Funções de Bessel e o Problema da Corda Pendurada

Daniel Augusto Cortez

12 de julho de 2002

1 Introdução. Funções de Bessel de Primeiro Tipo.

Funções de Bessel de primeiro tipo e de ordem ν, $\nu \in \mathbb{R}_+$, são soluções da seguinte classe de equações diferenciais ordinárias

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} y(x) + x \frac{d}{dx} y(x) + \left(x^2 - \nu^2\right) y(x) = 0\,, \tag{1.1}$$

onde $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função a valores reais, contínua e pelo menos duas vezes diferenciável. A equaçào acima pode ser resolvida aplicando-se o chamado Método de Frobeniüs. A idéia consiste, essencialmente, em supormos que a solução de (1.1) seja dada por uma série de potências com coeficientes a determinar. Assim, escrevemos uma solução de (1.1) como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\gamma}\,, \tag{1.2}$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}$ é um parâmetro a mais a ser determinado junto com o coeficientes $c_n \in \mathbb{R}$. Como por hipótese (1.2) é solução de (1.1), fazendo a substituição, obtemos

$$x^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+\gamma)(n+\gamma-1) c_n x^{n+\gamma-2} \right] + x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+\gamma) c_n x^{n+\gamma-1} \right] + \left(x^2 - \nu^2\right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\gamma} \right] = 0\,.$$

Arrumando os termos de forma mais apropriada, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\gamma)^2 - \nu^2 \right] c_n x^{n+\gamma} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\gamma+2} = 0\,,$$

Tomando agora $m = n + 2$ na segunda soma, escrevemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\gamma)^2 - \nu^2 \right] c_n x^{n+\gamma} + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^{m+\gamma} = 0\,.$$

Note que as duas somas da última expressão são completamente independentes. Assim, podemos por $m = n$, o que resulta em

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\gamma)^2 - \nu^2 \right] c_n x^{n+\gamma} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+\gamma} = 0\,.$$

É conveniente agora escrevermos os dois primeiros termos da primeira soma explicitamente e deixar o resto dos termos apenas sob um somatório que vai de $n = 2$ até o infinito. Com efeito,

$$\left(\gamma^2 - \nu^2\right) c_0 x^{\gamma} + \left[(1+\gamma)^2 - \nu^2 \right] c_1 x^{\gamma+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[(n+\gamma)^2 - \nu^2 \right] c_n + c_{n-2} \right\} x^{n+\gamma} = 0\,.$$

Colocando em evidênciando o fator x^{γ}, para $x \neq 0$, temos

$$\left(\gamma^2 - \nu^2\right) c_0 + \left[(1+\gamma)^2 - \nu^2 \right] c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[(n+\gamma)^2 - \nu^2 \right] c_n + c_{n-2} \right\} x^{n} = 0\,.$$

Essa expressão nos diz que a série do lado esquerdo é identicamente nula. Logo, todos os seus coeficiente devem se anular. Como conseqüência, valem as seguintes relações para os coeficientes c_n:

$$\left(\gamma^2 - \nu^2\right) c_0 = 0\,, \tag{1.3}$$

$$\left[(1+\gamma)^2 - \nu^2 \right] c_1 = 0\,, \tag{1.4}$$

$$c_n = -\frac{1}{(n+\gamma)^2 - \nu^2}\, c_{n-2}\,, \tag{1.5}$$

para $n = 2, 3, \ldots$. Observe agora de (1.5) que todos os coeficientes de índice par maior do que zero (i.e., $c_2, c_4, c_6, \ldots$) são proporcionais à c_0. Da mesma forma, os coeficientes de índice ímpar são proporcionais à c_1. Portanto, se tentarmos satisfazer as relações (1.3) e (1.4) fazendo a escolha ingênua $c_0 = c_1 = 0$, acabaríamos com $c_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Obviamente esta é uma solução trivial de (1.1) a qual não estamos interessados. Por outro lado, as relações (1.3) e (1.4) podem ser satisfeitas simultâneamente de duas outras maneiras distintas, sem que acabemos com a solução trivial. Uma delas é tomar $c_1 = 0$ e $\gamma^2 = \nu^2$. Outra é $c_0 = 0$ e $(\gamma + 1)^2 = \nu^2$.

Não é difícil perceber que quaquer uma dessas duas escolhas nos leva à verificação das relações (1.3) e (1.4). Vamos considerar, inicialmente, a primeira opção, ou seja

$$\gamma^2 = \nu^2 \qquad \text{e} \qquad c_1 = 0\,. \tag{1.6}$$

Uma vez que c_1 foi escolhido nulo, de acordo com (1.5), todo coeficiente de índice ímpar também deverá ser nulo, i.e.,

$$c_{2n+1} = 0\,, \tag{1.7}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. A condição $\gamma^2 = \nu^2$ nos dá duas possibilidades para o valor de γ: $\gamma_+ = \nu$ ou $\gamma_- = -\nu$. No primeiro caso, pela relação (1.5), teríamos

$$c_p = -\frac{1}{(p+\gamma_+)^2 - \nu^2}\, c_{p-2} = -\frac{1}{p^2 + 2p\nu}\, c_{p-2} \tag{1.8}$$

para todo p par, $p \geq 0$. Ou seja,

$$c_{2n} = -\frac{1}{4n^2 + 4n\nu}\, c_{2(n-1)} = -\frac{1}{2^2 n(n+\nu)}\, c_{2(n-1)}\,, \tag{1.9}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, quando $\gamma = \gamma_- = -\nu$, segue também de (1.5) que

$$c_p = -\frac{1}{(p+\gamma_-)^2 - \nu^2}\, c_{p-2} = -\frac{1}{p^2 - 2p\nu}\, c_{p-2} \tag{1.10}$$

para todo p par, $p \geq 0$. Quer dizer,

$$c_{2n} = -\frac{1}{4n^2 - 4n\nu}\, c_{2(n-1)} = -\frac{1}{2^2 n(n-\nu)}\, c_{2(n-1)}\,, \tag{1.11}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

As expressões (1.9) e (1.11) nos dão, de forma recursiva, os coeficientes de índice par da expansão (1.2) sugerida como solução de (1.1). Lembremos que os coeficientes de índice ímpar são todos nulos devido à escolha (1.6). Observe agora que como $\nu \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}$, a expressão (1.11) é inconveniente quando ν for igual à algum inteiro positivo. De fato, suponha, por exemplo, que $\nu = q$, onde $q \in \mathbb{N}$. Então, o coeficente c_{2q} não estaria bem definido, pois, de acordo com (1.11), teríamos uma divisão por zero. Isso, entretanto, nunca ocorre com a expressão (1.9) como pode ser notado claramente. A solução encontrada para $\gamma = \gamma_- = -\nu$ é, portanto, problemática quando ν for algum número inteiro positivo. Caso contrário (ν não inteiro), as expressões (1.9) e (1.11) fornecem duas soluções linearmente independentes da equação (1.1).

A solução das equações (1.3), (1.4) e (1.5) foi obtida mediante a escolha (1.6). Entretanto, também poderíamos ter escolhido

$$(\gamma+1)^2=\nu^2 \qquad \text{e} \qquad c_0=0 \tag{1.12}$$

para resolver o problema. Deixamos para o leitor verificar que a escolha acima leva exatamente à mesma solução que a obtida no caso anterior. Portanto, as escolhas (1.6) e (1.12) são equivalentes.

Vamos estudar melhor a solução obtida em (1.9). Note que quando ν não for um inteiro positivo, os coeficientes em (1.11) são obtidos dos coeficientes em (1.9) pela substituição $\nu \to -\nu$. Dessa forma, analisaremos apenas a solução referente aos coeficientes em (1.9). Como $c_i=0$ para todo i ímpar, uma solução de (1.1) pode ser escrita como

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}x^{2n+\gamma}\,, \tag{1.13}$$

onde, como vimos, $\gamma=\nu$ e c_{2n} é dado por (1.9), para todo $n\in\mathbb{N}$. Vamos mostrar por indução em n que

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n}{2^{2n}\,n!\displaystyle\prod_{r=0}^{n-1}(n+\nu-r)}\,c_0 \tag{1.14}$$

Primeiramente notemos que para $n=1$ a relação é trivialmente verificada. De fato, pondo $n=1$ em (1.14), temos

$$c_2=-\frac{1}{2^2(1+\nu)}\,c_0\,, \tag{1.15}$$

exatamente como em (1.9). Suponha agora, como hipótese de indução, que

$$c_{2(n-1)}=\frac{(-1)^{(n-1)}}{2^{2(n-1)}\,(n-1)!\displaystyle\prod_{r=0}^{n-2}(n-1+\nu-r)}\,c_0 \tag{1.16}$$

e vamos mostrar (1.14). Pelas relações (1.9) e (1.16), segue que

$$\begin{aligned}
c_{2n}=-\frac{1}{2^2n(n+\nu)}c_{2(n-1)} &= \frac{(-1)^{(n-1)}}{2^2\,n\,(n+\nu)\,2^{2(n-1)}\,(n-1)!\displaystyle\prod_{r=0}^{n-2}(n-1+\nu-r)}\,c_0\\
&= \frac{(-1)^n}{2^{2n}\,n!\displaystyle\prod_{r=0}^{n-1}(n+\nu-r)}\,c_0\,,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Com a expressão (1.14) em mãos, podemos expressar todos os coeficientes c_{2n} de uma forma muito mais elegante, escrevendo-os apenas em termos do coeficiente c_0, do parâmetro ν e da ordem n. Com efeito,

$$y(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}\, n! \displaystyle\prod_{r=0}^{n-1}(n+\nu-r)} x^{2n+\nu} \right) c_0 \,. \tag{1.17}$$

A expressão anterior é uma solução da equação diferencial ordinária de segunda ordem (1.1). Gostaríamos de frizar que, como série de potências, a solução acima faz sentido. De fato, o fator $2^{(2n)}\, n! \displaystyle\prod_{r=0}^{n-1}(n+\nu-r)$ no denominador dos coeficientes da série faz a mesma convergir rapidamente (a convergência é uniformemente!) para todos os valores de x. Note que apenas o termo fatorial no denominador já seria suficiente para garantir a convergência uniforme da série. Esse é o caso, por exemplo, da função exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

No caso onde ν não é um parâmetro inteiro, temos uma outra solução da equação (1.1) que é obtida de (1.17) pela substituição $\nu \to -\nu$. Essas duas soluções são linearmente independentes e constituem uma base à solução geral de (1.1) (ν não inteiro!), a qual pode ser escrita como

$$\begin{aligned} y(x) = A & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{(2n)}\, n! \displaystyle\prod_{r=0}^{n-1}(n+\nu-r)} x^{2n+\nu} \right) \\ & + B \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{(2n)}\, n! \displaystyle\prod_{r=0}^{n-1}(n-\nu-r)} x^{2n-\nu} \right) , \end{aligned} \tag{1.18}$$

onde A e B são constantes arbitrárias.

Para terminar esta seção, vamos reescrever a solução (1.17) de uma forma mais conveniente, de forma que possamos identificá-la com a chamada função de Bessel de ordem ν conhecida da literatura. Lembremos, inicialmente, da definição da função Γ:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt\,. \tag{1.19}$$

Essa função exibe a importante propriedade de que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,, \tag{1.20}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. A demonstração desse fato pode ser feito mediante uma integração por partes em (1.19). Omitiremos os detalhes. Observe agora que

$$\Gamma(n+\nu+1) = (n+\nu)\Gamma(n+\nu) = \left[\prod_{r=0}^{n-1}(n+\nu-m)\right]\Gamma(\nu+1)\,,$$

como conseqüência imediata da propriedade (1.20). Dessa forma, reescrevemos a solução $y(x)$ dada em (1.17) como

$$y(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu}\, n!\, \Gamma(n+\nu+1)}\, x^{2n+\nu}\right) 2^\nu \Gamma(\nu+1)\, c_0\,. \tag{1.21}$$

Já que $2^\nu\Gamma(\nu+1)\, c_0$ é uma constante (não depende nem de n e nem de x), podemos expressar $y(x)$ como

$$y(x) = c\, J_\nu(x)\,, \tag{1.22}$$

onde c é uma constante e

$$J_\nu(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu}\, n!\, \Gamma(n+\nu+1)}\, x^{2n+\nu} \tag{1.23}$$

é a camada *Função de Bessel de primeiro tipo e ordem* ν. Portanto, no caso em que ν não é um número inteiro positivo, podemos escrever a solução mais geral da equação (1.1) como

$$y(x) = c_+\, J_\nu(x) + c_-\, J_{-\nu}(x)\,, \tag{1.24}$$

onde c_+ e c_- são constantes arbitrárias. Funções de Bessel de primeiro tipo e ordem $\pm\nu$, ν não inteiro, constituem, portanto, uma base para o espaço de soluções da equação diferencial (1.1). Por outro lado, quando ν for um inteiro, temos apenas uma solução bem definida, a saber aquela dada por (1.22) e (1.23). Uma outra solução, linearmente independente a essa, envolve uma função não-analítica em torno da origem (singular) a qual não pode ser expressa em forma de uma série de potências como em (1.2). Essa solução singular (no caso ν inteiro) é conhecida como *função de Bessel de segundo tipo e ordem* ν, ou *função de Neuman de ordem* ν.

Estaremos, a seguir, estudando uma aplicação simples em física na qual nos deparamos com o problema de resolver uma equação diferencial do tipo da (1.1). Para isso, escreveremos nossa solução em termos das funções de Bessel introduzidas aqui.

2 O Problema da Corda Pendurada.

Considere uma corda de seção tranversal constante e densidade linear de massa igual à ρ, também constante. Suponha que essa corda tenha comprimento L e que uma das extremidades da mesma esteja fixada em um dado ponto do espaço. A corda assim descrita estará sujeita a ação de seu próprio peso devido à aceleração da gravidade local. Suponha conhecida a posição e a velocidade de todos os pontos da corda em um dado instante de tempo inicial $t_0 = 0$. Nessas condições, gostaríamos de descrever o movimento da corda para $t > t_0$. Como veremos a seguir, esse é um problema cuja solução envolve as funções de Bessel discutidas anteriormente.

O problema da corda pendurada pode ser colocado de forma matematicamente precisa da seguinte forma: Seja $u(x,t)$ a função que descreve o perfil da corda no instante de tempo t, ou seja, u dá o deslocamento do ponto x da corda no instante t. Suponha que a corda esteja presa em $x = L$ (vide figura 1). Nesse caso, devemos impor a seguinte consdição sob a função u:

$$u(L,t) = 0\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+\,. \tag{2.1}$$

A outra extremidade da corda (o ponto $x = 0$) está livre para oscilar. Conseqüêntemente, é razoável impormos que o deslocamento u da corda nesse ponto seja finito, isto é

$$u(0,t) < \infty\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+\,. \tag{2.2}$$

As relações (2.1) e (2.2) escritas acima prescrevem as chamadas *condições de contorno* do problema da corda pendurada.

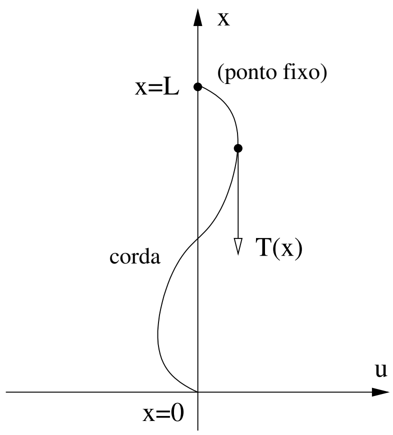

Figura 1: Desenho esquemático da corda pendurada.

Conforme já havíamos mencionado, vamos também supor conhecidas a posição e a velocidade inicial de todos os pontos da corda, ou seja, são nos dadas funções $u_0(x)$ e $v_0(x)$ tais que

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \qquad \forall x \in [0,L] \tag{2.3}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x)\,, \qquad \forall x \in [0,L]\,. \tag{2.4}$$

Essas são as *condições iniciais* do problema.

Como é bem sabido, o movimento de uma corda vibrante, do tipo considerada aqui, é regido pela seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)\,, \tag{2.5}$$

onde $T(x)$ representa a força de tração aplicada na corda sob o seu ponto de coordenada x (confira figura 1). A única força que age sobre a corda pendurada é o seu peso, logo

$$T(x) = \int_0^x \rho g\, dy = \rho g x\,,$$

sendo g a aceleração da gravidade. Substituindo $T(x)$ em (2.5), temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \rho g \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)\,. \tag{2.6}$$

A equação diferencia parcial acima pode ser facilmente resolvida pelo método de separação de variáveis. Assim, ecrevendo

$$u(x,t) = X(x)T(t)\,,$$

resulta que

$$\frac{\ddot{T}}{T} = \rho g\left(\frac{X'}{X} + x\frac{X''}{X}\right)\,,$$

onde o ponto denota derivada temporal e a linha derivada espacial. Como o lado esquerdo da última relação só depende do tempo e o lado direito só depende da posição, ambos devem ser necessariamente iguais a uma constante. Como veremos, essa constante deve ser negativa. Assim,

$$\frac{\ddot{T}}{T} = \rho g\left(\frac{X'}{X} + x\frac{X''}{X}\right) = -\omega^2\,,$$

onde ω é uma constante real. A equação para a parte temporal fica

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0\,,$$

cuja bem conhecida solução é

$$T(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\,, \tag{2.7}$$

onde A e B são duas constantes arbitrárias. Vale a pena observar que se a constante de separação de variáveis $-\omega^2$ fosse positiva, isto é, $+\omega^2$, então a solução para $T(t)$ seria exponencialmente crescente ou decrescente, violando a conservação de energia mecânica da corda.

Vamos agora nos concentrar em resolver a parte espacial. A equação para $X(x)$ pode ser escrita como

$$\rho g (x X')' + \omega^2 X = 0\,. \tag{2.8}$$

e deve ser tal que $X(0) < \infty$ e $X(L) = 0$ devido às condições de contorno. Fazendo a mudança de variável

$$y = 2\omega\sqrt{\frac{x}{\rho g}}\,,$$

podemos reescrever (2.8) como

$$y^2 \widetilde{X}''(y) + y\widetilde{X}'(y) + y^2\widetilde{X}(y) = 0\,, \tag{2.9}$$

onde $\widetilde{X}(y) = X(x) =$ e a linha agora denota derivação com relação à y. A equação diferencial (2.9) é idêntica à (1.1) para $\nu = 0$. Como sabemos, a solução de tal equação é composta pela função de Bessel de ordem zero $J_0(y)$ e uma função de Neuman que é singular na origem (note que $\nu = 0$ corresponde a um caso onde ν é inteiro). Entretanto, devido à condição de contorno $X(0) < \infty$, devemos excluir essa função singular da solução do problema. Portanto,

$$X(x) = \widetilde{X}(y) = CJ_0(y) = CJ_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{\rho g}}\right)\,, \tag{2.10}$$

onde C é uma constante arbitrária. Resta ainda impormos à solução acima a condição de contorno de extremo fixo $X(L) = 0$. Essa condição impoem restrições sobre os valores de ω. De fato,

$$X(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{L}{\rho g}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_k = \frac{z_{0,k}}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{L}}\,, \quad k = 1, 2, \dots\,, \tag{2.11}$$

onde $z_{0,k}$ representa o k-ésimo zero positivo de J_0. Os diferentes modos de vibração da corda são descritos pelas freqüências ω_k. O movimento da corda no k-ésimo modo de vibração é dado por (2.7) e (2.10) com ω substituido por ω_k como em (2.11). Assim,

$$u_k(x,t) = J_0\left(z_{0,k}\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\left[A_k\cos\left(\frac{z_{0,k}}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{L}}t\right) + B_k\sin\left(\frac{z_{0,k}}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{L}}t\right)\right],$$

onde A_k e B_k são constantes arbitrárias. O movimento mais geral da corda é obtido pela superposição de seus modos normais de vibração. Assim, a solução mais geral da equação (2.6) com as condições de contorno estabelecidas é

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(z_{0,k}\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\left[A_k\cos\left(\frac{z_{0,k}}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{L}}t\right) + B_k\sin\left(\frac{z_{0,k}}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{L}}t\right)\right]. \tag{2.12}$$

Note que a corda descreve um movimento quase-periódico no tempo. Entretanto, cada modo normal isoladamente tem um período bem definido, a saber

$$T_{\omega_k} = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{4\pi}{z_{0,k}}\sqrt{\frac{L}{\rho g}}.$$

Resta agora impormos as condições iniciais (2.3) e (2.4) à solução (2.12). Isso pode ser feito usando a seguinte relação de ortogonalidade entre as funções de Bessel:

$$\int_0^1 rJ_m(z_{m,k}r)J_m(z_{m,\ell}r)\,dr = \delta_{k,\ell}\left(J_{m+1}(z_{m,k})\right)^2,$$

onde $z_{m,k}$ é o k-ésimo zero da função de Bessel J_m. Fazendo $r = \sqrt{x/L}$ na integral acima e especializando para $m = 1$, temos

$$\int_0^L J_0\left(z_{0,k}\sqrt{\frac{x}{L}}\right)J_0\left(z_{0,\ell}\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\,dx = 2L\delta_{k,\ell}\left(J_1(z_{0,k})\right)^2, \tag{2.13}$$

No instante de tempo $t = 0$, $u(x,t)$ em (2.12) se reduz à

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(z_{0,k}\sqrt{\frac{x}{L}}\right)A_k,$$

que, de acordo com (2.3), deve ser igual à $u_0(x)$. Multiplicando ambos os lados por $J_0\left(z_{0,\ell}\sqrt{x/L}\right)$, integrando em x de 0 à L e usando a relação de ortogonalidade (2.13), achamos

$$A_\ell = \frac{1}{2\,L\,(J_1(z_{0,\ell}))^2}\int_0^L u_0(x)J_0\left(z_{0,\ell}\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\,dx. \tag{2.14}$$

Essa expressão fixa o valor de todas as constantes A_k em (2.12) para que a condição inicial $u(x,0) = u_0(x)$ seja satisfeita. Devemos ainda fixar as constantes B_k. Isso é feito a partir da outra condição inicial, isto é, (2.4). Primeiramente, derivamos $u(x,t)$ com relação ao tempo:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(z_{0,k}\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\frac{z_{0,k}}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{L}}\left[-A_k \sin\left(\frac{z_{0,k}}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{L}}t\right) + B_k \cos\left(\frac{z_{0,k}}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{L}}t\right)\right].$$

Para $t = 0$, temos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(z_{0,k}\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\frac{z_{0,k}}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{L}}B_k\,.$$

Usando, novamente, a relação de ortogonalidade (2.13), podemos inverter a relação acima e escrever cada constante B_ℓ como

$$B_\ell = \frac{1}{L\, z_{0,\ell}\,(J_1(z_{0,\ell}))^2}\sqrt{\frac{L}{\rho g}}\int_0^L v_0(x) J_0\left(z_{0,\ell}\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\, dx\,. \tag{2.15}$$

A solução final da equação (2.6) satisfazendo tanto as condições de contorno quanto as condições iniciais é finalmente obtida substituindo os coeficientes A_ℓ e B_ℓ obtidos em (2.14) e (2.15) na expressão (2.12) para $u(x,t)$. Com efeito, trocando a ordem da soma com a integral, podemos escrever

$$u(x,t) = \frac{1}{2L(J_1(z_{0,\ell}))^2}\int_0^L dx'\left[\sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(z_{0,\ell}\sqrt{\frac{x'}{L}}\right) J_0\left(z_{0,k}\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\cos\left(\frac{z_{0,k}}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{L}}t\right)\right] u_0(x)$$

$$+ \frac{1}{L\, z_{0,\ell}\,(J_1(z_{0,\ell}))^2}\sqrt{\frac{L}{\rho g}}\int_0^L dx'\left[\sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(z_{0,\ell}\sqrt{\frac{x'}{L}}\right) J_0\left(z_{0,k}\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\sin\left(\frac{z_{0,k}}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{L}}t\right)\right] v_0(x),$$

que é o resultado desejado.