

Curso de Física-Matemática I
Instituto de Física da USP
2000

João Carlos Alves Barata. Notas de aula.

Versão de 23 de setembro de 2000

Sobre a Importância de Demonstrações

“My friend G. H. Hardy, who was professor of pure mathematics, enjoyed this pleasure [in mathematical demonstrations] in a very high degree. He told me once that if he could find a proof that I was going to die in five minutes he would of course be sorry to lose me, but this sorrow would be quite outweighed by pleasure in the proof”.

Bertrand Russell

O texto abaixo foi extraído de *O Último Teorema de Fermat*, de Simon Singh. Ed. Record (1997)¹.

“Há uma seqüência em particular de números primos que nos mostra como a extrapolação é uma muleta perigosa de se apoiar. No século XVII os matemáticos mostraram que os seguintes números são todos primos:

31, 331, 3331, 33.331, 333.331, 3.333.331, 33.333.331.

Exercício. Verifique.

Os elementos seguintes da seqüência se tornam cada vez maiores e o trabalho de verificar se eles também são primos teria exigido um esforço considerável. Naquela época os matemáticos ficaram tentados a extrapolar a partir deste padrão e presumir que todos os números com a forma sugerida pela lista acima são primos. Contudo, o número seguinte 333.333.331 revelou não ser primo:

$$333.333.331 = 17 \times 19.607.843.$$

Exercício. Verifique.

¹Tomamos a liberdade de acrescentar algumas poucas notas de rodapé, alguns “exercícios” e de tornar a tradução um pouco mais decente. JCABarata.

Outro bom exemplo que ilustra por que matemáticos se recusam a ser convencidos por alguns exemplos ou pela evidência de computadores é o caso da conjectura de Euler. Euler afirmou que não há soluções entre os inteiros para uma equação não muito diferente da de Fermat:

$$x^4 + y^4 + z^4 = w^4.$$

Durante duzentos anos ninguém pôde provar a conjectura de Euler mas, por outro lado, ninguém podia negá-la encontrando um contra-exemplo. Primeiro, cálculos manuais e, depois, anos de computação eletrônica não conseguiram encontrar uma solução. A ausência de um exemplo negativo era apontada como uma forte evidência a favor da conjectura. Então, em 1988, Naom Elkies da Universidade de Harvard descobriu a seguinte solução:

$$(2.682.440)^4 + (15.365.639)^4 + (18.796.760)^4 = (20.615.673)^4.$$

Exercício. Verifique.

Apesar de todas as evidências, a conjectura de Euler revelou-se falsa. De fato Elkies provou que existem infinitas soluções para a equação. A moral da história é que não se pode usar a evidência dos primeiros milhões para provar uma conjectura referente a todos os números.

Mas a natureza enganadora da conjectura de Euler não é nada comparada com a chamada “conjectura do número superestimado de primos”. Examinando-se números cada vez maiores, torna-se claro que os números primos ficam cada vez mais difíceis de ser achados. Por exemplo, entre 0 e 100 existem 25 números primos, mas entre 10.000.000 e 10.000.100 existem apenas 2 números primos. Em 1791, quando tinha apenas quatorze anos de idade, Carl Friedrich Gauss previu, de modo aproximado, a frequência com que os números primos diminuiriam². A fórmula sugerida por Gauss, de fato, aproxima bem o número de primos, mas parecia superestimar levemente a

²O chamado “Teorema dos Números Primos”, sugerido por Gauss e demonstrado por Hadamard e de la Vallee Poussin no fim do século XIX, afirma essencialmente o seguinte. Seja $\pi(N)$ o número de primos entre 1 e N . Então, quando N é grande, $\pi(N)$ é aproximadamente dado por $N/\ln N$. [JCAB].

Então, em 1914, J. E. Littlewood, colaborador de G. H. Hardy em Cambridge, mostrou que para um N suficientemente grande a fórmula de Gauss iria subestimar o número de primos⁴. Em 1955 S. Skewes mostrou que isso aconteceria pouco antes de se chegar ao número

um número além da imaginação e de qualquer aplicação prática⁵.”

³Isso significa que parecia ser verdade que $N/\ln N > \pi(N)$ para todo N , ainda que ambas as quantidades se aproximem, como dito, para N grande. A “conjectura do número superestimado de primos” era a conjectura que essa desigualdade valeria para todo N . [JCAB].

⁵Para comparação, o número de partículas no universo é da ordem de 10^{87} , “apenas”.

3