,\ x} = (-1,\ x)$ e $A_{2,\ x} = (x,\ 2)$ também desconectam $C_{1/3}$. Dessa forma, não existe nenhum subconjunto conexo de $C_{1/3}$ que contenha c e c' (um tal conjunto seria desconectado pelos abertos $A_{1,\ x}$ e $A_{2,\ x}$). Logo, c e c' pertencem a componentes conexas distintas. Como isso vale para todos c e c' em $C_{1/3}$ com $c < c'$, concluímos que as componentes conexas de $C_{1/3}$ possuem exatamente um elemento. Isso significa que $C_{1/3}$ é totalmente desconexo, como queríamos mostrar.

*

Em resumo, concluímos que $C_{1/3}$ é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}$, mensurável de Lebesgue, não contável, com a cardinalidade de $\mathbb{R}$, denso em parte alguma, denso em si mesmo e totalmente desconexo. Pelo fato de $C_{1/3}$ ser fechado e limitado, $C_{1/3}$ é um conjunto compacto (pelo Teorema de Heine-Borel, Teorema 33.14, página 1742). Pelo fato de $C_{1/3}$ ser fechado e denso em si mesmo, $C_{1/3}$ é um conjunto perfeito. Por ser também totalmente desconexo, $C_{1/3}$ é um conjunto de Cantor segundo a definição geral da Seção 33.1, página 1698.

• A dimensão Hausdorff de $C_{1/3}$

Cada conjunto T_n é composto de 2^n intervalos de largura (diâmetro) 3^{-n}. É fácil ver pela definição que para $s > \frac{\ln 2}{\ln 3}$ tem-se $\mu_H^s(T_n) \leq 2^n 3^{-sn} = \exp\left(n \ln 3 \left(\frac{\ln 2}{\ln 3} - s\right)\right)$. Assim, se $s > \frac{\ln 2}{\ln 3}$ teremos $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_H^s(T_n) = 0$, mostrando que para tais valores de s tem-se $\mu_H^s\big(C_{1/3}\big) = 0$. Para $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ e $0 \leq s < \frac{\ln 2}{\ln 3}$ esse argumento é ainda inconclusivo, mas um tratamento mais detalhado (vide, *e.g.*, [160] ou [450]) mostra que vale

$$\mu_H^s\big(C_{1/3}\big) \;=\; \begin{cases} +\infty\,, & \text{caso} \quad 0 \leq s < \frac{\ln 2}{\ln 3}\,, \\[2mm] 1\,, & \text{caso} \quad s = \frac{\ln 2}{\ln 3}\,, \\[2mm] 0\,, & \text{caso} \quad s > \frac{\ln 2}{\ln 3}\,. \end{cases}$$

Assim, a dimensão Hausdorff de $C_{1/3}$ é $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63$.

30.3.2 Mais Exemplos de Conjuntos de Cantor

Vamos agora generalizar e formalizar as ideias desenvolvidas na construção de $C_{1/3}$ e construir outros conjuntos semelhantes.

Diremos que um intervalo fechado $[a,\ b]$ é *finito* se $-\infty < a < b < \infty$. Note que excluímos $a = b$. Denotaremos por $\mathfrak{F}_0$ a coleção de todos os subconjuntos da reta real que sejam formados por uniões finitas de intervalos fechados finitos e disjuntos. Assim, se $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0$, então $\mathcal{F}$ é da forma

$$\mathcal{F} \;=\; F_1 \cup \cdots \cup F_k$$

para algum $k \in \mathbb{N}$, onde cada F_j é um intervalo fechado finito $F_j = [a_j,\ b_j]$ com $-\infty < a_j < b_j < \infty$ e onde os F_j's são disjuntos dois-a-dois, ou seja, $F_i \cap F_j = \emptyset$ caso $i \neq j$.

Por ser uma união finita de fechados, cada elemento de $\mathfrak{F}_0$ é também um conjunto fechado.

Seja $f \in \mathbb{R}$ tal que $0 < f < 1$. Denominaremos um tal f uma *fração*[11]. Para cada fração f definiremos uma aplicação $T_f : \mathfrak{F}_0 \to \mathfrak{F}_0$ da seguinte forma: Para um intervalo finito $F = [a,\ b]$ definimos

$$T_f(F) \;=\; T_f([a,\ b]) \;:=\; \left[a,\ \ \frac{a(1+f)+b(1-f)}{2}\right] \bigcup \left[\frac{a(1-f)+b(1+f)}{2},\ \ b\right]\,. \tag{30.17}$$

Para um elemento genérico $\mathcal{F} = F_1 \cup \cdots \cup F_k$ de $\mathfrak{F}_0$, definimos

$$T_f(\mathcal{F}) \;=\; T_f\Big(F_1 \cup \cdots \cup F_k\Big) \;:=\; T_f(F_1) \cup \cdots \cup T_f(F_k)\,. \tag{30.18}$$

Note que para $0 < f < 1$ tem-se

$$a \;<\; \frac{a(1+f)+b(1-f)}{2} \;<\; \frac{a(1-f)+b(1+f)}{2} \;<b\,.$$

Portanto, para todo intervalo finito F, tem-se

$$T_f(F) \;\subset\; F\,.$$

Em verdade, $T_f(F)$ é um subconjunto próprio de F. Segue facilmente disso que, para todo $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0$,

$$T_f(\mathcal{F}) \;\subset\; \mathcal{F}\,.$$

E. 30.6 *Exercício*. Verifique todas as afirmações acima. ✠

Qual a interpretação geométrica de T_f? Para isso, vamos descrever o que é $T_f([a,\ b])$. Esse conjunto é obtido subtraindo-se do intervalo fechado finito $[a,\ b]$ o conjunto aberto de largura $f(b-a)$ centrado no ponto $\frac{a+b}{2}$, que fica bem no centro de $[a,\ b]$. Como é fácil ver, esse intervalo aberto é

$$\left(\frac{a+b}{2} - \frac{f(b-a)}{2},\ \ \frac{a+b}{2} + \frac{f(b-a)}{2}\right) \;=\; \left(\frac{a(1+f)+b(1-f)}{2},\ \ \frac{a(1-f)+b(1+f)}{2}\right)\,.$$

[11] Excluímos os casos $f = 0$ e $f = 1$ pois, como poder-se-á constatar, eles levam a situações triviais

Assim,

$$T_f([a,\ b]) \ = \ [a,\ b] \setminus \left(\frac{a(1+f)+b(1-f)}{2},\ \ \frac{a(1-f)+b(1+f)}{2}\right) \ .$$

Operando em $\mathcal{F} = F_1 \cup \cdots \cup F_k$, a operação T_f subtrai de cada F_j o intervalo aberto de largura f centrado no ponto intermediário de F_j.

É importante notar que se $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0$ é composto por k intervalos fechados finitos disjuntos então, $T_f(\mathcal{F})$ é composto por $2k$ intervalos fechados finitos disjuntos.

Como T_f é uma aplicação de $\mathfrak{F}_0$ em $\mathfrak{F}_0$, podemos compor T_f consigo mesma. Denotamos, para $n \in \mathbb{N}$,

$$T_f^n \ \equiv \ \underbrace{T_f \circ \cdots \circ T_f}_{n \text{ vezes}} \ .$$

Com isso, se F é um intervalo fechado finito, $T_f^n(F)$ é um elemento de $\mathfrak{F}_0$ composto por 2^n intervalos fechados finitos disjuntos, todos eles contidos em F.

Para o que segue é muito importante determinarmos a medida de Lebesgue de $T_f^n(F)$, que vem a ser a soma dos comprimentos dos 2^n intervalos fechados finitos disjuntos que os compõem. Para isso, é importante ver que se $F = [a,\ b]$, então

$$\begin{aligned}
\mu_L\big(T_f(F)\big) \ = \ \mu_L\Big(T_f\big([a,\ b]\big)\Big) \ &= \ \mu_L\left(\ \left[a,\ \ \frac{a(1+f)+b(1-f)}{2}\right] \bigcup \left[\frac{a(1-f)+b(1+f)}{2},\ \ b\right]\ \right) \\
&= \ \mu_L\left(\left[a,\ \ \frac{a(1+f)+b(1-f)}{2}\right]\right) \ + \ \mu_L\left(\left[\frac{a(1-f)+b(1+f)}{2},\ \ b\right]\right) \\
&= \ \left(\frac{a(1+f)+b(1-f)}{2} - a\right) \ + \ \left(b - \left[\frac{a(1-f)+b(1+f)}{2}\right]\right) \\
&= \ (1-f)(b-a) \\
&= \ (1-f)\mu_L(F) \ .
\end{aligned} \tag{30.19}$$

É também claro que para todo $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0$ da forma $\mathcal{F} = F_1 \cup \cdots \cup F_k$, onde os F_j são intervalos fechados finitos e disjuntos, tem-se

$$\mu_L(\mathcal{F}) \ = \ \mu_L(F_1) + \cdots + \mu_L(F_k) \ .$$

Segue também de (30.18) que se $\mathcal{F} = F_1 \cup \cdots \cup F_k$ então

$$\begin{aligned}
\mu_L(T_f(\mathcal{F})) \ \ &= \ \ \mu_L\Big(T_f(F_1) \cup \cdots \cup T_f(F_k)\Big) \ = \ \mu_L\big(T_f(F_1)\big) + \cdots + \mu_L\big(T_f(F_k)\big) \\
&= \ \ (1-f)\sum_{j=1}^{k} \mu_L\left(F_j\right) \ = \ (1-f)\mu_L(\mathcal{F}) \ ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mu_L(T_f(\mathcal{F})) \ = \ (1-f)\mu_L(\mathcal{F}) \ . \tag{30.20}$$

Desses fatos, é muito fácil provar por indução que

$$\mu_L(T_f^n(F)) \ = \ (1-f)^n \mu_L(F) \ . \tag{30.21}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo intervalo fechado finito F.

E. 30.7 *Exercício*. Prove isso! ✠

É bastante evidente por (30.17) que os bordos a e b de um intervalo fechado finito $F = [a,\ b]$ satisfazem $a \in T_f(F)$ e $b \in T_f(F)$. Daí, conclui-se também que a e b são elementos de todos os conjuntos $T_f^n(F)$. Assim,

$$U_{n,\,f}(F) \ := \ F \setminus T_f^n(F) \ = \ F \cap \big(T_f^n(F)\big)^c \ = \ F^0 \cap \big(T_f^n(F)\big)^c \ .$$

Aqui $F^0 := (a,\ b)$, o interior de F. Como os conjuntos $T_f^n(F)$ são fechados, os conjuntos $U_{n,\ f}(F)$ são subconjuntos abertos de F, por serem a intersecção de dois abertos: F^0 e $(T_f^n(F))^c$. Note-se que

$$U_{n,\ f}(F) \ \subset\ U_{n+1,\ f}(F), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\ , \tag{30.22}$$

pois $T_f^{n+1}(F) = T_f\big(T_f^n(F)\big) \subset T_f^n(F)$.

Teremos também que

$$\mu_L\big(U_{n,\ f}(F)\big) \ = \ \mu_L(F) - \mu_L\big(T_f^n(F)\big) \ = \ \big[1-(1-f)^n\big]\mu_L(F)\ .$$

Para um intervalo fechado finito para $F = [a,\ b]$ e uma fração f, definimos o $C_f(F)$ por

$$C_f(F) \ := \ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_f^n(F)\ .$$

O conjunto de Cantor ternário $C_{1/3}$, que definimos informalmente páginas acima, corresponde a $C_{1/3}([0,\ 1])$.

Note que $C_f(F)$ não é vazio, pois contém pelo menos os pontos a e b, assim como os pontos $\frac{a(1+f)+b(1-f)}{2}$ e $\frac{a(1-f)+b(1+f)}{2}$ e, em verdade, todos os pontos que formam as bordas de cada intervalo fechado finito que compõe os conjuntos $T_f^n(F)$, pois, como observamos acima, cada aplicação T_f mantém esses pontos no conjunto resultante.

A primeira observação que fazemos sobre $C_f(F)$ é que se trata de um subconjunto fechado de F, pois é uma intersecção de fechados. Definimos também

$$U_f(F) \ := \ F \setminus C_f(F) \ = \ F \cap \big(C_f(F)\big)^c \ = \ F^0 \cap \big(C_f(F)\big)^c\ , \tag{30.23}$$

que é naturalmente um subconjunto aberto de F, por ser a intersecção de dois abertos: F^0 e $(C_f(F))^c$. Vemos que

$$U_f(F) \ = \ F^0 \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_f^n(F)\right)^c \ = \ F^0 \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(T_f^n(F)\big)^c\right) \ = \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(F^0 \cap \big(T_f^n(F)\big)^c\Big) \ = \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{n,\ f}(F)\ .$$

É possível também provar (mas não o faremos aqui) que $C_f(F)$ tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$. Fora isso, $C_f(F)$ é compacto (por ser fechado e limitado) totalmente desconexo, denso em parte alguma e denso em si mesmo e, portanto, é perfeito. (Essas definições são apresentadas na Seção 33.1, página 1698). Assim, pela definição geral da página 1702, $C_f(F)$ é um conjunto de Cantor.

Vamos agora determinar a medida de Lebesgue de $C_f(F)$ e de $U_f(F)$, começando pela segunda. Por (30.22), podemos aplicar a propriedade geral de medidas 3 da página 1561 e concluir que

$$\mu_L(U_f(F)) \ = \ \lim_{n\to\infty} \mu_L\big(U_{n,\ f}(F)\big) \ = \ \lim_{n\to\infty} \left[1-(1-f)^n\right] \mu_L(F) \ = \ \mu_L(F)\ , \tag{30.24}$$

já que $0 < (1-f) < 1$. Por (30.23) tem-se também que $\mu_L\big(U_f(F)\big) = \mu_L(F) - \mu_L\big(C_f(F)\big)$ e concluímos que

$$\mu_L\big(C_f(F)\big) \ = \ 0\ .$$

$C_f(F)$ é assim um subconjunto fechado, denso em parte alguma, denso em si mesmo e com a cardinalidade de $\mathbb{R}$ mas com medida de Lebesgue nula! Seu complemento em F, que é o aberto U_f, tem a mesma medida que F!

E. 30.8 *Exercício*. Determine a dimensão de Hausdorff dos conjuntos de Cantor $C_f(F)$. ✠

• Ainda mais exemplos de conjuntos de Cantor (com uma surpresa)

As ideias a construção dos conjuntos de Cantor $C_f(F)$, acima, podem ser generalizadas ainda mais. Seja $\{f\} := \{f_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de frações. Cada f_j satisfaz $0 < f_j < 1$, mas não precisam ser todos iguais. Para $n \in \mathbb{N}$, defina-se

$$T_{\{f\}}^n \ \equiv \ T_{f_n} \circ \cdots \circ T_{f_n}\ . \tag{30.25}$$

Pelas mesmas razões que acima (confira!), cada $T_{\{f\}}^n$ é também uma aplicação de $\mathfrak{F}_0$ em $\mathfrak{F}_0$.

Nota. O estudante deve atentar para o fato que o n que aparece no expoente de $T^n_{\{f\}}$ representa o número de aplicações que aparecem compostas no lado direito de (30.25), não uma potência de uma única aplicação. ♣

Para um intervalo fechado e finito $F = [a,\ b]$, tem-se também que

$$T^n_{\{f\}}(F) \ = \ T_{f_n} \circ \cdots \circ T_{f_n}(F) \ \subset \ F \ .$$

Como antes, os conjuntos $T^n_{\{f\}}(F)$ são compostos por 2^n intervalos fechados e as bordas desses intervalos estarão contidas em todos os conjuntos $T^m_{\{f\}}(F)$ com $m > n$. Fora isso,

$$T^m_{\{f\}}(F) \ \subset \ T^n_{\{f\}}(F), \qquad \text{para todos } m > n \ . \tag{30.26}$$

Em verdade os $T^m_{\{f\}}(F)$ são subconjuntos próprios de $T^n_{\{f\}}(F)$ para todos $m > n$. Temos também que

$$U_{n,\ \{f\}}(F) \ := \ F \setminus T^n_{\{f\}}(F) \ := \ F \cap \big(T^n_{\{f\}}(F)\big)^c \ = \ F^0 \cap \big(T^n_{\{f\}}(F)\big)^c \ .$$

Como os conjuntos $T^n_{\{f\}}(F)$ são fechados, os conjuntos $U_{n,\ \{f\}}(F)$ são subconjuntos <u>abertos</u> de F, por serem a intersecção de dois abertos: F^0 e $(T^n_{\{f\}}(F))^c$. Note-se novamente que

$$U_{n,\ \{f\}}(F) \ \subset \ U_{m,\ f}(F), \qquad \forall\, n < m \ , \tag{30.27}$$

por (30.26).

Definimos então, em completa analogia com o apresentado acima, os conjuntos

$$C_{\{f\}}(F) \ := \ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n_{\{f\}}(F) \ .$$

e

$$U_{\{f\}}(F) \ := \ F \setminus C_{\{f\}}(F) \ = \ F \cap \big(C_{\{f\}}(F)\big)^c \ = \ F^0 \cap \big(C_{\{f\}}(F)\big)^c \ .$$

$C_{\{f\}}(F)$ é também um subconjunto fechado de F, pois é uma intersecção de fechados. $U_{\{f\}}(F)$ é um subconjunto aberto de F, por ser a intersecção de dois abertos: F^0 e $(C_{\{f\}}(F))^c$. Vemos novamente que

$$U_{\{f\}}(F) \ = \ F^0 \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n_{\{f\}}(F)\right)^c \ = \ F^0 \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Big(T^n_{\{f\}}(F)\Big)^c\right) \ = \ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(F^0 \cap \Big(T^n_{\{f\}}(F)\Big)^c\right) \ = \ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{n,\ \{f\}}(F) \ .$$

É possível também provar (mas não o faremos aqui) que $C_{\{f\}}(F)$ tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$. Fora isso, $C_{\{f\}}(F)$ compacto (por ser fechado e limitado) totalmente desconexo, denso em parte alguma e denso em si mesmo e, portanto, é perfeito (para as definições vide Seção 33.1, página 1698). Assim, pela definição geral da página 1702, $C_f(F)$ é um conjunto de Cantor.

Quanto à medida de Lebesgue de $C_{\{f\}}(F)$, ocorre aqui uma surpresa. Como antes, temos que $\mu_L\big(U_{\{f\}}(F)\big) = \mu_L(F) - \mu_L\big(C_{\{f\}}(F)\big)$ e que

$$\mu_L\big(U_{\{f\}}(F)\big) \ = \ \lim_{n \to \infty} \mu_L\big(U_{n,\ \{f\}}(F)\big) \ .$$

Vamos porém, calcular $\mu_L(U_{n,\ \{f\}}(F))$. Sabemos que

$$\mu_L\big(U_{n,\ \{f\}}(F)\big) \ = \ \mu_L(F) - \mu_L\big(T^n_{\{f\}}(F)\big) \ .$$

Agora,

$$\mu_L\big(T^n_{\{f\}}(F)\big) \ = \ \mu_L\big(T_{f_n} \circ T^{n-1}_{\{f\}}(F)\big) \ = \ (1 - f_n)\mu_L\big(T^{n-1}_{\{f\}}(F)\big) \ = \ (1 - f_n) \cdots (1 - f_1)\mu_L(F) \ ,$$

onde, acima, usamos (30.20). Dessa forma,

$$\mu_L\big(U_{n,\ \{f\}}(F)\big) \ = \ \left[1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - f_j)\right] \mu_L(F)$$

e, portanto, usando novamente a propriedade geral de medidas 3 da página 1561, tem-se

$$\mu_L\big(U_{\{f\}}(F)\big) \;=\; \lim_{n\to\infty}\left[1-\prod_{j=1}^{n}(1-f_j)\right]\mu_L(F) \;=\; \left[1-\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}(1-f_j)\right]\mu_L(F)\;.$$

O ponto, porém, é que, ao contrário do caso anterior quando todos os f_j's eram iguais, não se pode sempre concluir que $\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}(1-f_j)=0$ mesmo que $0<(1-f_j)<1$ para todo j. Tomemos, por exemplo, a sequência $f_j \;=\; 1-e^{-1/j^2}$. Teremos

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}(1-f_j) \;=\; \lim_{n\to\infty}\exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\right) \;=\; \exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\right) \;=\; e^{-\pi^2/6} \;>\; 0$$

e, com isso,

$$\mu_L(U_{\{f\}}(F)) \;=\; \left[1-e^{-\pi^2/6}\right]\mu_L(F) \;<\; \mu_L(F)$$

e

$$\mu_L(C_{\{f\}}(F)) \;=\; e^{-\pi^2/6}\mu_L(F) \;>\; 0\;.$$

O conjunto de Cantor $C_{\{f\}}(F)$ com a sequência $\{f\}$ dada acima tem medida de Lebesgue não nula.

- **Condição para os conjuntos $C_{\{f\}}(F)$ terem medida de Lebesgue não nula**

Voltando a sequências $\{f_j,\ j\in\mathbb{N}\}$ gerais, concluímos do Lema 30.2, a seguir, que uma condição necessária e suficiente para que $C_{\{f\}}(F)$ tenha medida de Lebesgue não nula é que a sequência de frações $\{f\}=\{f_j, 0<f_j<1,\ j\in\mathbb{N}\}$ seja somável, ou seja $\sum_{j=1}^{\infty}f_j<\infty$.

No caso do conjunto de Cantor ternário $C_{1/3}$, essa condição é violada, pois obviamente $\sum_{j=1}^{\infty}1/3=\infty$, o mesmo se dando para os conjuntos C_f (com $0<f$).

Lema 30.2 *Se $\{f_j,\ j\in\mathbb{N}\}$ é uma sequência de números tais que $0<f_j<1$ para todo j, então a condição para que $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{j=1}^{n}(1-f_j)>0$ é equivalente à condição $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\ln(1-f_j)<\infty$. Essa por sua vez é equivalente à condição $\sum\limits_{j=1}^{\infty}f_j<\infty$.* □

Prova. Notemos, em primeiro lugar, que

$$\prod_{j=1}^{n}(1-f_j) \;=\; \exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\big[-\ln(1-f_j)\big]\right)\;.$$

Logo, $\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}(1-f_j)>0$ se e somente se a série de números positivos $\sum_{j=1}^{\infty}[-\ln(1-f_j)]$ for finita. Estudemos uma condição necessária e suficiente para que isso ocorra. Para $x\in[0,\ 1)$ tem-se que $x\leq-\ln(1-x)$. Isso se vê notando que a função

$$f(x) \;:=\; -x-\ln(1-x) \quad \text{satisfaz} \quad f'(x) \;=\; \frac{x}{(1-x)} \;\geq\; 0$$

para $x\in[0,\ 1)$, o que mostra que f é crescente nesse intervalo. Como $f(0)=0$, concluímos que $f(x)\geq0$ para $x\in[0,\ 1)$. Assim, $\sum_{j=1}^{n}f_j\leq-\sum_{j=1}^{n}\ln(1-f_j)$, mostrando que se a série de números positivos $-\sum_{j=1}^{\infty}\ln(1-f_j)$ for finita, a série $\sum_{j=1}^{\infty}f_j$ também o será.

Reciprocamente, suponhamos que $\sum_{j=1}^{\infty}f_j$ converge. Seja M um número fixo tal que $0<M<1$. Vamos mostrar que existe um J tal que $f_j<M$ para todo $j>J$. Para isso, vamos supor o contrário e assumir que haja uma coleção infinita $f_{j_1},\ f_{j_2},\ \ldots$ tal que $f_{j_l}\geq M$ para todo $l\geq1$. Teríamos que $\sum_{j=1}^{\infty}f_j\geq\sum_{l=1}^{\infty}f_{j_l}\geq\sum_{l=1}^{\infty}M=\infty$, uma contradição. Assim, a coleção $f_{j_1},\ f_{j_2},\ \ldots$ deve ser finita e podemos tomar J como o maior dos índices j_l. Podemos então escrever

$$\sum_{j=1}^{\infty}f_j \;=\; \sum_{j=1}^{J}f_j+\sum_{j=J+1}^{\infty}f_j$$

com a garantia que na, última soma, todo f_j satisfaz $0 < f_j < M$ para um certo $0 < M < 1$ fixado.

Agora, observemos que no intervalo $[0,\ M]$ a função $g(x) := -\ln(1-x)$ é contínua, limitada, diferenciável e satisfaz $g''(x) = 1/(1-x)^2 > 0$. Assim, g é convexa[12] naquele intervalo e, portanto, de (5.26), página 353, tem-se

$$g(x) \ \leq \ g(0) + \frac{\big(g(M) - g(0)\big)}{M}\, x \ ,$$

ou seja,

$$-\ln(1-x) \ \leq \ -\frac{\ln(1-M)}{M}\, x \ . \tag{30.28}$$

Logo,

$$-\sum_{j=1}^{\infty}\ln(1-f_j) \ = \ -\sum_{j=1}^{J}\ln(1-f_j) - \sum_{j=J+1}^{\infty}\ln(1-f_j) \ \leq \ -\sum_{j=1}^{J}\ln(1-f_j) - \frac{\ln(1-M)}{M}\sum_{j=J+1}^{\infty} f_j \ .$$

Todavia, a soma $\sum_{j=J+1}^{\infty} f_j$ é finita, por hipótese, provando que $-\sum_{j=1}^{\infty}\ln(1-f_j)$ também o é. ■

*

Vimos assim que existem inúmeros conjuntos de Cantor $C_{\{f\}}(F)$ com medida de Lebesgue não nula. A existência de conjuntos com tais propriedades é um dos fatos mais surpreendentes da Teoria da Medida. Nenhuma intuição a justifica ou esclarece.

Conjuntos de Cantor e outros conjuntos fractais (como a *Estrela de Koch* da Figura 29.1, página 1567) podem ser construídos em várias dimensões e não são apenas uma curiosidade matemática, pois podem ser observados na Natureza. A Figura 30.6, página 1612, mostra imagens dos anéis de Saturno, os quais exibem uma complexa estrutura de lacunas em várias escalas, muito à semelhança dos conjuntos $C_{\{f\}}(F)$. As lacunas são causadas por ressonâncias dos períodos das órbitas das partículas que compõem os anéis com períodos das órbitas de alguns satélites de Saturno[13]. Lacunas desse tipo ocorrem também no cinturão de asteróides e são conhecidos como *gaps de Kirkwood*[14]. No caso do cinturão de asteróides, as lacunas são causadas por ressonâncias com o período da órbita de Júpiter[15]. Vide Figura 30.7, página 1613.

Conjuntos como os de Cantor e outros conjuntos fractais ocorrem também em diversos sistemas dinâmicos e no espectro de certos operadores Hamiltonianos na Mecânica Quântica. Vide para tal [118] e outras referências lá citadas. A Figura 30.8, página 1614, exibe a chamada "*borboleta de Hofstadter*"[16], que representa o espectro do Hamiltoniano quântico de um elétron se movendo em um plano bidimensional sob a ação de um potencial periódico bidimensional e de um campo magnético constante perpendicular a esse plano. O eixo horizontal representa o espectro de energias e o vertical o fluxo ϕ do campo magnético em cada célula do potencial periódico bidimensional (em unidades de hc/e). Quando ϕ é um racional da forma $\phi = p/q$ (com p e q irredutíveis) o espectro possui q bandas e $q+1$ lacunas. Quando ϕ é irracional, o espectro é um conjunto de Cantor.

Todos esses assuntos são objeto de pesquisa atual.

30.4 Exemplos de Conjuntos Mensuráveis por Lebesgue mas não Borelianos

Como já comentado, a cardinalidade da coleção dos conjuntos mensuráveis por Lebesgue em $\mathbb{R}$ é superior à cardinalidade dos conjuntos Borelianos. Assim, há "muitos" conjuntos Lebesgue-mensuráveis que não são Borelianos. No que segue desta seção exibiremos dois exemplos "pedagógicos" de tais conjuntos

[12] A teoria das funções convexas é desenvolvida no Capítulo 5, página 334.

[13] Algumas lacunas são causadas pela presença de satélites dentro da região de anéis, que absorvem as partículas que os compõem.

[14] Daniel Kirkwood (1814–1895). Os gaps, ou lacunas, de Kirkwood foram descobertos no cinturão de asteróides em 1866.

[15] Mais comentários e referências sobre o assunto podem ser encontrados em M. V. Berry, *"Regular and Irregular Motion"*. Topics in Nonlinear Dynamics (ed. S. Jorna) Am. Inst. Phys. Conf. Proc. **46** 16–120 (1978). Vide também S. F. Dermott and C. D. Murray, *"Nature of the Kirkwood Gaps in the Asteroid Belt"*. Nature **301**, 201–205 (1983). Ambos os trabalhos encontram-se republicados em [346].

[16] Douglas Richard Hofstadter (1945–). Para o artigo original, vide Douglas R. Hofstadter, *"Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields"*. Phys. Rev. B **14**, 2239 (1976).

30.4.1 A Função de Cantor e um Exemplo dela Derivado

Para apresentarmos nosso primeiro exemplo de um conjunto mensurável por Lebesgue, mas não Boreliano, precisamos introduzir uma interessante função, denominada *função de Cantor*. A função de Cantor foi introduzida pelo mesmo em 1884[17] para servir de contraexemplo a certas conjecturas sobre integração e diferenciabilidade de funções. O exemplo que segue é aparentemente devido a Hausdorff e é brevemente discutido em [219] e [185].

• **A função de Cantor. Definição informal**

A chamada *função de Cantor*, que denotaremos por $F : [0, 1] \to [0, 1]$, é uma curiosa fonte de contraexemplos em Análise. Apresentemos sua definição. Iniciamos definindo-a os extremos do intervalo $[0, 1]$: $F(0) := 0$ e $F(1) := 1$. A partir daí, a função é definida em intervalos abertos sucessivos, que são os mesmos intervalos abertos que são subtraídos do intervalo $[0, 1]$ quando da construção do conjunto de Cantor ternário $C_{1/3}$, como apresentamos na Seção 30.3.1, página 1593. Vide, em particular, a Figura 30.1, página 1593.

O primeiro aberto subtraído do intervalo $[0, 1]$ é $(1/3, 2/3)$. Nesse intervalo fazemos a função F valer $1/2$, que é o valor intermediário entre $F(0) = 0$ e $F(1) = 1$. Em seguida, passamos aos intervalos $(1/9, 2/9)$ e $(7/9, 8/9)$. Neles impomos que F assuma os valores $1/4$ e $3/4$, respectivamente. Observe-se que esses são os valores intermediários entre $F(0) = 0$ e o valor de F no intervalo $(1/3, 2/3)$ e, respectivamente, o valor de F no intervalo $(1/3, 2/3)$ e entre $F(1) = 1$.

Prosseguimos dessa maneira definindo F em todos os intervalos subtraídos de $[0, 1]$ quando da construção de $C_{1/3}$, sempre fazendo F assumir o valor intermediário entre seus valores em intervalos adjacentes de cada etapa. Nos pontos remanescentes do intervalo $[0, 1]$, que são os pontos do conjunto de Cantor $C_{1/3}$, a função F é estendida por continuidade.

O resultado é esquematicamente apresentado na Figura 30.2, página 1603.

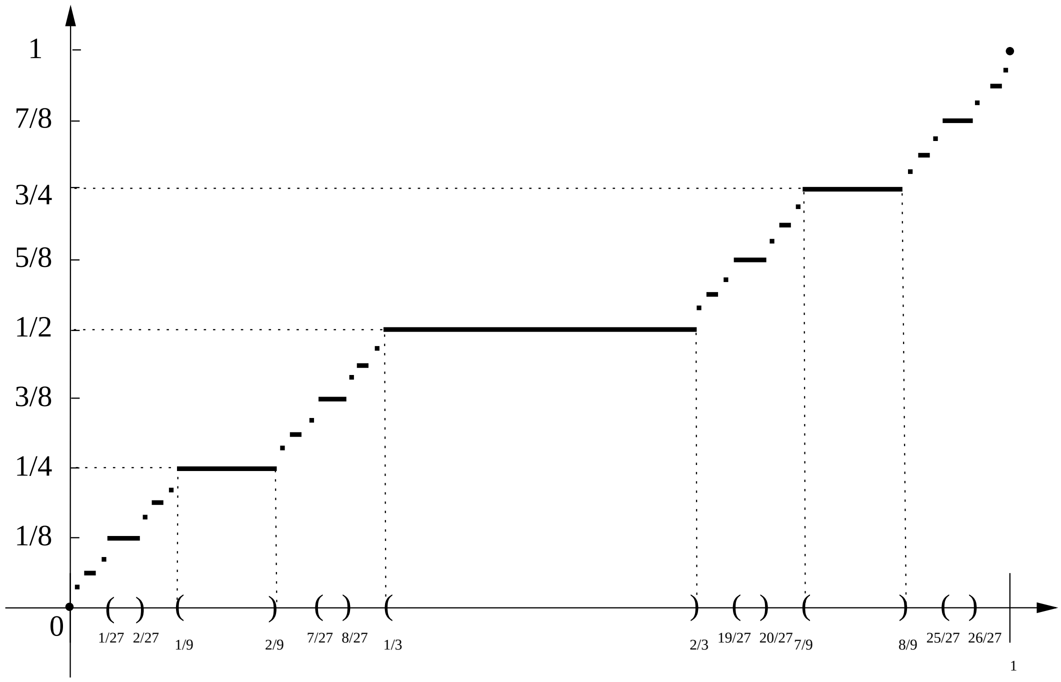

Figura 30.2: Desenho esquemático do gráfico da função de Cantor $F : [0, 1] \to [0, 1]$.

• **A função de Cantor. Definição formal**

Elaboremos essa definição de F de uma forma mais precisa. Cada elemento $x \in [0, 1]$ possui uma representação na

[17] G. Cantor, *"De la puissance des ensembles parfaits de points: Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur"*. Acta Mathematica. International Press of Boston, **4:** 381-392 (1884). doi:10.1007/bf02418423. ISSN 0001-5962.

base ternária dada por $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{3^n} \equiv 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots$, sendo $d_n \in \{0,\ 1,\ 2\}$. Vimos na Proposição 30.10, página 1594, que os elementos de $C_{1/3}$ poderem ser escritos de forma única na base 3 com dígitos 0 ou 2.

Para cada $x \in [0,\ 1]$ definamos $p(x)$ como o menor índice n para o qual $d_n = 1$. Caso tal índice não ocorra na representação ternária, adotamos $p(x) = \infty$. Os pontos com $p(x) = \infty$ são precisamente os pontos de $C_{1/3}$.

Afirmamos que a união dos intervalos abertos que subtraímos de $[0,\ 1]$ na n-ésima (aqui $n \in \mathbb{N}$) etapa para compor o conjunto de Cantor é da forma

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{a_1 \in \{0,\ 2\}} \cdots \bigcup_{a_{n-1} \in \{0,\ 2\}} \Big\{ x \in [0,\ 1] \,\Big|\, 0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} 1000 \cdots \ < \ x \ < \ 0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} 1222 \cdots \Big\} .$$

Notar que $0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} 1222 \cdots = 0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} 2000 \cdots$.

Exemplos 30.1 Para $n = 1$, por exemplo, são os números x com $0,10000 \cdots < x < 0,12222 \cdots = 0,20000 \cdots$, ou seja, $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$. Para $n = 2$ são os números x com $0,010000 \cdots < x < 0,012222 \cdots = 0,020000 \cdots$ ou $0,210000 \cdots < x < 0,212222 \cdots = 0,22000 \cdots$, ou seja, $\frac{1}{9} < x < \frac{2}{9}$ ou $\frac{7}{9} < x < \frac{8}{9}$. ♦

Podemos agora definir precisamente a função de Cantor $F(x)$ que descrevemos acima: para $x \in [0,\ 1]$ tal que $p(x)$ é finito (ou seja, $x \in [0,\ 1] \setminus C_{1/3}$), definimos

$$F\left(\sum_{1 \leq m < p(x)} \frac{d_m}{3^m} \right) \ := \ \sum_{1 \leq m < p(x)} \frac{d_m}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{p(x)}} \ . \tag{30.29}$$

Acima, tem-se $d_m \in \{0,\ 2\}$.

Exemplos 30.2 Para $p(x) = 1$, por exemplo, os pontos do intervalo $(1/3,\ 2/3)$ são associados a $\frac{1}{2}$.

Para $p(x) = 2$ os pontos do intervalo $(1/9,\ 2/9)$, ou seja, os pontos x com $0,010000 \cdots < x < 0,012222 \cdots = 0,020000 \cdots$ são associados ao valor

$$F(x) \ = \ \sum_{1 \leq m < 2} \frac{d_m}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^2} \ = \ \frac{1}{2^2} \ = \ \frac{1}{4} \ ,$$

pois aqui $d_1 = 0$, enquanto que os os pontos do intervalo $(7/9,\ 8/9)$, ou seja, os pontos x com $0,210000 \cdots < x < 0,212222 \cdots = 0,22000 \cdots$ são associados ao valor

$$F(x) \ = \ \sum_{1 \leq m < 2} \frac{d_m}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^2} \ = \ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \ = \ \frac{3}{4} \ ,$$

pois aqui $d_1 = 2$. Trata-se dos mesmos valores anteriormente apresentados quando da definição informal da função de Cantor. ♦

Resta ainda definir o valor de F nos pontos do conjunto $C_{1/3}$, para os quais $p(x) = \infty$. Podemos adotar a própria definição (30.29) com $p(x) = \infty$ e teremos

$$F\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{3^m} \right) \ := \ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{2^{m+1}} \ . \tag{30.30}$$

Acima, tem-se $d_m \in \{0,\ 2\}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Cabem agora as seguintes observações que confirmam as propriedades que apresentamos na definição informal:

1. É claro pela definição (30.30) que $F(0) = 0$. Como $1 = 0,22222 \cdots$, temos também por por (30.30), $F(1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 1$.

2. Tomemos dois números x, y no intervalo $[0,\ 1]$ com representações trinárias $x = 0, x_1 x_2 x_3 \cdots$ e $y = 0, y_1 y_2 y_3 \cdots$, com $x_k,\ y_k \in \{0,\ 1,\ 2\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $y > x$, então existe algum n tal que $a_i = b_i$ para todo $1 \leq i < n$, mas $b_n > a_n$. Assim, se $p(x) \leq n$ temos também $p(x) = p(y) \leq n$ e, nesse caso,

$$F(y) - F(x) \ = \ \sum_{1 \leq m < p(y)} \frac{y_m}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{p(y)}} - \sum_{1 \leq m < p(x)} \frac{x_m}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{p(x)}} \ = \ 0$$

pois $y_m = x_m$ para todo $m \in \{1, \ldots, p(x) = p(y)\}$. O caso $p(y) < n$ é análogo.

Assim, resta considerar a situação na qual $p(y) > n$ e $p(x) > n$. Temos

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) &= \frac{b_n - a_n}{2^{n+1}} + \sum_{m=n+1}^{p(y)-1} \frac{b_m}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{p(y)}} - \sum_{m=n+1}^{p(x)-1} \frac{a_m}{2^{m+1}} - \frac{1}{2^{p(x)}} \\ &= \frac{1}{2^n} + \sum_{m=n+1}^{p(y)-1} \frac{b_m}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{p(y)}} - \sum_{m=n+1}^{p(x)-1} \frac{a_m}{2^{m+1}} - \frac{1}{2^{p(x)}} , \end{aligned} \tag{30.31}$$

Acima, usamos que $b_n - a_n = 2$. De fato, como $p(x) > n$ e $p(y) > n$, não podemos ter $b_n = 1$ nem $a_n = 1$ e, fora isso, $b_n \geq a_n$. Assim, só podemos ter $b_n = 2$ e $a_n = 0$. Façamos agora algumas majorações:

$$\sum_{m=n+1}^{p(y)-1} \frac{b_m}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{p(y)}} \geq 0 , \quad \text{pois } b_m \geq 0 ,$$

$$\sum_{m=n+1}^{p(x)-1} \frac{a_m}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{p(x)}} \leq \sum_{m=n+1}^{p(x)} \frac{1}{2^m} \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^n} , \quad \text{pois } a_m \leq 2 .$$

Inserindo isso em (30.31), temos

$$F(y) - F(x) \geq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 0 .$$

Isso provou que se $y > x$, então $F(y) \geq F(x)$, o que significa que F é não decrescente.

3. Provemos a continuidade de F, considerando $\left|F(y) - F(x)\right|$ com (sem perda de generalidade) $y > x$. Por (30.31), vale

$$\begin{aligned} \left|F(y) - F(x)\right| &\leq \frac{1}{2^n} + \sum_{m=n+1}^{p(y)-1} \frac{b_m}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{p(y)}} + \sum_{m=n+1}^{p(x)-1} \frac{a_m}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{p(x)}} \\ &\leq \frac{1}{2^n} + \sum_{m=n+1}^{p(y)-1} \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{p(y)}} + \sum_{m=n+1}^{p(x)-1} \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{p(x)}} \\ &= \frac{1}{2^n} + \sum_{m=n+1}^{p(y)} \frac{1}{2^m} + \sum_{m=n+1}^{p(x)} \frac{1}{2^m} \\ &\leq \frac{1}{2^n} + 2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^n} + \frac{2}{2^n} = \frac{3}{2^n} . \end{aligned}$$

Na primeira desigualdade, acima, usamos que $a_m \geq 0$ e $b_m \geq 0$ e na segunda desigualdade usamos que $a_m \leq 2$ e $b_m \leq 2$.

O fato que $\left|F(y) - F(x)\right| \leq 3/2^n$ significa que podemos fazer essa diferença menor que qualquer $\epsilon > 0$, prescrito, fazendo n suficientemente grande. Mas isso significa dizer que os $n - 1$ primeiros dígitos de x e de y coincidem e, assim, $|x - y| \leq 2/3^n$. Isso nos informa que F é contínua em todo intervalo $[0, 1]$. Por $[0, 1]$ ser compacto, F é uniformemente contínua[18] (Teorema de Heine-Cantor, Teorema 33.12, página 1740), o que já é evidente das estimativas acima para $\left|F(y) - F(x)\right|$ e $|x - y|$.

[18] Para a definição de continuidade uniforme, vide página 1739.

E. 30.9 *Exercício.* Resumindo a exposição acima, mostre que a função de Cantor $F : [0,\ 1] \to [0,\ 1]$, definida acima, pode ser expressa da seguinte forma:

$$F(x) \;=\; \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{2^{n+1}} \,, & \text{se } x \in C_{1/3} \text{ é da forma } x \;=\; \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n}, \text{ com } t_n \in \{0,\ 2\} \,, \\ \sup\bigl\{F(y),\ y \in C_{1/3},\ y \le x\bigr\} \,, & \text{se } x \in [0,\ 1] \setminus C_{1/3} \,, \end{cases} \tag{30.32}$$

para cada $x \in [0,\ 1]$. Acima, usamos o fato de os elementos de $C_{1/3}$ poderem ser escritos de forma única na base 3 com dígitos 0 ou 2 (Proposição 30.10, página 1594). A segunda linha em (30.32) expressa a continuidade de F. ✠

• **Comentários sobre a função de Cantor**

O gráfico representado na Figura 30.2, e outros similares, é por vezes figurativamente (e sugestivamente) denominado *escada do diabo*. É interessante observar que funções com gráficos desse tipo não têm sua existência limitada à Matemática, pois eles ocorrem na Física, como por exemplo na Mecânica Estatística[19] e na Física dos Materiais[20].

A função de Cantor possui propriedades interessantes. Ela mapeia continuamente o intervalo $[0,\ 1]$ em si mesmo e é não decrescente. Claramente não é injetiva. Sua derivada existe quase em toda a parte (em todos os intervalos abertos complementares ao conjunto $C_{1/3}$) e é nula nos mesmos (por F ser constante nesses intervalos). Assim, F é diferenciável q.t.p., com $F' = 0$ q.t.p. Dessa forma, F' possui uma única extensão contínua a todo o intervalo $[0,\ 1]$, a saber, a função identicamente nula. Com isso, porém, vemos que a função F não satisfaz o Teorema Fundamental do Cálculo pois, para a integração de Riemann ou de Lebesgue, tem-se $1 = F(1) - F(0) \neq \int_0^1 F'(x)dx = 0$.

• **Um homeomorfismo "exótico" de $[0,\ 1]$ em si mesmo**

A função de Cantor definida acima permite-nos definir um homeomorfismo[21] do intervalo $[0,\ 1]$ em si mesmo: $\varphi : [0,\ 1] \to [0,\ 1]$. Essa função é definida por

$$\varphi(x) \;:=\; \frac{1}{2}\bigl[x + F(x)\bigr] \,, \quad x \in [0,\ 1] \,,$$

onde F é a função de Cantor. Adotemos no domínio $[0,\ 1]$ e na imagem $[0,\ 1]$ a topologia métrica usual, que coincide com a topologia induzida por $\tau_{\mathbb{R}}$, a topologia usual de $\mathbb{R}$, em $[0,\ 1]$.

Que φ é um homeomorfismo se justifica da seguinte forma. A função φ é contínua (pois x e $F(x)$ o são) e é elementar ver (evocando bem conhecido Teorema do Valor Intermediário, vide *e.g.*, [339], [505], [13] ou [112]) que sua imagem é todo o intervalo $[0,\ 1]$. Fora isso, φ é estritamente crescente. De fato, se $y > x$ temos $\varphi(y)-\varphi(x) = \frac{1}{2}\bigl[(y-x)+(F(y)-F(x))\bigr] > 0$, pois $F(y) \ge F(x)$ caso $y > x$. Assim, concluímos que φ é uma bijeção contínua de $[0,\ 1]$ em si mesmo. Como o domínio $[0,\ 1]$ é compacto e a imagem $[0,\ 1]$ é Hausdorff, temos pelo Teorema 33.10, página 1734, que a inversa de φ é também contínua e, portanto, φ é um homeomorfismo.

Afirmamos que $\mu_L\bigl(\varphi(C_{1/3})\bigr) = 1/2$. De fato, por φ ser bijetora, temos que $[0,\ 1] = \varphi(C_{1/3}) \cup \varphi\bigl([0,\ 1] \setminus C_{1/3}\bigr)$, uma união disjunta. Agora, $[0,\ 1] \setminus C_{1/3}$ é também uma união disjunta de uma coleção contável de intervalos abertos, aqueles usados quando da definição de $C_{1/3}$:

$$(1/3,\ 2/3), \quad (1/9,\ 2/9), \quad (7/9,\ 8/9), \quad (1/27,\ 2/27), \quad (7/27,\ 8/27), \quad (19/27,\ 20/27), \quad (25/27,\ 26/27), \ldots \quad \text{etc.} \tag{30.33}$$

Vide Figura 30.1, página 1593.

Para qualquer intervalo $(a,\ b) \subset [0,\ 1]$, temos que $\varphi(b) - \varphi(a) = \frac{1}{2}\bigl[(b-a) + F(b) - F(a)\bigr]$. Assim, como F é constante nos intervalos de (30.33), concluímos que a medida de Lebesgue de $\varphi\bigl([0,\ 1] \setminus C_{1/3}\bigr)$ é 1/2 da medida de Lebesgue da

[19] Vide para tal, *e.g.*, Per Bak, *"Commensurate phases, incommensurate phases and the devil's staircase"*. Reports on Progress in Physics **45** (6): 587-629 (1982). doi:10.1088/0034-4885/45/6/001.

[20] O gráfico que expressa a chamada resistividade de Hall no chamado *efeito Hall quântico fracionário* é desse tipo. Vide, *e.g.*, fig. 18 em Horst L. Stormer, *"Nobel Lecture: The fractional quantum Hall effect"*, Rev. Mod. Phys. **71**, 875 (1999). DOI:https://doi.org/10.1103/RevModPhys.71.875

[21] Isto é, uma função bijetora contínua com inversa também contínua. A noção de homeomorfismo é desenvolvida na Seção 31.5.1.1, página 1628.

união desses infinitos intervalos disjuntos, que sabemos ser igual a 1. Assim, $\mu_L\Big(\varphi\big([0,\ 1]\setminus C_{1/3}\big)\Big) = 1/2$ e, como $\mu_L\Big(\varphi\big([0,\ 1]\big)\Big) = \mu_L\big([0,\ 1]\big) = 1$, concluímos que $\mu_L\Big(\varphi\big(C_{1/3}\big)\Big) = 1/2$.

Vemos, dessa forma, que $\mu_L\big(C_{1/3}\big) = 0$ mas $\mu_L\Big(\varphi\big(C_{1/3}\big)\Big) = 1/2$. Esse é um resultado surpreendente, pois mostra que um homeomorfismo pode mapear um conjunto de medida nula em um conjunto de medida não nula!

• **Mais surpresas e um conjunto mensurável por Lebesgue, mas não Boreliano**

Essas surpresas continuam. Pela Proposição 30.1, página 1585, existe $D\subset\varphi\big(C_{1/3}\big)$ não mensurável por Lebesgue. É claro que $\varphi^{-1}(D)$ é um subconjunto de $C_{1/3}$ e, portanto, é um conjunto mensurável por Lebesgue com medida de Lebesgue nula (vide Teorema 29.2, página 1568).

Assim, um homeomorfismo, como φ^{-1}, pode mapear conjuntos não mensuráveis em conjuntos mensuráveis!

O conjunto $E\equiv\varphi^{-1}(D)$, porém, não pode ser Boreliano, o que pode ser argumentado da seguinte forma. Pelo Corolário 32.4, página 1681, se E fosse Boreliano, $\varphi(E)$ seria também Boreliano, pois φ^{-1} é contínua. Evidentemente, porém, $\varphi(E) = D$, que não é mensurável por Lebesgue. Assim, concluímos que $\varphi^{-1}(D)\subset C_{1/3}\subset[0,\ 1]$ é um conjunto mensurável por Lebesgue mas não Boreliano.

30.4.2 Bases de Hamel e a Medida de Lebesgue

Pretendemos aqui exibir um segundo exemplo explícito, extraído de [184], de um conjunto não Boreliano mas mensurável por Lebesgue, a saber, mostraremos que existem bases de Hamel[22] da reta real (definidas à página 199 e seguintes) que são mensuráveis por Lebesgue sendo que, porém, nenhuma base de Hamel é um conjunto Boreliano. Comentamos que há na literatura pertinente diversos outros exemplos explícitos de conjuntos mensuráveis por Lebesgue, mas não Borelianos. Vide, *e.g.*, [185].

Se $x\in\mathbb{R}$ e C é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, denotaremos por $C+x$ o conjunto obtido transladando os elementos de C por x, a saber, $C+x := \{c+x|\, c\in C\}$. Analogamente, se C e D são subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ definimos,

$$C+D \;:=\; \big\{c+d\big|\, c\in C,\ d\in D\big\} \;=\; \bigcup_{d\in D}\big(C+d\big) \;=\; \bigcup_{c\in C}\big(D+c\big)\ .$$

O primeiro resultado que apresentamos é o seguinte:

Proposição 30.12 *Se B_0 é um subconjunto do conjunto de Cantor $C_{1/3}\subset[0,\ 1]$ que seja maximalmente linearmente independente por racionais, então $B = B_0+\mathbb{Z}$ é uma Base de Hamel.* □

Comentário. Notemos que B_0 é mensurável por Lebesgue, por ser subconjunto de um conjunto de medida de Lebesgue nula, a saber, $C_{1/3}$ (vide Proposição 30.3, página 1588). Portanto, $\mu_L(B) = \mu_L(B_0) = 0$ (lembrar que B é uma união contável de transladados disjuntos de B_0). Naturalmente, B é uma base de Hamel mensurável por Lebesgue, por ser união contável de conjuntos mensuráveis por Lebesgue. ♣

Prova da Proposição 30.12. Pelo Lema 30.1, página 1595, todo $x\in[0,\ 1]$ pode ser escrito como uma combinação linear por racionais de dois elementos do conjunto de Cantor ternário $C_{1/3}$. Por uma simples aplicação do Lema de Zorn (faça!), pode-se facilmente provar que $C_{1/3}$ possui pelo menos um subconjunto de elementos linearmente independentes por racionais. Denotemos um tal subconjunto por B_0. Assim, todo elemento de $C_{1/3}$ pode ser escrito como uma combinação linear finita por racionais de elementos de B_0. Juntando isso à observação anterior, concluímos que todo elemento de $[0,\ 1]$ pode ser escrito como combinação linear finita por racionais de elementos de B_0. Repetindo-se isso em cada intervalo $[m,\ m+1]$ com $m\in\mathbb{Z}$ a proposição cai demonstrada. ■

Isso demonstrou que há bases de Hamel mensuráveis por Lebesgue. Tem-se, porém, o seguinte fato, devido a Sierpiński[23], cuja demonstração omitiremos:

[22] Georg Hamel (1877–1954).

[23] Waclaw Franciszek Sierpiński (1882–1969). O Teorema 30.3 encontra-se em *"Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel"*. Fund. Math. **1**, 105–111 (1920).

Teorema 30.3 *Nenhuma base de Hamel em $\mathbb{R}$ é Boreliana.* □

Com isso, a base de Hamel B construída acima a partir de um subconjunto linearmente independente por racionais do conjunto de Cantor é um exemplo de um conjunto mensurável por Lebesgue, mas não Boreliano.

Em verdade, nem toda base de Hamel é mensurável por Lebesgue. Vale, todavia, o seguinte fato, que provaremos abaixo: uma base de Hamel é mensurável por Lebesgue se e somente se sua medida de Lebesgue for nula. Precisaremos do seguinte lema:

Lema 30.3 *Se $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto mensurável por Lebesgue com medida de Lebesgue positiva, ou seja, $\mu_L(A) > 0$, então existe um intervalo aberto $I_\alpha = (-\alpha,\ \alpha)$, $\alpha > 0$, tal que todo elemento x de I_α pode ser escrito na forma $x = a_1 - a_2$, com $a_1,\ a_2 \in A$.* □

Comentários. 1º O Lema 30.3, acima, possui uma generalização para medidas de Haar em grupos topológicos localmente compactos (como é o caso da medida de Lebesgue na reta real). 2º Uma demonstração alternativa do Lema 30.3 pode ser encontrada em [219], cap. III, §16, p. 68. 3º A afirmativa do Lema 30.3 pode valer também em casos particulares nos quais $\mu_L(A) = 0$. Tal ocorre no caso do conjunto de Cantor ternário $C_{1/3}$. Vide para tal [185], Sec. 8.3, p. 87. ♣

Prova do Lema 30.3. Começamos observando que é suficiente supor que A seja um conjunto limitado. De fato, se A não é limitado com $\mu_L(A) > 0$, existirá um conjunto limitado como $A \cap [-a,\ a]$, para algum $a > 0$, contido em A com medida de Lebesgue $0 < \mu_L\big(A \cap [-a,\ a]\big) < 2a$. Para ver isso, notemos que pela propriedade de regularidade interior da medida de Lebesgue (30.5), página 1586, existe um compacto $C \subset A$ tal que $\mu_L(C) > 0$. Como $A \cap [-a,\ a] \supset C \cap [-a,\ a]$, se escolhermos a grande o suficiente, valerá $C \cap [-a,\ a] = C$ e, assim, teremos $\mu_L\big(A \cap [-a,\ a]\big) > \mu_L(C) > 0$. A desigualdade $\mu_L\big(A \cap [-a,\ a]\big) < 2a$ é evidente do fato de $A \cap [-a,\ a] \subset [-a,\ a]$ com o intervalo $[-a,\ a]$ sendo mensurável com medida de Lebesgue $2a$.

Se a afirmação a ser provada vale para um tal subconjunto limitado, também valerá para todo A que satisfaça as hipóteses. Vamos, portanto, supor A limitado com $\mu_L(A) > 0$.

Se A é limitado, existe $K_0 > 0$ tal que $A \subset [-K_0,\ K_0]$. Vamos denominar $A - A \equiv \{x - y,\ x,\ y \in A\}$.

Vamos supor que a afirmação a ser demonstrada seja falsa para o conjunto A e que exista um aberto $(-r,\ r)$, $r > 0$, contendo a origem e que não está contido em $A - A$. Isso significa que a sequência $c_n := r/2^n$, $n \in \mathbb{N}$, é tal que $c_n \to 0$ e $\{c_n,\ n \in \mathbb{N}\} \not\subset A - A$. É fácil ver que, para cada $n \neq m$, vale $(A + c_n) \cap (A + c_m) = \emptyset$. De fato, se isso não fosse verdade existiriam $x,\ y \in A$ com $x + c_n = y + c_m$, ou seja, $c_m - c_n = x - y \in A - A$, uma contradição, pois $c_m - c_n = r/2^m - r/2^n \in (-r,\ r)$. Assim, $A + c_n$ e $A + c_m$ são disjuntos para $n \neq m$. Analogamente, vê-se que A e $A + c_n$ são disjuntos para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definamos, para $m \in \mathbb{N}$,

$$A_m \ := \bigcup_{n=1}^{m} (A + c_n)\ .$$

Por A_m ser uma união disjunta teremos, devido à invariância translacional da medida de Lebesgue,

$$\mu_L(A_m) \ = \ \sum_{n=1}^{m} \mu_L(A + c_n) \ = \ m\mu_L(A)\ . \tag{30.34}$$

Paralelamente a isso, pela escolha dos c_n, temos para $n \geq 1$,

$$A + c_n \ \subset \ \left[-\left(K_0 + \frac{r}{2^n}\right),\ \left(K_0 + \frac{r}{2^n}\right)\right] \ \subset \ \left[-K_0 - \frac{r}{2},\ K_0 + \frac{r}{2}\right]\ . \tag{30.35}$$

Naturalmente, isso ainda poderia ser optimizado, mas é suficiente para a demonstração que segue. Com (30.35), vemos que $A_m \subset \left[-K_0 - \frac{r}{2},\ K_0 + \frac{r}{2}\right]$ para todo $m \in \mathbb{N}$, já que todos os conjuntos $A + c_n$ estão contidos nesse intervalo. Assim, teríamos também por (30.34),

$$m\mu_L(A) \ = \ \mu_L(A_m) \ \leq \ 2K_0 + r \qquad \therefore \qquad \mu_L(A) \ \leq \ \frac{2K_0 + r}{m}\ .$$

Como essa desigualdade vale para todo $m \in \mathbb{N}$, concluímos que $\mu_L(A) = 0$, em contradição com as hipóteses. ■

A consequência mais relevante para nós do Lema 30.3 é o seguinte resultado:

Proposição 30.13 *Uma base de Hamel B da reta real é mensurável por Lebesgue se e somente se $\mu_L(B) = 0$.* □

Prova. Se B não for mensurável por Lebesgue não há o que se provar. Suponhamos então que B seja mensurável por Lebesgue. Então, ou $\mu_L(B) = 0$ ou $\mu_L(B) > 0$. Vamos supor que $\mu_L(B) > 0$. Pelo Lema 30.3 existem números racionais não nulos r e s (ambos contidos em algum intervalo $(-\alpha, \ \alpha)$ conveniente) tais que $r = b_1 - b_2$ e $s = b_3 - b_4$, com $b_1, \ b_2, \ b_3, \ b_4 \in B$. Seja $t = r/s$, que obviamente é racional. Concluímos de $r = ts$ que $b_1 - b_2 = t(b_3 - b_4)$. Mas isso é impossível, pois essa expressão contraria o fato de os elementos de B serem linearmente independentes por racionais. Logo, se B é mensurável por Lebesgue, só podemos ter $\mu_L(B) = 0$. ■

A Proposição 30.12 mostrou que a Proposição 30.13 não é vazia, no seguinte sentido: existem bases de Hamel mensuráveis por Lebesgue, nenhuma das quais é Boreliana.

30.5 Exercícios Adicionais

E. 30.10 *Exercício*. Mostre que a dimensão Hausdorff da *Curva de Koch*[24] (linha indicada na Figura 30.3) vale $\frac{\ln(4)}{\ln(3)}$. Supondo que cada segmento inicial tenha comprimento $1/3$, determine o comprimento total (medida de Lebesgue) da curva de Koch. ✠

E. 30.11 *Exercício*. Mostre que a dimensão Hausdorff do *Triângulo de Sierpiński*[25] (indicado em preto na Figura 30.4) vale $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$. Supondo cada aresta inicial com comprimento 1, determine sua área (medida de Lebesgue). ✠

E. 30.12 *Exercício*. Mostre que a dimensão Hausdorff do *Tapete de Sierpiński* (indicado em preto na Figura 30.5) vale $\frac{\ln(8)}{\ln(3)}$. Supondo cada aresta inicial com comprimento 1, determine sua área (medida de Lebesgue). ✠

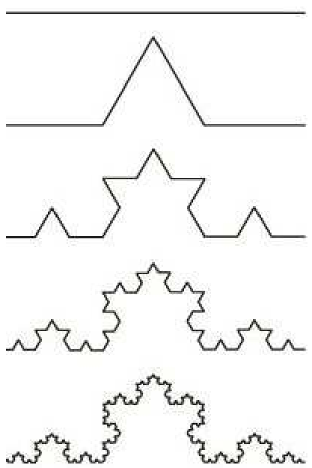

Figura 30.3: Primeiras sequências de conjuntos que geram a Curva de Koch. Em cada etapa, todos os segmentos de reta têm o mesmo comprimento.

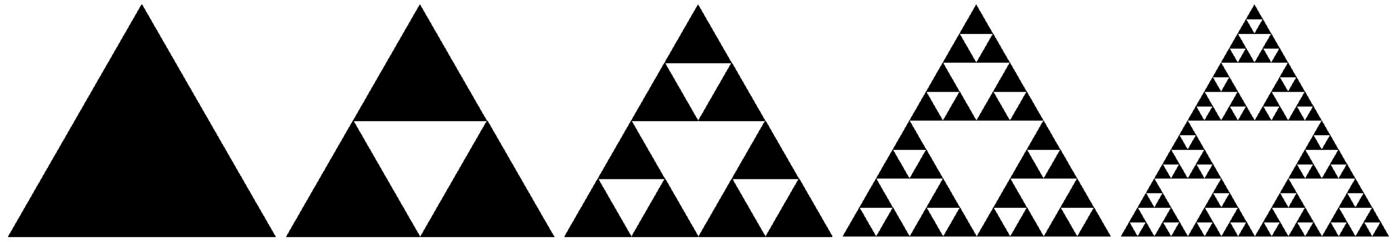

Figura 30.4: Primeiras sequências de conjuntos que geram o Triângulo de Sierpiński.

[24] Niels Fabian Helge von Koch (1870–1924). A Curva de Koch foi descrita pelo mesmo em trabalho datado de 1904.
[25] Waclaw Franciszek Sierpiński (1882–1969).

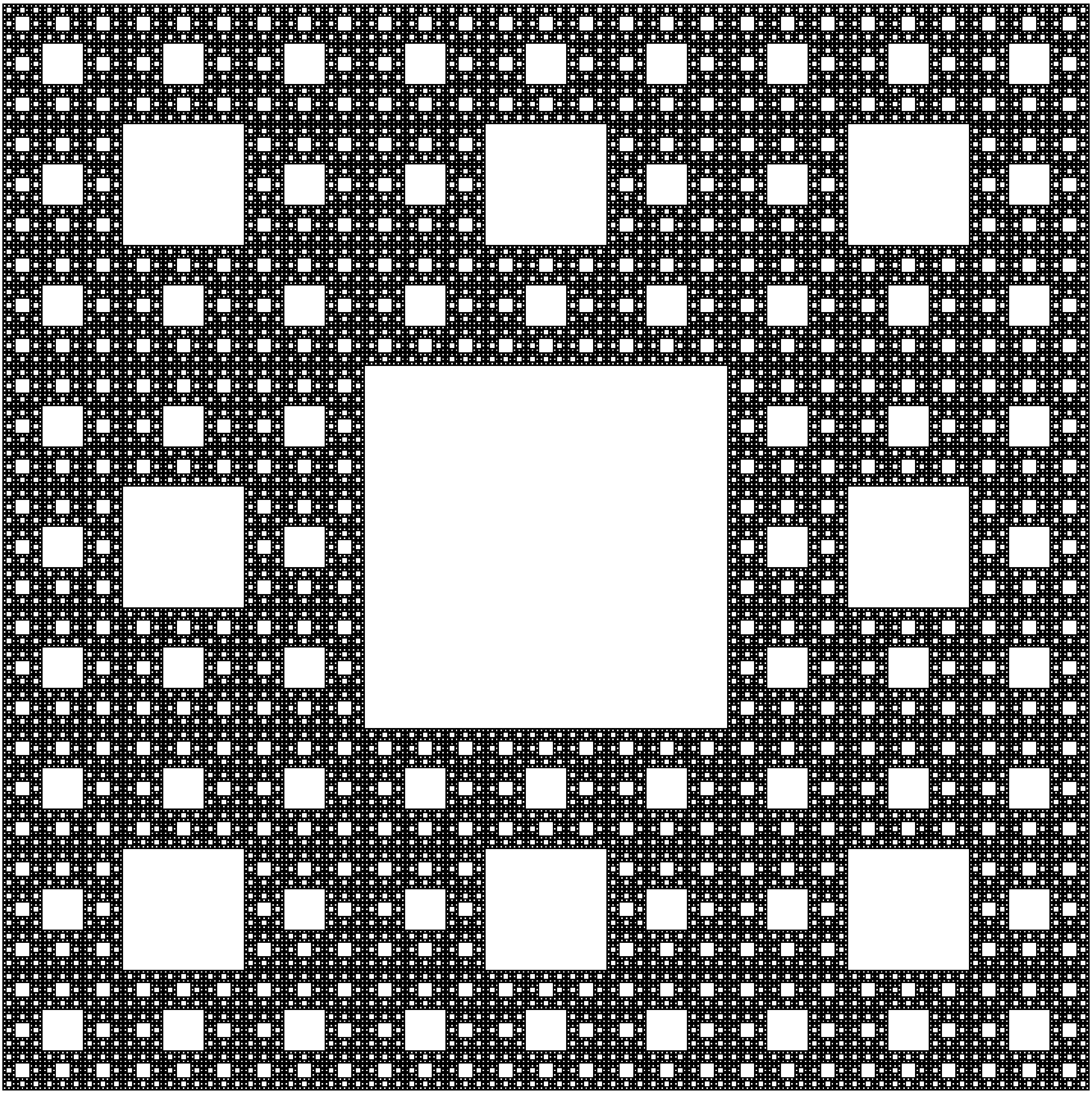

Figura 30.5: O Tapete de Sierpiński.

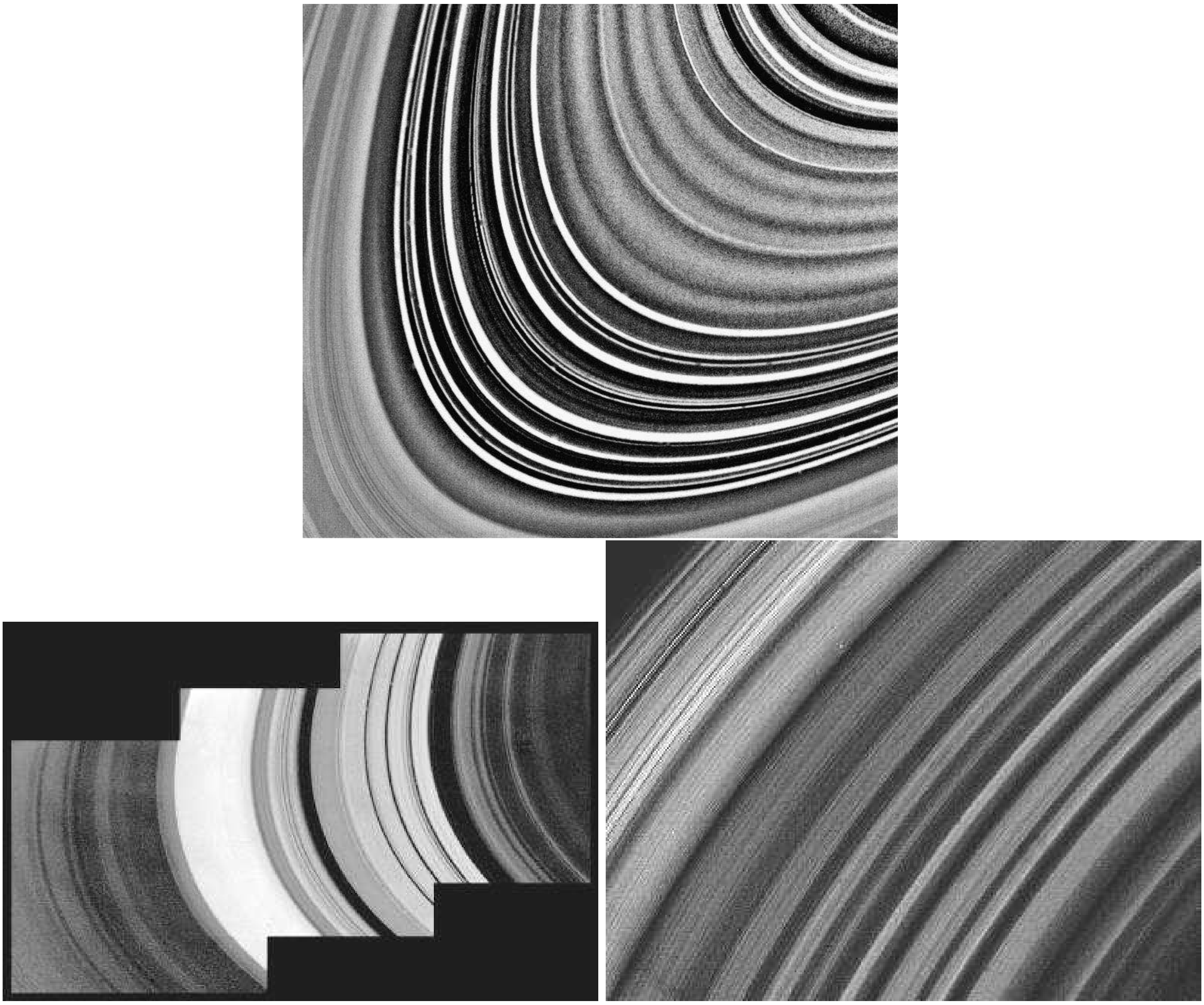

Figura 30.6: As três imagens acima mostram trechos em diferentes escalas dos anéis de Saturno. As imagens foram obtidas pelas sondas Voyager 1 e 2. A Voyager 1 fez sua melhor aproximação a Saturno em 12 de novembro de 1980 e a Voyager 2 em 26 de agosto de 1981, a distâncias de 124.000 km e 101.000 km, respectivamente.

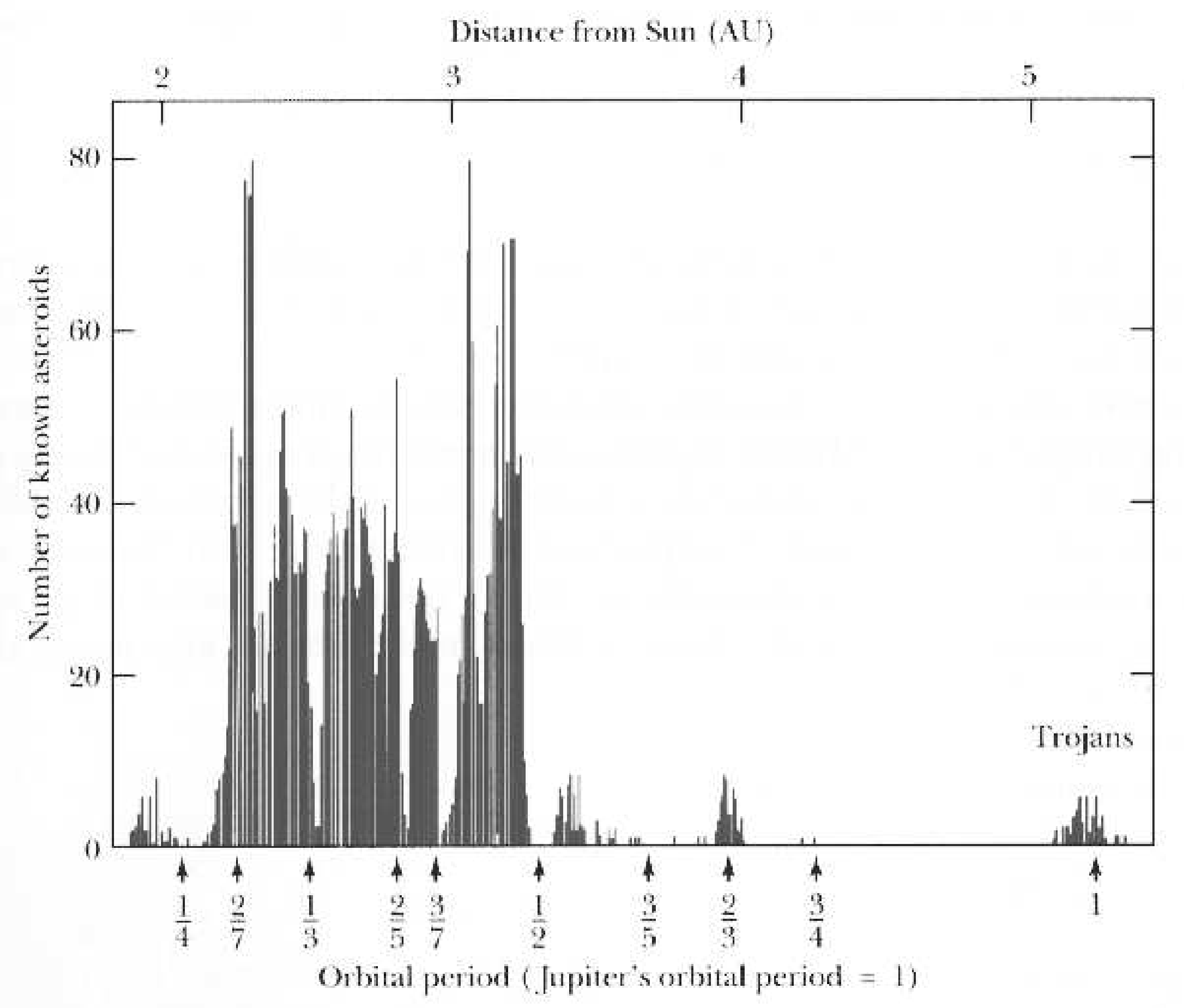

Figura 30.7: Histograma exibindo os *Lacunas de Kirkwood* do cinturão de asteróides. O eixo horizontal representa o período da órbita, em unidades do período de Júpiter em torno do Sol, e o eixo vertical representa o número de asteróides encontrado em cada período. Observe que há certas regiões do eixo horizontal onde praticamente não se observam asteróides. Essas regiões são as denominadas *Lacunas de Kirkwood*. Quase todas essas lacunas ocorrem próximas a pontos onde o período da órbita é igual a certas frações racionais (indicadas na figura) do período de Júpiter. Há exceções a essa regra, o que indica que efeitos não perturbativos (e não ressonantes) desempenham um papel na estabilidade (ou instabilidade) das órbitas. Esses efeitos são ainda hoje objeto de pesquisa da Dinâmica Planetária.

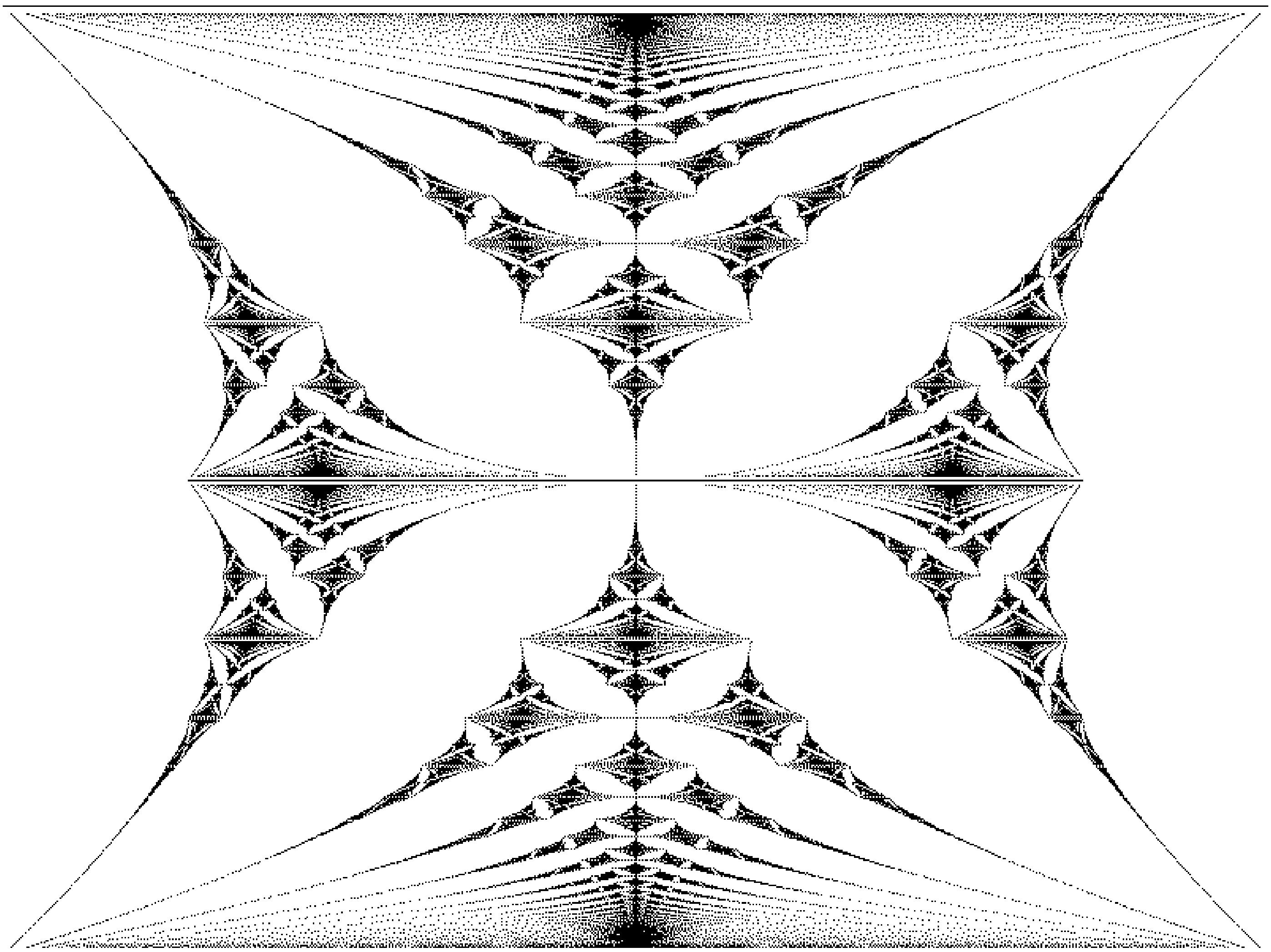

Figura 30.8: A "*borboleta de Hofstadter*". O eixo horizontal representa o espectro quântico de energias de um elétron movendo-se em um plano bidimensional sob a ação de um potencial periódico bidimensional e de um campo magnético constante perpendicular a esse plano. O eixo vertical representa o fluxo ϕ do campo magnético em cada célula do potencial periódico bidimensional (em unidades de hc/e). Na figura, ϕ varia entre 0 e 1.