Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Curso de Grupos e Tensores
Primeira Lista de Exercícios
Data de entrega: 20 de maio de 2021

Prof. J. C. A. Barata

Apenas os exercícios indicados por $(*)$ são de entrega obrigatória.

---

1) $(*)$ Seja X um conjunto não-vazio e denote por $\mathbb{P}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos de X (incluindo o vazio). Para $A,\ B \subset X$. seja $A \triangle B\ :=\ (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Mostre que $\triangle$ define uma operação de grupo em $\mathbb{P}(X)$.

---

2) $(*)$ Mostre com todos os devidos detalhes que $\mathrm{SL}(\mathbb{Z},\ n)$, o conjunto das matrizes inteiras (i.e., com entradas inteiras) de determinante 1 é um grupo em relação à operação usual de multiplicação de matrizes.

---

3) $(*)$ Verifique que o intervalo $V = (0,\ 1)$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais com as operações[1] de soma

$$a \stackrel{\circ}{+} b \ \ :=\ \ \frac{ab}{1-a-b+2ab}\ , \tag{1}$$

para todos $a,\ b \in (0,\ 1)$ (em particular, constate que a operação definida em (1) é associativa e comutativa), e com o produto por escalares $\alpha \in \mathbb{R}$ dado por

$$\alpha \cdot a \ \ :=\ \ \frac{a^\alpha}{a^\alpha + (1-a)^\alpha}\ , \tag{2}$$

para todo $a \in V$. Verifique que o vetor nulo é o elemento $1/2 \in (0,\ 1)$ e verifique que a inversa aditiva de $a \in V$ é $\left(\stackrel{\circ}{-}\ a\right) = 1 - a \in V$.

---

4) O conjunto $\mathbb{R}^2 = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right),\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}\right\}$, dos pares ordenados de números <u>reais</u>, pode ser feito um espaço vetorial sobre o corpo dos <u>complexos</u>! A operação de soma é definida de modo usual: $\left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{smallmatrix}\right)$. A operação de multiplicação por escalares (complexos!) é definida da seguinte forma. Seja $z = x + iy \in \mathbb{C}$, com $x,\ y \in \mathbb{R}$ sendo sua parte real e imaginária. Defina-se $M(z) = \left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right)$ e defina-se o produto por escalares por

$$z \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \ \ :=\ \ M(z) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \ =\ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \ =\ \begin{pmatrix} xa_1 - ya_2 \\ ya_1 + xa_2 \end{pmatrix} \ \in\ \mathbb{R}^2\ . \tag{3}$$

Mostre que para dois números complexos quaisquer valem $M(z)+M(w) = M(z+w)$ e $M(z)M(w) = M(zw)$. Conclua disso que (3) define um produto de vetores de $\mathbb{R}^2$ por escalares complexos que satisfaz todas as propriedades requeridas na definição de um espaço vetorial sobre o corpo dos complexos:

$$z \cdot \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right] \ =\ z \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\ , \quad (z+w) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \ =\ z \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

[1] No lado direito de ambas as expressões (1) e (2) as diversas operações, como soma, produto, divisão, exponenciação, são as operações usuais de números reais.

e

$$z \cdot \left[w \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right] \;=\; (zw) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \; .$$

Se deseja entender por que o exemplo acima funciona, constate que (com $x, \; y \in \mathbb{R}$),

$$M\big(x + iy\big) \;=\; x\mathbb{1} + yJ \; ,$$

onde J é a matriz $J \;:=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, a qual possui a seguinte propriedade sugestiva: $J^2 = -\mathbb{1}$.

---

5) Mostre que $\mathbb{R}^3$ dotado do produto vetorial usual é uma álgebra de Lie real.

---

6) $(*)$ Neste exercício encontramos vários exemplos relevantes de álgebras de Lie de matrizes quadradas. Note-se que é suficiente verificar as propriedades de antissimetria e a identidade de Jacobi para o caso do item a, pois nos demais casos o produto é o mesmo (dado pelo comutador de matrizes).

a Mostre que $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{R}, \; n)$ (ou $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C}, \; n)$), o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ reais (complexas) é uma álgebra de Lie real (complexa) com relação ao produto $[A, \; B] = AB - BA$.

b Mostre que o subconjunto de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{R}, \; n)$ (ou de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C}, \; n)$) formado pelas matrizes com traço nulo é uma álgebra de Lie com relação ao produto $[A, \; B] = AB - BA$.

c Mostre que o subconjunto de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{R}, \; n)$ (ou de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C}, \; n)$) formado pelas matrizes anti-simétricas, ou seja, tais que $A^T = -A$, é uma álgebra de Lie com relação ao produto $[A, \; B] = AB - BA$.

d Mostre que o subconjunto de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C}, \; n)$ formado pelas matrizes anti-autoadjuntas, ou seja, tais que $A^* = -A$, é uma álgebra de Lie (sobre o corpo dos reais!) com relação ao produto $[A, \; B] = AB - BA$.

e Conclua igualmente que o subconjunto de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C}, \; n)$ formado pelas matrizes anti-autoadjuntas, ou seja, tais que $A^* = -A$, e de traço nulo ($\mathrm{Tr}\,(A) = 0$) é uma álgebra de Lie (sobre o corpo dos reais!) com relação ao produto $[A, \; B] = AB - BA$.

f Fixada uma matriz $M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{R}, \; n)$, mostre que o subconjunto de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{R}, \; n)$ formado pelas matrizes A com a propriedade $AM = -MA^T$ é uma álgebra de Lie real com relação ao produto $[A, \; B] = AB - BA$.

g Fixada uma matriz $M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C}, \; n)$, mostre que o subconjunto de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C}, \; n)$ formado pelas matrizes A com a propriedade $AM = -MA^*$ é uma álgebra de Lie <u>*real*</u> com relação ao produto $[A, \; B] = AB - BA$.

---

7) $(*)$ As chamadas *matrizes de Pauli* são definidas por

$$\sigma_1 \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_3 \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; .$$

a) Mostre que as mesmas satisfazem as seguintes relações algébricas: para todos $a,\ b = 1,\ 2,\ 3$ valem

$$\begin{aligned}
[\sigma_a,\ \sigma_b] \ := \ \sigma_a\sigma_b - \sigma_b\sigma_a \ &= \ 2i\sum_{c=1}^{3}\varepsilon_{abc}\sigma_c \ , \\
\{\sigma_a,\ \sigma_b\} \ := \ \sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_a \ &= \ 2\delta_{ab}\mathbb{1} \ , \\
\sigma_a\sigma_b \ &= \ \delta_{ab}\mathbb{1} + i\sum_{c=1}^{3}\varepsilon_{abc}\sigma_c \ .
\end{aligned}$$

b) Mostre que as quatro matrizes $\mathbb{1},\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ formam uma base em $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ 2)$: toda matriz complexa 2×2 pode ser escrita como uma combinação linear complexa das mesmas.

c) Mostre que as matrizes $\mathbb{1},\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ são ortonormais em relação ao seguinte produto escalar definido em $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ 2)$: $\langle A,\ B\rangle := \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(A^*B)$.

d) Seja $\vec{\eta}\in\mathbb{R}^3$ um vetor unitário e seja $\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma} \ := \ \eta_1\sigma_1 + \eta_2\sigma_2 + \eta_3\sigma_3$. Mostre que $\left(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}\right)^2 = \mathbb{1}$. Usando isso, prove que

$$\exp\left(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}\right) \ = \ \cos(\theta)\mathbb{1} + i\,\mathrm{sen}(\theta)\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma} \ .$$

---

* ** *** ** *

---

8) Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ e considere nele a seguinte operação de produto:

$$(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)\cdot(y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3) \ \ :=$$

$$\big(x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3,\ x_0y_1 + y_0x_1 + x_2y_3 - x_3y_2,\ x_0y_2 + y_0x_2 + x_3y_1 - x_1y_3,\ x_0y_3 + y_0x_3 + x_1y_2 - x_2y_1\big) \ . \tag{4}$$

- Mostre que esse produto faz de $\mathbb{R}^4$ uma álgebra sobre os reais.

O espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ dotado do produto acima é denominado *álgebra dos quatérnios* ou *álgebra quaterniônica* e é denotada freqüentemente por $\mathbb{H}$ (em honra a Hamilton). A álgebra $\mathbb{H}$ é associativa mas não é comutativa. $\mathbb{H}$ tem uma unidade, a saber, o vetor $(1,\ 0,\ 0,\ 0)\in\mathbb{R}^4$.

- Mostre que o produto acima é associativo. *Sugestão:* paciência!
- Mostre que $\mathbb{H}$ não é uma álgebra comutativa.
- Mostre que $(1,\ 0,\ 0,\ 0)\in\mathbb{R}^4$ é a unidade de $\mathbb{H}$.

- Há uma maneira melhor de representar o produto quaterniônico que a expressão (4). Vamos escrever os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^4$ como

$$e_0 \ = \ (1,\ 0,\ 0,\ 0)\ , \qquad e_1 \ = \ (0,\ 1,\ 0,\ 0)\ , \qquad e_2 \ = \ (0,\ 0,\ 1,\ 0)\ , \qquad e_3 \ = \ (0,\ 0,\ 0,\ 1)\ ,$$

de modo que todo $x = (x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbb{R}^4$ pode ser escrito na forma $x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$. O produto quaterniônico pode, portanto, ser definido pelo produto dos elementos da base canônica, que segue as seguintes regras:

  1. e_0 é a unidade da álgebra: $x \cdot e_0 = e_0 \cdot x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^4$.
  2. $(e_1)^2 = (e_2)^2 = (e_3)^2 = -e_0$.
  3. $e_i e_j = -e_j e_i$ para todo $i \neq j$ com $i,\ j = 1,\ 2,\ 3$.
  4. $e_1 e_2 = e_3$, $e_2 e_3 = e_1$ e $e_3 e_1 = e_2$.

  Verifique que essas regras reproduzem perfeitamente (4).

- Além de ser de manipulação mais simples, essas regras permitem representar a álgebra quaterniônica de um modo talvez mais familiar, a saber, em termos de certas matrizes complexas 2×2. Sejam a e b dois números complexos e seja $M(a,\ b)$ a matriz

$$M(a,\ b) \ := \ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}\ ,$$

onde $\overline{z}$ é o complexo conjugado de $z \in \mathbb{C}$. É fácil de se ver que o conjunto de todas as matrizes dessa forma é uma álgebra sobre os reais com o produto usual de matrizes, pois vale

$$M(a,\ b)M(c,\ d) \ = \ M\big(ac - b\overline{d},\ ad + b\overline{c}\big)\ .$$

Verifique essa relação!

- Existe um isomorfismo entre a álgebra dos quatérnios e essa álgebra de matrizes 2×2. Basta associar (bijetivamente!) a cada quádrupla $(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$ a matriz $M\big(x_0 - ix_3,\ x_2 + ix_1\big)$:

$$x \ = \ \big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3\big) \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} x_0 - ix_3 & x_2 + ix_1 \\ & \\ -x_2 + ix_1 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix} \ =: \ M(x)\ . \tag{5}$$

Verifique que o produto quaterniônico é respeitado por essa associação:

$$M(x)M(y) \ = \ M\big(x \cdot y\big)\ ,$$

onde, acima, $x \cdot y$ é o produto quaterniônico de x e $y \in \mathbb{R}^4$.

Mostre também que por essa associação tem-se

$$M(x) \ = \ M(x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \ = \ x_0 M(e_0) + x_1 M(e_1) + x_2 M(e_2) + x_3 M(e_3),$$

com

$$M(e_0) \ = \ \mathbb{1}, \qquad M(e_1) \ = \ i\sigma_1\ , \qquad M(e_2) \ = \ i\sigma_2\ , \qquad M(e_3) \ = \ -i\sigma_3\ ,$$

onde σ_k são as matrizes de Pauli. O aparecimento das matrizes de Pauli, acima, aponta para a existência de uma íntima relação entre quatérnios e o grupo SU(2).