Capítulo 1
Noções Conjuntivistas Básicas

Conteúdo

Este capítulo introdutório pretende (re)apresentar ao leitor uma série de noções matemáticas básicas abrangendo rudimentos da teoria ("ingênua") dos conjuntos. O objetivo não é um tratamento extensivo dos diversos assuntos. Trata-se quase de um guia de consulta onde são apresentadas, junto com exemplos simples, várias noções e definições básicas que utilizaremos. O estudante não deve necessariamente ler este capítulo de forma sistemática e sequencial, mas deve retornar a ele sempre que necessário. Para o estudante interessado em uma exposição introdutória da Teoria dos Conjuntos recomendamos [152] e também [272].

1.1 Conjuntos, Relações e Funções

Partiremos do pressuposto de serem familiares as noções básicas envolvendo conjuntos, como a noção de conjunto vazio $\emptyset$, a noção de pertinência $x \in C$, de união de dois conjuntos $A \cup B$ e de intersecção de dois conjuntos $A \cap B$.

Para $A, B \subset X$ denotamos por $A \setminus B$ a chamada diferença entre os conjuntos A e B, a saber

$$A \setminus B := \Big\{x \in X \text{ tal que } x \in A \text{ mas } x \notin B\Big\} . \tag{1.1}$$

Por vezes usa-se a notação $A - B$ para $A \setminus B$. Para $A \subset X$ denota-se por A^c o chamado *complemento de A em relação a X*: $A^c := X \setminus A$. Note-se que ao usar-se o símbolo A^c deve estar subentendido qual o conjunto X ao qual o complemento se refere. É fácil ver que se $A, B \subset X$, então $A \setminus B = B^c \cap A$. Vale também $(A^c)^c = A$ e

$$A \cap B = A \setminus B^c = B \setminus A^c \tag{1.2}$$

para todos $A, B \subset X$. Igualmente, tem-se

$$A \cap B = A \setminus \big(B^c \cap A\big) \tag{1.3}$$

e

$$A \cap B = A \setminus \big(A \setminus B\big) \tag{1.4}$$

também para todos $A, B \subset X$. Verifique!

Dizemos que um conjunto B é um *subconjunto próprio* de A se $B \subset A$ e se $A \setminus B \neq \emptyset$, ou seja, se todo elemento de B for elemento de A mas houver elementos em A que não pertencem a B. Se B é um subconjunto próprio de A dizemos que B está contido propriamente em A, ou que A contém B propriamente. Por vezes denota-se o fato de B ser um subconjunto próprio de A por $B \subsetneq A$ ou por $A \supsetneq B$.

Se A e B são conjuntos e $A \cap B = \emptyset$, então $A \cup B$ é dita ser uma *união disjunta* de A e B.

Se X é um conjunto denota-se por $\mathbb{P}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos de X. $\mathbb{P}(X)$ é por vezes chamado de *conjunto das partes de* X. Por convenção adota-se sempre que $\emptyset \in \mathbb{P}(X)$. Assim, dizer que $A \subset X$ equivale a dizer $A \in \mathbb{P}(X)$.

Por $A \triangle B$ denota-se a chamada *diferença simétrica* entre A e B:

$$A \triangle B \ := \ (A \cup B) \setminus (A \cap B) \, . \tag{1.5}$$

E. 1.1 *Exercício.* Se A e B são conjuntos, mostre que

$$A \triangle B \ = \ (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \, , \tag{1.6}$$

$$A \cap B \ = \ (A \cup B) \setminus (A \triangle B) \ = \ \Big(A \cup B\Big) \setminus \Big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\Big) \, , \tag{1.7}$$

$$A \cup B \ = \ (A \triangle B) \cup (A \cap B) \ = \ (A \triangle B) \triangle (A \cap B) \, , \tag{1.8}$$

$$A \setminus B \ = \ A \triangle (A \cap B) \, . \tag{1.9}$$

✠

E. 1.2 *Exercício.* Se A e B são conjuntos, mostre que $A \triangle B = B \triangle A$ (“comutatividade”) e que $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ (“associatividade”). ✠

• Pares ordenados

Um conceito básico em Matemática é o de *par ordenado*. O conceito de par ordenado $(a, \ b)$ formado por dois elementos genéricos $a, \ b \in X$ é intuitivo. Pela intuição, entende-se como par ordenado uma lista de dois elementos sendo que um deles assume a posição de “primeiro” elemento da lista (no caso, a) e o outro a de “segundo” (no caso, b). Formalmente define-se $(a, \ b)$ como sendo o conjunto $\big\{\{a\}, \{a, \ b\}\big\}$. Esta definição formal corresponde à intuição pois, no conjunto $\big\{\{a\}, \{a, \ b\}\big\}$, há uma clara distinção entre o papel de a e de b. Apesar de existir a definição formal acima, recomenda-se ao estudante fiar-se inicialmente na intuição por trás do conceito. A definição acima é devida a Kuratowski[1].

A definição de Kuratowski, acima, garante a validade de uma propriedade fundamental, denominada *propriedade característica de pares ordenados*, a saber, a propriedade que $(a, \ b) = (c, \ d)$ se e somente se $a = c$ e $b = d$. Sua demonstração é relativamente simples, mas não será apresentada aqui. Vide referências supracitadas.

Chamamos a atenção do estudante para a existência de outras definições para a noção de par ordenado. Uma definição “alternativa” para $(a, \ b)$ é $\big\{a, \{a, \ b\}\big\}$. Essa definição também satisfaz a propriedade característica de pares ordenados, mas sua demonstração requer o uso do esquema axiomático (não-“ingênuo”) de Zermelo[2]-Fraenkel[3] para a teoria dos conjuntos[4].

Dados dois conjuntos A e B definimos por $A \times B$ o conjunto de todos os pares ordenados $(a, \ b)$ sendo $a \in A$ e $b \in B$. O conjunto $A \times B$ é chamado de *produto Cartesiano*[5] de A e B. Note que, em geral, $A \times B \neq B \times A$ (por quê?).

Mais adiante apresentaremos generalizações das noções acima.

[1] Kazimierz Kuratowski (1896–1980). O trablalho original de Kuratowski sobre o tema é “Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles”. Fundamenta Mathematicae. **2**, 161–171 (1921).

[2] Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953).

[3] Abraham Halevi Fraenkel (1891–1965).

[4] A saber, a demonstração requer o assim chamado “axioma de regularidade”: a afirmação que cada conjunto não-vazio C contém um elemento disjunto de C.

[5] Assim chamado em honra a René Descartes (1596–1650). O adjetivo *Cartesiano* provem da latinização de seu nome como *Cartesius*.

1.1.1 Relações e Funções

O conceito de *relação* é de importância fundamental na Matemática e nesta seção descreveremos algumas relações de maior importância, como as funções, as relações de equivalência e as relações de ordem.

• **Relações**

Sejam A e B conjuntos e seja o produto Cartesiano $A \times B$. Um subconjunto de $A \times B$ é dito ser uma *relação binária*, ou simplesmente *relação* entre A e B.

Exemplo. Seja A o conjunto de homens vivos e B o conjunto de mulheres vivas e seja $R \subset A \times B$ o conjunto $R := \{(a,\ b),\ a \text{ é irmão de } b\}$. R representa uma relação (de irmandade) entre homens e mulheres.

Outros exemplos virão abaixo.

Dada uma relação $G \subset A \times B$ entre conjuntos A e B há duas noções importantes associadas: a de *domínio da relação* e a de *imagem da relação*. Define-se por domínio de G o conjunto

$$\mathrm{Dom}(G) \ := \ \Big\{ a \in A \text{ tal que } (a,\ b) \in G \text{ para algum } b \in B \Big\} . \tag{1.10}$$

Define-se por imagem de G o conjunto

$$\mathrm{Im}(G) \ := \ \Big\{ b \in B \text{ tal que } (a,\ b) \in G \text{ para algum } a \in A \Big\} . \tag{1.11}$$

Note-se que $\mathrm{Dom}(G) \subset A$ e que $\mathrm{Im}(G) \subset B$.

• **Funções**

Este é talvez o mais importante exemplo de relação. Sejam A e B conjuntos e F uma relação entre A e B. Então, a relação F é dita ser uma *função* de A em B se $\mathrm{Dom}(F) = A$ e se $(a,\ b) \in F$ e $(a,\ b') \in F$ só for possível caso $b = b'$. Em outras palavras, a cada elemento a de A a função associa um e apenas um elemento b de B que faz o papel de segundo elemento do par ordenado $(a,\ b)$. Este segundo elemento associado pela função F ao elemento a, é mais conveniente denotá-lo por $F(a)$. Assim, uma função é o conjunto de pares $\{(a,\ F(a)) \in A \times B,\ a \in A\}$. Frequentemente denotamos uma função F de A em B por $F:\ A \to B$.

O conjunto B onde a imagem de $F : A \to B$ se localiza é denominado o *contradomínio* ou *codomínio* da função F.

• **Aplicações, mapeamentos, mapas, funcionais, operadores, operações, produtos etc.**

Muito frequentemente usam-se as palavras *aplicação*, *mapeamento*, *mapa*, *funcional*, *operador*, *operação*, *produto*, *transformação*, *forma*, e talvez ainda outras, para designar certos tipos de funções entre conjuntos. Essa abundância de palavras causa frequentemente confusão e mesmo perplexidade em estudantes recém-iniciados mas, em essência, todos esses objetos são funções, no sentido abstrato que definimos acima.

O que difere seu uso é por vezes a tradição de certas áreas e os tipos de conjuntos que as funções têm como domínio e imagem. A palavra "função", propriamente, é mais frequentemente empregada quando se trata de funções numéricas, por exemplo de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$. A palavra "funcional"[6] é frequentemente empregada quando se trata de funções que levam vetores ou funções numéricas em números. Um exemplo de funcional é a função que leva funções reais contínuas f nas suas integrais no intervalo $[0,\ 1]$: $f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$. A palavra "operador" tipicamente designa funções lineares entre espaços vetoriais (como, por exemplo, as matrizes, que são funções lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita). "Produtos" ou "operações" frequentemente designam funções de $C \times C$ em C, para um conjunto C não-vazio qualquer, ou seja, funções de duas variáveis em um conjunto C, assumindo valores no próprio conjunto C. A palavra "forma" por vezes designa certas funções bi-lineares de $V \times V$ em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, sendo V um espaço vetorial. As palavras "aplicação", "mapa" e "mapeamento" são frequentemente empregadas para designar funções em áreas como Topologia, Geometria Diferencial ou Sistemas Dinâmicos.

Certas palavras são empregadas para designar certas funções com propriedades especiais. Um "homeomorfismo", por exemplo, é uma função bijetora entre dois espaços topológicos que seja contínua e cuja inversa seja também contínua. Um "difeomorfismo" é um homeomorfismo entre duas variedades diferenciáveis que seja infinitamente diferenciável. Há ainda vários outros "morfismos", como discutido na Seção 2.1.10, à página 122.

[6]A palavra "funcional" foi empregada pela primeira vez na Matemática por Jacques Salomon Hadamard (1865–1963).

Em verdade, é conveniente dispormos por vezes de uma certa variedade de palavras diferentes simplesmente para evitarmos o emprego monótono e descolorido da palavra "função". Com um pouco de ironia, lembremos por fim a definição circular de Edward Teller: *"An intelectual is someone who thinks the same things and uses the same words as other intelectuals"*.

• Funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras

Uma função $F : A \to B$ é dita ser uma *função sobrejetora* se $\mathrm{Im}(F) = B$, ou seja, se sua imagem coincide com seu contradomínio.

Uma função $F : A \to B$ é dita ser uma *função injetora*, ou uma *função injetiva*, se a cada $b \in \mathrm{Im}(F)$ existir um e somente um elemento $a \in \mathrm{Dom}(F)$ tal que $(a, b) \in F$.

Uma função que for sobrejetora e injetora é dita ser uma *função bijetora*, ou uma *função bijetiva*.

Seja uma função bijetora $F \subset A \times B$. Então, a relação $F^{-1} \subset B \times A$ dada por

$$F^{-1} = \Big\{(b,\ a) \text{ tal que } (a,\ b) \in F\Big\}$$

é, em verdade, uma função, denominada *função inversa de* F. É claro que $(F^{-1})^{-1} = F$.

• Imagens e pré-imagens de funções

Seja $f : X \to Y$ uma função. Se $A \subset X$, definimos

$$f(A) := \Big\{y \in Y|\ y = f(x) \text{ para algum } x \in A\Big\} .$$

Se $B \subset Y$, definimos

$$f^{-1}(B) := \Big\{x \in X|\ f(x) \in B\Big\} .$$

$f(A)$ é dita ser a *imagem de A por f* e $f^{-1}(B)$ é dita ser a *pré-imagem de B por f*.

O uso do símbolo f^{-1} para designar pré-imagem $f^{-1}(B)$ de um conjunto B é uma escolha muito infeliz (mas universalmente aceita), pois pode causar confusão com a noção de função inversa de f (que pode nem mesmo estar definida). O estudante deve estar atento.

Com as definições acima é fácil provar serem verdadeiras as seguintes afirmações:

- Para uma função $f : X \to Y$ geral, valem
$$f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B \qquad \text{e} \qquad f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A \tag{1.12}$$
para todos $A \subset X$, $B \subset Y$.

- Se $f : X \to Y$ for sobrejetora, valem
$$f\big(f^{-1}(B)\big) = B \qquad \text{e} \qquad f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A \tag{1.13}$$
para todos $A \subset X$, $B \subset Y$.

- Se $f : X \to Y$ for injetora, valem
$$f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B \qquad \text{e} \qquad f^{-1}\big(f(A)\big) = A \tag{1.14}$$
para todos $A \subset X$, $B \subset Y$.

- Se $f : X \to Y$ for bijetora, valem
$$f\big(f^{-1}(B)\big) = B \qquad \text{e} \qquad f^{-1}\big(f(A)\big) = A \tag{1.15}$$
para todos $A \subset X$, $B \subset Y$.

E. 1.3 *Exercício.* Demonstre as afirmações acima. ✠

• Famílias de conjuntos

Seja X um conjunto não-vazio. Uma coleção $\mathcal{F}$ não-vazia de subconjuntos de X é por vezes dita ser uma *família de conjuntos*. Se $\mathcal{F}$ for uma família de conjuntos e existirem um conjunto não-vazio I e uma função bijetora $f : I \to \mathcal{F}$, então dizemos que a família $\mathcal{F}$ é *indexada* por I e os elementos de I são denominados *índices*. Se λ é um índice, designaremos sua imagem pela função f simplesmente por $A_\lambda \in \mathcal{F}$.

Uma indexação de uma coleção $\mathcal{F}$ não-vazia de subconjuntos de X sempre existe: podemos tomar $I = \mathcal{F}$ e f a função identidade.

• Operações básicas com famílias de conjuntos

Sejam X e I conjuntos arbitrários não-vazios e seja associado a cada $\alpha \in I$ um subconjunto A_α de X. O conjunto I será frequentemente denominado conjunto ou família de índices. Vamos introduzir alguma notação a ser usada em todas estas Notas. Definimos

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \;:=\; \Big\{x \in X \text{ tal que } x \in A_\alpha \text{ para algum } \alpha \in I\Big\} \tag{1.16}$$

e

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \;:=\; \Big\{x \in X \text{ tal que } x \in A_\alpha \text{ para todo } \alpha \in I\Big\} \,. \tag{1.17}$$

As definições acima implicam as importantes propriedades descritas na proposição que segue, cuja demonstração deixamos como exercício.

Proposição 1.1 *Sejam $B \subset X$, X não-vazio, e $\{A_\alpha \subset X,\ \alpha \in I\}$ uma coleção arbitrária de subconjuntos de X. Então, valem as seguintes relações:*

$$B \setminus \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \;=\; \bigcap_{\alpha\in I}(B \setminus A_\alpha)\,, \qquad B \setminus \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \;=\; \bigcup_{\alpha\in I}(B \setminus A_\alpha)\,, \tag{1.18}$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \setminus B \;=\; \bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha \setminus B)\,, \qquad \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \setminus B \;=\; \bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha \setminus B)\,, \tag{1.19}$$

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \;=\; \bigcap_{\alpha\in I}(B \cup A_\alpha)\,, \qquad B \cap \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \;=\; \bigcup_{\alpha\in I}(B \cap A_\alpha)\,, \tag{1.20}$$

$$B \cup \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \;=\; \bigcup_{\alpha\in I}(B \cup A_\alpha)\,, \qquad B \cap \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \;=\; \bigcap_{\alpha\in I}(B \cap A_\alpha)\,. \tag{1.21}$$

As relações, (1.18) implicam

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c \;=\; \bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha)^c\,, \qquad \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c \;=\; \bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha)^c\,. \tag{1.22}$$

Essas últimas relações são conhecidas como regras de De Morgan[7]. □

• Partições de conjuntos

Uma noção que usaremos repetidas vezes é a de *partição de um conjunto*. Seja X um conjunto não-vazio e seja $\mathcal{P} = \{P_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de subconjuntos de X (que indexamos por um conjunto de índices Λ). Dizemos que $\mathcal{P}$ é uma *partição* de X se

[7] Augustus De Morgan (1806–1871).

a) $P_\lambda \cap P_{\lambda'} = \emptyset$ sempre que $\lambda \neq \lambda'$.

b) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda = X$.

É evidente que uma coleção $\mathcal{P}$ de subconjuntos de X é uma partição de X se e somente se cada $x \in X$ pertence a um e somente um conjunto P_λ. Se $\mathcal{P}$ é uma partição de X dizemos, um tanto pictoricamente, que $\mathcal{P}$ *particiona* X. Cada elemento P_λ é dito ser uma *componente da partição* $\mathcal{P}$ de X.

• **Propriedades conjuntivistas elementares de funções**

As seguintes proposições são importantes e frequentemente usadas:

Proposição 1.2 *Seja $f : X \to Y$ uma função e seja Λ um conjunto de índices. Se $A_\lambda \subset X$ para todo $\lambda \in \Lambda$, então*

$$f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda) , \tag{1.23}$$

mas

$$f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda) . \tag{1.24}$$

Se $B_\lambda \subset Y$ para todo $\lambda \in \Lambda$, então

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda) , \tag{1.25}$$

e

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda) . \tag{1.26}$$

□

A demonstração é elementar e é deixada como exercício.

Em (1.24) não se pode provar a igualdade entre $f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$ e $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$ e a razão é a seguinte: se $y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$, então $y \in f(A_\lambda)$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Assim, em cada A_λ existe um x_λ com $y = f(x_\lambda)$. Mas pode ocorrer que em $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ não exista nenhum elemento x com $y = f(x)$. O seguinte exemplo ilustra isso. Seja $f(x) = x^2$ definida em $[-1,\ 1]$. Tomemos $A_1 = [-1,\ 0]$, $A_2 = [0,\ 1]$. Então, $f(A_1) = [0,\ 1]$ e $f(A_2) = [0,\ 1]$. Portanto, $f(A_1) \cap f(A_2) = [0,\ 1]$. Porém, $f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{0\}$. Apesar disso, vale o seguinte:

Proposição 1.3 *Se $f : X \to Y$ é <u>injetora</u> então, se $A_\lambda \subset X$ para todo $\lambda \in \Lambda$, vale*

$$f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda) . \tag{1.27}$$

□

A demonstração é elementar e é deixada como exercício.

Em relação às operações de complemento e diferença de conjuntos temos o seguinte:

Proposição 1.4 *Se $f : X \to Y$ é uma função e $B,\ C \subset Y$, então*

$$f^{-1}\big(B^c\big) = \big(f^{-1}(B)\big)^c \qquad e \qquad f^{-1}(B \setminus C) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(C) .$$

Aqui, $B^c = Y \setminus B$. Fora isso, se $f : X \to Y$ é uma função <u>injetora e sobrejetora</u> e $A,\ B \subset X$, então

$$f\big(A^c\big) = \big(f(A)\big)^c \qquad e \qquad f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B) .$$

Aqui, $A^c = X \setminus A$. □

A demonstração é elementar e é deixada como exercício.

• A união disjunta de uma família arbitrária de conjuntos

Sejam, como acima, um conjunto I, não-vazio, e A_i, $i \in I$, conjuntos indexados por elementos de I. Os conjuntos A_i podem eventualmente possuir elementos comuns, ou seja, pode haver elementos x que comparecem em vários conjuntos A_i. Porém, quando formamos a união usual dos conjuntos A_i, ou seja, $\bigcup_{i\in I} A_i$, cada elemento x comparece apenas uma vez, mesmo que pertença a vários A_i's. Por vezes estamos interessados em formar um outro tipo de união de conjuntos onde essa possível multiplicidade de cada elemento x possa ser levada em conta. A definição abaixo é, para tal, das mais adequadas.

Definimos a *união disjunta* da família de conjuntos A_i como sendo o conjunto, denotado por $\bigsqcup\limits_{i\in I} A_i$, dado pela união de todos os pares ordenados $(a,\ i)$ com $i \in I$, $a \in A_i$, ou seja,

$$\bigsqcup_{i\in I} A_i \ := \ \bigcup_{i\in I}\bigcup_{a\in A_i}(a,\ i)\ . \tag{1.28}$$

Uniões disjuntas desempenham um papel em várias áreas da Matemática. Na Geometria Diferencial, por exemplo, o chamado fibrado tangente de uma variedade diferenciável é definido como a união disjunta dos espaços tangentes à variedade.

Alertamos o estudante que a expressão "união disjunta" é também empregada em textos matemáticos no sentido de união de conjuntos disjuntos dois a dois. Vide página 40.

• Extensões de funções

Seja $F : A \to B$ uma função e suponha que A seja subconjunto de um conjunto A' e que B seja subconjunto de um outro conjunto B'. Uma função $G : A' \to B'$ é dita ser uma *extensão* de F se F e G coincidirem na parte comum de seus domínios, que vem a ser o conjunto A, ou seja, se $G(a) = F(a)$ para todo $a \in A$.

Se lembrarmos que uma função $F : A \to B$ é um subconjunto de $A \times B$ e que uma função $G : A' \to B'$ é um subconjunto de $A' \times B'$ e se notarmos que $A \times B \subset A' \times B'$ caso $A \subset A'$ e $B \subset B'$, então uma definição alternativa de extensão de funções seria a seguinte: uma função G é uma extensão de uma função F se $F \subset G$, ambas entendidas como subconjuntos de $A' \times B'$.

E. 1.4 *Exercício*. Verifique a equivalência dessas duas definições do conceito de extensão de funções. ✠

Se G é uma extensão de F dizemos também que F é estendida por G.

O conceito de extensão de funções é frequentemente empregado na teoria das funções de variáveis complexas e na teoria dos operadores lineares em espaços de Hilbert.

Chamamos a atenção do leitor iniciante para o fato que uma função pode ter muitas extensões distintas. Por exemplo, seja $F : [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ definida por $F(x) = x^2$. Então, tanto a função $G_1 : [-1,\ 1] \to [0,\ 1]$, dada por $G_1(x) = x^2$, quanto a função $G_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $G_2(x) = x^2$, são extensões de F. O mesmo vale para a função $G_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$G_3(x) \ := \ \begin{cases} x^3\ , & \text{para } x < 0\ , \\ x^2\ , & \text{para } x \in [0,\ 1]\ , \\ \cos(x)\ , & \text{para } x > 1\ . \end{cases}$$

(Note que$G_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $G_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não são sobrejetoras).

• Restrições de funções

Seja $F : A \to B$ uma função e considere $A_0 \subset A$. Denotamos por $F\restriction_{A_0}$ a restrição de F a A_0: $F\restriction_{A_0} := \{(a,\ F(a)),\ a \in A_0\} \subset A_0 \times B$. É evidente que F é uma extensão de $F\restriction_{A_0}$.

• O gráfico de uma função

Uma maneira de refrasear os comentários acima emprega a noção de *gráfico de uma função.* Definimos o gráfico de uma função $F : A \to B$, denotado por $\Gamma(F)$, como sendo o subconjunto de $A \times B$ definido por

$$\Gamma(F) \ := \ \big\{ \big(a, \ F(a)\big), \ a \in A \big\} \ .$$

Se A_1 e A_2 são dois subconjuntos de algum conjunto X (por exemplo, de $X = A_1 \cup A_2$) e $F_1 : A_1 \to B$ e $F_2 : A_2 \to B$ são duas funções, então F_2 é uma extensão de F_1 se e somente se $\Gamma(F_1) \subset \Gamma(F_2)$ como subconjuntos de $X \times B$.

E. 1.5 *Exercício*. Demonstre a validade dessa afirmação. ✠

1.1.1.1 Produtos Cartesianos Gerais

Vamos agora generalizar a noção de produto Cartesiano e, para tal, precisamos primeiramente de um axioma da teoria dos conjuntos que nos afirme que o objeto que procuramos de fato existe.

• O Axioma da Escolha

Toda a Matemática é assentada sobre uma série de postulados a respeito da noção de conjunto. Esses postulados, que são também frequentemente denominados *axiomas*, são afirmações tacitamente aceitas como verdadeiras a partir das quais outras afirmações podem ser deduzidas. Há diversos de tais axiomas na Teoria dos Conjuntos (vide, e.g., [378], [152] ou [272]) e, por simplicidade, evitamos de listá-los e discutí-los neste texto. Faremos, no entanto, uma exceção no caso do chamado Axioma da Escolha. O *Axioma da Escolha* consiste na seguinte afirmativa:

Seja A_s, $s \in I$, uma família de conjuntos não-vazios, onde I é um conjunto arbitrário (não-vazio) de índices. Então, podemos construir um conjunto A tomando ("escolhendo") um elemento a_s de cada conjunto A_s. Em termos mais técnicos, o axioma diz que há funções $F : \ I \to \bigcup_{s \in I} A_s$ tais que $F(s) \in A_s$ para todo $s \in I$.

Como discutiremos, o Axioma da Escolha afirma que o produto Cartesiano $\bigtimes_{s\in I} A_s$ é não-vazio.

A primeira vista esse axioma parece constituir-se de uma obviedade. Sucede, porém, que, sobretudo pelo fato de o conjunto I de índices ser arbitrário (podendo ser até um conjunto infinito e não-contável), a afirmativa que o mesmo contém não pode ser derivada de princípios mais básicos. O axioma faz uma afirmação de existência (de uma função como a F, ou de um conjunto como A formado por elementos escolhidos de cada A_s) que, geralmente, não pode ser demonstrada construtivamente, ou seja, por exibição explícita de uma tal função F ou de um conjunto A.

Faremos uso explícito do Axioma da Escolha adiante quando exibirmos exemplos de conjuntos não-mensuráveis. O Axioma da Escolha foi originalmente formulado por Zermelo[8] em 1904 como parte da sua demonstração do chamado *Princípo do Bom-Ordenamento*, Teorema 1.1, página 57. Vide [152].

Uma típica situação na qual se faz uso do Axioma da Escolha ocorre quando são dados um conjunto X e uma relação de equivalência E em X e constrói-se um conjunto $A \subset X$ tomando-se um representante de cada classe de equivalência de X por E.

Nem sempre é possível exibir explicitamente os elementos de A, mas assumimos (via Axioma da Escolha) que um tal conjunto existe. Para ter-se em mente um caso onde uma tal situação ocorre, tome-se o exemplo dado em (1.30), página 49 e construa-se um conjunto tomando um elemento de cada classe de equivalência lá descrita. Tal conjunto desempenha um papel na teoria da medida. Vide Capítulo 28, página 1363, em particular a Seção 28.1.

• O produto Cartesiano de uma família arbitrária de conjuntos

Já discutimos o conceito de produto Cartesiano de dois conjuntos A e B: $A \times B$ e com ele introduzimos a noção de função. De posse dessa noção podemos, com vistas a uma generalização, apresentar uma outra visão do conceito de produto Cartesiano de dois conjuntos, a saber, podemos dizer que $A \times B$ é o conjunto de todas as funções $f : \ \{1, \ 2\} \to A \cup B$ tais que $f(1) \in A$ e $f(2) \in B$. A ideia é dizer que cada par ordenado $(a, \ b)$ com $a \in A$ e $b \in B$ é uma função onde o primeiro membro do par é a imagem de 1 (por ser o primeiro) e o segundo a imagem de 2 (por ser o segundo). Essa ideia permite definir produtos Cartesianos de um número finito n de conjuntos $A_1, \ A_2, \ldots, A_n$ denotado por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ como sendo o conjunto de todas as funções $f : \ \{1, \ 2, \ldots, n\} \to \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ satisfazendo $f(j) \in A_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

[8] Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953).

A função f tem, por assim dizer, o papel de ordenar os elementos de $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ tomando-se sucessivamente um elemento de cada A_i por vez. O produto Cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ é assim entendido como o conjunto formado por todas as ênuplas ordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$ com $a_i \in A_i$.

Essa ideia pode ser generalizada ainda mais. Sejam I um conjunto não-vazio (não necessariamente finito ou enumerável) e A_i, $i \in I$, conjuntos não-vazios indexados por elementos de I. Definimos então o produto Cartesiano da família de conjuntos $\{A_i, \ i \in I\}$, denotado por $\prod_{i\in I} A_i$, como sendo o conjunto de todas as funções $f : \ I \to \bigcup_{j\in I} A_j$ tais que $f(x) \in A_x$ para todo $x \in I$. O Axioma da Escolha (página 46) consiste na afirmação (ou melhor dizendo, na suposição, já que se trata de um axioma) que $\bigtimes_{i\in I} A_i$ é não-vazio. Em símbolos

$$\bigtimes_{i\in I} A_i \ := \ \left\{ f : I \to \bigcup_{j\in I} A_j \ \middle| \ f(x) \in A_x \text{ para todo } x \in I \right\} .$$

Se por ventura todos os conjuntos A_i forem idênticos então denota-se o produto Cartesiano acima por A^I. Assim, A^I denota o conjunto de todas as funções de I em A.

Desta forma $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^{\{1, \ 2\}}$ são duas notações distintas para o mesmo objeto, que também é denotado simplesmente por $\mathbb{N}^2$, como se sabe. Genericamente $\mathbb{N}^d$ designa $\mathbb{N}^{\{1,\ldots,d\}}$ para $d \in \mathbb{N}$, $d > 0$.

Ainda sobre a notação, o produto Cartesiano $\bigtimes_{i\in I} A_i$ é também denotado por $\prod_{i\in I} A_i$. Um elemento de $\prod_{i\in I} A_i$ ou $\bigtimes_{i\in I} A_i$ será denotado por $\bigtimes_{i\in I} (a_i)$. Assim, se $I = \{1, \ \ldots, \ n\}$ teremos

$$\prod_{i\in I} A_i \ = \ \bigtimes_{i\in I} A_i \ = \ A_1 \times \cdots \times A_n \qquad \text{e} \qquad \bigtimes_{i\in I} (a_i) \ = \ \big(a_1, \ \ldots, \ a_n\big) .$$

• **Comentário sobre a associatividade do produto Cartesiano**

Dados três conjuntos A_1, A_2 e A_3 podemos, empregando as definições acima, definir os produtos Cartesianos $\mathcal{A}_1 \equiv A_1 \times \Big(A_2 \times A_3\Big)$, $\mathcal{A}_2 \equiv \Big(A_1 \times A_2\Big) \times A_3$ e $\mathcal{A}_3 \equiv A_1 \times A_2 \times A_3$. Em princípio $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$ são três objetos matemáticos distintos. Existem, no entanto, mapeamentos canônicos bijetivos entre eles (encontre-os!) e, por essa razão, a distinção entre $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$ é frequentemente ignorada. Dessa forma, com um certo abuso de linguagem, o produto Cartesiano é por vezes tomado como sendo associativo, ainda que, estritamente falando, não o seja.

1.1.1.2 Relações de Incompatibilidade (ou de Compatibilidade)

Seja P um conjunto não-vazio. Uma relação $I \subset P \times P$ que satisfaça

1. *Reflexividade:* para todo $\gamma \in P$ vale $(\gamma, \ \gamma) \in I$.
2. *Simetria:* se γ e γ' são tais que $(\gamma, \ \gamma') \in I$, então $(\gamma', \ \gamma) \in I$,

é dita ser uma *relação de incompatibilidade*, ou ainda uma *relação de comensurabilidade*. Em certas áreas relações de compatibilidade são denominadas *relação de compatibilidade*, uma aparente contradição de termos[9]. Encontraremos essa nomenclaruta, por exemplo, em nossos estudos de variedades diferenciáveis ao lidarmos com relações de compatibilidade

[9]Na linguagem comum, as palavras compatibilidade e incompatibilidade são antônimos, mas enquanto relações, são caracterizadas pelas mesmas propriedades e usar uma ou outra depende apenas do sentido positivo ou negativo que se deseja imprimir à relação. Ilustremos isso com um exemplo. Se duas pessoas possuem uma aspiração comum, podemos tanto dizer que essas pessoas são compatíveis quanto incompatíveis. Diremos que são compatíveis se a aspiração comum puder ser satisfeita de modo não conflituoso (por exemplo, se for a aspiração pela vitória de um mesmo time de futebol), mas diremos que são incompatíveis se a aspiração comum só puder ser satisfeita de modo conflituoso (por exemplo, se for a aspiração por uma vaga de emprego única em uma empresa).

entre cartas locais de coordenadas à página 1590. Em áreas como a Ciência da Computação relações de incompatibilidade são também denominadas *relações de dependência*. Relações de incompatibilidade são importantes na Mecânica Estatística, especialmente no estudo das chamadas *expansões de polímeros e de "clusters"*.

Para uma dada relação de incompatibilidade I denotamos por $\gamma \not\sim_I \gamma'$ caso $(\gamma,\ \gamma') \in I$ e dizemos que γ e γ' são *I-incompatíveis*. Se uma dada relação I é subentendida, denotamos simplesmente $\gamma \not\sim \gamma'$ caso $(\gamma,\ \gamma') \in I$ e dizemos simplesmente que γ e γ' são *incompatíveis*.

Exemplo 1.1 Seja $\mathcal{X}$ um conjunto não-vazio e $P = \mathbb{P}(\mathcal{X}) \setminus \{\emptyset\}$, a coleção de todos os subconjuntos não-vazios de $\mathcal{X}$. Uma relação de incompatibilidade em P é definida por $I = \big\{(A,\ B) \in P \times P,\ A \cap B \neq \emptyset\big\}$. Obviamente, $A \not\sim_I B \iff A \cap B \neq \emptyset$. Verifique! ¤

1.1.1.3 Relações de Equivalência

Um tipo muito importante de relação é formado pelas chamadas relações de equivalência. Relações de equivalência ocorrem em um sem-número de construções matemáticas importantes, como veremos em vários exemplos deste texto. A noção de relação de equivalência é muito antiga na Matemática, sendo até mesmo encontrada (não sob esse nome) nos *Elementos* de Euclides[10].

Algumas construções que apresentaremos, como a de conjuntos quociente e a de colagem de conjuntos, são muito empregadas na Teoria de Grupos, na Topologia Algébrica e na Geometria Diferencial.

• **Relações de equivalência parciais**

Uma relação $E \subset A \times A$ é dita ser uma *relação de equivalência parcial* em um conjunto não-vazio A se os seguintes quesitos forem satisfeitos:

1. *Simetria*: $(a,\ b) \in E$ implica $(b,\ a) \in E$.
2. *Transitividade*: se $(a,\ b) \in E$ e $(b,\ c) \in E$, então $(a,\ c) \in E$.

Muito mais importante é a noção de *relação de equivalência*.

• **Relações de equivalência**

Uma relação $E \subset A \times A$ é dita ser uma *relação de equivalência* em um conjunto não-vazio A se os seguintes quesitos forem satisfeitos:

1. *Reflexividade*: $(a,\ a) \in E$ para todo $a \in A$.
2. *Simetria*: $(a,\ b) \in E$ implica $(b,\ a) \in E$.
3. *Transitividade*: se $(a,\ b) \in E$ e $(b,\ c) \in E$, então $(a,\ c) \in E$.

Note-se que, pela propriedade de reflexividade, valem para uma relação de equivalência $E \subset A \times A$ que $\mathrm{Dom}(E) = A$ e que $\mathrm{Im}(E) = A$.

Se o par $(a,\ b)$ pertence a uma relação de equivalência E então a e b são ditos serem *equivalentes segundo E*. Quase sempre usa-se a notação $a \overset{E}{\sim} b$, ou $a \sim_E b$ para indicar que dois elementos são equivalentes segundo uma relação de equivalência E dada. Quanto é subentendido qual a relação de equivalência em questão escrevemos simplestemente $a \sim b$. Com essa última notação, as propriedades definidoras de uma relação de equivalência dadas acima podem ser reescritas da seguinte forma:

1. *Reflexividade*: $a \sim a$ para todo $a \in A$.
2. *Simetria*: $a \sim b$ implica $b \sim a$.
3. *Transitividade*: se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$.

[10]Euclides de Alexandria (ci. 325 A.C, ci. 265 A.C.).

Muitos exemplos de relações de equivalência serão encontrados nestas Notas. Contentemo-nos por ora com três exemplos elementares, o terceiro, sendo, porém, muito relevante:

E. 1.6 *Exercício*. Seja o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e seja a relação $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por

$$W := \Big\{(x,\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } y - x \in \mathbb{Z}\Big\}, \tag{1.29}$$

onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros. Prove que W é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$. ✠

E. 1.7 *Exercício*. Seja o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e seja a relação $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por

$$W := \Big\{(x,\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } y - x \in \mathbb{Q}\Big\}, \tag{1.30}$$

onde $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais. Prove que W é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$. ✠

E. 1.8 *Exercício*. Seja V um espaço vetorial e seja W um subespaço de V. Seja a relação $\mathcal{V} \subset V \times V$ definida por

$$\mathcal{V} := \Big\{(x,\ y) \in V \times V \text{ tal que } y - x \in W\Big\}. \tag{1.31}$$

Prove que $\mathcal{V}$ é uma relação de equivalência em V.

Esse exemplo é importante, pois com ele podemos definir a noção de espaço quociente de um espaço vetorial por um subespaço, uma importante noção que é apresentada na Seção 2.3.3, página 169. ✠

E. 1.9 *Exercício*. O Exercício E. 1.7 pode ser visto como um caso particular do Exercício E. 1.8 se identificarmos adequadamente os espaços V e U. Como? *Sugestão:* considere $V = \mathbb{R}$ como espaço vetorial sobre o corpo dos racionais. ✠

Seja $E \subset A \times A$ (com A não-vazio) uma relação de equivalência parcial. Afirmamos que E é uma relação de equivalência se e somente se $\mathrm{Dom}(E) = A$. Se E é uma relação de equivalência, então $\mathrm{Dom}(E) = A$ (como já comentamos) e E uma relação de equivalência parcial (evidentemente). Suponhamos agora que E seja uma relação de equivalência parcial e que $\mathrm{Dom}(E) = A$. Seja $x \in A$, arbitrário. Então, como $\mathrm{Dom}(E) = A$, existe algum $y \in A$ tal que $(x,\ y) \in E$. Pela simetria, tem-se também $(y,\ x) \in E$. Pela transitividade, $(x,\ y) \in E$ e $(y,\ x) \in E$ implicam $(x,\ x) \in E$, provando a propriedade de reflexividade e provando que E é uma relação de equivalência.

O exercício que segue mostra um exemplo de relação de equivalência parcial que não é uma relação de equivalência.

E. 1.10 *Exercício*. Seja $A = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ um conjunto composto por três elementos distintos. Considere a relação dada por $E = \big\{(\beta,\ \gamma),\ (\gamma,\ \beta),\ (\beta,\ \beta),\ (\gamma,\ \gamma)\big\}$. Constate que E é uma relação de equivalência parcial (valem a simetria e a transitividade), mas que E não é uma relação de equivalência, pois não vale a relação de reflexividade, já que $(\alpha,\ \alpha) \notin E$. Note que $\mathrm{Dom}(E) = \{\beta,\ \gamma\} \neq A$. ✠

• Classes de equivalência

Seja A um conjunto e $E \subset A \times A$ uma relação de equivalência em A. Para cada $a \in A$ podemos definir o conjunto

$$E(a) := \{a' \in A \text{ tal que } (a,\ a') \in E\}. \tag{1.32}$$

Esse conjunto é chamado de *classe de equivalência* de a (pela relação de equivalência E). Na literatura, encontra-se também frequentemente a notação $[a]$ para denotar a classe de equivalência do elemento a.

E. 1.11 *Exercício*. Seja A um conjunto e $E \subset A \times A$ é uma relação de equivalência em A. Suponha que $a,\ b \in A$ e que $a \sim b$ segundo E. Prove que $E(a) = E(b)$. ✠

E. 1.12 *Exercício importante*. Prove que se A é um conjunto e $E \subset A \times A$ é uma relação de equivalência em A, então A é a união disjunta de classes de equivalência de seus elementos. ✠

• As relações de equivalência minimal e maximal

Se X é um conjunto não-vazio há sempre ao menos duas relações de equivalência em X, a saber, a *relação de equivalência minimal* $E_{\mathsf{min}} := \{(x, x), x \in X\}$ e a *relação de equivalência maximal* $E_{\mathsf{max}} := \{(x, y), x, y \in X\} = X \times X$. É evidente que toda relação em X está contida em E_{max}.

E. 1.13 *Exercício*. Constate que E_{min} e E_{max} são, de fato, relações de equivalência e justifique as afirmações que E_{min} é a menor relação de equivalência possível em X e que E_{max} é a maior relação de equivalência possível em X. ✠

• Intersecções de relações de equivalência são relações de equivalência

Seja X um conjunto não-vazio e seja $\{E_\lambda \subset X \times X, \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de relações de equivalência em X (aqui, Λ é um conjunto não-vazio arbitrário de índices). Afirmamos que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda \subset X \times X$ é também uma relação de equivalência em X. De fato, para todo $a \in X$ tem-se $(a, a) \in E_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Logo $(a, a) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ (reflexividade de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$). Analogamente, se $(a, b) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$, tem-se que $(a, b) \in E_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Logo, $(b, a) \in E_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, provando que $(b, a) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ (simetria de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$). Por fim, se $(a, b) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ e $(b, c) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$, valem para todo $\lambda \in \Lambda$ que $(a, b) \in E_\lambda$ e $(b, c) \in E_\lambda$, implicando que $(a, c) \in E_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, ou seja, que $(a, c) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ (transitividade de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$). Isso estabeleceu que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ é uma relação de equivalência em X. Trata-se da menor relação de equivalência que contém todas as relações de equivalência E_λ.

É evidente pelas linhas acima que também vale a seguinte afirmação: se $\{E_\lambda \subset X \times X, \lambda \in \Lambda\}$ é uma coleção de relações de equivalência parciais em X, então $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ é uma relação de equivalência parcial em X.

• Relação de equivalência gerada

Se X é um conjunto não-vazio e seja $R \subset X \times X$ é uma relação não-vazia qualquer em R. Denotamos por E_R a menor relação de equivalência que contém R, ou seja, E_R é a intersecção de todas as relações de equivalência que contém a relação R. Note-se que R está sempre contida em ao menos uma relação de equivalência, a saber, na relação de equivalência maximal E_{max}, definida acima. A relação de equivalência E_R é dita ser a *relação de equivalência gerada pela relação* R.

E. 1.14 *Exercício*. Seja X não-vazio e sejam x e y dois elementos distintos de X. Seja $R = \{(x, y)\}$ uma relação em X. Mostre que a relação de equivalência gerada por essa relação é $E_R = \{(x, y)\} \cup \{(y, x)\} \cup \{(z, z), z \in X\}$. ✠

E. 1.15 *Exercício*. Seja X não-vazio e sejam x, y e z três elementos distintos de X. Determine a relação de equivalência gerada pela relação $\{(x, y), (y, z)\}$. Faça o mesmo para o caso de n pontos distintos $x_1, \ldots, x_n$ de X. ✠

• Conjunto quociente e função quociente

Se A é um conjunto não-vazio e $\sim$ é uma relação de equivalência em A, denotamos por $A/\sim$ a coleção das classes de equivalência de A por $\sim$. A coleção $A/\sim$ é por vezes dita ser o *quociente de A pela relação de equivalência* $\sim$. O Exercício E. 1.12 informa-nos que $A/\sim$ é uma partição de A (segundo a definição de *partição* encontrada à página 43).

Se A é um conjunto não-vazio e $\sim$ é uma relação de equivalência em A, a função $\pi : A \to A/\sim$ definida por $\pi(a) = [a]$ é denominada *aplicação quociente*, ou *função quociente*. A aplicação quociente é, evidentemente, sobrejetora.

• Relações de equivalência induzidas por partições

Seja X um conjunto não-vazio. Uma coleção $\mathcal{P}$ de subconjuntos não-vazios disjuntos de X cuja união seja X é dita ser uma *partição* de X (vide página 43). Se $\mathcal{P}$ é uma partição de X podemos definir uma relação de equivalência em X, que denotamos por $\sim_{\mathcal{P}}$, dizendo, para $x, y \in X$, que $x \sim_{\mathcal{P}} y$ se e somente se existir $A \in \mathcal{P}$ tal que $x \in A$ e $y \in A$. Essa relação de equivalência é dita ser a *relação de equivalência induzida pela partição* $\mathcal{P}$.

E. 1.16 *Exercício*. Prove que isso, de fato, define uma relação de equivalência em X. Prove que as classes de equivalência por essa relação são precisamente os elementos de $\mathcal{P}$. ✠

E. 1.17 *Exercício*. Justifique por que é verdadeira a afirmação que uma relação de equivalência em X é univocamente determinada pelas suas classes de equivalência e a afirmação que toda relação de equivalência em X é induzida por alguma partição de X. ✠

• **Relações de equivalência induzidas por funções**

Sejam X e Y conjuntos não-vazios e seja $f : X \to Y$ uma função de X assumindo valores em Y. A função f define uma relação de equivalência em X, denotada por $\sim_f$ e denominada *relação de equivalência induzida por* f, da seguinte forma: se $x, y \in X$ dizemos que $x \sim_f y$ se e somente se $f(x) = f(y)$.

E. 1.18 *Exercício*. Prove que isso, de fato, define uma relação de equivalência em X. ✠

E. 1.19 *Exercício elementar*. Seja A um conjunto não-vazio e seja $\sim$ uma relação de equivalência em A. Mostre que $A/\sim = A/\sim_\pi$, onde π é a função quociente associada a $\sim$. Justifique por que é correto afirmar que toda relação de equivalência é induzida por alguma função e que toda função é uma função quociente de alguma relação de equivalência. ✠

• **Obtendo relações de equivalência a partir de relações de equivalência parciais**

Seja X um conjunto não-vazio e seja P uma relação de equivalência parcial em X com $\mathrm{Dom}(P) \subsetneq X$ (um subconjunto próprio de X). Podemos associar a P uma relação de equivalência $\tilde{P}$ tomando $\tilde{P} := P \cup D$, onde D é o conjunto "diagonal" $D := \{(x, x), x \in X\}$. A relação $\tilde{P}$ é simétrica (o que é evidente, pois P e D o são) e, como veremos, transitiva. Como, por construção, tem-se $\mathrm{Dom}(\tilde{P}) = X$, segue que $\tilde{P}$ é uma relação de equivalência.

Demonstra-se que $\tilde{P}$ é transitiva da seguinte forma. Sejam $(x, y) \in \tilde{P}$ e $(y, z) \in \tilde{P}$. Se $(x, y) \in D$, então $x = y$ e portanto, $(x, z) = (y, z) \in \tilde{P}$. Se $(y, z) \in D$ o raciocício é idêntico. Resta apenas considerar o caso em que $(x, y) \in P\setminus\tilde{P}$ e $(y, z) \in P \setminus \tilde{P}$, mas nesse caso $(x, z) \in P \subset \tilde{P}$, pois P é uma relação de equivalência parcial.

A relação $\tilde{P}$ e é dita ser a *relação de equivalência induzida pela relação de equivalência parcial* P.

E. 1.20 *Exercício*. A relação $\tilde{P}$ é a menor relação de equivalência que contém a relação de equivalência parcial P, ou seja, é a relação de equivalência gerada pela relação de equivalência parcial P. Justifique essa afirmação! ✠

• **Obtendo relações de equivalência a partir de relações simétricas**

Uma relação simétrica também pode ser estendida a uma relação de equivalência. Se X é um conjunto não-vazio, uma relação $S \subset X \times X$ é dita ser uma *relação simétrica* se $(a, b) \in S$ implica $(b, a) \in S$.

Seja X um conjunto não-vazio e seja S uma relação simétrica em X com $\mathrm{Dom}(S) = X$. Podemos associar a S uma relação de equivalência $\sim_S$ da seguinte forma: declaramos que $x \sim_S y$ se e somente se existir um conjunto finito $\{x \equiv x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \equiv y\} \subset X$, para algum $n \geq 2$, tal que $(x_k, x_{k+1}) \in S$ para todo $k = 1, \ldots, n-1$.

Verifiquemos que se trata, de fato, de uma relação de equivalência em X. Como $\mathrm{Dom}(S) = X$, existe para todo $x \in X$ um elemento $y \in X$ com $(x, y) \in S$. Logo, o conjunto $\{x \equiv x_1, y \equiv x_2, x \equiv x_3\}$ satisfaz $(x_k, x_{k+1}) \in S$ para todo $k = 1, 2$. Isso prova que $x \sim_S x$ para todo $x \in X$ (reflexividade de $\sim_S$). Se $x \sim_S y$, então existe $\{x \equiv x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \equiv y\} \subset X$, $n \geq 2$, tal que $(x_k, x_{k+1}) \in S$ para todo $k = 1, \ldots, n-1$. Se considerarmos o conjunto $\{y_1, \ldots, y_n\}$ onde $y_k = x_{n-k+1}$, é evidente que $y_1 = y$, $y_n = x$ e $(y_k, y_{k+1}) \in S$ $k = 1, \ldots, n-1$, provando que $y \sim_S x$ (simetria de $\sim_S$). Por fim, sejam $x, y, z \in X$ tais que $x \sim_S y$ e $y \sim_S z$. Então, existem conjuntos finitos $\{x \equiv x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \equiv y\} \subset X$ e $\{y \equiv x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1}, x_{n+m} \equiv z\} \subset X$ tais que $(x_k, x_{k+1}) \in S$ para todo $k = 1, \ldots, n-1$ e para todo $k = n, \ldots, n+m-1$. Naturalmente, o conjunto $\{x \equiv x_1, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-2}, x_{n+m} \equiv z\} \subset X$ satisfaz $(x_k, x_{k+1}) \in S$ para todo $k = 1, \ldots, n+m-1$, estabelecendo que $x \sim_S z$ (transitividade de $\sim_S$).

A relação $\sim_S$ e é dita ser a *relação de equivalência induzida pela relação simétrica* S.

E. 1.21 *Exercício*. A relação $\sim_S$ é a menor relação de equivalência que contém a relação simétrica S, ou seja, é a relação de equivalência gerada pela relação simétrica S. Justifique essa afirmação! ✠

E. 1.22 *Exercício*. Seja $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$, definido por $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} |\, x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ (a esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$). Defina-se em $\mathbb{S}^n$ a seguinte relação: $S = \{(x, -x), x \in \mathbb{S}^n\}$, ou seja, para $x, y \in \mathbb{S}^n$ temos $(x, y) \in S$ se e somente se $y = -x$. Constate que S é uma relação simétrica e com $\mathrm{Dom}(S) = \mathbb{S}^n$. Constate que S não é reflexiva e constate também que S não é uma relação de equivalência parcial, pois não é transitiva! Mostre que $\mathbb{S}^n/\sim_S$, o conjunto quociente de $\mathbb{S}^n$ pela relação de equivalência induzida por S, é dada por $\mathbb{S}^n/\sim_S = \{x, -x, x \in \mathbb{S}^n\}$, ou seja, $[x] = \{x, -x\}$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$. $\mathbb{S}^n/\sim_S$ é denominado *espaço real projetivo*, e é também denotado por $\mathbb{RP}^n$. ✠

• **Colagem de dois conjuntos por uma função**

Algumas das noções que acima apresentamos conduzem a uma construção muito empregada na Topologia Algébrica e na Geometria Diferencial, a saber, a chamada *colagem de conjuntos por uma função*. Neste ponto não trataremos de aspéctos topológicos, deixando essas questões para alhures.

Sejam X e Y dois conjuntos não-vazios e disjuntos[11] e seja $A \subset X$ (A também suposto não-vazio). Seja $f : A \to Y$ uma função e considere-se a união disjunta $X \cup Y$. Com o uso de f podemos definir uma relação R_f em $X \cup Y$ da seguinte forma: $R_f := \{(a,\ f(a)),\ a \in A\}$. É evidente que $R_f \subset (X \cup Y) \times (X \cup Y)$ e, portanto, R_f é uma relação em $X \cup Y$. Denotemos por E_f a relação de equivalência em $X \cup Y$ gerada por R_f. É fácil ver que

$$E_f \;=\; \Big\{\big(a,\ f(a)\big),\ a \in A\Big\} \cup \Big\{\big(f(a),\ a\big),\ a \in A\Big\} \cup \Big\{(a,\ a'),\ a,\ a' \in A \text{ com } f(a) = f(a')\Big\} \cup \Big\{(b,\ b),\ b \in X \cup Y\Big\}\,.$$

E. 1.23 *Exercício*. Verifique! ✠

Definimos a *colagem de X com Y através da função f*, denotada por $X \cup_f Y$ ou por $X \sqcup_f Y$, como sendo o espaço quociente de $X \cup Y$ pela relação de equivalência E_f: $X \cup_f Y := \big(X \cup Y\big)/E_f$.

A ideia intuitiva é que $X \cup_f Y$ é obtida juntando-se X e Y mas identificando-se os pontos a e $f(a)$ para todo $a \in A$. Se imaginarmos X e Y como superfícies, é como se colássemos X a Y nos conjuntos $A \subset X$ e $f(A) \subset Y$ de forma que cada ponto $a \in A$ é colado ao ponto $f(a)$. Note-se que se a e a' são pontos de A tais que $f(a) = f(a')$, então por esse processo de colagem a e a' acabam colados um com o outro e com o ponto $f(a)$.

Exemplo 1.2 Sejam $X = [0,\ 2\pi]$, $Y = \mathbb{R}$, $A = \{0,\ 2\pi\} \subset X$ e seja $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(2\pi) = 0$ (sendo, portanto $f(A) = \{0\} \subset \mathbb{R}$). A Figura 1.1, página 52, ilustra a construção da colagem $X \cup_f Y$ nesse caso: X é transformado em um círculo com os pontos 0 e 2π identificados entre si e esse círculo é colado nesse ponto ao ponto $0 \in \mathbb{R}$ da reta real. ¤

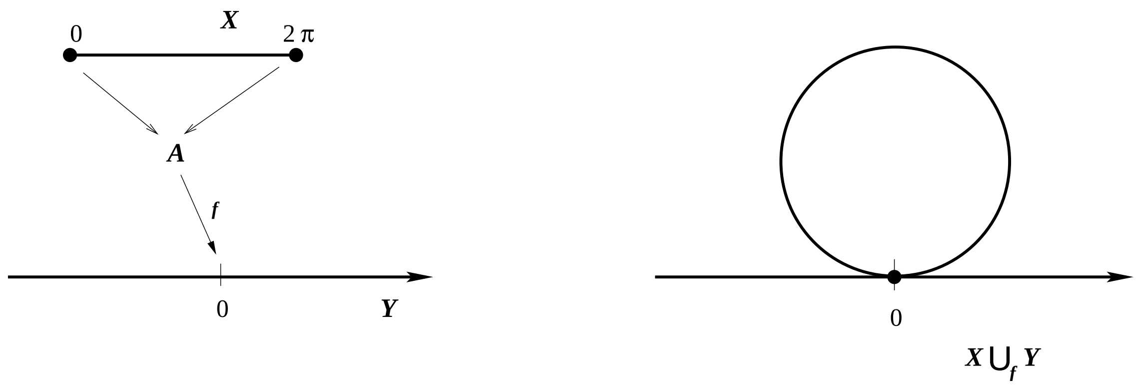

Figura 1.1: Ilustração gráfica da colagem de $X = [0,\ 2\pi]$ com $Y = \mathbb{R}$, para $A = \{0,\ 2\pi\} \subset X$, através da função $f : A \to Y$ dada por $f(0) = f(2\pi) = 0$, produzindo $X \cup_f Y$. A separação de X e Y no lado esquerdo indica que estamos considerando uma união disjunta de ambos pois, estritamente falando, ambos não são disjuntos: $X \subset Y$.

1.1.1.4 Relações de Ordem

Também muito importantes são as chamadas relações de ordem, as quais existem em diversas formas.

• **Pré-ordenamento**

Seja X um conjunto não-vazio. Uma relação $R \subset X \times X$ é dita ser uma *relação de pré-ordenamento* em X, ou uma *relação de quase-ordem* em X, ou simplesmente uma *pré-ordem* em X, se as seguintes condições forem satisfeitas:

[11] Se X e Y não forem disjuntos a construção que segue deve ser feita substituindo-se a união $X \cup Y$ pela união disjunta $X \sqcup Y$. Para a definição de união disjunta, vide página 45.

1. *Reflexividade*: para todo $a \in X$ tem-se que $(a,\ a) \in R$.
2. *Transitividade*: se $(a,\ b) \in R$ e $(b,\ c) \in R$, então $(a,\ c) \in R$.

Exemplos serão apresentados logo adiante.

Se X possui uma pré-ordem R, X é dito ser um *conjunto pré-ordenado*, ou um *conjunto quase-ordenado*, por R.

É costume, dada uma relação de pré-ordenamento R qualquer, indicar que $(a,\ b) \in R$ através da notação $a \prec_R b$, ou, de forma mais simplificada, através da notação $a \prec b$. Usando o símbolo $\prec$ as condições definidoras de uma relação de pré-ordem se escrevem como

1. *Reflexividade*: para todo $a \in X$ tem-se que $a \prec a$.
2. *Transitividade*: se $a \prec b$ e $b \prec c$, então $a \prec c$.

Também denota-se a relação $a \prec b$ por $b \succ a$. Relações de pré-ordem são importantes na definição do conceito de *conjunto dirigido*, que será desenvolvida logo abaixo. A noção de conjunto dirigido, por sua vez, é importante na definição da noção de *rede*, de importância na Topologia Geral (vide Seção 30.3, página 1415).

• Relação de ordem parcial

Seja X um conjunto não-vazio. Uma relação $R \subset X \times X$ é dita ser uma *relação de ordem parcial* em X, ou simplesmente uma *relação de ordem* em X, se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. *Reflexividade*: para todo $a \in X$ vale que $(a,\ a) \in R$.
2. *Transitividade*: se $(a,\ b) \in R$ e $(b,\ c) \in R$, então $(a,\ c) \in R$.
3. *Antissimetria*: Se $(a,\ b) \in R$ e $(b,\ a) \in R$, então forçosamente $a = b$.

Exemplos serão apresentados logo adiante.

Se X possui uma ordem parcial R, X é dito ser um *conjunto parcialmente ordenado* por R. Em textos matemáticos em língua inglesa, conjuntos parcialmente ordenados são frequentemente denominados *posets* (de "partially ordered sets"). A noção de conjunto parcialmente ordenado foi introduzida por Hausdorff[12]. Como se percebe, uma relação de ordem parcial é uma relação de pré-ordem dotada ainda da propriedade de antissimetria. Mais adiante veremos exemplos de relações de pré-ordenamento que não são relações de ordem parcial. Veremos também na Proposição, 1.5, página 54, adiante, que é sempre possível construir um conjunto parcialmente ordenado a partir de um conjunto pré-ordenado.

Exemplo de uma relação de ordem parcial. Seja X um conjunto e $\mathbb{P}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos de X. Podemos estabelecer em $\mathbb{P}(X)$ uma relação R do seguinte tipo: para $A,\ B \subset X$ tem-se $(A,\ B) \in R$ se $A \subset B$. Como exercício deixamos ao estudante mostrar que esta é uma relação de ordem parcial de acordo com a definição acima. Este exemplo ilustra também por que chamar tal relação de ordem de "parcial". A razão é que nem todo par $(A,\ B)$ é elemento de R pois, para dois conjuntos A e B arbitrários, nem sempre vale que $A \subset B$ ou que $B \subset A$ (tal é o caso, por exemplo, se $A \cap B = \emptyset$).

Em função da analogia a relação de ordem usual dos números reais é costume, dada uma relação de ordem R qualquer, indicar que $(a,\ b) \in R$ através da notação $a \preceq_R b$ ou, de forma mais simplificada, através da notação $a \preceq b$. Por vezes, o símbolo $\leq$ é também usado, mas tentaremos empregá-lo apenas para denotar a relação de ordem usual entre números reais. Usando o símbolo $\preceq$ as condições definidoras de uma relação de ordem se escrevem como

1. *Reflexividade*: para todo $a \in X$ tem-se que $a \preceq a$.
2. *Transitividade*: se $a \preceq b$ e $b \preceq c$, então $a \preceq c$.
3. *Antissimetria*: se $a \preceq b$ e $b \preceq a$, então forçosamente $a = b$.

[12] Felix Hausdorff (1868–1942). Hausdorff foi um dos matemáticos mais influentes do Séc. XX. Foi um dos criadores da Topologia e da moderna Teoria dos Conjuntos. Perseguido pelo nacional-socialismo, suicidou-se em 1942 para evitar ser enviado a um campo de concentração.

Também denota-se a relação $a \preceq b$ por $b \succeq a$.

• Obtendo conjuntos ordenados parcialmente de conjuntos pré-ordenados

Como observamos acima, todo conjunto parcialmente ordenado é pré-ordenado. A proposição que segue mostra que de todo conjunto pré-ordenado é possível construir um conjunto parcialmente ordenado.

Proposição 1.5 *Seja X um conjunto não-vazio dotado de uma relação de pré-ordenamento $\prec$. Então, podemos definir uma relação de equivalência em X declarando que $x \sim y$ se $x \prec y$ **e** $y \prec x$, onde x e y pertencem a X. Seja $\mathcal{X}$ a coleção de classes de equivalência de X por essa relação de equivalência. Então, $\mathcal{X}$ é parcialmente ordenado pela relação de ordem parcial $\preceq$ definida da seguinte forma: $[x] \preceq [y]$ se $x \prec y$, onde $[z]$ denota a classe de equivalência à qual pertence um elemento $z \in X$.* □

Prova. Primeiramente, provemos a afirmação que $\sim$, definida no enunciado, estabelece uma relação de equivalência em X. Que $x \sim x$ para todo $x \in X$ é evidente pela propriedade de reflexividade do pré-ordenamento $\prec$. Que $y \sim x$ caso $x \sim y$ é evidente pela definição. Por fim, se $x \sim y$ e $y \sim z$, então valem *1)* $x \prec y$; *2)* $y \prec x$; *3)* $y \prec z$; *4)* $z \prec y$. Pela propriedade de transitividade do pré-ordenamento $\prec$, *1* e *3* implicam $x \prec z$ e *2* e *4* implicam $z \prec x$, estabelecendo que $x \sim z$.

Com a relação de equivalência acima, X quebra-se em classes de equivalência. Denotemos por $\mathcal{X}$ a coleção dessas classes e denotemos por $[x]$ a classe a qual pertence $x \in X$. Conforme o enunciado, podemos estabelecer em $\mathcal{X}$ uma relação de ordem parcial $\preceq$ declarando que $[x] \preceq [y]$ se $x \prec y$. Provemos essa afirmação. Primeiramente, notemos que $\preceq$ está realmente definida nas classes, ou seja, independe dos representantes tomados nas mesmas. De fato, se $x' \sim x$ e $[x] \preceq [y]$, então $x' \prec x$ e $x \prec y$. Pela propriedade de transitividade do pré-ordenamento $\prec$ segue que $x' \prec y$. Analogamente, se $y' \sim y$ e $[x] \preceq [y]$, então $x \prec y$ e $y \prec y'$. Pela propriedade de transitividade do pré-ordenamento $\prec$ segue que $x \prec y'$, donde conclui-se que $[x'] \preceq [y']$.

Provemos agora que $\preceq$ é realmente uma ordem parcial. Que $[x] \preceq [x]$ para todo $x \in X$ (e, portanto, para todo elemento de $\mathcal{X}$) é evidente pela propriedade de reflexividade do pré-ordenamento $\prec$. Se $[x] \preceq [y]$ e $[y] \preceq [z]$, então $x \prec y$ e $y \prec z$. Pela propriedade de transitividade do pré-ordenamento $\prec$, segue que $x \prec z$, estabelecendo que $[x] \preceq [z]$. Por fim, se $[x] \preceq [y]$ e $[y] \preceq [x]$, então $x \prec y$ e $y \prec x$. Logo, $x \sim y$ e, consequentemente, $[x] = [y]$. ■

• Relação de ordem total

Outro conceito importante é o de relação de ordem total. Uma ordem parcial R em um conjunto X é dita ser uma *relação de ordem total* se para todo $a, b \in X$ tem-se que $(a, b) \in R$ ou que $(b, a) \in R$. Se X possui uma relação de ordem total R, então X é dito ser *totalmente ordenado* ou *linearmente ordenado*. Assim, se X é um conjunto dotado de uma relação de ordem parcial, dizemos que um subconjunto $A \subset X$ é linearmente ordenado se $a \preceq b$ ou $b \preceq a$ para todo $a, b \in A$.

• Exemplos

Exemplo. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto de números reais e a relação de ordem $(x, y) \in R$ se $x - y$ for um número negativo ou nulo (ou seja, se $x \leq y$). Mostre que essa é uma relação de ordem total em $\mathbb{R}$.

Contraexemplo. Seja $\mathcal{C}$ um conjunto não-vazio qualquer. Então, $\mathbb{P}(\mathcal{C})$ é ordenado pela inclusão de conjuntos: $A \preceq B$ se e somente se $A \subset B$. Porém $\mathbb{P}(\mathcal{C})$ não é linearmente ordenado pois se $A \cap B = \emptyset$ não podemos dizer que $A \preceq B$ nem que $B \preceq A$.

E. 1.24 *Exercício*. Você consegue construir uma relação de ordem em $\mathbb{R}^2$ ou em $\mathbb{R}^3$? E uma relação de ordem total? ✠

Exemplo. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{X}$ dois conjuntos não-vazios. Podemos definir uma pré-ordem no produto Cartesiano $\mathbb{P}(\mathcal{A}) \times \mathcal{X}$ da seguinte forma: para dois pares (A, x) e (B, y) com $A, B \subset \mathcal{A}$ e $x, y \in \mathcal{X}$ dizemos que $(A, x) \prec (B, y)$ se $A \subset B$. É fácil verificar que essa é uma relação de pré-ordem, mas não é uma ordem parcial, pois se $(A, x) \prec (B, y)$ e $(B, y) \prec (A, x)$ tem-se que $A = B$, mas não necessariamente que $x = y$ (exceto no caso trivial em que $\mathcal{X}$ possui um único elemento).

• Mais exemplos

Seja o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Podemos estabelecer em $\mathbb{N}$ a relação de ordem usual onde dizemos que

$x \leq y$ se $x - y$ for um número negativo ou nulo. Esta relação é uma relação de ordem total. O leitor não deve pensar que essa é a única relação de ordem total existente em $\mathbb{N}$. Um outro exemplo é o seguinte.

Vamos estabelecer uma relação de ordem em $\mathbb{N}$ que denotaremos pelo símbolo $\preceq_{p-i}$. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Se a e b forem pares dizemos que $a \preceq_{p-i} b$ se $a \leq b$. Se a e b forem ímpares dizemos que $a \preceq_{p-i} b$ se $a \leq b$. Se a é par e b é ímpar, então dizemos sempre que $a \preceq_{p-i} b$.

E. 1.25 *Exercício*. Mostre que a relação $\preceq_{p-i}$ estabelece uma relação de ordem total em $\mathbb{N}$. ✠

Um exemplo análogo pode ser construído em $\mathbb{R}$. Vamos estabelecer uma relação de ordem em $\mathbb{R}$ que denotaremos pelo símbolo $\preceq_{r-i}$. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Se x e y forem racionais dizemos que $x \preceq_{r-i} y$ se $x \leq y$. Se x e y forem irracionais dizemos que $x \preceq_{r-i} y$ se $x \leq y$. Se x é racional e y é irracional, então dizemos sempre que $x \preceq_{r-i} y$.

E. 1.26 *Exercício*. Mostre que a relação $\preceq_{r-i}$ estabelece uma relação de ordem total em $\mathbb{R}$. ✠

• Ordem lexicográfica

É possível estabelecer uma relação de ordem total em $\mathbb{R}^2$ da seguinte forma: dizemos que $(x_1, x_2) \prec_L (y_1, y_2)$ se *1.* $x_1 < y_1$, ou se *2.* $x_1 = y_1$ e $x_2 < y_2$. Essa relação de ordem é denominada *relação de ordem lexicográfica* de $\mathbb{R}^2$.

Essa definição pode ser facilmente generalizada. Seja X um conjunto totalmente ordenado por uma relação de ordem total $\preceq_X$. Então, X^n pode ser totalmente ordenado dizendo-se $(x_1, \ldots, x_n) \prec_L (y_1, \ldots, y_n)$ se $x_1 \prec y_1$ ou se houver um $j \in \{2, \ldots, n\}$, tal que $x_i = y_i$ para todo $i < j$ e $x_j \prec_X y_j$.

Seja X um conjunto totalmente ordenado por uma relação de ordem total $\preceq_X$ e seja $\mathcal{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^n$. Podemos estabelecer em $\mathcal{X}$ uma ordem total $\preceq_{\mathcal{X}}$, também denominada lexicográfica, da seguinte maneira. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $p = \min\{m, n\}$. Então, dizemos $(x_1, \ldots, x_m) \preceq_{\mathcal{X}} (y_1, \ldots, y_n)$ se $(x_1, \ldots, x_p) \preceq_L (y_1, \ldots, y_p)$ no sentido dado no parágrafo anterior, ou se $(x_1, \ldots, x_p) = (y_1, \ldots, y_p)$, mas $m < n$.

E. 1.27 *Exercício*. Por que essas relações de ordem são denominadas "lexicográficas"? Pense na maneira como palavras (de tamanho arbitrário!) são ordenadas em um dicionário. ✠

Podemos ainda estender a definição de ordem lexicográfica. Seja X um conjunto totalmente ordenado por uma relação de ordem total $\preceq_X$ e seja Y um conjunto totalmente ordenado por uma relação de ordem total $\preceq_Y$. Então, X^Y pode ser parcialmente ordenado dizendo-se $X^Y \ni x \preceq_L y \in X^Y$ se houver um $j \in Y$, tal que $x(i) = y(i)$ para todo $i \preceq_Y j$ e $x(j) \preceq_X y(j)$.

Exemplo. Sejam f, g, duas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Dizemos que $f \preceq_L g$ se existir $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x < y$ mas $f(y) \leq g(y)$. Lembrando que o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, vê-se que essa definição coincide com a dada acima.

• Conjuntos dirigidos

Um conjunto I é dito ser um *conjunto dirigido* ("directed set") se for dotado de uma relação de pré-ordenamento, que denotaremos por "$\prec$", e se for dotado da seguinte propriedade: para quaisquer dois elementos a e b de I existe pelo menos um terceiro elemento $c \in I$ tal que $a \prec c$ e $b \prec c$.

Exemplo. Seja X um conjunto não-vazio. Temos em $\mathbb{P}(X)$ uma relação de ordem parcial (de inclusão) dizendo que $A \preceq B$ se $A \subseteq B$. Essa relação de ordem faz de $\mathbb{P}(X)$ um conjunto dirigido, pois para quaisquer A e $B \subset X$ tem-se, naturalmente, $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$.

Exemplo. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{X}$ dois conjuntos não-vazios e seja em $\mathbb{P}(\mathcal{A}) \times \mathcal{X}$ a relação de pré-ordenamento $(A, x) \prec (B, y)$ se $A \subset B$. O conjunto $\mathbb{P}(\mathcal{A}) \times \mathcal{X}$ é dirigido por esse pré-ordenamento, pois se (A, x) e $(B, y) \in \mathbb{P}(\mathcal{A}) \times \mathcal{X}$, então $(A, x) \prec (A \cup B, z)$ e $(B, z) \prec (A \cup B, z)$ para qualquer $z \in \mathcal{X}$.

Exemplo. Todo conjunto dotado de uma relação de ordem total é um conjunto dirigido em relação a essa relação de ordem. Justifique!

Exemplo. $\mathbb{R}$ é um conjunto dirigido com a relação de ordem usual.

Exemplo. $\mathbb{R}$ é um conjunto dirigido com a relação de ordem $\preceq_{r-i}$ definida acima.

E. 1.28 Exercício. Seja o conjunto $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, e seja I o conjunto de todos os abertos limitados de $\mathbb{R}^n$ (um conjunto é *limitado* se for subconjunto de alguma bola aberta de raio finito centrada na origem). Mostre que I é um conjunto dirigido pela relação de ordem de inclusão: $A \preceq B$ se $A \subset B$. Note que essa relação de ordem não é uma relação de ordem total. ✠

Exemplo. Causalidade de Einstein. Seja $\mathbb{M}^4$ o espaço-tempo quadri-dimensional de Minkowski e sejam $E_0 = (t_0, x_0, y_0, z_0)$ e $E_1 = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ dois eventos em $\mathbb{M}^4$. Dizemos que o evento E_0 precede causalmente o evento E_1, (em notação simbólica $E_0 \succeq_{Einstein} E_1$), se $t_0 \leq t_1$ e se

$$c^2(t_1 - t_0)^2 - (x_1 - x_0)^2 - (y_1 - y_0)^2 - (z_1 - z_0)^2 \geq 0 ,$$

onde c é a velocidade da luz.

E. 1.29 Exercício. Mostre que $\succeq_{Einstein}$ é uma relação de ordem em $\mathbb{M}^4$ e que $\mathbb{M}^4$ é um conjunto dirigido por essa relação. ✠

Contraexemplo. Seja X um conjunto não-vazio e seja $I = \mathbb{P}(X) \setminus \{X\}$, ou seja, I é a coleção de todos os subconjuntos de X, exceto o próprio X. Podemos ter em I uma relação de ordem (de inclusão) dizendo que $A \preceq B$ se $A \subseteq B$. Notemos, porém, que I não é um conjunto dirigido pois para $A \in I$, $A \neq \emptyset$ temos $X \setminus A \in I$ mas não existe em I nenhum conjunto que contenha A e $X \setminus A$ simultaneamente como subconjuntos.

• Redes e sequências

Seja I um conjunto dirigido com respeito à uma relação de pré-ordenamento $\prec$. Se M é um conjunto não-vazio, uma função $f : I \to M$ é denominada uma *rede em M baseada no conjunto dirigido I com respeito a $\prec$* ou, simplesmente, uma *rede* em M.

Uma *sequência* em M é uma rede baseada em $\mathbb{N}$, que é um conjunto dirigido com respeito à ordem usual dos naturais, ou seja, é uma função $f : \mathbb{N} \to M$.

A noção de rede é importante, por exemplo, no estudo de funções contínuas em espaços topológicos gerais e na definição da noção de convergência (vide Capítulo 30, página 1412).

Se $f : \mathbb{N} \to M$ é uma sequência em M, os elementos $f(n)$ de sua imagem são frequentemente denotados por uma notação com índices: f_n. É também comum denotar-se a própria sequência por $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ ou por $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que, estritamente falando, representam a imagem de f em M.

• Máximos e mínimos

Se X é um conjunto dotado de uma relação de ordem parcial (que denotamos por $\preceq$) diz-se que um elemento $z \in X$ é um *máximo* de X se $x \preceq z$ para todo $x \in X$. Se z e z' são máximos de X então, por hipótese, valem ambas as relações $z \preceq z'$ e $z' \preceq z$, o que implica $z = z'$. Assim, se X possuir um máximo ele é único, e é denotado por $\max(X)$.

Se $A \subset X$, a relação de ordem parcial em X induz uma relação de ordem parcial em A. Com essa relação, podemos definir $\max(A)$, se existir, como o elemento de A tal que $a \preceq \max(A)$ para todo $a \in A$. Note que, por definição, $\max(A) \in A$.

Analogamente, um elemento a é dito ser um *mínimo* de X se $a \preceq x$ para todo $x \in X$. Se a e a' são mínimos de X então, por hipótese, valem ambas as relações $a \preceq a'$ e $a' \preceq a$, o que implica $a = a'$. Assim, se X possuir um mínimo ele é único, e é denotado por $\min(X)$.

• Elementos maximais e minimais

Seja X um conjunto dotado de uma relação de ordem parcial (que denotamos por $\preceq$).

Um elemento $z \in X$ é dito ser um *elemento maximal* se não existir $x \in X$, $x \neq z$ tal que $z \preceq x$.

Um elemento $a \in X$ é dito ser um *elemento minimal* se não existir $x \in X$, $x \neq a$ tal que $x \preceq a$.

Os elementos maximais e minimais de um conjunto parcialmente ordenado X, se existirem, não são necessariamente únicos, como mostra o seguinte exemplo.

E. 1.30 Exercício-Exemplo. Considere no plano $\mathbb{R}^2$ o quadrado fechado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, ou seja, os elementos de Q são pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. Estabelecemos em Q uma relação de ordem (parcial!) da seguinte forma: $(x, y) \preceq (x', y')$ se $x = x'$ e se $y \leq y'$. Em palavras, $(x, y) \preceq (x', y')$ se ambos os pontos estiverem em uma mesma linha vertical, mas (x, y) estiver mais baixo que (x', y'). Cheque que isso é, de fato, uma relação de ordem, mas que não é uma ordem total, pois não se pode comparar pontos que estão em linhas verticais diferentes.

Com essa definição convença-se que todos os elementos da forma $(x, 1)$ são maximais. Porém, se x for diferente de x', não se pode nem dizer que $(x, 1) \preceq (x', 1)$ nem que $(x', 1) \preceq (x, 1)$. Igualmente, convença-se que todos os elementos da forma $(x, 0)$ são minimais.

Note também que para a existência de elementos maximais é importante que Q contenha pontos na aresta de cima e (com coordenada $y = 1$), analogamente, para a existência de elementos minimais é importante que Q contenha pontos aresta de baixo (com coordenada $y = 0$). Por exemplo, se você definir a mesma relação de ordem no quadrado aberto $(0, 1) \times (0, 1)$ não há mais elementos maximais ou minimais. ✠

Se um conjunto não-vazio e parcialmente ordenado X possuir um único elemento maximal, este elemento é denominado o *maior elemento* de X. Reciprocamente, se um conjunto não-vazio e parcialmente ordenado X possuir um único elemento minimal, este elemento é denominado o *menor elemento* de X.

• Conjuntos bem-ordenados

Um conjunto X dotado de uma relação de ordem parcial $\preceq$ é dito ser um *conjunto bem-ordenado* se todo subconjunto A não vazio de X tem um elemento mínimo em A.

E. 1.31 *Exercício*. Mostre que todo conjunto bem-ordenado segundo uma relação parcial de ordem é também totalmente ordenado segundo a mesma relação. ✠

E. 1.32 *Exercício*. A recíproca não é, entretanto, verdadeira. Mostre que $\mathbb{R}$ é totalmente ordenado pela relação usual de ordem entre números reais, mas não é um conjunto bem-ordenado. ✠

E. 1.33 *Exercício*. Mostre que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é bem-ordenado. ✠

A importância de conjuntos bem-ordenados é que a eles se aplica uma generalização do bem-conhecido método de indução matemática, muito empregado em demonstrações de teoremas, denominada *princípio de indução transfinita*. O estudante interessado encontrará em [152] uma excelente referência introdutória. Nesta mesma referência o estudante interessado encontrará uma demonstração do seguinte e importante resultado, devido a Zermelo[13]:

Teorema 1.1 (Teorema do Bom-Ordenamento) *Se X é um conjunto não-vazio, então é possível encontrar uma relação de ordem $\preceq$ em X tal que X é bem-ordenado por essa relação.* □

Incidentalmente, o Teorema 1.1 junto com a afirmação do Exercício E. 1.31 informam que todo conjunto não-vazio possui ao menos uma relação de ordem total.

• Majorantes e minorantes

Seja X um conjunto dotado de uma ordem parcial denotada por $\preceq$ e seja $A \subset X$. Se existe $t \in X$ tal que $a \preceq t$ para todo $a \in A$ dizemos que t é um *majorante* de A, ou um *limitante superior*[14] de A.

Analogamente, se existe $h \in X$ tal que $h \preceq a$ para todo $a \in A$ dizemos que h é um *minorante* de A ou um *limitante inferior*[15] de A.

• Conjuntos limitados

Seja X um conjunto dotado de uma ordem parcial denotada por $\preceq$. Um conjunto $A \subset X$ que tenha pelo menos um majorante é dito ser um *conjunto limitado superiormente*. Um conjunto $A \subset X$ que tenha pelo menos um minorante é dito ser um *conjunto limitado inferiormente*.

• Ínfimo e supremo

Seja X um conjunto dotado de uma ordem parcial denotada por $\preceq$ e seja $A \subset X$.

[13] Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953).
[14] A expressão "limite superior" é também usada na literatura, mas deve ser evitada para não causar confusão com a noção de limite.
[15] A expressão "limite inferior" é também usada na literatura, mas deve ser evitada para não causar confusão com a noção de limite.

O mínimo do conjunto de majorantes de A, se existir, é dito ser o *supremo* de A e é indicado por $\sup(A)$. Note que o supremo de A, se existir, é único, por ser o mínimo de um conjunto. Assim, $s \in X$ é dito ser o supremo de A se for um majorante de A e se $s \preceq t$ para todo t que seja majorante de A. Note que o supremo de um conjunto $A \subset X$ não é necessariamente um elemento de A, ao contrário do que ocorre com o máximo de A (caso exista).

O máximo do conjunto dos minorantes de A, se existir, é dito ser o *ínfimo* de A e é indicado por $\inf(A)$. Note que o ínfimo de A, se existir, é único, por ser o máximo de um conjunto. Assim, i é o ínfimo de A se for um minorante de A e se $h \preceq i$ para todo h que seja minorante de A. Note que o ínfimo de um conjunto $A \subset X$ não é necessariamente um elemento de A, ao contrário do que ocorre com o mínimo de A (caso exista).

É interessante notar o seguinte. Dado um conjunto X dotado de uma ordem parcial poderíamos nos perguntar se todo subconjunto limitado superiormente de X possui um supremo ou, analogamente, se todo subconjunto de X limitado inferiormente possui um ínfimo. A validade ou não dessas propriedades depende de X e da relação de ordem em questão. Por exemplo, para $X = \mathbb{Q}$, o conjunto dos racionais com a relação de ordem usual, verifica-se que a propriedade não é valida. Tomemos $A = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 2\}$. Claramente esse conjunto é limitado inferior e superiormente mas não possui nem supremo nem ínfimo (por quê?). Para $X = \mathbb{N}$ e $X \in \mathbb{R}$ (com as relações de ordem usuais) a propriedade é, porém, válida.

E. 1.34 *Exercício*. Tome $X = \mathbb{R}$ com a relação de ordem usual. Mostre que $\inf((-1,\ 1)) = -1$ e que $\sup((-1,\ 1)) = 1$. Note que -1 e 1 não são elementos de $(-1,\ 1)$. ✠

E. 1.35 *Exercício*. Suponha que A e B sejam dois subconjuntos de um conjunto X dotado de uma ordem total e que $\inf(A)$ e $\inf(B)$ existam. Mostre, então, que

$$\inf(A \cup B) \ = \ \min\big\{\inf(A),\ \inf(B)\big\} .$$

✠

E. 1.36 *Exercício*. Suponha que A e B sejam dois subconjuntos de um conjunto X dotado de uma ordem total e que $\sup(A)$ e $\sup(B)$ existam. Mostre, então, que

$$\sup(A \cup B) \ = \ \max\big\{\sup(A),\ \sup(B)\big\} .$$

✠

• **O Lema de Zorn**

Uma das afirmativas fundamentais de toda a Matemática usual é o seguinte resultado, conhecido como *lema de Zorn*, em homenagem a um dos seus formuladores[16]:

Lema 1.1 (Lema de Kuratowski-Zorn) *Seja X um conjunto não-vazio e $\preceq$ uma relação de ordem parcial em X. Suponha que todo subconjunto linearmente ordenado de X tenha pelo menos um majorante em X. Então, todo subconjunto linearmente ordenado de X tem algum majorante em X que é também um elemento maximal de X. Implicitamente isso está dizendo que, sob as hipóteses, X possui ao menos um elemento maximal.* □

Para uma demonstração do Lema de Zorn, vide, por exemplo, [152].

E. 1.37 *Exercício*. Verifique que se $X = [0,\ 1]$ é ordenado pela relação de ordem usual todo subconjunto de X tem um majorante em X e que 1 é um desses possíveis majorantes. Verifique que 1 é um elemento maximal de X. ✠

E. 1.38 *Exercício*. Verifique que se $X = [0,\ 1)$ é linearmente ordenado pela relação de ordem usual e nem todo subconjunto de X tem um majorante em X (tente, por exemplo, subconjuntos do tipo $[a,\ 1)$ com $0 \le a < 1$). Verifique que X não tem um elemento maximal. ✠

E. 1.39 *Exercício*. Cheque se as hipóteses do Lema de Zorn são satisfeitas ou não nos quadrados abertos e fechados do Exemplo E. 1.30, página 56. ✠

[16] Max August Zorn (1906–1993). Em verdade, o Lema de Zorn foi primeiramente descoberto por Kazimierz Kuratowski (1896–1980). O trabalho de Kuratowski data de 1922 e o de Zorn de 1935.

O Lema de Zorn é "equivalente" ao chamado Axioma da Escolha (vide página 46), ou seja, admitir um como verdadeiro leva a demonstrar a validade do segundo. Essa equivalência não será provada aqui (vide, por exemplo, [152]). Toda a Matemática usual é fundada na aceitação de um ou de outro como verdadeiro e, em princípio, uma nova Matemática pode ser construída (com resultados distintos dos da Matemática usual) se esses dois axiomas forem substituídos por um terceiro inequivalente. A relevância de tais Matemáticas em Física é uma questão em aberto.

1.1.2 Cardinalidade

• A noção de cardinalidade de conjuntos

Seja $\mathcal{K}$ uma coleção de conjuntos. Dados dois conjuntos A e B da coleção $\mathcal{K}$, dizemos que A e B são equivalentes se houver uma função bijetora de A sobre B, ou seja, se houver uma função com domínio igual a A e imagem igual a B tal que a cada elemento $b \in B$ existe um único elemento $a \in A$ com $f(a) = b$.

E. 1.40 *Exercício*. Mostre que essa é uma relação de equivalência entre os conjuntos da coleção $\mathcal{K}$. ✠

Para dois conjuntos que são equivalentes no sentido acima diz-se também que os mesmos têm a mesma *cardinalidade*. Ou seja, dois conjuntos têm a mesma cardinalidade se e somente se houver uma função bijetora entre eles.

Um conjunto A é dito ter n elementos (para um número natural n) se for equivalente ao conjunto $\{1, \ldots, n\}$.

Nota. Esta última definição pressupõe que o conceito de número natural já seja conhecido. Outra construção mais simples em termos de pressupostos é feita de modo informal como segue: diz-se que um conjunto tem um elemento se for equivalente ao conjunto $\{\emptyset\}$; que um conjunto tem dois elementos se for equivalente ao conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; que tem três elementos se for equivalente ao conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ e assim por diante. Em verdade essa construção permite produzir uma *definição* do conceito de número natural: o número "um" é, grosseiramente falando, o nome dado à classe de equivalência formada pelos conjuntos equivalentes ao conjunto $\{\emptyset\}$; o número "dois" é o nome dado à classe de equivalência do conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; o número "três" é nome dado à classe de equivalência do conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ e assim por diante. Aliás, o número "zero" é o nome dado à classe de equivalência de $\emptyset$. Os números naturais seriam, então, segundo essa definição, o conjunto de todas as classes de equivalência construídas dessa forma. Esta definição[17] do conceito de número natural, devida a von Neumann[18], pressupõe apenas conhecidos conceitos primitivos como os de conjuntos, classes de equivalência e de conjunto vazio. O leitor poderá encontrar uma discussão extensa sobre a definição de números naturais em [378, 272, 152]. ♣

Diz-se que um conjunto A é finito se tiver a cardinalidade de $\{1, \ldots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. A é dito ser infinito se não for finito.

E. 1.41 *Exercício*. Seja A um conjunto finito com n elementos. Mostre que $\mathbb{P}(A)$ tem 2^n elementos. ✠

• Conjuntos enumeráveis e conjuntos contáveis

Um conjunto A é dito ser *enumerável* se tiver a cardinalidade do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, ou seja, se existir uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to A$ cujo domínio é $\mathbb{N}$ e cuja imagem é todo A. Conjuntos enumeráveis não são finitos. Um conjunto A é dito ser *contável* se for finito ou se for enumerável. Advertimos o estudante para o fato de que alguns autores usam a palavra enumerável mesmo para conjuntos finitos. Evitaremos fazê-lo aqui, agarrando-nos às definições acima.

Vamos agora provar alguns teoremas fundamentais sobre conjuntos contáveis (cuja importância, apesar da aparente simplicidade dos enunciados, não pode ser subestimada pois seu alcance estende-se por toda a Matemática, em particular, por muito do que veremos no restante do curso).

Precisamos da seguinte proposição:

Proposição 1.6 *Um conjunto é contável se e somente se for equivalente a um subconjunto de* $\mathbb{N}$. □

Prova. Por definição todo conjunto contável A (finito ou não) é equivalente a algum subconjunto de $\mathbb{N}$ (no pior dos casos ao próprio $\mathbb{N}$). Provemos, então, a recíproca. Seja A equivalente a um subconjunto K de $\mathbb{N}$. Se K for finito, A também o será e, portanto, será contável. Suponhamos, então, que K não é finito. Vamos construir uma função bijetora

[17] J. von Neumann "Zur Einfuhrung transfiniten Zahlen", Acta Szeged **1**, 199–208 (1923).
[18] János von Neumann (1903–1957). Von Neumann também adotou os nomes de Johann von Neumann e John von Neumann.

$F : \mathbb{N} \to K$. A mesma é definida da seguinte forma

$$F(1) = \min K ,$$

$$F(n) = \min\Big\{K \setminus \big\{F(1),\ F(2),\ \ldots, F(n-1)\big\}\Big\} , \quad \text{para } n = 2,\ 3,\ \ldots\ .$$

É fácil ver que F é bijetora e que sua imagem é K (faça isso). Assim, K é enumerável e, portanto, A também o é. ■

Esta proposição tem uma consequência simples:

Proposição 1.7 *Se A é um conjunto contável e $B \subset A$, então B é contável.* □

Prova. Se A é contável e $B \subset A$, então B é equivalente a um subconjunto de $\mathbb{N}$ e, portanto, pela proposição anterior, B é contável. ■

Chegamos a um importante resultado:

Proposição 1.8 *O produto Cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.* □

Prova. Seja a função $G : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $G(a,\ b) = 2^a 3^b$. A imagem dessa função é um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$ mas essa função é bijetora: a cada elemento z de sua imagem há um e somente um par $(a,\ b)$ de números naturais tais que $2^a 3^b = z$ (por quê?). Assim, fica provado pela Proposição 1.6 que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é contável. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ não é finito (por quê?), é um conjunto enumerável. ■

A Proposição 1.8 tem uma consequência de grande importância:

Teorema 1.2 *O conjunto $\mathbb{Q}_+$ dos números racionais positivos é um conjunto enumerável.* □

Prova. Todo racional positivo é da forma p/q, onde p e $q \in \mathbb{N}$ são irredutíveis ou primos entre si (ou seja, não há "cancelamentos" que permitam escrever $p/q = a/b$ com $a < p$ e $b < q$). Assim, há uma correspondência um-a-um entre $\mathbb{Q}_+$ e o subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ formado por todos os pares $(p,\ q)$ onde p e q são primos entre si. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é contável, a Proposição 1.7 diz, então, que $\mathbb{Q}_+$ é também contável e, em verdade, enumerável, por não ser finito. ■

E. 1.42 *Exercício*. Prove que o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ são conjuntos enumeráveis. ✠

Um fato também importante é que há conjuntos de números que não são conjuntos contáveis. O exemplo mais relevante é o dos números reais.

Teorema 1.3 *O conjunto dos números reais não é contável.* □

Prova. Para provar isso basta mostrar que há um subconjunto de $\mathbb{R}$ que não é contável. Considere o conjunto U de todos os números reais do intervalo $[0,\ 1)$ tais que apenas os dígitos 0 ou 1 aparecem em sua representação decimal. Por exemplo, números como $0,001101$ ou $0,1$ ou 0 ou $0,1011$ ou $1/9 = 0,11111\ldots$ são elementos de U. De modo mais preciso, U é o subconjunto do intervalo $[0,\ 1)$ formado por todos os números u que podem ser escritos da forma

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(u)}{10^n} ,$$

onde $d_n(u) \in \{0,\ 1\}$ para todo $n \geq 1$. $d_n(u)$ é o n-ésimo dígito do número u na base decimal. Note que dois elementos u e v de U são iguais se e somente se $d_n(u) = d_n(v)$ para todo n (prove isso!).

Vamos provar que U não é um conjunto contável. Para isso vamos supor o oposto, ou seja, que U é contável e veremos que essa hipótese leva a um absurdo. Vamos supor que haja uma função bijetora $f: \mathbb{N} \to U$ cuja imagem é U. Considere o número real a definido por

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - d_n(f(n))}{10^n} .$$

Como $1 - d_n(f(n))$ é igual a 0 ou a 1 (por quê?), segue obviamente que a é um elemento de U.

Entretanto, é fácil ver que a não faz parte da imagem da função f. Para ver isso note que se a fosse um elemento da imagem de f haveria um inteiro m tal que $f(m) = a$. Mas isso significa, então, que o m-ésimo dígito de a seria $d_m(a) = d_m(f(m))$. Mas pela definição do próprio a, o seu m-ésimo dígito é $1 - d_m(f(m))$. Assim, teríamos que $d_m(f(m)) = 1 - d_m(f(m))$ o que não é possível.

Concluímos, então, que a é um elemento de U mas não pode ser um elemento da imagem da função f. Isso é uma contradição, pois supomos justamente que a imagem da f era todo o conjunto U. Portanto, U não é contável e, assim, $\mathbb{R}$ também não o é. ■

Nota. É fácil ver que, em verdade, poderíamos substituir a base decimal, usada na representação do conjunto U acima, por qualquer base $b \in \mathbb{N}$ com $b > 2$. Ou seja, se considerarmos o conjunto U_b de todos os reais u do intervalo $[0, 1]$ representáveis na base b, $b \in \mathbb{N}$, $b > 2$, da forma

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(u)}{b^n} .$$

onde $d_n(u) \in \{0, 1\}$, então, repetindo o que fizemos acima, veríamos que U_b não é contável. Claramente $U = U_{10}$. ♣

Nota. O caso da base binária $b = 2$ foi excluído da última nota pois nele não vale a unicidade da representação dos elementos de U_2 na forma

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(u)}{2^n} ,$$

onde $d_n(u) \in \{0, 1\}$. Para ver isso, faça o exercício seguinte. ♣

E. 1.43 *Exercício*. Mostre que na base binária $0,1$ e $0,01111111\ldots$ representam o mesmo número, a saber, o número $1/2$. Sugestão: use a fórmula da progressão geométrica infinita para calcular quanto vale $0,01111111\ldots$. ✠

Nota. Os conjuntos U_b, $b > 2$, são exemplos de uma classe de conjuntos chamados de *conjuntos de Cantor*[19]. Tornaremos a reencontrar tais conjuntos quando falarmos de Teoria da Medida (vide Capítulo 29, especialmente Seção 29.3, página 1396.). ♣

Ainda sobre os números reais, tem-se também o seguinte fato, que para referência futura formulamos como uma proposição.

Proposição 1.9 *$\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ têm a mesma cardinalidade.* □

Prova. É suficiente mostrar que $(0, 1)$ e $(0, 1) \times (0, 1)$ têm a mesma cardinalidade, pois a função $x \to (1 + \tanh(x))/2$ é uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $(0, 1)$. Fixemos para cada $x \in (0, 1)$ uma representação decimal $x = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots$ com $d_n \in \{0, \ldots, 9\}$. Seja $F : (0, 1) \to (0, 1) \times (0, 1)$ definida por

$$F(0, d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots) := (0, d_1 d_3 d_5 d_7 \ldots, \quad 0, d_2 d_4 d_6 d_8 \ldots) .$$

F é bijetora e $F^{-1} : (0, 1) \times (0, 1) \to (0, 1)$ é dada por

$$F^{-1}((0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots, \quad 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots)) = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 a_4 b_4 \ldots .$$

■

Finalizamos com um outro teorema de grande importância:

Teorema 1.4 *Se C_i, $i \in \mathbb{N}$, são conjuntos contáveis, então $C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$ também o é.* □

[19]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918).

Prova. Se cada C_i é contável, então para cada $i \in \mathbb{N}$ há uma função bijetora $g_i : \mathbb{N} \to C_i$ cuja imagem é C_i. Defina-se então a função $G : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to C$ dada por $G(a,\ b) = g_a(b)$. Esta função não é, em geral, bijetora, pois podem existir elementos comuns entre conjuntos C_i e C_j com $i \neq j$ e teríamos $g_i(m) = g_j(n)$ para algum n e m. Entretanto, a imagem de G é C.

Considere, então em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a seguinte relação de equivalência: o par $(a,\ b)$ é equivalente ao par $(c,\ d)$ se e somente se $g_a(b) = g_c(d)$. O conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pode ser então, como já observamos, escrito como a união disjunta de suas classes de equivalência pela relação acima. Construamos, então, um subconjunto K de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tomando-se um e somente um elemento de cada classe de equivalência escolhido arbitrariamente (usamos aqui o Axioma da Escolha para afirmar que tal construção é possível).

Defina agora a função $H : K \to C$ dada por $H(a,\ b) = g_a(b)$ para $(a,\ b) \in K$. Pela própria construção do conjunto K essa função H é bijetora e sua imagem é C. Como K é um subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que é contável, temos que K também o é e, portanto, C é contável. ■

• Números reais algébricos e transcendentes

Na reta real diz-se que um número x é um *número algébrico* se x for raiz de um polinômio do tipo

$$P(t) \ = \ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \ ,$$

para algum $n \in \mathbb{N}$, onde os coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ são números racionais. Um tal polinômio é dito ser um *polinômio racional*.

Todo número racional p/q é também algébrico pois é raiz do polinômio racional $p - qt$. Há também muitos números irracionais que são algébricos. Por exemplo, o número $\sqrt{2}$ é raiz do polinômio racional $-2 + t^2$ e, portanto, é algébrico. Os números reais que não são algébricos são chamados de *números transcendentes*.

E. 1.44 *Exercício*. Prove que o conjunto de todos os números algébricos da reta real é um conjunto enumerável. Use para tal o fato de que os racionais formam um conjunto enumerável. ✠

O exercício anterior pode ser usado para concluir que existem números transcendentes (que não são raiz de nenhum polinômio racional) pois os reais, como sabemos, não são contáveis enquanto, segundo o exercício, os algébricos o são. Deve, portanto, haver uma coleção não-contável de números transcendentes na reta real.

Historicamente, a existência de números transcendentes foi estabelecida (por outros argumentos) por Liouville[20] em 1851. Em 1874, Cantor[21] demonstrou a afirmação do exercício acima, provando que o conjunto de todos os números algébricos da reta real é um conjunto contável.

E. 1.45 *Exercício*. Seja $\mathbb{A}_0 = \mathbb{Q}$ e $\mathbb{A}_1$ o conjunto dos números algébricos, definidos como o conjunto de todos os zeros reais de polinômios com coeficientes racionais. Definimos $\mathbb{A}_2$ como o conjunto de todos os zeros reais de polinômios com coeficientes em $\mathbb{A}_1$. Sucessivamente, definimos $\mathbb{A}_n$, $n \geq 1$ como o conjunto de todos os zeros reais de polinômios com coeficientes em $\mathbb{A}_{n-1}$. Seja também $\mathbb{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{A}_n$. Mostre que todos os $\mathbb{A}_n$ e $\mathbb{A}$ são conjuntos contáveis e, portanto, subconjuntos próprios de $\mathbb{R}$. ✠

• Os números e e π são irracionais e transcendentes

Sabe-se que os números e e π são irracionais e transcendentes.

As provas de que e e e^2 são irracionais foram primeiramente obtidas por Euler[22] em 1737. Uma prova que e é irracional pode ser encontrada nestas Notas à página 1235 ou, por exemplo, em [361] ou [159].

A prova de que π é irracional não é tão simples quanto a de que e é irracional. A demonstração de que π é irracional foi primeiramente obtida por Lambert[23] em 1768 e consistiu em provar que se r é um número racional não-nulo, então, nem e^r nem $\tan(r)$ podem ser racionais. Como $\tan(\pi/4) = 1$, que é racional, segue que $\pi/4$ deve ser irracional.

A demonstração de que e é transcendente foi obtida pela primeira vez por Hermite[24] em 1873.

[20] Joseph Liouville (1809–1882).
[21] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918).
[22] Leonhard Euler (1707–1783).
[23] Johann Heinrich Lambert (1728–1777).
[24] Charles Hermite (1822–1901). A prova original da transcendência de e encontra-se em Comptes rendus, **77**, 18-24 (1873).

A demonstração de que π é transcendente foi obtida pela primeira vez por Lindemann[25] em 1882.

Um fato de grande interesse é que provar que π é algébrico seria equivalente[26] a resolver o célebre *problema da quadratura do círculo*, que consiste em achar um método através do qual, "apenas com régua e compasso" constrói-se um quadrado cuja área é igual a de um círculo de raio 1. Tal seria possível caso houvessem meios de se construir um segmento de reta cujo comprimento seja $\sqrt{\pi}$. Esse problema clássico da geometria Euclidiana ficou em aberto por cerca de dois mil anos (!), tendo sido resolvido negativamente em 1882 por Lindemann quando este provou, justamente, que π não é um número algébrico, concluindo assim a impossibilidade da construção proposta.

Para provas de que e é transcendente vide, por exemplo, [361] ou [159]. Para provas que π é irracional e transcendente e para uma série de outros resultados congêneres, vide [159].

• **Produtos Cartesianos e contabilidade**

É interessante notar que produtos Cartesianos contáveis de conjuntos contáveis **não** são, geralmente, conjuntos contáveis. Considere como exemplo o produto Cartesiano

$$K \;:=\; \prod_{i\in\mathbb{N}}\{0,\ 1\} \;=\; \{0,\ 1\}^{\mathbb{N}} ,$$

que é denominado *espaço de Cantor*[27]. Podemos mostrar que K não é contável. Cada elemento de K é uma função $d:\ \mathbb{N}\to\{0,\ 1\}$. Podemos assim associar univocamente a cada d o número real

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{10^n}$$

que é um elemento do conjunto $U\subset\mathbb{R}$ definido acima. Por outro lado, todo elemento de U pode ser escrito assim para um único $d\in K$. Assim, K e U têm a mesma cardinalidade e, portanto, K não é contável pois U, como já vimos, não o é.

E. 1.46 *Exercício*. Mostre que todos os conjuntos U_b, definidos acima, com $b>2$, tem a mesma cardinalidade de K (e, portanto, a mesma cardinalidade entre si). ✠

1.1.3 Ínfimos e Supremos de Famílias de Conjuntos

Seja I um conjunto arbitrário de índices e $\{A_i,\ i\in I\}$ uma coleção de conjuntos indexados por elementos de I. Chama-se por vezes o conjunto $\inf_{i\in I}A_i := \bigcap_{i\in I}A_i$ de ínfimo da coleção $\{A_i,\ i\in I\}$ e o conjunto $\sup_{i\in I}A_i := \bigcup_{i\in I}A_i$ de supremo da coleção $\{A_i,\ i\in I\}$.

Essas noções coincidem com as noções de ínfimo e supremo apresentadas à página 57 se considerarmos em $X=\bigcup_{i\in I}A_i$ a relação de ordem definida pela inclusão de conjuntos: se $A,\ B\subset X$ dizemos que $A\preceq B$ se $A\subset B$.

E. 1.47 *Exercício*. Mostre isso. ✠

• **Limites do ínfimo e limites do supremo de famílias contáveis de conjuntos**

Seja $\{A_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ uma coleção contável de subconjuntos de um conjunto não-vazio X. Define-se um conjunto chamado de *limite do ínfimo* da coleção, denotado por $\underline{\lim}A_n$, como sendo o conjunto dado por

$$\underline{\lim}A_n \;:=\; \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\ .$$

[25] Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852–1939). A prova original da transcendência de π encontra-se em Math. Ann. **20**, 213–225 (1882).

[26] Para uma bela discussão sobre isso, vide [87].

[27] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918).

O chamado *limite do supremo* da coleção, denotado por $\overline{\lim} A_n$, é o conjunto definido por

$$\overline{\lim} A_n \;:=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \;.$$

Se considerarmos a relação de ordem entre conjuntos definida pela inclusão de conjuntos, é de se notar que a sequência de conjuntos $B_n := \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, $n \in \mathbb{N}$, está ordenada de forma crescente (ou seja, $B_n \preceq B_m$ se $n \leq m$) e $\underline{\lim} A_n$ é seu supremo. Analogamente, a sequência de conjuntos $C_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, $n \in \mathbb{N}$, está ordenada de forma decrescente (ou seja, $C_n \preceq C_m$ se $n \geq m$) e $\underline{\lim} A_n$ é seu ínfimo.

E. 1.48 *Exercício*. Justifique a seguinte afirmativa: $\underline{\lim} A_n$ é o conjunto de todos os pontos x de X que pertencem a todos os conjuntos A_n exceto a, no máximo, um número finito deles. Dizemos, nesse caso, que x pertence *a quase todos* os A_n's). ✠

E. 1.49 *Exercício*. Justifique a seguinte afirmativa: $\overline{\lim} A_n$ é o conjunto de todos os pontos x de X que pertencem a um número infinito de conjuntos A_n. Dizemos, nesse caso, que x pertence *frequentemente* aos A_n's). ✠

Proposição 1.10 *Seja $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ uma coleção contável de subconjuntos de um conjunto não-vazio X. Então,*

$$\left(\underline{\lim} A_n\right)^c \;=\; \overline{\lim} A_n^c \qquad e \qquad \left(\overline{\lim} A_n\right)^c \;=\; \underline{\lim} A_n^c \;.$$

□

Prova. A prova é uma aplicação imediata das definições e das relações (1.22) da Proposição 1.1, página 43. ■

Proposição 1.11 *Seja $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ uma coleção contável de subconjuntos de um conjunto não-vazio X. Então,*

$$\underline{\lim} A_n \;\subset\; \overline{\lim} A_n \;.$$

□

Prova. A prova é imediata pelos Exercícios E. 1.48 e E. 1.49, pois se $x \in X$ é tal que x pertence a todos os conjuntos A_n exceto a no máximo um número finito deles (isto é, se $x \in \underline{\lim} A_n$), então x pertence a um número infinito de conjuntos A_n (isto é, $x \in \overline{\lim} A_n$).

Uma outra prova mais formal é a seguinte. Tem-se

$$\begin{aligned}
\left(\underline{\lim} A_n\right) \cap \left(\overline{\lim} A_n\right)^c \quad &= \quad \left(\underline{\lim} A_n\right) \cap \left(\underline{\lim} A_n^c\right) \\
&= \quad \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \cap \left(\bigcup_{n'=1}^{\infty} \bigcap_{k'=n'}^{\infty} A_{k'}^c\right) \\
&\stackrel{\text{Prop. 1.1}}{=} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n'=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \cap \left(\bigcap_{k'=n'}^{\infty} A_{k'}^c\right) \;.
\end{aligned}$$

Agora, para cada par n, n' tem-se $\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \cap \left(\bigcap_{k'=n'}^{\infty} A_{k'}^c\right) = \emptyset$, pois essa intersecção é um subconjunto de conjuntos como $A_k \cap A_k^c$ com $k \geq n$ e $k \geq n'$ e, evidentemente, $A_k \cap A_k^c = \emptyset$. Assim, $\left(\underline{\lim} A_n\right) \cap \left(\overline{\lim} A_n\right)^c = \emptyset$, o que implica $\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n$. ■

• Convergência de sequências de conjuntos

Chegamos a uma definição importante: dizemos que uma coleção contável de conjuntos $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ converge a um conjunto A se

$$\underline{\lim} A_n \;=\; \overline{\lim} A_n \;=\; A.$$

Se uma coleção contável de conjuntos $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ converge a um conjunto A, então A é dito ser o *limite* de A_n, e escrevemos, como usualmente, $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, ou ainda $A_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} A$.

E. 1.50 *Exercício*. Justifique a seguinte afirmativa: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ só existe se não há pontos $x \in X$ que, simultaneamente, pertençam a infinitos conjuntos A_n e não pertençam a infinitos conjuntos A_n. ✠

Uma sequência A_n de conjuntos é dita ser *crescente*, ou *expansiva*, se $A_n \subset A_{n+1}$ para todo n. Uma sequência A_n de conjuntos é dita ser *decrescente*, ou *contrativa*, se $A_{n+1} \subset A_n$ para todo n.

Proposição 1.12 *Se uma sequência A_n de conjuntos for crescente ou decrescente, então $\lim_{n\to\infty} A_n$ existe. Se A_n é crescente, vale*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k .$$

Se A_n é decrescente, vale

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k .$$

□

Prova. Seja A_n uma sequência crescente de conjuntos. Então, $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$. Logo, $\underline{\lim} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Por outro lado, pelo fato de A_n ser crescente vale também que $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Logo, $\overline{\lim} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Com isso, estabeleceu-se que $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$ e, portanto, $\lim_{n\to\infty} A_n$ existe e vale $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

A prova para o caso de sequências decrescentes é análoga (faça-a!). ■

Os exercícios que seguem ilustram os conceitos acima.

E. 1.51 *Exercício*. Seja a família contável de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dada por $A_n = [0,\ 10]$ se n for par e $A_n = [0,\ 5]$ se n for ímpar. Determine $\underline{\lim} A_n$ e $\overline{\lim} A_n$ e $\lim_{n\to\infty} A_n$ se este existir. ✠

E. 1.52 *Exercício*. Seja a família contável de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dada por $A_n = [0,\ 1]$ se n for par e $A_n = [2,\ 3]$ se n for ímpar. Determine $\underline{\lim} A_n$ e $\overline{\lim} A_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, se este existir. ✠

E. 1.53 *Exercício*. Seja a família contável de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dada por

$$A_n = \left[-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n}\right] ,$$

com $n \in \mathbb{N}$. Determine $\underline{\lim} A_n$, $\overline{\lim} A_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, se este existir. ✠

E. 1.54 *Exercício*. Seja a família contável de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dada por

$$A_n = \left[\frac{1}{n+1},\ 1-\frac{1}{n+1}\right] ,$$

com $n \in \mathbb{N}$. Determine $\underline{\lim} A_n$, $\overline{\lim} A_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, se este existir. ✠

E. 1.55 *Exercício*. Crie seus próprios exemplos de famílias contáveis A_n de subconjuntos de $\mathbb{R}$ e estude seus $\underline{\lim} A_n$, $\overline{\lim} A_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, se este existir. ✠

1.2 Sistemas de Conjuntos

Seja X um conjunto não-vazio e $\mathbb{P}(X)$ a coleção de todos os seus subconjuntos (incluindo o vazio e o próprio X). Uma subcoleção $\mathfrak{C}$ de conjuntos de X, ou seja, $\mathfrak{C} \subset \mathbb{P}(X)$, é dita ser um *sistema de conjuntos* em X. Dizemos que $\mathfrak{C}$ é fechado por uniões se para todos $A,\ B \in \mathfrak{C}$ valer $A \cup B \in \mathfrak{C}$. Falamos, analogamente, em sistemas de conjuntos fechados por intersecções, diferenças ou diferenças simétricas. Se $\mathfrak{C} \subset \mathbb{P}(X)$ for tal que $A^c \equiv X \setminus A$ for um elemento de $\mathfrak{C}$ sempre que $A \in \mathfrak{C}$, dizemos que $\mathfrak{C}$ é fechado por complementos.

Dado um conjunto não-vazio X, há, naturalmente, muitos sistemas de conjuntos em X, mas frequentemente estamos interessados em sistemas que possuam determinadas propriedades específicas, tipicamente a de serem fechados por certas operações, como uniões, diferenças, intersecções etc. No que segue, listaremos os sistemas de conjuntos de maior interesse na literatura: os chamados semi-anéis de conjuntos, os anéis de conjuntos, as álgebras de conjuntos, os σ-anéis de conjuntos, as σ-álgebras de conjuntos, os sistemas monótonos de conjuntos, as topologias, os filtros e os ultrafiltros.

Seguindo o espírito geral deste capítulo, o propósito aqui é apenas o de listar definições, propriedades e exemplos elementares para futura referência, dado que várias das noções aqui tratadas e suas aplicações serão aprofundadas em capítulos futuros. O estudo de topologias e σ-álgebras, por exemplo, de importância central em Matemática, será aprofundado no Capítulo 27, página 1336, e seguintes.

O emprego de palavras como "anel" e "álgebra" na designação de certos sistemas de conjuntos que encontraremos adiante tem origem histórica em uma analogia observada por Hausdorff[28] entre certas operações envolvendo conjuntos, tais como união e intersecção, e operações algébricas de soma e multiplicação. Apesar disso, os conceitos de anel e álgebra de conjuntos não devem ser confundidos com os conceitos usuais de *anel* e de *álgebra* sobre os quais falaremos na Seção 2.1.6, página 103. A analogia a que nos referimos acima é a de que a operação de união de conjuntos disjuntos pode ser entendida como uma "soma" de conjuntos com um elemento neutro, a saber, o conjunto vazio (pois $A \cup \emptyset = A$ para qualquer conjunto A). O papel de "multiplicação" entre conjuntos seria exercido pela intersecção, onde o conjunto vazio seria o elemento nulo (pois sempre $A \cap \emptyset = \emptyset$). Fazemos notar que essa analogia não possui nenhuma relevância particular e o emprego de palavras como "anel" e "álgebra" no contexto de sistemas de conjuntos é, como ocorre com a maioria dos vocábulos, um resquício fóssil de ideias passadas.

1.2.1 Semi-Anéis de Conjuntos

Seja X um conjunto não-vazio. Uma coleção não-vazia $\mathfrak{S} \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X é dita ser um *semi-anel* em X se possuir as seguintes propriedades:

1. Se A e B pertencem à coleção $\mathfrak{S}$, então $A \cap B$ também pertence à coleção $\mathfrak{S}$.
2. Se A e B pertencem à coleção $\mathfrak{S}$, então existe um $n \in \mathbb{N}$ e uma coleção finita $\{C_a,\ a = 1,\ \ldots,\ n\}$, de elementos <u>disjuntos</u> de $\mathfrak{S}$ tais que $A \setminus B = \bigcup_{a=1}^{n} C_a$.

Vamos a alguns exemplos elementares. O estudante é suposto justificar as afirmações que seguem.

Exemplo 1.3 Sejam α, β e γ três objetos distintos (por exemplo, três letras distintas do alfabeto grego). Seja $X = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ e sejam

$$\mathfrak{S}_1 \ \equiv \ \Big\{\emptyset,\ \{\alpha\},\ \{\beta\},\ \{\gamma\},\ \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}\Big\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{S}_2 \ \equiv \ \Big\{\emptyset,\ \{\alpha\},\ \{\beta,\ \gamma\},\ \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}\Big\}\ .$$

Então $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ são semi-anéis em X. ⌑

Exemplo 1.4 Seja $X = \mathbb{R}$ e seja $\mathfrak{S}$ a coleção composta pelo vazio e por todos os intervalos semiabertos da forma $[a,\ b) \subset \mathbb{R}$ com $-\infty < a < b < \infty$. Então, $\mathfrak{S}$ é um semi-anel segundo a definição acima. ⌑

Exemplo 1.5 Seja $X = \mathbb{R}$ e seja $\mathfrak{S}$ a coleção composta pelo vazio e por todos os intervalos semiabertos da forma $[a,\ b) \subset \mathbb{R}$ com $-\infty < a < b \leq \infty$. Então, $\mathfrak{S}$ é um semi-anel segundo a definição acima. ⌑

[28]Felix Hausdorff (1868–1942).

Exemplo 1.6 O análogo dos exemplos acima, substituindo os intervalos da forma $[a,\ b)$ por intervalos da forma $(a,\ b]$. ⌑

Exemplo 1.7 Seja $X = \mathbb{R}^n$ e seja $\mathfrak{S}$ a coleção composta pelo vazio e por todos os hipercubos semiabertos da forma $[a_1,\ b_1) \times \cdots \times [a_n,\ b_n) \subset \mathbb{R}^n$ com $-\infty < a_j < b_j < \infty$ para todo $j = 1,\ \ldots,\ n$. Então $\mathfrak{S}$ é um semi-anel segundo a definição acima. ⌑

Exemplo 1.8 O mesmo que o exemplo anterior, permitindo-se aos b_j's serem infinitos. ⌑

Exemplo 1.9 O análogo aos dois exemplos anteriores, trocando-se alguns (ou todos) os intervalos $[a_j,\ b_j)$ por intervalos $(a_j,\ b_j]$. ⌑

1.2.2 Anéis de Conjuntos

Seja X um conjunto não-vazio. Uma coleção não-vazia $\mathfrak{R} \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X é dita ser um *anel* em X se possuir as seguintes propriedades:

1. Se A e B pertencem à coleção $\mathfrak{R}$, então $A \cup B$ também pertence à coleção $\mathfrak{R}$.
2. Se A e B pertencem à coleção $\mathfrak{R}$, então $A \setminus B$ também pertence à coleção $\mathfrak{R}$.

É de se observar que, pela definição acima, todo anel contém o conjunto vazio entre seus elementos, pois se $\mathfrak{R}$ é um anel e $A \in \mathfrak{R}$ valerá $\emptyset = A \setminus A \in \mathfrak{R}$.

Exemplo 1.10 Seja X um conjunto não-vazio. Então, as coleções de conjuntos $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset,\ X\}$ e $\mathbb{P}(X)$ são três exemplos (um tanto banais) de anéis em X. Justifique! ⌑

Todo anel em X é um semi-anel em X. Provemos essa afirmação. Para quaisquer conjuntos A e B vale $A \cap B = \big(A \cup B\big) \setminus \big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big)$ (vide (1.7)). Disso é evidente que $A \cap B \in \mathfrak{R}$ caso A e B sejam elementos de $\mathfrak{R}$. Isso estabelece a propriedade 1 da definição de semi-anel. A propriedade 2 é válida trivialmente, pois se $A,\ B \in \mathfrak{R}$, então $C_1 \equiv A \setminus B$ é um elemento de $\mathfrak{R}$ e, trivialmente, $A \setminus B = C_1 \in \mathfrak{R}$.

A recíproca da afirmação do último parágrafo não é sempre verdadeira: nem todo semi-anel é um anel, um exemplo sendo dado pelo semi-anel do Exercício 1.4, acima (justifique!).

A proposição a seguir contém duas propriedades básicas de anéis e também fornece uma possível caracterização alternativa da noção de anel.

Proposição 1.13 *Se X é um conjunto não-vazio, então uma coleção $\mathfrak{R} \subset \mathbb{P}(X)$ é um anel em X se e somente se para todos $A,\ B \in \mathfrak{R}$, valerem $A \cap B \in \mathfrak{R}$ e $A \triangle B \in \mathfrak{R}$.* □

Prova. Seja $\mathfrak{R}$ um anel em X e sejam $A,\ B \in \mathfrak{R}$. Como $A \cap B = \big(A \cup B\big) \setminus \big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big)$ (vide (1.7)) para quaisquer conjuntos A e B, segue que $A \cap B \in \mathfrak{R}$. Analogamente, como $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, também é válida para quaisquer conjuntos A e B (vide 1.6), segue que $A \triangle B \in \mathfrak{R}$.

Vamos agora supor que para todos $A',\ B' \in \mathfrak{R}$, valem $A' \cap B' \in \mathfrak{R}$ e $A' \triangle B' \in \mathfrak{R}$. Por (1.8) vale $A \cup B = \big(A \triangle B\big) \triangle \big(A \cap B\big)$, provando que $A \cup B \in \mathfrak{R}$ caso $A,\ B \in \mathfrak{R}$. Por (1.9), vale $A \setminus B = A \triangle \big(A \cap B\big)$, provando que $A \setminus B \in \mathfrak{R}$ caso $A,\ B \in \mathfrak{R}$. Isso estabeleceu que $\mathfrak{R}$ é um anel em X. ■

Segue diretamente das afirmações acima que um anel é fechado por uniões e intersecções finitas de seus elementos.

• Intersecções de anéis de conjuntos

Como antes, seja X um conjunto não-vazio e seja $\{\mathfrak{R}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de anéis em X. Aqui, o conjunto de índices Λ que indexa a coleção de anéis pode ser arbitrário, podendo não ser nem finito nem mesmo enumerável. Como cada $\mathfrak{R}_\lambda$ é um subconjunto de $\mathbb{P}(X)$, podemos considerar a intersecção de todas essas coleções de conjuntos: $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{R}_\lambda \subset \mathbb{P}(X)$.

Como todo anel contém o conjunto vazio, é claro que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{R}_\lambda$ é não-vazio (pois contém ao menos o conjunto vazio). O ponto importante para nós é a seguinte proposição:

Proposição 1.14 *Seja X um conjunto não-vazio e seja $\{\mathfrak{R}_\lambda, \ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de anéis em X. Então, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{R}_\lambda$ é também um anel em X.* □

Prova. Se A, B são elementos de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{R}_\lambda$, então ambos pertencem a cada anel $\mathfrak{R}_\lambda$. Logo, $A \cup B$ e $A \setminus B$ também pertencem a cada $\mathfrak{R}_\lambda$ e, portanto, a $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{R}_\lambda$. ■

O ponto central da demonstração acima é o fato de um anel ser definido como uma coleção de conjuntos fechada por certas operações de conjuntos, a saber, a união e a diferença. Como é fácil perceber, isso implica que como $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{R}_\lambda$ é não-vazio, será também fechado pelas mesmas operações. É de se notar que tal argumentação não se aplica a semi-anéis: os mesmos não são definidos em termos de uma coleção de conjuntos fechada por certas operações (isso fica claro ao contemplarmos o item 2 da definição de semi-anel). Com efeito, não é verdade que intersecções de semi-anéis sempre produzam novamente um semi-anel! O exemplo a seguir ilustra isso.

Exemplo 1.11 Considere os semi-anéis $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ do Exemplo 1.3, página 66. Tem-se $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = \Big\{\emptyset, \ \{\alpha\}, \ \{\alpha, \ \beta, \ \gamma\}\Big\}$, que não é um semi-anel, pois $\{\alpha, \ \beta, \ \gamma\} \setminus \{\alpha\} = \{\beta, \ \gamma\}$, que não pode ser escrito como união disjunta de elementos de $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$. ⌑

• **O anel gerado por uma coleção de conjuntos**

Como antes, seja X um conjunto não-vazio e seja $\mathfrak{C} \subset \mathbb{P}(X)$ uma coleção não-vazia de subconjuntos de X. Existe pelo menos um anel em X que contém $\mathfrak{C}$, a saber, $\mathbb{P}(X)$. Portanto, a intersecção de todos os anéis em X que contém $\mathfrak{C}$ é não-vazia, sendo também um anel em X (pela Proposição 1.14). Esse anel assim definido é o menor anel em X que contém $\mathfrak{C}$ e é denominado o *anel gerado* em X pela coleção de conjuntos $\mathfrak{C}$, sendo denotado por $\mathfrak{R}[\mathfrak{C}]$.

1.2.3 Álgebras de Conjuntos

Seja X um conjunto não-vazio. Uma coleção não-vazia $\mathfrak{A} \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X é dita ser uma *álgebra* em X se possuir as seguintes propriedades:

1. Se A e B pertencem à coleção $\mathfrak{A}$, então $A \cup B$ também pertence à coleção $\mathfrak{A}$.
2. Se $A \in \mathfrak{A}$, então $A^c \equiv X \setminus A$ também pertence à coleção $\mathfrak{A}$.

Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra em X e $A \in \mathfrak{A}$, então $\mathfrak{A} \ni A \cup A^c = X$. Assim, toda álgebra em X contém o próprio conjunto X. Como toda álgebra em X é um anel em X, contém também o conjunto vazio.

A seguinte proposição contém uma caracterização alternativa da noção de álgebra.

Proposição 1.15 *Seja X um conjunto não-vazio. Uma coleção não-vazia $\mathfrak{A} \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X é uma álgebra em X se e somente se for um anel em X e se $X \in \mathfrak{A}$.* □

Prova. A propriedade de ser fechado por uniões é comum a anéis e a álgebras. Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra em X e $A, \ B \in \mathfrak{A}$, teremos $A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$. Como $\mathfrak{A}$ é fechada por uniões e complementos, vemos por essa relação que $A \setminus B \in \mathfrak{A}$, provando que $\mathfrak{A}$ é um anel em X.

Reciprocamente, se $\mathfrak{R} \subset \mathbb{P}(X)$ é um anel em X e $X \in \mathfrak{R}$, então para todo $A \in \mathfrak{R}$ vale $\mathfrak{R} \ni X \setminus A \equiv A^c$, provando que $\mathfrak{R}$ é uma álgebra em X. ■

Exemplo 1.12 Seja X um conjunto não-vazio. Então, as coleções de conjuntos $\{\emptyset, \ X\}$ e $\mathbb{P}(X)$ são dois exemplos (um tanto banais) de álgebras em X. Justifique! ⌑

• **A álgebra gerada por uma coleção de conjuntos**

Como antes, seja X um conjunto não-vazio e seja $\{\mathfrak{A}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de álgebras em X. Aqui, o conjunto de índices Λ que indexa a coleção de álgebras pode ser arbitrário, podendo não ser nem finito nem mesmo enumerável. Notamos que a intersecção $\{\mathfrak{A}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ é não-vazia, pois, como comentamos, toda álgebra em X contém $\emptyset$ e X. Analogamente ao caso de anéis, vale a seguinte proposição:

Proposição 1.16 *Seja X um conjunto não-vazio e seja $\{\mathfrak{A}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de álgebras em X. Então, $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$ é também uma álgebra em X.* □

Prova. Se A, B são elementos de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$, então ambos pertencem a cada álgebra $\mathfrak{A}_\lambda$. Logo, $A \cup B$ e A^c também pertencem a cada $\mathfrak{A}_\lambda$ e, portanto, a $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$. ■

Novamente, o ponto central da demonstração acima é o fato de uma álgebra ser definida como uma coleção de conjuntos fechada por certas operações de conjuntos, a saber, a união e o complemento. Como é fácil perceber, isso implica que como $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$ é não-vazio, será também fechado pelas mesmas operações.

Como antes, seja X um conjunto não-vazio e seja $\mathfrak{C} \subset \mathbb{P}(X)$ uma coleção não-vazia de subconjuntos de X. Existe pelo menos uma álgebra em X que contém $\mathfrak{C}$, a saber, $\mathbb{P}(X)$. Portanto, a intersecção de todos as álgebras em X que contém $\mathfrak{C}$ é não-vazia, sendo também uma álgebra em X (pela Proposição 1.16). Essa álgebra assim definida é a menor álgebra em X que contém $\mathfrak{C}$ e é denominada a *álgebra gerada* em X pela coleção de conjuntos $\mathfrak{C}$, sendo denotada por $\mathfrak{A}[\mathfrak{C}]$.

1.2.4 σ-Anéis de Conjuntos

Seja X um conjunto não-vazio. Uma coleção não-vazia $\mathfrak{R}^\sigma \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X é dita ser um *σ-anel* em X se possuir as seguintes propriedades:

1. $\mathfrak{R}^\sigma$ é um anel em X.
2. Se $\{A_j \in \mathfrak{R}^\sigma,\ j \in \mathbb{N}\}$ for uma coleção enumerável de elementos de $\mathfrak{R}^\sigma$, então $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathfrak{R}^\sigma$.

Em palavras, podemos afirmar que um σ-anel é um anel que é também fechado por uniões enumeráveis de seus elementos.

Exemplo 1.13 Seja X um conjunto não-enumerável e seja $\mathfrak{R}^\sigma$ a coleção de todos os subconjuntos enumeráveis de X. Então, $\mathfrak{R}^\sigma$ é um σ-anel em X. Justifique! ⌑

Todo σ-anel $\mathfrak{R}^\sigma$ em X possui o conjunto vazio entre seus elementos (por ser um anel, vide comentário acima), mas não necessariamente contém X. Um σ-anel em X que contenha o próprio X é dito ser uma σ-álgebra em X.

Sobre a nomenclatura, o "σ" do nome "σ-anel" é usado em função da propriedade 2 da definição, que se refere ao fato de σ-anéis serem fechados em relação a operações envolvendo uniões ("σomas") enumeráveis de seus conjuntos. Aqui, o ponto importante é a enumerabilidade e, por isso, é frequente encontrar-se o símbolo σ em outros objetos matemáticos para os quais a enumerabilidade desempenha algum papel (como na noção de σ-álgebra, adiante, e como na topologia denominada σ-fraca, por exemplo).

A seguinte observação simples sobre σ-anéis será útil:

Proposição 1.17 *Se $\mathfrak{R}^\sigma$ é um σ-anel em X e $\{A_n \in \mathfrak{R}^\sigma,\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção contável de elementos de $\mathfrak{R}^\sigma$, então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}^\sigma$.* □

Prova. Isso segue facilmente da observação que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(A_1 \cap A_n\big) \;\stackrel{(1.4)}{=}\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big(A_1 \setminus \big(A_1 \setminus A_n\big)\Big) \;\stackrel{(1.18)}{=}\; A_1 \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(A_1 \setminus A_n\big)\right) \;\in\; \mathfrak{R}^\sigma \ ,$$

pela definição de σ-anel. ■

• **O σ-anel gerado por uma coleção de conjuntos**

Como antes, seja X um conjunto não-vazio e seja $\{\mathfrak{R}^\sigma_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de σ-anéis em X. Aqui, o conjunto de índices Λ que indexa a coleção de σ-anéis pode ser arbitrário, podendo não ser nem finito nem mesmo enumerável. Analogamente ao caso de anéis, vale a seguinte proposição:

Proposição 1.18 *Seja X um conjunto não-vazio e seja $\{\mathfrak{R}^\sigma_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de σ-aneis em X. Então, $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{R}^\sigma_\lambda$ é também um σ-anel em X.* □

Prova. Como cada $\mathfrak{R}^\sigma_\lambda$ é um anel, $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{R}^\sigma_\lambda$ é igualmente um anel, pela Proposição 1.14, página 68. Se $\{A_j, j \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção contável de elementos de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{R}^\sigma_\lambda$, então cada A_j pertence a cada σ-anel $\mathfrak{R}^\sigma_\lambda$. Logo, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ também pertence a cada $\mathfrak{R}^\sigma_\lambda$ e, portanto, a $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}^\sigma_\lambda$. ■

Como antes, seja X um conjunto não-vazio e seja $\mathfrak{C} \subset \mathbb{P}(X)$ uma coleção não-vazia de subconjuntos de X. Existe pelo menos um σ-anel em X que contém $\mathfrak{C}$, a saber, $\mathbb{P}(X)$. Portanto, a intersecção de todos os σ-anéis em X que contém $\mathfrak{C}$ é não-vazia, sendo também um σ-anel em X (pela Proposição 1.18). Esse σ-anel assim definido é o menor σ-anel em X que contém $\mathfrak{C}$ e é denominado o *σ-anel gerado* em X pela coleção de conjuntos $\mathfrak{C}$, sendo denotado por $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{C}]$.

1.2.5 σ-Álgebras de Conjuntos

Seja X um conjunto não-vazio. Uma coleção não-vazia $\mathfrak{A}^\sigma \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X é dita ser um *σ-álgebra* em X se possuir as seguintes propriedades:

1. $\mathfrak{A}^\sigma$ é um σ-anel em X.
2. $X \in \mathfrak{A}^\sigma$.

Por ser um σ-anel, toda σ-álgebra contém o conjunto vazio entre seus elementos. Toda σ-álgebra em X é uma álgebra em X. De fato, se $\mathfrak{A}^\sigma$ é uma σ-álgebra em X, então $\mathfrak{A}^\sigma$ é um anel em X (por ser um σ-anel em X) e contém X. Logo, pela Proposição 1.15, página 68, $\mathfrak{A}^\sigma$ é uma álgebra em X.

De posse dessas observações, podemos apresentar a definição da noção de σ-álgebra sobre X da seguinte forma. Uma coleção $\mathfrak{A}^\sigma$ de subconjuntos de X, ou seja, $\mathfrak{A}^\sigma \subset \mathbb{P}(X)$, é dita ser uma *$\sigma$-álgebra* em X se os seguintes requisitos forem satisfeitos:

1. $\emptyset \in \mathfrak{A}^\sigma$ e $X \in \mathfrak{A}^\sigma$.
2. Se $A \in \mathfrak{A}^\sigma$, então $A^c \equiv X \setminus A \in \mathfrak{A}^\sigma$.
3. Se $\{A_j \in \mathfrak{A}^\sigma,\ j \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção enumerável de elementos de $\mathfrak{A}^\sigma$, então $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j$ também é um elemento de $\mathfrak{A}^\sigma$.

Exemplo 1.14 Seja X um conjunto não-vazio. Então, as coleções de conjuntos $\{\emptyset,\ X\}$ e $\mathbb{P}(X)$ são dois exemplos (um tanto banais) de σ-álgebras em X. Justifique! ⌑

Exemplo 1.15 Seja X um conjunto enumerável e seja $\mathfrak{A}^\sigma$ a coleção de todos os subconjuntos enumeráveis de X. Então, $\mathfrak{A}^\sigma$ é um σ-álgebra em X. Justifique! ⌑

A seguinte observação simples sobre σ-álgebras será útil:

Proposição 1.19 *Se $\mathfrak{A}^\sigma$ é uma σ-álgebra em X e $\{A_n \in \mathfrak{A}^\sigma,\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção contável de elementos de $\mathfrak{A}^\sigma$, então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}^\sigma$.* □

Prova. Isso segue facilmente da observação que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \stackrel{(1.22)}{=} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c \in \mathfrak{A}^\sigma ,$$

pela definição de σ-álgebra. ■

• **A σ-álgebra gerada por uma coleção de conjuntos**

Como antes, seja X um conjunto não-vazio e seja $\{\mathfrak{A}^\sigma_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de σ-álgebras em X. Aqui, o conjunto de índices Λ que indexa a coleção de σ-álgebras pode ser arbitrário, podendo não ser nem finito nem mesmo enumerável. Notamos que a intersecção $\{\mathfrak{A}^\sigma_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ é não-vazia, pois, como comentamos, toda σ-álgebra em X contém $\emptyset$ e X. Analogamente ao caso de anéis, vale a seguinte proposição:

Proposição 1.20 *Seja X um conjunto não-vazio e seja $\{\mathfrak{A}^\sigma_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de σ-álgebras em X. Então, $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}^\sigma_\lambda$ é também uma σ-álgebra em X.* □

Prova. Se $\{A_j, j \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção contável de elementos de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}^\sigma_\lambda$, então cada A_j pertence a cada σ-álgebra $\mathfrak{A}^\sigma_\lambda$. Logo, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ também pertence a cada $\mathfrak{A}^\sigma_\lambda$ e, portanto, a $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}^\sigma_\lambda$. Analogamente, se $A \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}^\sigma_\lambda$, então A pertence a cada $\mathfrak{A}^\sigma_\lambda$ e, portanto, A^c também. Logo, $A^c \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}^\sigma_\lambda$. ■

Novamente, o ponto central da demonstração acima é o fato de uma σ-álgebra ser definida como uma coleção de conjuntos fechada por certas operações de conjuntos, a saber, a união e o complemento. Como é fácil perceber, isso implica que como $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$ é não-vazio, será também fechado pelas mesmas operações.

Como antes, seja X um conjunto não-vazio e seja $\mathfrak{C} \subset \mathbb{P}(X)$ uma coleção não-vazia de subconjuntos de X. Existe pelo menos uma σ-álgebra em X que contém $\mathfrak{C}$, a saber, $\mathbb{P}(X)$. Portanto, a intersecção de todas as σ-álgebras em X que contém $\mathfrak{C}$ é não-vazia, sendo também uma σ-álgebra em X (pela Proposição 1.20). Essa σ-álgebra assim definida é a menor σ-álgebra em X que contém $\mathfrak{C}$ e é denominada a *σ-álgebra gerada* em X pela coleção de conjuntos $\mathfrak{C}$, sendo denotada por $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{C}]$.

* * *

Assim como a noção de topologia, a noção de σ-álgebra desempenha um papel central em Análise, especialmente na Teoria da Medida e Integração e na Teoria das Probabilidades. Por essa razão, seu estudo será aprofundado no Capítulo 27, página 1336, e seguintes.

* ** *

Ao apresentarmos as diversas definições acima observamos repetidamente que certos tipos de sistemas de conjuntos são casos particulares de outros, por exemplo, observamos que todo anel é um semi-anel, que toda álgebra é um anel etc. O seguinte quadro reúne essas observações de forma autoexplicativa:

$$\begin{array}{ccccc} \text{álgebras} & \subset & \text{anéis} & \subset & \text{semi-anéis} \\ \cup & & \cup & & \\ \sigma\text{-álgebras} & \subset & \sigma\text{-anéis} & & \end{array} .$$

1.2.6 Sistemas Monótonos de Conjuntos

Seja X um conjunto não-vazio. Uma coleção contável $\{A_n \subset X,\ n \in \mathbb{N}\}$ é dita ser crescente se $A_n \subset A_m$ sempre que $n \leq m$ e, nesse caso, temos

$$\lim_{n\to\infty} A_n \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \ .$$

Vide Proposição 1.12, página 65. Analogamente, uma coleção contável $\{A_n \subset X,\ n \in \mathbb{N}\}$ é dita ser decrescente se $A_n \supset A_m$ sempre que $n \leq m$ e, nesse caso, temos

$$\lim_{n\to\infty} A_n \;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \ .$$

Seja X um conjunto não-vazio. Uma coleção não-vazia $\mathsf{C} \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X é dita ser um *sistema monótono crescente* (ou uma *classe monótona crescente*) de subconjuntos de X se para toda coleção contável crescente $\{A_n \in \mathsf{C},\ n \in \mathbb{N}\}$ valer também que $\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathsf{C}$, ou seja, valer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathsf{C}$.

Seja X um conjunto não-vazio. Uma coleção não-vazia $\mathsf{D} \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X é dita ser um *sistema monótono decrescente* (ou uma *classe monótona decrescente*) de subconjuntos de X se para toda coleção contável decrescente $\{A_n \in \mathsf{D},\ n \in \mathbb{N}\}$ valer também que $\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathsf{D}$, ou seja, valer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathsf{D}$.

Uma coleção não-vazia $\mathsf{M} \subset \mathbb{P}(X)$ é dita ser um *sistema monótono* (ou *classe monótona*) de subconjuntos de X se for simultameamente um sistema monótono crescente e decrescente.

• O sistema monótono gerado por uma coleção de conjuntos

É elementar constatar que $\mathbb{P}(X)$ é um sistema monótono em X. Com isso, vê-se que toda coleção de subconjuntos de X está contida em um sistema monótono em X (no pior dos casos, em $\mathbb{P}(X)$).

Observemos agora que se $\{\mathsf{M}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ é uma coleção de sistemas monótonos em X, então $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{M}_\lambda$ é também um sistema monótono em X. De fato, se $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ for uma coleção crescente ou decrescente de subconjuntos de X tal que para todo $\lambda \in \Lambda$ vale $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathsf{M}_\lambda$, então $\lim_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathsf{M}_\lambda$ também para todo $\lambda \in \Lambda$. Ora, isso diz que se $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{M}_\lambda$, então $\lim_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{M}_\lambda$, estabelecento a afirmação desejada.

Com as observações dos dois últimos parágrafos podemos constituir a noção de *sistema monótono gerado por uma coleção de conjuntos*: se $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X)$ é uma coleção de subconjuntos de X, definimos $\mathsf{M}[\mathcal{A}]$, como sendo a intersecção de todos os sistemas monótonos que contém a coleção $\mathcal{A}$. Claro está que $\mathsf{M}[\mathcal{A}]$ é igualmente um sistema monótono, o menor sistema monótono que contém $\mathcal{A}$, denominado o *sistema monótono gerado por* $\mathcal{A}$.

• Relação entre sistemas monótonos, anéis, álgebras, σ-anéis e σ-álgebras

Temos o seguinte resultado:

Proposição 1.21 *Seja X não-vazio. Se um anel de conjuntos $\mathfrak{R}$ em X é um sistema monótono em X, então é um σ-anel em X. Se uma álgebra de conjuntos $\mathfrak{A}$ em X é um sistema monótono em X, então é uma σ-álgebra em X.* □

Prova. Seja $\mathfrak{R}$ um anel e $\{A_n \in \mathfrak{R},\ n \in \mathbb{N}\}$ uma coleção enumerável de elementos de $\mathfrak{R}$. Defina-se $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$, $n \in \mathbb{N}$. Trata-se de uma coleção crescente de elementos de $\mathfrak{R}$. Assim, como $\mathfrak{R}$ é um sistema monótono, $\lim_{n\to\infty} B_n$ é um elemento de $\mathfrak{R}$. Porém, $\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Assim, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{R}$, provando que $\mathfrak{R}$ é um σ-anel.

A demostração de que álgebras que sejam sistemas monótonos são σ-álgebras é idêntica. ■

Existem pelo menos tantos sistemas monótonos quanto σ-álgebras ou σ-anéis:

Proposição 1.22 *Seja X não-vazio. Se uma coleção de conjuntos $\mathfrak{A} \subset \mathbb{P}(X)$ é um σ-anel ou uma σ-álgebra em X, então $\mathfrak{A}$ é um sistema monótono em X.* □

Prova. É claro pela definição que todo σ-anel em X é um sistema monótono crescente em X e, pela Proposição 1.17, página 69, é também um sistema monótono decrescente em X. É claro pela definição que toda σ-álgebra em X é um sistema monótono crescente em X e, pela Proposição 1.19, página 71, é também um sistema monótono decrescente em X. ■

• O Teorema das Classes Monótonas

O teorema a seguir tem consequências importantes na Teoria da Medida e Integração, especialmente no que concerne a extensões de certas medidas.

Proposição 1.23 (Teorema das Classes Monótonas) Parte I. *Seja X não-vazio e $\mathfrak{R}$ um anel em X. Então, vale*

$$\mathfrak{R}^{\sigma}[\mathfrak{R}] \; = \; \mathsf{M}[\mathfrak{R}] \, , \tag{1.33}$$

ou seja, o σ-anel gerado por um anel $\mathfrak{R}$ coincide com o sistema monótono gerado por $\mathfrak{R}$.

Parte II. *Seja X não-vazio e $\mathfrak{A}$ uma álgebra em X. Então, vale*

$$\mathfrak{A}^{\sigma}[\mathfrak{A}] \; = \; \mathsf{M}[\mathfrak{A}] \; = \; \mathfrak{R}^{\sigma}[\mathfrak{A}] \, ,$$

ou seja, a σ-ágebra gerada por uma álgebra $\mathfrak{A}$ coincide com o sistema monótono gerado por $\mathfrak{A}$ e também com o σ-anel gerado por $\mathfrak{A}$. □

Na demonstração abaixo, seguiremos proximamente a argumentação de [165], acrescentando e elucidando certos detalhes.

Prova da Parte I. Como $\mathfrak{R}^{\sigma}[\mathfrak{R}]$ é um σ-anel, é um sistema monótono (Proposição 1.22, página 72). Como é um sistema monótono que contém $\mathfrak{R}$, tem-se que $\mathsf{M}[\mathfrak{R}] \subset \mathfrak{R}^{\sigma}[\mathfrak{R}]$.

Desejamos provar que $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ é um σ-anel, pois sendo um σ-anel que contém $\mathfrak{R}$, valerá $\mathfrak{R}^{\sigma}[\mathfrak{R}] \subset \mathsf{M}[\mathfrak{R}]$, pela definição do σ-anel gerado $\mathfrak{R}^{\sigma}[\mathfrak{R}]$. Pela Proposição 1.21, página 72, é suficiente para tal provar que $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ é um anel, que é o que faremos no que segue.

Para $Y \subset X$, defina-se o seguinte sistema de conjuntos:

$$\mathfrak{H}(Y) \; := \; \left\{ Z \subset X \middle| \; Z \setminus Y \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}], \;\; Y \setminus Z \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}] \;\; \text{e} \;\; Y \cup Z \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}] \right\} . \tag{1.34}$$

É evidente pela simetria na definição acima que

$$A \in \mathfrak{H}(B) \iff B \in \mathfrak{H}(A) \, . \tag{1.35}$$

Afirmamos que $\mathfrak{H}(Y)$ é um sistema monótono para cada $Y \subset X$. Isso é provado após os seguintes passos:

1. Se $\{Z_n \in \mathfrak{H}(Y), \; n \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção crescente de elementos de $\mathfrak{H}(Y)$, teremos:

   (a)
$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \right) \setminus Y \overset{(1.19)}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(Z_n \setminus Y \big) \;\; \in \;\; \mathsf{M}[\mathfrak{R}] \, , \tag{1.36}$$

   pois $\{Z_n \setminus Y, \; n \in \mathbb{N}\}$ é crescente e cada $Z_n \setminus Y$ é elemento de $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ (vide a definição de $\mathfrak{H}(Y)$ em (1.34)).

   (b)
$$Y \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \right) \overset{(1.18)}{=} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(Y \setminus Z_n \big) \;\; \in \;\; \mathsf{M}[\mathfrak{R}] \, , \tag{1.37}$$

   pois $\{Y \setminus Z_n, \; n \in \mathbb{N}\}$ é decrescente e cada $Y \setminus Z_n$ é elemento de $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$.

   (c)
$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \right) \cup Y \overset{(1.21)}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(Z_n \cup Y \big) \;\; \in \;\; \mathsf{M}[\mathfrak{R}] \, , \tag{1.38}$$

   pois $\{Z_n \cup Y, \; n \in \mathbb{N}\}$ é crescente e cada $Z_n \cup Y$ é elemento de $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$.

As relações de pertinência (1.36)–(1.38) afirmam que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathfrak{H}(Y)$, provando que $\mathfrak{H}(Y)$ é um sistema monótono crescente.

2. Se $\{Z_n \in \mathfrak{H}(Y),\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção decrescente de elementos de $\mathfrak{H}(Y)$, teremos:

(a)

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n\right) \setminus Y \stackrel{(1.19)}{=} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(Z_n \setminus Y\big) \ \in \ \mathsf{M}[\mathfrak{R}] , \tag{1.39}$$

pois $\{Z_n \setminus Y,\ n \in \mathbb{N}\}$ é decrescente e cada $Z_n \setminus Y$ é elemento de $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ (vide a definição de $\mathfrak{H}(Y)$ em (1.34)).

(b)

$$Y \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n\right) \stackrel{(1.18)}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(Y \setminus Z_n\big) \ \in \ \mathsf{M}[\mathfrak{R}] , \tag{1.40}$$

pois $\{Y \setminus Z_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é crescente e cada $Y \setminus Z_n$ é elemento de $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$.

(c)

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n\right) \cup Y \stackrel{(1.20)}{=} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(Z_n \cup Y\big) \ \in \ \mathsf{M}[\mathfrak{R}] , \tag{1.41}$$

pois $\{Z_n \cup Y,\ n \in \mathbb{N}\}$ é decrescente e cada $Z_n \cup Y$ é elemento de $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$.

As relações de pertinência (1.39)–(1.41) afirmam que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathfrak{H}(Y)$, provando que $\mathfrak{H}(Y)$ é um sistema monótono decrescente.

Isso estabeleceu que se $\{Z_n \in \mathfrak{H}(Y),\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção crescente ou decrescente de elementos de $\mathfrak{H}(Y)$ seu limite estará em $\mathfrak{H}(Y)$, o que prova que $\mathfrak{H}(Y)$ é um sistema monótono.

Vamos agora provar que para todo $A' \in \mathfrak{R}$ vale

$$\mathsf{M}[\mathfrak{R}] \ \subset \ \mathfrak{H}(A') . \tag{1.42}$$

Se $A',\ B \in \mathfrak{R}$, valem, pela propriedade de anel $A' \setminus B \in \mathfrak{R}$, $B \setminus A' \in \mathfrak{R}$ e $A' \cup B \in \mathfrak{R}$. Logo, $A' \in \mathfrak{H}(B)$ e $B \in \mathfrak{H}(A')$. Como a última relação de pertinência é válida para todo $B \in \mathfrak{R}$, concluímos que

$$\mathfrak{R} \ \subset \ \mathfrak{H}(A') .$$

Como $\mathfrak{H}(A')$ é um sistema monótono, deve valer também

$$\mathsf{M}[\mathfrak{R}] \ \subset \ \mathfrak{H}(A') ,$$

como queríamos mostrar, pois $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ é, por definição, o menor sistema monótono que contém $\mathfrak{R}$.

Vamos agora estender esse pequeno resultado e provar que para todo $A \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ vale

$$\mathsf{M}[\mathfrak{R}] \ \subset \ \mathfrak{H}(A) . \tag{1.43}$$

Se $A \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ e $A' \in \mathfrak{R}$, (1.42) garante que $A \in \mathfrak{H}(A')$. Logo, por (1.35), vale também $A' \in \mathfrak{H}(A)$. Como isso é verdadeiro para todo $A' \in \mathfrak{R}$, estabelecemos que

$$\mathfrak{R} \ \subset \ \mathfrak{H}(A) .$$

Como $\mathfrak{H}(A)$ é um sistema monótono, isso implica que

$$\mathsf{M}[\mathfrak{R}] \ \subset \ \mathfrak{H}(A) ,$$

como queríamos mostrar, pois $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ é, por definição, o menor sistema monótono que contém $\mathfrak{R}$.

Com isso, podemos finalmente atingir nosso objetivo de provar que $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ é um anel. Como (1.43) vale para todo $A \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}]$, concluímos de (1.43) e da definição de $\mathfrak{H}(A)$ que para todo $B \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ valem

$$B \setminus A \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}], \quad A \setminus B \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}] \ \text{ e } \ A \cup B \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}] .$$

Como isso é válido para todos $A, B \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}]$, concluímos que $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ é um anel. Isso completou a prova da Parte I.

Prova da Parte II. Pela Proposição 1.15, página 68, $\mathfrak{A}$ é um anel e $X \in \mathfrak{A}$. Como $\mathfrak{A}$ é um anel, a Parte I garante que $\mathsf{M}[\mathfrak{A}] = \mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{A}]$. Observe-se agora que se $X \in \mathfrak{A}$, então $X \in \mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{A}]$. Logo, $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{A}]$ é uma σ-álgebra (vide a definição de σ-álgebra à página 70). Isso implica que $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{A}] \subset \mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{A}]$, pois $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{A}]$ é, por definição, a menor σ-álgebra que contém $\mathfrak{A}$. No entanto, como a σ-álgebra $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{A}]$ é, também por definição, um σ-anel, segue igualmente que $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{A}] \subset \mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{A}]$, pois $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{A}]$ é, por definição, o menor σ-anel que contém $\mathfrak{A}$. Isso provou que $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{A}] = \mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{A}]$, completando a demonstração. ■

1.2.7 Topologias

As topologias formam, sem dúvida, o tipo mais importante de sistemas de conjuntos e a elas são dedicados o Capítulo 27, página 1336, e seguintes. Sua relevância estende-se por toda a Matemática. O que segue é um brevíssimo resumo de definições, pois mais desenvolvimentos, exemplos e motivações serão detalhados nos referidos capítulos. Para um texto dedicado à história da Topologia, vide [199].

Uma coleção τ de subconjuntos de X, ou seja, $\tau \subset \mathbb{P}(X)$, é dito ser uma *topologia* em X se os seguintes requisitos forem satisfeitos:

1. $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$.
2. Se $A \in \tau$ e $B \in \tau$, então $A \cap B \in \tau$.
3. Se I é um conjunto arbitrário de índices e $A_\lambda \in \tau$ para todo $\lambda \in I$ então $\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$ também é um elemento de τ.

Dois exemplos elementares de topologias em X são as coleções $\{\emptyset, X\}$ (a chamada topologia trivial, ou indiscreta) e $\mathbb{P}(X)$, a chamada topologia discreta. Para mais exemplos, vide Capítulo 27, página 1336.

Os elementos de uma topologia τ são denominados *conjuntos τ-abertos*, ou simplesmente *abertos*, e um par (X, τ) composto por X e por uma topologia em X é dito ser um *espaço topológico*. Se um subconjunto $F \subset X$ é tal que $F^c \in \tau$, então F é dito ser um *conjunto fechado*, ou τ-fechado.

• Conjuntos τ-fechados

Sejam X um conjunto e τ uma topologia em X. Denotemos por $\mathcal{F}(\tau)$ a coleção de todos os conjuntos τ-fechados de X, ou seja, a coleção de todos os conjuntos F de X tais que F^c é um τ-aberto. A coleção $\mathcal{F}(\tau)$ possui uma série de propriedades especiais:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}(\tau)$ e $X \in \mathcal{F}(\tau)$.
2. Se $F \in \mathcal{F}(\tau)$ e $G \in \mathcal{F}(\tau)$, então $F \cup G \in \mathcal{F}(\tau)$.
3. Se I é um conjunto arbitrário de índices e $F_\lambda \in \mathcal{F}(\tau)$ para todo $\lambda \in I$, então $\bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda$ também é um elemento de $\mathcal{F}(\tau)$.

• A topologia gerada por uma coleção de conjuntos

Também para topologias vale o seguinte resultado, já descrito anteriormente para o caso de anéis, álgebras e σ-álgebras.

Proposição 1.24 *Seja X um conjunto não-vazio e seja $\{\tau_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de topologias em X. Então $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$ é também uma topologia em X.* □

A proposição acima encontra-se enunciada e demonstrada como a Proposição 27.1 da página 1342. Uma de suas consequências é a seguinte observação, que fornece o análogo para topologias das noções de anel gerado, de álgebra gerada e de σ-álgebra gerada, das quais falamos acima. Seja $\mathcal{A}$ uma coleção qualquer de subconjuntos de X. Considere a coleção de todas as topologias que contém $\mathcal{A}$ como um subconjunto. Tal coleção não é vazia, pois $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X)$ e $\mathbb{P}(X)$ é uma topologia. Como vimos na Proposição 1.24, a intersecção de todas essas topologias que contém $\mathcal{A}$ é também uma topologia, a qual denotaremos por $\tau[\mathcal{A}]$. A topologia $\tau[\mathcal{A}]$ é chamada de *topologia gerada por* $\mathcal{A}$.

1.2.8 Filtros e Ultrafiltros

A noção de filtro foi introduzida por H. Cartan[29] em 1937[30] e desempenha um papel relevante em diversas áreas, como, por exemplo, na Topologia (onde é empregada na demonstração do célebre Teorema de Tikhonov[31]) e mesmo na Lógica Matemática.

• **Filtros**

Seja X um conjunto não-vazio. Uma coleção $\mathfrak{F} \subset \mathbb{P}(X)$ é dita ser um *filtro* em X se satisfizer as seguintes condições:

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ mas $X \in \mathfrak{F}$.
2. Se $A, B \in \mathfrak{F}$, então $A \cap B \in \mathfrak{F}$.
3. Se $A \in \mathfrak{F}$ e $B \supset A$, então $B \in \mathfrak{F}$.

Note-se que os itens 1 e 2 informam-nos que se $\mathfrak{F}$ é um filtro em X e $A, B \in \mathfrak{F}$, então $A \cap B \neq \emptyset$. Dentre os exemplos mais simples de filtros encontram-se os listados nos exercícios que seguem.

E. 1.56 *Exercício*. Seja X um conjunto não-vazio e seja $Y \subset X$, também não-vazio. Mostre que a coleção $\mathfrak{F}_Y$ de todos os conjuntos de X que contém Y como subconjunto (ou seja, $\mathfrak{F}_Y|defi\{A \subset X|\ A \supset Y\}$) é um filtro em X. ✠

E. 1.57 *Exercício*. Seja X um conjunto infinito e $\mathfrak{F}$ a coleção de todos os conjuntos $F \subset X$ tais que $F^c \equiv X \setminus F$ seja finito. Mostre que $\mathfrak{F}$ é um filtro (denominado *filtro de Fréchet*[32]). ✠

• **Ultrafiltros**

Um *ultrafiltro* em X é um filtro em X que não está contido propriamente em nenhum outro filtro em X. Em muitos sentidos a noção de ultrafiltro é mais relevante que a de filtro.

Como filtros em X são subconjuntos de $\mathbb{P}(X)$, os mesmos podem ser ordenados (parcialmente) por inclusão. Ultrafiltros são, portanto, elementos maximais de $\mathbb{P}(X)$ por esse ordenamento parcial. Dada uma família linearmente ordenada de filtros em X, $\{\mathfrak{F}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$, é elementar demonstrar que a união de todos os filtros que a compõem, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{F}_\lambda$, é igualmente um filtro em X e que contém cada um dos filtros da família em questão. Uma consequência imediata dessa observação e do Lema de Kuratowski-Zorn, Lema 1.1, página 58, é que todo filtro em X está contido em um ultrafiltro em X.

A Proposição 1.25 contém uma afirmação fundamental sobre ultrafiltros: um filtro $\mathfrak{F}$ em X é um ultrafiltro em X se e somente se a seguinte propriedade for válida: para todo $A \subset X$, ou vale que $A \in \mathfrak{F}$ ou que $X \setminus A \in \mathfrak{F}$.

Para sua demonstração faremos uso do lema e corolário seguintes:

Lema 1.2 *Seja X um conjunto não-vazio e seja $\mathfrak{F}$ um filtro em X. Suponhamos que exista $A \subset X$ tal que $A \notin \mathfrak{F}$ e tal que $A \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathfrak{F}$. Então, a coleção de conjuntos dada por $\mathfrak{G} := \{B \cap F|\ B \subset X$ com $B \supset A$ e $F \in \mathfrak{F}\}$ é um filtro em X. Além disso, $\mathfrak{G}$ contém $\mathfrak{F}$ propriamente e contém A, ou seja, valem $\mathfrak{F} \subsetneq \mathfrak{G}$ e $A \in \mathfrak{G}$.* □

Prova. Seja $\mathfrak{F}$ um filtro em X e seja $A \subset X$ tal que $A \notin \mathfrak{F}$ e tal que $A \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathfrak{F}$.

Seja $\mathfrak{G}$ a coleção de todos os conjuntos da forma $B \cap F$, onde B é um conjunto de X que contém A e F é um elemento de $\mathfrak{F}$, ou seja, $\mathfrak{G} := \{B \cap F|\ B \subset X$ com $B \supset A$ e $F \in \mathfrak{F}\}$. Afirmamos que $\mathfrak{G}$ é um filtro. Para provar isso, observemos

[29] Henri Cartan (1904–2008).
[30] H. Cartan, "Théorie des filtres", Comptes Rendus Acad. Paris, **205**, 595–598 (1937), e "Filtres et ultrafiltres", Comptes Rendus Acad. Paris, **205**, 777–779 (1937).
[31] Andrei Nikolaevich Tikhonov (1906–1993).
[32] Maurice René Fréchet (1878–1973).

em primeiro lugar que se $B \supset A$ e $F \in \mathfrak{F}$, então $B \cap F \supset A \cap F \neq \emptyset$, o que prova que $\emptyset \notin \mathfrak{G}$. Analogamente, $X \in \mathfrak{G}$, pois $X = X \cap X$, sendo que $X \supset A$ e $X \in \mathfrak{F}$. Em segundo lugar, observemos que se $B \supset A$, $B' \supset A$ e $F,\ F' \in \mathfrak{F}$, teremos que $(B \cap F) \cap (B' \cap F') = (B \cap B') \cap (F \cap F') \in \mathfrak{G}$, pois $B \cap B' \supset A$ e pois $F \cap F' \in \mathfrak{F}$. Em terceiro lugar, se $B \supset A$, $F \in \mathfrak{F}$ e $H \subset X$ é tal que $B \cap F \subset H$, então vale que $H = (B \cup H) \cap (F \cup H)$[33]. Como $B \cup H \supset A$ e $F \cup H \in \mathfrak{F}$ (pois $F \cup H \supset F$), concluímos que $H \in \mathfrak{G}$.

Afirmamos agora que $A \in \mathfrak{G}$. Isso é trivial, pois $A = A \cap X$, sendo que $A \subset A$ e $X \in \mathfrak{F}$. Por fim, afirmamos que $\mathfrak{F}$ é um subconjunto próprio de $\mathfrak{G}$, ou seja, $\mathfrak{F} \subsetneqq \mathfrak{G}$. De fato, se $F \in \mathfrak{F}$, então $F = X \cap F$, sendo que, obviamente, $X \supset A$. Isso provou que $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, mas recordando que $A \in \mathfrak{G}$ com $A \notin \mathfrak{F}$, estabelecemos que $\mathfrak{F} \subsetneqq \mathfrak{G}$. ■

Corolário 1.1 *Seja X um conjunto não-vazio e seja $\mathfrak{U}$ um ultrafiltro em X. Se $A \subset X$ é tal que $A \notin \mathfrak{U}$, então existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que $A \cap U = \emptyset$.* □

Prova. Se valesse $A \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathfrak{U}$, poderíamos evocar o Lema 1.2 e construir um filtro em X que contém $\mathfrak{U}$ propriamente, contradizendo a hipótese que $\mathfrak{U}$ é um ultrafiltro. ■

Proposição 1.25 *Seja X um conjunto não-vazio e seja $\mathfrak{F}$ um filtro em X. Então, $\mathfrak{F}$ é um ultrafiltro em X se e somente se a seguinte propriedade for válida: para todo $A \subset X$, ou vale que $A \in \mathfrak{F}$ ou que $X \setminus A \in \mathfrak{F}$.* □

Prova. *Parte 1.* Provaremos que se $\mathfrak{F}$ é um ultrafiltro, então para todo $A \subset X$, ou vale que $A \in \mathfrak{F}$ ou que $X \setminus A \in \mathfrak{F}$.

A prova é feita por absurdo. Suponhamos que $A \subset X$ fosse tal que $A \notin \mathfrak{F}$ e que $A^c \equiv X \setminus A \notin \mathfrak{F}$. Pelo Corolário 1.1, existiriam $F_1,\ F_2 \in \mathfrak{F}$ tais que $A \cap F_1 = \emptyset$ e que $A^c \cap F_2 = \emptyset$. Naturalmente, teríamos também $A \cap (F_1 \cap F_2) = \emptyset$ e $A^c \cap (F_1 \cap F_2) = \emptyset$. Logo, valeria

$$\emptyset \ = \ \Big(A \cap (F_1 \cap F_2)\Big) \cup \Big(A^c \cap (F_1 \cap F_2)\Big) \ = \ (A \cup A^c) \cap (F_1 \cap F_2) \ = \ X \cap (F_1 \cap F_2) \ = \ F_1 \cap F_2 \ .$$

Agora, a afirmação que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ com $F_1,\ F_2 \in \mathfrak{F}$ contradiz a hipótese de que $\mathfrak{F}$ é um filtro, demonstrando, assim, a afirmação desejada.

Parte 2. Provaremos que se $\mathfrak{F}$ é um filtro, e possui a propriedade que $A \subset X$, ou vale que $A \in \mathfrak{F}$ ou que $X \setminus A \in \mathfrak{F}$, então $\mathfrak{F}$ é um ultrafiltro.

Novamente a prova é feita por absurdo. Se um tal $\mathfrak{F}$ não fosse um ultrafiltro, então estaria contido propriamente em um filtro $\mathfrak{U}$. Assim, existe um conjunto $A \subset X$ tal que $A \in \mathfrak{U}$, mas com $A \notin \mathfrak{F}$ (pois $\mathfrak{F} \subsetneqq \mathfrak{U}$). Pela hipótese, como $A \notin \mathfrak{F}$, deve valer que $A^c \in \mathfrak{F}$ e, portanto, que $A^c \in \mathfrak{U}$, pois $\mathfrak{F}$ é um subconjunto de $\mathfrak{U}$. Assim, estabelecemos que $A \in \mathfrak{U}$ e $A^c \in \mathfrak{U}$, o que é absurdo, pois como $\mathfrak{U}$ é um filtro, deve valer que $\emptyset = A \cap A^c \in \mathfrak{U}$, contradizendo o postulado de que um filtro não contém o conjunto vazio. Logo, $\mathfrak{F}$ não pode estar contido propriamente em um filtro, ou seja, $\mathfrak{F}$ é um ultrafiltro. ■

A Proposição 1.25 permite-nos apresentar um exemplo elementar de ultrafiltro.

Exemplo 1.16 Sejam X não-vazio e $x \in X$. Seja $\mathfrak{U}_x = \{U \subset X |\ x \in U\} = \{U \subset X |\ U \supset \{x\}\}$. Pelo Exercício E. 1.56, página 76, $\mathfrak{U}_x$ é um filtro. Agora, dado $A \subset X$, ou tem-se que $x \in A$ ou que $x \in A^c$, ou seja, ou vale que $A \in \mathfrak{U}_x$ ou que $A^c \in \mathfrak{U}_x$. Pela Proposição 1.25, segue que $\mathfrak{U}_x$ é um ultrafiltro. ⌑

[33] Para ver que $H = (B \cup H) \cap (F \cup H)$ caso $B \cap F \subset H$, note que, por um lado

$$H \ = \ H \cup H \ = \ (H \cup (H \cap F)) \cup H \ \supset \ ((B \cap F) \cup (H \cap F)) \cup H \ = \ ((B \cup H) \cap F) \cup H \ = \ ((B \cup H) \cap F) \cup ((B \cup H) \cap H) \ = \ (B \cup H) \cap (F \cup H)$$

e, por outro lado, $H = H \cap H = (B \cup H) \cap H \subset (B \cup H) \cap (F \cup H)$.