Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Curso de Grupos e Tensores
Terceira Lista de Exercícios
Data de entrega: 19 de julho de 2021

Prof. J. C. A. Barata

Apenas os exercícios indicados por $(*)$ são de entrega obrigatória.

---

1) $(*)$ Sejam G e H dois grupos e $\varphi : G \to H$ um homomorfismo. Mostre que $G/\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ e $\mathrm{Ran}\,(\varphi)$ são grupos isomorfos, $G/\mathrm{Ker}\,(\varphi) \simeq \mathrm{Ran}\,(\varphi)$, com o isomorfismo sendo dado por $\Psi\big([g]_{\mathrm{Ker}\,(\varphi)}\big) = \varphi(g)$, $g \in G$. Esse é o chamado *Primeiro Teorema de Isomorfismos*.

---

2) $(*)$ Seja $\mathbb{Z}$ o grupo dos números inteiros com a operação usual de soma. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$. Denotamos por $n\mathbb{Z}$ o conjunto $\big\{nm \,|\, m \in \mathbb{Z}\big\}$.

(a) Mostre que $n\mathbb{Z}$ é um subgrupo normal de $\mathbb{Z}$. Como $n\mathbb{Z}$ é um subgrupo normal de $\mathbb{Z}$, podemos construir o grupo quociente $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$.

(b) Mostre que $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$ é isomorfo ao grupo $\mathbb{Z}_n$, o qual consiste do conjunto $\{0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\}$ dotado da operação de soma módulo n.

(c) Mostre que a aplicação $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathrm{U}(1)$ dada por $\varphi(m) = \exp\left(\frac{2\pi i m}{n}\right)$ é um homomorfismo entre os grupos $\mathbb{Z}$ e $\mathrm{U}(1)$. Mostre que $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = n\mathbb{Z}$ e que $\mathrm{Ran}\,(\varphi) = \left\{\exp\left(\frac{2\pi i m}{n}\right),\ m = 0,\ \ldots,\ n-1\right\}$. Conclua do Primeiro Teorema de Isomorfismos que $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}) \simeq \left\{\exp\left(\frac{2\pi i m}{n}\right),\ m = 0,\ \ldots,\ n-1\right\}$.

---

3) Seja $\mathrm{GL}(\mathbb{C},\ n)$ o grupo das matrizes complexas $n \times n$ inversíveis (i.e., de determinante não-nulo). Seja $\mathrm{SL}(\mathbb{C},\ n) \subset \mathrm{GL}(\mathbb{C},\ n)$ o subgrupo das matrizes complexas $n \times n$ de determinante igual a 1. Seja $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ o grupo multiplicativo dos complexos (sem o elemento zero). Mostre que a aplicação $\varphi : \mathrm{GL}(\mathbb{C},\ n) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por $\mathrm{GL}(\mathbb{C},\ n) \ni A \mapsto \det(A) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é um homomorfismo. Mostre que $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathrm{SL}(\mathbb{C},\ n)$ (o que, *en passant*, informa-nos que $\mathrm{SL}(\mathbb{C},\ n)$ é um subgrupo normal de $\mathrm{GL}(\mathbb{C},\ n)$). Mostre que $\mathrm{Ran}\,(\varphi) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Conclua do Primeiro Teorema de Isomorfismos que

$$\mathrm{GL}(\mathbb{C},\ n)/\mathrm{SL}(\mathbb{C},\ n) \ \simeq \ \mathbb{C} \setminus \{0\} \ ,$$

sendo que por $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ entende-se o grupo multiplicativo dos complexos sem o zero.

Prove analogamente que

$$\mathrm{O}(n)/\mathrm{SO}(n) \ \simeq \ \{-\mathbb{1},\ \mathbb{1}\} \ \simeq \ \mathbb{Z}_2 \qquad \text{e que} \qquad \mathrm{U}(n)/\mathrm{SU}(n) \ \simeq \ \mathrm{U}(1)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

---

4) Seja G um grupo (cujo elemento neutro é e_G), seja M um conjunto não-vazio e seja $\gamma : G \times M \to M$ uma ação (à esquerda ou à direita) de G em M. Considere-se o subconjunto N de G definido por

$$N \ := \ \Big\{n \in G \Big|\ \gamma_n(m) = m \text{ para todo } m \in M\Big\} \ .$$

Note-se que N nunca é vazio, pois sempre vale $e_G \in N$. Prove que N é um subgrupo de G e prove que N é normal: $N \lhd G$.

---

5) $(*)$ Sejam G e H dois grupos e seja $\alpha : G \times H \to H$ é uma ação (à esquerda) de G sobre H por automorfismos, ou seja, que satisfaz

1. Para todo $g \in G$, a função $\alpha_g(\cdot) : H \to H$ é um automorfismo de H, ou seja, $\alpha_g(h)\alpha_g(h') = \alpha_g(hh')$, sendo que $\alpha_g(\cdot) : H \to H$ é bijetora com $(\alpha_g)^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$.
2. Para todo $h \in H$ vale $\alpha_{e_G}(h) = h$.
3. Para todo $h \in H$ vale $\alpha_g\big(\alpha_{g'}(h)\big) = \alpha_{gg'}(h)$ para quaisquer $g,\ g' \in G$.

Acima e_G e e_H são as unidades de G e H, respectivamente.

Mostre que o produto Cartesiano $G \times H \ := \ \big\{(g,\ h),\ g \in G,\ h \in H\big\}$ é um grupo com a operação de produto definida por

$$(g_1,\ h_1)(g_2,\ h_2) \ := \ \big(g_1 g_2,\ h_1 \alpha_{g_1}(h_2)\big)\ .$$

Para tal, mostre que esse produto é associativo, que possui um elemento neutro e indentifique a inversa de cada par $(g,\ h) \in G \times H$ em relação a esse produto. Esse grupo é dito ser o *produto semi-direto* de G por H e é denotado por $G \circledS_\alpha H$.

---

6) $(*)$ Sejam G e H dois grupos e seja o produto semidireto $G \circledS_\alpha H$, onde $\alpha : G \times H \to H$ é uma ação (à esquerda) de G sobre H por automorfismos, como descrito acima.

I. Mostre que o conjunto

$$\widetilde{G} \ := \ \big\{(g,\ e_H),\ g \in G\big\}$$

é um subgrupo de $G \circledS_\alpha H$ e que $\widetilde{G}$ é isomorfo a G.

II. Mostre que o conjunto

$$\widetilde{H} \ := \ \big\{(e_G,\ h),\ h \in H\big\}$$

é um subgrupo de $G \circledS_\alpha H$ e que $\widetilde{H}$ é isomorfo a H.

III. Mostre que $\widetilde{H}$ é um subgrupo normal de $G \circledS_\alpha H$.

IV. Considere as classes de equivalência que compõem o grupo quociente $\big(G \circledS_\alpha H\big)/\widetilde{H}$. Mostre que $\big[(g,\ h)\big] = \big[(g',\ h')\big]$ se e somente se $g = g'$. Conclua que $\big[(g,\ h)\big] = \Big\{(g,\ h'),\ h' \in H\Big\}$ e conclua que $\big[(g,\ h)\big] = \big[(g,\ e_H)\big]$.

V. Mostre que o grupo quociente $\big(G \circledS_\alpha H\big)/\widetilde{H}$ é isomorfo a G.

VI. Explicite qual condição α deve satisfazer para que $\widetilde{G}$ seja também um subgrupo normal de $G \circledS_\alpha H$. Em tal caso, prove que $\big(G \circledS_\alpha H\big)/\widetilde{G}$ é isomorfo a H.