Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Física-Matemática II
Primeira Lista de Exercícios
Data de entrega: 27 de setembro de 2021

Prof. J. C. A. Barata

---

1) Considere o problema de determinar a solução da equação diferencial linear não-homogênea de primeira ordem

$$\dot{y}(t) + a(t)y(t) + b(t) \ = \ 0 \ ,$$

com a condição $y(0) = y_0$ (assuma que as funções a e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ são contínuas). Demonstre que sua solução é

$$y(t) \ = \ \frac{1}{p(t)} \left[y_0 - \int_0^t p(s)b(s)\, ds \right] \ ,$$

onde

$$p(t) \ := \ \exp\left(\int_0^t a(\tau)d\tau \right) \ . \tag{1}$$

---

2) A equação diferencial ordinária <u>não-linear</u>, homogênea, de primeira ordem

$$\dot{y}(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t)^2 \ = \ 0$$

é denominada *equação de Bernoulli*. Assuma que as funções a e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ são contínuas.

I. Prove que a solução dessa equação com a condição inicial $y(0) = y_0$ é dada por

$$y(t) \ = \ \frac{y_0}{p(t)\left(1 + y_0 \displaystyle\int_0^t b(s)p(s)^{-1}\, ds\right)} \ , \tag{2}$$

onde p é também dada por (1). *Sugestão:* defina $v(t) = 1/y(t)$ e mostre que v satisfaz uma equação diferencial linear de primeira ordem como a do exercício anterior.

II. Justifique a existência e a unicidade de solução com base no Teorema de Picard-Lindelöf.

III. Pode haver uma circunstância na qual a solução (2) existe apenas durante um intervalo finito após $t = 0$?

---

3) Determine a solução geral da equação de Bernoulli generalizada

$$\dot{y}(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t)^n \ = \ 0 \ ,$$

$n \neq 1$. Sugestão: Defina w por $y(t) = w(t)^{\frac{1}{1-n}}$ e proceda como acima.

---

4) Considere a equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) \ = \ 0 \ , \tag{3}$$

onde a, b e c são constantes reais satisfazendo $b^2 \neq 4ac$ e $a \neq 0$.

Essa equação pode ser resolvida pelo seguinte método (devido a Euler). Admitamos uma solução do tipo

$$x(t) \ = \ e^{\lambda t} \ .$$

a) Mostre que para

$$\lambda \ = \ \lambda_{\pm} \ := \ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a equação (3) é satisfeita.

b) Mostre então que a solução geral da equação diferencial (3) é

$$x(t) \ = \ a_+ e^{\lambda_+ t} + a_- e^{\lambda_- t} \ ,$$

onde $a_{\pm}$ são constantes.

c) Determine $a_{\pm}$ para as condições iniciais $x(0) = X_0$, $\dot{x}(0) = V_0$.

Para $X_0 \neq 0$ mas $V_0 = 0$ faça gráficos de $x(t)$ para os casos em que

d) $b^2 > 4ac$.

e) $b^2 < 4ac$.

Se você estiver curioso em saber o que ocorre se $b^2 = 4ac$, saiba que nesse caso $\lambda_+ = \lambda_- = -b/(2a)$ e a solução geral é do tipo

$$x(t) \ = \ a_+ e^{\lambda_+ t} + a_- t e^{\lambda_+ t} \ .$$

f) Verifique que essa expressão é de fato solução da equação (3) no caso $b^2 = 4ac$.

---

5) Seja a equação diferencial ordinária linear de ordem n

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) \ = \ f(t) \ .$$

Determine o sistema linear de n equações de primeira ordem equivalente e mostre que o mesmo pode ser escrito na forma matricial

$$\dot{Y}(t) \ = \ A(t)Y(t) + B(t) \ ,$$

onde

$$Y(t) \ := \ \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} , \qquad B(t) \ := \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

e $A(t)$ é a matriz $n \times n$

$$A(t) \quad := \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} .$$

---

6) Considere a matriz

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix} ,$$

a qual é relevante para o problema do oscilador harmônico clássico unidimensional (adote acima $\omega_0 > 0$ e $\gamma > 0$). Mostre que a mesma é diagonalizável se e somente se $\gamma \neq 2\omega_0$. Determine nesse caso ($\gamma \neq 2\omega_0$) seus autovalores e seus projetores espectrais e, usando a representação espectral de A determine explicitamente e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$.

Com base nesses resultados apresente a solução explícita do problema de valor inicial $\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$, com $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$.

---

7) Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço vetorial complexo $(n+1)$-dimensional de todos os polinômios complexos de grau menor ou igual a n. Seja $D = \frac{d}{dx}$ o operador de derivação agindo em $\mathcal{P}_n$.

a) Expresse D como uma matriz $(n+1)\times(n+1)$ agindo na base $\{e_0, \ldots, e_n\}$, onde $e_k = x^k/k!$.

b) Mostre que a matriz que representa D é nilpotente.

c) Expresse $\exp(tD)$, $t \in \mathbb{R}$, como matriz na mesma base.

d) Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ um elemento de $\mathcal{P}_n$. Mostre que $\Big(\exp(tD)p\Big)(x) = p(x+t)$. *Sugestão.* Mostre que isso é verdade para cada elemento da base $\{e_0, \ldots, e_n\}$.

---

8) As chamadas *matrizes de Pauli* são definidas por

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

a) Mostre que as mesmas satisfazem as seguintes relações algébricas: para todos $a,\ b = 1,\ 2,\ 3$ valem

$$\begin{aligned} [\sigma_a,\ \sigma_b] &:= \sigma_a\sigma_b - \sigma_b\sigma_a &&= 2i\sum_{c=1}^{3}\varepsilon_{abc}\sigma_c , \\ \{\sigma_a,\ \sigma_b\} &:= \sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_a &&= 2\delta_{ab}\mathbb{1} , \\ & \qquad\qquad \sigma_a\sigma_b &&= \delta_{ab}\mathbb{1} + i\sum_{c=1}^{3}\varepsilon_{abc}\sigma_c . \end{aligned}$$

b) Mostre que as quatro matrizes $\mathbb{1},\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ formam uma base em $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ 2)$: toda matriz complexa 2×2 pode ser escrita como uma combinação linear das mesmas.

c) Obtenha a representação espectral das matrizes de Pauli.

d) Seja $\vec{\eta} := (\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)$ um vetor de comprimento 1 de $\mathbb{R}^3$, ou seja, $\|\vec{\eta}\| = 1$. Seja, $\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma} := \eta_1\sigma_1 + \eta_2\sigma_2 + \eta_3\sigma_3$, onde σ_k são as matrizes de Pauli, definidas acima. Prove que

$$\exp\left(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}\right) = \cos(\theta)\,\mathbb{1} + i\,\mathrm{sen}(\theta)\left(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}\right) .$$

Sugestão: Obtenha a decomposição espectral de $\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}$ e use-a para determinar $\exp\left(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}\right)$.

e) Determine a solução da equação diferencial

$$i\frac{d}{dt}\Psi(t) = \mathsf{H}\Psi(t) ,$$

onde $\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, $t \in \mathbb{R}$, e onde $\mathsf{H} := B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + B_3\sigma_3$, sendo que os B_i's são constantes reais. A condição inicial é $\Psi(0) = \begin{pmatrix} \psi_1^0 \\ \psi_2^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.