FÍSICA MATEMÁTICA II

Notas de Aula – 1o. Semestre de 1999

Domingos H. U. Marchetti
Depto. Física Geral
Sala 328
Ramal 6797
e-mail marchett@ime.usp.br

Prefácio

Sobre o Programa

O curso de Física–Matemática tem por objetivo introduzir ferramentas (teoremas, relações e fórmulas matemáticas) para tratar os fenômenos da Física Moderna que por sua vez são descritos por um conjunto de equações.

O presente curso é uma introdução às equações diferenciais. Devido a extensão do assunto a ser tratado, far–se–á uma escolha dos tópicos a serem enfatizados. O curso esta dividido em quatro partes:

1. Sistemas Dinâmicos
2. O Problema de Sturm Liouville
3. Equações a Derivadas Parciais
4. Funções Especiais

onde serão abordados alguns métodos de solução das equações diferenciais desenvolvidos por Fourier, Green, Frobenious e outros. Procurar–se–á também dar uma pequena apresentação de métodos qualitativos da teoria geométrica.

Agradecimentos

Agradeço a todos estudantes que cursaram Física–Matemática II no 2o. semestre de 1996 e 1o. semestre de 1997 pela dedicação, persitência e entusiasmo demonstrados ao longo do curso, sem os quais me faltaria estímulo para escrever estas notas. Aos monitores Maria Elisa Borelli e Roberto da Silva, minha gratidão pela dedicação e assistência. Graças a este ambiente humano e às instalações desta universidade, o conteúdo deste curso pode ser apresentado de forma mais agradável e acessível a maioria dos participantes.

Universiade de São Paulo *D. H. U. marchetti.*

Conteúdo

Capítulo 1

Sistemas Dinâmicos

Neste capítulo introdutório, trataremos sistemas de equações diferenciais lineares como sistemas dinâmicos. A resolução destes sistemas requer noções de algebra linear que os auxiliam no seu desacoplamento. Enfatizaremos mais o aspecto instrumental da teoria afim de introduzir os conceitos básicos de sistemas de ordem finita e estendê–los para sistemas com número de graus de liberdade infinito.

1.1 Noções Básicas de Algebra Linear

1.1.1 Espaços e Operadores Lineares

Começaremos enunciando uma série de propriedades satisfeitas por **vetores** em $\mathbb{R}^n$. Seja $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$ vetores e λ, μ, ... números reais. Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}+\mathbf{y} &= \mathbf{y}+\mathbf{x} \\ \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}) &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} \\ \mathbf{x}+\mathbf{0} &= \mathbf{x} \\ \mathbf{x}+(-\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

e

$$\begin{aligned} (\lambda\,\mu)\,\mathbf{x} &= \lambda\,(\mu\,\mathbf{x}) \\ \lambda\,(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \lambda\,\mathbf{x}+\lambda\,\mathbf{y} \\ (\mu+\lambda)\mathbf{x} &= \mu\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x} \\ 1\cdot\mathbf{x} &= \mathbf{x} \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ é representado por suas componentes cartesianas $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ou por uma matriz coluna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Em ambos casos a adição de dois vetores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ corresponde ao vetor cujas componentes é a soma das componentes

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) \ ;$$

o produto de um escalar λ por um vetor $\mathbf{x}$ é o vetor de componentes dadas pelo produto de λ por cada componente de $\mathbf{x}$

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \ .$$

O comprimento de um vetor (norma Euclideana)

$$|\mathbf{x}| := \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}$$

é a distancia entre a origem e a extremidade do vetor. Por conseguinte,

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \left((x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2\right)^{1/2}$$

corresponde a distancia entre a extremidade do vetor $\mathbf{x}$ e a extremidade do vetor $\mathbf{y}$. A norma introduz a noção de vizinhança: dois vetores estão "próximos" se as extremidades destes estão "próximas".

Definição 1.1.1 *Um **espaço linear** $\mathcal{E}$ (ou espaço vetorial) sobre números reais (ou complexos), é um conjunto de elementos fechado pela operação de soma e produto por um escalar: $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\lambda\,\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ se $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{E}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), satisfazendo as propriedades (1.1.1) e (1.1.2).*

Exemplo 1.1.2 *O* **espaço de Hilbert** $\mathcal{H} = \mathbb{R}^\infty$ *de sequências infinitas de números reais $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_j, \ldots)$ tais que a norma*

$$\|\mathbf{x}\| := \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2\right)^{1/2}$$

é finita.

Exemplo 1.1.3 *O espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ das funções*

$$f : [-\pi, \pi] \longmapsto \mathbb{R}$$

tais que a norma

$$\|f\| := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

é finita.

Define-se a adição de duas funções f , $g \in \mathcal{H}$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

e produto por um escalar

$$(\lambda f)(x) = \lambda \, f(x)$$

ponto a ponto, para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

Existe uma correspondência entre os espaços de Hilbert nos exemplos 1.1.2 e 1.1.3 acima dado pela identidade de Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2} x_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(x_j^2 + y_j^2 \right)$$

onde x_0 e x_j, y_j, $j = 1, 2, \ldots$, são os coeficientes de Fourier da função f:

$$x_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \cos jx \, dx$$

(incluindo $j = 0$) e

$$y_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \sin jx \, dx \, .$$

Portanto

$$x_0 \, , \, \|\mathbf{x}\| \, , \, \|\mathbf{y}\| < \infty \Longleftrightarrow \|f\| < \infty \, .$$

Por outro lado, para cada duas sequências $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$ no exemplo 1.1.2, e $x_0 \in \mathbb{R}$, existe uma função periodica $f \in \mathcal{H}$ do exemplo 1.1.3 dada pela série de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2} x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (x_j \, \cos jx + y_j \, \sin jx)$$

onde o sentido de convergência da série é dado pela convergência em norma: se S_N denota a série truncada no N–ésimo termo, então $\|f - S_N\| \to 0$ quando $N \to \infty$.

Definição 1.1.4 *Uma* **transformação linear** T *é uma mapeamento*

$$T : \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}'$$

que leva um vetor $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ em um vetor $T\mathbf{x} \in \mathcal{E}'$, tal que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= T\mathbf{x} + T\mathbf{y} \\ T(\lambda \mathbf{x}) &= \lambda \, T\mathbf{x} \, . \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

A cada mapeamento linear $T : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ podemos associar uma matriz $m \times n$

$$T\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ t_{m1} & & t_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}x_1 + \cdots + t_{1n}x_n \\ \vdots \\ t_{m1}x_1 + \cdots + t_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

e vice–versa, cada matrix T corresponde a um mapeamento linear. Usualmente uma matrix é representada pelo seus elementos $T = [t_{ij}]$.

Exemplo 1.1.5 *A transformação T que leva cada vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ no vetor $T\mathbf{x} = (x_2, \ldots, x_n, x_1)$ também em $\mathbb{R}^n$ pode ser representada pela matriz "deslocamento para frente"*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

No caso em que $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$, a transformação linear T é chamada de **operador linear**. Usaremos a notação $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ para o conjunto de todos os operadores lineares em $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ para o conjunto de todos os operadores lineares no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Exemplo 1.1.6 *Operadores diferenciais D^k no espaço de funções $\mathcal{H}$ que são k–vezes diferenciaveis:*

$$\left(D^k f \right)(x) = \frac{d^k f}{dx^k}(x) \, , \quad k = 1, 2, \ldots$$

Equações diferenciais ordinárias são obtidas por combinações lineares destes. Se P um polinômio de order k: $P(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$,

$$P(D) \, f = g \tag{1.1.4}$$

é a equação diferencial de ordem k com D o operador diferencial e g uma função dada.

Exemplo 1.1.7 *Operadores integrais no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de funções:*

$$(Cf)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y)\, f(y)\, dy \equiv (\cos * f)(x)$$

é o operador convolução pela função cosseno.

Exemplo 1.1.8 *Operadores de diferença finita ∇ no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de sequências:*

$$(\nabla \mathbf{x})_j = x_j - x_{j-1}\,.$$

É conveniente introduzir também o operador de diferença finita adjunto ∇^*:

$$(\nabla^* \mathbf{x})_j = x_j - x_{j+1}\,.$$

O operador de segunda diferença finita de Laplace $-\Delta := \nabla^*\nabla = \nabla\nabla^*$ é portanto

$$(-\Delta \mathbf{x})_j = 2x_j - x_{j+1} - x_{j-1}\,.$$

Se $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, o mapeamento composto $TS : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ pertence também a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. A matrix $C = [c_{ij}]$ correspondente ao produto $C = TS$, tem elementos de matrix

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\, s_{kj} \tag{1.1.5}$$

onde $T = [t_{ij}]$ e $S = [s_{ij}]$ são as representações matriciais dos operadores.

Exercício 1.1.9 *Verifique (1.1.5) aplicando o operador composto TS a um vetor $\mathbf{x}$.*

Se $D = T + S$, a matrix $D = [d_{ij}]$ tem elemento de matrix

$$d_{ij} = t_{ij} + s_{ij}\,;$$

se $E = \lambda T$, então

$$e_{ij} = \lambda\, t_{ij}\,.$$

O operador identidade $I = [\delta_{ij}]$ em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é a matrix com os elementos diagonais iguais a 1 e zero de outra forma:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j\,, \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j\,. \end{cases}$$

O vetor nulo $\mathbf{0}$ tem elementos identicamente nulos.

Verifica–se que o conjunto de elementos $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz as propriedades (1.1.1) e (1.1.2) e portanto formam um espaço vetorial.

Além disso, as seguintes propriedades são satisfeitas por operadores em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} P(QR) &= (PQ)R \\ \mu(PQ) &= (\mu P)Q = P(\mu Q) \\ P\,(Q+R) &= PQ + PR \\ (Q+R)\,P &= QP + RP \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

com $P, Q, R \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $\mu \in \mathbb{R}$ (somente em situações *muito particulares* a propriedade comutativa $PQ = QP$ é satisfeita). Espaços lineares munidos da operação de composição e satisfazendo as propriedades (1.1.6), formam uma **algebra**.

Definição 1.1.10 *Um operador T é **inversível** se existir um operador S tal que $TS = ST = I$. S é chamado o operador inverso de T, denotado por T^{-1}.*

*O operador T, ou sua representação matricial, é **singular** se T não for inversível.*

1.1.2 Subespaços, Bases e Dimensão

Seja $\mathcal{E}$ um espaço linear. Um conjunto não vazio $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ é chamado subespaço se $\mathcal{F}$ for fechado pelas operações de adição e multiplicação por um escalar.

Se $\mathcal{F}$ contém somente o vetor nulo $\mathbf{0}$, $\mathcal{F}$ é chamado subespaço trivial. Se $\mathcal{F} \neq \mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ é um subespaço próprio. Se $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são subespaços e $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1$ é um subespaço de $\mathcal{F}_2$.

Como subespaços satisfazem as propriedades (1.1.1) e (1.1.2), o mapeamenento linear $T : \mathcal{F}_1 \longmapsto \mathcal{F}_2$ faz sentido e todas as propriedades de operadores lineares em espaços lineares podem ser estendidas para operadores em subespaços.

Dois subespaços importantes são determinados por transformações lineares:

$$\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{F}_1 : T\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \equiv T^{-1}(\mathbf{0})$$

é o **núcleo** da transformação T, e

$$\mathcal{I}(T) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{F}_2 : T\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ para algum } \mathbf{x} \in \mathcal{F}_1\}\,.$$

é o conjunto **imagem** de T.

Definição 1.1.11 *Um conjunto $\mathcal{S} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ de vetores de $\mathcal{F}$ **gera** o subespaço $\mathcal{F}$, se cada vetor $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ puder ser escrito como uma combinação linear destes:*

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{x}_k$$

para alguma escolha de escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

*Os vetores do conjunto $\mathcal{S}$ são **linearmente independentes** se a equação*

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

*for satisfeita **somente** para $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.*

*Se os vetores de $\mathcal{S}$ forem linearmente independentes, então $\mathcal{S}$ forma uma **base** de $\mathcal{F}$.*

Definição 1.1.12 *A **dimensão** de um subespaço linear $\mathcal{F}$ é a cardinalidade do maior conjunto $\mathcal{S}$ de vetores linearmente independentes. Se o maior conjunto $\mathcal{S}$ tiver k elementos, denotamos* $\dim \mathcal{F} = k$.

Exemplo 1.1.13 *O conjunto $\{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1); (1,1,0); (0,1,1)\}$ gera o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ porém não forma uma base para este espaço pois seus vetores não são linearmente independentes (note $(1,1,0) = (1,0,0) + (0,1,0)$). No entanto, os três primeiros vetores formam uma base.*

Exemplo 1.1.14 *A coleção dos monômios $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ forma um conjunto de "vetores" linearmente independentes pertencentes ao espaço $\mathcal{C}([a,b])$ das funções contínuas definidas no intervalo $[a,b]$. Um polinômio $P_n(x)$ de ordem n, é uma combinação linear*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

destes monômios. Embora não tenha dimensão finita, o conjunto de todos monômios forma uma base para as funções continuas no sentido que todo "vetor" $f \in \mathcal{C}([a,b])$ pode ser aproximado, uniformemente, por polinômios (Teorema da aproximação de Weierstrass): dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) < \infty$ tal que

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$ e $x \in [a,b]$.

Proposição 1.1.15 *Seja $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$. Qualquer conjunto de vetores $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}\}$ é linearmente dependente. Por outro lado, qualquer conjunto $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}\}$ de vetores linearmente independentes não gera $\mathcal{E}$. Logo, a dimensão do espaço $\dim \mathcal{E} = n$.*

Prova. $\mathcal{S} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}\}$ é linearmente dependente se existirem $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_{n+1} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{0}$. Escrevendo esta equação em componentes, com $\mathbf{x}_j = (x_{j,1}, \ldots, x_{j,n})$, obtemos o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_{1,1} + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1,1} &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \ \vdots \\ \lambda_1 x_{1,n} + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1,n} &= 0 \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Seja $X = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_{n+1}]$ a matrix $n \times (n+1)$ que tem o vetor $\mathbf{x}_j$ na j–ésima coluna, e seja λ a matrix coluna $(n+1) \times 1$ com componentes λ_j. Então, (1.1.7) pode ser escrita como

$$X\lambda = \mathbf{0}\,. \tag{1.1.8}$$

A Proposição 1.1.15 segue de um resultado mais geral.

Teorema 1.1.16 *Seja A uma matrix $k \times k$. A equação*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

tem uma solução não trivial ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) se e somente se *$A$ for singular.*

A condição $\det A = 0$ é necessária e suficiente para que uma matrix A seja singular. Definindo a matrix $(n+1) \times (n+1)$, $\widetilde{X} = [\widetilde{\mathbf{x}}_1 \cdots \widetilde{\mathbf{x}}_{n+1}]$ que tem a j–ésima coluna o vetor $\widetilde{\mathbf{x}}_j$ cujas componentes

$$\widetilde{x}_{j,i} = \begin{cases} x_{j,i} & \text{se} \quad i = 1, \ldots, n \\ \\ 0 & \text{se} \quad i = n+1\,, \end{cases}$$

a equação (1.1.8) é equivalente a $\widetilde{X}\lambda = \mathbf{0}$. Como $\det \widetilde{X} = 0$, existe λ não trivial que satisfaz esta última equação, provando a Proposição 1.1.15.

A primeira asserção da Proposição 1.1.15 é equivalente a afirmação: $\dim \mathbb{R}^n \leq n$. A desigualdade no sentido oposto segue de forma análoga: $\dim \mathbb{R}^n \geq n$. Logo, $\mathbb{R}^n$ é um espaço linear de dimensão n.

□

A seguir enunciaremos uma série de resultados importantes sem demonstrações. De certa maneira, estes estendem a Proposição 1.1.15 para espaços vetoriais quaisquer.

Teorema 1.1.17 *Seja $\mathcal{E}$ um espaço linear de dimensão n. Então*

1. Toda base de $\mathcal{E}$ tem extamente n elementos.

2. Todo conjunto $\mathcal{S}$ de vetores em $\mathcal{E}$, linearmente independentes, tem no máximo n elementos.

Definição 1.1.18 *O mapeamento linear $T : \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}'$ é um **isomorfismo**, se existir um transformação linear $S : \mathcal{E}' \longmapsto \mathcal{E}$ tal que*

$$ST\mathbf{x} = \mathbf{x}\,; \qquad TS\mathbf{y} = \mathbf{y}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ e $\mathbf{y} \in \mathcal{E}'$. Neste caso dizemos que os espaços lineares são isomorfos.

Teorema 1.1.19 *Dois espaços vetoriais lineares são isomorfos, se e somente se tiverem a mesma dimensão. Em particular, todo o espaço de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Exercício 1.1.20 *Represente a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

segundo a base $\mathcal{S} = \{(1,1,0);(0,1,1);(1,0,1)\} \equiv \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$. Primeiramente verifiquemos que $\mathcal{S}$ forma uma base:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \alpha_3\mathbf{f}_3 \\ &= M\,\alpha \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

onde o vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ deve ser encontrado e

$$M = [\mathbf{f}_1\,\mathbf{f}_2\,\mathbf{f}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*é a matriz formada pelos vetores de $\mathcal{S}$ em suas colunas. Nesta formulação, $\mathcal{S}$ é um conjunto de vetores L. I. que gera $\mathbb{R}^3$ se existir uma **única** solução α para cada $\mathbf{x}$. Isto, por sua vez, segue se M for não singular pois*

$$\alpha = M^{-1}\mathbf{x}\,.$$

Calculando o determinante

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

verificamos que M e inversível cuja inversa é dada por

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

provando ser $\mathcal{S}$ uma base.

Representemos, a seguir, A na base $\mathcal{S}$. Para tal, devemos representar os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= A\mathbf{f}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= A\mathbf{f}_2 \\ \mathbf{v}_3 &= A\mathbf{f}_3 \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

nesta base: existem portanto constantes $[b_{i,j}]_{i,j=1}^3$ tais que

$$\mathbf{v}_j = A\mathbf{f}_j = \sum_{i=1}^{3} b_{i,j}\,\mathbf{f}_i\,. \tag{1.1.11}$$

Definindo $V = [\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_3]$ a matriz que tem como colunas os vetores $\mathbf{v}_j$, a equação (1.1.10) pode ser escrita como

$$V = [A\mathbf{f}_1\;A\mathbf{f}_2\;A\mathbf{f}_3] = AM\,.$$

Como V, em vista de (1.1.11), também pode ser escrita como $V = MB$ onde $B = [b_{i,j}]$, concluimos

$$B = M^{-1}AM \tag{1.1.12}$$

representa a matriz A na base $\mathcal{S}$. Temos que

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*(note que $\det A = 0$). Transformações da forma (1.1.12) são chamadas de **transformções de similaridade**.*

Proposição 1.1.21 *Seja $T : \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}'$ um mapeamento linear. Então*

$$\dim \mathcal{I}(T) + \dim \mathcal{N}(T) = \dim \mathcal{E}\,.$$

Em particular, se $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{E}'$, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$

2. $\mathcal{I}(T) = \mathcal{E}'$

3. T *é um isomorfismo.*

Definição 1.1.22 *O **produto interno** $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de dois vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$, é um mapeamento $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \longmapsto \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) satisfazendo as seguintes propriedades:*

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{x}) &\geq 0 \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ (\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \alpha (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

com a igualdade na primeira relação satisfeita somente se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Se $\mathcal{E}$ for um espaço vetorial sobre os números complexos, a segunda propriedade é substituída por

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$$

onde $\overline{\mathbf{z}}$ significa a conjugação complexa de $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$.

Um espaço vetorial $\mathcal{E}$ munido de um produto interno é denominado **espaço Euclideano** (se $\dim \mathcal{E} < \infty$) ou **espaço de Hilbert** ou unitário (se $\dim \mathcal{E} = \infty$).

Exemplo 1.1.23 *O produto interno do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de funções em $[-\pi, \pi]$ é*

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

Exemplo 1.1.24 *Seja $\rho : I \longmapsto \mathbb{R}_+$ uma função positiva no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. $\mathcal{H}$ é o espaço das funções com suporte em I e produto escalar com peso ρ:*

$$(f, g)_\rho = \int_I f(x)\, g(x)\, \rho(x)\, dx\,.$$

Todo espaço linear $\mathcal{E}$ com produto interno é um espaço normado cuja norma de $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ é definida por

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}\,. \tag{1.1.14}$$

Para verificar que $\|\cdot\|$ é de fato uma norma, usaremos a seguinte desigualdade.

Proposição 1.1.25 (Desigualdade de Schwarz)

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\;\|\mathbf{y}\|\,. \tag{1.1.15}$$

Prova. Usando a definição (1.1.14) e as propriedades (1.1.13), temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \\ &= \alpha^2 \|\mathbf{x}\|^2 + 2\, \alpha\beta\, |(\mathbf{x}, \mathbf{y})| + \beta^2 \|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned}$$

que define uma inequação para α satisfeita para qualquer valor real somente se o descriminante

$$\Delta = 4\beta^2 \left(|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \right)$$

for negativo. De onde (1.1.15) segue.

□

Uma norma deve satisfazer a desigualdade triangular:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \tag{1.1.16}$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$. Da definição (1.1.14) e pela desigualdade de Schwarz,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\, |(\mathbf{x}, \mathbf{y})| + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\, \|\mathbf{x}\|\;\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2\,. \end{aligned}$$

□

Definição 1.1.26 *Dois vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$ são **ortogonais** entre si, se o produto interno $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.*

O produto interno define um ângulo entre dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$:

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\;\|\mathbf{y}\|}$$

Teorema 1.1.27 *Qualquer conjunto de vetores mutuamente ortogonais são linearmente independentes.*

Prova. Seja $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ uma coleção de vetores mutuamente ortogonais:

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0$$

se $i \neq j$, e considere a equação

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n = 0\,. \tag{1.1.17}$$

Tomando o produto escalar de (1.1.17) com um vetor $\mathbf{x}_j$ e usando a ortogonalidade

$$\lambda_1 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_j) + \cdots + \lambda_n (\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_j) = \lambda_j \|\mathbf{x}_j\|^2 = 0$$

que implica, por (1.1.13), $\lambda_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

□

Teorema 1.1.28 *Todo espaço linear $\mathcal{E}$ com produto interno de dimensão n tem uma base ortogonal normalizada (ortonormal) $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$.*

Prova. (Método de Gram–Schmidt) Seja $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ uma coleção de vetores linearmente independentes e escolha

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|}\,.$$

Defina $\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \alpha \mathbf{e}_1$ com α tal que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}_2) = 0$: $\alpha = (\mathbf{e}_1, \mathbf{x}_2)$. Escolha

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{y}_2}{\|\mathbf{y}_2\|}\,.$$

Assuma, em seguida, que foram obtidos k vetores $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$, $k < n$, normalizados e mutuamente ortogonais, e seja $\mathcal{W}_k$ o subespaço gerado por estes. Defina

$$\mathbf{y}_{k+1} = (1 - P)\, \mathbf{x}_{k+1}$$

onde $P : \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{W}_k$ é o projetor no subespaço $\mathcal{W}_k$:

$$P\mathbf{x} := (\mathbf{e}_1, \mathbf{x})\, \mathbf{e}_1 + \cdots + (\mathbf{e}_k, \mathbf{x})\, \mathbf{e}_k\,. \tag{1.1.18}$$

Novamente, escolha

$$\mathbf{e}_{k+1} = \frac{\mathbf{y}_{k+1}}{\|\mathbf{y}_{k+1}\|}$$

e note que $\mathbf{e}_{k+1}$ é normalizado

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\|^2 = (\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{k+1}) = \|\mathbf{y}_{k+1}\|^{-2} (\mathbf{y}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}) = 1$$

e ortogonal a $\mathcal{W}_k$:

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{k+1}) = 0\,, \qquad j = 1, \ldots, k\,. \tag{1.1.19}$$

O teorema fica portanto provado por indução.

□

Exercício 1.1.29 *Verifique as relações (1.1.19).*

Exercício 1.1.30 *Um projetor P é um operador idempotente: $P^2 = P$. Verifique esta propriedade para P em (1.1.18).*

Exemplo 1.1.31 *Considere a coleção de funções em $[-\pi, \pi]$, $\mathcal{S} = \{f_j, g_j\}_{j=1}^k$, dada por*

$$f_j(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos jx\,, \qquad g_j = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin jx$$

e seja $\mathcal{W}_k$ o subespaço gerado por esta. $\mathcal{S}$ é um conjunto de funções normalizadas e mutuamente ortogonal com respeito ao produto escalar em (1.1.23):

$$\begin{aligned}(f_l, f_m) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos lx \, \cos mx \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos{(l+m)\,x} + \cos{(l-m)\,x}\}\, dx = \delta_{lm}\end{aligned}$$

e analogamente, $(g_l, g_m) = \delta_{lm}$ e $(f_l, g_m) = 0$ para todo $l, m = 1, \ldots, k$.

O projetor P no subespaço $\mathcal{W}_k$ é dado por

$$\begin{aligned}Pf\,(x) &= \sum_{j=1}^k \{(f_j, f)\; f_j(x) + (g_j, f)\; g_j(x)\} \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos jy \, \cos jx + \sin jy \, \sin jx)\; f(y)\, dy \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos j\,(x-y)\; f(y)\, dy\end{aligned}$$

(note que P é a soma de operadores integrais dados pela convolução pela função $\cos jx$).

Exemplo 1.1.32 (Polinômios de Tchebycheff) *Considere a base dos monômios $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ que, segundo vimos, gera o espaço $\mathcal{C}([-1,1])$ das funções contínuas definidas no intervalo $[-1,1]$, munido do produto interno com peso $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$:*

$$(f, g)_\rho = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Usando o método de Gram–Schmidt, tomamos o polinômio de ordem 0, $T_0 = 1$ cuja normalização

$$\|T_0\|^2 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} d\theta = \pi$$

e definimos $e_0(x) = T_0(x)/\|T_0\| = 1/\sqrt{\pi}$*. Tomamos o próximo polinômio*

$$\begin{aligned} T_1(x) &= x - (x, e_0)\, e_0(x) \\ &= x - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \end{aligned}$$

onde a integral se anula devido a anti–simetria da função x*, e definimos* $e_1(x) = T_1(x)/\|T_1\|$ *onde*

$$\begin{aligned} \|T_1\|^2 &= \int_{-1}^{1} x^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)\, d\theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Tomamos a seguir

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2\left(x^2 - \left(x^2, e_0\right) e_0(x) - \left(x^2, e_1\right) e_1(x)\right) \\ &= 2x^2 - \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{\pi}\int_{-1}^{1} x^3 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 2x^2 - 1 \end{aligned} \tag{1.1.20}$$

com a última integral se anulando devido a anti–simetria de x^3*, cuja normalização*

$$\begin{aligned} \|T_2\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(2x^2-1\right)^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_0^{\pi} \left(2\cos^2\theta - 1\right)^2 d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2 2\theta\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos 4\theta + 1)\, d\theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

O procedimento continua, definindo $e_2(x) = T_2(x)/\|T_2\| = \sqrt{2\pi}\,(2x^2-1)$ *e tomando o próximo polinômio* $T_3(x)$ *de forma análoga a (1.1.20). Os polinômios de Tchebycheff são por convenção normalizados de forma tal que* $T_l(1) = 1$ *para todo* $l \in \mathbb{N}$.

1.1.3 Auto–valores e Auto–vetores

Definição 1.1.33 *Seja* T *um operador linear em um espaço vetorial* $\mathcal{E}$*. Um vetor* $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ *não nulo é um **auto–vetor** se a equação*

$$T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{1.1.21}$$

for satisfeita para um número λ *chamado **auto–valor** ou valor próprio associado a* $\mathbf{x}$.

A condição necessaria para que o auto–valor λ exista é que o núcleo do operador $T - \lambda I$ seja não trivial: $\mathcal{N}(T-\lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$. Isto é, $\dim \mathcal{N}(T-\lambda I) \geq 1$.

Pelo Teorema 1.1.16, a equação

$$(T - \lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

admite solução não trivial ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) se e somente se $\det(T - \lambda I) = 0$.

No caso em que $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$, os auto–valores são portanto determinados pelas raizes do **polinômio caracteristico**

$$\begin{aligned} c_T(\lambda) &= \det(T - \lambda I) \\ &= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j) \end{aligned}$$

com $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ é o conjunto das raizes do polinômio c_T (contando multiplicidade); $\det C$ é o determinante da matriz $C = [c_{ij}]$ dado por

$$\det C = \sum_{\pi} (-1)^{|\pi|}\, c_{1\pi_1} c_{2\pi_2} \cdots c_{n\pi_n}$$

sendo a soma sobre as permutações $\pi = (\pi_1, \dots \pi_n)$ de $\{1, \dots, n\}$ com $|\pi|$ representando o sinal da permutação. Finalmente, a segunda linha é a expansão do determinante com a_j dado pela soma dos termos proporcionais a λ^j.

Mostre 1.1.34 *que os auto–vetores* $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\}$ *associados aos auto–valores distintos* $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ *são linearmente independentes.*

Temos

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_s\mathbf{x}_s = \mathbf{0} \tag{1.1.22}$$

implica em $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$ *se forem L. I.. Aplicando o operador*

$$\begin{aligned} T^{(i)} &= (T - \lambda_1)\cdots(T - \lambda_{i-1})(T - \lambda_{i+1})\cdots(T - \lambda_s) \\ &= \frac{\prod_{j=1}^{s}(T - \lambda_j)}{(T - \lambda_i)} \end{aligned}$$

nos dois lados de (1.1.22), obtemos

$$T^{(i)}\mathbf{x} = (\lambda_i - \lambda_1)\cdots(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i - \lambda_s)\,\alpha_i\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

implicando necessariamente em $\alpha_i = 0$ *devido a hipótese de* $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ *serem distintos. O resultado segue fazendo* $i = 1, \dots, s$.

□

Definição 1.1.35 *Uma matriz A é **simples** se a multiplicidade de cada auto–valor λ de A for igual a dimensão de $\mathcal{N}(A-\lambda I)$. Em outras palavras, A é simples se a mutiplicidade **algébrica** for igual a multiplicidade **geométrica**.*

Exemplo 1.1.36 *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cujo auto–valor $\lambda = 0$ tem multiplicidade algébrica $d_a = 2$. Como o núcleo $\mathcal{N}(A-\lambda I) = \mathcal{N}(A) = \{(0,0);(0,1)\}$ tem dimensão $\dim \mathcal{N}(A) = 1 = d_g \neq d_a$, a matriz A não é simples.

Se $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ for simples, é sempre possivel encontrar uma base $\mathcal{S} = \{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n$ tal que T tenha a forma diagonal $D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Como uma mudança de base é implementada por uma transformação de similaridade, faremos uma revisão breve sobre as propriedades destas transformações.

Seja $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto dos isomorfismos (todos os operadores O não singulares). Se $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ for uma matriz $n \times n$, então M é inversível e define uma transformação de similaridade

$$B = M^{-1}AM \tag{1.1.23}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\det B = \det M^{-1}AM = \det\, M^{-1}\ \det A\ \det M = (\det M)^{-1} \det A\ \det M = \det A$;
2. $\mathrm{Tr}B = \mathrm{Tr}M^{-1}AM = \mathrm{Tr}AMM^{-1} = \mathrm{Tr}A$ (devido a propriedade cíclica do traço);
3. $B^{-1} = (M^{-1}AM)^{-1} = M^{-1}A^{-1}(M^{-1})^{-1} = M^{-1}A^{-1}M$;
4. $B^k = M^{-1}AMM^{-1}AM \cdots M^{-1}AM = M^{-1}A^kM$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, se $P(\lambda)$ for um polinômio então
$$P(B) = M^{-1}P(A)M\,.$$

Como consequência de 1., o polinômios característico de matrizes similares coincidem

$$c_B(\lambda) = \det(B-\lambda I) = \det\left(M^{-1}AM - \lambda M^{-1}M\right) = \det(A-\lambda I) = c_A(\lambda)$$

assim como os seus auto–valores. Note que a transformação (1.1.23) não é unicamente implementada: se N for uma matrix da ordem de A e tal que $[N,A] = NA - AN = 0$, então $B = (NM)^{-1}ANM = M^{-1}AM$.

O conjunto $\mathcal{M}_T$ de todas as matrizes similares a T

$$\mathcal{M}_T = \left\{S = M^{-1}TM : M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\right\}$$

forma uma classe de equivalência no sentido que possuem o mesmo **espectro** $\sigma(T) = \{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}$:

$$T\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j\,, \qquad j = 1, \ldots, n\,. \tag{1.1.24}$$

Definindo $\mathbf{y}_j = M^{-1}\mathbf{x}_j$ e multiplicando por M^{-1} a equação acima, obtemos

$$S\mathbf{y}_j = M^{-1}TM\mathbf{y}_j = M^{-1}T\mathbf{x}_j = \lambda_j M^{-1}\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{y}_j$$

que é a equação de auto–valores para a matriz S com auto–valores $\{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}$ e auto–vetores $\{\mathbf{y}_1, \ldots \mathbf{y}_n\}$.

Verifiquemos a seguir que a transformação de similaridade que diagonaliza a matriz $T = [t_{i,j}]$ é realizada pela matrix $X = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n]$ que tem o auto–vetor $\mathbf{x}_j = (x_{j,1}, \ldots x_{j,n})$ na j–ésima coluna.

A equação de auto–valores (1.1.24) pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{gathered}[T\mathbf{x}_1 \cdots T\mathbf{x}_n] = [\lambda_1\mathbf{x}_1 \cdots \lambda_n\mathbf{x}_n] \\ \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,n} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,n} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\end{gathered}$$

ou, na forma mais compacta

$$TX = XD\,. \tag{1.1.25}$$

Supondo que $\{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}$ sejam distintos, $\mathcal{S} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s\}$ forma um conjunto de vetores linearmente independentes e a matrix X é inversível ($X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$), obtendo de (1.1.25)

$$T = XDX^{-1}\,, \qquad D = X^{-1}TX\,. \tag{1.1.26}$$

Exemplo 1.1.37 *Seja A uma matriz em $\mathbb{R}^3$ dada por*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Seus auto–valores são as raízes do polinômio característico:

$$c_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\,(2-\lambda)\,(-1-\lambda)\ .$$

Os auto–valores de A são: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -1$.

O auto–vetor correspondente a $\lambda_1 = 1$ é a solução $\mathbf{x}_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3})$ não identicamente nula da equação

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_1 & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{aligned} x_{1,1} + x_{1,2} &= 0 \\ x_{1,1} - 2\,x_{1,3} &= 0 \end{aligned}$$

e cuja solução é

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -x_{1,1} \\ x_{1,3} &= \frac{1}{2}\,x_{1,1} \end{aligned}$$

com $x_{1,1}$ arbitrário. Fixando $x_{1,1} = 2$ resulta em $\mathbf{x}_1 = (2, -2, 1)$.

O auto–vetor $\mathbf{x}_2$ correspondente a $\lambda_2 = 2$ é a solução da equação

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

equivalente ao sistema linear

$$\begin{aligned} x_{2,1} &= 0 \\ x_{2,1} - 3\,x_{1,3} &= 0 \end{aligned}$$

com $x_{2,2}$ arbitrário. Podemos então escolher $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 0)$.

O auto–vetor $\mathbf{x}_3$ correspondente a $\lambda_3 = -1$ é a solução da equação

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuja solução é $x_{3,1} = x_{3,2} = 0$ e $x_{3,3}$ qualquer. Escolhemos $\mathbf{x}_3 = (0, 0, 1)$.

A matriz de auto–vetores

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que é um isomorfismo pois $\det X = 2 \neq 0$, define a transformação de similaridade que diagonaliza a matriz A pela relação (1.1.26) com $D = \mathrm{diag}\,\{1, 2, -1\}$. Afim de verificar a relação neste exemplo, precisamos calcular a inversa de X usando, por exemplo, a formula

$$X^{-1} = \frac{1}{\det X}\,\mathrm{adj}X \tag{1.1.27}$$

onde $\mathrm{adj}X$ é a matriz adjunta de X: $\mathrm{adj}X = (\mathrm{cof}X)^T$.

A matriz dos cofatores, $\mathrm{cof}X$, é obtida da seguinte forma. Se $B = [b_{ij}]$ é uma matriz $n \times n$ o cofator B_{ij} associado a entrada b_{ij} é dado pelo determinante da matriz B com a i–ésima linha e a j–ésima coluna removida:

$$B_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1\,j-1} & b_{1\,j+1} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i-1\,1} & \cdots & b_{i-1\,j-1} & b_{i-1\,j+1} & \cdots & b_{i-1\,n} \\ b_{i+1\,1} & \cdots & b_{i+1\,j-1} & b_{i+1\,j+1} & \cdots & b_{i+1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n\,1} & \cdots & b_{n\,j-1} & b_{n\,j+1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} .$$

A matriz dos cofatores é portanto $\mathrm{cof}B = [B_{ij}]$. Por esta formula obtemos

$$X^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e verificamos que

$$\begin{aligned} X^{-1}AX &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.38 *Seja T o operador linear que associa a cada vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ o vetor*

$$\mathbf{x}' = T\mathbf{x} = (2x_1, x_1, x_2 + x_3)\ . \tag{1.1.28}$$

Em componentes, (1.1.28) é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 \\ x_2' &= x_1 \\ x_3' &= x_2 + x_3 \end{aligned}$$

que é implementado pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cujos auto–valores e correspondentes auto–vetores são, respectivamente, $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 1$ *e* $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *A matriz de similaridade que diagonaliza* A *é:*

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e sua inversa é dada por

$$X^{-1} = \frac{\mathrm{adj}X}{\det X} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

Note que as matrizes A, X *e* X^{-1} *possuem a forma triangular inferior. O conjunto de todas as matrizes triangulares (superiores* ou *inferiores de mesma ordem) formam uma álgebra que é fechada pelas operações de soma, produto escalar e matricial, e inversa. Os auto–valores de uma matriz triangular são os elementos de sua diagonal.*

Seja $\mathcal{E}$ um espaço vetorial com produto interno (um espaço unitário), e T um operador sobre $\mathcal{E}$.

Definição 1.1.39 *O operador* T^* *é o* ***operador adjunto*** *a* T *se a equação*

$$(\mathbf{x}, T\mathbf{y}) = (T^*\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

for satisfeita para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$.

Denomina-se ***auto–adjunto*** *(ou* ***hermiteano****) o operador que é igual ao seu adjunto:*

$$T = T^* .$$

A representação matricial $A = [a_{ij}]$ de um operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ auto–adjunto é denominada **simétrica**. Os elementos de uma matriz simétrica A satisfazem

$$a_{ij} = a_{ji} .$$

Uma matriz $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é **ortogonal** se

$$A^T A = A A^T = I$$

Seja $\mathcal{E}$ um espaço vetorial sobre os números complexos e S um operador em $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Se $B = [b_{ij}]$ for a representação matricial de S, a matriz **hermiteana conjugada** a B é o complexo conjugado da transposta de B:

$$B^\dagger = \overline{(B^T)} = \left(\overline{B}\right)^T$$

A matriz B é **hermiteana** se $B = B^\dagger$. A matriz B é dita unitária se

$$BB^\dagger = B^\dagger B = I$$

Operadores hermiteanos tem propriedades especiais.

Teorema 1.1.40 *Os auto–valores de um operador hermiteano são reais e os auto–vetores correspondentes à auto–valores distintos são ortogonais.*

Prova. Seja T um operador auto–adjunto $T = T^*$ e considere as equações

$$T\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \qquad \text{e} \qquad T\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2 .$$

Temos

$$(\mathbf{x}_1, T\mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1, T^*\mathbf{x}_2)$$

de onde segue

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{x}_1, T\mathbf{x}_2) - (\mathbf{x}_1, T^*\mathbf{x}_2) \\ &= (\mathbf{x}_1, T\mathbf{x}_2) - (T\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ &= (\mathbf{x}_1, T\mathbf{x}_2) - \overline{(\mathbf{x}_2, T\mathbf{x}_1)} \\ &= \left(\lambda_2 - \bar{\lambda}_1\right)(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{aligned}$$

Se $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ então $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \|\mathbf{x}_1\|^2 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_1$ e $\lambda_1 - \bar{\lambda}_1 = 0$. Por outro lado, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então os $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = 0$

□

Definição 1.1.41 *Uma matriz* A *é uma matriz* ***normal*** *se o conjunto de seus auto–vetores* $\mathcal{S} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ *formarem uma base ortogonal de* $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1.42 *Toda matriz normal é uma matriz simples.*

Prova. Se os auto–valores forem simples é imediato. Se λ tiver multiplicidade algébrica m então também existem associados a λ, m auto–vetores ortogonais que formam uma base para $\mathcal{N}(A - \lambda I)$.

□

Se A for uma matriz normal e $\mathcal{S} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ for a base ortonormal formada pelos auto–vetores normalizados de A então a matriz dos auto–vetores $X = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n]$ é uma matriz ortogonal $X^{-1} = X^T$ (ou unitária $X^{-1} = X^\dagger$ no caso do espaço ser complexo). Verifique ! Portanto, A é diagonalizavel pela transformação de similaridade

$$D = X^\dagger A X \tag{1.1.29}$$

com $D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Chamamos de transformação **unitária** as transformações de similaridade realizadas por matrizes unitárias. Dado uma matriz A, o conjunto de todas as matrizes da forma

$$B = U^\dagger A U$$

para alguma matriz unitária U, forma uma classe de equivalência.

Teorema 1.1.43 *Uma matriz A é normal se e somente se for unitariamente equivalente a matriz diagonal D de seus auto–valores.*

Nem toda matriz $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (ou $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$) é unitariamente equivalente a alguma matriz diagonal D. O máximo que podemos afirmar é o seguinte.

Teorema 1.1.44 (Shur–Toeplitz) *Toda matriz em $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ é unitariamente equivalente a uma matriz triangular superior.*

Segue deste resultado:

Teorema 1.1.45 *A é uma matriz normal se e somente se*

$$AA^\dagger = A^\dagger A \tag{1.1.30}$$

Prova. ($\Longrightarrow$) Se A for normal segue do Teorema 1.1.43 que A é unitariamente equivalente a uma matriz diagonal: $A = X^\dagger D X$, por conseguinte

$$AA^\dagger = X^\dagger D X X^\dagger \overline{D} X = X^\dagger D \overline{D} X = X^\dagger \overline{D} D X = \left(X^\dagger D X\right)^\dagger X^\dagger D X = A^\dagger A$$

O lado reverso ($\Longleftarrow$), pelo Teorema 1.1.44, existe uma transformação unitária U tal que $B = U^\dagger A U$ é triangular superior. Se A satisfaz (1.1.30) então verifica–se que $BB^\dagger = B^\dagger B$. Esta equação combinada com o fato de B ser triangular superior implica que B é diagonal e portanto uma matriz normal.

□

Note que qualquer matriz hermiteana ou unitária satisfaz a relação (1.1.30). Consequentemente,

Corolário 1.1.46 *Toda matriz hermitiana (ou unitária) pode ser diagonalizavel por uma transformaçao unitária dada por (1.1.29).*

O espectro $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}$ de uma matriz hermiteana A é real (como já foi visto) pois

$$A^\dagger = \left(X^\dagger D X\right)^\dagger = X^\dagger \overline{D} X = X^\dagger D X = A$$

isto é $D = \overline{D}$. O espectro $\sigma(U)$ de uma matriz unitária U se encontra no círculo unitário $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Isto segue pois, se $U\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ com $\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$, então

$$|(U\mathbf{x}, U\mathbf{x})| = |\lambda|^2 (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = |\lambda|^2 = 1$$

(note que $U^\dagger U = I$).

Proposição 1.1.47 *Uma matriz $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é um projetor se P for **idempotente***

$$P^2 = P.$$

Se P for idempotente, então

1. *$(I - P)$ é idempotente;*
2. *$\mathcal{N}(P) = \mathcal{I}(I - P)$;*
3. *$\mathcal{N}(I - P) = \mathcal{I}(P)$.*

Verificamos anteriormente que um projetor P satisfaz a propriedade de idempotência quando introduzido no método de Gram–Schmidt. Item *1*. resulta de

$$(I - P)(I - P) = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P\,.$$

As demais propriedades também seguem de forma imediata e dão origem ao seguinte

Teorema 1.1.48 *Toda matriz idempotente P é uma matriz simples.*

Como P é simples, P pode ser diagonalizavel. Antes de proceder nesta direção, daremos uma representaçao matricial para o operador de projeção (1.1.18). É importante notar que o operador P de projeção pode não ser ortogonal: P é um projetor ortogonal se e somente se $P^2 = P$ e $P^\dagger = P$.

Seja $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e seja P o projetor no subespaço $\mathcal{M}_k$ gerado pelos k primeiros vetores. Segundo a definição (1.1.18), temos

$$\begin{aligned} P\mathbf{x} &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{x})\mathbf{e}_1 + \cdots + (\mathbf{e}_k, \mathbf{x})\mathbf{e}_k \\ &= \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{x}) + \cdots + \mathbf{e}_k(\mathbf{e}_k, \mathbf{x}) \\ &= E_1\mathbf{x} + \cdots + E_k\mathbf{x} \end{aligned} \tag{1.1.31}$$

onde, para todo $l = 1, \ldots, k$,

$$E_l = \mathbf{e}_l\ (\mathbf{e}_l)^T = \begin{pmatrix} e_{l,1} \\ \vdots \\ e_{l,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{l,1} & \cdots & e_{l,n} \end{pmatrix} \tag{1.1.32}$$

é a matriz obtida pela multiplicação da matriz $n \times 1$ coluna $\mathbf{e}_l$ pela matriz $1 \times n$ linha $(\mathbf{e}_l)^T$. Para ver isso, basta apenas reescrever o produto escalar em (1.1.31) como um produto matricial

$$(\mathbf{e}_l, \mathbf{x}) = (\mathbf{e}_l)^T\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} e_{l,1} & \cdots & e_{l,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

De (1.1.32) o projetor (1.1.31) é representado pela matriz $P = [p_{i,j}]$ com

$$p_{i,j} = e_{1,i}e_{1,j} + \cdots + e_{k,i}e_{k,j} .$$

O mais importante resultado desta subseção resulta da escolha de uma base ortonormal $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formada pelos auto–vetores de uma matriz simples A.

Teorema 1.1.49 (Teorema Espectral) *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ uma matriz simples simétrica com auto–valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e auto–vetores associados $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ mutuamente ortogonais e normalizados. Se p for um polinômio, então*

$$p\,(A) = \sum_{j=1}^{n} p(\lambda_j)\, E_j$$

onde $E_j = \mathbf{x}_j\ (\mathbf{x}_j)^T$ é o projetor no subespaço gerado por $\mathbf{x}_j$:

$$E_j = \begin{pmatrix} x_{j,1} \\ \vdots \\ x_{j,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{j,1} & \cdots & x_{j,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{j,1}^2 & \cdots & x_{j,1}\,x_{j,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j,n}\,x_{j,1} & \cdots & x_{j,n}^2 \end{pmatrix} .$$

Prova. Uma matriz simétrica A, e portanto normal, é diagonalizavel pela matriz unitária dos auto–vetores $X = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n]$: $D = X^{-1}AX$ onde $D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Da mesma forma temos $A = XDX^{-1}$, que por ser uma transformação de similaridade, resulta

$$A^k = \left(XDX^{-1}\right) \cdots \left(XDX^{-1}\right) = XD^kX^{-1}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ com $D^k = \operatorname{diag}\left\{\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right\}$.

Se $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$, usando linearidade

$$\begin{aligned} p\,(A) &= a_0 + a_1A + \cdots + a_nA^n \\ &= a_0 + a_1XDX^{-1} + \cdots + a_nXD^nX^{-1} \\ &= X\left(a_0 + a_1D + \cdots + a_nD^n\right)X^{-1} \\ &= X\,p\,(D)\ X^{-1} \end{aligned}$$

com $p(D) = \operatorname{diag}\{p\,(\lambda_1), \ldots, p\,(\lambda_n)\}$. Como A é uma matriz simétrica, é portanto normal, a matriz dos auto–vetores X é ortogonal: $X^T = X^{-1}$. O teorema segue desta expressão.

□

Pelo teorema espectral, segue também que os auto-valores de um projetor P no subespaço $\mathcal{M}_k$ gerado pelos vetores $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ da base acima, são $\lambda = 1$ de multiplicidade k e $\lambda = 0$ de multiplicidade $n - k$. Note que $P = XDX^{-1}$ com

$$D = \operatorname{diag}\{\overbrace{1, \ldots, 1}^{k-\text{vezes}},\ \overbrace{0, \ldots, 0}^{(n-k)-\text{vezes}}\} .$$

Exercício 1.1.50 *Considere uma cadeia linear* **cíclica** *com N átomos (isto é, com o N–ésimo átomo adjacente ao primeiro). Cada átomo pode estar em algum dos três estados A, B ou C, exceto que um átomo no estado A não pode ser adjacente a um átomo no estado C. Mostre que a* densidade de entropia

$$s = \lim_{N\to\infty} \frac{\ln W_N}{N}$$

onde W_N é o número total de configurações permitidas, é $\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$. Qual é o valor de s se o vínculo que proíbe o aparecimento de pares AC ou CA em uma configuração for removido?

Indicação: *Defina o vetor $\mathbf{v}^{(j)} = \left(v_A^{(j)}, v_B^{(j)}, v_C^{(j)}\right)$ onde $v_k^{(j)}$ é o número de configurações permitidas em uma cadeia de j átomos com o j –ésimo átomo no estado $k = A, B$ ou C. Se*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

então a seguinte relação de recorrecia é válida: $\mathbf{v}^{(j+1)} = M\mathbf{v}^{(j)}$. *De onde segue que*

$$W_N = \mathrm{TrM^N}$$

onde $\mathrm{TrK} = \sum_{\mathrm{j}} \mathrm{K_{jj}}$ *é a soma dos elementos diagonais da matriz* K.

O problema de auto–valores pode também ser interpretado como um problema variacional. Seja T um operador auto–adjunto em um espaço vetorial $\mathcal{E}$ unitário de dimensão n. Procuramos um extremo da forma quadrática $(\mathbf{x}, T\mathbf{x})$ sujeita a condição que $\mathbf{x}$ seja um vetor de norma 1. Pelo método do multiplicador de Lagrange, isto é obtido pela variação do funcional

$$G(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, T\mathbf{x}) - \lambda\,(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

dado por:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{z}} G(\mathbf{x}) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{G\,(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{z}) - G\,(\mathbf{x})}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{z}, T\,(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{z})) - \lambda\,(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{z}, \mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{z}) - (\mathbf{x}, T\mathbf{x}) - \lambda\,(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{\varepsilon} \\ &= 2\Re e\,(\mathbf{z}, (T - \lambda I)\,\mathbf{x})\ . \end{aligned} \tag{1.1.33}$$

O vetor $\mathbf{x}^*$ é um extremo do funcional G se $\delta_{\mathbf{z}} G(\mathbf{x}^*) = 0$ para toda direção $\mathbf{z} \in \mathcal{E}$. A equação (1.1.33) se anula se e somente se λ for um auto–valor de T. Se λ for auto–valor simples, então o auto–vetor associado $\mathbf{x}$ é o único extremo de G. Se λ for um auto–valor múltiplo, então qualquer vetor $\mathbf{x}$ no núcleo $\mathcal{N}\,(T - \lambda I)$ é um extremo.

O vetor $\mathbf{x}^*$ é um mínimo do funcional G se a segunda variação for positiva:

$$\delta_{\mathbf{z}'}\delta_{\mathbf{z}} G(\mathbf{x}^*) = 2\Re e\,(\mathbf{z}'\,(T - \lambda I)\,\mathbf{z}) > 0\,.$$

Em outras palavras, $\mathbf{x}^*$ é um mínimo de G se $T - \lambda I$ for uma matriz positiva definida. Para isso, a condição necessária e sufficiente é que λ seja o menor entre todos auto–valores e que seja simples.

O vetor $\mathbf{x}^*$ é um máximo do funcional G se a segunda variação for negativa. Neste caso, $\mathbf{x}^*$ é o auto–vetor associado ao maior auto–valor λ (único se λ for simples).

A forma quadrática é um exemplo de um **funcional** sobre $\mathcal{E}$. Um funcional F é uma aplicação que associa a cada vetor $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ um número $F(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Um funcional L é linear se

$$L(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha L(\mathbf{x}) + \beta L(\mathbf{y})$$

($\delta_{\mathbf{z}} G$ é um exemplo) para o qual temos o seguinte resultado.

Teorema 1.1.51 (Teorema de Riesz) *Seja* $L : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) um funcional linear em um espaço vetorial com produto interno. Então, existe um* **único** *vetor* $\mathbf{l} \in \mathcal{E}$ *tal que*

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{l}, \mathbf{x})\ .$$

Este teorema tem uma interpretação geométrica: os funcionais lineares L sobre um espaço $\mathcal{E}$ unitário, formam um espaço vetorial normal ao hyperplano $L(\mathbf{x}) = 0$. O conjunto $\mathcal{E}^*$ dos funcionais lineares sobre $\mathcal{E}$ forma um espaço **dual** ao espaço $\mathcal{E}$.

Usando a transformaçao de similaridade X,

$$(\mathbf{x}, T\mathbf{x}) = \left(X^{-1}\mathbf{x}, DX^{-1}\mathbf{x}\right) = (\mathbf{y}, D\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, y_j^2$$

de onde segue que os extremos de $(\mathbf{x}, T\mathbf{x})$ estão relacionados com o problema de auto–valores de T. O máximo de G é atingido se λ for o maior auto–valor de T:

$$\max_{\mathbf{x}:(\mathbf{x},\mathbf{x})=1} (\mathbf{x}, T\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y}:(\mathbf{y},\mathbf{y})=1} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, y_j^2 = \max_j \lambda_j$$

(note que $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = (X^{-1}\mathbf{x}, X^{-1}\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$ pois X é uma matriz ortogonal ou unitária); o mínimo de G é atingido se λ for o menor auto–valor de T:

$$\min_{\mathbf{x}:(\mathbf{x},\mathbf{x})=1} (\mathbf{x}, T\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}:(\mathbf{y},\mathbf{y})=1} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, y_j^2 = \min_j \lambda_j\,.$$

Os demais auto–valores são obtidos restringindo o subespaço sobre o qual G é um extremo através da relação de ortogonalidade.

A base $\{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^n$ é conhecida como base dos eixos principais de F, pois determina os eixos principais de um elipsóide dado pela equação $(\mathbf{x}, T\mathbf{x}) = 1$.

1.2 Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias

1.2.1 Equação Linear Homogênea com Coeficientes Constantes

O seguinte problema de valores iniciais será resolvido através dos resultados obtidos na seção anterior.

Teorema 1.2.1 *Seja* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *uma matriz simples. Então, para todo* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, *a equação diferencial linear*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \tag{1.2.1}$$

com condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, *tem uma única solução.*

Prova. Seja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ os auto–valores e respectivos auto–vetores de A. Como A é simples, $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ pode ser escolhida como sendo uma base ortonornal na qual A tem a forma diagonal:

$$D = X^{-1} A X$$

onde $X = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n]$ é a matriz dos auto–vetores e $D = \text{diag}\,\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Se $\mathbf{x} = X\mathbf{y}$ for uma solução da equação (1.2.1), então

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{dX^{-1}X\mathbf{y}}{dt} = X^{-1}\frac{d\mathbf{x}}{dt} = X^{-1}A\mathbf{x} = X^{-1}AX\mathbf{y} = D\mathbf{y}\,. \tag{1.2.2}$$

(note que a matriz X não depende da variável t).

Em termos de $\mathbf{y}$ o sistema de equações (1.2.1) se desacopla:

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j\, y_j\,, \qquad j = 1, \ldots, n$$

e o vetor solução $\mathbf{y}$ deste sistema é único para cada condição inicial $\mathbf{y}(0) = X^{-1}\mathbf{x}_0$:

$$y_j = y_j(0)\, e^{t\lambda_j}\,.$$

Explicitamente, a solução de (1.2.1) é dada por

$$\mathbf{x}(t) = X\,\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,n} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0)\, e^{t\lambda_1} \\ \vdots \\ y_n(0)\, e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}. \tag{1.2.3}$$

que escrita em termos de suas componentes resulta

$$x_j(t) = x_{j,1}\, y_1(0)\, e^{t\lambda_1} + \cdots + x_{j,n}\, y_n(0)\, e^{t\lambda_n}\,.$$

Note que esta solução é única pois X é um isomorfismo e $\mathbf{y}(t)$ é a única solução de (1.2.2). □

Exemplo 1.2.2 *Considere a equação (1.2.1) com A como no Exemplo 1.1.37*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e condição inicial $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)$. Usando as expressões derivadas no Exemplo 1.1.37, a condição inicial para o sistema desacoplado é

$$\mathbf{y}(0) = X^{-1}\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

que ao ser substituída na solução (1.2.3) juntamente com seus auto–valores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -1$, resulta

$$\mathbf{x}(t) = X\,\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1/2)\; e^{t} \\ 2\, e^{2t} \\ (1/2)\; e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{t} + 2\, e^{2t} \\ (1/2)\,(e^{t} + e^{-t}) \end{pmatrix}$$

A solução da equação (1.2.1) também pode ser escrita em uma forma mais conveniente a qual faremos uso frequentemente. De (1.2.3), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= X\,\mathbf{y}(t) \\ &= X\, e^{tD}\,\mathbf{y}_0 \\ &= X\, e^{tD}\, X^{-1}\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

onde e^{tD} é a matriz diagonal diag $\left\{e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n}\right\}$. Denotando por $e^{t\,A}$ a matriz resultante da transformação de similaridade

$$e^{t\,A} = X\, e^{t\,D}\, X^{-1}$$

obtemos a seguinte fórmula para a solução de (1.2.1)

$$\mathbf{x}(t) = \exp\,(t\,A)\;\mathbf{x}_0 \tag{1.2.4}$$

Veremos a seguir que o uso da notação da "matriz exponencial" é consistente com as propriedades da função exponencial tal qual a conhecemos. A saber

Definição 1.2.3 *A exponencial de um operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é a matriz obtida pela série formal de matrizes*

$$\exp T = I + T + \frac{1}{2}T^2 + \frac{1}{6}T^3 + \cdots \tag{1.2.5}$$

Para que $\exp T$ seja um objeto bem definido, a série de potências (1.2.5) precisa ser **convergente**. Isto requer a introdução de uma **norma** no espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ afim de que seja possivel avaliar a proximidade entre duas matrizes. Note que, se $T = tD$ a série de potência

$$e^{tD} = I + tD + \frac{1}{2}t^2D^2 + \cdots$$

é uma matriz diagonal $[e^{t\lambda_j}\delta_{ij}]$ cujos elementos não nulos formam uma série de Taylor

$$e^{t\lambda_j} = 1 + t\lambda_j + \frac{1}{2}t^2\lambda_j^2 + \cdots$$

Como a série de Taylor é convergente para todo $\lambda_j \in \mathbb{R}$, a série de potências de e^{tD} pode ser aproximada pela série truncada na ordem n cujo erro

$$e^{tD} - (I + tD + \frac{1}{2}t^2D^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nD^n)$$

tende a 0 quando $n \to \infty$.

A seguir daremos algumas propriedades da série formal (1.2.5).

1. Seja $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ uma matriz inversivel e $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\exp\left(M^{-1}TM\right) = M^{-1}\exp(T)\ M$$

2. Se $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ comutam entre si ($[T,S] = TS - ST = 0$), então

$$\exp(T+S) = \exp T\ \exp S$$

3. Seja $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $M = M(t)$, uma matriz inversível cujos elementos $m_{ij} = m_{ij}(t)$ são funções suaves da variavel t. Então

$$\frac{d}{dt}M^{-1} = -M^{-1}\dot{M}M^{-1}$$

onde $\dot{M} = dM/dt$ é a matrix cujos elementos $\dot{m}_{ij}$ são derivadas temporais dos elementos m_{ij}.

Item 1. segue das propriedades da transformação de similaridade. Para o item 2., note que $(T+S)^2 = T^2 + 2TS + S^2$ é satisfeita se e somente se $[T,S] = 0$. O item 3. é consequência da seguinte relação

$$0 = \frac{d}{dt}MM^{-1} = \dot{M}M^{-1} + M\frac{d}{dt}M^{-1}$$

Retornemos agora ao problema de valor inicial (1.2.1) na forma matricial:

$$\dot{T} = AT \qquad \text{e} \qquad \mathrm{T(0) = I} \tag{1.2.6}$$

Como T é diferenciável e A é constante no tempo, AT é diferenciável e

$$\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{d}{dt}AT = A\dot{T} = A^2T$$

Segue por indução que T é infinitamente diferenciável

$$\frac{d^nT}{dt^n} = \frac{d}{dt}A\frac{d^{n-1}T}{dt^{n-1}} = A^nT$$

com $\frac{d^nT}{dt^n}(0) = A^n$. Portanto a série de Taylor em $t = 0$

$$T(t) = I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \ldots \tag{1.2.7}$$

é uma solução formal da equação (1.2.6).

A solução T do problema de valor inicial (1.2.6) é denominada **Matriz Principal**. Denominamos **Matriz Fundamental** a matriz S que satisfaz apenas a primeira das equações (1.2.6). Estas matrizes satisfazem as seguintes propriedades:

a. Dado que S é uma matriz fundamental, S' é uma matrizes fundamental se e somente se existir uma matriz constante não singular C ($\det C \neq 0$) tal que $S' = SC$; [1]

b. Se S for uma matriz fundamental, então matriz principal é dada por

$$T(t) = S(t)\,S^{-1}(0)\,;$$

c. Se $T(t,t_0)$ é a matriz principal solução do problema de valor inicial (1.2.6) com o tempo inicial $t = 0$ substituido por t_0 ($T(t) = T(t,0)$), então é válida a propriedade de semi–grupo

$$T(t,t_0) = T(t,s)\,T(s,t_0)$$

com $t_0 \le s \le t$.

d.

$$x(t) = T(t,t_0)x_0$$

é a solução da equação (1.2.1) com $x(t_0) = x_0$.

Exercício 1.2.4 *Demonstre as propriedades* ***a.**–**d.**.*

Indicação: *Para* **a.** *use a propriedade 3. e a equação (1.2.6) afim de verificar que* $S'S^{-1}$ *é uma matriz constante.*

[1] Note que a ordem do produto é relevante: $S' = CS$ nem sempre é uma matriz fundamental

Para mostrar que a solução (1.2.7) **converge uniformemente**, e portanto representa a solução do problema de valor inicial, introduzimos a seguinte norma no espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

$$\|A\| := \sup_{\mathbf{x}:\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| \tag{1.2.8}$$

onde $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Por ser uma norma, a desigualdade triangular

$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\| \tag{1.2.9}$$

é satisfeita (Verifique!). Além disso, segue da definição (1.2.8) que

$$\|AB\| \le \|A\| \, \|B\| \tag{1.2.10}$$

Em vista de (1.2.9) e (1.2.10), dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{A^m}{m!} + \cdots + \frac{A^{m+p}}{(m+p)!} \right\| &\le \frac{\|A^m\|}{m!} + \cdots + \frac{\|A^{m+p}\|}{(m+p)!} \\
&\le \frac{\|A\|^m}{m!} + \cdots + \frac{\|A\|^{m+p}}{(m+p)!} \\
&\le \frac{\|A\|^m}{m!}\left(1 + \|A\| + \cdots + \frac{\|A\|^p}{p!}\right) \\
&\le \frac{\|A\|^m}{m!} e^{\|A\|} < \varepsilon
\end{aligned}$$

para todo $m, p > N$ e a série de potências (1.2.7) é uma série de Cauchy, portanto convergente.

A solução na forma (1.2.4) é de fato mais geral que a expressão (1.2.3) pois é válida mesmo quando a matriz A em (1.2.1) não é diagonalizavel. A seguir daremos um exemplo simples, mas ilustrativos do caso geral, do cálculo de $\exp A$ quando A não é diagonalizavel.

Exemplo 1.2.5 *Considere a equação (1.2.1) com*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e condição inicial $\mathbf{x}_0 = (1,1)$. *O polinômio característico* $c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = (\lambda - 2)^2$ *tem uma raiz dupla* $\lambda = 2$. *Porém associado ao auto–valor* $\lambda = 2$ *tem-se apenas o auto–vetor* $\mathbf{x} = (1,-1)$ *e portanto* $\dim \mathcal{N}(A - \lambda I)$ *é menor que a multiplicidade de* λ. *Embora A não possa ser diagonalizada, podemos decompor*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv S + N$$

com N satisfazendo as seguintes propriedades:

1. *N é uma matriz nilpotente de ordem 2:*

$$N^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

2. *N comuta com S: $NS = SN$.*

De onde se conclue, em vista de (1.2.4) e destas propriedades, que a solução de (1.2.1) é

$$\mathbf{x}(t) = \exp(tA)\,\mathbf{x}_0 = \exp(t(S+N))\,\mathbf{x}_0 = \exp(tS)\,(I + tN)\,\mathbf{x}_0$$

e portanto

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-2t \\ 1+2t \end{pmatrix}.$$

Exercício 1.2.6 *Resolva o problema de valor inicial $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ para as seguintes escolhas de A e condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$:*

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{x}_0 = (3,0)$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{x}_0 = (0,-1,1)$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{x}_0 = (1,-1,2)$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{x}_0 = (1,1)$

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{x}_0 = (1,1)$

6. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{x}_0 = (1,1)$

Nos items 4,5 e 6 calcule a solução na forma $\mathbf{x}(t) = \exp\{tA\}\,\mathbf{x}_0$.

Equações de ordem superior, como (1.1.4) com $g \equiv 0$ no Exemplo 1.1.6, podem ser escritas na forma (1.2.1). Dado n funções contínuas a valores reais $a_1, \ldots a_n$, considere a equação

$$P(D)f = f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} f' + a_n f = 0 \tag{1.2.11}$$

onde $f^{(k)} = D^k f$ denota a k–ésima derivada de f. Definindo novas variaveis $x_1 := f$, $x_2 := f'$, $\ldots, x_n := f^{(n-1)}$ esta equação é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \ , \\ x_2' &= x_3 \ , \\ &\vdots \\ x_n' &= -a_n\, x_1 - \cdots - a_1\, x_n \ . \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

que por sua vez, denotando $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ um vetor em $\mathbb{R}^n$, pode ser escrito na forma matricial

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \tag{1.2.13}$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} .$$

Note que o polinômio característico $c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é igual ao polinômio $P(\lambda)$ e portanto as raízes de P coincidem com os auto–valores de A.

Exercício 1.2.7 *Mostre que* $c_A(\lambda) = P(\lambda)$.

Se $\mathbf{x}_0 = \big(f(0), f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)\big)$ for a condição inicial para o problema de valor inicial (1.2.13) com A uma matriz constante em t, a solução de (1.2.11) é única e é dada pela primeira componente $x_1(t) = f(t)$ do vetor solução $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \exp(tA)\,\mathbf{x}_0$.

Considere agora n soluções linearmente independentes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ de (1.2.13) e seja $S = [\mathbf{x}_1\, \mathbf{x}_2 \cdots \mathbf{x}_n]$ uma solução fundamental dada por

$$S = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix} . \tag{1.2.14}$$

O determinante da matriz fundamental

$$\det S(t) = W(f_1, \ldots, f_n; t) \tag{1.2.15}$$

é denominado **Wronskiano** de $P(D)f = 0$ com respeito a $f_1, f_2, \ldots, f_n$ o qual denotamos agumas vezes por $W(f_1, \ldots, f_n)$ ou simplesmente por $W(t)$.

Devido ao fato que $\mathrm{Tr}\, A = -a_1$, temos pela fórmula de Abel–Liouville (1.2.20)

$$W(f_1, \ldots, f_n; t) = W(f_1, \ldots, f_n; t_0)\ \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\, ds\right) ,$$

de onde se conclui o seguinte:

Teorema 1.2.8 *A condição necessária e suficiente para que n soluções $f_1, \ldots, f_n$ de $P(D)f = 0$ seja linearmente independente é*

$$W(f_1, \ldots, f_n; t) \neq 0$$

para algum instante t pertencente ao intervalo I de definição das soluções.

Exemplo 1.2.9 *Considere a trajetória de um oscilador harmônico descrita pelo problema de valor inicial a seguir:*

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{1.2.16}$$

com $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = y_0$. Equação (1.2.16) pode ser escrita na forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

com $\mathbf{x} = \big(x, \dot{x}\big)$ e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Os auto–valores e correspondentes auto–vetores são:

$$\lambda_1 = i\omega \ , \qquad u_1 = (1, i\omega)$$

$$\lambda_2 = -i\omega \qquad u_2 = (1, -i\omega)$$

A solução de (1.2.16) é portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= X\, e^{tD}\, X^{-1} \mathbf{x}_0 \\ &= \frac{1}{2i\omega} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\omega & 1 \\ i\omega & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\omega t & (1/\omega)\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

e

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{y_0}{\omega} \sin\omega t \, .$$

Podemos interpretar a equação (1.2.1) geometricamente. Para isso, considere a equação

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{1.2.17}$$

onde $\mathbf{f} : \Omega \subset [a, b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua na primeira variável e suave na segunda. Note que se $\mathbf{f}$ for linear com dependência explicita do tempo, (1.2.17) é equivalente a (1.2.1) com $A = A(t)$. Uma solução de (1.2.17) é uma função diferenciável $\mathbf{x}(t)$ em $[a, b]$ tal que $(t, \mathbf{x}(t)) \in \Omega$. A função $\mathbf{f}$ forma um **campo vetorial** que associa a cada vetor $(t, \mathbf{x}) \in \Omega$ o vetor $(1, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}))$ **tangente** à trajetoria $(t, \mathbf{x}(t))$.

Exercício 1.2.10 (Existência e Unicidade) *Considere a equação diferencial*

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} \, , \qquad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \, , \tag{1.2.18}$$

com $A(t) = [a_{ij}(t)]$ uma matriz $n \times n$ cujos elementos são funções de t tais que $|a_{ij}(t)| < \infty$ no intervalo $[0, t_0]$. Mostre que a matriz solução $Y(t) = [\mathbf{y}_1 \, \mathbf{y}_2 \cdots \mathbf{y}_n]$, com $\mathbf{y}_j$ satisfazendo (1.2.18), é **não singular** *se o conjunto $\{\mathbf{y}_{0,j}\}$ de condições iniciais $\mathbf{y}_j(0) = \mathbf{y}_{0,j}$ for linearmente independente.*

Indicação: *Siga as seguintes etapas.*

1. *Mostre que o traço $\mathrm{Tr} A = \sum_{j=1}^{n} A_{jj}$ e o determinante $\det A$ de uma matriz $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ são invariantes pela transformação de similaridade.*

2. *Assumindo que Y é uma matriz diagonalizavel, demonstre a identidade*

$$\det Y = \exp \{\mathrm{Tr} \ln \mathrm{Y}\} \, .$$

3. *Mostre que*

$$\frac{d \det Y}{dt} = \det Y \, \mathrm{Tr} \left(\mathrm{Y}^{-1} \frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{dt}} \right) \tag{1.2.19}$$

4. *Usando a equação matricial $dY/dt = A(t)Y$ com condição inicial $Y(0) = Y_0 = [\mathbf{y}_{0,1} \cdots \mathbf{y}_{0,n}]$ e (1.2.19), mostre que*

$$\det Y(t) = \det Y_0 \, \exp \left\{ \int_0^t \mathrm{TrA(s)\, ds} \right\} \tag{1.2.20}$$

e conclua que $\det Y(t) \neq 0$ para $t \in [0, t_0]$ se $\det Y_0 \neq 0$.

1.2.2 Cadeias Harmônicas e a Equação das Ondas

Seja

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -K y_1 - K(y_1 - y_2) \\ \ddot{y}_2 &= -K y_2 - K(y_2 - y_1) \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

as equações de Newton de um sistema de duas partículas de massa unitária acopladas entre si e com um ponto fixo por um potencial harmônico de constante elástica $K = 1$.

Desejamos determinar as cordenadas $y_j(t)$, $j = 1, 2$, que descrevem o desvio de cada partícula com relação ao seu ponto de equilíbrio no instante t dado que inicialmente $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 0$ e $\dot{y}_1(0) = 0$, $\dot{y}_2(0) = 0$.

Equação (1.2.21) pode ser reescrita na forma matricial

$$\ddot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$$

onde $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ é um vetor em $\mathbb{R}^2$ e

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} ,$$

sujeita as condições iniciais $\mathbf{y}(0) = (2, 0)$ e $\dot{\mathbf{y}}(0) = (0, 0)$.

A partir da equação de auto–valores

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

obtemos

$$a^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lambda = a - 2$$

que nos leva a $D = \mathrm{diag}\{-1, -3\}$ e

$$X = X^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Escrevendo $\mathbf{z} = X^{-1}\mathbf{y}$, otemos duas equações de segunda ordem desacopladas

$$\ddot{\mathbf{z}} = D\mathbf{z}$$

com codições iniciais $\mathbf{z}(0) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ e $\dot{\mathbf{z}}(0) = (0, 0)$, cuja solução é dada por

$$\mathbf{z}(t) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos \sqrt{3} t \end{pmatrix}$$

resultando

$$\mathbf{y}(t) = X\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \cos\sqrt{3}t \\ \cos t - \cos\sqrt{3}t \end{pmatrix} .$$

Nesta subseção extenderemos a solução da cadeia harmônica acima de 2 para $n-1$, $n > 3$, partículas. Lembrando que as partículas têm massa inercial unitária e estão acopladas ao pares com suas extremidades acopladas a dois pontos fixos, veremos a seguir que esta solução reescalada apropriadamente converge, no limite $n \to \infty$, para a solução de uma corda vibrante que tem suas extremidades fixadas.

Nosso objetivo é ilustrar o surgimento de uma equação à derivadas parciais, equação das ondas, a partir de uma sistema de equações diferenciais ordinárias, no caso uma cadeia de osciladores harmônicos acoplados. O ponto a ser enfatizado é que a soluções de equações a derivadas parciais pertencem a um **espaço vetorial de dimensão infinita**.

Considere um conjunto de $n-1$ partículas puntuais com massa inercial unitária ocupando os sítios de uma rede unidimensional de espaç amento $a = \pi/n$. Para ser específico, seja

$$\Lambda = \left\{\frac{\pi}{n}, \ldots, (n-1)\frac{\pi}{n}\right\} = \left\{j\frac{\pi}{n} : j = 1, \ldots, n-1\right\}$$

o conjunto das posições de **repouso** destas partículas. Cada partícula pode mover-se apenas **transversalmente** à direção da cadeia e denotamos por $y_j = y_j(t)$, $j = 1, \ldots, n-1$, o deslocamento da j–ésima partícula com respeito sua posição de equilíbrio $j\pi/n \in \Lambda$ no instante t. Vamos também escolher uma **condição de fronteira** que corresponde a fixar duas partículas adicionais na posição de repouso 0 e π:

$$y_0 = y_n = 0 \,. \tag{1.2.22}$$

Estando estas partículas acopladas aos pares por um potencial harmônico de intensidade K, as equações de Newton que as descrevem correspondem ao seguinte sistema

$$\ddot{y}_j = -K\,(y_j - y_{j-1}) - K\,(y_j - y_{j+1}) \tag{1.2.23}$$

com $j = 1, \ldots, n-1$ e condições de fronteira (1.2.22) (compare com as equações (1.2.21)).

Aqui temos duas alternativas para reescrever (1.2.23). Como anteriormente, denotamos $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ um vetor em $\mathbb{R}^{n-1}$ e $\widetilde{\mathbf{y}} = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ o vetor extendido com as partículas adicionais. As equações (1.2.23) podem ser escritas na forma operatorial

$$\frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} - K\,\Delta\mathbf{y} = \mathbf{0} \tag{1.2.24}$$

onde $-\Delta = \nabla^*\nabla = \nabla\nabla^*$ é o operador de segunda diferença finita de Laplace definido no Exemplo 1.1.8:

$$(-\Delta\mathbf{y})_j = 2y_j - y_{j+1} - y_{j-1} \tag{1.2.25}$$

com condições de fronteira (1.2.22).

As equações (1.2.23) também podem ser escritas na forma matricial

$$\frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} + K\,A\mathbf{y} = \mathbf{0} \tag{1.2.26}$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \tag{1.2.27}$$

não sendo aqui necessário especificar as condições (1.2.22) pois A já as contém.

Nota 1.2.11 *As equações (1.2.23) podem ser derivadas a partir da Hamiltoniana $H = T + V$ onde*

$$V = \frac{K}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(y_i - y_{i+1})^2 + V_0$$

é a energia potencial com V_0 uma constante, e

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}p_j^2$$

*é a energia cinética total, a soma das energias cinéticas de cada partícula, com $p_j = p_j(t)$ o **momento** da partícula que se encontra em $j\pi/n$ no instante t. A Hamiltoniana é uma forma quadrática do vetor (extendido) posição $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ das partículas e do vetor momento $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_{n-1})$ que são considerados, neste formalismo, como variaveis independentes. Denotando por*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}x_j\, z_j \tag{1.2.28}$$

o produto interno no espaço vetorial, a Hamiltoniana

$$\begin{aligned} H(\mathbf{y}, \mathbf{p}) &= \frac{n}{2}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + \frac{Kn}{2}(\nabla\mathbf{y}, \nabla\mathbf{y}) + V_0 \\ &= \frac{n}{2}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + \frac{Kn}{2}(\mathbf{y}, -\Delta\mathbf{y}) + V_0 \end{aligned}$$

gera a evolução temporal através das equações de Hamilton–Jacobi

$$\begin{aligned} \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y_j} = -K\,(-\Delta\mathbf{y})_j \\ \frac{dy_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_j} = p_j \,. \end{aligned}$$

Substituindo a primeira equação na derivada da segunda, obtemos a equação de movimento de Newton em Λ com condições de fronteira (1.2.22).

Nosso objetivo é resolver a equação (1.2.24) ou (1.2.26) sujeita, por simplicidade, às seguintes condições iniciais para o vetor posição $\mathbf{y}$ e vetor velocidade $\dot{\mathbf{y}}$:

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \qquad \text{e} \qquad \dot{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{0}\,. \tag{1.2.29}$$

Utilizaremos o procedimento adotado para $n = 3$ no exemplo anterior que consiste em desacoplar o sistema por intermédio da matriz dos auto–vetores X. Para o problema em questão, veremos que os auto–valores e auto–vetores podem ser explicitamente obtidos para todo n.

Note que o operador $-\Delta$ é auto–adjunto: $(\mathbf{u}, -\Delta\mathbf{v}) = (-\Delta\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e portanto, pelo Teorema 1.1.40, a equação

$$-\Delta\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u} \tag{1.2.30}$$

possui $n-1$ auto–valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ reais e respectivos auto–vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$, mutuamente ortogonais.

Verificaremos a seguir que as auto–funções $\mathbf{u}_k = (u_{k,1}, \ldots, u_{k,n-1})$, $k = 1, \ldots, n-1$, de $-\Delta$ que satisfazem as condições de fronteira (1.2.22) tem componentes

$$u_{k,j} = \sqrt{2}\sin k\frac{\pi j}{n} \tag{1.2.31}$$

onde a constante é escolhida tal que $\|\mathbf{u}_k\|^2 = (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k) = 1$:

$$\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sin^2 k\frac{\pi j}{n} = \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sin^2 k\frac{\pi j}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(1 - \cos k\frac{2\pi j}{n}\right) = 1$$

pois a soma dos cossenos se anula.

Usando a definição (1.2.25) e a relação

$$\sin\alpha\,(j \pm 1) = \sin\alpha j\,\cos\alpha \pm \sin\alpha\,\cos\alpha j$$

temos

$$\begin{aligned}
(-\Delta\mathbf{u}_k)_j &= \sqrt{2}\left\{2\sin k\frac{\pi j}{n} - \sin k\frac{\pi(j+1)}{n} - \sin k\frac{\pi(j-1)}{n}\right\} \\
&= \left(2 - 2\cos k\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{2}\sin k\frac{\pi j}{n} \\
&= \left(2 - 2\cos k\frac{\pi}{n}\right)u_{k,j}
\end{aligned}$$

de onde se conclui que $\mathbf{u}_k = (u_{k,1}, \ldots, u_{k,n-1})$ satisfaz (1.2.30) com

$$\lambda_k = 2\,(1 - \cos ka)$$

onde $a = \pi/n$. □

Exercício 1.2.12 *Verifique que $e^{i\alpha j}$ e $e^{-i\alpha j}$, com $\alpha = \alpha(\lambda)$ apropriado, são duas soluções linearmente independentes da equação (1.2.30) e, em seguida, determine os auto–valores e auto–vetores impondo as condições de fronteira (1.2.22) à solução geral, demonstrando desta maneira*

$$-\Delta\mathbf{u}_k = 2\,(1 - \cos ka)\,\mathbf{u}_k \tag{1.2.32}$$

Exercício 1.2.13 *Calcule os auto–valores/vetores da matriz A dada por (1.2.27), em $\mathbb{R}^3$ $(n = 5)$ e $\mathbb{R}^5$ $(n = 7)$. Compare seu resultado com (1.2.32) e (1.2.31).*

Seja $\mathbf{y} = X\mathbf{z}$, onde $X = (1/\sqrt{n})\,[\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_{n-1}]$ e seja $\Omega = \operatorname{diag}\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\}$ a matriz diagonal com elementos $\omega_k = \sqrt{K\,\lambda_k}$. Então, a equação (1.2.26) resulta em

$$\frac{d^2\mathbf{z}}{dt^2} + \Omega^2\mathbf{z} = 0$$

com condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_0 &= X^{-1}\mathbf{y}_0 \\
&= (1/\sqrt{n})\begin{pmatrix} -\ \mathbf{u}_1\ - \\ \vdots \\ -\ \mathbf{u}_{n-1}\ - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{0,1} \\ \vdots \\ y_{0,n-1} \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{n}\begin{pmatrix} (\mathbf{u}_1, \mathbf{y}_0) \\ \vdots \\ (\mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{y}_0) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$\dot{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{0}$$

(lembre-se que X é uma matriz ortogonal: $X^{-1} = X^T$ devido a ortonormalidade dos auto–vetores com respeito ao produto interno (1.2.28)).

O problema de valor inicial acima possui uma única solução $\mathbf{z}(t) = (z_1(t), \ldots, z_{n-1}(t))$ cujas componentes

$$z_k(t) = z_{0,k}\,\cos\omega_k t\,, \qquad k = 1, \ldots, n-1\,.$$

A solução da equação (1.2.24) é portanto

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_{n-1} \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_{n-1}(t) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \cos\omega_k t \;\; (\mathbf{u}_k, \mathbf{y}_0)\; \mathbf{u}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \cos\omega_k t \;\, E_k \mathbf{y}_0
\end{aligned}$$

onde E_k é o projetor ortogonal no subespaço gerado pelo vetor $\mathbf{u}_k$. Em componentes,

$$\begin{aligned}
y_j(t) &= \sqrt{2} \sum_{k=1}^{n-1} (\mathbf{u}_k, \mathbf{y}_0) \sin kja \;\; \cos\omega_k t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n-1} (\mathbf{u}_k, \mathbf{y}_0) \left\{ \sin(kja - \omega_k t) + \sin(kja + \omega_k t) \right\}
\end{aligned}$$

O Limite do Continuo. A seguir faremos com que o número de graus de liberdade $n-1$ deste sistema, tenda a infinito. Tomando $n \to \infty$, o espaçamento entre as partículas $a = \pi/n \to 0$, o espaço Λ dos pontos de equilíbrio do sistema torna–se **denso** no intervalo $[0, \pi]$ da reta real e o produto interno (1.2.28) torna-se o produto

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, g(x)\, dx \tag{1.2.33}$$

entre duas funções f e g em $[0, \pi]$.

Afim de tornar precisa esta noção, vamos introduzir uma **isometria** i_n entre espaço vetorial $\mathbb{R}^{n-1}$ e o espaço $L_0^2(0, \pi)$ das funções degraus f de quadrado integravel em $(0, \pi)$ tais que $f(0) = f(\pi) = 0$:

$$\begin{gathered}
i_n : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow L_0^2(0, \pi) \\
(i_n\, \mathbf{u})\,(x) = \begin{cases} u_{[x/a]} & \text{se} \quad x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{se} \quad x = 0, \pi \end{cases}
\end{gathered} \tag{1.2.34}$$

onde $[z] \in \mathbb{Z}$ é a parte inteira do número $z \in \mathbb{R}$. O termo isometria é devido a seguinte propriedade: se $f = i_n\, \mathbf{u}$, então a norma de f coincide com a norma de $\mathbf{u}$

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle i_n\, \mathbf{u}, i_n\, \mathbf{u} \rangle = \langle i_n\, \mathbf{u}, i_n\, \mathbf{u} \rangle = \left(\mathbf{u}, i_n^\dagger i_n\, \mathbf{u} \right) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2$$

com o operador adjunto $i_n^\dagger : L_0^2(0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ dado por

$$\left(i_n^\dagger f \right)_j = n \int_{ja}^{(j+1)a} f(x)\, dx \tag{1.2.35}$$

Exercício 1.2.14 *Mostre que $i_n^\dagger$ é o operador adjunto a i_n verificando a relação*

$$\langle f, i_n\, \mathbf{u} \rangle = \left(i_n^\dagger f, \mathbf{u} \right)$$

para todo vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-1}$ e função $f \in L_0^2(0, \pi)$. Em seguida, mostre que $i_n^\dagger i_n$ é a matriz identidade.

Indicação: *Use as definições (1.2.34), (1.2.35), (1.2.28) e (1.2.33).*

Mostraremos a seguir que $K\, i_n\,(-\Delta) i_n^\dagger f$ converge, escolhendo $K = K(n)$ convenientemente, para o Laplaceano $-\pi^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ em $(0, \pi)$ com condições de Dirichlet na fronteira. Segue de (1.2.25)

$$K\; \left[(-\Delta) i_n^\dagger f \right]_j = K\; \left(\left(i_n^\dagger f \right)_j - \left(i_n^\dagger f \right)_{j-1} - \left(i_n^\dagger f \right)_{j+1} + \left(i_n^\dagger f \right)_j \right) \, .$$

Tomando $K = n^2$, temos

$$\begin{aligned}
n^2 \left(i_n\, (-\Delta) i_n^\dagger f \right)(x) &= \pi n \left(\frac{\left(i_n^\dagger f \right)_{[x/a]} - \left(i_n^\dagger f \right)_{[x/a]-1}}{\pi/n} - \frac{\left(i_n^\dagger f \right)_{[x/a]+1} - \left(i_n^\dagger f \right)_{[x/a]}}{\pi/n} \right) \\
&= \pi n \left(\frac{f\left([nx]/n\right) - f\left([nx]/n - a\right)}{a} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{f\left([nx]/n + a\right) - f\left([nx]/n\right)}{a} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{\pi^2}{a} \left(\frac{f(x) - f(x - a)}{a} - \frac{f(x + a) - f(x)}{a} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n} \right) \\
&= -\pi^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n} \right)
\end{aligned}$$

Note que os auto–valores, $\lambda_k = 2\,(1 - \cos ka) = 4 \sin^2 ka/2$ convergem, se multiplicados por n^2:

$$4n^2 \sin^2 k \frac{\pi}{2n} \longrightarrow \pi^2 k^2 \, ,$$

quando $n \to \infty$, para os auto–valores de $-\pi^2 \partial^2/\partial x^2$, com $k = 1, 2, \ldots$. Os respectivos auto–vetores $(i_n \mathbf{u}_k)\,(x) = \sqrt{2} \sin k[x/a]a$ convergem para os modos normais de vibração $u_k(x) = \sqrt{2} \sin kx$ de uma corda cujos extremos são fixos em 0 e π.

A equação diferencial ordinaria (1.2.24) no limite $n \to \infty$ torna–se a equação das ondas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

no domínio $t \geq 0$, $0 \leq x \leq \pi$, com $\nu = \pi$, condições de fronteira $f(t,0) = f(t,\pi) = 0$ e condições iniciais

$$f(0,x) = f_0(x) = \lim_{n\to\infty} (i_n \mathbf{u}_0)(x) = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{u}_0)_{[nx/\pi]}$$

e $f'(0,x) = 0$.

Este **problema de valores inicial e de fronteira** (PVIF) pode ser resolvido pelo método de Fourier de separação de variaveis, cuja solução é dada por

$$f(t,x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_k, f_0 \rangle \{\sin(k(x - vt)) + \sin(k(x + vt))\} \ .$$

1.2.3 Equação Linear Não–Homogênea

Consideremos agora o problema de valor inicial em $\mathbb{R}^n$ para a equação não homogênea

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{f} \tag{1.2.36}$$

com $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, A uma matriz $n \times n$ constante em t e $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua.

Proposição 1.2.15 *A solução da equação (1.2.36) é dada pela fórmula de variação das constantes*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t) \tag{1.2.37}$$

onde

$$\mathbf{x}_h(t) = \exp\{tA\}\,\mathbf{x}_0$$

é a solução da equação homogênea ((1.2.36) com $\mathbf{f} = \mathbf{0}$) e $\mathbf{x}_p$ é a solução particular

$$\mathbf{x}_p(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} \mathbf{f}(s)\, ds \ . \tag{1.2.38}$$

Prova. Verifica-se que (1.2.38) satisfaz (1.2.36) usando o teorema fundamental do cálculo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_p}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t e^{(t-s)A} \mathbf{f}(s)\, ds \\ &= e^{(t-s)A}\, \mathbf{f}(s)\big|_{s=t} + \int_0^t A e^{(t-s)A} \mathbf{f}(s)\, ds \\ &= \mathbf{f}(t) + A\mathbf{x}_p(t) \end{aligned}$$

de onde segue

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d(\mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p)}{dt} = A\mathbf{x}_h + \mathbf{f} + A\mathbf{x}_p = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$$

Como $\mathbf{f}$ e e^{tA}são contínuas temos que $\mathbf{x}_p(0) = 0$ e

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_h(0) = \mathbf{x}_0 \ .$$

Resta–nos mostrar que a solução do problema de valor inicial (1.2.36) é única. Vamos assumir que $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ sejam duas soluções distintas do problema (1.2.36). Então $\mathbf{y} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ satisfaz a equação

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{x}_2 + \mathbf{f} - (A\mathbf{x}_1 + \mathbf{f}) = A\mathbf{y}$$

com $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_2(0) - \mathbf{x}_1(0) = \mathbf{0}$. Pelo Teorema 1.2.1, a única solução é $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$ contradizendo a hipótese de $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ serem distintas.

□

A solução (1.2.38) pode ser deduzida. Inicialmente seja A uma matriz diagonalizavel. Neste caso o sistema de equações (1.2.36) pode ser desacoplado, as equações resolvidas individualmente e reacopladas novamente. Sendo este procedimento empregado frequentemente nas secões anteriores, abreviaremos seus passos.

Se $X = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n]$ é a matriz de auto–vetores, $D = \text{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\mathbf{z} = X^{-1}\mathbf{x}$ e $\mathbf{g} = X^{-1}\mathbf{f}$, então (1.2.36) reduz–se a forma diagonal

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = D\mathbf{z} + \mathbf{g} \tag{1.2.39}$$

que pode ser resolvida pela transformada de Laplace (veja seção 4-3, pg. 107 de "*Mathematical Methods of Physics*", Mathews e Walker):

$$\mathcal{L}[z](s) := \int_0^\infty e^{-st} z(t)\, dt \ . \tag{1.2.40}$$

Note que esta transformação satisfaz a propriedade de linearidade $\mathcal{L}[\alpha w + \beta z] = \alpha\mathcal{L}[w] + \beta\mathcal{L}[z]$.

Aplicando (1.2.40) em (1.2.39), obtemos para cada componente a equação algébrica

$$s\,\mathcal{L}[z_j] = \lambda_j\,\mathcal{L}[z_j] + \mathcal{L}[g_j] \tag{1.2.41}$$

cuja solução

$$\mathcal{L}[z_j] = \frac{1}{s - \lambda_j}\,\mathcal{L}[g_j]$$

leva à solução de (1.2.39) tomando–se a transformada de Laplace inversa:

$$z_j = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\lambda_j}\mathcal{L}\left[g_j\right]\right] .$$

Para se efetuar esta operação, definimos o **produto de convolução** entre duas funções $v, w : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$(v * w)(t) := \int_0^t v(t-s)\, w(s)\, ds$$

e enunciemos o seguinte

Teorema 1.2.16 (Teorema da convolução) *Se $V = \mathcal{L}[v]$ e $W = \mathcal{L}[w]$ forem as transformadas de Laplace das funções $v, w : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, então*

$$\mathcal{L}[v * w](s) = V(s)\, W(s) .$$

Concluímos do teorema da convolução,

$$z_j(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\lambda_j}\mathcal{L}\left[g_j\right]\right](t) = \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\lambda_j}\right] * g_j\right)(t) = \int_0^t e^{(t-s)\lambda_j}\, g_j(s)\, ds . \tag{1.2.42}$$

Na dedução deste resultado fizemos uso das seguintes igualdades:

1. A transformada de Laplace de função exponencial:
$$\mathcal{L}\left[e^{\lambda_j t}\right](s) = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{\lambda_j t} dt = \frac{1}{s-\lambda_j} \tag{1.2.43}$$
se $s > \lambda_j$;
2. Segue da integração por partes e da condição inicial $\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$,
$$\mathcal{L}\left[\frac{dz_j}{dt}\right](s) = \int_0^\infty e^{-st}\, \frac{dz_j}{dt}(t)\, dt = s\, \mathcal{L}\left[z_j\right](s) - z_j(0) = s\, \mathcal{L}\left[z_j\right](s) .$$

É um simples exercício mostrar que $\mathbf{x}(t) = X\mathbf{z}(t)$, onde $\mathbf{z}(t)$ é o vetor com componentes (1.2.42), é a solu ção particular $\mathbf{x}_p(t)$ dada por (1.2.38):

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \int_0^t X e^{(t-s)D}\, \mathbf{g}(s)\, ds \\
&= \int_0^t X e^{(t-s)D}\, X^{-1}\mathbf{f}(s)\, ds \\
&= \int_0^t e^{(t-s)A}\, \mathbf{f}(s)\, ds .
\end{aligned}$$

□

A solução $\mathbf{x}_p(t)$ pode ser deduzida mesmo quando A não for diagonalizavel. Na subseções anteriores vimos que a exponencial de uma matriz se comportava de maneira analoga a função exponencial usual. Veremos a seguir que (1.2.43) pode ser extendida para matrizes

$$\mathcal{L}\left[e^{tA}\right](s) = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{tA} dt = \frac{1}{sI - A}$$

se $s > \alpha = \max_\lambda \sigma(A)$.

Aplicando a matriz $sI - A$ à $\mathcal{L}\left[e^{tA}\right]$ e usando integração por partes,

$$\begin{aligned}
(sI - A)\int_0^\infty e^{-st}\, e^{tA} dt &= \int_0^\infty s\, e^{-st}\, e^{tA} dt - \int_0^\infty e^{-st}\, \frac{de^{tA}}{dt}\, dt \\
&= -\, e^{-st}\, e^{tA}\Big|_{t=0}^{\infty} = I
\end{aligned}$$

provando a afirmação. A dedução da solução $\mathbf{x}_p$ para matrizes não diagonalizaveis segue os mesmos passos da dedução anterior substituindo λ_j pela matriz A.

Exercício 1.2.17 *Demonstre a fórmula de variação das constantes usando transformada de Laplace diretamente na equação matricial (1.2.36).*

Extendendo o domínio de $\mathbf{f}$ para toda reta tomando $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$ se $t < 0$, a solução particular (1.2.38) pode ser escrita como

$$\mathbf{x}_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\, \mathbf{f}(s)\, ds \tag{1.2.44}$$

onde $G(t) = \theta(t)\, \exp\{t\, A\}$ com

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t \geq 0 , \\ 0 & \text{se} \quad t < 0 , \end{cases}$$

é denominada **matriz de Green** ou **matriz resposta**.

A matriz $G(t)$ é a resposta do sistema linear (1.2.36) por uma perturbação instantanea δ em $t = 0$ com as seguintes características:

1. $\delta(t) = 0$ para todo $t \neq 0$,

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1.$

A função degrau $\theta(t)$ e a função delta de Dirac δ, são funções no sentido generalizado, conhecidas como **distribuições**. Na próxima seção daremos a definição precisa destas funções generalizadas que, na realidade são funcionais lineares. Antes disso, derivaremos a equação para a matriz de Green G . Usaremos a seguinte definição da função delta de Dirac:

Definição 1.2.18 *δ é o funcional linear*

$$\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(0)$$

que associa a cada função contínua φ o número real $\varphi(0)$.

Pela regra de Leibnitz, a derivada de G com respeito a t é

$$\frac{dG}{dt}(t) = \theta(t)\, A\, e^{tA} + \theta'(t)\, e^{tA}\,. \tag{1.2.45}$$

Note que $\theta'(t) = 0$ para todo $t \neq 0$. Seja $\varphi(t)$ uma função contínua e diferenciavel. Integrando (1.2.45), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \frac{d}{dt} G(t)\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\ AG(t)\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\theta'(t)\, e^{tA}\, dt \qquad (1.2.46) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\ AG(t)\, dt + \varphi(0) I. \end{aligned}$$

Para o segundo termo desta igualdade observe que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t)\, \theta'(t)\, dt &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Psi(t)\, \theta'(t)\, dt \\ &= \Psi(t)\, \theta(t)|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Psi'(t)\, \theta(t)\, dt \\ &= \Psi(\varepsilon) - \int_{0}^{\varepsilon} \Psi'(t)\, dt = \varphi(0) \end{aligned}$$

pois $\Psi(t) = \varphi(t)\, e^{tA}$ é contínua e diferenciavel em t.

Como φ é arbitrário, (1.2.46) e a definição 1.2.18 implicam em

$$\frac{dG}{dt} = AG + I\, \delta(t)\,.$$

Exemplo 1.2.19 *A equação não–homogênea de segunda ordem*

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = f(t)\,, \qquad t \geq 0 \tag{1.2.47}$$

pode ser posta na forma $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$ se $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ for o vetor com componentes $x_1 = x_1(t) = y(t)$, $x_2 = x_2(t) = \dot{y}(t)$; A for a seguinte matriz 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix};$$

e $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t) = (0, f(t))$ (veja (1.2.11) e equações que a seguem). Uma solução particular é dada por (1.2.44) onde a matriz de Green $G(t) = \theta(t) e^{tA}$ pode ser calculada resolvendo o problema de auto–valores de A:

$$A = XDX^{-1}$$

onde $D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ e $X = [\mathbf{v}_1\, \mathbf{v}_2]$ é a matriz dos auto–vetores de A. Verifica–se que $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$ e $\mathbf{v}_1 = (1, i\omega)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -i\omega)$ (veja Exercício 1.2.9),

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X^{-1} = \frac{1}{2i\omega} \begin{pmatrix} i\omega & 1 \\ i\omega & -1 \end{pmatrix}.$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \exp\{tA\} &= X \exp\{tD\}\, X^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\omega t & (1/\omega)\sin\omega t \\ -\omega \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Uma solução particular de (1.2.47) é dada pela primeira componente $x_1(t)$ do vetor $\mathbf{x}(t) = \int_0^t \exp\{(t-s)\, A\}\, \mathbf{f}(s)\, ds$:

$$y(t) = \int_0^t \frac{\sin\omega\,(t-s)}{\omega}\, f(s)\, ds\,. \tag{1.2.48}$$

Exemplo 1.2.20 (Método Alternativo) *Uma solução particular de (1.2.47) pode ser obtida da seguinte forma. A função de Green satisfaz*

$$\frac{d^2 G}{dt^2} + \omega^2 G = \delta(t)\,, \qquad t \geq 0 \tag{1.2.49}$$

(note que aqui G é de fato uma função), que é equivalente a equação homogênea

$$\frac{d^2 G}{dt^2} + \omega^2 G = 0\,, \qquad t > 0$$

com as seguintes condições iniciais

$$G(0) = 0\,, \qquad \lim_{t\searrow 0} \frac{dG}{dt}(t) = 1.$$

Para ver isto, considere a integral de (1.2.49) no intervalo $[-\varepsilon, t]$ *para algum* $\varepsilon > 0$*:*

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{t} \frac{d^2G}{ds^2}(s)\, ds + \omega^2 \int_{-\varepsilon}^{t} G(s)\, ds &= \int_{-\varepsilon}^{t} \delta(s)\, ds \\ \frac{dG}{dt}(t) + \omega^2 \int_{-\varepsilon}^{t} G(s)\, ds &= 1 \end{aligned} \qquad (1.2.50)$$

pois $G(t) = 0$ *para* $t < 0$*. Integrando uma vez mais (1.2.50), obtemos*

$$G(t) + \omega^2 \int_{-\varepsilon}^{t} \int_{-\varepsilon}^{s} G(s')\, ds'\, ds = t - \varepsilon\,. \qquad (1.2.51)$$

As condições iniciais seguem de (1.2.51) e (1.2.50) tomando t *e* ε *para zero.*

A solução da equação homogênea compatível com estas condições iniciais é

$$G(t) = \theta(t)\, \frac{\sin \omega t}{\omega}\,.$$

Novamente a solução (1.2.48) é obtida tomando a convolução de G *com* f*:* $y(t) = (G * f)(t)$*.*

Exemplo 1.2.21 (Equação de Helmholtz) *Considere agora a equação para solução estacionária de uma corda vibrante*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = f(x)\,, \qquad 0 \le x \le \pi\,, \qquad (1.2.52)$$

$k \notin \mathbb{Z}$ *e sujeita a condição* $y(0) = y(\pi) = 0$*. Uma solução particular é da forma*

$$y(x) = \int_0^{\pi} G(x, x')\, f(x')\, dx \qquad (1.2.53)$$

onde a função de Green $G(x, x')$ *satisfaz a equacão* $G'' + k^2 G = \delta(x - x')$*. Utilizando o método do exemplo anterior, a função de Green satisfaz o seguinte conjunto de equações*

$$\frac{d^2G}{dx^2} + k^2 G = 0\,, \qquad 0 \le x < x'\,, \qquad (1.2.54)$$

com $G(0, x') = 0$*;*

$$\frac{d^2G}{dx^2} + k^2 G = 0\,, \qquad x' < x \le \pi\,, \qquad (1.2.55)$$

com $G(\pi, x') = 0$*;* $G(x, x')$ *é contínua em* $x = x'$ *e*

$$\lim_{x\searrow x'} \frac{dG}{dx}(x, x') - \lim_{x\nearrow x'} \frac{dG}{dx}(x, x') = 1\,.$$

A solução de (1.2.54) e (1.2.55) é

$$G(x, x') = \begin{cases} c(x') \sin kx & \text{se} \quad 0 \le x < x' \\ d(x') \sin k\,(x - \pi) & \text{se} \quad x' < x \le \pi\,. \end{cases}$$

onde c *e* d *são funções independentes de* x *determinadas pelas demais condições:*

$$c \sin kx' = d \sin k\,(x' - \pi)$$

e

$$k\,(d \cos k\,(x' - \pi) - c \cos kx') = 1\,.$$

Portanto,

$$c = \frac{\sin k\,(x' - \pi)}{k \sin k\pi}\,, \qquad d = \frac{\sin kx'}{k \sin k\pi}$$

e

$$G(x, x') = \begin{cases} \dfrac{\sin k\,(x' - \pi) \sin kx}{k \sin k\pi} & \text{se} \quad 0 \le x < x' \\[2ex] \dfrac{\sin kx' \, \sin k\,(x - \pi)}{k \sin k\pi} & \text{se} \quad x' < x \le \pi\,. \end{cases} \qquad (1.2.56)$$

A função de Green (1.2.56) pode ainda ser escrita como

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \frac{\cos k\,(x + x' - \pi)}{2k \sin k\pi} - \frac{\cos k\,(|x - x'| - \pi)}{2k \sin k\pi} \\ &= G_R(x, x') + G_S(x, x') \end{aligned} \qquad (1.2.57)$$

onde

$$G_R(x, x') = \frac{1}{2k} \sin k\,(x + x') - \frac{\cot k\pi}{k} \sin kx\, \sin kx'$$

é a parte regular da função de Green e

$$G_S(x, x') = -\frac{\sin k\,|x - x'|}{2k}$$

sua parte singular. Note que esta última depende apenas da variavel diferença em módulo: $G_S(x, x') = G_S(x - x') = G_S(|x - x'|)$*.*

Exercício 1.2.22 *Demonstre (1.2.57) e verifique que (1.2.53) satisfaz a equação diferencial (1.2.52) juntamente com sua condição de fronteira.*

1.3 Distribuições

Vimos na Seção 1.1 a definição e alguns resultados para funcionais lineares em espaços vetoriais isomorfos a $\mathbb{R}^n$. Aqui estenderemos esta noção para o espaço vetorial $\mathcal{D}$ das funções suaves de suporte compacto.

Definição 1.3.23 *O espaço vetorial das* ***funções testes*** $\mathcal{D}$ *é formado pelo conjunto das funções* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tais que*

1. $\dfrac{d^n\varphi}{dx^n}(x_0)$ *existe para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $x_0 \in \mathbb{R}$,
2. φ *se anula fora de um intervalo finito* I*, denominado suporte de* φ.

Um funcional linear T em $\mathcal{D}$ associa a cada função φ um número real $T(\varphi)$ tal que a relação

$$T(\alpha_1\,\varphi_1 + \alpha_2\,\varphi_2) = \alpha_1\,T(\varphi_1) + \alpha_2\,T(\varphi_2)$$

é satisfeita para todo $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$.

Definição 1.3.24 *Um mapeamento* T *é uma* ***distribuição*** *se este for um funcional linear* ***continuo*** *sobre* $\mathcal{D}$.

A noção de continuidade para um funcional linear é a seguinte: T é contínuo se

$$T(\varphi_n) \longrightarrow 0\,,$$

quando $n \to \infty$, para toda sequência de funções testes $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tais que φ_n e todas as suas derivadas tendem uniformemente para a função nula quando $n \to \infty$.

Como vimos, o teorema de Riesz garante que para todo funcional linear L em $\mathbb{R}^n$ existe um único vetor $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$ tal que L é dado pelo produto interno

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{l}, \mathbf{x})\,.$$

Um resultado análogo em teoria das distribuições permite **representar** um funcional linear T em $\mathcal{D}$ por uma função f através da integral

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx\,. \tag{1.3.58}$$

A integral (1.3.58) define o **dual** $\mathcal{D}'$ ao espaço das funções testes $\mathcal{D}$. $\mathcal{D}'$ é o espaço de todos funcionais lineares contínuos T em $\mathcal{D}$ que são aqui identificados pelas "funções" f

's. Assim, tanto as funções propriamente ditas como as "funções" singulares (delta de Dirac δ ou derivadas desta), pertencem a $\mathcal{D}'$.

Vimos que δ é o funcional que associa a cada $\varphi \in \mathcal{D}$ o valor $\varphi(0)$. Denotamos por δ_x a função delta transladada de $x \in \mathbb{R}$:

$$\delta_x(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\,\varphi(y)\,dy = \varphi(x)\,.$$

δ_x é portanto o funcional que associa a cada $\varphi \in \mathcal{D}$ o valor $\varphi(x)$.

Deste ponto de vista, a função degrau θ, é o funcional linear que atribui a cada $\varphi \in \mathcal{D}$ o número

$$\theta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(y)\,\varphi(y)\,dy = \int_0^{\infty} \varphi(y)\,dy\,.$$

A derivada de uma distribuição também é uma distribuição. Para exemplificar esta afirmação, verifiquemos que a relação

$$\theta' = \delta \tag{1.3.59}$$

é válida em distribuição. Integrando por partes

$$\begin{aligned} \theta'(\varphi) &= -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(y)\,\varphi'(y)\,dy \\ &= -\int_0^{\infty} \varphi'(y)\,dy \\ &= -\,\varphi(y)\big|_0^{\infty} = \varphi(0)\,. \end{aligned} \tag{1.3.60}$$

□

Em (1.3.60) usamos a propriedade *2.* da definição das funções em $\mathcal{D}$. É comum denotar a relação acima na forma puntual: $\theta'(x) = \delta(x)$, lembrando sempre que nesta expressão estamos identificando o funcional pela "função" que o define.

A relação (1.3.59) sugere a seguinte definição:

Definição 1.3.25 *A derivada* T' *de uma distribuição é definida pela equação*

$$T'(\varphi) = -T(\varphi')$$

válida para todo $\varphi \in \mathcal{D}$.

Exemplo 1.3.26 *A distribuição módulo de x é o funcional linear*

$$\begin{aligned} |x|\,(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} |y|\;\varphi(y)\,dy \\ &= \int_{0}^{\infty} y\,\varphi(y)\,dy + \int_{-\infty}^{0} y\,\varphi(y)\,dy \\ &= \int_{0}^{\infty} y\,\varphi(y)\,dy - \int_{0}^{\infty} y\,\varphi(-y)\,dy \end{aligned}$$

e a derivada de $|x|$ é a função sinal

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Usando integração por partes e a definição de derivada:

$$\begin{aligned} |x|'\,(\varphi) &= -\,|x|\,(\varphi') \\ &= -\int_{0}^{\infty} y\,\varphi'(y)\,dy + \int_{0}^{\infty} y\,\varphi'(-y)\,dy \\ &= \int_{0}^{\infty} \varphi(y)\,dy + \int_{0}^{\infty} \varphi(-y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{|y|}\,\varphi(y)\,dy \end{aligned}$$

de onde se conclui que, embora a derivada da função $|x|$ em $x = 0$ não esteja definida, como distribuição $|x|'$ é a "função" sinal

$$\sigma(x) := \frac{x}{|x|} = \theta(x) - \theta(-x).$$

1.3.1 Problema de Cauchy

Consideremos o problema de valor inicial dado pela equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \upsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \qquad t > 0,\ -\infty < x < \infty\,, \tag{1.3.61}$$

sujeita as condições iniciais

$$u(0,x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x)\,. \tag{1.3.62}$$

Este problema conhecido como problema de Cauchy, tem solução geral

$$u(t,x) = f(x - \upsilon t) + g(x + \upsilon t) \tag{1.3.63}$$

onde f e g são funções determinadas pelas equações (1.3.62):

$$\begin{aligned} u(0,x) &= f(x) + g(x) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= \upsilon\,(f'(x) + g'(x)) = \psi(x) \end{aligned} \tag{1.3.64}$$

Resolvendo (1.3.64), obtemos

$$f(x) = -g(x) \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1}{2\upsilon}\int_{-\infty}^{x} \psi(y)\,dy\,,$$

que resulta na formula de D'Alembert

$$\begin{aligned} u(t,x) &= -\frac{1}{2\upsilon}\int_{-\infty}^{x-\upsilon t} \psi(y)\,dy + \frac{1}{2\upsilon}\int_{-\infty}^{x+\upsilon t} \psi(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2\upsilon}\int_{x-\upsilon t}^{x+\upsilon t} \psi(y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(t, x-y)\,\psi(y)\,dy \equiv (K(t,\,\cdot\,) * \psi)\,(x) \end{aligned} \tag{1.3.65}$$

onde K é a função de green do problema

$$K(t,x) = \frac{1}{2\upsilon}\theta(\upsilon t + x)\,\theta(\upsilon t - x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\upsilon} & \text{se} \quad |x| \le \upsilon t \\ 0 & \text{se} \quad |x| > \upsilon t \end{cases} . \tag{1.3.66}$$

Como distribuição, K satisfaz a equação das ondas (1.3.61) sujeita as condições iniciais

$$K(0,x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial K}{\partial t}(0,x) = \delta(x)\,. \tag{1.3.67}$$

Note que a segunda equação de (1.3.69) é não–homogênea. Verificamos (1.3.67) derivando (1.3.66):

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t}(t,x) &= \frac{1}{2}\left[\delta(\upsilon t + x)\,\theta(\upsilon t - x) + \theta(\upsilon t + x)\,\delta(\upsilon t - x)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\delta(\upsilon t + x)\; + \delta(\upsilon t - x)\right] \end{aligned} \tag{1.3.68}$$

e tomando $t = 0$.

Se as condições iniciais à (1.3.61) forem

$$u(0,x)=\varphi(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}(0,\mathrm{x})=0\,, \tag{1.3.69}$$

de (1.3.63) segue a seguinte formula de D' Alembert

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x-\upsilon t)+\varphi(x+\upsilon t)\right)$$

resultando, pela equação (1.3.68), em

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K}{\partial t}(t,x-y)\,\varphi(y)\,dy \equiv \left(\frac{\partial K}{\partial t}(t,\,\cdot\,)*\varphi\right)(x)\,. \tag{1.3.70}$$

As equações (1.3.65) e (1.3.70) expressam o seguinte fato:

Proposição 1.3.27 (Regra de Stokes) *A função resposta do problema de Cauchy (1.3.61) sujeito à condição inicial não–homogênea nas posições, é a derivada temporal da função resposta do problema de Cauchy (1.3.61) sujeito à condição inicial não–homogênea nas velocidades.*

Como última aplicação, considere a equação das ondas não–homogênea:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\upsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)\,, \qquad t>0,\ -\infty<x<\infty \tag{1.3.71}$$

sujeita às condições iniciais

$$u(0,x)=\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0\,.$$

O método da função de Green estabelece como solução deste problema a seguinte convolução (no tempo e espaço)

$$u(t,x)=(K*f)\,(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K(t-\tau,x-y)\,f(\tau,y)\,dx\,d\tau\,. \tag{1.3.72}$$

Denotando por $\Box$ o operador D' Alembertiano:

$$\Box=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\upsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,,$$

temos que

$$\Box K(t,x)=4\upsilon^2\,\delta(\upsilon t+x)\,\delta(\upsilon t-x)\,. \tag{1.3.73}$$

Fazendo a mudança de variaveis

$$\begin{aligned} \xi &= \upsilon t+x & \qquad \eta &= \upsilon t-x \\ \xi' &= \upsilon\tau+y & \qquad \eta' &= \upsilon\tau-y \end{aligned}$$

e usando

$$d\eta'\,d\xi'=\frac{\partial(\eta',\xi')}{\partial\,(\tau,y)}d\tau\,dy=2\upsilon\,d\tau\,dy$$

obtem-se de (1.3.72) e (1.3.73) a equação das ondas não–homogênia

$$\begin{aligned} \Box u(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi-\xi')\,\delta(\eta-\eta')\;f\left((\xi'+\eta')/(2\upsilon),(\xi'-\eta')/2\right)\,dx\,d\tau \\ &= f\left((\xi+\eta)/(2\upsilon),(\xi-\eta)/2\right)=f(t,x)\,. \end{aligned}$$

Capítulo 2

O problema de Sturm–Liouville

O problema de valor inicial para sistemas de equações diferenciais ordinárias consiste em determinar o estado do sistema no instante t dado o estado no instante $t = t_0$. Neste tipo de problema apenas um ponto da reta real contém a informação necessaria para determinar univocamenete a solução. Neste capítulo trataremos principalmente de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem sujeita a condições de fronteira envolvendo dois pontos distintos, tipicamente da forma

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u - \lambda\rho(x)u = f(x)\,, \qquad a < x < b \tag{2.0.1}$$

sujeita as condições de fronteira homogêneas

$$\begin{aligned} \alpha u(a) + \beta\frac{du}{dx}(a) &= 0 \\ \gamma u(b) + \delta\frac{du}{dx}(b) &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.0.2}$$

Aqui, $p(x)$ é uma função diferenciavel e $q(x)$, $\rho(x)$ e $f(x)$ são funções contínuas (p, q e ρ são positivas) definidas no domínio $a \leq x \leq b$ e α, β, γ e δ são constantes.

Denominamos de **problema de Sturm–Liouville** o conjunto de equações (2.0.1) e (2.0.2).

No Capítulo 3 veremos que este tipo de problema surge como resultado da aplicação do método de separação de variaveis à equações a derivadas parciais.

Exemplo 2.0.28 *Considere a condução de calor em uma barra não–homogênea de condutividade térmica $K(x)$, densidade ρ e calor especí fico C constantes. A barra tem comprimento unitário e se encontra isolada com suas extremidades mantidas à*

temperatura $T = 0$. Seja $u(t, x)$ a temperatura no instante t do ponto x da barra. Então u satisfaz a o seguinte conjunto de equações

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

para todo $t > 0$ e $0 < x < 1$, onde κ depende de K, ρ e C, com

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0$$

e temperatura inicial $u(0, x) = f(x)$ dada.

Escrevendo $u(t, x) = T(t)\,X(x)$, a parte espacial deste problema é reduzida ao seguinte problema de Sturm–Liouville

$$-\left(\kappa\, X'\right)' - \mu X = 0$$

onde μ é uma constante de separação de variavel, com

$$X(0) = X(1) = 0.$$

2.1 O Problema de Auto–Valores

Nas subseções a seguir mostraremos que o problema de Sturm–Liouville homogêneo ($f = 0$) é um problema de auto–valores para operadores diferenciais auto–adjuntos.

2.1.1 Equação Diferencial Adjunta

Considere um sistema de equações lineares de primeira ordem

$$\frac{d\Phi}{dx} = A\Phi \tag{2.1.3}$$

onde $\Phi(x) = (\phi_1(x), \ldots \phi_n(x)) \in \mathbb{R}^n$ e $A = A(x)$ uma matriz $n \times n$ cujas entradas são funções definidas no domínio $[a, b]$.

Definição 2.1.29 *O sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^n$*

$$\frac{d\Psi}{dx} = B\Psi \tag{2.1.4}$$

*é **adjunto** ao sistema (2.1.3) se a matriz $B = B(x)$ for igual a menos a matriz transposta de A ($B = -A^T$).*

Note que, se Φ e Ψ forem soluções de (2.1.3) e (2.1.4), respectivamente, então o produto interno $(\Psi,\Phi)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(x)\,\phi_i(x)$ de ambas é independente de x:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\Psi,\Phi) &= \left(\frac{d\Psi}{dx},\Phi\right)+\left(\Psi,\frac{d\Phi}{dx}\right)\\ &= (B\Psi,\Phi)+(\Psi,A\Phi)\\ &= (B\Psi,\Phi)+\left(A^T\Psi,\Phi\right)=0\,.\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Considere as matrizes fundamentais $Y=[\Phi_1\cdots\Phi_n]$ e $Z=[\Psi_1\cdots\Psi_n]$ formadas pelos conjuntos linearmente independente $\{\Phi_j\}_{j=1}^n$ e $\{\Psi_j\}_{j=1}^n$, de soluções de (2.1.3) e (2.1.4), respectivamente. Claramente, Y e Z são matrizes inversíveis e satisfazem as equações

$$\frac{dY}{dx}=AY \tag{2.1.6}$$

e

$$\frac{dZ}{dx}=-A^TZ\,. \tag{2.1.7}$$

Note ainda que $(Y^{-1})^T$ satisfaz a equação (2.1.7), em vista do fato

$$\frac{d}{dx}Y^{-1}=-Y^{-1}\frac{dY}{dx}Y^{-1}=-Y^{-1}A\,.$$

Proposição 2.1.30 *Se Y é uma matriz fundamental de (2.1.3), então Z é uma matrix fundamental da equação adjunta (2.1.4) se e somente se Z for tal que*

$$Z^TY=C \tag{2.1.8}$$

para alguma matriz C constante com $\det C\neq 0$.

Prova. Se Z for uma matriz fundamental de (2.1.4) então Z^TY é uma matriz com elementos (Ψ_i,Φ_j):

$$Z^TY=\begin{pmatrix}(\Psi_1,\Phi_1) & \cdots & (\Psi_1,\Phi_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (\Psi_n,\Phi_1) & \cdots & (\Psi_n,\Phi_n)\end{pmatrix}. \tag{2.1.9}$$

A proposição é consequência dos seguintes fatos:

1. De (2.1.8), segue
$$\frac{d}{dx}Z^TY=0$$

que implica, em vista de (2.1.9),
$$\frac{d}{dx}(\Psi_i,\Phi_j)=0$$
para todo $i,\, j\in\{1,\dots,n\}$ que por sua vez implica a proposição devido a (2.1.5).

2. Como $(Y^{-1})^T$ é uma matriz fundamental de (2.1.4), segue que $Z=(Y^{-1})^T\,C^T$ é também uma matrix fundamental do mesmo sistema (note que $\det C^T=\det C\neq 0$) implicando em (2.1.8).

□

Definição 2.1.31 *Um sistema de equações (2.1.3) é denominado* ***auto–adjunto*** *se este for igual ao sistema de equações adjunto, isto é, $A=-A^T$.*

2.1.2 Equação Diferencial Auto–Adjunta

Iremos a partir daqui nos restringir a sistemas de equações em $\mathbb{R}^2$. Mas especificamente, àqueles sistemas que dão origem a equações diferenciais ordinárias de segunda ordem.

Considere o sistema de equações (2.1.3) com

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a_2 & -a_1\end{pmatrix}$$

uma matriz tal que $a_1=a_1(x)$ é uma função diferenciável e $a_2=a_2(x)$ uma função contínua em $[a,b]$. Se $\Phi(x)=(y(x),y'(x))$, o sistema é equivalente a equação

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)=0 \tag{2.1.10}$$

(recorde as equações que seguem a partir de (1.1.4)).

Denominamos **equação adjunta** à (2.1.10) a equação obtida a partir do sistema adjunto (2.1.4) com

$$B=-A^T=\begin{pmatrix}0 & a_2\\ -1 & a_1\end{pmatrix}$$

dado por

$$\begin{aligned}\psi_1' &= a_2\,\psi_2\\ \psi_2' &= -\psi_1+a_1\,\psi_2\,.\end{aligned}$$

Substituindo a primeira destas equações na derivada da segunda e escrevendo $r=\psi_2$, temos

$$r''-(a_1\,r)'+a_2\,r=0\,. \tag{2.1.11}$$

Afim de tratar as equações de 2a. ordem em sua forma mais geral, é conveniente introduzir uma nova função $A_0(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$, e definir $A_i(x) = a_i(x)\, A_0(x)$, $i = 1,2$.

Multiplicando a equação (2.1.10) por A_0, temos

$$A_0(x)\, y'' + A_1(x)\, y' + A_2(x)\, y = 0 \tag{2.1.12}$$

cuja equação adjunta é obtida a partir da substituição $A_0(x)\, w(x) = r(x)$ em (2.1.11):

$$(A_0(x)\, w)'' - (A_1(x)\, w)' + A_2(x)\, w = 0\,. \tag{2.1.13}$$

As equações (2.1.12) e (2.1.13) definem operadores diferenciais lineares L e seu adjunto $L^\dagger$ dados por

$$L := A_0\, D^2 + A_1\, D + A_2 \tag{2.1.14}$$

e

$$L^\dagger := D^2 A_0 - D\, A_1 + A_2\,, \tag{2.1.15}$$

respectivamente, que atuam sobre o espaço vetorial $\mathcal{C}^2\,[a,b]$ (ou simplesmente $\mathcal{C}^2$) de funções $u : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ duas vezes diferenciaveis, com produto interno

$$(u,v) = \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx\,.$$

Estamos denotando por D o operador diferencial:

$$Du = \frac{du}{dx} = u'$$

e por A_i, o operador de multiplicação pela função $A_i(x)$:

$$(A_i u)\,(x) = A_i(x)\, u(x)$$

(Note que a ordem destes operadores em (2.1.14) e (2.1.15) é relevante pois D e A_i não comutam).

Definição 2.1.32 *O operador diferencial de 2a. ordem L é dito ser **formalmente auto–adjunto** se $L = L^\dagger$.*

Observação 2.1.33 *A definição é formal pois um operador T linear sobre um espaço vetorial $\mathcal{E}$ é dito ser auto–adjunto se a relação $(\mathbf{x}, T\mathbf{y}) = (T\mathbf{x}, \mathbf{y})$ for válida para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$. Veremos a seguir que a relação $(u, Lv) = (Lu, v)$ não é satisfeita para todo $u, v \in \mathcal{C}^2\,[a,b]$ (mesmo se $L = L^\dagger$) mas é satisfeita para o subespaço das funções $u \in \mathcal{C}^2\,[a,b]$ que se verificam as condições de fronteira (2.0.2).*

O resultado a seguir é conhecido como identidade de Lagrange.

Proposição 2.1.34

$$(u, L\,v) - \left(L^\dagger u, v\right) = F(b) - F(a) \tag{2.1.16}$$

onde

$$F(x) = u(x)\, A_0(x)\, v'(x) - (A_0(x)\, u(x))'\, v(x) + u(x)\, A_1(x)\, v(x)$$

Prova. Explicitamente,

$$\begin{aligned}
(u, L\,v) &= \int_a^b u(x)\,\left[A_0 v'' + A_1 v' + A_2 v\right](x)\, dx \\
&= \int_a^b \left[(uA_0v')' - (uA_0)'\, v' + (uA_1 v)' - (uA_1)'\, v + uA_2 v\right](x)\, dx \\
&= \int_a^b \left[(uA_0v') - (uA_0)'\, v + uA_1 v\right]'(x)\, dx \\
&\qquad + \int_a^b \left[(uA_0)'' - (uA_1)' + uA_2\right](x)\, v(x)\, dx \\
&= \int_a^b F'(x)\, dx + \left(L^\dagger u,\, v\right)\,.
\end{aligned}$$

A proposição segue do Teorema Fundamental do Cálculo.

□

Teorema 2.1.35 *Um operador diferencial L dado por (2.1.14) é formalmente auto–adjunto se e somente se existir funções $p = p(x)$ e $q = q(x)$, p diferenciavel, tais que*

$$L = -D\,(pD) + q \tag{2.1.17}$$

Prova. Mostremos que $Lu = L^\dagger u$ é válida para todo $u \in \mathcal{C}^2$:

$$A_0 u'' + A_1 u' + A_2 u = (A_0 u)'' - (A_1 u)' + A_2 u$$

implica

$$A_1 u' = A_0'' u + 2A_0' u' - (A_1 u)'$$

ou, de forma equivalente,

$$2\,(A_1 - A_0')\, u' = (A_0'' - A_1')\, u$$

que é satisfeita somente se $A_1 = A_0'$ pois u e u' não podem se anular simultaneamente para algum $x \in [a,b]$. Obtemos (2.1.17) tomando $A_0(x) = p(x)$, $A_1(x) = p'(x)$ e $A_2(x) = q(x)$.

No outro sentido, se

$$Lu = -(pu')' + qu = -pu'' - p'u' + qu$$

então segue de (2.1.15)

$$L^{\dagger}u = -(pu)'' + (p'u)' + qu = -(pu')' + qu\,.$$

□

Observação 2.1.36 *O sinal negativo em (2.1.17) é introduzido apenas por comodidade. A seguir, sem perda de generalidade, vamos assumir que $p(x)$ e $q(x)$ são funções positivas no domínio (a,b).*

Enunciaremos em seguida um resultado com o qual o problema de Sturm–Liouville se torna um problema de auto–valores para operadores diferenciais auto–adjuntos.

Lema 2.1.37 (Lema de Green) *Seja $u,\, v \in \mathcal{C}^2(a,b)$ duas funções satisfazendo as condições de fronteira (2.0.2) do problema de Sturm–Liouville. Então*

$$(u, L\,v) - \left(L^{\dagger}\,u, v\right) = 0$$

para todo operador L formalmente auto–adjunto (2.1.17).

Prova. Devido a identidade de Lagrange, Proposição 2.1.34, basta apenas mostrar que $F(a) = F(b) = 0$. Para L auto–adjunto, temos

$$\begin{aligned} F(x) &= -u(x)\,p(x)\,v'(x) + v(x)\,(p(x)\,u(x))' - u(x)\,p'(x)\,v(x) \\ &= -p(x)\,(u(x)\,v'(x) - v(x)\,u'(x))\,. \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Se α ou β e δ ou γ forem nulas, então o resultado segue de (2.1.18). Se ambas constantes α e β forem diferentes de zero, então

$$F(x) = -p(x)\left[u(x)\;\left(v'(x) + (\alpha/\beta)\,v(x)\right) - v(x)\;\left(u'(x) + (\alpha/\beta)\,u(x)\right)\right]\,,$$

que implica, usando (2.0.2), $F(a) = 0$. Para a outra extremidade, se δ e γ forem diferentes de zero, basta adicionar e subtrair de $F(x)$ o termo $(\gamma/\delta)\,u(x)\,v(x)$. Note que, se $p(a) = p(b) = 0$, então (2.1.18) se anula em $x = a$ e b independentemente das condições de fronteira.

□

2.1.3 A Equação de Auto–Valores

Daremos a seguir uma série de exemplos de equações auto–adjuntas que aparecem com frequência em diversos problemas de Física.

Exemplo 2.1.38 *Equação de Helmholtz:*

$$u'' + k^2 u = 0\,,$$

definida no intervalo $I = (a,b)$;

Exemplo 2.1.39 *Equação de Legendre:*

$$\left(1 - x^2\right) u'' - 2xu' + \ell(\ell+1)u = 0\,,$$

definida em $I = (-1,1)$;

Exemplo 2.1.40 *Associada de Legendre:*

$$\left(1 - x^2\right) u'' - 2xu' - \frac{m^2}{1-x^2}u + \ell(\ell+1)u = 0\,,$$

$-1 < x < 1$;

Exemplo 2.1.41 *Equação de Bessel:*

$$xu'' + u' - \frac{n^2}{x}u + \mu x\,u = 0\,,$$

definida em $I = (0,\infty)$;

Exemplo 2.1.42 *Equação de Laguerre:*

$$xu'' + (1-x)\,u' + \alpha u = 0\,,$$

em $I = (0,\infty)$;

Exemplo 2.1.43 *Equação de Hermite:*

$$u'' - 2xu' + 2\alpha u = 0\,,$$

no domínio $I = (-\infty,\infty)$.

Estas equações podem ser escritas como um problema de auto–valores:

$$L\,u = \lambda \rho\, u\ , \qquad a < x < b\ , \tag{2.1.19}$$

onde $L = -D\,(pD) + q$ e $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ é a função peso.

Na tabela a seguir as funções p, q e ρ e o auto–valor λ, serão explicitadas para cada exemplo.

Exemplos		$p(x)$	$q(x)$	$\rho(x)$	λ
2.1.38		1	0	1	k^2
2.1.39		$1-x^2$	0	1	$\ell\,(\ell+1)$
2.1.40		$1-x^2$	$\dfrac{m^2}{1-x^2}$	1	$\ell\,(\ell+1)$
2.1.41		x	$\dfrac{n^2}{x}$	x	μ
2.1.42		$x\,e^{-x}$	0	e^{-x}	α
2.1.43		e^{-x^2}	0	e^{-x^2}	2α

Definição 2.1.44 *São chamados* ***auto–valores*** *do problema de Sturm–Liouville os números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ para os quais existem soluções não–triviais $u_1, u_2, \ldots$, denominadas auto–funções, da equação (2.1.19) com*

$$L = -D\,(p(x)D) + q(x)$$

sujeita às condições de fronteira

$$Uu = 0 \tag{2.1.20}$$

onde $U = (U_1, U_2)$ com

$$\begin{aligned} U_1 u &:= \alpha u_j(a) + \beta u_j'(a) \\ U_2 u &:= \gamma u_j(b) + \delta u_j'(b)\ . \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

O problema de auto–valores será abordado nas seções subsequentes, por dois métodos distintos. O método de Frobenius descreve as soluções do problema em séries de potências. Já o método de Rayleigh–Ritz, este problema é abordado via o cálculo variacional.

Para concluir esta seção, descreveremos algumas propriedades gerais do problema de auto–valores em questão. Em particular, o resultado a seguir estabelece uma importante conexão entre os autovalores λ_j, $j = 1, 2, \ldots$, e os zeros das soluções u_j do problema.

Teorema 2.1.45 *Seja $p(x)$, $q(x)$ e $\rho(x)$ funções continuas positivas com $p(x)$ diferenciavel. Existem um número infinito de auto–valores λ_1, λ_2, … tais que*

$$-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$$

e $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$, para os quais o problema de Sturm–Liouville tem solução não–trivial.

Além disso, se n_j denota o número de zeros da auto–função u_j associada ao auto–valor λ_j, então a seguinte relação é satisfeita para todo $j \in \mathbb{N}_+$:

$$n_{j+1} - n_j = 1\ .$$

Para entender melhor o conteúdo do teorema e o desenvolvimento de sua prova, revisitaremos nosso típico exemplo.

Exemplo 2.1.46 *A equação para a solução estacionária da corda vibrante com extremidades fixas em 0 e π, é um problema da forma (2.1.19) (veja também Exemplo 2.1.38) com $L = -D^2$ em $I = (0, \pi)$ e $\rho = 1/\pi$. As auto–funções do problema*

$$u_k(x) = \sqrt{2}\sin kx\ , \qquad k = 1, 2, \ldots$$

satisfazem as condições de fronteira $u_k(0) = u_k(\pi) = 0$ ($\beta = \delta = 0$ em (2.1.20)). Os auto valores $\lambda_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}_+$, satisfazem a relação

$$1 = \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$$

Note que o ***espectro*** *$\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$, deste problema é limitado inferiormente. Note ainda que u_1 não se anula em nenhum ponto do intervalo aberto $I = (0, \pi)$, u_2 tem um único zero em I, u_3 tem 2 zeros, e assim por diante.*

Prova. Primeiramente, reduziremos a equação auto–adjunta de segunda ordem em um sistema de equações de primeira ordem:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dx} = A\mathbf{z} \tag{2.1.22}$$

onde $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ com $z_1 = z_1(x) = u(x)$ e $z_2 = z_2(x) = -p(x)u'(x)$ e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{p} \\ \lambda\rho - q & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Escrevendo $\mathbf{z}$ em cordenadas polares:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= r(x)\cos\phi(x) \\ z_2(x) &= r(x)\sin\phi(x) \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

o sistema (2.1.22) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\frac{r'}{r}\cos\phi - \phi'\sin\phi &= \frac{-1}{p}\sin\phi\\ \frac{r'}{r}\sin\phi + \phi'\cos\phi &= (\lambda\rho - q)\cos\phi\,.\end{aligned}$$

Resolvendo para r' e ϕ', obtemos o seguinte sistema não–linear:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dx} &= \frac{1}{p(x)}\sin^2\phi + (\lambda\rho(x) - q(x))\cos^2\phi\\ \frac{1}{r}\frac{dr}{dx} &= -\left(\frac{1}{p(x)} - \lambda\rho(x) + q(x)\right)\sin\phi\,\cos\phi\,.\end{aligned} \tag{2.1.24}$$

A primeira equação em (2.1.24) somente depende da variavel angular ϕ enquanto que a segunda depende de ϕ e de r. Para a demonstração deste teorema basta analisar apenas a primeira. O nosso interesse é descrever os zeros da solução $u(x)$ da equação de auto–valores (2.1.19). Pela equação (2.1.23), $u(x)$ se anula nos pontos x tais que

$$\phi(x) = (2n-1)\frac{\pi}{2}\,, \qquad n\in\mathbb{Z}\,. \tag{2.1.25}$$

A existência de soluções não triviais do problema de Sturm–Liouville segue dos seguintes fatos:

1. $\dfrac{d\phi}{dx} > 0$ para todo $\lambda > \lambda_0$ para algum número finito λ_0;
2. ϕ é uma função contínua e monotona crescente em λ.

Pode-se enfraquecer a condição 1. mas aqui nos restringiremos aos casos onde $0 \le q(x) \le m < \infty$. Esta condição implica que $\phi(x)$ é uma função monotona crescente em x para $\lambda > \lambda_0$.

Para o item 2. basta mostrar que $\vartheta(x) := \phi_{\lambda'} - \phi_\lambda$, onde $\phi_{\lambda'}$ e ϕ_λ são soluções da equação (2.1.24) com $\lambda' > \lambda$, é uma função positiva para $a < x \le b$ se $\vartheta(a) \ge 0$. De (2.1.24), temos

$$\frac{d\vartheta}{dx} = f\,\vartheta + h$$

onde

$$h = h(\phi_\lambda) = (\lambda' - \lambda)\,\rho\cos^2\phi_\lambda \ge 0$$

and

$$f = f(\phi_{\lambda'},\phi_\lambda) = \left(\frac{1}{p} - q + \lambda'\rho\right)(\sin\phi_{\lambda'} + \sin\phi_\lambda)\left(\frac{\sin\phi_{\lambda'} - \sin\phi_\lambda}{\phi_{\lambda'} - \phi_\lambda}\right)$$

Definindo $F(x) = \int_x^b f(y)\,dy$, podemos reescrever a desigualdade $\vartheta' - f\vartheta \ge 0$ como uma derivada total

$$\left(e^F\vartheta\right)' = e^F\,(\vartheta' - f\vartheta) \ge 0$$

de onde se conclui a afirmação integrando no intervalo $[a,b]$ e usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Da primeira equação em (2.1.24), segue também que a inclinação é limitada superiormente

$$\frac{d\phi}{dx} < M + \lambda R$$

onde $M = \max\limits_{x\in(a,b)} \dfrac{1}{p(x)}$ e $R = \max\limits_{x\in(a,b)} \rho(x)$. Esta equação define uma reta

$$\overline{\phi}(x) = c + (M + \lambda R)\,x$$

onde c é escolhida tal que $\overline{\phi}(a) = \phi(a)$, que limita superiormente a solução $\phi(x)$ de (2.1.24). Isto implica que, se $z_1, z_2, \ldots, z_n \in (a,b)$ for um conjunto maximal de valores tais que $\overline{\phi}(z_j) \in (2\mathbb{Z}-1)\,\pi/2$, o conjunto de zeros, $x_1, x_2, \ldots, x_m$, da solução u do problema de auto–valores com λ fixo, é tal que $m \le n$.

A solução do problema deve satisfazer as condições de fronteira

$$\alpha z_1(a) - \frac{\beta}{p(a)}z_2(a) = \gamma z_1(b) - \frac{\delta}{p(b)}z_2(b) = 0$$

que em cordenadas polares podem ser escritas como

$$\sin(\phi(a) - \phi_1) = \sin(\phi(b) - \phi_2) = 0 \tag{2.1.26}$$

onde

$$\tan\phi_1 = \frac{p(a)}{\alpha\beta} \qquad \text{e} \qquad \tan\phi_2 = \frac{\mathrm{p(b)}}{\gamma\delta}\,.$$

Podemos então sempre encontrar uma solução para a primeira equação em (2.1.24) variando λ e a constante de integração de forma tal que as condições de fronteira (2.1.26) sejam satisfeitas:

$$\phi(a) = \phi_1\,, \qquad \phi(b) = \phi_2 + k\pi$$

para algum $k\in\mathbb{Z}$. Da monotonocidade de ϕ como função de λ, podemos fazer com que não haja nenhum zero de u no intervalo $I = (a,b)$, isto é, não exista nehum valor de $x \in I$ tal que $\phi(x)$ satisfaça (2.1.25); haja um único zero x_1; dois zeros x_1 e x_2, e assim por diante.

$\square$

2.2 Base em Espaços Vetoriais de Dimensão Infinita

Nesta seção extenderemos as noções de subespaços vetoriais e base desenvolvidas na Seção 1.1 para espaços vetoriais de funções.

Todo vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pode ser **univocamente** representado por uma combinação linear de vetores $\mathcal{S} = \{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n$ linearmente independentes. Dizemos que $\mathcal{S}$ forma uma base de $\mathbb{R}^n$. A base $\mathcal{S}$ é ortogonal se os elementos $\mathbf{x}_j$, $j = 1, \ldots, n$, forem auto–vetores de uma matriz A normal (se A for hermiteana, por exemplo).

Embora seja analogo ao caso $\mathbb{R}^n$, a representação de uma função pela combinação linear é mais delicada. Se $\mathcal{C}(a,b)$ denota o espaço de funções contínuas em $[a,b]$, $\mathcal{S} = \{1, x, x^2, \ldots\}$ forma uma base, i.e., toda função $f \in \mathcal{C}(a,b)$ pode ser escrita como uma combinação linear de elementos de $\mathcal{S}$ (Teorema da aproximação de Weierstrass) no seguinte sentido: f é aproximada uniformemente por polinômios.

A seguir abordaremos a seguintes questões. Seja $\mathcal{U} = \{u_j(x)\}_{j=1}^\infty$ o conjunto das auto–funções [1] do problema de Sturm–Liouville (2.0.1). O conjunto $\mathcal{U}$ forma uma base (ortogonal)? Se afirmativo, qual é o espaço gerado por $\mathcal{U}$?

Considere a representação de uma função $f(x)$ pela série

$$S(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \, u_j(x) \, . \tag{2.2.1}$$

Como o número de elementos de $\mathcal{U}$ é infinito, as questões levantadas podem ser colocadas da seguinte forma:

1. A sequência de séries parciais $\{S_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_+}$, onde
$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, u_j(x) \, ,$$
é convergente? Isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ existe em que sentido?
2. Caso S exista, a função que S representa é única?
3. Qual é o subespaço gerados pelas combinções lineares (2.2.1)?

Observe que as mesmas questões são levantadas no **problema das séries de Fourier**. O Teorema a seguir responde parcialmente estas questões no caso de $\mathcal{U}$ ser formado pelas auto–funções do Exemplo (2.1.46).

[1] O conjunto dos índices das auto–funções será escolhida de acordo com o problema. Em alguns casos, $\mathbf{N}_+$ será substituido por $\mathbf{N}$ ou mesmo $\mathbf{Z}$.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Fourier) *Seja $f : [0,\pi] \longmapsto \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciavel (f e f' seccionalmente continua) com $f(0) = f(\pi) = 0$. Então, a série (2.2.1) com $u_j(x) = \sqrt{2/\pi}\sin jx$ e $c_j = \sqrt{2/\pi}\int_0^\pi f(x)\sin jx\,dx$, converge em cada ponto x para*

$$\frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right)$$

onde $f(x \pm 0) = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} f(x \pm \varepsilon)$.

*Além disso, se f' for integravel e absolutamente integravel, (2.2.1) converge **uniformemente** em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f.*

(Veja por exemplo Djairo G. de Figueredo, "Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais", Capítulo 3).

2.2.1 Sistema Ortonormal de Funções

O seguinte resultado é analogo ao Teorema (1.1.40) para operadores simétricos em $\mathbb{R}^n$ e define um **sistema ortonormal de funções** em (a,b).

Teorema 2.2.2 *Os auto valores $\{\lambda_j\}$ de um operador L auto–adjunto em um problema de Sturm–Liouville são reais e as auto–funções correspondentes $\{u_j\}$ são mutuamente ortogonais com respeito ao produto interno*[2]

$$\left(u_i, u_j\right)_\rho := \int_a^b \overline{u_i}(x)\, u_j(x)\, \rho(x)\, dx = \delta_{i,j} \, .$$

Prova. Seja λ_l e λ_k dois auto–valores do problema de Sturm–Liouville e seja u_l e u_k suas respectivas auto–funções. Em vista de (2.1.44) e do lema de Green (Lema 2.1.37), temos

$$\begin{aligned} 0 &= (u_k,\, L\, u_l) - \left(L^\dagger u_k,\, u_l\right) = \left(\lambda_l - \overline{\lambda}_k\right) \int_a^b \overline{u}_k(x)\, u_l(x)\ \rho(x)\, dx \\ &= \left(\lambda_l - \overline{\lambda}_k\right) \left(u_k,\, u_l\right)_\rho \, . \end{aligned}$$

Portanto, ou $k = l$ e $\lambda_l = \overline{\lambda}_l$, ou $k \neq l$ e $(u_k,\, u_l)_\rho = 0$.

□

[2] Se u e v são funções a valores complexo, temos que $(u,v)_\rho = \overline{(v,u)}_\rho$.

Exercício 2.2.3 *Seja $p_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, uma família de polinômios ortogonais com respeito ao produto interno com peso $\rho(x) = e^{-x}$:*

$$(p_n, p_m)_\rho := \int_0^\infty p_n(x)\, p_m(x)\, e^{-x}\, dx = \delta_{n,m}\,.$$

Escreva uma equação diferencial de segunda ordem para estes polinômios.

2.2.2 Desigualdade de Bessel, Aproximação em Média e Completeza

Começaremos com a seguinte

Definição 2.2.4 *Dado $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$, denominamos os números*

$$c_j := (u_j, f)_\rho\,, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

***componentes** da função f com respeito ao sistema ortonormal $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ ou **coeficientes** da expansão (2.2.1) de f.*

A seguir enunciaremos uma importante propriedade satisfeita por estes coeficientes conhecida por **desigualdade de Bessel**.

Proposição 2.2.5 *Seja $\{c_j\}_{j=1}^\infty$ as compontes de f com respeito a um sistema ortonormal $\{u_j\}_{j=1}^\infty$. Então,*

$$\sum_{j=1}^n c_j^2 \le \|f\|_\rho^2 := (f, f)_\rho \tag{2.2.2}$$

é válida para todo $n \in \mathbb{N}_+$.

Prova.

$$\left\| f - \sum_{j=1}^n c_j\, u_j(x) \right\|_\rho^2 = \int_a^b \left(f - \sum_{j=1}^n c_j\, u_j(x) \right)^2 \rho(x)\, dx \ge 0$$

implica em

$$\|f\|_\rho^2 - 2\sum_{j=1}^n c_j\ (f, u_j)_\rho + \sum_{j=1}^n c_j^2 = \|f\|_\rho^2 - \sum_{j=1}^n c_j^2 \ge 0$$

que, por sua vez, implica a desigualdade.

□

Observação 2.2.6 *Como a relação acima é uniforme em n, podemos passar o limite de $n \to \infty$ e concluir*

$$\sum_{j=1}^\infty c_j^2 \le \|f\|_\rho^2\,. \tag{2.2.3}$$

Se f pertencer ao espaço de funções $L_2(a, b; \rho)$ de quadrado integravel com pêso ρ, então a seqüência das somas parciais do quadrado dos coeficientes de f, converge.

Para apreciar o conteúdo desta proposição, consideremos o seguinte problema variacional. Para uma dada seqüencia $\Gamma = \{\gamma_j\}$ de números, seja $S_n = S_n(x;\Gamma)$ a expansão

$$S_n(x;\Gamma) = \sum_{j=1}^n \gamma_j\, u_j(x)\,. \tag{2.2.4}$$

Diferentes expansões são obtidas variando Γ e a questão é qual destas *melhor aproxima* uma função $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$?

Para **medir** quão boa é uma aproximação, introduzimos o funcional erro médio quadrático:

$$E_n(\Gamma) := \int_a^b (f(x) - S_n(x;\Gamma))^2\, \rho(x)\, dx = \|f - S_n\|_\rho^2\,.$$

Devemos encontrar os coeficientes Γ tais que o erro E_n atinge o seu menor valor, uniformemente em n. Este método de aproximação é conhecido como **método dos mínimos quadrados** ou **aproximação em média**.

Minimizando o funcional E_n com respeito a Γ, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n}{\partial \gamma_k}(\Gamma) &= \int_a^b (S_n(x;\Gamma) - f(x))\, 2\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \gamma_j}{\partial \gamma_k}\, u_j(x)\right) \rho(x)\, dx \\ &= 2\left((S_n, u_k)_\rho - (f, u_k)_\rho\right) \\ &= 2\left(\gamma_k - (f, u_k)_\rho\right) \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

onde na última linha usamos (2.2.4) e a ortogonalidade do sistema $\{u_j\}$. $\Gamma^* = \{\gamma_j^*\}$ é um mínimo de E_n se para todo $k \in \mathbb{N}_+$, $\partial E_n / \partial \gamma_k = 0$ e a matriz Hessiana $H = [h_{ij}]$ do funcional erro E_n definida por

$$h_{ij} := \frac{\partial^2 E_n}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j}$$

for positiva definida.

Como $H = 2I$, em vista de (2.2.5), os coeficientes

$$\gamma_k^* = (f, u_k)_\rho = c_k \tag{2.2.6}$$

minimizam o erro quadrático médio demostrando o seguinte resultado:

Proposição 2.2.7 *A expansão (2.2.1) em série das auto–funcões com coeficientes (2.2.6) é a melhor aproximação da função f em* ***média***.

Na Seçao 2.3 demonstraremos a seguinte extensão do Teorema 2.2.1 de Fourier para um sistema qualquer $\mathcal{U} = \{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ de auto–funções do problema de Sturm–Liouville (2.0.1) para o caso de funções suaves.

Teorema 2.2.8 *Seja $f \in \mathcal{C}^2(a,b)$ uma função satisfazendo as condiçoes de fronteira $Uf = 0$ (veja (2.1.20)). Então a série*

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (f, u_j)_\rho \, u_j(x)$$

converge para função f, quando $n \to \infty$, uniformemente no intervalo $I = [a,b]$.

Uma noção importante que surge neste contexto é a seguinte:

Definição 2.2.9 *Um sistema ortonormal de funções $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$, é dito* ***completo*** *se toda função f seccionalmente contínua em $[a,b]$ satisfazendo $Uf = 0$ puder ser aproximada em* ***média***, *com precisão arbitrária, escolhendo n suficientemente grande.*

Note que para um sistema ortonormal completo, o erro quadratico médio $E_n = \|f - S_n\|^2$ converge para zero e a desigualdade de Bessel (2.2.3) se torna uma igualdade:

$$\|f - S\|^2 = \|f\|_\rho^2 - 2\sum_{j=1}^{\infty} c_j \, (f, u_j)_\rho + \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 = 0$$

e portanto

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 = \|f\|_\rho^2 \, . \tag{2.2.7}$$

Note que a relação (2.2.7) é satisfeita para funções $f \in \mathcal{C}^2(a,b)$ devido ao o Teorema 2.2.8. A relação (2.2.7) é conhecida como **relação de completeza**.

A condição **suficiente** para que $\{u_j\}$ seja completo, é que (2.2.7) seja satisfeita para toda **função contínua** (veja Courant–Hilbert "Methods of Mathematical Physics", vol. 1, Capílulo II) .

Observação 2.2.10 *Um sistema ortonormal completo implica convergência em média*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{j=1}^{n} c_j \, u_j \right\|^2 = 0 \tag{2.2.8}$$

porém não implica necessariamente que a função f possa ser representada pela série

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \, u_j \, .$$

Para trocar de ordem o limite com a integral da norma em (2.2.8) é necessário convergência uniforme da série.

O Teorema da expansão e a relação de completeza pode ser extendida para funçoes de quadrado integravel $L_2(a,b;\rho)$.

Teorema 2.2.11 *Seja $f \in L_2(a,b;\rho)$ uma função satisfazendo as condiçoes de fronteira $Uf = 0$. Então a série*

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (f, u_j)_\rho \, u_j(x)$$

converge em média para função f, quando $n \to \infty$. Além disso, a igualdade de Bessel (2.2.7) é satisfeita.

A prova deste teorema segue do Teorema da aproximação de Weierstrass 2.2.13 abaixo e da desigualdade de Bessel e será omitida nestas notas.

Para completar a discussão sobre as questões levantadas na introdução desta seção a respeito da série (2.2.1) temos o seguinte

Teorema 2.2.12 *Toda função seccionalmente contínua é univocamente determinada pelos coeficientes $c_j = (f, u_j)_\rho$, $j \in \mathbb{N}$, da expansão com respeito a um dado sistema ortonormal completo $\mathcal{U} = \{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.*

2.2.3 Método de Ortonormalização de Gram–Schmidt

O mais elementar exemplo de conjunto completo de funções é dado pelo conjunto dos monômios

$$\mathcal{M} = \{1, \, x, \, x^2, \, x^3, \, \dots \, .\}$$

O resultado a seguir é devido a Weierstrass.

Teorema 2.2.13 *Qualquer função contínua no intervalo $a \le x \le b$ finito, pode ser aproximada* ***uniformemente*** *neste intervalo por polinômios.*

Considere, como ilustração, o intervalo $I = \{-1 \leq x \leq 1\}$. Convém enfatizar que embora o conjunto dos monômios $\mathcal{M}$ não forma um sistema ortonormal com respeito ao produto interno

$$(u, v)_1 := \int_{-1}^{1} u(y)\, v(y)\, dy\,, \tag{2.2.9}$$

$\mathcal{M}$ é linearmente independente e, devido ao Teorema de Weierstrass, forma uma base para as funções contínuas. Mais precisamente, dado uma função contínua, é possivel encontar uma série de potências $f_n = \sum_{j=0}^{n} d_n\, x^n$ tal que

$$\sup_{x \in I} |f(x) - f_n(x)| \longrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$. Note que a convergência uniforme em I implica que f_n converge em média para f.

Para medir a independência de um conjunto de funções $v_1, \ldots, v_n$, o seguinte determinante de Gram tem um papel importante:

$$\Gamma(v_1, \ldots, v_n) := \det \begin{pmatrix} (v_1, v_1)_\rho & \cdots & (v_1, v_n)_\rho \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_n, v_1)_\rho & \cdots & (v_n, v_n)_\rho \end{pmatrix}$$

Proposição 2.2.14 (Critério de Gram) *Um conjunto $v_1, \ldots, v_n$ de funções são linearmente dependentes se e somente se $\Gamma(v_1, \ldots, v_n) = 0$.*

A seguir, daremos um outro exemplo do procedimento de ortonormalizaçã o Gram–Schmidt (veja Teorema 1.1.28) para encontrar, a partir do conjunto dos monômios $\{x^j\}_{j \in \mathbb{N}}$, um sistema ortonormal de funções com respeito ao produto interno (2.2.9).

Exemplo 2.2.15 *Os quatro primeiros polinômios ortonormais, e_0, e_1, e_2 e e_3 de um sistema ortonormal com respeito ao produto interno (2.2.9), podem ser obtidos como segue. Definimos*

$$e_0 = \frac{1}{\|1\|_1} = \frac{1}{\sqrt{(1,1)_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

e tomamos

$$v_1 = x - (e_0, x)_1\, e_0 = x\,.$$

Em seguida, normalizamos v_1,

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|_1} = \left(\int_{-1}^{1} y^2\, dy\right)^{-1/2} x = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x\ ,$$

e tomamos

$$v_2 = x^2 - \left(e_1, x^2\right)_1 e_1 - \left(e_0, x^2\right)_1 e_0$$

com $e_2 = v_2/\|v_2\|_1$. Como $(e_1, x^2) = 0$, por paridade, $(e_0, x^2) = \sqrt{2}/3$ e $\|v_2\|_1^2 = (x^2, x^2)_1 - (e_0, x^2)_1^2 = 8/45$, obtemos

$$e_2 = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2}\, x^2 - \frac{1}{2}\right)\,.$$

Aqui, fizemos uso da seguinte relação

$$(x^n, x^m)_1 = \int_{-1}^{1} y^{n+m}\, dy = \begin{cases} 0 & \text{se } n+m \text{ for impar,} \\ \dfrac{2}{n+m+1} & \text{se } n+m \text{ for par.} \end{cases}$$

Novamente, tomamos

$$\begin{aligned} v_3 &= x^3 - (e_2, x^3)_1\, e_2 - (e_1, x^3)_1\, e_1 - (e_0, x^3)_1\, e_0 \\ &= x^3 - (e_1, x^3)_1\, e_1 \end{aligned}$$

e normalizamos $e_3 = v_3/\|v_3\|_1$. Sendo $(e_1, x^3) = \sqrt{6}/5$ e $\|v_3\|_1^2 = (x^3, x^3)_1 - (e_1, x^3)_1^2 = 8/(7 \times 5^2)$, resulta

$$e_3 = \sqrt{\frac{7}{2}} \left(\frac{5}{2}\, x^3 - \frac{3}{2}\, x\right)\,.$$

Os demais polinômios ortonormais derivados por este método são da forma

$$e_n = \sqrt{n + \frac{1}{2}}\, P_n$$

onde

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n\ , \qquad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.2.10}$$

são conhecidos como **polinômios de Legendre**. Oportunamente, os polinômios de Legendre serão obtidos via solução da equação de Legendre (Exemplo 2.1.39) pelo método de Frobenius. A relação (2.2.10), conhecida como fórmula Rodrigues, bem como outras relações, serão também discutidas.

Exercício 2.2.16 *Demonstre a relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre*

$$(P_n, P_m)_1 = \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\, \delta_{n,m}\,.$$

Indicação: *Use a fórmula de Rodrigues (2.2.10) e integração por partes.*

Exercício 2.2.17 *Utilize o método de Gram–Schmidt para encontrar, a partir dos monômios $\{1, x, x^2, \ldots\}$, os quatro primeiros polinômios ortonormais e_0, e_1, e_2 e e_3, com respeito ao produto interno*

$$(u, v)_2 := \int_{-1}^{1} u(x)\, v(x)\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

no domínio $-1 \leq x \leq 1$.

Os polinômios ortonormais construídos no Exercício 2.2.17 são alguns exemplos dos chamados polinômios de Tchebycheff:

$$T_0 = 1\,, \qquad T_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cos\left(n \text{ arccos } x\right)\,, \qquad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{2.2.11}$$

Entre todos os polinômios de grau n da forma

$$p_n(x) = x^n + a_1\, x^{n-1} + \cdots + a_n$$

os polinômios de Tchebycheff são tais que

$$\max_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} \leq \max_{x\in[-1,1]} |p_n(x)|\,,$$

isto é, T_n tem seu máximo valor, em valor absoluto, mais próximo do eixo de coordenadas que qualquer outro polinômio da mesma ordem (a igualdade é somente válida se $p_n = T_n$).

Exercício 2.2.18 *Prove que T_n definido por (2.2.11) é um polinômio de grau n e verifique que o coeficiente do termo de maior grau é 1.*

Exercício 2.2.19 *Demonstre a relação de ortogonalidade*

$$(T_n, T_m)_2 = \int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x)\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

para qualquer n, $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq m$.

Exercício 2.2.20 *Calcule os três primeiros polinômios de Laguerre e_0, e_1 e e_2, usando o método de Gram–Schmidt para os monômios com o produto interno com peso $\rho(x) = e^{-x}$*

$$(u, v)_\rho := \int_0^\infty u\,(x)\; v(x)\, e^{-x}\, dx\,.$$

2.3 Função de Green

Vimos na Seção 1.2 que a função de Green é o **núcleo** de um operador integral que resolve uma equação diferencial não–homogênea (veja equação (1.2.44)). Trataremos nesta seção a equação (2.0.1) com condições de fronteira (2.0.2) do problema de Sturm–Liouville não–homogêneo sob este mesmo ponto de vista.

O problema de Sturm–Liouville (2.0.1) pode ser formulado como uma equação não–homogênea algébrica

$$(L - \lambda\rho)\, u = f \tag{2.3.1}$$

onde $L = -D(pD) + q$ é um operador diferencial auto–adjunto que atua sobre o espaço de funções tais que a condiçao de fronteira $Uu = 0$ é satisfeita (veja (2.1.20)).

É conveniente examinar inicialmente o problema similar de algebra linear em $\mathbb{R}^n$. Dada uma matriz simétrica $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e um número $\lambda \in \mathbb{R}$, o problema é determinar a solução $\mathbf{u}$ da equação

$$(A - \lambda I)\, \mathbf{u} = \mathbf{v}. \tag{2.3.2}$$

A resposta a este problema depende das seguintes alternativas:

1. Se λ não for um auto–valor de A, isto é $\mathcal{N}\,(A - \lambda I) = \{\mathbf{0}\}$, então $A - \lambda I$ é inversível e
$$\mathbf{u} = (A - \lambda I)^{-1}\, \mathbf{v}\,. \tag{2.3.3}$$

2. Se λ for um auto–valor de A, e $\mathbf{v}$ for ortogonal ao núcleo $\mathcal{N}\,(A - \lambda I)$ gerado pelos auto–vetores $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s$, associados à λ (isto é, $(\mathbf{v}, \mathbf{x}_j) = 0$, $j = 1, \ldots, s$), então a matriz $A - \lambda I$ é inversível no subespaço ortogonal $\mathcal{N}\,(A - \lambda I)^{\perp}$. Sob esta condição, a solução de (2.3.2) ainda é dada por (2.3.3).

Assim o problema se reduz ao cálulo da matriz inversa $(A - \lambda I)^{-1}$. Há varias fómulas a disposição. Faremos aqui uso de uma extensão do Teorema Espectral 1.1.49 para este propósito.

Proposição 2.3.1 *Seja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os auto-valores de uma matriz simétrica A e $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ os auto–vetores (normalizados) correspondentes. Se $\lambda \neq \lambda_j$, $j = 1, \ldots, n$, então*

$$\frac{1}{A - \lambda I} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j - \lambda} E_j \tag{2.3.4}$$

onde $E_j = \mathbf{x}_j\,(\mathbf{x}_j)^T$ é o projetor ortogonal na direção do autovetor $\mathbf{x}_j$.

Prova. (formal) Se $X = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n]$ é a matriz dos auto–valores e $D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ a matriz diagonal, temos formalmente a série de Neumann

$$\begin{aligned}(A-\lambda I)^{-1} &= \frac{-1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1}\\ &= \frac{-1}{\lambda}\left(I + \frac{A}{\lambda} + \frac{A^2}{\lambda^2} + \cdots\right)\\ &= \frac{-1}{\lambda}X\left(I + \frac{D}{\lambda} + \frac{D^2}{\lambda^2} + \cdots\right)X^{-1}\\ &= X\,(D-\lambda I)^{-1}\,X^{-1}\end{aligned}$$

de onde segue a proposição.

□

Observação 2.3.2 *Note que a norma da matriz (2.3.4)*

$$\left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\| \le \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - \lambda|^{-1}\, \|E_j\| = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - \lambda|^{-1}$$

é finita se λ não for um auto–valor e isto garante, em conjunto com a prova formal, que a série (2.3.4) de fato representa a matriz. A função $R(\lambda) = (A-\lambda I)^{-1}$ é denominada ***matriz resolvente*** *da matriz A.*

De acordo com a Proposição 2.3.1, a solução de (2.3.2) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j - \lambda} E_j \mathbf{v}\\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(\mathbf{x}_j, \mathbf{v})}{\lambda_j - \lambda}\mathbf{x}_j \qquad (2.3.5)\end{aligned}$$

onde $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} u_i\, v_i$.

2.3.1 Equação de Sturm–Liouville Não–Homogênea

Uma fórmula análoga a (2.3.5) pode ser derivada para a solução do problema de Sturm–Liouville (2.3.1).

Seja $\{u_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ um sistema completo de funções ortonornal com respeito ao produto interno $(u, v)_\rho$ com peso ρ. Considere que este sistema seja dado pela solução do problema de auto–valores de um operador auto–adjunto $L = -D\,(pD) + q$ definido sobre o espaço de funções sujeito as condições de fronteira (2.0.2). Suponha ainda que o termo não–homogêneo da equação (2.3.1) satisfaça as mesmas condições de fronteira $Uf = 0$.

Como ρ é uma função estritamente positiva no domínio $I = (a, b)$, é conveniente dividir (2.3.1) por ρ e considerar a equação

$$(M - \lambda\,)\, u = g\,,$$

onde $M := \rho^{-1}L$ e $g := \rho^{-1}f$. Note que $M = L$ e $g = f$, se $\rho = 1$.

Considere ainda que g possa ser representado pela série

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} d_j\, u_j(x) \qquad (2.3.6)$$

(a série seja convergente em média) com

$$d_j = (g, u_j)_\rho = (f, u_j)\,,$$

$j \in \mathbb{N}_+$, os coeficientes de g neste sistema.

Supondo que λ não coincida com nenhum dos auto–valores $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ de L e admitindo que a fórmula (2.3.5) possa ser extendida quando a dimensão do espaço é infinita, temos

$$\begin{aligned}u(x) &= \left[(M-\lambda)^{-1} g\right](x)\\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(u_j, f)}{\lambda_j - \lambda}\, u_j(x) \qquad (2.3.7)\end{aligned}$$

Verificação. Vamos admitir que $u \in \mathcal{C}^2\,(a, b)$ seja duas vezes diferenciável representada por uma série uniformemente convergente

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, u_j(x)\,. \qquad (2.3.8)$$

Então

$$\begin{aligned}(M-\lambda)\,u &= \sum_{j=1}^{\infty} c_j\left(\rho^{-1}L-\lambda\right)\,u_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} c_j\left(\lambda_j-\lambda\right)\,u_j \qquad (2.3.9)\end{aligned}$$

que ao ser equacionada com (2.3.6) resulta em

$$c_j\left(\lambda_j-\lambda\right)=d_j=\left(u_j,f\right)$$

implicando (2.3.7) após a substituição de $c_j=\left(u_j,f\right)/\left(\lambda_j-\lambda\right)$ em (2.3.8).

□

Observação 2.3.3 *A existência da solução de (2.3.1) depende da convergência uniforme da série (2.3.7) em* $\mathcal{C}^2(a,b)$. *A solução de (2.3.1) é bem definida mesmo no caso em que* λ *é um auto–valor, digamos* λ_k, *se* g *for ortogonal à auto–função associada* u_k. *Note para isso que o coeficiente* $\left(g,u_k\right)_\rho=\left(f,u_k\right)=0$ *se anula exatamente onde o denominador se anula. Neste caso a solução*

$$u(x)=\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}_+:\\ j\neq k}}\frac{\left(u_j,f\right)}{\lambda_j-\lambda}\,u_j(x)$$

está definida no complemento ortogonal a u_k.

Como

$$\left(f,u_j\right)=\int_a^b f(x')\,u_j(x')\,dx',$$

a equação (2.3.7) pode ser posta na forma

$$u(x)=\int_a^b G(x,x')\,f(x')\,dx' \qquad (2.3.10)$$

onde

$$G(x,x')=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{u_j(x)\,u_j(x')}{\lambda_j-\lambda} \qquad (2.3.11)$$

é uma outra maneira de escrever a função de Green. Mais adiante veremos que de fato existe uma única solução da equação não–homogênea e portanto as diferentes formas da função de Green do problema de Sturm–Liouville são diferentes representações da mesma função.

Exemplo 2.3.4 *Considere a equação estacionária não–homogênea da corda vibrante que pode ser escrita como*

$$\left(-D^2-\lambda\right)u=f$$

se o operador $L=-D^2$ *estiver definido sobre funções* $u:[0,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ *que satisfazem a condição de extremidades fixas:* $u(0)=u(\pi)=0$. *As auto–funções do problema são*

$$u_j(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin jx\,, \qquad j=1,2,\ldots$$

e os autovalores associados são $\lambda_j=j^2$. *A função de Green é portanto dada por*

$$G(x,x')=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin jx\ \sin jx'}{j^2-\lambda}.$$

Comparando com a função de Green deste mesmo problema obtida pelo método alternativo no Exemplo 1.2.21, obtemos

$$\frac{\sin kx\ \sin k\left(x'-\pi\right)}{k\ \sin k\pi}=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin jx\ \sin jx'}{j^2-k^2}$$

para $x<x'$ *e* $k\notin\mathbb{N}$.

A função de Green $G(x,x')$ satisfaz a equação homogênea para todos os valores de $x\in[a,b]$ exceto para $x=x'$. De (2.3.1) e (2.3.10), obtemos

$$\begin{aligned}g(x) &= (M-\lambda)\,u(x) \\ &= \int_a^b (M-\lambda)\,G(x,x')\,f(x')\,dx' \\ &= \frac{1}{\rho(x)}\int_a^b (L-\lambda\,\rho)\,G(x,x')\,g(x')\,\rho(x')\,dx'\end{aligned}$$

de onde se conclui que G, como distribuição, satisfaz a equação

$$(L-\lambda\,\rho)\,G(x,x')=\delta(x-x')\,, \qquad x,x'\in(a,b)$$

sujeita às condições de fronteira $UG=0$, isto é,

$$\alpha G(a,x')+\beta G(a,x')=\delta G(b,x')+\gamma G(b,x')=0 \qquad (2.3.12)$$

Exercício 2.3.5 *veja exercícios no texto de Duff & Naylor, “Differential Equations of Applied Mathematics” (1965), páginas 269,270 e da página 275 à 277.*

Exercício 2.3.6 *veja exercícios no texto do Courant & Hilbert, “Methods of Mathematical Physics”, J. Wiley (1989), da página 371 à 376 do volume 1.*

2.3.2 O Método Direto

Iniciaremos com a seguinte

Definição 2.3.7 *A função de Green G de um operador diferencial auto–adjunto $L-\lambda\,\rho$, é definida pelas seguintes propriedades:*

1. *Para cada valor de $x' \in (a,b)$, $G(x,x')$ é uma função contínua de x, satisfazendo as condições de fronteira (2.3.12);*

2. *Exceto no ponto $x = x'$, $G(x,x')$ como função de x, tem a primeira e a segunda derivada contínuas. No ponto $x = x'$*
$$\lim_{x\downarrow x'} \frac{dG}{dx}(x,x') - \lim_{x\uparrow x'} \frac{dG}{dx}(x,x') = \frac{-1}{p(x')}$$

3. *$G(x,x')$ satisfaz a equação diferencial homogênea $(L-\lambda\,\rho)\,G(x,x') = 0$ em $x \neq x'$.*

Teorema 2.3.8 *Seja $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua satisfazendo (2.0.2). Então, $u(x) = \int_a^b G(x,x')\,f(x')\,dx'$ com G dado pela Definição 2.3.7 é uma solução do problema de Sturm–Liouville não–homogêneo (2.3.1). Reversamente, se u for a solução de (2.3.1), então u pode ser representada pela integral (2.3.10) com G dado pela Definição 2.3.7.*

Prova. (*Primeira afirmativa*) Em vista da Definição 2.3.7,

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \int_a^b G'(x,x')\,f(x')\,dx' \\
u''(x) &= \int_a^x G''(x,x')\,f(x')\,dx' + G'(x,x-0)\,f(x) \\
&\qquad + \int_x^b G''(x,x')\,f(x')\,dx' - G'(x,x+0)\,f(x) \\
&= \int_a^b G''(x,x')\,f(x')\,dx' + G'(x+0,x)\,f(x) - G'(x-0,x)\,f(x) \\
&= \int_a^b G''(x,x')\,f(x')\,dx' - \frac{f(x)}{p(x)}\,,
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
(L-\lambda\,\rho)\,u(x) &= \int_a^b \left[-p\,G'' - p'\,G' + (q-\lambda\rho)\,G\right](x,x')\,f(x')\,dx' + f(x) \\
&= \int_a^x (L-\lambda\,\rho)\,G(x,x')\,f(x')\,dx' \\
&\qquad + \int_x^b (L-\lambda\,\rho)\,G(x,x')\,f(x')\,dx' + f(x) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

É um simples exercício provar o sentido reverso do teorema.

□

Segue imediatamente do Lema de Green 2.1.37 a seguinte propriedade de **reciprocidade**:
$$G(x,x') = G(x',x)\,. \tag{2.3.13}$$
Note para isto que $(u,(L-\lambda\,\rho)\,v) = ((L-\lambda\,\rho)\,u,v)$ para duas soluções do problema u, v representadas pela integral (2.3.10).

Exercício 2.3.9 *Demonstre (2.3.13).*

Deduziremos a seguir uma formula para a função de Green a partir da Definição 2.3.7. Seja u_1 uma solução das equações homogêneas:
$$\begin{aligned}
(L-\lambda\,\rho)\,u_1 &= 0 \\
\alpha\,u_1(a) + \beta\,u_1'(a) &= 0
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$
Como L é um operador de segunda ordem, $c_1\,u_1$ é a solução mais geral deste problema. Seja u_2 uma solução das equações homogêneas:
$$\begin{aligned}
(L-\lambda\,\rho)\,u_2 &= 0 \\
\delta\,u_2(b) + \gamma\,u_2'(b) &= 0
\end{aligned}$$
Novamente, $c_2\,u_2$ é a solução mais geral do problema.

Há somente dois possiveis casos a considerar: as duas famílias de soluções, $\{c_1\,u_1\}$ e $\{c_2\,u_2\}$, ou são distintas, ou idênticas.

Trataremos inicialmente $\{c_1\,u_1\}$ e $\{c_2\,u_2\}$ famílias distintas. Neste caso, u_1 e u_2 são linearmente independentes. Isto é, se considerarmos os vetores $\mathbf{y} = (u_1, -p\,u_1')$ e

$\mathbf{z} = (u_2, -p\, u_2')$, e definirmos a matriz $W = [\mathbf{y}\, \mathbf{z}]$ que tem estes vetores como colunas, as funções u_1 e u_2 são linearmente independentes se

$$\det W(x) = -p(x)\,(u_1(x)\, u_2'(x) - u_2(x)\, u_1'(x)) \neq 0$$

Exercício 2.3.10 *Prove que*

$$\det W(x) = C$$

para uma constante C independente de x.

Portanto u_1 é uma função linearmente independente a u_2 se não houver em $[a, b]$ nenhum ponto de **tangência** entre as funções das respectivas famílias.

Se u_1 e u_2 forem linearmente independentes, escrevemos a função de Green na forma

$$G(x, x') = \begin{cases} c_1(x')\, u_1(x) & \text{se} \quad a \leq x < x' \\ c_2(x')\, u_2(x) & \text{se} \quad x' < x \leq b \end{cases}$$

onde c_1 e c_2 são determinados impondo acontinuidade de G e descontinuidade na derivada G' em $x = x'$:

$$\begin{aligned} c_1\, u_1 - c_2\, u_2 &= 0 \\ c_1\, p\, u_1' - c_2\, p\, u_2' &= 1 \end{aligned}$$

Este sistema é equivalente à equação

$$W\mathbf{c} = \mathbf{d}$$

onde $\mathbf{c} = (-c_1, c_2)$ e $\mathbf{d} = (0, 1)$. Usando a formula de Cramers, obtemos

$$c_1 = \frac{-1}{\det W} \det \begin{pmatrix} 0 & u_2 \\ 1 & -pu_2' \end{pmatrix} = \frac{u_2}{\det W}$$

e

$$c_2 = \frac{1}{\det W} \det \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ -pu_1' & 1 \end{pmatrix} = \frac{u_1}{\det W}\,.$$

Portanto

$$G(x, x') = \begin{cases} \dfrac{u_1(x)\, u_2(x')}{\det W} & \text{se} \quad a \leq x < x' \\[2ex] \dfrac{u_1(x')\, u_2(x)}{\det W} & \text{se} \quad x' < x \leq b \end{cases} \tag{2.3.15}$$

Observação 2.3.11 *Note que esta formula é explicitamente recíproca (núcleo simétrico): $G(x, x') = G(x', x)$.*

Exercício 2.3.12 *Determine a função de Green dos seguintes problemas de valores de fronteira:*

1.

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} = 0\,, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

com $f(0) = f'(1) = 0$.

2.

$$-x\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{df}{dx} = 0\,, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

com $\lim_{x \searrow 0} |\,f(x)\,| < \infty$ e $f(1) = 0$.

3.

$$-\frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right)\frac{df}{dx}\right] = 0\,, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

com $f(0) = f'(1) = 0$.

4.

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} - k^2 f = 0\,, \qquad 0 \leq x \leq \ell$$

com $f(0) = f(\ell) = 0$.

Consideremos o caso em que u_1 e u_2 são linearmente dependentes ($u_2 = c\, u_1$). Neste caso cada elemento de uma família pertence a outra família. Isto quer dizer que cada uma delas satisfaz as condições de fronteira nas duas extremidades:

$$\alpha u_1(a) + \beta u_1(a) = \delta u_1(b) + \gamma u_1(b) = 0\,.$$

Devido a (2.3.14), concluímos que, se a função u_1 não for identicamente nula, u_1 necessariamente é uma auto–função do problema de Sturm–Liouville associada à λ.

Neste caso, a função de Green não pode ser definida pela fórmula (2.3.15) e a solução da equação não-homogênea (2.3.1) tem solução se e somente se f for ortogonal a u_1 com respeito ao produto interno com peso $\rho = 1$: $(f, u_1) = 0$.

Afim de que esta solução u possa ser representada pela integral (2.3.10), o item *3.* da Definição 2.3.7 é substituido por

Definição 2.3.13 *3'. Exceto no ponto $x = x'$, a função de green satisfaz a equação*

$$(M - \lambda)\, G(x,x') = -u_1(x)\, u_1(x')$$

Para entender esta condição, consideremos a função de Green (2.3.11) ortogonal à auto–função u_1: $\int_a^b G(x,x')\, u_1(x)\, dx = 0$. Em termos de sua expansã o em série, esta condição implica (aqui vamos considerar u_1 a auto–função de ordem mais baixa, embora possa ser escolhida arbitrariamente)

$$G(x,x') = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{u_j(x)\, u_j(x')}{\lambda_j - \lambda_1}\,.$$

Portanto

$$\begin{aligned} (M - \lambda_1)\, G(x,x') &= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(\rho^{-1}L - \lambda_1)\, u_j(x)\, u_j(x')}{\lambda_j - \lambda_1} \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} u_j(x)\, u_j(x') \\ &= -u_1(x)\, u_1(x') \end{aligned}$$

em vista da relação de completeza do sistema de funções $\{u_j\}$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_j(x)\, u_j(x') = \delta(x - x') \tag{2.3.16}$$

Exercício 2.3.14 *Como distribuição, deduza a relação de completeza (2.3.16).*

Definição 2.3.7 com o item *3'*. no lugar de *3*. determina a função de Green generalizada a menos de uma constante, que é fixada pela condição de ortogonalidade

$$\int_a^b G(x,x')\, u_1(x)\, dx = 0\,.$$

Exercício 2.3.15 *Determine a função de Green, na forma em série e pelo método direto, do seguinte problema de valor de fronteira*

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)\,, \qquad a < x < b$$

com

1. $a = 0$, $b = 1$ *e* $u(0) = u'(1) = 0$;
2. $a = -1$, $b = 1$ *e* $u(-1) = u(1) = 0$;
3. $a = 0$, $b = 1$, $u(0) = -u(1)$ *e* $u'(0) = -u'(1)$.

Exercício 2.3.16 *Determine a função de Green do seguinte problema $Lu = f$ no domínio $-1 < x < 1$, com*

$$L = -D\left((1-x^2)D\right) + \frac{n^2}{1-x^2}\,,$$

$n \in \mathbb{N}$, sujeita as condições de fronteira $u(-1) < \infty$ e $u(1) < \infty$.

Indicação:

1. *Verifique que as funções*

$$u_1(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{n/2} \qquad \text{e} \qquad u_2(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n/2}$$

satisfazem a equação homogênea e são linearmente independentes se $n \neq 0$. Construa a função de Green a partir destas.

2. *Para $n = 0$, verifique que*

$$u_1(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x) \qquad \text{e} \qquad u_2(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x)$$

satisfaz a equação $L(D)u = -1/2$ e construa a função de Green no sentido generalizado.

Exercício 2.3.17 *Determine a função de Green no sentido generalizado para equação*

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f\,, \qquad -1 < x < 1$$

com condições de fronteira periódicas: $u(-1) = u(1)$ e $u'(-1) = u'(1)$.

Resposta ao Exercício 2.3.17: A função $u_0(x) = 1/\sqrt{2}$ é uma auto–função do operador $-d^2/dx^2$ (sobre funções periódicas em $[-1,1]$) com auto–valor $\lambda_0 = 0$ (Note que a norma de u_0, $\|u_0\|^2 = \int_{-1}^{1} u_0^2(x)\, dx = 1$). Pelo método direto da função de Green generalizada devemos procurar soluções u_1 e u_2 da equação não homogênia

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{1}{2}$$

definidas nos domínios $-1 < x < x'$ e $x' < x < 1$, respectivamente:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{x^2}{4} + ax + b \\ u_2(x) &= \frac{x^2}{4} + cx + d\,. \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Em seguida, devemos impor as condições de fronteira

$$u_1(-1) = u_2(1) \qquad \text{e} \qquad u_1'(-1) = u_2'(1)\,. \tag{2.3.18}$$

Sustituindo (2.3.17) em (2.3.18), resulta

$$\begin{aligned} a &= \frac{b-d+1}{2} \\ c &= \frac{b-d-1}{2} \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

e devido à condição de continuidade em $x = x'$:

$$u_1(x') = u_2(x')\ ,$$

obtemos

$$a = \frac{x'+1}{2} \qquad \text{e} \qquad c = \frac{x'-1}{2}\,. \tag{2.3.20}$$

Para determinar as constantes b e d, devemos impor ortogonalidade de G e u_0:

$$\int_{-1}^{x'} u_1(x)\,u_0(x)\,dx + \int_{x'}^{1} u_2(x)\,u_0(x)\,dx = 0 \tag{2.3.21}$$

Sustituindo (2.3.17) em (2.3.21), resulta

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{a-c}{2}(x')^2 + (b-d)\,x' + \frac{1}{6} - \frac{a-c}{2} + b + d \\ &= -\frac{(x')^2}{2} + \frac{1}{6} - \frac{a-c}{2} + b + d \end{aligned}$$

e portanto

$$d + b = \frac{(x')^2}{2} + \frac{1}{3}\,.$$

Como, em vista de (2.3.19) e (2.3.20),

$$d - b = x'$$

obtemos

$$\begin{aligned} b &= \frac{(x')^2}{2} + \frac{3x'+1}{6} \\ d &= \frac{(x')^2}{2} - \frac{3x'-1}{6} \end{aligned}$$

A função de Green

$$G(x,x') = \begin{cases} u_1(x) & \text{se} \quad -1 < x < x' \\ u_2(x) & \text{se} \quad x' < x < 1 \end{cases}$$

toma portanto a seguinte forma final

$$G(x,x') = -\frac{1}{2}\,|x-x'| + \frac{1}{4}\,(x-x')^2 + \frac{1}{6}.$$

2.3.3 Existência de Auto–valores e Teorema da Expansão

Nesta subseção estudaremos com mais detalhes a existência de auto–valores do problema de Sturm–Liouville homogêneo

$$(L - \lambda\rho)\,u = 0\,,$$

definido no domínio $\mathcal{D}(L)$ das funções $u \in \mathcal{C}^2(a,b)$ tais que $Uu = 0$, e provaremos o Teorema 2.2.8 sobre a expansão de uma função $f \in \mathcal{C}^2(a,b)$ em auto–funções deste problema.

Nas subseções anteriores a função de Green $G(x,x')$ foi vista como o núcleo integral de um operador linear $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\lambda)$, definido sobre funções a valores reais, contínuas em (a,b),

$$\mathcal{G} : \mathcal{C}(a,b) \longrightarrow \mathcal{D}(L),$$

dado por

$$\mathcal{G}u(x) = \int_a^b G(x,x')\,u(x')\,dx'\,,$$

e que satisfaz as seguintes propriedades.

1. $u = \mathcal{G}f$ é, pela definição 2.3.7, uma função em $\mathcal{C}^2(a,b)$ e satisfaz as condições de fronteira $Uu = 0$.

2. $\mathcal{G}$ é um operador auto–adjunto

$$(f, \mathcal{G}g) = (\mathcal{G}f, g)\ , \tag{2.3.22}$$

para qualquer $f, g \in \mathcal{C}(a,b)$ (basta substituir $u = \mathcal{G}f$ e $v = \mathcal{G}g$ no Teorema 2.1.37 de Green). Consequentemente, o núcleo integral

$$G(x,x') = G(x',x)$$

é simétrico (ou recíproco) e a forma quadrática $(f, \mathcal{G}f)$ é real.

3. $\mathcal{G}$ é a inversa do operador $L - \lambda\rho$:

$$(L-\lambda\rho)\,\mathcal{G}f = f\,, \qquad \mathcal{G}\,(L-\lambda\rho)\,u = u\,. \tag{2.3.23}$$

são válidas para todo $f \in \mathcal{C}(a,b)$ e $u \in \mathcal{C}^2(a,b)$ satisfazendo as condições de fronteira (2.0.2).

Por simplicidade, trataremos o caso $\rho = 1$ tomando $\lambda = 0$ ($\lambda \neq 0$ corresponde a um deslocamento do espéctro).

No espaço $\mathcal{C}(a,b)$, introduzimos a norma Eucledeana

$$\|f\| = (f,f) = \int_a^b f^2(x)\,dx$$

que induz uma norma para o operador $\mathcal{G}$

$$\|\mathcal{G}\| = \sup_{\substack{f\in\mathcal{C}(a,b):\\ \|f\|=1}} \|\mathcal{G}f\|\ .$$

Como $\mathcal{G}$ é um operador limitado, segue que

Lema 2.3.18 *A norma do operador $\mathcal{G}$ pode ser obtida por*

$$\|\mathcal{G}\| = \sup_{\substack{f\in\mathcal{C}(a,b):\\ \|f\|=1}} |(f,\mathcal{G}f)|\ . \tag{2.3.24}$$

Enunciaremos a seguir um resultado técnico que não será demonstrado nestas notas. O conjunto

$$\mathcal{F} = \{u = \mathcal{G}f : f \in \mathcal{C}\,(a,b)\ , \|f\| = 1\}$$

formado pelas funções limitadas $\|\mathcal{G}f\| < \infty$, forma uma família **equicontínua**. Isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ (independentemente da família $\mathcal{F}$), tal que

$$|u(x) - u(x')| < \varepsilon$$

é válido para todo $x, x' \in (a,b)$ tal que $|x - x'| < \delta$ e todo $u \in \mathcal{F}$. Como consequência (Lema de Ascoli), para toda sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ em $\mathcal{F}$ existe uma subsequência que é uniformemente convergente.

Teorema 2.3.19 *$\|\mathcal{G}\|$ ou $-\|\mathcal{G}\|$ é um auto–valor de $\mathcal{G}$.*

Prova. Suponha que (2.3.24) valha sem o modulo (a prova com o sinal negativo é similar). Então existe uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$, com $\|f_n\| = 1$, tal que

$$(f_n, \mathcal{G}f_n) \longrightarrow \|\mathcal{G}\|\ .$$

Pelo Lema de Ascoli, existe uma subsequência $\{u_n = \mathcal{G}f_n\}$ uniformemente convergente para uma função contínua φ_0 e portanto

$$\|\mathcal{G}f_n - \varphi_0\| \longrightarrow 0\,. \tag{2.3.25}$$

Mostraremos que φ_0 é uma auto–função de $\mathcal{G}$ associada ao auto–valor $\mu_0 = \|\mathcal{G}\|$. Como $\|\mathcal{G}f_n\|^2 \le \mu_0^2$, temos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}f_n - \mu_0 f_n\|^2 &= \|\mathcal{G}f_n\|^2 + \mu_0^2\,\|f_n\|^2 - 2\mu_0\,(f_n,\mathcal{G}f_n)\\ &\le 2\mu_0\,(\mu_0 - (f_n,\mathcal{G}f_n)) \longrightarrow 0\,,\end{aligned}$$

e portanto

$$\|\mathcal{G}\varphi_0 - \mu_0\varphi_0\|^2 = \|\mathcal{G}\varphi_0 - \mathcal{G}(\mathcal{G}f_n)\|^2 + \|\mathcal{G}(\mathcal{G}f_n) - \mu_0\mathcal{G}f_n\|^2 + \|\mu_0\mathcal{G}f_n - \mu_0\varphi_0\|^2$$

também tende a 0 quando $n \to \infty$. Este fato combinado com (2.3.25) demonstra que $\mathcal{G}\varphi_0 = \mu_0\varphi_0$.

□

Podemos usar um procedimento analogo a Gram–Schmidt para obter sucessivamente os auto valores e auto–funções de $\mathcal{G}$. Normalizando φ_0, $\chi_0 = \varphi_0/\|\varphi_0\|$ e definindo o operador integral $\mathcal{G}_1$ cujo núcleo é dado por

$$G_1(x,x') = G(x,x') - \mu_0\chi_0(x)\,\chi_0(x')\,,$$

podemos aplicar o Teorema 2.3.19 e concluir a existência do auto–valor $\mu_1 = \|\mathcal{G}_1\|$ (ou $-\|\mathcal{G}_1\|$) e da auto–função φ_1 associada.

Iterando o procedimento, o núcleo integral do operador $\mathcal{G}_{n+1}$ é definido por

$$G_{n+1}(x,x') = G_n(x,x') - \mu_n\chi_n(x)\,\chi_n(x')\,, \tag{2.3.26}$$

com $\mu_n = \|\mathcal{G}_n\|$ e χ_n o auto–valor e a auto–função normalizada associada. Note que a continuidade do procedimento requer que o autovalor $|\mu_n| > 0$. Se para todo $N > 0$, $\mu_N > 0$, então necessariamente temos $\lim_{N\to\infty}\mu_N = 0$. Neste caso, $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ forma um conjunto ortonormal (com respeito ao produto interno usual) de funções.

Além disso, lembrando que fizemos $\lambda = 0$ em (2.3.23), as auto–funções de $\mathcal{G}$ são também auto–funções de L

$$L\mathcal{G}\chi_n = \mu_n L\chi_n = \chi_n$$

por (2.3.23), cujo auto–valor associado é $\lambda_n = 1/\mu_n$.

Provaremos a seguir o Teorema 2.2.8.

Usando a desigualdade de Bessel para a equação

$$\mu_k\chi_k(x) = \mathcal{G}\chi_k(x) = \int_a^b G(x,x')\,\chi_k(x')\,dx'\,,$$

temos

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k^2\,|\chi_k(x)|^2 \leq \int_a^b |G(x,x')|^2\,dx'$$

para todo $n \in \mathbb{N}_+$ e $x \in (a,b)$. Integrando os dois lados desta equação em x, e usando o fato que $|G(x,x')| \leq \gamma < \infty$, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 = \int_a^b dx \sum_{k=1}^{n} \mu_k^2\,|\chi_k(x)|^2 \leq \int_a^b dx \int_a^b dx'\,|G(x,x')|^2 \leq \gamma^2\,(b-a)^2$$

de onde segue que $\mu_n \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$.

Iterando (2.3.26), o núcleo integral de $\mathcal{G}_{n+1}$ pode ser escrito como

$$G_{n+1}(x,x') = G(x,x') - \sum_{k=1}^{n} \mu_k\chi_k(x)\,\chi_k(x')\,.$$

Portanto,

$$\mathcal{G}_{n+1}f(x) = \mathcal{G}f(x) - \sum_{k=1}^{n} \mu_k(f,\chi_k)\chi_k(x)$$

para todo $f \in \mathcal{C}\,(a,b)$, e devido ao fato de $\|\mathcal{G}_{n+1}\| = |\mu_{n+1}|$,

$$\left\|\mathcal{G}f - \sum_{k=1}^{n} \mu_k(f,\chi_k)\,\chi_k\right\| \leq |\mu_{n+1}|\;\|f\|\,.$$

Como $\mu_n \longrightarrow 0$, o somatório $S_n = \sum_{k=1}^{n} \mu_k(f,\chi_k)\,\chi_k$ converge em média para $\mathcal{G}f$, quando $n \to \infty$.

Além disso, mostraremos a seguir que a seqüência $S_n : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$, de funções contínuas converge uniformemente. Portanto $\lim_{n\to\infty} S_n$ é uma função contínua em (a,b) e como $\mathcal{G}f \in \mathcal{C}^2(a,b)$, temos

$$\mathcal{G}f = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(f,\chi_k)\,\chi_k\,. \tag{2.3.27}$$

$\mathcal{G}f$ converge uniformemente pois, devido a desigualdade de Schwarz,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=p}^{q} \mu_k(f,\chi_k)\,\chi_k(x)\right| &= \left|\mathcal{G}\sum_{k=p}^{q}(f,\chi_k)\,\chi_k(x)\right| \\
&\leq \left|\int_a^b dx'\,G(x,x')\sum_{k=p}^{q}(f,\chi_k)\chi_k(x')\right| \\
&\leq \left\{\int_a^b dx'\,|G(x,x')|^2\right\}^{1/2}\left\{\int_a^b dx'\left|\sum_{k=p}^{q}(f,\chi_k)\chi_k(x')\right|^2\right\}^{1/2} \\
&\leq \gamma\,(b-a)^{1/2}\left\{\sum_{k=p}^{q}|(f,\chi_k)|^2\right\}^{1/2}
\end{aligned}$$

tende a 0, quando $p,q \to \infty$, pela desigualdade de Bessel. Consequentemente, dado uma função $u \in \mathcal{C}^2(a,b)$ satisfazendo $Uu = 0$, temos $f = Lu$ e devido a (2.3.23), (2.3.22) e (2.3.27)

$$u = \mathcal{G}f = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(f,\chi_k)\,\chi_k = \sum_{k=1}^{\infty}(f,\mathcal{G}\chi_k)\,\chi_k = \sum_{k=1}^{\infty}(\mathcal{G}f,\chi_k)\,\chi_k = \sum_{k=1}^{\infty}(u,\chi_k)\,\chi_k\,.$$

□

Capítulo 3

Equações a Derivadas Parciais

3.1 Introdução

São três as equações a derivadas parciais lineares clássicas (estudadas a partir do século XVIII):

Exemplo 3.1.1 *1. Equação da corda vibrante*

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\,,$$

onde v é a velocidade da onda: $v = T/\rho$ com T a tensão e ρ a densidade da corda

2. Equação da condução do calor em uma barra

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\,,$$

onde κ é a difusibilidade térmica dada por $\kappa = K/(C\rho)$ com K a condutividade térmica, C o calor específico e ρ a densidade da barra.

3. Equação de Laplace para o potencial eletrostático

$$-\nabla^2 u := -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f\,. \tag{3.1.1}$$

As equações dos Exemplos 1 e 2 podem ser extendidas para o espaço $\mathbb{R}^2$, ou $\mathbb{R}^3$, substituindo o operador diferencial de segunda ordem $\partial^2/\partial x^2$ pelo laplaceano (3.1.1) na dimensão correspondente.

Nosso século acrescenta, com o advento da mecânica quântica, outra equação diferencial linear importante:

Exemplo 3.1.2 *4. Equação de Schrödinger*

$$-i\hbar\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u + Vu = 0\,,$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck, m a massa da partícula e $V = V(\mathbf{x})$ o potencial a qual esta é submetida no ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

A descrição de um problema Físico requer além das equações introduzidas, equações que caracterizam a situação destes problemas. Por exemplo, para que a equação do calor, Exemplo 2, determine univocamente a temperatura de uma barra $u(t,x)$ no instante $t > 0$ e na posição $x \in (a,b)$ do seu interior, é necessário prescrever *Condições de Contorno* na região $\mathcal{R} := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0,\ a < x < b\}$. Estas compreendem:

Condição Inicial $u(0,x) = f(x)$ descreve a temperatura em cada ponto $x \in [a,b]$ da barra no instante $t = 0$;

Condições de Fronteira Há vários tipos que podem ser consideradas:

Não–Homogêneas. As extremidades da barra podem ser mantidas à temperaturas fixas

$$u(t,a) = T_1 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{u(t,b) = T_2}\,,$$

ou ainda podem ser submetidas à temperaturas que variam com o tempo substituindo T_1 e T_2 por funções $h_1(t)$ e $h_2(t)$, respectivamente.

Homogêneas.

1. Se as extremidades estiverem isoladas, o fluxo de calor através destas é nulo

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}(t,a) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{t,b}) = 0\,;$$

2. Se extremidades forem mantidas à mesma temperatura T_0, definimos $v(t,x) = u(t,x) - T_0$, que satisfaz a equação do calor (Exemplo 2) com condições de fronteira

$$v(t,a) = v(t,b) = 0\,;$$

3. Pode–se ainda adotar condições mistas, como por exemplo

$$u(t,a) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{t,b}) = 0\,.$$

3.1.1 Classificação de Equações Diferenciais Parciais

Cada uma das equações nos Exemplos 1–3 acima, pertence a uma classe distinta. Por simplicidade, na discussão a seguir vamos considerar equações diferencias parciais de segunda ordem em $\mathbb{R}^2$.

O operador diferencial de segunda ordem mais geral é da forma

$$\mathcal{L} = a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2f\frac{\partial}{\partial x} + 2g\frac{\partial}{\partial y} + h \tag{3.1.2}$$

onde os coeficientes $a, b, \ldots$, embora podendo ser funções das variaveis x e y, serão considerados constantes por simplicidade.

Considere a seguinte transformação afim de variaveis:

$$\begin{aligned} \xi &= x + \lambda_1 y \\ \eta &= x + \lambda_2 y \,, \end{aligned}$$

com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Em vista de

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta} = \lambda_1\frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_2\frac{\partial}{\partial \eta} \,, \end{aligned}$$

o operador (3.1.2) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= a\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_2\frac{\partial}{\partial \eta}\right) \\ &\qquad + c\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_2\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 + \cdots \\ &= A\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2B\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + C\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \cdots \,, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= a + 2b\lambda_1 + c\lambda_1^2 \\ B &= a + b\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) + c\lambda_1\lambda_2 \\ C &= a + 2b\lambda_2 + c\lambda_2^2 \end{aligned}$$

e os pontilhados indicando a presença de termos de ordem inferior.

Escolhendo λ_1 e λ_2 convenientemente, podemos anular duas constantes entre A, B e C. Por exemplo, se λ_1 e λ_2 forem as raízes do polinômio $a + 2b\lambda + c\lambda^2$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{c} \\ \lambda_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{c} \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

então $A = C = 0$ e

$$B = \frac{-2}{c}\left(b^2 - ac\right) \,. \tag{3.1.4}$$

Portanto, na ausência de termos de ordem 0 e 1 e sob a hipótese que λ_1 e λ_2 sejam dados por (3.1.3), a equação

$$\mathcal{L}u = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se reduz a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \,, \tag{3.1.5}$$

cuja solução geral é da forma

$$u(x, y) = f(\xi) + g(\eta) = f(x + \lambda_1 y) + g(x + \lambda_2 y) \,, \tag{3.1.6}$$

com f e g funções a serem determinadas pelas condições de contorno.

Exercício 3.1.3 *Verifique que (3.1.5) é solução de (3.1.6).*

Há três possibilidades a serem consideradas:

1. *Hiperbólico* ($b^2 - ac > 0$). Neste caso as raízes λ_1, λ_2 são reais e distintas. Pela mudança de variavel

$$\begin{aligned} s &= (\xi + \eta)/2 \\ t &= (\xi - \eta)/(2v) \,, \end{aligned}$$

(3.1.5) torna-se a equação homogênea da corda vibrante

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \,.$$

2. *Elíptico* ($b^2 - ac < 0$). As raízes λ_1, λ_2 são conjugadas complexa uma da outra e $\eta = x + \lambda_2 y = x + \overline{\lambda}_1 y = \overline{\xi}$. Neste caso, a equação (3.1.5) fica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \overline{\xi}} = 0\,. \tag{3.1.7}$$

Escrevendo $\xi = s + it$ onde $s = \Re e\,\xi$ e $t = \Im m\,\xi$, (3.1.7) torna-se a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,.$$

3. *Parabólico* ($b^2 - ac = 0$). Neste caso as raízes λ_1, λ_2 são degeneradas e ξ não é independente de η. Considere então $\eta = \eta(x, y)$ uma variavel independente ($\lambda_2 = 0$, por exemplo), então segue de (3.1.3) e (3.1.4) que $A = B = 0$ e $C \neq 0$ e a equação (3.1.5) é substituida por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \tag{3.1.8}$$

cuja solução geral é

$$u(x, y) = f(\xi) + \eta g(\xi) = f_1\left(x - (b/c)y\right) + y\, g_1\left(x - (b/c)y\right)$$

O típico exemplo de uma equação parabólica é a equação do calor (Exemplo *2.*) que é de primeira ordem no tempo e segunda ordem no espaço.

3.1.2 Condições de Contorno Apropriadas

Existem três tipos de condições de contorno. Por simplicidade, consideremos equações em $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas cartesianas x e y eventualmente serão interpretadas como tempo e espaço.

Seja $\mathcal{C}$ um curva em $\mathbb{R}^2$ parametrizada pelo seu comprimento de arco:

$$s \longmapsto \mathbf{z}(s) = (x(s), y(s))$$

com $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$ [1]. Denotamos por $\mathbf{n} = \mathbf{n}\,(x, y)$ a normal à curva $\mathcal{C}$ no ponto (x, y). Os tipos de condições de contorno são determinados como segue.

Dirichlet. Especifica–se o valor da função $u = u(x, y)$ em cada ponto (x, y) do contorno $\mathcal{C}$.

[1] Note que o comprimento infinitesimal de arco, dado por $|\mathbf{z}(s + ds) - \mathbf{z}(s)| \simeq |\mathbf{z}'(s)|\, ds$, é igual a ds se $\mathbf{z}(s)$ for uma parametrização pelo comprimento de arco.

Neumann. Especifica–se a componente normal do gradiente $\mathbf{n} \cdot \nabla u = n_1 \partial u/\partial x + n_2 \partial u/\partial y$ em cada ponto (x, y) do contorno $\mathcal{C}$.

Cauchy. u e $\mathbb{N} \cdot \nabla u$ são especificadas em cada ponto (x, y) do contorno $\mathcal{C}$.

A questão que se apresenta é a seguinte:

Qual entre estas condições (se devemos escolher apenas uma) é a mais apropriada para determinar (univocamente) a solução de uma equação a derivadas parciais?

Para uma equação diferencial ordinária de segunda ordem $u'' + au' + bu = 0$, a especificação de $u(x_0)$ e $u'(x_0)$ em algum ponto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ determina a solução u em todo domínio. Veremos que para determinar a solução de equações a derivadas parciais cada tipo de equação demanda um tipo certo de condições de contorno. Um breve sumário da resposta é dado a seguir:

1. Equações *Hiperbólicas* requer condições de contorno de *Cauchy* sobre contornos $\mathcal{C}$ *abertos.*

2. Equações *Elípticas* requer condições de contorno do tipo *Dirichlet* ou *Neumann* sobre contornos $\mathcal{C}$ *fechados.*

3. Equações *Parabólicas* requer condições de contorno do tipo *Dirichlet* ou *Neumann* sobre contornos $\mathcal{C}$ *abertos.*

Suponhamos que sejam dados os valores de u e $\mathbf{n} \cdot \nabla u$ ao longo do contorno $\mathcal{C}$. Lembrando que $\mathcal{C}$ é parametrizado pelo comprimento de arco (isto é, $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$), e que $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$ é o vetor unitário normal a $\mathcal{C}$ no ponto $\mathbf{z}(s) = (x(s), y(s))$, então o sistema

$$\begin{aligned} N(s) &:= (\mathbf{n} \cdot \nabla u)\,(\mathbf{z}(s)) &&= -y'\,\frac{\partial u}{\partial x} + x'\,\frac{\partial u}{\partial y} \\ \psi(s) &:= \frac{du}{ds}(\mathbf{z}(s)) &&= x'\,\frac{\partial u}{\partial x} + y'\,\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

é suficiente para determinar as primeiras derivadas de u. Para tal, note que a matriz $A = \begin{pmatrix} -y' & x' \\ x' & y' \end{pmatrix}$ é inversível ($\det A = -\left(x'^2 + y'^2\right) = -1$) e $A^{-1} = A$. Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -y' N(s) + x' \psi(s) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= x'\, N(s) + y'\, \psi(s)\,. \end{aligned}$$

Para determinar as segundas derivadas ao longo do contorno, usamos as equações

$$\begin{aligned} \phi(s;x) &:= \frac{d}{ds}\frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{z}(s)) = x'\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y'\,\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ \phi(s;y) &:= \frac{d}{ds}\frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{z}(s)) = y'\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x'\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

mais

$$a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) .$$

Este sistema de equações não–homogêneas tem solução para as derivadas segundas se a matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & 2b & c \\ x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \end{pmatrix}$$

for não singular ($\det M \neq 0$).

Concluimos que os valores de u e $\mathbf{n}\cdot\nabla u$ ao longo do contorno $\mathcal{C}$ são **insuficientes** para determinar as segundas derivadas ao longo de $\mathcal{C}$, se a seguinte equação

$$a\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - 2b\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + c\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 0 \qquad (3.1.9)$$

for satisfeita para a parametrização $s \longmapsto (x(s), y(s))$ de $\mathcal{C}$ segundo seu comprimento de arco.

A equação (3.1.9) determina duas direções em cada ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ dadas pelas soluções de

$$a - 2b\frac{dx}{dy} + c\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dy} - \lambda_1\right)\left(\frac{dx}{dy} - \lambda_2\right) = 0\,, \qquad (3.1.10)$$

denominadas **direções características** de uma equação a derivadas parciais. Note que estas direções, $dx/dy = \lambda_1, \lambda_2$, são reais somente no caso de equações parabólicas ou hiperbólicas.

Denominamos **característica** a curva γ cuja tangente em cada ponto $(x,y) \in \gamma$ é uma direção característica. Assim, uma condição de contorno é apropriada para uma dada equação, se o contorno $\mathcal{C}$ em nenhum ponto **tangencia** uma de suas características.

Exemplo 3.1.4 *Considere a seguinte equação parabólica*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \qquad 0 < x < 1\,,\ -\infty < y < \infty\,, \qquad (3.1.11)$$

com condições de contorno de Dirichlet

$$u(0,y) = y^2 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{u}(1,\mathrm{y}) = 1\,,$$

para todo $-\infty < y < \infty$.

O contorno $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ *é aberto dado pelas retas paralelas* $\mathcal{C}_1 = \{x = 0,\ y \in \mathbb{R}\}$ *e* $\mathcal{C}_2 = \{x = 1,\ y \in \mathbb{R}\}$ *parametrizadas por* $\mathbf{z}_1(s) = (0, s)$ *e* $\mathbf{z}_2(s) = (1, s)$*, respectivamente. Note que* $|\mathbf{z}_1| = |\mathbf{z}_2| = 1$.

A equação das características $(dy/ds)^2 = 0$ *gera uma família de retas* $y = \mathrm{const}$ *ortogonais à* $\mathcal{C}$.

A solução geral de (3.1.11) é dada por

$$u(x,y) = x\,f(y) + g(y)\,,$$

onde f *e* g *são obtidas pelas condições de contorno*

$$\begin{aligned} u(0,y) &= g(y) = y^2 \\ u(1,y) &= f(y) + g(y) = 1\,. \end{aligned}$$

Portanto

$$u(x,y) = x\left(1 - y^2\right) + y^2\,.$$

Exemplo 3.1.5 *Considere a equação da corda vibrante*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\,. \qquad (3.1.12)$$

As retas no plano $t \times x$ *com inclinação* $\pm v$

$$\begin{aligned} x - vt &= \xi\,, \qquad \xi \in \mathbb{R} \\ x + vt &= \eta, \qquad \eta \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

são soluções de (3.1.10) com $y = t$, $a = 1$, $b = 0$ *e* $c = -1/v^2$*:*

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2\,,$$

e definem a família de curvas características para esta equação.

Seja $\mathcal{C}$ *a reta* $t = 0$ *e considere a condição de Cauchy*

$$u|_{\mathcal{C}} = u(0,x) \equiv \psi(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{\mathrm{v}}\,(\mathbf{n}\cdot\nabla \mathrm{u})|_{\mathcal{C}} = \frac{1}{\mathrm{v}}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}(0,\mathrm{x}) \equiv \mathrm{N}(\mathrm{x})\,.$$

A solução geral de (3.1.12) é $u(t,x) = f(\xi) + g(\eta)$ com f e g dadas pela fórmula de D' Alembert

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(\psi(x) - \int^x N(x')\,dx'\right) \\ g(x) &= \frac{1}{2}\left(\psi(x) + \int^x N(x')\,dx'\right) . \end{aligned}$$

Exercício 3.1.6 *Deduza a fórmula de D' Alembert.*

3.2 Separação de Variáveis

3.2.1 O Problema de Valores Inicial e de Fronteira

Como ilustração do método de separação de variáveis, trataremos o problema de auto–valores de uma membrana vibrante. O problema é descrito pela equação homogênea

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.2.1}$$

definida no domínio $\mathcal{R} = \{(t,x,y) \in \mathbb{R}^3 : t > 0,\ (x,y) \in \Lambda\}$ onde Λ é uma região limitada do plano. $u = u\,(t,x,y)$ descreve o quanto a membrana se afasta de sua posição de equilíbrio $u = 0$ no instante t e posição (x,y).

Vamos considerar a condição de Dirichlet na fronteira Γ de Λ:

$$u\,(t,\Gamma) = 0 \tag{3.2.2}$$

correspondendo a manter fixa as extremidades da membrana na posição de equilíbrio.

O método de separação de variáveis consiste em procurar soluções da forma

$$u\,(t,x,y) = T(t)\,v(x,y)\,.$$

Substituindo esta solução em (3.2.1) e dividindo em seguida por u, obtem-se

$$\frac{-1}{v}\nabla^2 v = \frac{-1}{v^2 T}T'' = \lambda \tag{3.2.3}$$

onde $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ é o Laplaceano em $\mathbb{R}^2$. A constante de separação pode ser escrita como $\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{R}$, pois $-\nabla^2$ é um operador positivo.

Como o seu próprio nome indica, o método separa a equação (3.2.1) em duas equações

$$\begin{aligned} -\nabla^2 v &= k^2\,v \\ -T'' &= k^2\,v^2\,T \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

sendo a segunda uma equação ordinária.

As soluções de (3.2.1) são portanto dadas por

$$u\,(t,x,y) = (a\,\sin kvt + b\,\cos kvt)\;v(x,y) \tag{3.2.5}$$

onde v satisfaz a equação de auto–valores ($\lambda = k^2$)

$$-\nabla^2 v = \lambda v\,,$$

sujeita à condição de fronteira

$$v\,(\Gamma) = 0. \tag{3.2.6}$$

Nos dois exemplos a seguir veremos que este problema de **valor de fronteira** admite uma sequência enumeravel infinita de auto–valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ positivos, e auto–funções associadas $v_1,\ v_2,\ \ldots$, mutuamente ortogonais com respeito ao produto interno:

$$(v_i, v_j) := \int\!\!\int_\Lambda v_i\,(x,y)\;v_j\,(x,y)\;dx\,dy\,. \tag{3.2.7}$$

A ortogonalidade das auto–funções segue de maneira análoga ao problema de Sturm–Liouville, como consequência da fórmula de Green (veja Duff & Naylor, "Differential Equations of Applied Mathematics", pg. 201). Da primeira equação de (3.2.4),

$$\begin{aligned} (\lambda_i - \lambda_j)\int\!\!\int_\Lambda v_i\,(x,y)\;v_j\,(x,y)\;dx\,dy &= -\int\!\!\int_\Lambda \left(\nabla^2 v_i\,v_j - v_i\,\nabla^2 v_j\right) dx\,dy \\ &= -\int_\Gamma \left(\nabla v_i\,v_j - v_i\,\nabla v_j\right) ds \\ &\quad + \int\!\!\int_\Lambda \left(\nabla v_i\,\nabla v_j - \nabla v_i\,\nabla v_j\right) dx\,dy \\ &= -\int_\Gamma \left(\nabla v_i\,v_j - v_i\,\nabla v_j\right) ds \end{aligned}$$

se anula para $i \neq j$, devido à condição de fronteira (3.2.6).

O conjunto das auto–funções $\{v_j\,(x,y)\}$ (normalizado $\|v_i\|^2 = (v_i, v_i) = 1$) forma um sistema ortonormal completo. Escrevendo $\lambda_j = k_j^2$, a solução das equações homogêneas (3.2.1) e (3.2.2), em vista de (3.2.5) e do princípio de superposição, é dada pela combinação linear

$$u\,(t,x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j \cos k_j v t + b_j \sin k_j v t\right)\;v_j\,(x,y) \tag{3.2.8}$$

onde as constantes a_j, b_j, $j \in \mathbb{N}_+$, são os coeficientes da expansão em série das condições iniciais

$$u(0,x,y) = f(x,y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}(0,\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{g}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,, \tag{3.2.9}$$

nas auto–funções $\{v_j(x,y)\}$ dados pelas fórmulas

$$\begin{aligned} a_j &= (v_j, f) \\ &= \int\int_\Lambda f(x,y)\, v_j(x,y)\, dx\, dy \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

e

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{1}{\upsilon k_j}(v_j, g) \\ &= \frac{1}{\upsilon k_j}\int\int_\Lambda g(x,y)\, v_j(x,y)\, dx\, dy\,. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Exercício 3.2.1 *Use as relações de ortogonalidade (3.2.7) para deduzir as fórmulas (3.2.10).*

Note que a expressão (3.2.8) pode ser escrita em termos dos operadores de projeção E_j na direção da autofunção v_j como

$$u(t,x,y) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\cos k_j\upsilon t\, E_j f + \frac{1}{\upsilon k_j}\sin k_j \upsilon t\, E_j g\right)$$

(veja subseção 1.2.2 sobre cadeias harmônicas). O conjunto das auto–funções $\{v_j\}$ descreve os **modos normais** e a grandezas $\omega_j = k_j\upsilon$, $j \in \mathbb{N}_+$, são as **frequências normais** de vibraçã o da membrana.

Exemplo 3.2.2 ***A membrana quadrada.*** *Considere a equação (3.2.1) no domínio* $\Lambda = \{0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$. *Pela discussão geral, a solução do problema se reduz ao seguinte problema de auto–valores*

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \lambda v \tag{3.2.12}$$

em Λ *sujeita à condição de fronteira* $v(\Gamma) = 0$, *isto é,*

$$v(0,y) = v(\pi,y) = v(x,0) = v(x,\pi) = 0$$

para todo $0 \le x \le \pi$ *e* $0 \le y \le \pi$.

Usando o método de separação de variáveis, escrevemos $v(x,y) = X(x)\,Y(y)$. *Substituindo esta forma na equação (3.2.12) e dividindo por* $X\,Y$, *resulta nas equações*

$$\begin{aligned} -X'' &= \alpha X \\ -Y'' &= \beta Y \end{aligned}$$

com $\alpha + \beta = \lambda$ *e condições de fronteira*

$$X(0) = X(\pi) = Y(0) = Y(\pi) = 0\,.$$

As auto–funções deste problema são dadas por

$$v_{n,m}(x,y) = \frac{2}{\pi}\sin nx\, \sin my\,, \qquad n,\, m \in \mathbb{N}_+$$

cujos auto–valores correspondentes são

$$\lambda_{n,m} = n^2 + m^2\,.$$

O desvio da membrana com relação a sua posição de equilíbrio no instante t, *dado que no instante* $t = 0$ *temos as equações (3.2.9), é dado por*

$$u(t,x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{\,n,m}\cos\sqrt{n^2+m^2}\upsilon t + b_{n,m}\sin\sqrt{n^2+m^2}\upsilon t\right)\ \sin nx\, \sin my$$

onde

$$a_{n,m} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi\int_0^\pi f(x,y)\, \sin nx\, \sin my\; dx\, dy$$

e

$$b_{n,m} = \frac{2}{\upsilon\pi\sqrt{n^2+m^2}}\int_0^\pi\int_0^\pi g(x,y)\, \sin nx\, \sin my\; dx\, dy\,.$$

Exemplo 3.2.3 ***Membrana Circular.*** *Consideremos o problema de auto–valores dado pela equação de Helmholtz (3.2.12) em um domínio circular*

$$\Lambda = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$$

sujeita à condição de fronteira $v(\Gamma) = 0$, *onde* $\Gamma = \{x^2 + y^2 = 1\}$ *é a circunferência de raio unitário.*

Uma particular solução de (3.2.12) é dada pela onda plana estacionária

$$v(x,y) = e^{iky} \tag{3.2.13}$$

com direção de propagação y *(a escolha desta direçã o é arbitrária). Em coordenadas polares:*

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta\,,$$

(3.2.13) fica

$$v(r,\theta) = e^{ikr\sin\theta} \tag{3.2.14}$$

que é uma solução da equação (3.2.12) em coordenadas polares

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + k^2 v = 0$$

Exercício 3.2.4 *Verifique que (3.2.14) satisfaz esta equação.*

Exemplo 3.2.5 *Como $v = v(r, \theta)$ é uma função periódica de período 2π, podemos escrever esta função em série de Fourier*

$$v(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r)\, e^{in\theta}$$

onde os coeficientes c_n, $n \in \mathbb{Z}$, são dados pela fórmula inversa

$$c_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta \tag{3.2.15}$$

e satisfazem a equação de Bessel (veja Exemplo 2.1.41)

$$c'' + \frac{1}{r} c' + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) c = 0 \tag{3.2.16}$$

com condição de fronteira $c(0) < \infty$ e $c(1) = 0$.

A solução desta equação, conhecida como função de Bessel de primeira espécie de ordem n, é obtida pela substituição de (3.2.14) em (3.2.15):

$$c_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\sin\theta - in\theta}\, d\theta \tag{3.2.17}$$

comumente denotada por $J_n(kr)$ ((3.2.17) é uma de suas formas integrais).

Pode–se mostrar que J_n também pode ser escrita na forma de série

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m+n)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2m} \tag{3.2.18}$$

(esta expressão bem como as propriedades a seguir serão discutidas mais adiante). Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, $J_n(x)$ se anula em um número infinito de valores

$$x_{n,m}\,, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

denominados zeros da função de Bessel.

Portanto, as auto–funções (ou modos normais de vibração) do problema de auto–valores (3.2.12) para membrana circular são

$$v_{n,m}(r, \theta) = \frac{1}{N_{n,m}} J_n(x_{n,m} r)\, e^{in\theta}\,, \qquad n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}_+\,,$$

com $N_{n,m} = \pi^{1/2} J_n'(x_{n,m})$ a normalização. Note que $v_{n,m}$ satisfaz as condição de fronteira $v_{n,m}(0, \theta) < \infty$ (pois a soma (3.2.18) é convergente em $x = 0$) e $v_{n,m}(1, \theta) = 0$ (pois cada $x_{n,m}$ é um zero de $J_n(x)$).

Os auto–valores correspondentes são

$$\lambda_{n,m} = x_{n,m}^2\,.$$

Note ainda que, em vista da discussão geral (veja eq. (3.2.7)) $v_{n,m}$ são ortonormais com respeito ao produto interno

$$\begin{aligned}
(v_{n,m}, v_{n',m'}) \quad : \quad &= \int_0^1 r\, dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \overline{v}_{n,m}(r, \theta)\, v_{n',m'}(r, \theta) \\
&= \frac{2\pi}{N_{n,m}^2} \int_0^1 r\, dr\, J_n(x_{n,m} r)\, J_{n'}(x_{n',m'} r) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, e^{i(n-n')\theta} \\
&= \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}\,.
\end{aligned}$$

O desvio da membrana $u = u(t, r, \theta)$ com relação a sua posição de equilíbrio $u = 0$ no instante t, dado que no instante $t = 0$ temos

$$u(0, r, \theta) = f(r, \theta) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}(0, \mathrm{r}, \theta) = \mathrm{g}(\mathrm{r}, \theta)\,,$$

é dado por

$$u\,(t, x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N_{n,m}} \left(a_{\,n,m} \cos x_{n,m} \upsilon t + b_{n,m} \sin x_{n,m} \upsilon t \right)\; J_n(x_{n,m} r)\, e^{in\theta}$$

onde

$$a_{n,m} = \frac{1}{N_{n,m}} \int_0^1 r\, dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, f\,(r, \theta)\; J_n(x_{n,m} r)\, e^{-in\theta}$$

e

$$b_{n,m} = \frac{1}{\upsilon N_{n,m} x_{n,m}} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} g\,(r, \theta)\; J_n(x_{n,m} r)\, e^{-in\theta}\, r\, dr\, d\theta.$$

3.3 Função de Green

3.3.1 Equação de Helmholtz Não–Homogênea no Círculo

Para resolver a equação de Helmholtz não–homogênea no círculo, é necessário determinar uma solução Y_n da equação de Bessel linearmente independente a J_n. Veremos que esta questão requer uma análise um pouco extensa.

Embora (3.2.17) foi deduzida para n inteiro, esta mesma expressão é também solução da equação de Bessel (3.2.16) se n for substituido por um número real ν. Neste caso, a equação (3.2.18) ainda é valida se a função $(m+n)!$ for substituída pela sua continuação analítica $\Gamma(m+n+1)$, onde

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt\,, \tag{3.3.1}$$

$z \in \mathbb{C}$, $\Re e\, z > 0$, é a **função Gama** de Euler.

Exercício 3.3.1 *Verifique que a função Gama satisfaz a seguinte relação funcional*

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \tag{3.3.2}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re e\, z > 0$. Mostre que $\Gamma(1) = 1$ e deduza, a partir de (3.3.2),

$$\Gamma(n+1) = n!\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 3.3.2 *Use (3.2.18) e (3.3.1) para demonstrar*

$$J_{-n}(x) = (-1)^n\, J_n(x) \tag{3.3.3}$$

para $n \in \mathbb{N}$.

A seguinte proposição nos dá uma resposta incompleta à nossa questão.

Proposição 3.3.3 *As funções $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ dadas pela série (3.2.18) com $(m+n)!$ substituido por $\Gamma(m+n+1)$, são duas soluções linearmente independentes da equação de Bessel*

$$xu'' + u' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) u = 0 \tag{3.3.4}$$

se e somente se $\nu \notin \mathbb{Z}$.

Prova. Vimos que $\det W = C$ onde W é a matriz

$$W = \begin{pmatrix} J_\nu & J_{-\nu} \\ -xJ'_\nu & -xJ'_{-v} \end{pmatrix}, \tag{3.3.5}$$

e C é uma constante independente de x (lembre que isto é válido para qualquer problema de Sturm–Liouville). Para isto, basta verificar, usando a equação (3.3.4), que a derivada com respeito a x de

$$\det W = x\left(J'_\nu(x)\, J_{-\nu}(x) - J_\nu(x)\, J'_{-\nu}(x)\right)$$

se anula.

Para obter o valor da constante C, consideramos a função (3.2.18) e sua derivada no limite em que $x \to 0$:

$$J_{\pm\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(1\pm\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\pm\nu}\left(1 + \mathcal{O}\left(x^2\right)\right)$$

e

$$J'_{\pm\nu}(x) = \frac{\pm\nu}{2\Gamma(1\pm\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\pm\nu-1}\left(1 + \mathcal{O}\left(x^2\right)\right)$$

onde $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ significa que $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x)$ converge para uma constante não nula. Note que, $\lim_{x\to 0} J_{-\nu}(x) = \infty$ se $\nu > 0$ e $\nu \notin \mathbb{N}$.

Portanto, desprezando termos de ordem superior em x,

$$\begin{aligned} \det W &= \frac{\nu\, x}{2\Gamma(1+\nu)\,\Gamma(1-\nu)}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-1} + \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\right] \\ &= \frac{2\nu}{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma(1-\nu)}\,. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Note ainda que os termos que foram desprezados se anulam quando $x \to 0$ e como $\det W = C$ é independente de x (3.3.6) é de fato o valor da constante C.

Falta apenas provar que C é não nula para $\nu \notin \mathbb{Z}$. Isto segue do seguinte exercício.

Exercício 3.3.4 *Mostre que a seguinte relação*

$$\Gamma(1+z)\,\Gamma(1-z) = \frac{z\,\pi}{\sin \pi\, z}$$

é satisfeita para $z \notin \mathbb{Z}$.

Indicação: *Usando as seguintes mudanças de variaveis: $t = u^2$ e $s = v^2$ e, em seguida, $u = r\cos\theta$ e $v = r\sin\theta$, mostre que*

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\,\Gamma(y) &= \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \int_0^\infty e^{-s}\, s^{y-1}\, ds \\ &= \Gamma(x+y)\, B\,(x,y) \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

onde

$$B(x,y) = 2\int_0^{2\pi} \cos^{2x-1}\theta\ \sin^{2y-1}\theta\, d\theta$$

é a função Beta. Continuando, use a transformação de variavel $\cos^2\theta = p/\left(1+p\right)$ para mostrar que

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{p^{x-1}}{(1+p)^{x+y}}\, dp$$

e, pelo teorema de Cauchy e integral de resíduo, verifique que

$$B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \tag{3.3.8}$$

se $x \notin \mathbb{Z}$. Combinando as relações (3.3.2), (3.3.7)e (3.3.8), complete sua prova.

De (3.3.6) e Exercício 3.3.4, temos

$$\det W = \frac{2 \sin \nu\pi}{\pi} .$$

□

A segunda solução Y_ν da equação (3.3.4), linearmente independente a J_ν para todo $\nu \in \mathbb{R}$, é dada seguinte seguinte combinação linear:

$$Y_\nu(x) := \frac{\cos \nu\pi \, J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} .$$

Em vista de (3.3.3), tanto o numerador como o denomimador se anula quando ν tende a um número inteiro n. Usando l'Hopital, temos

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \lim_{v \to n} \frac{\cos \nu\pi \, J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \\ &= \lim_{v \to n} \frac{-\pi \sin \nu\pi \, J_\nu(x) + \cos \nu\pi \, (\partial J_\nu / \partial \nu)(x) - (\partial J_{-\nu}/\partial \nu)(x)}{\pi \cos \nu\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left. \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right|_{\nu=n} - (-1)^n \left. \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right|_{\nu=n} \right) . \end{aligned}$$

Deixamos como exercício a verificação da afirmação que J_ν e Y_ν são linearmente independentes:

Exercício 3.3.5 *Mostre que*

$$\det W = -\frac{2}{\pi}$$

é válido para todo $\nu \in \mathbb{R}$ (inclusive inteiros) se W for a matriz (3.3.5) com $J_{-\nu}$ substituida por Y_ν.

Considere agora a equação de Helmholtz não–homogênea

$$-\nabla^2 v - k^2 v = f$$

no domínio limitado $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, com condições de fronteira $v(\Gamma) = 0$. Desejamos encontrar uma distribuição G tal que a solução deste problema seja dada pela integral

$$v(x, y) = \int_\Lambda dx \, dy \, G(x, y, x', y') \, f(x', y') . \tag{3.3.9}$$

Isto é, G é a função de Green deste problema e como tal satisfaz a equação

$$-\nabla^2 G - k^2 G = \delta(x - x') \, \delta(y - y') .$$

Seja Λ o círculo unitário $\{x^2 + y^2 < 1\}$. Em cordenadas polares a integral (3.3.9) é escrita como[2]

$$v(r, \theta) = \int_0^1 r' dr' \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, G(r, \theta, r', \theta') \, f(r', \theta')$$

e satisfaz a equação

$$-\left(\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} \right) - k^2 G = \frac{1}{r} \delta(r - r') \, \delta(\theta - \theta') . \tag{3.3.10}$$

A seguir resolveremos a equação (3.3.10) por um método misto: parte usando o método em série e parte pelo método direto.

Como $G = G(r, \theta, r', \theta')$ é uma função periódica de período 2π nas variáveis θ e θ'escrevemos

$$G(r, \theta, r', \theta') = G(r, r', \theta - \theta') = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(r, r') \, e^{in(\theta - \theta')} \tag{3.3.11}$$

(o fator $(2\pi)^{-1}$ a frente é escolhido por conveniência), onde os coeficientes G_n, $n \in \mathbb{N}$, desta expansão são dados pela fórmula de Fourier inversa

$$G_n(r, r') = \int_{-\pi}^{\pi} G(r, r', \zeta) \, e^{-in\zeta} \, d\zeta .$$

Note que o termo não–homogêneo em θ e θ' depende apenas de sua diferença. Este fato não pode ser utilizado para variável radial pois a condição de fronteira destroi a invariança translacional do termo não–homogêneo correspondente.

Substituindo (3.3.11) em (3.3.10), e usando a relação de completeza do sistema ortonormal $\left\{ u_n(\theta) = e^{in\theta} / \sqrt{2\pi} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{u_n}(\theta') \, u_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\{in(\theta - \theta')\} = \delta(\theta - \theta')$$

[2] A solução $v(x, y)$ em coordenadas polares é dada por $v(x(r, \theta), y(r, \theta))$. Em outras palavras, as variáveis x e y da solução v devem ser substituídas por $r \cos \theta$ e $r \sin \theta$, respectivamente. A rigor, por se tratar de uma função diferente, deveríamos denotar esta solução por uma outra letra, $w(r, \theta)$ por exemplo. Por um abuso de linguagem, manteremos a notação $v(r, \theta)$ também para esta função.

obtemos para cada $n \in \mathbb{N}$ a seguinte equação diferencial ordinária

$$-rG_n'' - G_n' + \left(\frac{n^2}{r} - k^2 r\right) G_n = \delta(r - r') \ .$$

Segundo o procedimento usual, devemos encontrar duas soluções linearmente independente U_1 e U_2, que são soluções das equações de Bessel homogêneas:

$$-rU_1'' - U_1' + \left(\frac{n^2}{r} - k^2 r\right) U_1 = 0\,, \qquad 0 \le r < r' \tag{3.3.12}$$

com $U_1(0) < \infty$, e

$$-rU_2'' - U_2' + \left(\frac{n^2}{r} - k^2 r\right) U_2 = 0\,, \qquad r' < r \le 1 \tag{3.3.13}$$

com $U_2(1) = 0$.

A função de Green G_n é dada por

$$G_n(r, r') = \begin{cases} \dfrac{U_1(r)\, U_2(r')}{\det \widetilde{W}} & \text{se} \quad 0 \le r < r' \\[2ex] \dfrac{U_1(r')\, U_2(r)}{\det \widetilde{W}} & \text{se} \quad r' < r \le 1 \end{cases} \tag{3.3.14}$$

onde

$$\det \widetilde{W} = \det \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ -rU_1' & -rU_2' \end{pmatrix} = r\ (U_1' U_2 - U_1 U_2')$$

é uma função constante em r por se tratar de um problema de Sturm–Liouville.

Temos

$$U_1(r) = J_n(kr)$$

e

$$U_2(r) = J_n(kr) Y_n(k) - J_n(k) Y_n(kr)\ .$$

satisfazem (3.3.12) e (3.3.13) com $U_1(0) < \infty$ e $U_2(1) = 0$, respectivamente. Além disso, se k não coincidir com algum dos zeros $x_{n,m}$ da função de Bessel $J_n(x)$, usando o resultado do Exercício 3.3.5, temos

$$\begin{aligned} \det \widetilde{W} &= kr\,[J_n'(kr)\,(J_n(kr)Y_n(k) - J_n(k)Y_n(kr)) \\ &\qquad - J_n(kr)\,(J_n'(kr)Y_n(k) - J_n(k)Y_n'(kr))] \\ &= -kr\,[J_n'(kr)\,Y_n(kr) - J_n(kr)\,Y_n'(kr)]\,J_n(k) \\ &= \frac{2J_n(k)}{\pi}\ . \end{aligned}$$

Substituindo estas quantidades em (3.3.14) obtemos

$$G_n(r, r') = \begin{cases} \dfrac{\pi\, J_n(kr)}{2J_n(k)}\,(J_n(kr')Y_n(k) - J_n(k)Y_n(kr')) & \text{se} \quad 0 \le r < r' \\[2ex] \dfrac{\pi\, J_n(kr')}{2J_n(k)}\,(J_n(kr)Y_n(k) - J_n(k)Y_n(kr)) & \text{se} \quad r' < r \le 1 \end{cases}$$

resultando, em vista de (3.3.11),

$$G(r, \theta, r', \theta') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(kr)}{4J_n(k)}\,(J_n(kr')Y_n(k) - J_n(k)Y_n(kr'))\, e^{in(\theta - \theta')}$$

se $0 \le r \le r'$ e

$$G(r, \theta, r', \theta') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(kr')}{4J_n(k)}\,(J_n(kr)Y_n(k) - J_n(k)Y_n(kr))\, e^{in(\theta - \theta')}$$

se $r' < r \le 1$.

A função de Green G também pode ser obtida na forma de série usando os auto–valores $k_{n,m}^2$, e auto–funções $v_{n,m}(r, \theta) = (1/N_{n,m})\, J_n(k_{n,m} r)\, e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}_+$, determinados no Exemplo 3.2.3 da membrana circular:

$$\begin{aligned} G(r, \theta, r', \theta') &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{v_{n,m}}(r', \theta')\, v_{n,m}(r, \theta)}{k_{n,m}^2 - k^2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\, J_n'(k_{n,m})^2} \frac{J_n(k_{n,m} r')\, J_n(k_{n,m} r)}{k_{n,m}^2 - k^2} e^{in(\theta - \theta')}\ . \end{aligned}$$

Comparando as expressões chegamos a seguinte identidade

$$\frac{J_n(kr)}{4J_n(k)}\,(J_n(kr')Y_n(k) - J_n(k)Y_n(kr')) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\, J'(k_{n,m})^2} \frac{J_n(k_{n,m} r')\, J_n(k_{n,m} r)}{k_{n,m}^2 - k^2}$$

válida para $0 \le r \le r' \le 1$, que é uma realização das **séries de Fourier–Bessel**.

3.3.2 Função de Green para Condição Inicial

Considere agora a equação do calor homogênea

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u = 0 \tag{3.3.15}$$

no domínio $\{t > 0,\ (x, y) \in \Lambda\}$ sujeita às condições iniciais

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y)$$

e de fronteira $u(t, \Gamma) = 0$ onde Γ é a borda da região limitada Λ.

Seja Λ o círculo unitário. Podemos então escrever a solução do problema como uma série nas auto–funções $v_{n,m}(r, \theta) = (1/N_{n,m})\, J_n(k_{n,m} r)\, e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}_+$, da membrana circular:

$$u(t, r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{n,m}(t)\, v_{n,m}(r, \theta)\,. \tag{3.3.16}$$

No caso de Λ ser um domíno limitado qualquer, devemos substituir $v_{n,m}$ pelas auto–funções apropriadas da equação de Helmholtz $-\nabla^2 v = k^2 v$ com $v(\Gamma) = 0$.

Para $t = 0$,

$$u(0, r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{n,m}(0)\, v_{n,m}(r, \theta) = \varphi(r, \theta)$$

e portanto

$$\begin{aligned} c_{n,m}(0) &= (v_{n,m}, \varphi) \\ &= \frac{1}{\pi^{1/2} J_n'(k_{n,m})} \int_0^1 r\, dr\, J_n(k_{n,m} r) \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \varphi(r, \theta)\, e^{-in\theta} \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Substituindo (3.3.16) em (3.3.15), obtemos um sistema de equações de primeira ordem desacoplados:

$$\frac{1}{\kappa} c_{n,m}' + k_{n,m}^2 c_{n,m} = 0\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,\ m \in \mathbb{N}_+\,,$$

cuja solução é

$$c_{n,m}(t) = c_{n,m}(0)\, e^{-\kappa k_{n,m}^2 t} \tag{3.3.18}$$

para $t \geq 0$ e $c_{n,m}(t) = 0$ para $t < 0$, com $c_{n,m}(0)$ dado por (3.3.17).

De (3.3.16), (3.3.18) e (3.3.17) concluímos

$$\begin{aligned} u(t, r, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{n,m}(0)\, e^{-\kappa k_{n,m}^2 t}\, v_{n,m}(r, \theta) \\ &= \int_0^1 r'\, dr' \int_{-\pi}^{\pi} d\theta'\, G(t, r, \theta, r', \theta')\, \varphi(r', \theta') \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

onde

$$\begin{aligned} G(t, r, \theta, r', \theta') &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\kappa k_{n,m}^2 t}\, \overline{v_{n,m}}(r', \theta')\, v_{n,m}(r, \theta) \qquad (3.3.20) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi J_n'(k_{n,m})^2}\, e^{-\kappa k_{n,m}^2 t} J_n(k_{n,m} r')\, J_n(k_{n,m} r)\, e^{in(\theta - \theta')} \end{aligned}$$

se $t \geq 0$ e $G(t, r, \theta, r', \theta') = 0$ se $t < 0$.

Podemos escrever a função de Green G como

$$G(t, r, \theta, r', \theta') = \theta(t)\, \widetilde{G}(t, r, \theta, r', \theta')$$

onde $\theta(t)$ é a função degrau e $\widetilde{G}$ é dada por (3.3.20) para todo $t \in \mathbb{R}$. Usando o fato que, em distribuição, $\theta'(t) = \delta(t)$, obtemos a seguinte equação para a função de Green G:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) G(t, r, \theta, r', \theta') &= \frac{1}{\kappa}\delta(t)\ \widetilde{G}(t, r, \theta, r', \theta') + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{v_{n,m}}(r', \theta') \\ &\qquad \times \left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) e^{-\kappa k_{n,m}^2 t}\, v_{n,m}(r, \theta) \\ &= \frac{1}{\kappa}\delta(t)\ \widetilde{G}(t, r, \theta, r', \theta') \\ &= \frac{1}{\kappa}\delta(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{v_{n,m}}(r', \theta')\, v_{n,m}(r, \theta) \\ &= \frac{1}{\kappa}\delta(t)\, \frac{\delta(r - r')\, \delta(\theta - \theta')}{r} \end{aligned}$$

em vista da relação de completeza das auto–funções $v_{n,m}$.

3.4 Aplicações em Eletromagnetismo

As ondas eletro–magnéticas na Eletrodimâmica Clássica são descritas pela equação

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = f\,, \qquad t > 0\,, x \in \mathbb{R}^3 \tag{3.4.1}$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo (a equação é de fato vetorial mas podemos pensar u como uma das componentes transversais do campo elétrico $\mathbf{E}$ ou magnético $\mathbf{B}$). As fontes $f = f(t, x)$ dos campos eletro–magnéticos são distribuições de cargas elétricas no espaço $\mathbb{R}^3$ que variam com o tempo.

Quando o termo de fonte f é nulo, vimos que as soluções são da forma

$$u(t, x) = (a \cos kct + b \sin kct)\ v(x)$$

onde v satisfaz a equação de Helmholtz

$$-\nabla^2 v + k^2 v = 0 \tag{3.4.2}$$

de ondas estacionárias.

Quando $k = 0$, esta equação é chamada **equação de Laplace** satisfeita pelo potencial eletrostático ϕ (ϕ mantêm com o campo eletrostático a relação $\mathbf{E} = -\nabla\phi$). A equação de Laplace não homogênea

$$-\nabla^2 \phi = \rho \tag{3.4.3}$$

é chamada **equação de Poisson** onde ρ é uma distribuição estática de cargas elétricas em $\mathbb{R}^3$.

Descreveremos nesta seção soluções das equações (3.4.1), (3.4.2) e (3.4.3) em algumas situações Físicas.

3.4.1 Equação de Helmholtz em Coordenadas Esféricas

Um ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado pelas coordenadas esféricas (r, θ, φ) assim definidas

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin\theta \cos\varphi \\ x_2 &= r \sin\theta \sin\varphi \\ x_3 &= r \cos\theta \ , \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

onde $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta \le \pi$ e $-\pi \le \varphi \le \pi$.

Para escrever a equação de Helmholtz ou qualquer uma das equações citadas acima em coordenadas esféricas, é conveniente introduzir as seguintes quantidades. Seja

$$\mathbf{h}_\zeta := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial x_3}{\partial \zeta} \end{pmatrix}$$

o vetor coluna cujas entradas são derivadas parciais de (3.4.4) com respeito a $\zeta = r$, θ ou φ e denote por h_ζ a sua norma $|\mathbf{h}_\zeta| := \sqrt{\mathbf{h}_\zeta \cdot \mathbf{h}_\zeta}$. Explicitamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_r &= (\sin\theta \cos\varphi,\ \sin\theta \sin\varphi,\ \cos\theta) \\ \mathbf{h}_\theta &= (r\cos\theta \cos\varphi,\ r\cos\theta \sin\varphi,\ -r\sin\theta) \\ \mathbf{h}_\varphi &= (-r\sin\theta \sin\varphi,\ r\sin\theta \cos\varphi,\ 0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h_r^2 &= \sin^2\theta \cos^2\varphi + \sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\theta = 1 \ , \\ h_\theta^2 &= r^2 \left(\cos^2\theta \cos^2\varphi + \cos^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\theta\right) = r^2 \\ h_\varphi^2 &= r^2 \left(\sin^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\theta \cos^2\varphi\right) = r^2 \sin^2\theta \ . \end{aligned}$$

Exercício 3.4.1 *Verifique que $\mathbf{h}_r$, $\mathbf{h}_\theta$ e $\mathbf{h}_\varphi$ são vetores mutuamente ortogonais.*

Seja H a matriz cuja a transposta $H^T = [\mathbf{h}_r\, \mathbf{h}_\theta\, \mathbf{h}_\varphi]$, é formada pelos vetores $\mathbf{h}_\zeta$, $\zeta = r$, θ e φ, em suas colunas. Devido a propriedade de ortogonalidade, temos que

$$\det H = h_r\, h_\theta\, h_\varphi \tag{3.4.5}$$

e

$$H^{-1} = \left[\frac{\mathbf{h}_r}{h_r^2}\ \frac{\mathbf{h}_\theta}{h_\theta^2}\ \frac{\mathbf{h}_\varphi}{h_\varphi^2}\right]$$

que também pode ser escrita como

$$H^{-1} = \frac{1}{h_r\, h_\theta\, h_\varphi}\left[(a_r \mathbf{h}_r)\ (a_\theta \mathbf{h}_\theta)\ (a_\varphi \mathbf{h}_\varphi)\right] \tag{3.4.6}$$

onde $a_r = \dfrac{h_\theta\, h_\varphi}{h_r}$, $a_\theta = \dfrac{h_r\, h_\varphi}{h_\theta}$ e $a_\varphi = \dfrac{h_r\, h_\theta}{h_\varphi}$.

Exercício 3.4.2 *Demonstre (3.4.5) e (3.4.6).*

Com estas definições, podemos escrever a seguinte equação

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial\theta \\ \partial/\partial\varphi \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix}$$

que, em vista de (3.4.5) e (3.4.6), levam ao vetor coluna gradiente

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} = \left[\frac{\mathbf{h}_r}{h_r^2}\ \frac{\mathbf{h}_\theta}{h_\theta^2}\ \frac{\mathbf{h}_\varphi}{h_\varphi^2}\right] \begin{pmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial\theta \\ \partial/\partial\varphi \end{pmatrix} \tag{3.4.7}$$

e ao vetor linha gradiente $\nabla := \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \end{pmatrix}$

$$\nabla = \frac{1}{h_r\, h_\theta\, h_\varphi}\left[\left[(a_r \mathbf{h}_r)\ (a_\theta \mathbf{h}_\theta)\ (a_\varphi \mathbf{h}_\varphi)\right] \begin{pmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial\theta \\ \partial/\partial\varphi \end{pmatrix}\right]^T$$

resultando em

$$\nabla = \frac{1}{h_r\, h_\theta\, h_\varphi} \begin{pmatrix} \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \end{pmatrix} [(a_r \mathbf{h}_r)\ (a_\theta \mathbf{h}_\theta)\ (a_\varphi \mathbf{h}_\varphi)]^T \tag{3.4.8}$$

De (3.4.8) e (3.4.7), o operador laplaceano, dado por

$$\nabla^2 = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix}$$

em coordenadas esféricas fica

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_r\, h_\theta\, h_\varphi} \begin{pmatrix} \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & 0 & 0 \\ 0 & a_\theta & 0 \\ 0 & 0 & a_\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial\theta \\ \partial/\partial\varphi \end{pmatrix} \tag{3.4.9}$$

ou, equivalentemente,

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{h_\theta h_\varphi}{h_r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{h_r h_\varphi}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{h_r h_\theta}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right]$$

Exercício 3.4.3 *Demonstre (3.4.9).*

Explicitamente, a equação de Helmholtz em coordenadas esféricas é

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) + k^2 v = 0 \tag{3.4.10}$$

A escolha do sistema de coordenadas depende das condições de fronteira do problema. A equação (3.4.10) é apropriada para descrever a radiação eletro–magnética em regiões suficientemente distantes das fontes (aproximação puntual da fonte) e outros problemas envolvendo simetria radial.

A solução de (3.4.10) pode ser obtida pelo método de separação de variáveis: escrevemos

$$v(r,\theta,\varphi) = R(r)\, \Theta(\theta)\, \Phi(\varphi) \tag{3.4.11}$$

Ao substituir (3.4.11) na equação, dividindo por $R\,\Theta\,\Phi$, obtem-se

$$\frac{1}{r^2 R}\left(r^2 R' \right)' + \frac{1}{r^2 \sin\theta\, \Theta}\left(\sin\theta\Theta' \right)' + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta\, \Phi}\Phi'' + k^2 v = 0\,. \tag{3.4.12}$$

A separação das equações é concluída introduzindo duas constantes, m e l, tais que

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0\,, \tag{3.4.13}$$

$$-\frac{1}{r^2}\left(r^2 R' \right)' + \left(\frac{l\,(l+1)}{r^2} - k^2 \right) R = 0 \tag{3.4.14}$$

e

$$-\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\Theta' \right)' + \left(\frac{m^2}{\sin^2\theta} - l\,(l+1) \right)\Theta = 0\,. \tag{3.4.15}$$

Verifica-se que estas equações são compatíveis com (3.4.12) por simples substituição:

$$\left(\frac{l\,(l+1)}{r^2} - k^2 \right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{m^2}{\sin^2\theta} - l\,(l+1) \right) + \frac{m^2}{r^2 \sin^2\theta} + k^2 = 0\,.$$

Discutiremos a seguir a solução de cada uma das equações acima. Como φ é uma variavel angular, a função Φ é periódica de período 2π satisfazendo as condições de fronteira

$$\Phi(-\pi) = \Phi(\pi) \qquad \text{e} \qquad \Phi'(-\pi) = \Phi'(\pi)\,.$$

Portanto as soluções da equação (3.4.13) são

$$\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}$$

com m variando sobre os inteiros ($m \in \mathbb{Z}$).

Para obter as soluções da equação (3.4.14), escrevemos $R = W/\sqrt{r}$. Diferenciando temos que $R' = \left[W' - W/\left(2r\right)\right]/\sqrt{r}$ resultando em

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2 R' \right)' = \frac{1}{\sqrt{r}}\left[W'' + \frac{W'}{r} + \frac{W}{4r^2} \right]\,.$$

Substituindo na equação (3.4.14), obtemos a equação de Bessel

$$-W'' - \frac{W'}{r} + \left(\frac{(l+1/2)^2}{r^2} - k^2 \right) W = 0$$

que tem como solução o par de funções linearmente independentes $J_{l+1/2}(kr)$ e $Y_{l+1/2}(kr)$. As soluções da equação (3.4.14) são da forma

$$R_l(r) = A\, j_l(kr) + B\, n_j(kr)$$

onde

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{n_l(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{2x}}}\mathrm{Y_{l+1/2}(x)}$$

são denominadas **funções de Bessel esféricas**.

Se à equação de Helmholtz forem impostas condições de fronteira, os valores de k devem ser selecinados de forma que a função R_l se ajuste a estas condições (como no caso da membrana circular). Neste caso teremos uma coleção de auto–valores $k_{l,n}$ e auto–funções correspondentes $R_{l,n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Fazendo a mudança de variável $x = \cos\theta$, a equação (3.4.15) torna-se

$$-\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right) + \left(\frac{m^2}{1-x^2} - l\,(l-1)\right)\Theta = 0\,, \quad -1 \le x \le 1\,.$$

Reconhecemos ser esta (veja Exemplo 2.1.40) a equação Associada de Legendre, cuja soluções $P_l^m(x)$ e $Q_l^m(x)$, $l \in \mathbb{N}$, serão discutidas no capítulo a seguir.

A solução geral da equação de Helmholtz tem portanto a seguinte forma

$$v(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}(A_l j_l(kr) + B_l\, n_j(kr)) \sum_{m=-\infty}^{\infty}(a_{l,m}P_l^m(\cos\theta) + b_{l,m}Q_l^m(\cos\theta))\, e^{im\varphi}\,.$$

3.4.2 Solução da Equação de Poisson

Consideremos agora a equação de Poisson (3.4.3) com codições de fronteira em $\mathbb{R}^3$ tais que

$$\phi(\mathbf{x}) \longrightarrow 0$$

quando $|\mathbf{x}| \to \infty$.

Pelo método da função de Green, a solução desta equação é dada por

$$\phi(\mathbf{x}) = \int d^3x'\, G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\,\rho(\mathbf{x}')\,,$$

com a função de Green G satisfazendo a equação

$$-\nabla^2 G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,. \tag{3.4.16}$$

Aqui, $\delta(\mathbf{y})$ é a função delta de Dirac tridimensional $\delta(\mathbf{y}) = \delta(y_1)\,\delta(y_2)\,\delta(y_3)$.

Note que G é o potencial em $\mathbf{x}$ devido a uma carga puntual unitária em $\mathbf{x}'$. Assim, $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\,\rho(\mathbf{x}')$ é o potencial em $\mathbf{x}$ devido a uma carga puntual de valor $\rho(\mathbf{x}')$ em $\mathbf{x}'$ e ϕ é sua integral sobre o espaço todo.

Faremos uso do método direto para resolver (3.4.16). Como a fronteira se encontra no infinito, não há nenhuma direção previlegiada e G depende apenas de $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = G(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)\,.$$

Para $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$, temos

$$-\nabla^2 G(r) = 0 \tag{3.4.17}$$

onde $r = |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| > 0$.

Em coordenadas esféricas (3.4.17) fica

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\,G'\right)' = 0 \tag{3.4.18}$$

cuja solução Geral é da forma

$$G(r) = A + B\frac{1}{r}$$

onde $A = 0$ devido a condição de fronteira $G(\infty) = 0$.

Exercício 3.4.4 *Mostre que $u_1(r) = r^l$ e $u_2(r) = 1/r^{(l+1)}$ são duas soluções linearmente independentes da equação*

$$-\frac{1}{r^2}\left(r^2\,u'\right)' + \frac{l(l+1)}{r^2} = 0\,.$$

((3.4.18) é caso com $l = 0$).

Para determinar a constante B, integramos (3.4.16) sobre uma esfera $\Omega_R = \Omega_R(\mathbf{x}')$ de raio R centrada em $\mathbf{x}'$. Se $\Gamma_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = R\}$ denota a superfície de Ω_R, temos

$$-\int_{\Omega_R} \nabla^2 G\,(\mathbf{x},\mathbf{x}')\; d^3x = \int_{\Omega_R} \delta\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\; d^3x = 1$$

e, pelo Teorema de Gauss, o lado esquerdo desta equação é

$$-\int_{\Omega_R} \nabla\cdot\nabla G\,(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)\; d^3x = -\int_{\Gamma_R}\frac{\partial G}{\partial r}\,(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)\; d^3x = \frac{B}{R^2}\times 4\pi R^2\,.$$

Concluímos que

$$G(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

e

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,.$$

3.4.3 Equação das Ondas Eletro–Magnéticas

Usaremos o método das transformadas de Fourier para determinar a solução fundamental (ou função de Green) G da equação das ondas eletro–magnéticas (3.4.1).

Introduzimos a transformada de Fourier $U = \mathcal{F}[u]$ da solução u:

$$U(w,\mathbf{k}) := \int \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}}\, u(t,\mathbf{x})\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-wt)}$$

onde $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$, e sua inversa $u = \mathcal{F}^{-1}[U]$:

$$u(t,\mathbf{x}) := \int \frac{dw}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, U(w,\mathbf{k})\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-wt)} .$$

As seguintes propriedades serão usadas para este procedimento.

Propriedades. 1. Se

$$\int dt \int d^3x\, |u(t,\mathbf{x})| < \infty ,$$

então $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[u] = u$.

2.

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^n u}{\partial x_j^n}\right] = (-ik_j)^n\, \mathcal{F}[u]$$

com $j = 1, 2$ e 3.

3.

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right] = (iw)^n\, \mathcal{F}[u] .$$

4. Seja

$$(h*f)(t,\mathbf{x}) := \int \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}}\, h(t-t',\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, f(t',\mathbf{x}')$$

o produto de convolução de g com f. Então

$$\mathcal{F}[h*f] = \mathcal{F}[h]\,\mathcal{F}[f] . \tag{3.4.19}$$

Exercício 3.4.5 *Verifique as propriedades* 2, 3 *e* 4.

Aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados de (3.4.1), obtem-se

$$\left(-\frac{w^2}{c^2} + k^2\right) U(w,\mathbf{k}) = F(w,\mathbf{k})$$

onde $F = \mathcal{F}[f]$ e $k^2 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$. Portanto

$$U(w,\mathbf{k}) = \frac{c^2}{k^2c^2 - w^2} F(w,\mathbf{k}) \equiv H(w,\mathbf{k})\, F(w,\mathbf{k})$$

e pelo Teorema da Convolução (3.4.19) e propriedade 1,

$$\begin{aligned} u(t,\mathbf{x}) &= \mathcal{F}^{-1}[HF](t,\mathbf{x}) \\ &= \int dt' \int d^3x'\, G(t-t',\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, f(t',\mathbf{x}') \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

onde

$$G(\tau,\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\mathcal{F}^{-1}[H](\tau,\mathbf{z}) = \int \frac{dw}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{c^2}{k^2c^2 - w^2}\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}-w\tau)} \tag{3.4.21}$$

é a função de Green do problema.

Para calcular a integral (3.4.21), usaremos integração por resíduos. Tomando o vetor $\mathbf{z}$ como a direção do terceiro eixo de um sistema de coordenadas, temos $k = |\mathbf{k}| = \sqrt{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}}$ e $\mathbf{k}\cdot\mathbf{z} = kr\cos\theta$, onde $r = |\mathbf{z}|$ e $0 \le \theta \le \pi$. Então (3.4.21) pode ser escrita como

$$G(\tau,\mathbf{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi} e^{iw\tau} \int_0^{\infty} \frac{k^2dk}{(2\pi)^2} \frac{c^2}{k^2c^2 - w^2} \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, e^{-ikr\cos\theta} .$$

Substituindo $y = -\cos\theta$ na última integral e usando

$$\int_{-1}^{1} dy\, e^{ikry} = \frac{1}{ikr}\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right)$$

resulta (devido a paridade do integrando em k)

$$\begin{aligned} G(\tau,\mathbf{z}) &= \frac{c^2}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi} e^{iw\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\,dk}{(2\pi)^2} \frac{e^{ikr}}{k^2c^2 - w^2} \\ &= \frac{c^2}{ir} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} k\,dk\, e^{ikr} \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{e^{iw\tau}}{k^2c^2 - w^2} \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

É conveniente substituir a última integral em (3.4.22) sobre as frequências $w \in \mathbb{R}$ pela seguinte integral de contorno na variavel $\zeta \in \mathbb{C}$, com $w = \Re e\,\zeta$:

$$I_C(k) := \int_C d\zeta \frac{e^{i\zeta\tau}}{k^2c^2 - \zeta^2} = \int_C d\zeta \frac{e^{i\zeta t}}{(kc+\zeta)(kc-\zeta)} \tag{3.4.23}$$

onde $\mathcal{C}$ é um contorno fechado que, por deformações, faremos aproximar da reta real. O Teorema de Cauchy nos permite empregar este procedimento se a deformção do contorno não cruzar nenhum polo do integrando.

O problema da integral original é que os pólos do integrando

$$\zeta^{\pm} = \pm kc$$

estão justamento sobre o o contorno de integração (a reta real). Isto faz com que a integral de partida seja mal definida. Nos casos em que os pólos do integrando se encontram no caminho de integração não há uma única maneira de dar algum sentido à integral e devemos nos pautar por argumentos Físicos afim de decidir pela maneira correta.

O contorno é escolhido de maneira tal que seja válida o princípio de **causalidade**: $G(\tau, \mathbf{x}) = 0$ para $\tau < 0$. Em outras palavras, a função resposta G deve se anular em instantes anteriores à perturbação. Note que, para $\tau < 0$,

$$e^{i\zeta\tau} = e^{-i\zeta|\tau|} \longrightarrow 0$$

quando $\Im m\,\zeta \to -\infty$. Escolhemos, portanto, o contorno $\mathcal{C} = \mathcal{L}_R + \mathcal{S}_R$, onde $\mathcal{L}_R$ é o segmento de reta $[-R - i\varepsilon, R - i\varepsilon]$ imediatamente abaixo da reta real e $\mathcal{S}_R$ é uma semi–círculo de raio R fechando $\mathcal{L}_R$ por baixo se $\tau < 0$ e por cima se $\tau \geq 0$. Tomamos $R \to \infty$ após ter calculado a integral (3.4.23) por resíduo.

Concluímos que a última integral em (3.4.22) é dada por

$$\lim_{R\to\infty} I_{\mathcal{C}}(k) = \begin{cases} \dfrac{\pi i}{ck}\left(e^{ick\tau} - e^{ick\tau}\right) & \text{se} \quad \tau \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad \tau < 0 \end{cases}$$

resultando em

$$\begin{aligned} G(\tau, \mathbf{z}) &= \frac{c}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \left(e^{ik(r+c\tau)} - e^{ik(r-c\tau)}\right) \\ &= \frac{c}{4\pi r}\left(\delta\left(r + c\tau\right) - \delta\left(r - c\tau\right)\right) \end{aligned}$$

se $\tau \geq 0$ e $G(\tau, \mathbf{x}) = 0$ se $\tau < 0$. Note que $\delta\left(r + c\tau\right) = 0$ se $r, \tau > 0$. Substituindo G em (3.4.20) e usando $\delta\left(r - c\tau\right) = \delta\left(r/c - \tau\right)/c$, obtemos

$$\begin{aligned} u(t, \mathbf{x}) &= \frac{-1}{4\pi}\int d^3x' \int_{-\infty}^{t} dt'\, \frac{\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c - t + t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\, f(t', \mathbf{x}') \qquad (3.4.24) \\ &= \frac{-1}{4\pi}\int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\, f(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}')\,. \end{aligned}$$

Expressão (3.4.24) é conhecida como o **potencial retardado** pois o termo de fonte no integrando é calculado no tempo $t - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/c$, onde $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')/c$ é o tempo necessário para que um sinal percorra, com velocidade c, a distancia entre o ponto $\mathbf{x}'$ da fonte e $\mathbf{x}$ do obsevador.

Capítulo 4

Funções Especiais

As equações de Sturm–Liouville (isto é, equações lineares de segunda ordem auto–adjuntas) surgem naturalmente nas aplicações de Física–Matemática que vimos no capítulo anterior. O método de separação de variaveis em coordenadas apropriadas às condições de fronteira, gera uma coleção de equações auto–adjuntas cujas soluções são comumente denominadas **funções especiais**.

Entre as funções especiais citadas temos a função de Legendre, associada de Legendre, as funções de Bessel, os polinômios de Hermite, de Laguerre e etc.. Todas estas funções são casos particulares das funções hipergeométricas, mais propriamente, das funções confluentes hipergeométricas.

O objetivo deste capítulo é classificar estas funções de acordo com o grau e número de singularidades de sua equação diferencial e apresentar algumas de suas propriedades. Para este fim, o método de resolução de equações por séries de potências, conhecido por **método de Frobenius**, terá um papel central.

4.1 Método de Frobenius

4.1.1 Pontos Ordinários e Pontos Singulares

Iniciaremos nossa discussão com um exemplo ilustrativo. Considere a equação diferencial de Legendre,

$$\left(1-x^2\right)u''-2xu+l(l+1)u=0\,, \tag{4.1.1}$$

definida no domínio $-1\leq x\leq 1$. Nosso objetivo é encontrar uma solução desta equação na forma de série de potência em torno de um ponto "ordinário" da equação. Veremos a seguir que, exceto os pontos extremos, os demais pontos do domínio são ordinários.

Ilustraremos o método procurando soluções de (4.1.1) na forma de uma expansão em torno de $x=0$:

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,x^n=c_0+c_1\,x+c_2\,x^2+\cdots\,. \tag{4.1.2}$$

Substituindo (4.1.2) em (4.1.1), obtemos

$$\begin{aligned}(1-x^2)\left(2c_2+6c_3x+12c_4x^2+20c_5x^3+\cdots\right)&\\ -2x\left(c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots\right)&\\ +l(l+1)\left(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\right)&=0\,.\end{aligned}$$

Rearranjando os termos, temos

$$\begin{aligned}(2c_2+l(l+1)c_0)+(6c_3-(2-l(l+1))\,c_1)\,x&\\ +\left(12c_4-(6-l(l+1))\,c_2\right)x^2&\\ +\left(20c_5-(12-l(l+1))\,c_3\right)x^3+\cdots&=0\,.\end{aligned}$$

Como os monômios $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ formam um conjunto de funções linearmente independente, os coeficientes desta expansão devem ser identicamente nulos. Segue que

$$\begin{aligned}c_2&=\frac{l(l+1)}{2}c_0\\ c_3&=\frac{2-l(l+1)}{6}c_1\\ c_4&=\frac{6-l(l+1)}{12}c_2&=\frac{l\,(l+1)\,(6-l(l+1))}{24}c_0\\ c_5&=\frac{12-l(l+1)}{20}c_3&=\frac{(2-l(l+1))\,(12-l(l+1))}{120}c_1\\ \vdots&\quad\ \vdots&\vdots\end{aligned}$$

Note que, por este procedimento, podemos gerar todos os coeficientes desta série a partir dos dois primeiros c_0 e c_1, que devem ser fixados pelas condições de fronteira ou outras condições tais como normalização, paridade, etc..

A seguir daremos a forma geral dos coeficientes. Substituindo novamente (4.1.2) em (4.1.1), obtemos

$$\left(1-x^2\right)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\,c_n\,x^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{\infty}n\,c_n\,x^{n-1}+l\,(l+1)\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,x^n=0$$

que implica em

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - 2n\,c_n + (l(l+1) - n(n-1))\,c_n = 0$$

para todo $n \geq 0$. Portanto

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+2)(n+1)} c_n \\ &= -\frac{(n+l+1)(l-n)}{(n+2)(n+1)} c_n . \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

A equação (4.1.3) define uma **relação de recorrência** envolvendo dois coeficientes pares sucessivos ou impares sucessivos. Note que, se l for um número inteiro par (impar) positivo, então a série de coeficientes pares (impares) será truncada no l –ésimo termo pois, devido a (4.1.3), c_{l+2} e todos os sucessivos coeficientes se anulam. Pela mesma razão, se l for um número inteiro par (impar) negativo, então a série de coeficientes impares (pares) será truncada no $(-l-1)$–ésimo termo.

Iterando (4.1.3), obtem-se para $n \leq l$, $l \in 2\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{-(n+l-1)(l-n+2)}{n(n-1)} \frac{-(n+l-3)(l-n+4)}{(n-2)(n-3)} \cdots \frac{-(l+1)\,l}{2 \cdot 1} c_0 \\ &= \frac{(-1)^{n/2}}{n!} \left[(n+l-1)(n+l-3)\cdots(l+1)\right] \left[l(l-2)\cdots(l-n+2)\right] c_0 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

se n for par. O caso l, n impares é semelhante e deixamos como exercício.

Os termos entre colchetes podem ser escrito como

$$\begin{aligned} (n+l-1)(n+l-3)\cdots(l+1) &= \frac{(n+l)(n+l-1)\cdots(l+1)}{(n+l)(n+l-2)\cdots(l+2)} \\ &= \frac{(n+l)(n+l-1)\cdots(l-1)}{2^{n/2}\left[(n+l)/2\right]\left[(n+l-2)/2\right]\cdots\left[l/2-1\right]} \\ &= \frac{(n+l)!\,(l/2)!}{2^{n/2}\left[(n+l)/2\right]!\,l!} \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

e

$$\begin{aligned} l(l-2)\cdots(l-n+2) &= 2^{n/2}\left[l/2\right]\left[(l-2)/2\right]\cdots\left[(l-n)/2+1\right] \\ &= \frac{2^{n/2}\,[l/2]!}{\left[(l-n)/2\right]!} \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

De (4.1.4), (4.1.5) e (4.1.6), concluimos

$$c_n = \frac{1}{2^l} \frac{(-1)^{(n-l)/2}\,(l+n)!}{n!\,\left[(l+n)/2\right]!\,\left[(l-n)/2\right]!} \tag{4.1.7}$$

com c_0 escolhido como

$$c_0 = \frac{(-1)^{l/2}\,l!}{2^l\,\left[(l/2)!\right]^2} . \tag{4.1.8}$$

Exercício 4.1.1 *Mostre que se c_1 é dado por*

$$c_1 = \frac{(-1)^{l/2}\,(l+1)!}{2^l\,\left[(l-1)/2\right]!\,\left[(l+1)/2\right]!} , \tag{4.1.9}$$

então c_n com n impar tem a mesma expressão (4.1.7).

Substituindo (4.1.7) em (4.1.2), a solução da equação de Legendre com l par, c_0 como em (4.1.8) e $c_1 = 0$, é dada por

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2^l} \sum_{m=0}^{l/2} \frac{(-1)^{m-l/2}\,(l+2m)!}{(2m)!\,\left[l/2+m\right]!\,\left[l/2-m\right]!} x^{2m} \\ &= \frac{1}{2^l} \sum_{r=0}^{l/2} \frac{(-1)^r\,\left[2(l-r)\right]!}{r!\,\left[l-2r\right]!\,\left[l-r\right]!} x^{l-2r} \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

(faça $r = l/2 - m$ para obter a segunda linha). Esta expressão, conhecida como polinômio de Legendre, é também solução para l impar, c_1 dado por (4.1.9) e $c_0 = 0$ se o limite superior da soma for substituído por $l/2 - 1$.

Mais adiante iremos descrever algumas propriedades desta solução. O ponto importante a notar aqui é que esta é uma solução **regular** da equação de Legendre em todos os pontos do domínio $-1 \leq x \leq 1$.

Discutiremos a seguir o raio de convergência R da série (4.1.2) a partir da relação (4.1.3). Antes disso teceremos alguns comentários sobre convergência de séries em geral.

Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Dizemos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge para S se a sequência de somas parciais $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$ dada por

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n ,$$

convergir para $S = \lim_{N\to\infty} S_N$.

Proposição 4.1.2 *Uma série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *é **absolutamente convergente** se a sequência das razões entre termos sucessivos convergir em módulo:*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow \delta$$

para algum $\delta < 1$ *. A série diverge se* $\delta > 1$.

Esta condição segue do critério de comparação de uma dada série com a série geométrica $\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta^n = 1/(1-\delta)$.

Se $\delta = 1$, a questão sobre a convergência da série pelo critério acima fica inconclusiva. Neste caso temos a seguinte alternativa:

Proposição 4.1.3 *Se*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \sim 1 - \frac{\sigma}{n}$$

quando $n \to \infty$, *então a série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *é absolutamente convergente se* $\sigma > 1$ *e divergente se* $\sigma < 1$.

Esta condição mais forte segue da comparação da série com a integral indefinida

$$\int^x y^{-\sigma}\, dy = x^{1-\sigma}.$$

Note que a integral pode ser aproximada pela soma de Riemann dos retangulos de largura unitária e altura $y^{-\sigma}$ com y variando sobre os inteiros. A razão entre dois termos sucessivos desta série é dada por

$$\frac{(n+1)^{-\sigma}}{n^{-\sigma}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\sigma} \sim 1 - \frac{\sigma}{n}$$

quando $n \to \infty$.

Se ainda tivermos $\sigma = 1$, tem-se ainda o seguinte critério devido a comparação da série com a integral indefinida

$$\int^x \frac{1}{y\ (\ln y)^\kappa}\, dy = \frac{1}{1-\kappa}\ (\ln x)^{1-\kappa}$$

Proposição 4.1.4 *Se*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \sim 1 - \frac{1}{n} - \frac{\kappa}{n\ln n}$$

quando $n \to \infty$, *então* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *é absolutamente convergente se* $\kappa > 1$ *e divergente se* $\kappa < 1$.

Retornando à série (4.1.2), seja $a_n = c_{2n}\, x^2$. Então, de (4.1.3),

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(2n+l+1)\,(2n-l)}{(2n+2)\,(2n+1)} x^2 \\ &= \frac{\left(1+\dfrac{l+1}{2n}\right)\left(1-\dfrac{l}{2n}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)} x^2 \\ &= \left[1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\, x^2\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$.

Assim, segundo os critério de convergência enunciado acima, a série (4.1.2) é convergente se $|x| < 1$ e divergente se $|x| = 1$ (a divergência desta série é, de fato, logarítmica, $u(x) \sim \ln(1-x^2)$ quando $x \to \pm 1$).

A seguinte definição é devido a Hadamard.

Definição 4.1.5 *O raio de convergência de uma série* $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$, *definido como o maior número positivo* R *tal que* S *é convergente para todo* x *que satisfaz* $|x| < R$ *(e divergente se* $|x| > R$*), é dado pelo inverso do limite superior da sequência* $\left\{|b_n|^{1/n}\right\}$,

$$R^{-1} = \mathrm{limsup}_{n\to\infty}\, |b_n|^{1/n}$$

(isto é, se o limite não for único, tomamos o maior entre os limites desta sequência).

O pontos $x = \pm 1$ são pontos "singulares" da equação de Legendre. A definição precisa destes pontos será dada a seguir.

Iremos considerar equações diferenciais lineares de segunda ordem da forma

$$\frac{d^2u}{dz^2} + P(z)\,\frac{du}{dz} + Q(z)\, u = 0 \qquad (4.1.11)$$

definida em um domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ limitado, com $P(z)$ e $Q(z)$ funções analíticas em $\mathcal{D}$ exceto em um número finito de polos (funções meromórficas).

Definição 4.1.6 *Um ponto $z_0 \in \mathcal{D}$ é um ponto **singular** da equação (4.1.11) se este for uma singularidade de P e/ou Q ; $z_0 \in \mathcal{D}$ é um ponto **ordinário** se $P(z_0)$ e $Q(z_0)$ forem regular.*

Observação 4.1.7 *Note que, se z_0 for um ponto ordinário, então existe uma vizinhança $\mathcal{V}_{z_0} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r_0\}$ de z_0 tal que todos os pontos $z \in \mathcal{V}_{z_0}$ são ordinários.*

As equações de Sturm–Liouville (2.1.19) podem ser escritas na forma (4.1.11) se tomarmos

$$P(z) = \frac{p'(z)}{p(z)} \qquad \text{e} \qquad Q(z) = \frac{\lambda\rho(z) - q(z)}{p(z)}.$$

Assim, os pontos singulares para estas equações são zeros da função $p(z)$ e/ou polos de $q(z)$. Na equação de Legendre, $z = \pm 1$ são polos simples de

$$P(z) = \frac{-2z}{(1 - z^2)}.$$

Na equação Associada de Legendre, $z = \pm 1$ são também polos duplos de

$$Q(z) = \frac{l\,(l+1)\,(1 - z^2) - m^2}{(1 - z^2)^2}.$$

4.1.2 Existência e Unicidade de Soluções na Vizinhança de Pontos Ordinários

Seja z_0 um ponto ordinário de (4.1.11) e $z \in \mathcal{V}_{z_0}$ um ponto na vizinhança de z_0. Defina a função $v(z)$ pela equação

$$u(z) = v\,(z)\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z} P\,(\zeta)\;d\zeta\right\} \tag{4.1.12}$$

onde $u(z)$ é uma solução da equação (4.1.11). Por simplicidade, tomamos a integral sobre o seguimento de reta em $\mathbb{C}$ de z_0 à z.

Diferenciando (4.1.12) com respeito a z, obtemos

$$u' = \left(v' - \frac{1}{2}Pv\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z} P\,(\zeta)\;d\zeta\right\} \tag{4.1.13}$$

e

$$u'' = \left(v'' - \frac{1}{2}P'v - Pv' + \frac{1}{4}P^2 v\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z} P\,(\zeta)\;d\zeta\right\} \tag{4.1.14}$$

Substituindo (4.1.13) e (4.1.14) em (4.1.11), obtemos a seguinte equação para v:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + J(z)v = 0 \tag{4.1.15}$$

onde

$$J(z) = Q(z) - \frac{1}{2}\frac{dP}{dz}(z) - \frac{1}{4}P(z)^2$$

é uma função analítica de z em $\mathcal{V}_{z_0}$ pois $P(z)$ e $Q(z)$ o são por hipótese.

Como (4.1.15) é da forma (4.1.11), concluímos que $z \in \mathcal{V}_{z_0}$ é também um ponto ordinário desta equação. A equação (4.1.15) é mais apropriada para a derivação do resultado a seguir.

Dado a_0 e a_1 constantes arbitrárias, considere a sequência $\{v_n\}$ de funções analíticas

$$\begin{array}{rcl} v_0(z) & = & a_0 + a_1\,(z - z_0) \\ v_1(z) & = & \displaystyle\int_{z_0}^{z} (\zeta - z)\; J(\zeta)\, v_0(\zeta)\, d\zeta \\ \vdots & \vdots & \qquad \vdots \\ v_n(z) & = & \displaystyle\int_{z_0}^{z} (\zeta - z)\; J(\zeta)\, v_{n-1}(\zeta)\, d\zeta \\ \vdots & \vdots & \qquad \vdots \end{array} \tag{4.1.16}$$

Teorema 4.1.8 *A série de funções*

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z) \tag{4.1.17}$$

converge para uma função analítica de z em $\mathcal{V}_{z_0}$. Além disso, $v(z)$ é a única solução de (4.1.15) com $v(z_0) = a_0$ e $dv/dz(z_0) = a_1$.

Prova. Como J é regular em $\mathcal{V}_{z_0}$, temos

$$|J(z)| \leq M$$

nesta vizinhança para algum $M < \infty$. Seja μ a constante tal que

$$|v_0(z)| = |a_0 + a_1\,(z - z_0)| \leq \mu \tag{4.1.18}$$

para todo $z \in \mathcal{V}_{z_0}$.

Estabeleceremos por indução a seguinte limitação superior para os elementos da série (4.1.17):

$$|v_n(z)| \le \frac{\mu\, M^n}{n!}\, |z - z_0|^{2n} \,. \tag{4.1.19}$$

Inicialmente, note que (4.1.18) satisfaz (4.1.19) com $n = 0$. Assumindo que (4.1.19) é válida para $n = k$, então

$$\begin{aligned}
|v_{k+1}(z)| &\le \int_{z_0}^{z} |\zeta - z|\; |J(\zeta)|\; |v_k(\zeta)|\, |d\zeta| \\
&\le \frac{\mu\, M^{k+1}}{k!}\, |z - z_0| \int_{z_0}^{z} |\zeta - z_0|^{2k}\; |d\zeta| \\
&= \frac{\mu\, M^{k+1}}{k!}\, |z - z_0| \int_{0}^{|z-z_0|} t^{2k}\; dt \\
&= \frac{\mu\, M^{k+1}}{k!}\, |z - z_0|\; \frac{|z - z_0|^{2k+1}}{2k+1} \\
&\le \frac{\mu\, M^{k+1}}{(k+1)!}\, |z - z_0|^{2(k+1)}
\end{aligned}$$

concluindo a indução.

A limitação (4.1.19) implica que a série é uniformemente limitada:

$$|v(z)| \le \sum_{n=0}^{\infty} |v_n(z)| \le \mu \exp\left\{M\; |z - z_0|^2\right\} < \mu \exp\left\{M\, r_0^2\right\} \;; \tag{4.1.20}$$

Alem disso, (4.1.19) implica que a sequência de séries parciais,

$$V_N(z) = \sum_{n=0}^{N} v_n(z)\,, \qquad N = 0, 1, \ldots\,,$$

é uma sequência de Cauchy de funções analíticas em $\mathcal{V}_{z_0}$ uniformemente convergente:

$$|V_N(z) - V_M(z)| \le \sum_{n=M+1}^{N} |v_n(z)| < \sum_{n=M+1}^{N} \frac{\left(M\, r_0^2\right)^n}{n!} < \varepsilon$$

para qualquer $\varepsilon > 0$ se $M, N > N_0$ com $N_0 = N_0(\varepsilon)$ suficientemente grande. Isto implica que $\lim\limits_{N\to\infty} V_N(z) = v(z)$ existe e é um funções analíticas em $\mathcal{V}_{z_0}$, concluindo a prova da primeira parte do teorema.

Para verificar que v satisfaz a equação (4.1.15), observamos que (4.1.17) satisfaz a seguinte equação integral

$$v(z) = v_0(z) + \int_{z_0}^{z} (\zeta - z)\; J(\zeta)\, v(\zeta)\, d\zeta \tag{4.1.21}$$

pois, em vista de (4.1.16),

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(z) = v_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(z) = v_0(z) + \int_{z_0}^{z} (\zeta - z)\; J(\zeta) \sum_{n=1}^{\infty} v_{n-1}(\zeta)\, d\zeta \,.$$

Aqui usamos que v é uma série uniformemente convergente, devido a (4.1.20), para inverter a ordem da soma com a integral.

Diferenciando (4.1.21) com respeito a z, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dz}(z) &= \left[(\zeta - z)\; J(\zeta)\, v(\zeta)\right]_{\zeta = z} - \int_{z_0}^{z} J(\zeta)\, v(\zeta)\, d\zeta \\
&= -\int_{z_0}^{z} J(\zeta)\, v(\zeta)\, d\zeta
\end{aligned}$$

e

$$\frac{d^2 v}{d^2 z}(z) = -J(z)\, v(z)\,.$$

A prova da unicidade de v é convencional e será omitida.

□

Observação 4.1.9 *Segue do Teorema 4.1.8 que (4.1.12), com v dada por (4.1.17), é uma função analítica em $\mathcal{V}_{z_0}$ e a única solução de (4.1.11) com $u(z_0) = a_0$ e $\dfrac{du}{dz}(z_0) = a_1$.*

4.1.3 Pontos Regulares para a Equação

Definição 4.1.10 *Se $z_0 \in \mathcal{D}$ for um ponto singular de (4.1.11) e*

$$(z - z_0)\, P(z) \qquad \text{e} \qquad (z - z_0)^2\, Q(z)$$

*forem funções analíticas de z em $z = z_0$, então z_0 é um ponto **regular** para a equação (4.1.11). Não satisfazendo estas condições, z_0 é dito **irregular** para (4.1.11).*

As soluções fisicamente aceitáveis de (4.1.11) devem ser regulares em todo domínio $\mathcal{D}$ de definição do problema. Vimos que $z = \pm 1$ são pontos singulares da equação de

Legendre porém regulares segundo a definição. Vimos também que, se l é um inteiro, fazendo uma das constante c_0 ou c_1 igual a zero dependendo de l, obtinhamos uma solução (o polinômio de Legendre) regular em todo plano complexo.

Para determinar a solução de equações não homogêneas é necessário também dispor de uma solução linearmente independente à solução regular. Descreveremos a seguir um procedimento para obter as soluções de (4.1.11) em série de potências na vizinhança de um ponto z_0 singular–regular. Veremos que por este procedimento é sempre possivel obter duas soluções linearmente independentes, sendo uma regular.

Seja z_0 um ponto regular para (4.1.11). Então, multiplicando (4.1.11) por $(z-z_0)^2$, temos

$$\begin{aligned}(z-z_0)^2 \frac{d^2u}{d^2z} + (z-z_0)^2 P(z)\frac{du}{dz} + (z-z_0)^2 Q(z)\, u &= 0 \\ (z-z_0)^2 \frac{d^2u}{d^2z} + (z-z_0)\, \widetilde{P}(z-z_0)\frac{du}{dz} + \widetilde{Q}(z-z_0)\, u &= 0\end{aligned}$$

onde $\widetilde{P}$ e $\widetilde{Q}$ são funções analíticas de $\omega = z-z_0$ em $\omega = 0$. Escrevendo $y(\omega) = y(z-z_0) = u(z)$, obtemos

$$\omega^2 \frac{d^2y}{d^2\omega} + \omega\widetilde{P}(\omega)\frac{dy}{d\omega} + \widetilde{Q}(\omega)\, y = 0 \tag{4.1.22}$$

que é, segundo Frobenius, a **forma normal** da equação (4.1.11).

O procedimento de Frobenius consiste em procurar soluções da forma

$$y(\omega) = \omega^\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, \omega^n \tag{4.1.23}$$

com $\nu \in \mathbb{R}$ e $c_0 \neq 0$. Novamente ilustraremos o método por um exemplo.

Exemplo 4.1.11 *$z = 0$ é um ponto regular para a equação de Bessel, pois é um polo simples de $P(z) = 1/z$ e um polo duplo de $Q(z) = (z^2 - m^2)/z^2$. Assim, a equação (4.1.22) com*

$$\widetilde{P}(\omega) = 1 \qquad \text{e} \qquad \widetilde{Q}(\omega) = \omega^2 - m^2$$

torna-se

$$\omega^2 y'' + \omega y' + \left(\omega^2 - m^2\right) = 0\,. \tag{4.1.24}$$

Substituindo (4.1.23) em (4.1.24), obtemos

$$\omega^\nu \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\nu+n)^2\, c_n\, \omega^n + \left(\omega^2 - m^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, \omega^n \right\} = 0$$

implicando que os coeficientes desta expansão devem–se anular ordem a ordem.

*A equação para $n = 0$ é chamada equação **indicial**:*

$$\left(\nu^2 - m^2\right)\, c_0 = 0\,.$$

Como por hipótese $c_0 \neq 0$, temos necessariamente $\nu = \pm|m|$ (vamos daqui em diante adotar a convenção de que m é uma constante positiva evitando carregar a notação).

Para $n = 1$, temos

$$\left[(\nu+1)^2 - m^2\right] c_1 = 0\,.$$

Exceto no caso em que $\nu = -m = -1/2$, esta equação implica em $c_1 = 0$ (adotaremos esta solução no que segue).

Para $n \geq 2$, temos

$$\left[(\nu+n)^2 - m^2\right] c_n + c_{n-2} = 0$$

implicando na seguinte relação de recorrencia

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{-1}{(\nu+m+n)(\nu-m+n)}\, c_{n-2} \\ &= \frac{-1}{(2m+n)\, n}\, c_{n-2} \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

pela equação indicial.

Para obter a solução regular da equação de Bessel faremos $m \in \mathbb{N}$. Iterando (4.1.25), temos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{-1}{(2m+n)\, n}\frac{-1}{(2m+n-2)(n-2)} \cdots \frac{-1}{(2m+2)\, 2}\, c_0 \\ &= \frac{(-1)^{n/2}\; m!}{2^n\,(m+n/2)!\;(n/2)!} c_0 \end{aligned} \tag{4.1.26}$$

para n par e $c_n = 0$ para n impar. Sustituindo (4.1.26) na solução (4.1.23) com $c_0 = 1/\left(2^m m!\right)$, obtemos a expressão da função de Bessel definida no Exemplo 3.2.3:

$$y(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(m+k)!\;(k)!} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{m+2k}\,. \tag{4.1.27}$$

Vimos no capítulo anterior que as soluções J_ν e $J_{-\nu}$ dadas por (4.1.27) com $(m+k)!$ substituído por $\Gamma(m+k+1)$ e $m = \pm\nu$, formam um par de funções linearmente independentes se e somente se ν for um número real não inteiro. Isto é o que ocorre tipicamente nas soluções da forma (4.1.23) se $\omega = 0$ for um ponto singular–regular para (4.1.22) (ou $z = z_0$ para a equação (4.1.11)). A razão para isto é o seguinte fato.

Se z_0 for um ponto regular para a equação (4.1.11), então $\widetilde{P}$ e $\widetilde{Q}$ possuem série de Taylor em torno de $\omega = 0$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(\omega) &= \widetilde{P}(0) + \widetilde{P}'(0)\,\omega + \frac{1}{2}\widetilde{P}''(0)\,\omega^2 + \cdots \\
\widetilde{Q}(\omega) &= \widetilde{Q}(0) + \widetilde{Q}'(0)\,\omega + \frac{1}{2}\widetilde{Q}''(0)\,\omega^2 + \cdots .
\end{aligned}$$

A equação indicial (o coeficiente do termo x^ν da equação) tem a forma

$$\begin{aligned}
\nu\,(\nu-1) + \widetilde{P}(0)\nu + \widetilde{Q}(0) &= 0 \\
(\nu-\nu_1)\,(\nu-\nu_2) &= 0 .
\end{aligned}$$

onde $\nu_1,\, \nu_2 \in \mathbb{C}$ são as raízes deste polinômio de grau 2, denominadas **índices** do ponto $z = z_0$.

Podemos então obter duas soluções independentes formando duas séries (4.1.23) com $\nu = \nu_1$ e $\nu = \nu_2$, com a condição que $\nu_1 - \nu_2 \notin \mathbb{Z}$.

Note que, se z_0 for um ponto irregular para (4.1.11), então a equação indicial será no máximo de primeira ordem e não poderemos formar duas séries de potência. Esta é portanto a diferença fundamental entre pontos regulares e irregulares para as equações consideradas.

Quando $\nu_1 - \nu_2 \in \mathbb{Z}$ ($\nu_1 - \nu_2 = 2m \in \mathbb{Z}$ no exemplo acima) estas duas soluções tornam-se linearmente dependentes. Descreveremos a seguir uma maneira de se obter a solução linearmente independente à (4.1.27) para $m \in \mathbb{N}$.

Seja $y(\omega;\nu)$ a função dada pela série de potências com coeficientes c_n, $n \in \mathbb{N}$, obtidos recursivamente pela primeira expressão em (4.1.25) com m e ν independentes e $c_1 = 0$. Denotando por $L = -D\,(\omega^2 D) + (m^2 - \omega^2)$ o operador diferencial de Bessel, temos

$$Ly\,(\omega;\nu) = (m-\nu)\,(m+\nu)\;\omega^\nu .$$

Portanto, $y\,(\omega;\nu)$ satisfaz a equação de Bessel somente se a equação indicial for satisfeita ($\nu = \pm m$).

Note que, se $\widetilde{y}(\omega;\nu) = (m+\nu)\,y(\omega;\nu)$, então $\widetilde{y}(\omega;-m)$ também satisfaz a equação de Bessel

$$L\widetilde{y}\,(\omega;-m) = \left[(m-\nu)\,(m+\nu)^2\;\omega^\nu\right]_{\nu=-m} = 0 .$$

Além disso, denotando por $\widetilde{c}_n$ os coeficientes de $\widetilde{y}$:

$$\widetilde{y}(\omega;\nu) = \omega^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{c}_{2k}\,\omega^{2k} , \tag{4.1.28}$$

temos que

1. $$\lim_{\nu\to -m} \widetilde{c}_n = 0 \tag{4.1.29}$$

   se $n < 2m$,

2. $$\begin{aligned}
\lim_{\nu\to -m} \widetilde{c}_{2m} &= \lim_{\nu\to -m} \frac{-(m+\nu)}{(\nu+m+2m)\,(\nu-m+2m)} c_{2m-2} \\
&= \frac{-1}{2m}\,\frac{-1}{(2m-2)\,(-2)} \cdots \frac{-1}{2\,(-2m+2)} c_0 \\
&= \frac{-1}{2^{2m-1}\; m!\;(m-1)!} c_0 .
\end{aligned} \tag{4.1.30}$$

   e

3. $$\lim_{\nu\to -m} \widetilde{c}_n = \frac{-1}{n\,(n-2m)} \lim_{\nu\to -m} \widetilde{c}_{n-2} \tag{4.1.31}$$

   se $n > 2m$.

Portanto, fazendo $2k = n - 2m$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}\,(\omega;-m) &= \frac{-c_0}{2^{m-1}\;(m-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(m+k)!\,k!} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{m+2k} \\
&= \frac{-c_0}{2^m\; m!}\; \widetilde{y}(\omega;m) = -c_0^2\;\widetilde{y}(\omega;m)
\end{aligned}$$

verificando a dependência linear da solução com $\nu = -m$, $m \in \mathbb{N}$.

A solução linearmente independente à $\widetilde{y}\,(\omega;\nu)$ válida para $\nu = -m \in \mathbb{R}$ (inclusive inteiros), é dada por $\partial\widetilde{y}\,(\omega;\nu)\,/\partial\nu$. Note que $\partial\widetilde{y}\,(\omega;\nu)\,/\partial\nu$ satisfaz a equação de Bessel quando $\nu = -m$:

$$L\,\frac{\partial y}{\partial\nu}\,(\omega;\nu)\bigg|_{\nu=-m} = \frac{\partial}{\partial\nu} Ly\,(\omega;\nu)\bigg|_{\nu=-m} = \frac{\partial}{\partial\nu}\left[(m-\nu)\,(m+\nu)^2\;\omega^\nu\right]\bigg|_{\nu=-m} = 0$$

Além disso, em vista de (4.1.28) e (4.1.25),

$$\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial \nu}(\omega;\nu) = \ln\omega\ \widetilde{y}(\omega;\nu) + \omega^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial \widetilde{c}_{2k}}{\partial \nu}\,\omega^{2k} \tag{4.1.32}$$

onde

$$\frac{\partial \widetilde{c}_{2k}}{\partial \nu} = \left\{1 - \sum_{l=1}^{k}\frac{2(\nu+2l)(\nu+m)}{(\nu+m+2l)(\nu-m+2l)}\right\} c_{2k}\,.$$

Note que $[\partial\widetilde{c}_{2k}/\partial\nu]_{\nu=-m}$ é finito para todo $k \in \mathbb{N}$ pois, para $k \geq m$ (quando diverge $c_{2k}|_{\nu=-m}$) temos que

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial \widetilde{c}_{2k}}{\partial \nu}\right]_{\nu=-m} &= \left\{1 - \sum_{l=1}^{k}\frac{2(\nu+2l)(\nu+m)}{(\nu+m+2l)(\nu-m+2l)}\right\} c_{2k}\Bigg|_{\nu=-m} \\ &= \left\{\sum_{l=1}^{m-1}\frac{(2l-m)}{2l(m-l)} - \frac{1}{2m} + \sum_{l=m+1}^{k}\frac{(2l-m)}{2l(m-l)}\right\}\widetilde{c}_{2k}|_{\nu=-m}\,.\end{aligned}$$

com $\widetilde{c}_{2k}|_{\nu=-m}$ satisfazendo (4.1.29)–(4.1.31).

Note ainda que a segunda solução da equação de Bessel não é regular na vizinhança de $\omega = 0$ mesmo para $m \in \mathbb{Z}$ (devido a singularidade logarítmica de (4.1.32), $\omega = 0$ é um ponto de ramificação). Quando $\nu = \pm m \notin \mathbb{Z}$ as duas soluções também tem $\omega = 0$ um ponto de ramificação devido ao fator ω^{ν} que multiplica a série de potências.

4.1.4 Singularidades no Infinito

Temos considerado a equação (4.1.11) definida em um domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ compacto com $P(z)$ e $Q(z)$ funções analítica em $\mathcal{D}$ exceto em um número finito de polos neste domínio. Trataremos agora o caso quando as singularidades se encontram no infinito.

Fazendo a mudança de variavel $z = 1/t$ e tendo em conta que

$$\frac{du}{dz} = -t^2\frac{du}{dt} \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2u}{d^2z} = t^4\frac{d^2u}{dt^2} + 2t^3\frac{du}{dt}\,,$$

a equação (4.1.11) fica, na sua forma normal

$$\begin{aligned} t^2\frac{d^2u}{dt^2} + t\left(2 - \frac{P(1/t)}{t}\right)\frac{du}{dt} + \frac{Q(1/t)}{t^2}u &= 0 \\ t^2\frac{d^2u}{dt^2} + t\widehat{P}(t)\frac{du}{dt} + \widehat{Q}(t)u &= 0 \end{aligned} \tag{4.1.33}$$

Isto nos leva a seguinte extensão da definição de pontos ordinários e pontos regulares:

Definição 4.1.12 *Suponhamos que o domínio $\mathcal{D}$ de interesse contenha a reta real toda. Então $z = \infty$ é um ponto ordinário da equação (4.1.11) se $t = 0$ for um ponto ordinário da equação (4.1.33). Da mesma forma, $z = \infty$ é um ponto singular–regular para a equação (4.1.11) se $t = 0$ for um ponto singular–regular para a equação (4.1.33).*

A condição sobre $\widehat{P}$ e $\widehat{Q}$ para que $t = 0$ seja um ponto regular é que

$$\widehat{P}(t) = 2 - \frac{P(1/t)}{t} \qquad \text{e} \qquad \widehat{Q}(t) = \frac{Q(1/t)}{t^2}$$

sejam funções analíticas de t em $t = 0$.

Exemplo 4.1.13 *A equação de Hermite*

$$u'' - 2zu' + \lambda u = 0 \tag{4.1.34}$$

sob a mudança de variavel $z = 1/t$, reduz-se à equação

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} + 2t\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\frac{du}{dt} + \frac{\lambda}{t^2}u = 0\,.$$

O ponto $t = 0$ é um ponto irregular para esta equação pois $\widehat{P}(t) = 2 + 2/t^2$ não é analítica neste ponto. É de se esperar que o comportamento da solução de (4.1.34) em série de potências em torno de $z = 0$ seja bastante singular para valores de z tendendo a infinito. Entretanto, para certos valores de λ esta série é bem comportada em todo plano complexo.

Exercício 4.1.14 *Utilize o método de Frobenius para determinar as soluções em série de potências em torno do ponto $x = 0$ das seguintes equações:*

1. $$u'' + \omega^2 u = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$
   onde ω é um número real. Mostre que sua solução pode ser escrita na forma $u(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ com A e B constantes arbitrárias.
2. *(Equação de Airy)*
   $$u'' + xu = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$
3. $$\left(1 - x^2\right)u'' - xu' = 2\,, \qquad x > 0$$
   Mostre que a função $u(x) = (\arcsin x)^2$ é solução desta equação com condições iniciais $u(0) = u'(0) = 0$ e verifique que a solução obtida pelo método de Frobenius é a sua série de Taylor (esta série já era conhecida do matemático japonês Kowa Seki (1642–1708)).

4. *(Equação de Hermite)*

$$u'' - 2xu' + \lambda u = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Para quais valores de λ esta série é um polinômio?

5. *(Equação de Tchebycheff)*

$$\left(1 - x^2\right) u'' - xu' + \lambda^2 u = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Qual é o intervalo de convergência da série obtida? Para quais valores de λ a série é um polinômio?

Observação: *Note que $x = 0$ é um ponto ordinário para todas as equações acima.*

4.2 Singularidades Irregulares e Confluência

Na vizinhança de um ponto z_0 irregular, vimos que a equação (4.1.11) na sua forma normal (4.1.22) não pode ter duas soluções daforma (4.1.23) pois a equação indicial é no máximo de primeira ordem. Este fato claramente distingue pontos singulares–regulares de pontos irregulares.

Ocorre frequentemente que equações com pontos singulares–irregulares podem ser obtidas de equações que possuem apenas ponto singulares–regulares fazendo com que duas ou mais de suas singularidades se tornem uma única. Tal processo limite é denominado **confluência** e a equação resultante é denominada **forma confluente** da equação.

Descreveremos a seguir algumas confluências das equações hipergeométricas.

4.2.1 Equações Hipergeométricas

Equações hipergeométricas são equações diferenciais lineares da seguinte forma

$$z\,(1-z)\;u'' + (c - (a+b+1)\,z)\;u' - ab\,u = 0 \tag{4.2.1}$$

onde a, b e c são constantes arbitrárias.

A equação (4.2.1) tem três singularides em $z = 0$, 1 e ∞. Examinaremos a seguir a natureza destas singularidades bem como os seus expoentes ou índices (raízes da equação indicial associada a cada uma das singularidades).

A singularidades $z = 0$ e 1 são regulares pois (4.2.1) pode ser escrita na forma (4.1.11) com

$$P(z) = \frac{c - (a+b+1)\,z}{z\,(1-z)} \qquad \text{e} \qquad Q(z) = \frac{-ab}{z\,(1-z)}$$

(note que $z = 0$ e 1 são polos de primeira ordem de P e Q).

Os expoentes de $z = 0$ são as raízes da equação indicial

$$\begin{aligned} \nu\,(\nu-1) + \widetilde{P}(0)\,\nu + \widetilde{Q}(0) &= 0 \\ \nu\,(\nu - (1-c)) &= 0 \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

onde usamos $\widetilde{P}(0) = z\,P(z)\big|_{z=0} = c$ e $\widetilde{Q}(0) = z^2\,Q(z)\big|_{z=0} = 0$. Portanto

$$\nu_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \nu_2 = 1 - c\,.$$

Os expoentes de $z = 1$ são obtidos pelas raízes da equação (4.2.2) com $\widetilde{P}(0) = (z-1)\,P(z)\big|_{z=1} = -c + a + b + 1$ e $\widetilde{Q}(0) = (z-1)^2\,Q(z)\big|_{z=1} = 0$:

$$\nu_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \nu_2 = c - a - b\,.$$

Para a singularidade em $z = \infty$, escrevemos (4.2.1) na forma

$$t^2\,u'' + t\,\widehat{P}(t)\,u' + \widehat{Q}(t)\,u = 0$$

com

$$\begin{aligned} \widehat{P}(t) &= 2 - \frac{P\,(1/t)}{t} \\ &= \frac{(2-c)\,t + a + b - 1}{t - 1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \widehat{Q}(t) &= \frac{Q\,(1/t)}{t^2} \\ &= \frac{-ab}{t-1}\,. \end{aligned}$$

Como $\widehat{P}(t)$ e $\widehat{Q}(t)$ são funções analíticas de t em $t = 0$, segue que $z = \infty$ é uma singularidade regular para a equação (4.2.1).

Os índices da singularidade em $z = \infty$ são as raízes da equação indicial

$$\begin{aligned} \nu\,(\nu-1) + \widehat{P}(0)\,\nu + \widehat{Q}(0) &= 0 \\ \nu^2 - (a+b)\,\nu + ab &= 0 \end{aligned}$$

onde $\widehat{P}(0) = 1 - a - b$ e $\widehat{Q}(0) = ab$:

$$\nu_1 = a \qquad \text{e} \qquad \nu_2 = b\,.$$

Toda esta informação sobre os pontos regulares e seus correpondentes índices pode ser condensada na seguinte notação

$$u(z) = P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{array}\right\} \tag{4.2.3}$$

onde usamos a equação P de Riemann

$$P\left\{\begin{array}{cccc} \xi & \eta & \zeta & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{array}\right\} \tag{4.2.4}$$

para representar a **solução geral** de uma equação diferencial com três pontos singulares–regulares em $z = \xi$, η e ζ com respectivos índices α_i, β_i e γ_i, $i = 1, 2$.

O método de Frobenius pode ser utilizado para obter o comportamento da solução geral na vizinhança de cada singularidade. A seguir utilizaremos este método para obter a solução regular de (4.2.1) na vizinhança de $z = 0$ na forma

$$u(z) = z^{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, z^n \tag{4.2.5}$$

com $c_0 \neq 0$ e índice $\nu = \nu_1 = 0$.

Substituindo a (4.2.5) na equação e igualando a zero os coeficientes de cada potência, obtemos

$$n\,[(n-1)+c]\;c_n - [(n-1)\,(n-2) + (n-1)\,(a+b+1) + ab]\;c_{n-1} = 0 \tag{4.2.6}$$

que implica na seguinte relação de recorrência

$$c_n = \frac{[a+(n-1)]\;[a+(n-1)]}{n\;[c+(n-1)]}\,c_{n-1} \tag{4.2.7}$$

Exercício 4.2.1 *Derive (4.2.6) e (4.2.7).*

A **função hipergeométrica** ${}_2F_1(z) = {}_2F_1(a,b,c;z)$ é obtida iterando (4.2.7) com $c_0 = 1$:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(z) &= 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{1}{2}\frac{a\,(a+1)\;b\,(b+1)}{c\,(c+1)}z^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}\frac{a\,(a+1)\,(a+2)\;b\,(b+1)\,(b+2)}{c\,(c+1)\,(c+2)}z^3 + \cdots \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}\,z^n\,. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

4.2.2 Equações Diferenciais com Três Singularidades

O propósito desta subseção é mostrar que a solução geral (4.2.4) de uma equação com três singularidades ξ, η e ζ finitas, pode ser escrita em termos da solução geral (4.2.3) da equação hipergeométrica.

A seguir enunciaremos duas propriedade da equação P de Riemann. A primeira propriedade relaciona soluções com índices que diferem por uma translação

$$\left(\frac{z-\zeta}{z-\xi}\right)^{\delta}\left(\frac{z-\xi}{z-\eta}\right)^{\lambda} P\left\{\begin{array}{cccc} \xi & \eta & \zeta & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{array}\right\} = P\left\{\begin{array}{cccc} \xi & \eta & \zeta & \\ \alpha_1+\lambda-\delta & \beta_1-\lambda & \gamma_1+\delta & z \\ \alpha_2+\lambda-\delta & \beta_2-\lambda & \gamma_2+\delta & \end{array}\right\}; \tag{4.2.9}$$

a segunda relaciona soluções que diferem por uma transformação de variáveis

$$P\left\{\begin{array}{cccc} \xi & \eta & \zeta & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{array}\right\} = P\left\{\begin{array}{cccc} \xi' & \eta' & \zeta' & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & z' \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{array}\right\} \tag{4.2.10}$$

onde $z' = z'(z,\xi,\eta,\zeta)$ é a **transformação homográfica** que leva os pontos ξ, η e ζ nos pontos ξ', η' e ζ', respectivamente.

Verifica–se as propriedades (4.2.9) e (4.2.10) fazendo mudanças de variáveis apropriadas na equação cuja solução é representada por (4.2.4).

Exercício 4.2.2 *Verifique as propriedades* 1 *e* 2.

Proposição 4.2.3 *Toda equação diferencial de segunda ordem com três pontos singulares – regulares $z_0 = \xi$, η e ζ ($z_0 \neq \infty$) pode ser reduzida, por transformações de variáveis, à uma equação hipergeométrica.*

Prova. Uma equação diferencial de segunda ordem com três pontos singulares–regulares em $z_0 = \xi$, η e ζ, cuja solução geral é denotada por (4.2.4), pode ser escrita na forma (4.1.11) com

$$P(z) = \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z-\xi} + \frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-\eta} + \frac{1-\gamma_1-\gamma_2}{z-\zeta} \tag{4.2.11}$$

e

$$\begin{aligned} Q(z) = -\frac{(\xi-\eta)(\eta-\zeta)(\zeta-\xi)}{(z-\xi)(z-\eta)(z-\zeta)} \Bigg(& \frac{\alpha_1\alpha_2}{(z-\xi)(\eta-\zeta)} \\ & + \frac{\beta_1\beta_2}{(z-\eta)(\zeta-\xi)} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{(z-\xi)(\eta-\zeta)} \Bigg) \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Note para isso que a equação indicial em $z = \xi$, por exemplo,

$$\begin{aligned} 0 &= \nu(\nu-1) + \nu\left[(z-\xi)P(z)\right]_{z=\xi} + \left[(z-\xi)^2 Q(z)\right]_{z=\xi} \\ &= \nu(\nu-1) + \nu(1-\alpha_1-\alpha_2) + \alpha_1\alpha_2 \\ &= \nu^2 - (\alpha_1+\alpha_2)\nu + \alpha_1\alpha_2 \end{aligned}$$

tem raízes $\nu = \alpha_1$, α_2.

Podemos mudar os expoentes desta equação, sem mudar a posição e ordem das singularidades, usando a propriedade 1 da equação P de Riemann.

Escolhendo λ e δ tais que

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \lambda - \delta &= 0 \\ \beta_1 - \lambda &= 0 \end{aligned}$$

isto é, $\lambda = \beta_1$ e $\delta = \alpha_1 + \beta_1$, e definido as constantes

$$\begin{aligned} a &= \delta + \gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \\ b &= \delta + \gamma_2 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_2 \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

resulta em

$$\left(\frac{z-\zeta}{z-\xi}\right)^{\alpha_1+\beta_1} \left(\frac{z-\xi}{z-\eta}\right)^{\beta_1} P\left\{\begin{matrix} \xi & \eta & \zeta & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{matrix}\right\} = P\left\{\begin{matrix} \xi & \eta & \zeta & \\ 0 & 0 & a & z \\ \alpha_2-\alpha_1 & \beta_2-\beta_1 & b & \end{matrix}\right\}.$$

A prova da proposição é concluída em duas etapas: Primeiramente, as singularidades em $z = \xi$, η e ζ são levadas para os pontos $z = 0$, 1 e ∞ pela transformação homográfica (veja propriedade (4.2.10))

$$w = w(\xi,\eta,\zeta,z) = \frac{(z-\xi)(\eta-\zeta)}{(z-\zeta)(\eta-\xi)}.$$

Em seguida, mostraremos que a equação para c:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 1 - c \tag{4.2.14}$$

implica na seguinte equação

$$\beta_2 - \beta_1 = c - a - b \tag{4.2.15}$$

se nenhuma das singularidades $z = \xi$, η e ζ estiverem no infinito.

Combinando (4.2.13), (4.2.14) e (4.2.15) obtemos

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1\,. \tag{4.2.16}$$

Assim, a proposição fica demonstrada se (4.2.16) for a condição necessária e suficiente para que a equação (4.1.11) com (4.2.11) e (4.2.12) não tenha singularidades no infinito.

Lembrando que $z = \infty$ é um ponto ordinário da equação (4.1.11) se $t = 0$ for um ponto ordinário da equação (4.1.33), notamos que, em vista de (4.2.11) e (4.2.12),

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{P}(0)}{t} &= \frac{2}{t} - \frac{P(1/t)}{t^2} \\ &= \frac{2}{t} - \frac{1}{t}\left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{1-t\xi} + \frac{1-\beta_1-\beta_2}{1-t\eta} + \frac{1-\gamma_1-\gamma_2}{1-t\zeta}\right) \\ &= \frac{1}{t}(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2-1) + 2(\xi+\eta+\zeta) + \mathcal{O}(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{Q}(0)}{t^2} &= \frac{Q(0)}{t^4} \\ &= -\frac{(\xi-\eta)(\eta-\zeta)(\zeta-\xi)}{(1-t\xi)(1-t\eta)(1-t\zeta)}\Bigg(\frac{\alpha_1\alpha_2}{(1-t\xi)(\eta-\zeta)} \\ &\qquad + \frac{\beta_1\beta_2}{(1-t\eta)(\eta-\zeta)} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{(1-t\zeta)(\xi-\eta)}\Bigg) \\ &= -\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\xi-\eta)(\zeta-\xi)} - \frac{\beta_1\beta_2}{(\eta-\zeta)(\zeta-\xi)} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{(\eta-\zeta)(\zeta-\xi)}\right) + \mathcal{O}(t) \end{aligned}$$

são funções analíticas de t na vizinhança de $t = 0$ se e somente se (4.2.16) for satisfeita.

Concluímos que

$$u(z) = \left(\frac{z-\xi}{z-\zeta}\right)^{\alpha_1+\beta_1} \left(\frac{z-\eta}{z-\xi}\right)^{\beta_1} P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & w \\ 1-c & c-a-b & b & \end{matrix}\right\}$$

com a, b, c e w escolhidadas como acima, é a solução geral de (4.1.11) com (4.2.11) e (4.2.12). □

4.2.3 Funções Hipergeométricas Confluentes

Obtemos a equação hipergeométrica confluente fazendo a seguinte transformação homográfica

$$w = w(z) = bz \tag{4.2.17}$$

na equação (4.2.1) levando em seguida $b \to \infty$. Note que (4.2.17) move a singularidade em $z = 1$ para $w = b$. Assim, quando b tende para ∞, sobrepomos a singularidades em $z = 1$ com $z = \infty$.

Substituindo (4.2.17) em (4.2.1) dividindo em seguida por b, obtemos

$$w\left(1 - \frac{w}{b}\right) u'' + \left(c - (a+b+1)\,\frac{w}{b}\right) u' + a\,u = 0$$

tornando–se, no limite em que $b \to \infty$,

$$wu'' + (c - w)\,u' + a\,u = 0\,. \tag{4.2.18}$$

Equação (4.2.18) com $a = -\alpha$ e $c = k + 1$ é a equação **associada de Laguerre** de ordem α (Exemplo 2.1.43 quando $k = 0$). Veremos na seção seguinte que (4.2.18) tem um papel importante na solução do átomo de Hidrogêneo.

Os pontos $w = 0$ e ∞ são, respectivamente, pontos regular e irregular para a equação (4.2.18). Vê–se que $z = \infty$ é irregular fazendo a mudança de variavel $w = 1/t$:

$$t^2 y'' + t\left(2 - c + \frac{1}{t}\right) y' + \frac{a}{t}\,y = 0$$

onde $y(t) = u(1/t)$ (note que $t = 0$ é um polo simples de $\widehat{P} = 2 - c + 1/t$ e $\widehat{Q} = a/t$).

Para obter as soluções de (4.2.18) é conveniente utilizar a equação P de Riemann. Primeiramente, iremos obter a segunda solução da equação hipergeométrica.

Pode–se mostrar, de maneira analoga à (4.2.10) na subseção anterior, que

$$z^{1-c} P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{array}\right\} = P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ c-1 & 0 & a+1-c & z \\ 0 & c-a-b & b+1-c & \end{array}\right\}.$$

Consequentemente, a segunda solução da equação (4.2.1) é

$$u(z) = z^{1-c}\,{}_2F_1(1+a-c, 1+b-c, 2-c; z)$$

com ${}_2F_1$ dado por (4.2.8) onde fizemos uso da seguinte igualdade

$$P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ c-1 & 0 & a+1-c & z \\ 0 & c-a-b & b+1-c & \end{array}\right\} = P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a+1-c & z \\ c-1 & c-a-b & b+1-c & \end{array}\right\}$$

que por sua vez é igual a

$$P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a' & z \\ 1-c' & c'-a'-b' & b' & \end{array}\right\}$$

com

$$\begin{array}{rcl} a' & = & 1+a-c \\ b' & = & 1+b-c \\ c' & = & 2-c \end{array}.$$

Tomando o limite de confluência, obtemos duas soluções independentes da equação (4.2.18)

$$u_1(w) = {}_1F_1(a, c; w) \qquad \text{e} \qquad u_2(w) = {}_1F_1(1+a-c, 2-c; w)$$

onde

$${}_1F_1(a, c; w) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)}\, w^n \tag{4.2.19}$$

é a **função hipergeométrica confluente** ou **função de Kummer**. Para (4.2.19), note que

$$\frac{\Gamma(b+n)}{b^n\,\Gamma(b)} = \frac{b+n-1}{b}\frac{b+n-2}{b}\cdots\frac{b}{b} \longrightarrow 1$$

quando $b \to \infty$.

Alguns casos particulares da função hipergeométrica confluente são:

Exemplo 4.2.4 *Função exponencial*

$$e^w = {}_1F_1(a, a; w)$$

para todo a (veja série de potência (4.2.19)).

Exemplo 4.2.5 *Função Erro*

$$\mathrm{Erf}w = \int_w^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{2w}{\sqrt{\pi}}\,{}_1F_1(1/2, 3/2; -w^2)\,,$$

Exemplo 4.2.6 *Função de Bessel*

$$J_n(w) = \frac{1}{n!}\left(\frac{w}{2}\right)^n e^{iw}\,{}_1F_1(n+1/2, 2n+1; -2iw)\,.$$

Quando a é um inteiro negativo, a função hipergeométrica confluente torna–se um polinômio. Neste caso temos os seguintes exemplos:

Exemplo 4.2.7 *Polinômio de Laguerre*

$$L_\alpha^k(w) = \frac{(k+\alpha)!}{n!\,\alpha!}\,{}_1F_1(-\alpha, k+1; w)$$

com $\alpha,\, k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.2.8 *Polinômio de Hermite*

$$H_n(w) = 2^n \left(\frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma(-n/2)}\, w\, {}_1F_1((1-n)/2, 3/2; w^2) + \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma((1-n)/2)}\, {}_1F_1(-n/2, 1/2; w^2) \right)$$

com $n \in \mathbb{N}$.

4.3 Propriedades e Aplicações

Nesta seção descreveremos algumas propriedades e aplicações das funções especiais.

4.3.1 Polinômios de Legendre

A seguinte fórmula é importante para derivação das propriedades dos polinômios de Legendre a serem utilizadas no decorrer desta subseção:

Proposição 4.3.1 (Fórmula de Rodrigues) *O polinômio de Legendre P_l de ordem l, $l \in \mathbb{N}$, dado pela expressão (4.1.10) pode ser escrito na forma*

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l . \qquad (4.3.1)$$

Prova. A fórmula de Rodrigues é consequência da seguinte identidade

$$\begin{aligned} \frac{(2l-2r)!}{(l-2r)!}\, x^{l-2r} &= (2l-2r)(2l-2r-1)\cdots(l-2r+1)\, x^{l-2r} \qquad (4.3.2) \\ &= \frac{d^l}{dx^l}\, x^{2l-2r} \end{aligned}$$

Substituindo (4.3.2) em (4.1.10), obtemos

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2^l}\sum_{r=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^r}{r!\;(l-r)!}\frac{d^l}{dx^l}\, x^{2l-2r} \\ &= \frac{1}{2^l\, l!}\sum_{r=0}^{l} \frac{l!}{r!\;(l-r)!}\,(-1)^r \frac{d^l}{dx^l} x^{2(l-r)} \\ &= \frac{1}{2^l\, l!}\frac{d^l}{dx^l}\sum_{r=0}^{l} \frac{l!}{r!\;(l-r)!}\,(-1)^r\, x^{2(l-r)} \end{aligned}$$

onde usamos na segunda linha $\dfrac{d^l}{dx^l} x^{2(l-r)} = 0$ se $r = \left[\dfrac{l}{2}\right]+1,\ \left[\dfrac{l}{2}\right]+2,\ \ldots,\ l$, com $[z]$ denotando a parte inteira do número $z \in \mathbb{R}$. Note que $\left[\dfrac{l}{2}\right]$ é $\dfrac{l}{2}$ se l for par e $\dfrac{l-1}{2}$ se l for impar.

A proposição segue do binômio de Newton

$$(a+b)^l = \sum_{r=0}^{l} \frac{l!}{r!\;[l-r]!}\, a^r b^{2(l-r)}$$

com $a = -1$ e $b = x^2$.

□

Proposição 4.3.2 *1.* $P_l(1) = 1$ *e* $P_l(-1) = (-1)^l$ *;*

2. $P_l(-x) = (-1)^l\, P_l(x)$ *;*

3. $|P_l(x)| \le 1$

4. $P_l(x) = {}_2F_1\left(n+1, -n, 1; (1-x)/2\right)$

5. $\{P_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ *forma um sistema completo de funções em* $[-1,1]$*, ortogonais com respeito ao produto interno com peso* $\rho(x) = 1$*:*

$$(P_l,\, P_n) := \int_{-1}^{1} P_l(x)\, P_n(x)\, dx = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{l,n}\, . \qquad (4.3.3)$$

Prova. A propriedade *1.* é consequências da seguinte identidade (fórmula de Leibnitz):

$$\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l = \frac{d^l}{dx^l}\left\{(x-1)^l\,(x+1)^l\right\} = \sum_{n=0}^{l}\binom{l}{n}\frac{d^n\,(x-1)^l}{dx^n}\,\frac{d^{l-n}\,(x+1)^l}{dx^{l-n}}$$

Quando $x = 1$ ($x = -1$), somente o termo com $n = l$ ($n = 0$) sobrevive nesta soma, resultando em

$$P_l(\pm 1) = \frac{1}{2^l\, l!}\, l!\, (\pm 2)^l = (\pm 1)^l \ .$$

A propriedade *2.* é imediata. A propriedade de ortogonalidade e completeza em *5.* segue dos resultados gerais desenvolvidos no Capítulo 2 enquanto que (4.3.3) pode ser obtido por integração por partes usando a fórmula de Rodrigues. Deixamos a verificação das demais propriedades como exercício.

□

Exercício 4.3.3 *Verifique as propriedades* 3. *e* 4. *e a relação (4.3.3).*

Para facilitar a manipulação com os polinômios de Legendre é conveniente introduzir a função geratriz destes polinômios:

$$F(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\, t^l \ . \tag{4.3.4}$$

O polinômio de Legendre P_l é então o l–ésimo coeficiente de Taylor da função F em $t = 0$:

$$P_l(x) = \frac{1}{l!}\frac{\partial^l F}{\partial t^l}(x,0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{F(x,\zeta)}{\zeta^{l+1}} d\zeta \tag{4.3.5}$$

onde, pela fórmula de Cauchy, a integral é sobre um circuito $\mathcal{C}$ em torno da origem.

Proposição 4.3.4 *Para todo* $|t|\,,\, |x| < 1$,

$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} \ .$$

Prova. Evocando novamente a fórmula integral de Cauchy [1] e a fórmula de Rodrigues (4.3.1), temos

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{\xi^2 - 1}{2(\xi - x)}\right)^l \frac{d\xi}{\xi - x} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}'} \left(\frac{(z+x)^2 - 1}{2z}\right)^l \frac{dz}{z} \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

[1] Seja f uma função analítica em um domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ e $z \in \mathcal{D}$. Então

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dz^n}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

onde $\mathcal{C}$ é um contorno em torno de z contido em $\mathcal{D}$.

com $z = \xi - x$ e $\mathcal{C}'$ um contorno em torno da origem. Esta é a **representação integral de Schläfli** dos polinômios de Legendre.

Comparando (4.3.5) e (4.3.6) obtemos as seguintes equações:

$$\zeta = \frac{2z}{(z+x)^2 - 1}$$

e

$$\frac{dz}{d\zeta} = F(x,\zeta)\,\frac{z}{\zeta} \tag{4.3.7}$$

Resolvendo a primeira equação para z que pode ser escrita como

$$z^2 + 2\left(x - \frac{1}{\zeta}\right) z + x^2 - 1 = 0\,,$$

temos

$$z = -x + \frac{1}{\zeta}\left(1 \pm \left(\zeta^2 - 2\zeta x + 1\right)^{1/2}\right)$$

cuja derivada com respeito a ζ é dada por

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &= \frac{-1}{\zeta^2}\left(1 \pm \left(\zeta^2 - 2\zeta x + 1\right)^{1/2}\right) + \frac{\pm(\zeta - x)}{\zeta\left(\zeta^2 - 2\zeta x + 1\right)^{1/2}} \\ &= \frac{-\left(\zeta^2 - 2\zeta x + 1\right)^{1/2} \pm (\zeta x - 1)}{\zeta^2\left(\zeta^2 - 2\zeta x + 1\right)^{1/2}} \\ &= \frac{\mp 1}{\left(\zeta^2 - 2\zeta x + 1\right)^{1/2}}\,\frac{z}{\zeta} \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

que por sua vez, em vista de (4.3.7), conclui a prova da proposição. Convenciona–se tomar o sinal positivo em (4.3.8).

□

Observação 4.3.5 1. *A série (4.3.4) é absolutamente convergente em vista da propriedade* 3. *da Proposição 4.3.2.*

2. *Para valores de* $|t| > 1$, *podemos ainda usar a função geratriz pois*

$$F(x,t) = \frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{1 - 2x/t + 1/t^2}} = \frac{1}{t} F\left(x, 1/t\right)$$

e o lado direito desta igualdade pode ser expandida em polinômios de Legendre:

$$F(x,t) = \frac{1}{t}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\,\frac{1}{t^l}$$

(note para isso que $|1/t| < 1$*).*

A função geratriz $F(\cos\theta, a/r)$ tem a interpretação física do potencial eletrostático $\phi(x)$, no ponto $\mathbf{x} = (r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ em coordenadas esféricas, devido a uma carga q de valor $4\pi\varepsilon r$ (ε é a permissibilidade elétrica do meio) localizada no ponto $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$ com $a < r$:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon\, r}\frac{1}{\sqrt{1-2\,(a/r)\cos\theta+(a/r)^2}}\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon\, a}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}.\end{aligned}$$

Analogamente, para $a > r$, $F(\cos\theta, r/a)$ é potencial eletrostático $\phi(x)$ no ponto $\mathbf{x} = (r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ devido a uma carga q de valor $4\pi\varepsilon a$ localizada no ponto $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon a}\frac{1}{\sqrt{1-2\,(r/a)\cos\theta+(r/a)^2}}\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon\, a}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^{l}.\end{aligned}$$

Passemos agora às aplicações.

Exemplo 4.3.6 *Calcule o potencial eletrostático ϕ no interior de uma esféra neutra de raio a dado que o potencial na esfera $f(\theta)$ não dependa do ângulo φ.*

O potencial ϕ satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{4.3.9}$$

no domínio $\{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : r < a\}$ e condição de fronteira de Dirichlet não homogênia

$$\phi(a, \theta, \varphi) = f(\theta). \tag{4.3.10}$$

Devido a simetria com respeito ao ângulo φ em (4.3.10), podemos considerar o problema em apenas duas variaveis r e θ. Pelo método de separação de variáveis, escrevemos $\phi = \phi(r, \theta, \varphi) = R(r)\,\Theta(\theta)$ e substituimos na equação (4.3.9), dividindo em seguida por ϕ, resulta

$$\frac{1}{r^2 R}\left(r^2 R'\right)' + \frac{1}{r^2 \sin\theta\,\Theta}\left(\sin\theta\,\Theta'\right)' = 0$$

que é equivalente ao par de equações

$$\begin{aligned}\left(r^2 R'\right)' - l\,(l+1)\,R &= 0\\ \frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\,\Theta'\right)' + l\,(l+1)\,\Theta &= 0\end{aligned}$$

com l uma constante a ser determinada. A primeira destas equações é a equação de Bessel esférica com $k = 0$, e a segunda, após a mudança de variavel $x = \cos\theta$, é a equação de Legendre.

Pelo Exercício 3.4.4, a solução geral da equação radial é

$$R(r) = A\left(\frac{r}{a}\right)^l + B\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \tag{4.3.11}$$

*e a solução **regular** da equação para Θ é dada por*

$$\Theta(\theta) = P_l\,(\cos\theta)$$

com $l = 0, 1, 2, \ldots$.

Note que a exigência física de regularidade seleciona os valores admissíveis de l. Além disso, como l é positivo, e desejamos que a solução (4.3.11) também seja regular, temos $B = 0$. Portanto a solução do problema é dado pela série

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l\,(\cos\theta)$$

onde A_l são constantes tais que

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l\, P_l\,(\cos\theta) = f\,(\theta)\ .$$

Definindo $g(x) = f(\arccos x)$ e usando a relação de ortonormalidade (4.3.3), temos

$$A_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} g(x)\,P_l(x)\,dx\,. \tag{4.3.12}$$

Observação 4.3.7 *O potencial no exterior ϕ da esféra pode ser calculado de maneira análoga. Neste caso, devemos tomar $B = 0$ em (4.3.11) para termos $R(r)$ regular no infinito. A solução é dada por*

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} P_l\,(\cos\theta)$$

com B_l dado pela integral (4.3.12).

Considere a função f no exemplo acima dada por

$$f(\theta) = \begin{cases} V & \text{se} \quad 0 \leq \theta < \pi/2 \\ -V & \text{se} \quad \pi/2 \leq \theta < \pi \end{cases}, \tag{4.3.13}$$

isto é, $\phi = V$ na semi–esfera superior e $\phi = -V$ na semi–esfera inferior. Então, os coeficientes A_l, $l \in \mathbb{N}$, são

$$A_l = \frac{(2l+1)\,V}{2} \int_{-1}^{1} (\theta(x) - \theta(-x))\, P_l(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad l \text{for} \text{par} \\ V\, I_l & \text{se} \quad l \text{for} \text{impar} \end{cases}$$

onde $\theta(x)$ é a função degrau e

$$I_l = (2l+1) \int_0^1 P_l(x)\, dx\,. \tag{4.3.14}$$

Para calcular I_l, precisamos das seguintes identidades:

Proposição 4.3.8 *1. Para* $l = 1, 2, \ldots,$

$$(2l+1)\; P_l = P'_{l+1} - P'_{l-1}$$

2.

$$P_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n \text{for} \text{impar} \\ \dfrac{(-1)^{n/2}\; n!}{2^n\; [(n/2)!]^2} & \text{se} \quad n \text{for} \text{par} \end{cases} \tag{4.3.15}$$

Prova do item *1.***.** Diferenciando a função geratriz F com respeito a x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(1-2xt-t^2)^{3/2}} = t\, F(x,t)^3\,;$$

e diferenciando F com respeito a t:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = \frac{x-t}{(1-2xt-t^2)^{3/2}} = (x-t)\; F(x,t)^3\,.$$

Temos portanto a seguinte equação

$$2t\frac{\partial F}{\partial t} + F + \left(t - \frac{1}{t}\right)\frac{\partial F}{\partial x} = \left[2t\,(x-t) + t^2 - 1\right] F^3 + F = 0$$

que através da expansão em polinômios de Legendre, implica em

$$(2l+1)\, P_l + P'_{l-1} - P'_{l+1} = 0\,.$$

□

Prova do item *2.***.** Expandimos a função $F(0,t)$ em série de Taylor em torno de $t = 0$:

$$F(0,t) = F(0,0) + F'(0,0)t + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0,0)\, t^n + \cdots \tag{4.3.16}$$

onde

$$F^{(n)}(0,0) = \frac{d^n F}{dt^n}(0,0) = \left[\frac{d^n}{dt^n}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right]_{t=0}$$

Pela fórmula de derivação composta,

$$\begin{aligned} F^{(n)}(0,0) &= \frac{n!}{(n/2)!}\left[\frac{d^{n/2}}{ds^{n/2}}\,(1+s)^{-1/2}\right]_{s=0} \\ &= \frac{n!}{(n/2)!}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{-n+1}{2}\right) \\ &= \frac{(-1)^{n/2}\,(n!)^2}{2^n\,[(n/2)!]^2} \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

se n for par e zero de outra forma. De (4.3.4), (4.3.16) e (4.3.17) obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)\, t^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\; 2k!}{2^{2k}\; (k!)^2} t^{2k}$$

implicando em (4.3.15).

□

Usando a Proposição 4.3.8, o teorema fundamental do cálculo e o item *1.* da Proposição 4.3.2, o cálculo da integral (4.3.14) resulta

$$\begin{aligned} I_l &= \int_0^1 \frac{d}{dx}\,(P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x))\, dx \\ &= P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0) \\ &= \frac{(-1)^{(l-1)/2}\;(l-1)!}{2^{l-1}\;[((l-1)/2)!]^2} - \frac{(-1)^{(l+1)/2}\;(l+1)!}{2^{l+1}\;[((l+1)/2)!]^2} \\ &= \frac{(-1)^{(l-1)/2}\;(l-1)!}{2^{l-1}\;[((l-1)/2)!]^2}\left(1 + \frac{l}{l+1}\right) \\ &= \frac{(-1)^{(l-1)/2}\;(2l+1)\,(l-1)!}{2^l\;[((l-1)/2)!]\;[((l+1)/2)!]}\,. \end{aligned}$$

para l par e zero de outra forma.

O potencial eletrostático no Exemplo 4.3.6 com f dado por (4.3.13) é portanto

$$\phi(r,\theta,\varphi) = V \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(4k-1)}{2^{2k-1}(k-1)} \binom{2k-2}{k} \left(\frac{r}{a}\right)^{2k-1} P_{2k-1}(\cos\theta) \ .$$

Exemplo 4.3.9 *Determine o potencial eletrostático ϕ produzido por um anel condutor de raio a e carga total q nos pontos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ com $|\mathbf{x}| > a$.*

O potencial $\phi = \phi(r,\theta,\varphi)$ satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0$$

no domínio $\{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : r > a\}$. O sistema de coordenadas é escolhido de maneira tal que o anel se encontre no plano $\{(r,\theta,\varphi) : \theta = \pi\}$ com centro na origem. Como as cargas devem distribuir uniformemente no anel (o anel é um condutor), o potencial ϕ é independente do ângulo φ. A solução da equação de Laplace é portanto da forma

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos\theta) \ . \tag{4.3.18}$$

Note que em (4.3.18) usamos a condição de fronteira $\lim_{r\to\infty} \phi(r,\theta,\varphi) = 0$ para selecionar uma das duas soluções linearmente independentes da equação radial.

Para determinar as constantes B_l's, usaremos como condição de fronteira o potencial ϕ no eixo perpendicular ao plano do anel. O valor do potencial nestas condições pode ser calculado facilmente. Se λ for a densidade linear de carga no anel e dl o elemento de comprimento, então

$$d\phi\,(r,0,0) = \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon\, r} \frac{1}{\sqrt{1+(a/r)^2}} \ .$$

Integrando sobre o anel e usando a função geratriz, temos

$$\phi\,(r,0,0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\, r} F(0,a/r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\, a} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(0) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \ .$$

Comparando esta expressão com (4.3.18) em $\theta = 0$ e lembrando que $P_l(1) = 1$, obtemos

$$B_l = \frac{q}{4\pi\varepsilon\, a} P_l(0)$$

com $P_l(0)$ dado pela Proposição 4.3.8.