Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Departamento de Física Matemática

19 de abril de 2024

Notas de Aula

João Carlos Alves Barata

Versão de 19 de abril de 2024

Estas notas, ou sua versão mais recente, podem ser encontradas no seguinte endereço WWW:
http://denebola.if.usp.br/∼jbarata/Notas_de_aula

Lista de Capítulos

I Capítulos Introdutórios **44**

1 Noções Conjuntivistas Básicas **45**

2 Estruturas Algébricas Básicas **110**

3 Formas Lineares e Normas em Espaços Vetoriais **261**

II Tópicos de Análise Real e Complexa **302**

4 Recordações de Cálculo Vetorial em Três Dimensões **303**

5 Conjuntos Convexos e Funções Convexas **316**

6 Funções Geratrizes. Produtórias Complexas. Algumas Identidades Combinatórias **354**

7 A Função Gama de Euler **386**

8 Um Mínimo Sobre A Função Zeta de Riemann **428**

9 Transformações de Möbius **457**

III Tópicos de Álgebra Linear **505**

10 Tópicos de Álgebra Linear. I **506**

11 Tópicos de Álgebra Linear. II **629**

IV Equações Diferenciais **673**

12 Equações Diferenciais Ordinárias. Uma Introdução **674**

13 Alguns Métodos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias **705**

14 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares **721**

15 Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares no Plano Complexo **801**

16 Propriedades de Algumas Funções Especiais **864**

17 Completeza de Algumas Famílias de Funções **935**

18 Rudimentos da Teoria das Equações a Derivadas Parciais **950**

19 Introdução ao Problema de Sturm-Liouville **1027**

20 Alguns Resultados sobre Equações Integrais **1071**

V Grupos 1089

21 Grupos. Alguns Exemplos **1090**

22 Grupos de Lie e Álgebras de Lie. Uma Breve Introdução **1239**

23 Uma Breve Introdução à Teoria das Representações de Grupos **1269**

VI Topologia Geral, Teoria da Medida e Integração 1303

24 Espaços Métricos **1304**

25 O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas de Suas Consequências **1369**

26 A Métrica de Hilbert e o Teorema de Perron-Frobenius **1400**

27 Espaços Topológicos e Espaços Mensuráveis. Definições e Propriedades Básicas **1419**

28 Medidas **1446**

29 A Medida de Lebesgue e a Medida de Hausdorff **1474**

30 Continuidade e Convergência em Espaços Topológicos **1505**

31 Elementos da Teoria da Integração **1523**

32 Alguns Tópicos Especiais em Topologia e Análise **1586**

VII Geometria Diferencial e Topologia Diferencial 1677

33 Variedades **1678**

34 Noções Geométricas em Variedades **1747**

35 Formas Diferenciais **1850**

36 Capítulo Suplementar: Rudimentos da Geometria de Curvas e Superfícies em $\mathbb{R}^3$ **1882**

VIII Análise Funcional I. Séries e Transformadas de Fourier. Distribuições 1936

37 Aproximação de Funções. Aproximações Polinomiais e Séries de Fourier **1937**

38 Introdução às Distribuições e às Transformadas de Fourier **2007**

IX Análise Funcional II. Espaços de Hilbert e Teoria de Operadores 2121

39 Noções Básicas Sobre Espaços de Hilbert **2122**

40 Operadores Lineares Limitados em Espaços de Banach e de Hilbert **2168**

41 Operadores Lineares Não-Limitados em Espaços de Hilbert **2364**

42 O Limite Indutivo de Álgebras **2405**

X Aplicações e Usos em Física 2414

43 Equações Diferenciais. Problemas Selecionados de Interesse Físico **2415**

44 Rudimentos da Teoria do Potencial **2541**

45 Notas Sobre Mecânica Clássica. I **2554**

46 Notas Sobre Mecânica Clássica. II. Problemas e Aplicações **2663**

47 Spinores e o Grupo de Lorentz **2737**

48 Operadores e a Física Quântica **2752**

Bibliografia **2804**

Índice Remissivo **2825**

Capítulos e Seções

Índice

Prefácio . . . 30
Bons Mots . . . 32
Como Ler Este Livro . . . 34
Notação e Advertências . . . 35
Por Que Precisamos de Demonstrações? . . . 38

I Capítulos Introdutórios **44**

1 Noções Conjuntivistas Básicas **45**
1.1 Conjuntos, Relações e Funções . . . 46
1.1.1 Rudimentos da Teoria dos Conjuntos . . . 46
1.1.1.1 Conjuntos e os Axiomas que os Delineiam . . . 49
1.1.1.2 Mais Definições e Alguma Notação. Pares Ordenados . . . 58
1.1.2 Relações e Funções . . . 59
1.1.2.1 Operações Básicas com Famílias de Conjuntos . . . 61
1.1.2.2 Funções Características de Conjuntos . . . 63
1.1.2.3 A Diferença Simétrica de Dois Conjuntos . . . 63
1.1.2.4 Propriedades Conjuntivistas Elementares de Funções . . . 66
1.1.2.5 Um Interlúdio. O Teorema de Ponto Fixo de Knaster-Tarski . . . 68
1.1.2.6 Produtos Cartesianos Gerais . . . 69
1.1.2.7 Relações de Incompatibilidade (ou de Compatibilidade) . . . 70
1.1.2.8 Relações de Equivalência . . . 71
1.1.2.9 Relações de Ordem . . . 75
1.1.3 Cardinalidade . . . 82
1.1.3.1 Os Teoremas de Schröder-Bernstein e de Cantor . . . 84
1.1.3.2 Números Naturais . . . 87
1.1.3.3 Conjuntos Enumeráveis e Conjuntos Contáveis . . . 91
1.1.4 Ínfimos e Supremos de Famílias de Conjuntos . . . 95
1.2 Sistemas de Conjuntos . . . 98
1.2.1 Semianéis de Conjuntos . . . 98
1.2.2 Anéis de Conjuntos . . . 99
1.2.3 Álgebras de Conjuntos . . . 100
1.2.4 σ-Anéis de Conjuntos . . . 101
1.2.5 σ-Álgebras de Conjuntos . . . 102
1.2.6 Sistemas Monótonos de Conjuntos . . . 104
1.2.7 Topologias . . . 107
1.2.8 Filtros e Ultrafiltros . . . 108

2 Estruturas Algébricas Básicas **110**
2.1 Estruturas Algébricas Básicas . . . 111
2.1.1 Álgebras Universais . . . 113
2.1.2 Reticulados e Álgebras Booleanas . . . 115
2.1.2.1 Álgebras Booleanas . . . 119
2.1.2.2 Reticulados Ortocomplementados e Ortomodulares . . . 122
2.1.3 Semigrupos, Monóides e Grupos . . . 123

2.1.3.1 $\mathbb{R}_{0+}$ Estendido . . . 126
2.1.3.2 Os Grupos $\mathbb{Z}_n$. O Grupo do Círculo . . . 127
2.1.3.3 Subgrupos . . . 130
2.1.4 Corpos . . . 132
2.1.5 Espaços Vetoriais . . . 135
2.1.6 Anéis, Módulos e Álgebras . . . 138
2.1.6.1 Anéis . . . 138
2.1.6.2 Módulos . . . 139
2.1.6.3 Álgebras . . . 139
2.1.7 Exemplos Especiais de Álgebras . . . 142
2.1.7.1 Álgebras de Lie . . . 143
2.1.7.2 Álgebras de Poisson . . . 145
2.1.7.3 Álgebras de Jordan . . . 145
2.1.7.4 Álgebras de Grassmann . . . 146
2.1.7.5 Álgebras de Clifford . . . 147
2.1.8 Mais sobre Anéis . . . 150
2.1.9 Ações e Representações . . . 152
2.1.9.1 Ações de Grupos . . . 152
2.1.9.2 Representações de Grupos e de Álgebras . . . 157
2.1.10 Morfismos, Homomorfismos, Epimorfismos, Isomorfismos, Monomorfismos, Endomorfismos e Automorfismos . . . 158
2.1.11 Induzindo Estruturas Algébricas . . . 160
2.2 Grupos. Estruturas e Construções Básicas . . . 164
2.2.1 Cosets . . . 164
2.2.1.1 O Teorema de Lagrange . . . 166
2.2.2 Subgrupos Normais e o Grupo Quociente . . . 168
2.2.2.1 Alguns Teoremas Sobre Isomorfismos e Homomorfismos de Grupos . . . 171
2.2.2.2 O Centro de um Grupo. Centralizadores e Normalizadores . . . 174
2.2.2.3 O Centro de Alguns Grupos de Interesse . . . 175
2.2.3 Grupos Gerados por Conjuntos. Grupos Gerados por Relações . . . 179
2.2.4 O Produto Direto e o Produto Semidireto de Grupos. O Produto Tensorial de Grupos Abelianos . . . 180
2.2.4.1 O Produto Direto (ou Soma Direta) de Grupos . . . 180
2.2.4.2 O Produto Semidireto de Grupos . . . 181
2.2.4.3 Produtos Tensoriais de Grupos Abelianos . . . 185
2.2.5 O Produto Livre de Grupos. Amálgamas . . . 191
2.3 Espaços Vetoriais. Estruturas e Construções Básicas . . . 193
2.3.1 Bases Algébricas de um Espaço Vetorial . . . 194
2.3.2 O Dual Algébrico de um Espaço Vetorial . . . 198
2.3.3 Subespaços e Espaços Quocientes . . . 205
2.3.4 Somas Diretas de Espaços Vetoriais . . . 206
2.3.4.1 Formas Multilineares . . . 207
2.3.5 Produtos Tensoriais de Espaços Vetoriais . . . 209
2.3.5.1 Produtos Tensoriais, Duais Algébricos e Formas Multilineares . . . 216
2.3.6 Produtos Tensoriais de um Espaço Vetorial com seu Dual . . . 220
2.3.6.1 Tensores Associados a Formas Bilineares Simétricas Não Degeneradas. Métricas . . . 220
2.3.7 Produtos Tensoriais de um mesmo Espaço Vetorial. Os Espaços Simétrico e Antissimétrico . . . 225
2.3.8 O Produto Tensorial de Módulos. Derivações . . . 227
2.4 Anéis e Álgebras. Estruturas e Construções Básicas . . . 229
2.4.1 Ideais em Anéis e Álgebras Associativas . . . 229

2.4.1.1 Ideais em Anéis . . . 229
2.4.1.2 Ideais em Álgebras Associativas . . . 233
2.5 Espaços de Fock, Álgebras Tensoriais e Álgebras Exteriores . . . 236
2.5.1 Álgebras Tensoriais . . . 237
2.5.2 Álgebras Exteriores . . . 238
2.6 Tópicos Especiais . . . 241
2.6.1 O Grupo de Grothendieck . . . 241
2.6.2 Grupóides . . . 243
2.6.3 Quatérnios, Números Complexos e outros Amigos . . . 244
2.6.3.1 Álgebras Comutativas e Associativas em $\mathbb{R}^2$. A Álgebra dos Complexos . . . 245
2.6.3.2 A Álgebra dos Números Complexos Hiperbólicos . . . 247
2.6.3.3 Álgebras em $\mathbb{R}^3$. A Álgebra do Produto Vetorial . . . 249
2.6.3.4 Quatérnios . . . 249
APÊNDICES . . . 256
2.A Prova de (2.184) . . . 256
2.B Ação de SL(2, $\mathbb{C}$) e o Grupo de Lorentz em $3+1$ dimensões . . . 256

3 Formas Lineares e Normas em Espaços Vetoriais **261**
3.1 Formas Lineares, Sesquilineares e Produtos Escalares em Espaços Vetoriais . . . 261
3.1.1 Formas Multilineares . . . 261
3.1.2 Formas Sesquilineares e as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Minkowski . . . 267
3.1.3 Produtos Escalares . . . 270
3.1.4 Formas Quadráticas em Espaços Vetoriais Reais . . . 272
3.1.5 Exemplos . . . 272
3.2 Normas em Espaços Vetoriais . . . 274
3.2.0.1 O Lema da Simetria . . . 282
3.3 Ortogonalidade, Conjuntos Ortonormais e o Procedimento de Gram-Schmidt . . . 283
3.4 Formas Bilineares e Sesquilineares e Produtos Escalares em Espaços de Dimensão Finita . . . 285
3.5 Estruturas Complexas sobre Espaços Vetoriais Reais . . . 288
APÊNDICES . . . 296
3.A Equivalência de Normas em Espaços Vetorias de Dimensão Finita . . . 296
3.B Prova do Teorema de Fréchet, von Neumann e Jordan . . . 297
3.C A Identidade de Polarização para Formas Trilineares Simétricas . . . 300

II Tópicos de Análise Real e Complexa **302**

4 Recordações de Cálculo Vetorial em Três Dimensões **303**
4.1 Alguns Operadores Diferenciais de Interesse . . . 303
4.2 Teoremas Clássicos sobre Integrais de Volume e de Superfície . . . 307
4.3 O Laplaciano em Sistemas de Coordenadas Gerais . . . 309
4.4 Coordenadas Esféricas em n Dimensões . . . 311

5 Conjuntos Convexos e Funções Convexas **316**
5.1 Conjuntos Convexos. Noções Básicas . . . 316
5.1.1 Operações que Preservam Convexidade . . . 318
5.1.2 Um Exemplo. Células e Diagramas de Voronoy . . . 320
5.2 Funções Convexas e Côncavas em Espaços Vetoriais Reais . . . 324
5.2.1 Funções Convexas em Espaços Vetoriais Normados e sua Continuidade . . . 327
5.2.2 Funções Côncavas e Convexas de uma Variável . . . 328

5.2.3 Funções Convexas de Várias Variáveis . . . 341
5.3 Algumas Consequências da Convexidade e da Concavidade . . . 345
5.3.1 A Desigualdade de Jensen . . . 345
5.3.2 A Primeira Desigualdade de Young . . . 346
5.3.3 Médias Geométricas, Aritméticas e Desigualdades Correlatas . . . 347
5.3.3.1 A Desigualdade de Minkowski . . . 351
5.4 Exercícios Adicionais . . . 353

6 Funções Geratrizes. Produtórias Complexas. Algumas Identidades Combinatórias 354
6.1 Funções Geratrizes . . . 354
6.1.1 Algumas Identidades Combinatórias . . . 356
6.1.2 Números de Fibonacci . . . 359
6.1.3 Números de Bernoulli . . . 361
6.1.4 Números de Bell . . . 363
6.2 Notas Sobre Convergência de Produtórias . . . 367
6.2.1 Uma Dedução Elementar do Produto de Wallis . . . 368
6.3 A Fórmula de Inversão de Möbius. As Fórmulas de Viète . . . 370
6.3.1 As Fórmulas de Viète . . . 371
6.3.1.1 Uma Aplicação. Localizando Zeros de Certos Polinômios . . . 372
6.3.1.2 As Desigualdades de Samuelson e Algumas Generalizações . . . 375
6.3.1.3 As Identidades de Girard-Newton . . . 379
6.4 Exercícios Adicionais . . . 384

7 A Função Gama de Euler 386
7.1 Introdução e Motivação . . . 386
7.2 A Função Gama. Definição e Primeiras Propriedades . . . 388
7.3 Outras Representações para a Função Gama . . . 393
7.4 A Função Beta e Propriedades Adicionais da Função Gama . . . 397
7.4.1 A Fórmula de Reflexão de Euler . . . 398
7.4.2 A Fórmula de Duplicação de Legendre . . . 402
7.5 Teoremas Sobre a Unicidade da Função Gama e Outros Resultados . . . 403
7.5.1 O Teorema de Bohr-Mollerup . . . 403
7.5.2 Fórmulas de Duplicação e Unicidade . . . 404
7.5.3 O Teorema de Wielandt e Algumas de Suas Consequências . . . 406
7.5.3.1 A Fórmula de Multiplicação de Gauss da Função Gama . . . 407
7.5.4 A Função Gama de Euler e Equações Diferenciais. O Teorema de Hölder . . . 409
7.6 A Aproximação de Stirling e suas Correções . . . 410
7.6.1 A Aproximação de Stirling para Fatoriais e suas Correções. A Série de Gudermann . . . 412
7.6.2 A Aproximação de Stirling para a Função Gama e suas Correções. A Série de Gudermann . . . 418
7.7 Exercícios Adicionais . . . 422

8 Um Mínimo Sobre A Função Zeta de Riemann 428
8.1 Origens. Propriedades Básicas de Números Primos . . . 428
8.2 Definição da Função ζ de Riemann em $\mathbb{C}$ . . . 433
8.3 A Fórmula de Produto de Euler e Outras Relações Envolvendo ζ . . . 434
8.4 Primeiras Relações de ζ com a Função Gama de Euler . . . 439
8.5 Os Valores de ζ nos Inteiros . . . 443
8.5.1 Um Interlúdio. A Fórmula $1+2+3+4+5+\cdots=-1/12$ (?!) e Alguns de Seus Amigos . . . 445
8.6 A Relação Funcional de Riemann . . . 449

8.6.1 Uma Demonstração da Relação Funcional de Riemann . . . 451
8.7 Exercícios Adicionais . . . 453
APÊNDICES . . . 454
8.A Prova do Teorema Fundamental da Aritmética . . . 454

9 Transformações de Möbius **457**
9.1 Transformações de Möbius. Definição e Propriedades Elementares . . . 457
9.2 O Teorema Fundamental das Transformações de Möbius . . . 463
9.3 Transformações de Möbius sobre Retas e Círculos . . . 466
9.4 Transformações de Möbius e Razões Anarmônicas . . . 468
9.4.1 Razões Anarmônicas em $\mathbb{R}^n$ e Transformações Lineares . . . 472
9.4.2 Razões Anarmônicas no Plano Complexo e Transformações de Möbius . . . 472
9.5 Transformações de Möbius e Automorfismos do Disco Unitário . . . 476
9.5.1 O Teorema do Módulo Máximo . . . 476
9.5.1.1 A Majoração de Cauchy e Algumas de suas Consequências . . . 477
9.5.1.2 O Módulo de uma Função Analítica. O Teorema do Módulo Máximo . . . 479
9.5.1.3 O Lema de Schwarz e Algumas Consequências . . . 481
9.5.2 Transformações de Möbius e Automorfismos do Disco Unitário . . . 484
9.5.3 O Lema de Schwarz-Pick . . . 490
9.5.3.1 Duas Métricas Invariantes em D_1. Revisitando o Lema de Schwarz-Pick . . . 492
9.6 A Derivada de Schwarz . . . 496
APÊNDICES . . . 501
9.A Demonstração Alternativa da Proposição 9.8 . . . 501
9.B Prova do Teorema 9.12 . . . 501

III Tópicos de Álgebra Linear **505**

10 Tópicos de Álgebra Linear. I **506**
10.1 Propriedades Básicas de Determinantes e Inversas de Matrizes . . . 507
10.2 Noções Básicas sobre o Espectro de uma Matriz . . . 517
10.2.1 Autovalores e Polinômios Característicos de Matrizes . . . 518
10.2.2 Autovetores . . . 521
10.2.3 O Traço de uma Matriz . . . 523
10.2.3.1 Algumas Relações entre Determinantes e Traços de Matrizes . . . 525
10.2.4 Localização dos Autovalores. Os Discos de Gershgorin . . . 526
10.3 Polinômios de Matrizes . . . 529
10.3.1 O Teorema de Hamilton-Cayley . . . 531
10.3.1.1 O Teorema da Aplicação Espectral para Matrizes . . . 535
10.4 Matrizes Diagonalizáveis e o Teorema Espectral . . . 536
10.4.1 Diagonalização Simultânea de Matrizes . . . 548
10.5 Matrizes Autoadjuntas, Normais e Unitárias . . . 551
10.5.1 Matrizes Positivas . . . 557
10.5.1.1 Matrizes Pseudoautoadjuntas e Quaseautoadjuntas . . . 559
10.5.2 O Teorema de Inércia de Sylvester. Superfícies Quadráticas . . . 561
10.5.3 Um Resultado Sobre Localização do Espectro de Matrizes Autoadjuntas . . . 566
10.6 Matrizes Triangulares . . . 568
10.7 O Teorema de Decomposição de Jordan e a Forma Canônica de Matrizes . . . 569
10.7.1 Resultados Preparatórios . . . 570

10.7.2 O Teorema da Decomposição de Jordan . . . 574
10.7.3 Matrizes Nilpotentes e sua Representação Canônica . . . 577
10.7.4 A Forma Canônica de Matrizes . . . 581
10.7.5 Mais Alguns Resultados Sobre Matrizes Nilpotentes . . . 583
10.8 Algumas Representações Especiais de Matrizes . . . 585
10.8.1 A Decomposição Polar de Matrizes . . . 585
10.8.2 A Decomposição em Valores Singulares . . . 587
10.8.2.1 Uma Aplicação: a Decomposição de Schmidt . . . 590
10.8.2.2 A Noção de Traço Parcial de Matrizes . . . 592
10.8.2.3 Purificação . . . 594
10.8.3 O Teorema da Triangularização de Schur . . . 595
10.8.4 A Decomposição QR e a Decomposição de Iwasawa ("KAN") . . . 597
10.8.5 Diagonalização em Blocos de Matrizes Antissimétricas Reais . . . 599
10.8.5.1 Resultado Principal. Enunciado e Demonstração . . . 600
10.8.6 O Teorema de Williamson . . . 606
10.9 A Pseudoinversa de Moore-Penrose . . . 607
10.9.1 Outras Propriedades da Pseudoinversa de Moore-Penrose . . . 610
10.9.1.1 A Regularização de Tikhonov. Existência . . . 612
10.9.1.2 A Pseudoinversa de Moore-Penrose e o Teorema Espectral . . . 615
10.9.2 A Pseudoinversa de Moore-Penrose e Problemas de Optimização Linear . . . 616
10.9.3 Existência e Decomposição em Valores Singulares . . . 617
10.10 Produtos Tensoriais de Matrizes . . . 618
10.11 Propriedades Especiais de Determinantes . . . 620
10.11.1 Expansão do Polinômio Característico . . . 620
10.11.2 A Desigualdade de Hadamard . . . 621
10.12 Exercícios Adicionais . . . 624

11 Tópicos de Álgebra Linear. II **629**
11.1 Uma Topologia Métrica em $\mathrm{Mat}(\mathbb{C},\, n)$ . . . 630
11.2 Exponenciais, Logaritmos e Funções Analíticas de Matrizes . . . 633
11.2.1 Exponencial de Matrizes Como Limite de Potências . . . 640
11.2.2 A Exponenciação de Matrizes e os Grupos $\mathrm{GL}(\mathbb{C},\, n)$ e $\mathrm{GL}(\mathbb{R},\, n)$ . . . 643
11.3 A Fórmula de Lie-Trotter e a Fórmula do Comutador . . . 646
11.4 Aplicações Lineares em $\mathrm{Mat}(\mathbb{C},\, n)$ . . . 649
11.4.1 Alguns Fatos Gerais sobre Aplicações Lineares em $\mathrm{Mat}(\mathbb{C},\, n)$ . . . 649
11.4.2 Alguns Exemplos Específicos de Aplicações Lineares em $\mathrm{Mat}(\mathbb{C},\, n)$ . . . 654
11.5 A Fórmula de Baker, Campbell e Hausdorff . . . 659
11.6 A Fórmula de Duhamel e Algumas de suas Consequências . . . 664
11.7 Continuidade do Determinante . . . 668
11.8 Exercícios Adicionais . . . 670

IV Equações Diferenciais **673**

12 Equações Diferenciais Ordinárias. Uma Introdução **674**
12.1 Definição e Alguns Exemplos . . . 675
12.1.1 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares . . . 677
12.1.2 Equações Ordinárias de Segunda Ordem. Exemplos de Interesse . . . 681
12.2 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias . . . 683
12.3 Discussão sobre Problemas de Valor Inicial . . . 688

12.3.1 Problemas de Valor Inicial. Patologias e Exemplos a se Ter em Mente . . . 689
12.3.2 Teoremas de Existência e Unicidade de Soluções . . . 692
12.3.3 Soluções Globais . . . 694
12.3.4 Dependência Contínua de Condições Iniciais e de Parâmetros . . . 696
12.4 Linearização de EDO's e Estabilidade . . . 696
12.5 Equações Periódicas e o Teorema de Floquet . . . 700

13 Alguns Métodos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias 705
13.1 Solução de Equações Ordinárias Lineares de Primeira Ordem . . . 705
13.2 As Equações de Bernoulli e de Riccati . . . 706
13.3 Integração de Equações Separáveis . . . 708
13.4 O Método de Variação de Constantes . . . 709
13.5 O Método de Substituição de Prüfer . . . 710
13.6 O Método de Inversão . . . 712
13.7 Solução de Equações Exatas e o Método dos Fatores Integrantes . . . 713
13.8 Soluções das Equações de D'Alembert-Lagrange e Clairaut . . . 717

14 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares 721
14.1 Introdução . . . 722
14.2 Unicidade e Existência de Soluções . . . 722
14.2.1 Unicidade . . . 722
14.2.2 Existência. A Série de Dyson . . . 725
14.2.3 Propriedades de $D(t,\ s)$ . . . 729
14.3 Equações com Coeficientes Constantes . . . 732
14.3.1 Alguns Exemplos e Aplicações . . . 734
14.4 Perturbações de Sistemas Lineares . . . 738
14.5 Mais sobre a Série de Dyson. Produtos de Tempo Ordenado . . . 742
14.6 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares no Plano Complexo . . . 744
14.6.1 O Caso Analítico . . . 745
14.6.2 Resolução por Séries de Potências . . . 750
14.6.3 Sistemas com Pontos Singulares. Monodromia . . . 751
14.6.4 Sistemas com Pontos Singulares Simples . . . 760
14.7 Sistemas Provenientes de EDOs de Ordem m . . . 763
14.7.1 Pontos Singulares Simples em EDO's de Ordem m . . . 765
14.7.2 Singularidades no Infinito . . . 769
14.7.3 Alguns Exemplos de Interesse . . . 770
14.8 Equações Fuchsianas. Símbolos de Riemann . . . 775
14.8.1 Equações Fuchsianas de Primeira Ordem . . . 776
14.8.2 Equações Fuchsianas de Segunda Ordem . . . 779
14.8.3 A Equação de Riemann-Papperitz. Símbolos de Riemann . . . 787
14.8.3.1 Transformações de Simetria dos Símbolos de Riemann . . . 790
14.8.3.2 Equações Fuchsianas com três pontos singulares e a equação hipergeométrica . . . 793
14.9 Exercícios Adicionais . . . 796

15 Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares no Plano Complexo 801
15.1 Soluções em Séries de Potências para Equações Regulares . . . 802
15.1.1 A Equação do Oscilador Harmônico Simples . . . 803
15.1.2 A Equação de Legendre . . . 804
15.1.3 A Equação de Hermite . . . 807

15.1.4 A Equação de Airy . . . 809
15.1.5 A Equação de Tchebychev . . . 811
15.1.6 O Caso de Equações Regulares Gerais . . . 814
15.2 Solução de Equações Singulares Regulares. O Método de Frobenius . . . 816
15.2.1 Equações Singulares Regulares. O Caso Geral . . . 819
15.2.2 A Equação de Euler Revisitada . . . 826
15.2.3 A Equação de Bessel . . . 828
15.2.4 Equações Relacionadas à de Bessel. A Equação de Bessel Esférica . . . 838
15.2.5 Equações Relacionadas à de Bessel. A Equação de Bessel Modificada . . . 840
15.2.6 A Equação de Laguerre . . . 841
15.2.7 A Equação Hipergeométrica . . . 843
15.2.8 A Equação Hipergeométrica Confluente . . . 846
15.3 Algumas Equações Associadas . . . 849
15.3.1 A Equação de Legendre Associada . . . 849
15.3.2 A Equação de Laguerre Associada . . . 851
15.4 Exercícios Adicionais . . . 853
APÊNDICES . . . 855
15.A Prova da Proposição 15.1. Justificando os Polinômios de Legendre . . . 855
15.B Polinômios de Legendre: Provando (15.14) . . . 856
15.C Justificando os Polinômios de Hermite . . . 858
15.D Polinômios de Hermite: Provando (15.20) . . . 859
15.E Porque λ deve ser um Inteiro Positivo na Equação de Laguerre . . . 860
15.F Polinômios de Tchebychev: Obtendo (15.39) a Partir de (15.36)–(15.38) . . . 862

16 Propriedades de Algumas Funções Especiais **864**
16.1 Discussão Preliminar . . . 864
16.1.1 Relações de Ortogonalidade . . . 865
16.1.1.1 Condições de Contorno e a Origem das Relações de Ortogonalidade . . . 870
16.1.2 Fórmulas de Rodrigues . . . 874
16.2 Propriedades de Algumas Funções Especiais . . . 876
16.2.1 Propriedades dos Polinômios de Legendre . . . 876
16.2.2 Propriedades dos Polinômios de Legendre Associados . . . 880
16.2.2.1 As Funções Harmônicas Esféricas . . . 886
16.2.2.2 Fórmula de Adição de Funções Harmônicas Esféricas . . . 888
16.2.3 Propriedades dos Polinômios de Hermite . . . 892
16.2.3.1 As Funções de Hermite . . . 895
16.2.4 Propriedades dos Polinômios de Tchebychev . . . 899
16.2.5 Propriedades dos Polinômios de Laguerre . . . 899
16.2.6 Propriedades dos Polinômios de Laguerre Associados . . . 903
16.2.7 Algumas Propriedades das Funções de Bessel . . . 906
16.2.7.1 Propriedades de Zeros das Funções de Bessel . . . 916
16.2.7.2 Relações de Ortogonalidade das Funções de Bessel no Intervalo [0, 1] . . . 918
16.2.7.3 Comentário sobre a equação de Bessel no intervalo $J = [0, \infty)$ . . . 924
16.2.7.4 A Expansão de Schlömilch . . . 924
16.2.8 Propriedades das Funções de Bessel Esféricas . . . 928
16.2.8.1 Relações de Ortogonalidade Para as Funções de Bessel Esféricas no Intervalo [0, 1] . . . 930
16.3 Exercícios Adicionais . . . 932
APÊNDICES . . . 933
16.A Provando (16.54) a Força Bruta . . . 933

17 Completeza de Algumas Famílias de Funções **935**
17.1 Completeza de Polinômios Ortogonais em Intervalos Compactos . . . 935
17.2 Completeza dos Polinômios de Hermite . . . 938
17.3 Completeza dos Polinômios Trigonométricos . . . 939
17.4 Completeza das Funções de Bessel e Propriedades de seus Zeros . . . 942
17.4.1 A Equação de Bessel como Problema de Sturm-Liouville . . . 942
17.4.1.1 O Caso $\nu > 0$ . . . 943
17.4.1.2 O Caso $\nu > 0$ com $\beta_1 = -\nu\beta_2 \neq 0$ . . . 945
17.4.1.3 O Caso $\nu = 0$ . . . 946
17.4.2 Conclusões Sobre a Completeza das Funções de Bessel e Propriedades de seus Zeros . . . 948

18 Rudimentos da Teoria das Equações a Derivadas Parciais **950**
18.1 Definições, Notações e Alguns Exemplos . . . 951
18.2 Algumas Classificações de Equações a Derivadas Parciais . . . 960
18.2.1 Equações Lineares, Não lineares, Semilineares e Quaselineares . . . 960
18.2.2 Classificação de Equações de Segunda Ordem. Equações Parabólicas, Elípticas e Hiperbólicas . . . 962
18.3 O Método de Separação de Variáveis . . . 965
18.3.1 O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Lineares . . . 966
18.3.2 O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Não Lineares . . . 969
18.4 Problemas de Cauchy e Superfícies Características. Definições e Exemplos Básicos . . . 970
18.5 O Método das Características . . . 977
18.5.1 Exemplos de Aplicação do Método das Características . . . 982
18.5.2 Características. Comentários Adicionais . . . 993
18.5.3 Sistemas de Equações Quaselineares de Primeira Ordem . . . 994
18.5.3.1 Generalidades Sobre Problemas de Condição Inicial em Sistemas Quaselineares de Primeira Ordem . . . 999
18.5.3.2 Sistemas Hiperbólicos Semilineares de Primeira Ordem em Duas Variáveis . . . 1002
18.5.3.3 Soluções Ditas Simples de Sistemas Quaselineares, Homogêneos, de Primeira Ordem em Duas Variáveis . . . 1005
18.6 Alguns Teoremas de Unicidade de Soluções de Equações a Derivadas Parciais . . . 1008
18.6.1 Casos Simples. Discussão Preliminar . . . 1008
18.6.2 Unicidade de Solução para as Equações de Laplace e Poisson . . . 1012
18.6.3 Unicidade de Soluções. Generalizações . . . 1014
18.7 Condições de Compatibilidade em Sistemas Sobredeterminados . . . 1021
18.8 Exercícios Adicionais . . . 1026

19 Introdução ao Problema de Sturm-Liouville **1027**
19.1 Comentários Iniciais . . . 1028
19.2 O Problema de Sturm . . . 1032
19.2.1 Soluções Fundamentais e Funções de Green . . . 1033
19.2.2 A Função de Green. Resolvendo o Problema de Sturm . . . 1034
19.2.2.1 O Teorema de Green . . . 1037
19.2.2.2 O Problema de Sturm com Condições de Contorno Não Homogêneas . . . 1039
19.3 O Problema de Sturm-Liouville . . . 1040
19.3.1 Propriedades Básicas dos Autovalores e Autofunções de Problemas de Sturm-Liouville . . . 1041
19.3.1.1 A Simplicidade dos Autovalores . . . 1041
19.3.1.2 O Lema de Green . . . 1042
19.3.1.3 Realidade dos Autovalores e Autofunções. Ortogonalidade de Autofunções . . . 1044
19.3.1.4 Propriedades dos Autovalores . . . 1045
19.3.2 A Equação Integral de Fredholm . . . 1049
19.3.3 Uma Aplicação do Problema de Sturm-Liouville . . . 1052

19.3.4 Métodos Variacionais de Determinação de Autovalores . . . 1055
19.4 Comentários Finais . . . 1057
19.4.1 Um Problema de Sturm-Liouville Singular . . . 1057
19.5 Exercícios Adicionais . . . 1060
APÊNDICES . . . 1063
19.A Prova do Teorema 19.1. Existência e Unicidade . . . 1063
19.B Prova da Proposição 19.2 . . . 1064
19.C Comentário Sobre o Determinante Wronskiano . . . 1065
19.D Demonstração do Teorema 19.3 . . . 1066
19.D.1 Prova da Desigualdade (19.D.17) . . . 1069
19.E Uma Relação Útil . . . 1070

20 Alguns Resultados sobre Equações Integrais **1071**
20.1 Descrição . . . 1071
20.2 O Método dos Determinantes de Fredholm . . . 1073
20.2.1 A Equação Integral de Fredholm Linear Não Homogênea . . . 1073
20.2.2 A Equação Integral de Fredholm Linear Homogênea . . . 1077
20.3 A Equação Integral de Schlömilch . . . 1078
20.4 Exercícios Adicionais . . . 1081
APÊNDICES . . . 1082
20.A Obtendo os Determinantes de Fredholm . . . 1082

V Grupos 1089

21 Grupos. Alguns Exemplos **1090**
21.1 O Grupo de Permutações . . . 1091
21.2 O Grupo de Permutações de n Elementos . . . 1092
21.2.1 Ciclos, Transposições e Transposições Elementares . . . 1093
21.2.1.1 O Sinal, ou Paridade, de uma Permutação. O Símbolo de Levi-Civita . . . 1096
21.3 Alguns Grupos Matriciais . . . 1098
21.3.1 Grupos Lineares e Grupos Lineares Especiais . . . 1098
21.3.1.1 Grupos Lineares Projetivos . . . 1101
21.3.2 O Grupo de Borel e o Grupo de Heisenberg . . . 1103
21.3.2.1 O Grupo de Heisenberg . . . 1103
21.3.3 Grupos Associados a Formas Bilineares e Sesquilineares . . . 1110
21.3.3.1 Os Grupos Ortogonais . . . 1114
21.3.3.2 Os Grupos Unitários . . . 1116
21.3.3.3 Os Grupos Simpléticos . . . 1117
21.4 Os Grupos SO(2), SO(3), SU(2) e SL(2, $\mathbb{C}$) . . . 1125
21.4.1 Os Grupos SO(2), O(2), SO(1, 1) e O(1, 1) . . . 1125
21.4.2 O Grupo SO(3) . . . 1129
21.4.2.1 Mais Propriedades das Matrizes de SO(3) . . . 1137
21.4.2.2 SO(3) e os Ângulos de Euler . . . 1140
21.4.2.3 A Parametrização de Cayley de SO(3) (e de SO(n)) . . . 1145
21.4.3 O Grupo O(3) . . . 1148
21.4.4 O Grupo SU(2) . . . 1152
21.4.5 A Relação Entre SO(3) e SU(2) . . . 1157
21.4.6 O Grupo SL(2, $\mathbb{C}$) . . . 1161

21.5 Generalidades Sobre os Grupos SU(n) e SO(n) . . . 1163
21.5.1 Os Grupos SU(n) . . . 1163
21.5.1.1 Um Pouco Sobre o Grupo SU(3) . . . 1165
21.5.2 Os Grupos SO(n) . . . 1167
21.6 O Grupo Afim e o Grupo Euclidiano . . . 1171
21.7 O Grupo de Lorentz em 3 + 1-Dimensões . . . 1175
21.7.1 O Espaço-Tempo, a Noção de Intervalo e a Estrutura Causal . . . 1175
21.7.2 A Invariância do Intervalo . . . 1181
21.7.3 O Grupo de Lorentz . . . 1184
21.7.4 Alguns Subgrupos do Grupo de Lorentz . . . 1185
21.7.5 Alguns Fatos Sobre a Estrutura do Grupo de Lorentz . . . 1188
21.7.6 Os Geradores Infinitesimais do Grupo de Lorentz . . . 1192
21.7.6.1 Fórmula de Rodrigues para *Boosts* de Lorentz . . . 1198
21.7.7 O Grupo de Galilei . . . 1200
21.7.7.1 Comparação Entre os Grupos de Galilei e Lorentz. Contrações . . . 1202
21.8 O Grupo de Poincaré . . . 1205
21.9 Mais Sobre Grupos Simpléticos . . . 1209
21.9.1 O Subgrupo Simplético Real Ortogonal . . . 1210
21.9.2 Grupos Simpléticos. Álgebras de Lie e Parametrização de Cayley . . . 1214
21.9.3 O Teorema de Williamson . . . 1217
21.10 Operadores Diferenciais como Geradores Infinitesimais sobre Funções . . . 1218
21.11 Exercícios Adicionais . . . 1224
APÊNDICES . . . 1226
21.A Extensão do Lema 21.3 e do Teorema 21.7 ao Caso Complexo . . . 1226
21.B Prova do Teorema 21.11 . . . 1228

22 Grupos de Lie e Álgebras de Lie. Uma Breve Introdução 1239
22.1 Variedades e Grupos de Lie . . . 1239
22.2 Breves Considerações sobre Grupos Topológicos . . . 1241
22.3 Grupos de Lie Matriciais . . . 1243
22.3.1 Uma Topologia Métrica em GL(n, $\mathbb{C}$) . . . 1244
22.3.2 O Grupo de Lie GL(n, $\mathbb{C}$) . . . 1244
22.3.3 Subgrupos Uniparamétricos e seus Geradores Infinitesimais . . . 1247
22.3.4 Subgrupos Uniparamétricos e Álgebras de Lie . . . 1250
22.3.5 Subgrupos Fechados de GL(n, $\mathbb{C}$) . . . 1254
22.4 A Relação entre Grupos de Lie Matriciais e suas Álgebras de Lie . . . 1257
22.4.1 Álgebras de Lie Nilpotentes, Solúveis, Simples e Semissimples . . . 1258
22.4.2 Questões sobre a Exponenciação de Álgebras de Lie . . . 1261
22.4.3 Alguns Exemplos Especiais . . . 1263

23 Uma Breve Introdução à Teoria das Representações de Grupos 1269
23.1 Representações de Grupos . . . 1269
23.2 Médias Invariantes. A Medida de Haar . . . 1275
23.3 Representações de Grupos Compactos . . . 1277
23.3.1 Representações de Grupos Compactos em Espaços de Hilbert Separáveis . . . 1278
23.4 O Teorema de Peter-Weyl . . . 1284
23.5 Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de SU(2) . . . 1293
23.6 Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de $\mathscr{L}_+^\uparrow$ . . . 1298
23.7 Exercícios Adicionais . . . 1301

VI Topologia Geral, Teoria da Medida e Integração 1303

24 Espaços Métricos **1304**
24.1 Métricas e Espaços Métricos . . . 1305
24.1.1 Completeza e o Completamento Canônico . . . 1316
24.1.2 Conjuntos de Sequências . . . 1323
24.2 Pseudométricas . . . 1324
24.3 A Noção de Topologia de Espaços Métricos ou Pseudométricos . . . 1326
24.4 Espaços de Funções Limitadas e Completeza . . . 1330
24.5 Espaços de Banach e de Hilbert . . . 1334
24.5.1 Espaços de Banach em Espaços de Sequências . . . 1336
24.5.1.1 Decrescimento das Normas dos Espaços $\ell_p(\mathbb{N})$ . . . 1346
24.6 Teorema do Melhor Aproximante em Espaços Normados Uniformemente Convexos . . . 1348
24.7 Exercícios Adicionais . . . 1354
APÊNDICES . . . 1357
24.A Números Reais e p-ádicos . . . 1357
24.A.1 A Construção de Cantor dos Números Reais . . . 1357
24.A.2 Outros Completamentos dos Racionais. Números p-ádicos . . . 1360
24.B Aproximações para π . . . 1363

25 O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas de Suas Consequências **1369**
25.1 O Teorema de Ponto Fixo de Banach . . . 1370
25.1.1 Generalizações do Teorema de Ponto Fixo de Banach . . . 1372
25.2 Diversas Aplicações do Teorema de Ponto Fixo de Banach . . . 1375
25.2.1 Aplicação a Equações Numéricas. O Método de Newton . . . 1375
25.2.2 Aplicação a Sistemas Lineares. O Método de Jacobi . . . 1378
25.2.3 Aplicação às Equações Integrais de Fredholm e de Volterra . . . 1380
25.2.4 Aplicações à Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias . . . 1386
25.2.4.1 O Teorema de Picard-Lindelöf . . . 1386
25.2.4.2 Generalizando o Teorema de Picard-Lindelöf. Soluções Globais . . . 1390
25.2.4.3 Um Teorema de Comparação de Soluções de EDO's . . . 1391
25.3 O Teorema da Função Implícita e o Teorema da Função Inversa . . . 1393
25.3.1 O Teorema da Função Implícita . . . 1394
25.3.2 O Teorema da Função Inversa . . . 1398
APÊNDICES . . . 1399
25.A O Lema de Grönwall . . . 1399

26 A Métrica de Hilbert e o Teorema de Perron-Frobenius **1400**
26.1 A Métrica de Hilbert em Conjuntos Convexos Abertos Limitados . . . 1401
26.2 Cones. Definições, Conceitos e Alguns Exemplos Ilustrativos . . . 1407
26.2.1 Métricas Projetivas . . . 1411
26.3 A Métrica Projetiva de Hilbert em Cones Apontados . . . 1412
26.3.1 Estendendo a Métrica de Hilbert para Cones Apontados . . . 1412
26.3.2 A Métrica Projetiva de Hilbert, ou Métrica de Birkhoff . . . 1416
26.4 O Teorema de Perron-Frobenius . . . 1418

27 Espaços Topológicos e Espaços Mensuráveis. Definições e Propriedades Básicas **1419**
27.1 Definições, Propriedades Elementares e Exemplos . . . 1419
27.2 Algumas Construções Especiais e Exemplos . . . 1425
27.2.1 Topologias Geradas por Famílias de Conjuntos . . . 1425

27.2.1.1 A Topologia de Sorgenfrey . . . 1426
27.2.2 σ-Álgebras Geradas por Famílias de Conjuntos . . . 1428
27.2.3 Bases de Espaços Topológicos . . . 1429
27.2.4 Topologias e σ-Álgebras Induzidas . . . 1431
27.2.5 Topologias e σ-Álgebras Produto . . . 1433
27.3 Interior e Fecho de Conjuntos em Espaços Topológicos . . . 1433
27.3.1 Fecho de Conjuntos em Espaços Métricos . . . 1440
27.4 Espaços Topológicos Separáveis e Segundo-Contáveis . . . 1441
27.4.1 A Segundo-Contabilidade como Propriedade Herdada . . . 1444

28 Medidas **1446**
28.1 O Problema da Teoria da Medida . . . 1446
28.2 Medidas de Conjuntos. Definição, Exemplos e Propriedades Básicas . . . 1449
28.3 Construindo Medidas. A Medida Exterior e o Teorema de Carathéodory . . . 1452
28.3.1 Medidas Exteriores Métricas e Conjuntos Borelianos . . . 1459
28.4 Um Esquema de Construção de Medidas Exteriores . . . 1462
28.5 Medidas sobre Anéis e suas Extensões . . . 1465
28.6 Espaços de Medida como Espaços Pseudométricos . . . 1468
28.6.1 O Espaço Quociente como uma Álgebra Booleana . . . 1470
APÊNDICES . . . 1472
28.A Prova das Fórmulas de Inclusão-Exclusão . . . 1472

29 A Medida de Lebesgue e a Medida de Hausdorff **1474**
29.1 A Construção da Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ . . . 1474
29.1.1 A σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$ e a Medida de Borel-Lebesgue . . . 1477
29.2 As Medidas de Hausdorff . . . 1479
29.3 Conjuntos de Cantor . . . 1483
29.3.1 O Conjunto de Cantor Ternário . . . 1483
29.3.2 Mais Exemplos de Conjuntos de Cantor . . . 1487
29.4 Exemplos de Conjuntos Mensuráveis por Lebesgue mas não Borelianos . . . 1492
29.4.1 A Função de Cantor e um Exemplo dela Derivado . . . 1493
29.4.2 Bases de Hamel e a Medida de Lebesgue . . . 1497
29.5 Exercícios Adicionais . . . 1500

30 Continuidade e Convergência em Espaços Topológicos **1505**
30.1 Primeiras Definições . . . 1505
30.2 Espaços Hausdorff . . . 1507
30.3 Redes e o Caso de Espaços Topológicos Gerais . . . 1508
30.3.1 Redes em Espaços Métricos . . . 1511
30.4 O Limite do Ínfimo e o Limite do Supremo . . . 1512
30.5 Continuidade de Funções em Espaços Topológicos . . . 1515
30.5.1 Outras Noções Associadas à de Continuidade . . . 1517
30.5.1.1 Homeomorfismos e Mergulhos Topológicos . . . 1518
30.5.2 Outras Caracterizações do Conceito de Continuidade em Espaços Topológicos . . . 1519
30.5.3 Continuidade e Convergência . . . 1521

31 Elementos da Teoria da Integração **1523**
31.1 Comentários Preliminares . . . 1524
31.2 A Integração no Sentido de Riemann . . . 1525
31.2.1 A Integral de Riemann Imprópria . . . 1533

31.2.2 Diferenciação e Integração em Espaços de Banach . . . 1535
31.3 A Integração no Sentido de Lebesgue . . . 1539
31.3.1 Funções Mensuráveis e Funções Simples . . . 1539
31.3.2 A Integral de Lebesgue. Integração em Espaços Mensuráveis . . . 1544
31.3.3 A Integral de Lebesgue e sua Relação com a de Riemann . . . 1551
31.3.4 Teoremas Básicos sobre Integração e Convergência . . . 1554
31.3.4.1 O Teorema da Convergência Monótona . . . 1555
31.3.4.2 O Lema de Fatou . . . 1556
31.3.4.3 O Teorema da Convergência Dominada . . . 1557
31.3.5 Alguns Resultados de Interesse . . . 1558
31.4 Os Espaços $\mathcal{L}_p$ e L_p . . . 1560
31.4.1 As Desigualdades de Hölder e de Minkowski . . . 1562
31.4.2 O Teorema de Riesz-Fischer. Completeza . . . 1565
APÊNDICES . . . 1567
31.A Mais sobre a Integral de Darboux . . . 1567
31.A.1 Equivalência das Definições II e III da Integrabilidade de Riemann . . . 1568
31.B Caracterizações e Propriedades de Funções Mensuráveis . . . 1569
31.C Prova do Lema 31.3 . . . 1574
31.D Demonstração de (31.26) . . . 1575
31.E A Equivalência das Definições (31.27) e (31.28) . . . 1575
31.F Prova do Teorema da Convergência Monótona . . . 1578
31.G Prova do Lema de Fatou . . . 1578
31.H Prova do Teorema da Convergência Dominada . . . 1579
31.I Prova dos Teoremas 31.2 e 31.3 . . . 1580
31.J Prova das Desigualdades de Hölder e Minkowski . . . 1582
31.K Prova do Teorema de Riesz-Fischer . . . 1584

32 Alguns Tópicos Especiais em Topologia e Análise **1586**
32.1 Uma Coletânea de Definições . . . 1587
32.1.1 Conjuntos Densos em Espaços Topológicos . . . 1587
32.1.2 A Noção de Conjunto Conexo em Espaços Topológicos . . . 1588
32.2 Axiomas de Separabilidade . . . 1592
32.2.1 Algumas Propriedades de Separação em Espaços Métricos . . . 1592
32.2.2 Postulados de Separabilidade em Espaços Topológicos . . . 1593
32.2.3 O Lema de Urysohn . . . 1601
32.2.3.1 O Teorema de Extensão de Tietze . . . 1606
32.2.4 A Propriedade de Hausdorff como Propriedade Herdada . . . 1609
32.3 Compacidade, Compacidade Local e Paracompacidade . . . 1610
32.3.1 Algumas Definições Gerais . . . 1610
32.3.2 Espaços de Lindelöf. Um Mínimo . . . 1612
32.3.3 Compacidade. Definições e Propriedades em Espaços Topológicos Gerais . . . 1613
32.3.3.1 Compacidade em Espaços Hausdorff . . . 1616
32.3.3.2 Compacidade em Espaços Métricos . . . 1620
32.3.3.3 Compacidade em $\mathbb{R}^n$ . . . 1627
32.3.3.4 Compacidade na Reta de Sorgenfrey . . . 1628
32.3.4 Os Teoremas de Ascoli e de Arzelà . . . 1630
32.3.4.1 Equilimitação e Equicontinuidade de Famílias de Funções . . . 1630
32.3.4.2 Os Teoremas de Ascoli e de Arzelà para Famílias de Funções de um Compacto sobre um Espaço Métrico . . . 1632
32.3.4.3 O Teorema de Peano . . . 1634

32.3.5 Espaços Compactos Hausdorff e Partições da Unidade . . . 1638
32.3.5.1 Uma Excursão pelas Variedades Topológicas Compactas Hausdorff . . . 1639
32.3.6 Compacidade Local . . . 1642
32.3.6.1 Espaços Localmente Compactos Hausdorff . . . 1643
32.3.7 Paracompacidade . . . 1645
32.3.7.1 Espaços Paracompactos Hausdorff . . . 1645
32.4 As Noções de Topologia Inicial e de Topologia Final . . . 1650
32.4.1 A Topologia Inicial de uma Coleção de Funções . . . 1650
32.4.2 A Topologia Final de uma Coleção de Funções . . . 1652
32.4.3 A Topologia Quociente . . . 1653
32.5 Somas de Espaços Topológicos . . . 1654
32.6 A Topologia Produto de Espaços Topológicos . . . 1655
32.6.1 Alguns Resultados Envolvendo Compacidade e Topologia Produto . . . 1657
32.6.2 O Cubo de Hilbert . . . 1658
32.7 Teoremas de Metrizabilidade . . . 1661
32.7.1 O Teorema de Metrização de Urysohn e Tikhonov . . . 1662
32.8 O Teorema da Categoria de Baire . . . 1665
32.9 A Métrica de Hausdorff . . . 1666
32.9.1 Continuidade do Conjunto de Raízes de Polinômios . . . 1669
APÊNDICES . . . 1674
32.A Prova da Proposição 32.35 . . . 1674

VII Geometria Diferencial e Topologia Diferencial 1677

33 Variedades 1678
33.1 Variedades Topológicas . . . 1679
33.1.1 Construindo Variedades Topológicas . . . 1684
33.2 Variedades Diferenciáveis . . . 1686
33.2.1 Partições da Unidade Diferenciáveis . . . 1691
33.2.2 A Noção de Espaço Tangente . . . 1693
33.2.2.1 O Espaço Cotangente . . . 1699
33.2.3 Tensores em Variedades . . . 1701
33.2.3.1 Traços de Tensores. Contração de Índices . . . 1703
33.2.3.2 Transposição de Tensores . . . 1705
33.2.4 Aplicações Entre Variedades Diferenciáveis . . . 1706
33.2.4.1 A Diferencial de Uma Aplicação Entre Variedades. “Pullback” e “Pushforward” . . . 1706
33.2.4.2 Imersões, Mergulhos e Subvariedades . . . 1710
33.2.4.3 Imersões e Mergulhos. Exemplos e Contraexemplos Simples . . . 1712
33.3 Campos Vetoriais e Tensoriais . . . 1717
33.3.1 A Derivada de Lie . . . 1720
33.4 Exemplos de Variedades Topológicas e Diferenciáveis . . . 1725
33.4.1 Uma Variedade Topológica Paracompacta não Segundo-Contável . . . 1725
33.4.2 O Gráfico de uma Função Real em $\mathbb{R}^n$ . . . 1726
33.4.2.1 Cones. E Um Estudo de Caso . . . 1728
33.4.3 Superfícies Regulares em $\mathbb{R}^n$ . . . 1730
33.4.4 As Esferas $\mathbb{S}^n$ . . . 1732
33.4.5 Toros (e Algumas Generalizações) . . . 1735
33.4.6 Espaços Projetivos Reais . . . 1737

33.4.7 Grupos de Lie . . . 1741
33.4.8 Fibrados, Fibrados Vetoriais e Principais . . . 1741
APÊNDICES . . . 1743
33.A Derivadas de Lie. Prova das Relações (33.74) e (33.85) . . . 1743
33.B Derivadas de Lie. Prova da Relação (33.94) . . . 1744

34 Noções Geométricas em Variedades **1747**
34.1 Tensores Métricos Riemannianos e Semi-Riemannianos . . . 1748
34.1.1 Transposição em Relação a Tensores Métricos . . . 1758
34.2 Conexões Afins . . . 1761
34.2.1 Conexões Afins em Campos Vetoriais . . . 1762
34.2.1.1 Conexões Afins em Campos Tensoriais . . . 1767
34.2.2 O Tensor de Torção . . . 1770
34.2.3 Tipos Especiais de Conexões Afins . . . 1771
34.2.3.1 Conexões Simétricas (ou Livres de Torção) . . . 1772
34.2.3.2 Conexões Métricas (ou Riemannianas) . . . 1773
34.2.3.3 Conexões de Levi-Civita . . . 1779
34.2.3.4 Conexões de Weyl e a Origem das Transformações de Calibre . . . 1779
34.2.4 Gradiente, Divergente e Laplaciano . . . 1782
34.3 O Tensor de Curvatura . . . 1786
34.3.1 As Identidades de Bianchi e Outras Propriedades . . . 1789
34.3.2 O Tensor de Curvatura em Coordenadas Locais . . . 1791
34.3.3 A Curvatura Seccional . . . 1793
34.3.4 O Tensor de Ricci e a Curvatura Escalar . . . 1796
34.3.5 Comentário Sobre a Segunda Identidade de Bianchi e as Equações de Einstein . . . 1799
34.4 Geodésicas. O Mapa Exponencial Geodésico . . . 1802
34.4.1 Geodésicas. Definição . . . 1802
34.4.2 Geodésicas como Curvas Extremizantes do Comprimento (ou do Tempo Próprio) . . . 1804
34.4.3 O Mapa Exponencial Geodésico . . . 1807
34.4.4 Coordenadas Normais de Riemann e de Fermi. O Princípio de Equivalência . . . 1809
34.4.4.1 Coordenadas Normais de Riemann . . . 1810
34.4.4.2 Coordenadas Normais de Fermi . . . 1811
34.4.4.3 O Princípio de Equivalência . . . 1813
34.4.5 O Lema de Gauss . . . 1817
34.4.6 Pontos Conjugados e a Equação de Jacobi . . . 1821
34.4.6.1 A Equação de Jacobi . . . 1821
34.4.6.2 Pontos Conjugados . . . 1823
34.5 Campos de Killing . . . 1825
34.6 A Estrutura Causal de Variedades Lorentzianas . . . 1829
34.6.1 A Identidade de Raychaudhuri . . . 1831
APÊNDICES . . . 1841
34.A Demonstração de Algumas Propriedades do Tensor de Curvatura . . . 1841
34.A.1 Prova da Proposição 34.6 . . . 1841
34.A.2 Prova da Primeira Identidade de Bianchi, Proposição 34.8 . . . 1842
34.A.3 Prova da Segunda Identidade de Bianchi, Proposição 34.9 . . . 1843
34.A.4 Prova da Proposição 34.10 . . . 1845
34.A.5 Prova da Proposição 34.12 . . . 1846
34.B Propriedades Básicas de Coordenadas Normais de Riemann. Prova da Proposição 34.18 . . . 1847

35 Formas Diferenciais **1850**
35.1 Formas Diferenciais . . . 1850
35.1.1 A Derivada Exterior de Formas . . . 1854
35.1.2 Formas Exatas e Formas Fechadas . . . 1856
35.1.2.1 O Lema de Poincaré . . . 1859
35.2 Dualidade de Hodge . . . 1863
35.2.1 O Mapa Dual de Hodge . . . 1863
35.2.2 A Coderivada Exterior . . . 1866
35.2.3 O Operador de Laplace-de Rham . . . 1868
35.2.3.1 Definindo Gradiente, Divergente e Rotacional Via Formas Diferenciais . . . 1868
35.2.4 Formas Harmônicas. O Teorema de Decomposição de Hodge e o Teorema de Hodge . . . 1873
APÊNDICES . . . 1876
35.A Os Símbolos de Levi-Civita . . . 1876
35.B Composição de Mapas de Hodge. Demonstração de (35.39) . . . 1879
35.C Demonstração de (35.41) e (35.42) . . . 1880
35.D Demonstração de (35.50) . . . 1881

36 Capítulo Suplementar: Rudimentos da Geometria de Curvas e Superfícies em $\mathbb{R}^3$ **1882**
36.1 Curvas Regulares em $\mathbb{R}^3$ . . . 1883
36.1.1 Torção. Fórmulas de Frenet-Serret . . . 1887
36.1.2 Hélices Circulares e Hélices Gerais . . . 1890
36.1.2.1 Hélices Circulares . . . 1890
36.1.2.2 Hélices Gerais, ou Hélices de Inclinação Constante . . . 1893
36.1.3 Curvatura e Torção em Termos de Outros Parâmetros . . . 1894
36.1.4 Alguns Outros Exemplos . . . 1896
36.2 Superfícies Regulares em $\mathbb{R}^3$ . . . 1900
36.2.1 O Mapa de Gauss . . . 1901
36.2.2 A Primeira e a Segunda Formas Fundamentais . . . 1903
36.2.3 O Mapa de Gauss e sua Diferencial. O Operador de Forma . . . 1906
36.2.3.1 O Operador de Forma e a Segunda Forma Fundamental . . . 1907
36.2.3.2 As Curvaturas Principais. A Curvatura Gaussiana e a Curvatura Média . . . 1908
36.2.4 As Equações Fundamentais da Teoria de Superfícies . . . 1909
36.2.4.1 As Equações de Weingarten . . . 1909
36.2.4.2 As Equações de Gauss . . . 1912
36.2.4.3 Relações de Gauss-Peterson-Mainardi-Codazzi para Superfícies em $\mathbb{R}^3$ . . . 1914
36.2.4.4 Isometrias. O *Theorema Egregium* de Gauss . . . 1917
36.2.4.5 As Equações Fundamentais em Notação Tensorial. Relação com o Tensor de Curvatura . . . 1919
36.2.5 Derivação Covariante e seu Significado em Superfícies . . . 1922
36.2.5.1 O Transporte Paralelo ao Longo de uma Curva . . . 1928
36.2.5.2 A Conexão em Superfícies é uma Conexão Métrica . . . 1929
36.2.6 A Noção de Curvatura Geodésica. Geodésicas . . . 1930
36.2.6.1 Curvas Geodésicas em Superfícies . . . 1932
APÊNDICES . . . 1934
36.A Demonstração das Relações (36.204) e (36.205) . . . 1934

VIII Análise Funcional I. Séries e Transformadas de Fourier. Distribuições 1936

37 Aproximação de Funções. Aproximações Polinomiais e Séries de Fourier **1937**

37.1 Noções de Convergência para Sequências de Funções . . . 1938
37.1.1 Importância da Convergência Uniforme . . . 1939
37.1.1.1 Troca de Ordem entre Limites e Integrais . . . 1940
37.1.1.2 Troca de Ordem entre Limites e Derivadas . . . 1942
37.1.1.3 Troca de Ordem entre Derivadas e Integrais . . . 1942
37.2 Sequências Delta de Dirac . . . 1944
37.3 Aproximação de Funções por Polinômios . . . 1950
37.3.1 O Teorema de Weierstrass . . . 1950
37.3.2 O Teorema de Taylor . . . 1957
37.4 Aproximação de Funções por Polinômios Trigonométricos . . . 1964
37.4.1 Preliminares . . . 1965
37.4.2 A Série de Fourier de Funções Periódicas de Período T . . . 1968
37.4.3 Polinômios Trigonométricos e Funções Contínuas e Periódicas . . . 1969
37.4.4 Convergência de Séries de Fourier . . . 1974
37.4.4.1 Séries de Fourier em Senos ou Cossenos para Funções Definidas em Intervalos Compactos . . . 1980
37.4.5 Revisitando a Aproximação Uniforme de Funções Contínuas e Periódicas por Polinômios Trigonométricos . . . 1983
37.4.6 Somas de Cesàro . . . 1983
37.4.6.1 O Núcleo de Fejér . . . 1985
37.4.7 Séries de Fourier e o Espaço de Hilbert $L^2\big([-\pi,\,\pi],\,dx\big)$ . . . 1987
37.5 O Teorema de Stone-Weierstrass . . . 1988
37.6 Exercícios Adicionais . . . 1993
APÊNDICES . . . 2001
37.A Prova do Teorema de Weierstrass Usando Polinômios de Bernstein . . . 2001
37.B A Demonstração de Weierstrass do Teorema de Weierstrass . . . 2005

38 Introdução às Distribuições e às Transformadas de Fourier 2007
38.1 Funções de Schwartz e Funções de Teste . . . 2008
38.1.1 Funções Gaussianas . . . 2019
38.2 Transformadas de Fourier . . . 2022
38.2.1 Transformadas de Fourier no Espaço de Schwartz . . . 2025
38.2.1.1 As Relações de Weyl e a Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff . . . 2028
38.2.1.2 A Transformada de Fourier de Funções Gaussianas . . . 2031
38.2.1.3 Invertibilidade da Transformada de Fourier no Espaço de Schwartz . . . 2034
38.2.1.4 Transformadas de Fourier, Produtos de Convolução e Identidade de Plancherel . . . 2037
38.2.1.5 "Relações de Incerteza" para Transformadas de Fourier . . . 2039
38.2.2 A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n,\,dx)$ . . . 2041
38.2.2.1 Mais Algumas Transformadas de Fourier Relevantes em Aplicações . . . 2044
38.2.2.2 A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n,\,dx)$ e suas Propriedades Espectrais . . . 2046
38.2.3 Transformadas de Fourier: Tópicos Suplementares . . . 2049
38.2.3.1 A Fórmula de Soma de Poisson . . . 2049
38.2.3.2 Usos da Fórmula de Soma de Poisson. A Função θ de Jacobi . . . 2051
38.2.3.3 Transformadas de Fourier e Médias Angulares . . . 2052
38.3 Distribuições e Distribuições Temperadas . . . 2058
38.3.1 Primeiros Exemplos de Distribuições . . . 2060
38.3.2 Outros Exemplos de Distribuições . . . 2065
38.3.2.1 A Distribuição Valor Principal . . . 2065
38.3.2.2 Distribuições do Tipo Parte Finita de Hadamard . . . 2067
38.3.3 Algumas Relações Úteis Envolvendo Distribuições . . . 2070
38.3.4 Derivadas de Distribuições . . . 2074

38.3.4.1 Alguns Exemplos de Derivadas de Distribuições . . . 2077
38.3.4.2 Cálculo da Derivada de Algumas Distribuições de Interesse . . . 2078
38.3.5 Alguns Resultados Estruturais sobre Distribuições . . . 2080
38.3.6 Transformadas de Fourier de Distribuições Temperadas . . . 2081
38.3.6.1 Cálculo de Transformadas de Fourier de Algumas Distribuições Temperadas . . . 2081
38.3.7 Produtos de Distribuições . . . 2085
38.3.7.1 Produto de Convolução de Distribuições . . . 2090
38.4 Equações Diferenciais Distribucionais, Soluções Fundamentais e Funções de Green . . . 2091
38.4.1 Soluções Fundamentais . . . 2094
38.4.1.1 Soluções Fundamentais como Funções Generalizadas . . . 2095
38.4.1.2 O Caso de Operadores Lineares a Coeficientes Constantes . . . 2097
38.4.1.3 Alguns Exemplos Fisicamente Relevantes . . . 2102
38.5 Exercícios Adicionais . . . 2106
APÊNDICES . . . 2113
38.A Prova de (38.21) . . . 2113
38.B Prova da Proposição 38.16 . . . 2114
38.C Prova da Regra de Leibniz (38.6) . . . 2118

IX Análise Funcional II. Espaços de Hilbert e Teoria de Operadores 2121

39 Noções Básicas Sobre Espaços de Hilbert 2122
39.1 Aspectos Topológicos Básicos de Espaços de Hilbert . . . 2124
39.2 Aspectos Geométricos Básicos de Espaços de Hilbert . . . 2126
39.2.1 Fechos e Complementos Ortogonais. Somas Diretas de Subespaços Fechados . . . 2129
39.2.2 Funcionais Lineares e o Dual Topológico de um Espaço de Hilbert . . . 2132
39.2.2.1 O Teorema da Representação de Riesz . . . 2133
39.2.3 Conjuntos Ortonormais Completos em Espaços de Hilbert . . . 2135
39.2.4 Conjuntos Totais . . . 2146
39.2.4.1 Um Exemplo no Espaço $L^2(\mathbb{R},\, dx)$ . . . 2146
39.3 Somas Diretas e Produtos Tensoriais de Espaços de Hilbert. Espaços de Fock . . . 2150
39.3.1 Somas Diretas de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert . . . 2150
39.3.2 Somas Diretas de uma Coleção Contável de Espaços de Hilbert . . . 2151
39.3.3 Produtos Tensoriais de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert . . . 2155
39.3.4 Os Espaços de Fock . . . 2158
39.4 Coleções de Subespaços Fechados como Reticulados Ortomodulares . . . 2160
39.5 Exercícios Adicionais . . . 2163
APÊNDICES . . . 2164
39.A Um Exemplo: os Sistemas de Rademacher e de Walsh . . . 2164
39.B Exemplo de Subespaços Fechados Cuja Soma não é Fechada . . . 2166

40 Operadores Lineares Limitados em Espaços de Banach e de Hilbert 2168
40.1 Operadores Lineares em Espaços Vetoriais Normados . . . 2170
40.1.1 Espaços de Banach de Operadores . . . 2174
40.1.2 O Dual Topológico de um Espaço de Banach . . . 2178
40.1.3 O Teorema de Hahn-Banach e Algumas Consequências do Mesmo . . . 2182
40.1.4 O Teorema de Banach-Steinhaus ou Princípio de Limitação Uniforme . . . 2187
40.1.5 O Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado . . . 2188
40.2 Operadores Limitados em Espaços de Hilbert . . . 2195

40.2.1 A Noção de Operador Adjunto em Espaços de Hilbert . . . 2196
40.2.2 Operadores Autoadjuntos, Normais, Unitários, Projetores Ortogonais e Isometrias Parciais . . . 2199
40.3 Rudimentos da Teoria das Álgebras de Banach e Álgebras C* . . . 2208
40.3.1 Álgebras de Banach . . . 2208
40.3.2 Alguns Fatos Estruturais sobre Álgebras C* . . . 2211
40.3.2.1 Álgebras com Involução e a Unidade . . . 2211
40.3.3 A Inversa de Operadores Limitados . . . 2215
40.3.4 O Espectro de Operadores em Álgebras de Banach . . . 2220
40.3.5 O Operador Resolvente e Propriedades Topológicas do Espectro . . . 2221
40.3.5.1 O Teorema da Aplicação Espectral . . . 2226
40.3.6 O Raio Espectral . . . 2227
40.3.7 O Homomorfismo de Gelfand em Álgebras C* . . . 2231
40.3.8 Raízes Quadradas de Operadores em Álgebras de Banach . . . 2234
40.3.9 Elementos Positivos de Álgebras C* . . . 2236
40.3.9.1 Relação de Ordem Decorrente da Positividade em Álgebras C* . . . 2240
40.3.10 Aproximantes da Unidade em Álgebras C* . . . 2241
40.3.10.1 Cosets por Bi-Ideais em Álgebras C* . . . 2244
40.4 Álgebras de von Neumann. Um Mínimo . . . 2248
40.4.1 O Teorema do Bicomutante . . . 2250
40.5 Um Pouco sobre Estados e Representações de Álgebras C* . . . 2253
40.5.1 Morfismos Entre Álgebras C* . . . 2253
40.5.2 Representações de Álgebras C* . . . 2255
40.5.2.1 Estados em Álgebras C* e a Representação GNS . . . 2257
40.5.2.2 Estados Puros, de Mistura e a Irredutibilidade de Representações GNS . . . 2263
40.5.3 Exemplos em Álgebras de Matrizes. Construção GNS. Estados Puros e a Entropia de von Neumann . . . 2265
40.5.3.1 A Entropia de von Neumann . . . 2269
40.5.3.2 A Construção GNS em $\mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n)$ . . . 2273
40.6 O Espectro de Operadores em Espaços de Banach . . . 2276
40.6.1 O Espectro de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert . . . 2279
40.6.2 Espectro em Espaços de Banach. Alguns Exemplos e Contraexemplos . . . 2281
40.7 O Lema da Raiz Quadrada em Espaços de Hilbert . . . 2285
40.7.1 A Decomposição Polar de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert . . . 2290
40.8 Operadores Compactos em Espaços de Banach e de Hilbert . . . 2293
40.8.1 Alguns Fatos Gerais Sobre o Espectro de Operadores Compactos . . . 2302
40.8.1.1 O Teorema da Alternativa de Fredholm . . . 2304
40.8.2 O Teorema Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos . . . 2309
40.9 O Teorema Espectral para Operadores Limitados Autoadjuntos em Espaços de Hilbert . . . 2316
40.9.1 O Cálculo Funcional Contínuo e o Homomorfismo de Gelfand . . . 2316
40.9.2 Generalizando o Cálculo Funcional Contínuo. As Medidas Espectrais . . . 2317
40.9.3 Medidas com Valores em Projeções Ortogonais . . . 2325
40.9.4 Os Projetores Espectrais e o Teorema Espectral . . . 2329
40.10 Operadores Tipo Traço e de Hilbert-Schmidt . . . 2332
40.10.1 Operadores Tipo Traço, ou Traciais . . . 2334
40.10.1.1 O Traço de um Operador Tracial . . . 2338
40.10.2 Operadores de Hilbert-Schmidt . . . 2341
40.10.3 Operadores Traciais e de Hilbert-Schmidt e os Operadores Compactos . . . 2348
40.10.4 Operadores de Hilbert-Schmidt e Operadores Integrais . . . 2350
40.10.5 O Teorema de Lidskii. Traço e Espectro de Operadores Traciais . . . 2353

40.11 O Traço Parcial . . . 2354
40.12 Exercícios Adicionais . . . 2358
APÊNDICES . . . 2360
40.A Prova do Teorema 40.19 . . . 2360
40.B Um Lema Sobre Espaços Normados Devido a F. Riesz . . . 2362

41 Operadores Lineares Não-Limitados em Espaços de Hilbert **2364**
41.1 Classificando Operadores Não-Limitados . . . 2365
41.1.1 Operadores Fechados . . . 2366
41.1.2 Operadores Fecháveis . . . 2369
41.1.3 O Adjunto de um Operador Linear . . . 2370
41.1.3.1 Operadores Simétricos, Autoadjuntos e Essencialmente Autoadjuntos . . . 2375
41.2 Espaços de Deficiência e Extensões Autoadjuntas de Operadores Simétricos . . . 2381
41.2.1 Considerações Preliminares . . . 2381
41.2.2 Classificação de Extensões Simétricas Fechadas de Operadores Simétricos Fechados. Extensões Autoadjuntas . . . 2382
41.3 Formas Quadráticas e Alguns de Seus Usos . . . 2387
41.3.1 Alguns Usos de Formas Quadráticas . . . 2394
41.3.1.1 A Forma de Soma . . . 2394
41.3.1.2 A Extensão de Friedrichs . . . 2394
41.4 Bestiário de Exemplos e Contraexemplos . . . 2396
APÊNDICES . . . 2404
41.A Prova do Lema 41.6 . . . 2404

42 O Limite Indutivo de Álgebras **2405**

X Aplicações e Usos em Física **2414**

43 Equações Diferenciais. Problemas Selecionados de Interesse Físico **2415**
43.1 Dedução de Algumas Equações Diferenciais de Interesse . . . 2416
43.1.1 Dedução Informal da Equação de Difusão de Calor . . . 2416
43.1.2 Dedução Informal da Equação da Corda Vibrante . . . 2420
43.2 As Equações de Helmholtz e de Laplace . . . 2426
43.2.1 Problemas em Duas Dimensões em Coordenadas Polares . . . 2428
43.2.2 Problemas em Três Dimensões em Coordenadas Esféricas . . . 2430
43.3 Problemas de Difusão em uma Dimensão . . . 2433
43.3.1 A Evolução da Temperatura de uma Barra Finita . . . 2433
43.3.2 A Evolução da Temperatura de uma Barra Infinita . . . 2437
43.3.3 A Evolução da Temperatura de uma Barra Semi-Infinita . . . 2442
43.4 A Equação de Ondas . . . 2447
43.4.1 A Equação de Ondas em $1+1$ Dimensões . . . 2448
43.4.2 Interlúdio: Ondas Caminhantes e a Equação do Telégrafo . . . 2451
43.4.3 Outro Interlúdio: Sólitons . . . 2453
43.4.3.1 Sólitons na Equação de Korteweg-de Vries . . . 2454
43.4.3.2 Sólitons na Equação de Sine-Gordon . . . 2456
43.4.3.3 Sólitons no Modelo de Poço-Duplo . . . 2457
43.4.3.4 Sólitons na Equação de Schrödinger Não-Linear . . . 2459
43.4.4 A Equação de Ondas e Transformadas de Fourier . . . 2463
43.4.4.1 A Equação de Ondas em $3+1$ Dimensões. A Solução de Kirchhoff . . . 2466
43.4.4.2 A Equação de Ondas em $2+1$ Dimensões . . . 2467

43.5 O Problema da Corda Vibrante . . . 2469
43.5.1 Corda Vibrante Homogênea . . . 2469
43.5.2 O Problema da Corda Homogênea Pendurada . . . 2472
43.5.3 Corda Vibrante Não-Homogênea . . . 2475
43.5.4 O Problema da Membrana Retangular Homogênea . . . 2478
43.6 O Problema da Membrana Circular Homogênea . . . 2479
43.7 O Oscilador Harmônico na Mecânica Quântica e a Equação de Hermite . . . 2481
43.8 O Átomo de Hidrogênio e a Equação de Laguerre Associada . . . 2484
43.9 Propagação de Ondas em Tanques Cilíndricos . . . 2486
43.10 Equações Hiperbólicas Lineares em 1+1 Dimensões e Equações Integrais . . . 2494
43.11 Aplicações do Método da Função de Green . . . 2501
43.11.1 A Equação de Poisson em Três Dimensões . . . 2502
43.11.2 A Equação de Difusão Não-Homogênea . . . 2503
43.11.3 A Equação de Ondas Não-Homogênea em $n+1$-Dimensões . . . 2505
43.11.3.1 A Equação de Ondas Não-Homogênea em $3+1$-Dimensões . . . 2509
43.11.3.2 Aplicações à Eletrodinâmica. Potenciais Retardados e Equações de Jefimenko . . . 2512
43.11.3.3 A Equação de Ondas Não-Homogênea em $2+1$-Dimensões . . . 2517
43.11.3.4 A Equação de Ondas Não-Homogênea em $1+1$-Dimensões . . . 2519
43.12 Exercícios Adicionais . . . 2521
43.12.1 Problemas Selecionados de Eletrostática . . . 2521
43.12.2 Equação de Difusão em uma Dimensão . . . 2524
43.12.3 Equação de Ondas em uma Dimensão . . . 2526
43.12.4 Modos de Vibração de Membranas . . . 2532
43.12.5 Problemas sobre Ondas e Difusão em Três Dimensões Espaciais . . . 2535
43.12.6 Problemas Envolvendo Funções de Green . . . 2537
APÊNDICES . . . 2539
43.A Duas Transformadas de Laplace . . . 2539

44 Rudimentos da Teoria do Potencial **2541**
44.1 A Equação de Poisson em Três Dimensões . . . 2541
44.1.1 A Equação de Laplace em Domínios Limitados de $\mathbb{R}^3$. O Problema de Dirichlet . . . 2545
44.1.2 A Equação de Poisson em $\mathbb{R}^3$ . . . 2545
44.1.3 A Equação de Poisson Domímios Limitados de $\mathbb{R}^3$ . . . 2546
44.1.3.1 O Caso de Condições de Dirichlet . . . 2546
44.1.3.2 O Caso de Condições de Neumann . . . 2547
44.1.3.3 Existência de Solução . . . 2547
44.1.4 Aplicações à Eletrostática: Capacitância . . . 2547
44.2 O Teorema de Decomposição de Helmholtz . . . 2547
44.2.1 Aplicações ao Eletromagnetismo . . . 2551
44.3 Propriedades Básicas de Funções Harmônicas em $\mathbb{R}^3$ . . . 2552

45 Notas Sobre Mecânica Clássica. I **2554**
45.1 Sistemas de Referência e suas Transformações na Mecânica Clássica. Acelerações Inerciais . . . 2555
45.2 Mecânica de Pontos Materiais . . . 2567
45.3 Interlúdio. Aceleração de Coriolis e a Rotação Diurna da Terra . . . 2575
45.3.1 Experimentos de Queda Livre e Mensuração de seu Desvio . . . 2577
45.3.2 O Experimento do Pêndulo de Foucault sob Pequenas Oscilações . . . 2580
45.4 Mecânica de Corpos Rígidos . . . 2587
45.4.1 Propriedades do Tensor Momento de Inércia . . . 2589

45.4.2 As Equações Dinâmicas para Corpos Rígidos . . . 2591
45.4.2.1 Estabilidade de Rotações em Torno dos Eixos Principais. O Teorema do Eixo Intermediário . . . 2595
45.4.3 Movimento de Piões. Algumas Soluções . . . 2598
45.5 O Formalismo Lagrangiano. Fundamentos . . . 2604
45.5.1 O Princípio de Hamilton e as Equações de Euler-Lagrange em Sistemas sem Vínculos . . . 2606
45.5.2 Invariância das Equações de Euler-Lagrange por Mudanças de Coordenadas e de Sistemas de Referência . . . 2611
45.5.3 Sistemas com Vínculos Holonômicos . . . 2613
45.5.4 O Princípio de D'Alembert e o Tratamento de Forças não Conservativas . . . 2614
45.5.4.1 Partícula Carregada em um Campo Eletromagnético. A Força de Lorentz . . . 2620
45.5.5 Sistemas de Coordenadas Não Inerciais no Formalismo Lagrangiano . . . 2622
45.5.5.1 Uma Constante de Movimento . . . 2624
45.5.6 O Formalismo Lagrangiano em Sistemas Não Autônomos . . . 2625
45.6 O Formalismo Lagrangiano. Simetrias Contínuas e Leis de Conservação. O Teorema de Noether . . . 2627
45.6.1 A Noção de Transformação de Simetria . . . 2629
45.6.2 Simetrias Contínuas com $\gamma = 0$ e Leis de Conservação . . . 2630
45.6.3 Similitude Mecânica . . . 2634
45.6.4 Simetrias Contínuas com $\gamma \neq 0$ . . . 2635
45.7 O Formalismo Hamiltoniano . . . 2636
45.7.1 Derivação Variacional das Equações de Hamilton . . . 2639
45.7.2 Colchetes de Poisson . . . 2640
45.7.3 Transformações Canônicas . . . 2647
45.8 Exercícios Adicionais . . . 2658
APÊNDICES . . . 2660
45.A Mais Algumas Consequências da Proposição 45.1 . . . 2660
45.B Um Lema Útil Sobre Funções Contínuas . . . 2661

46 Notas Sobre Mecânica Clássica. II. Problemas e Aplicações **2663**
46.1 As Curvas Tautócrona, Cicloide e Braquistócrona . . . 2663
46.2 Movimento em Potenciais Centrais e o Problema de Kepler . . . 2670
46.2.1 O Problema de Um Corpo sob Forças Centrais . . . 2670
46.2.2 O Problema de Dois Corpos sob Forças Centrais . . . 2673
46.2.3 O Problema de Kepler. Determinação das Órbitas . . . 2673
46.2.4 O Problema de Kepler. Determinação das Trajetórias. A Equação de Kepler . . . 2677
46.3 O Problema de Três Corpos e os Pontos de Lagrange . . . 2682
46.3.1 Os Pontos de Lagrange . . . 2683
46.3.1.1 As Soluções das Equações de Equilíbrio (46.77). O Caso Equilátero . . . 2685
46.3.1.2 As Soluções das Equações de Equilíbrio (46.77). O Caso Não Equilátero . . . 2687
46.3.1.3 Os Pontos de Lagrange L_1, L_2 e L_3 quando $m_1 \gg m_2 \gg m_3$ . . . 2691
46.3.2 Generalizações das Soluções Periódicas de Lagrange . . . 2693
46.3.3 O Problema de Três Corpos Restrito e a Integral de Jacobi . . . 2696
46.4 Modos Normais de Oscilação . . . 2701
46.4.1 Modos Normais e a Energia Mecânica . . . 2708
46.5 Ângulos de Euler na Mecânica de Corpos Rígidos . . . 2710
46.5.1 Usos dos Ângulos de Euler. O Pião de Lagrange . . . 2712
46.6 Exercícios Adicionais . . . 2719
APÊNDICES . . . 2724
46.A Seções Cônicas . . . 2724
46.A.1 Elipses e Círculos . . . 2724
46.A.2 Hipérboles . . . 2725

46.A.3 Parábolas . . . 2727
46.A.4 Parametrização Polar de Seções Cônicas . . . 2727
46.B Soluções Colineares para Pontos de Lagrange . . . 2731
46.C Cálculo dos Pontos de Lagrange L_1, L_2 e L_3 quando $m_1 \gg m_2 \gg m_3$ . . . 2733

47 Spinores e o Grupo de Lorentz **2737**
47.1 SL(2, $\mathbb{C}$) e o Grupo de Lorentz . . . 2737
47.1.1 Ações de SL(2, $\mathbb{C}$) e o Grupo de Lorentz . . . 2740
APÊNDICES . . . 2745
47.A Um Isomorfismo entre PSL(2, $\mathbb{C}$) e $\mathscr{L}_+^\uparrow$ . . . 2745

48 Operadores e a Física Quântica **2752**
48.1 Algumas Considerações Gerais Sobre Teorias Físicas . . . 2752
48.2 O Modelo da Mecânica Clássica . . . 2755
48.3 O Quadro da Física Quântica e a Relevância do Teorema Espectral . . . 2757
48.4 As Relações de Incerteza . . . 2759
48.4.1 A Relação de Incerteza de Heisenberg . . . 2762
48.4.2 A Relação de Incerteza de Schrödinger . . . 2763
48.4.3 As Relações de Incerteza para Operadores Não Limitados . . . 2767
48.4.3.1 As Relações de Incerteza e Transformações Simpléticas . . . 2769
48.4.4 Discussão Adicional . . . 2770
48.5 As Desigualdades de Bell . . . 2773
48.5.1 O Problema das Variáveis Escondidas . . . 2773
48.5.2 Obtendo as Desigualdades de Bell . . . 2779
48.5.3 Alguns Resultados Matemáticos sobre as Desigualdades de Bell . . . 2784
48.6 Fidelidade e Purificação . . . 2788
48.6.1 Purificação . . . 2791
48.7 O Teorema de Wigner. Simetrias . . . 2794
48.8 Lógica e a Física Quântica . . . 2796
48.8.1 Origem, Motivação e Extensões . . . 2796
48.8.2 O Trabalho de Birkhoff-von Neumann . . . 2798
48.8.3 Prova de uma Versão Parcial do Teorema de Kochen-Specker . . . 2798

Bibliografia **2804**

Índice Remissivo **2825**

Prefácio

A intenção básica deste livro é fornecer a estudantes de Física noções matemáticas necessárias a uma melhor compreensão de desenvolvimentos modernos da Física Teórica e da Matemática. Longe vai o tempo em que o conhecimento matemático requerido a um físico teórico restringia-se a certos métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais. Essa visão, porém, infelizmente impregna até o presente a concepção de certas disciplinas ditas de Física-Matemática (ou de Métodos Matemáticos da Física Teórica) e de certos maus livros sobre o tema. Em contraste, noções sobre Estruturas Algébricas, Topologia Geral, Teoria da Medida e da Integração, Geometria Diferencial, Teoria de Grupos, Teoria de Distribuições, Análise Funcional e Álgebras de Operadores são hoje imprescindíveis ao trabalho de um físico teórico.

Este livro cresceu a partir de notas de aula escritas pelo autor em diversas disciplinas de graduação e pós-graduação ministradas no IFUSP. Diversos de seus capítulos podem ser empregados em disciplinas de graduação ou pós-graduação, mas o mesmo foi concebido primordialmente para servir ao autoestudo de estudantes e docentes. De modo geral, o nível varia entre intermediário e avançado. Também de modo geral, o texto é de leitura autossuficiente, mas vez por outra algum estudo complementar é sugerido. A melhor maneira de um estudante conduzir-se no estudo de assuntos matemáticos é munindo-se de uma boa coleção de exemplos e contraexemplos de várias situações específicas, patologias, casos especiais etc. Além de servirem de auxílio à memória, exemplos ajudam a melhor entender a motivação de certas definições e a compreender restrições mencionadas em enunciados de teoremas. Dessa forma, procuramos sempre que possível apresentar (muitas vezes em exercícios!) um bom número de exemplos e contraexemplos para as várias situações tratadas.

Este texto, porém, não é substituto à leitura dos bons livros especializados nos diversos assuntos aqui tratados. Parte do material aqui apresentado pode ser encontrado em diversas fontes, citadas na bibliografia (página 2805), mas a apresentação e sua ordem são próprias. Há também neste texto demonstrações do próprio autor de resultados conhecidos que são, por alguma razão, dificilmente encontradas na literatura. Mas como comenta o autor de [291] em seu prefácio, *"qualquer livro-texto deve mais aos livros e notas de outros do que a seu autor nominal"*.

Fazemos notar que este livro está ainda sendo trabalhado e alguns capítulos e seções podem vir a ser alterados, corrigidos, eliminados ou acrescidos de material. Além disso, novos capítulos serão escritos. O material já presente é, porém, útil a todos aqueles que queiram iniciar-se nos assuntos aqui expostos. Versões atualizadas serão colocadas na "rede" (no endereço acima indicado) sempre que possível.

O autor agradece a todos os que apresentarem sugestões. Fabulosas somas em dinheiro são oferecidas a todos aqueles que encontrarem erros no texto. Entre os já aquinhoados encontram-se Prof. Matheus Grasselli, Prof. Alexandre T. Baraviera, Prof. Marcos V. Travaglia, Daniel Augusto Cortez, Djogo F. C. Patrão, Cléber de Mico Muramoto, Profa. Katiúscia Nadyne Cassemiro, Urbano Lopes França Junior, Gustavo Barbagallo de Oliveira, Priscila Vieira Franco Gondeck, Darielder Jesus Ribeiro, Henrique Scemes Xavier, Prof. Daniel Augusto Turolla Vanzella, Leonardo Fernandes Dias da Motta, Krishnamurti José de Andrade, Prof. Pedro Tavares Paes Lopes, Diego Cortegoso Assêncio, Fleury José de Oliveira Filho, Paulo Henrique Reimberg, Fabíola Diacenco Xavier, Márcio André Prieto Aparício Lopez, Dorival Gonçalves Netto, Célia Santos Jordão Alves, Bruno Lima de Souza, Leandro Saccoletto, João Pedro Jericó de Andrade, Ronaldo da Silva Alves Batista, Carolina Dias Alexiou, Arão Benjamin Garcea, Cláudio Mayrink Verdun, Leonardo Hanao Gabriel, Felipe Contatto, Victor Bernando Chabu, Bruno Hideki Kimura, Fabrizio Fogaça Bernardi, Alessandro Takeshi Morita Gagliardi, Cedrick Miranda Mello, Thiago Costa Raszeja, Pedro Rangel Caetano, Anderson Seigo Misobuchi, Leandro Silva Pimenta, Alexandre Homrich, Prof. Edélcio Gonçalves de Souza, Lissa de Souza Campos, Ricardo Correa da Silva, Leonardo Almeida Lessa, Marcos Carvalho Brum de Oliveira, Victor Luccas Ramalho Moura, Felipe Dilho Alves, Caio Lopes Junqueira Reis, Bernardo Leal de Oliveira, Jose Eduardo Rodrigues Martins Peres y Peres, Henrique Ay Casa Grande, Ana Camila Costa Esteves, e Rafael Grossi e Fonseca, aos quais somos muito gratos por correções e sugestões. Estas Notas foram escritas durante um intervalo longo de tempo, de sorte que alguns dos seus usuários são hoje colegas professores e fizemos menção a isso na lista acima, quando soubemos. Pedimos desculpas por eventuais omissões.

As Seções 47.A, página 2745, e 25.2.4.1, página 1386, foram originalmente escritas por Daniel Augusto Cortez. A Seção 43.9, página 2486, foi originalmente escrita por André M. Timpanaro, Fleury J. Oliveira e Paulo H. Reimberg. A eles dedicamos agradecimentos especiais.

João Carlos Alves Barata

São Paulo, 19 de abril de 2024
Departamento de Física Matemática do IFUSP
Universidade de São Paulo

Bons Mots

"All my life, I have worked as a scientist looking for situations where a little elegant mathematics can help us to understand nature. I found problems that I could solve with a teaspoonful of elegant mathematics, in physics and engineering and astronomy and biology. I never worried whether the problems were important or unimportant. So long as the mathematics was beautiful, I was happy".
Freeman J. Dyson (1923–2020), in "Playing with Numbers", published in "One Hundred Reasons to be a Scientist", Copyright 2004 by the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP).

"O comportamento de um físico em relação à Matemática é similar a de um ladrão inteligente em relação ao código penal: ele estuda apenas o suficiente para evitar punições".

I. M. Gelfand (1913–2009).

"The greatest enemy of knowledge is not ignorance, it is the illusion of knowledge".
Daniel J. Boorstin (1914–2004), também atribuido a Stephen W. Hawking (1942–2018).

"A mente não é um vaso a ser repleto, mas uma tocha a ser acesa".

Plutarco (46?–120).

"Mathematical proofs really aren't there to convince you that something is true – they're there to show you why it is true".
Andrew M. Gleason (1921–2008).

"It can be said with complete confidence that any scientist of any age who wants to make important discoveries must study important problems. Dull or piffling problems yield duff of piffling answers. It is not enough that a problem should be 'interesting' - almost any problem is interesting if it is studied in sufficient depth. ... No, the problem must be such that it matters what the answer is - whether to science generally or to mankind".
Peter Brian Medawar (1915–1987), 'Advice to a Young Scientist' (1979).

"The public has a distorted view of science, because children are taught in school that science is a collection of firmly established truths. In fact, science is not a collection of truths. It is a continuing exploration of mysteries".
Freeman Dyson (1923–2020), in *How We Know*, The New York Review of Books, March 10, 2011.

"When a theoretical physicist can not solve a problem he goes for the next more difficult one".

Sir Michael Francis Atiyah (1929–2019).

"Mathematics is not a deductive science – that's a cliche. When you try to prove a theorem, you don't just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial and error, experimentation, guesswork".

Paul R. Halmos, in [209].

"The source of all great mathematics is the special case, the concrete example. It is frequent in mathematics that every instance of a concept of seemingly great generality is in essence the same as a small and concrete special case".

Paul R. Halmos, in [209].

"Mathematics is a subarea of Applied Mathematics".

Peter Lax (1926–).

"Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap".
Vladimir I. Arnold (1937–2010). In "On teaching mathematics". Address at the discussion on teaching of mathematics in Palais de Découverte in Paris on 7 March 1997.

"In science, self-satisfaction is death. Personal self-satisfaction is the death of the scientist. Collective self-satisfaction is the death of the research. It is restlessness, anxiety, dissatisfaction, agony of mind that nourish science".
Jacques Lucien Monod (1910–1976), in New Scientist, 1976.

"Não existe nenhuma categoria da Ciência à qual se possa dar o nome de Ciência Aplicada. O que existe são a Ciência e as aplicações da Ciência, intimamente ligadas, como frutos à árvore que os gerou".
Louis Pasteur (1822–1895), in "Pourquoi la France n'a pas trouvé d'hommes supérieurs au moment du péril", Revue Scientifique (Paris, 1871).

"Disse Kant[1]*:* 'Eu afirmo que em cada Ciência Natural específica pode-se atingir somente tanto Conhecimento verdadeiro quanto nela houver de Matemática'. *De fato, somente dominamos uma teoria das ciências naturais quando expomos seu núcleo matemático e o desvendamos completamente".*
David Hilbert (1862–1943) em "Naturerkennen und Logik", palestra apresentada em setembro de 1930, em Königsberg, em Congresso da Associação Alemã de Cientistas Naturais e Médicos.

"Não podemos nos permitir acreditar naqueles que em nossos dias, com cenho filosófico e em tom de superiodidade, profetizam a decadência cultural e apologizam o Ignorabimus. *Para nós não existe o* Ignorabimus *e, em minha opinião, também não para as Ciências Naturais. Em lugar do tolo* Ignorabimus *nosso lema é 'Nós devemos saber, nós iremos saber'".*
David Hilbert. ibidem.

"A geometry implies the heterogeneity of locus, namely that there is a locus of the Other. Regarding this locus of the Other, of one sex as Other, as absolute Other, what do the most recent developments in topology allow us to posit? I will posit here the term compactness. Nothing is more compact than a fault, assuming that the intersection of everything that is enclosed therein is accepted as existing over an infinite number of sets, the result being that the intersection implies this infinite number. That is the very definition of compactness".
Jacques Lacan (1901–1981), em *Le Séminaire Jacques Lacan*, Livre XX: Encore, 1972–1973. Texto organizado por Jacques-Alain Miller. Paris: Éditions du Seuil. Traduzido e citado por Alan Sokal e Paul Bricmont in *Intellectual Impostures.*

Para a definição de compacidade, vide Seção 32.3, página 1610.

"Um pesquisador não 'crê', ele simplesmente pesquisa. [...] Por deformação profissional, talvez. Em todo caso, como se fosse um jogo".
Georges Dumézil (1898–1986), filólogo, em entrevista a Laurence Gilbert, do "Le Point", 1983.

"There is no such thing as a unique scientific vision, any more than there is a unique poetic vision. Science is a mosaic of partial and conflicting visions".
Freeman J. Dyson (1923–2020), [133], cap. I.

* ** *** ** *

"Unprovided with original learning, unformed in the habits of thinking, unskilled in the arts of composition, I resolved to write a book".
Edward Gibbon (1737–1794).

"Talvez eu não tenha tido êxito em fazer as coisas difíceis tornarem-se fáceis, mas pelo menos eu nunca fiz um assunto fácil tornar-se difícil".
F. G. Tricomi (1897–1978).

"... E costumava dizer que nenhum livro é tão ruim a ponto de nada conter de valor...".
Plínio, o Novo (61–114), a respeito de seu tio, Plínio, o Velho (23–79).

"Would I had phrases that are not known, utterances that are strange, in new language that has not been used, free from repetition, not an utterance that has grown stale, which men of old have spoken".
Khakheperresenb (ci. 1900 AC), escriba egípcio. Citado em "The Burden of the Past and the English Poet" de Walter Jackson Bate.

"Tudo que deveria ter sido dito já o foi, mas como ninguém ouvia, tudo tem de ser dito novamente".
André Paul Guillaume Gide (1869–1951).

"Uma obra nunca é terminada, ela é apenas abandonada".
Atribuido a Paul Valéry (1871–1945).

[1] Immanuel Kant (1724–1804).

Como Ler Este Livro

"Reading made Don Quixote a gentleman. Believing what he read made him mad".

George Bernard Shaw (1856–1950).

O leitor deste livro não deve possuir o temor de que o mesmo deva (nem a expectativa de que o mesmo possa) ser lido linearmente, ou seja, na sequência numérica crescente dos capítulos e seções. Ele não foi concebido dessa forma e tal concepção não seria exequível devido à variedade de assuntos, às diferenças de nível de abordagem e à complexidade das conexões entre os diferentes temas. O *Conhecimento* não é um conjunto totalmente ordenado pela relação de complexidade conceitual ou pela relação de motivação (para a definição da noção de ordem total em conjuntos, vide página 77).

Fizemos um esforço para tornar autosuficientes as diversas seções e os diversos capítulos, incluindo sempre que possível, por vezes de forma repetida, todas as definições localmente necessárias. Como é natural, porém, nem sempre é possível manter essa linha de organização, de modo que ocorrem também muitas referências cruzadas entre seções e capítulos.

Os diversos capítulos não foram escritos em ordem crescente de complexidade. Por vezes, a motivação para um determinado tema é apresentada em um capítulo anterior, mas por vezes essa motivação surge em um capítulo posterior. Nos capítulos sobre equações diferenciais, por exemplo, a discussão de aplicações em Física é postergada para o Capítulo 43, página 2416, e o leitor interessado na motivação para certos tratamentos pode sem perdas consultar esse capítulo antes ou durante o estudo de capítulos que lhe antecedem.

Um problema semelhante ocorre com temas ligados à Topologia e à Análise. Os capítulos dedicados a esses assuntos servem a capítulos que lhes sucedem, mas também, em parte, a capítulos que lhes antecedem. Cabe ao leitor perceber suas necessidades formativas, avançando ou retrocedendo na leitura conforme lhe aprouver. A consulta ao Índice Remissivo (página 2825) ou à lista de Capítulos e Seções que compõem o texto (página 6) deve ser de valia para tal.

Notação e Advertências

Para facilitar a consulta e a leitura, listamos aqui sem muitos comentários um pouco da notação que empregaremos nestas Notas.

- Se z é um número complexo denotaremos seu complexo conjugado por $\overline{z}$. A notação z^* (mais comum em textos de Física) pode ocorrer mais raramente.
- O símbolo $A := B$ ou $B =: A$ denota que A é definido pela expressão B. O símbolo $A \equiv B$ indica que A e B são duas notações distintas para o mesmo objeto.
- Sejam A e B conjuntos. Se A é um subconjunto de B, denotamos esse fato por $A \subset B$ ou por $B \supset A$. Por $A \subsetneqq B$ ou $B \supsetneqq A$ denotamos o fato de A ser um subconjunto próprio de B, ou seja, $A \subset B$, mas $A \neq B$.
- Se $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$ e $y = (y_1,\ \ldots,\ y_n)$ são vetores reais com n componentes (ou seja, elementos de $\mathbb{R}^n$), então
$$\langle x,\ y\rangle_{\mathbb{R}} \ :=\ x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$
define o chamado *produto escalar usual em* $\mathbb{R}^n$.
- Se $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$ e $y = (y_1,\ \ldots,\ y_n)$ são vetores complexos com n componentes (ou seja, elementos de $\mathbb{C}^n$), então
$$\langle x,\ y\rangle_{\mathbb{C}} \ :=\ \overline{x_1}y_1 + \cdots + \overline{x_n}y_n$$
define o chamado *produto escalar usual em* $\mathbb{C}^n$.
- Se $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$ e $y = (y_1,\ \ldots,\ y_n)$ são vetores complexos com n componentes (ou seja, elementos de $\mathbb{C}^n$), então
$$\boldsymbol{\beta}(x,\ y) \ :=\ x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$
define a chamada *forma bilinear usual em* $\mathbb{C}^n$.
- $\mathrm{Mat}(\mathbb{R},\ m,\ n)$ ou $\mathrm{Mat}(m,\ n,\ \mathbb{R})$ designa o conjunto de todas as matrizes reais $m \times n$ (m linhas e n colunas). Analogamente, $\mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ m,\ n)$ ou $\mathrm{Mat}(m,\ n,\ \mathbb{C})$ designa o conjunto de todas as matrizes complexas $m \times n$. O conjunto de todas as matrizes quadradas $n \times n$ com entradas reais (complexas) será denotado simplesmente por $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{R},\ n)$ (por $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$).
- Se A é um elemento de $\mathrm{Mat}(\mathbb{R},\ n)$ ou de $\mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$, então A^T designa a matriz transposta de A, ou seja, a matriz cujos elementos de matriz ij são $\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}$.
- Se A é um operador linear em um espaço vetorial complexo (com um certo produto escalar), seu adjunto é denotado por A^*. Em textos de Física é mais comum denotá-lo por $A^\dagger$, mas não usaremos isso aqui.

  Assim, se $A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$, então A^* será a adjunta de A (em relação ao produto escalar usual, acima). O elemento de matriz ij de A^* será $\left(A^*\right)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.
- Denotaremos o operador identidade agindo em um espaço vetorial (a matriz identidade, agindo em um espaço vetorial de dimensão finita) pelo símbolo $\mathbb{1}$. Esse símbolo também representará a unidade de uma álgebra.
- Designaremos um produto escalar entre dois vetores u e v sempre por $\langle u,\ v\rangle$ e nunca por $(u,\ v)$, para não causar confusão com a notação para par ordenado. Outra notação possível é aquela empregada frequentemente em textos de Mecânica Quântica: $\langle u\,|\,v\rangle$, mas faremos raramente uso da mesma.
- Ainda sobre produtos escalares, seguiremos sempre a convenção dos textos de Física: um produto escalar em um espaço vetorial sobre os complexos é linear em relação ao segundo argumento e antilinear em relação ao primeiro. Assim, se α e β são números complexos, teremos $\langle \alpha u,\ \beta v\rangle = \overline{\alpha}\beta\langle u,\ v\rangle$. Textos de Matemática adotam por vezes a convenção oposta (ou mesmo ambas!).
- Sobre o emprego das palavras *função*, *aplicação*, *mapeamento*, *mapa*, *funcional*, *operador*, *operação*, *produto* e *forma*, que por vezes causam perplexidade em estudantes, remetemos ao comentário à página 60.

- Dado um conjunto $X \neq \emptyset$, denota-se por $\mathbb{P}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos de X. $\mathbb{P}(X)$ é denominado o *conjunto das partes de* X.
- A topologia usual da reta real $\mathbb{R}$ será denotada aqui por $\tau_{\mathbb{R}}$.
- A σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ será (quase sempre) denotada aqui por $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$.
- A σ-álgebra dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ mensuráveis por Lebesgue será (quase sempre) denotada aqui por $\mathcal{M}_{\mu_L}$.
- Por $\mathbb{N}$ denotamos o conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$. Por $\mathbb{N}_0$ denotamos o conjunto dos números naturais, incluindo o zero: $\mathbb{N}_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$. O leitor deve ser advertido, porém, que essa convenção não é universal. O padrão ISO 31-11 (dedicado a sinais e símbolos matemáticos) recomenda a convenção $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ e $\mathbb{N}^* = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$. O leitor deve ter cuidado, portanto, ao comparar textos diferentes.
- Para $x \in \mathbb{R}$, o símbolo $\lfloor x \rfloor$ designa o maior inteiro menor ou igual a x. O símbolo $\lceil x \rceil$ designa o menor inteiro maior ou igual a x.

  Em particular, para $n \in \mathbb{Z}$ valem

$$\lfloor n/2 \rfloor \;=\; \begin{cases} n/2\,, & n \text{ par}\,, \\ (n-1)/2\,, & n \text{ ímpar}\,, \end{cases} \qquad\qquad \lceil n/2 \rceil \;=\; \begin{cases} n/2\,, & n \text{ par}\,, \\ (n+1)/2\,, & n \text{ ímpar}\,. \end{cases}$$

- O símbolo $\square$ indica o fim de um enunciado. O símbolo $\blacksquare$ indica o fim de uma demonstração. O símbolo ✣ indica o fim do enunciado de um exercício. O símbolo ⌑ indica o fim do enunciado de um exemplo. O símbolo ♣ indica o fim de uma observação, nota ou comentário. O símbolo ♠ indica o fim de uma definição.
- $\mathcal{B}(X)$ designa o conjunto de operadores limitados agindo em um espaço de Banach X. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ designa o conjunto de operadores limitados agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.
- $C(L)$ designa o conjunto de todas as funções contínuas (reais ou complexas, dependendo do caso), definidas em L (na topologia que se estiver considerando em L).
- $\mathfrak{B}(L)$ designa a coleção de todos os conjuntos Borelianos de L (em relação à topologia que se estiver considerando em L). $B_l(L)$ designa a coleção de todas as funções Borelianas (reais ou complexas, dependendo do caso), definidas em L.
- O domínio de um operador T (agindo em um espaço de Banach ou de Hilbert) será denotado por $D(T)$ ou por $\mathrm{Dom}(T)$. A imagem ("range") de T será denotada por $R(T)$ ou por $\mathrm{Ran}\,(T)$ ou, mais raramente, por $\mathrm{Im}\,(T)$, mas essa última notação pode causar confusão com a da parte imaginária de um número complexo ou mesmo com a da parte imaginária de um operador agindo em um espaço de Hilbert: $\mathrm{Im}\,(T) := \frac{1}{2i}(T - T^*)$.
- A noção de *propriedade válida quase em toda parte* é definida na página 1452.

• **Intervalos**

Ainda não introduzimos os números reais nem a relação de ordem entre eles mas, como essas noções são conhecidas, vamos colocar aqui uma palavra sobre a nomenclatura usada para descrever intervalos da reta real. Para $a < b \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$(a,\ b) = \{x \in \mathbb{R},\ \text{ com } a < x < b\}$$

é dito ser um intervalo aberto. Para $a \leq b \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$[a,\ b] = \{x \in \mathbb{R},\ \text{ com } a \leq x \leq b\}$$

é dito ser um intervalo fechado. Para $a < b \in \mathbb{R}$ os conjuntos

$$[a,\ b) = \{x \in \mathbb{R},\ \text{ com } a \leq x < b\}$$

e

$$(a,\ b] = \{x \in \mathbb{R},\ \text{ com } a < x \leq b\}$$

são ditos ser intervalos semiabertos (ou semifechados).

É importante dizer que a nomenclatura "aberto" ou "fechado" acima é usada independentemente da topologia usada em $\mathbb{R}$ (a noção de topologia será introduzida adiante).

Salvo menção em contrário, empregaremos por vezes as notações

$$\mathbb{R}_+ \,:=\, \{x\in\mathbb{R},\, x>0\} \,=\, (0,\,\infty)$$

e

$$\mathbb{R}_{0+} \,:=\, \{x\in\mathbb{R},\, x\geq 0\} \,=\, [0,\,\infty)\,.$$

• **Delta de Krönecker**

De i e j pertencem a um conjunto contável C, definimos o chamado *delta de Krönecker* por

$$\delta_{ij} \,\equiv\, \delta^{ij} \,\equiv\, \delta_i^j \,\equiv\, \delta_j^i \,:=\, \left\{\begin{array}{ll} 1\,, & \text{se } i=j\,,\\ 0\,, & \text{se } i\neq j\,.\end{array}\right.$$

para todos $i,\, j\in C$. As diferentes notações δ_{ij}, δ^{ij}, δ_i^j e δ_j^i ocorrem, por exemplo, na Geometria Diferencial e na Teoria da Relatividade.

• **A esfera unitária**

Para $n\in\mathbb{N}_0$, denotaremos por $\mathbb{S}^n$ a chamada *esfera unitária* em $\mathbb{R}^{n+1}$: o lugar geométrico de todos os pontos de $\mathbb{R}^{n+1}$ situados a uma distância Euclidiana igual a 1 da origem:

$$\mathbb{S}^n \,:=\, \left\{\left(y^1,\,\ldots,\,y^{n+1}\right)\in\mathbb{R}^{n+1}\,\middle|\,\, \sqrt{(y^1)^2+\cdots+(y^{n+1})^2}=1\right\}\,.$$

Note-se que $\mathbb{S}^0=\{-1,\,1\}$.

• **Classes C^k**

Por $C(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que sejam contínuas. Por $C_0(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que sejam contínuas e de suporte compacto.

Denotamos por $C^1(\mathbb{R})$ a coleção de todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínuas, diferenciáveis e com derivada contínua. Tais funções são ditas *funções continuamente diferenciáveis*, ou de *classe* C^1. Denotamos por $C^k(\mathbb{R})$, $k\in\mathbb{N}$ a coleção de todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínuas e cujas k primeiras derivadas f', f'', $\ldots$, $f^{(k)}$ existam e sejam igualmente contínuas. Tais funções são ditas ser de *classe* C^k. Por $C^\infty(\mathbb{R})$ denotamos as funções infinitamente diferenciáveis (as quais serão, ocasionalmente, denominadas *funções suaves*). Por $C_0(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções contínuas e de suporte compacto. Por $C_0^\infty(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto.

As diversas notações acima estendem-se de forma natural a funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}$, como intervalos abertos ou fechados, compactos ou não. Aqui, o estudante deve tomar certos cuidados. Por exemplo, $C\big((0,\,1)\big)$ contém, entre outras, funções contínuas que divergem em 0 e/ou em 1, mas $C\big([0,\,1]\big)$ só contém funções limitadas.

Por Que Precisamos de Demonstrações?

"My friend G. H. Hardy[2], who was professor of pure mathematics, enjoyed this pleasure [in mathematical demonstrations] in a very high degree. He told me once that if he could find a proof that I was going to die in five minutes he would of course be sorry to lose me, but this sorrow would be quite outweighed by pleasure in the proof".
Bertrand Russell (1872–1970).

Segundo os dicionários, *demonstrar*, ou *provar*, significa estabelecer que algo é correto ou verdadeiro por meio de raciocínio lógico e conclusivo, ou seja, livre de exceções ou de contradições. Uma dúvida que estranhamente acomete alguns estudantes iniciantes no estudo mais avançado de Matemática e Física é: por que é necessário demonstrar afirmações e resultados? Na resposta a essa questão podem ser listadas, naturalmente, razões ligadas à honestidade intelectual e mesmo razões ligadas à estética, mas o fato pragmático é que é muito fácil elaborar conjecturas que, à primeira vista, parecem plausíveis, mas que se revelam falaciosas. Apresentamos a seguir uma pequena, mas significativa, lista delas, algumas com relevância histórica.

Desejamos que essa pequena lista faça os estudantes refletir melhor antes de aceitar resultados não demonstrados.

- Considere a seguinte lista de números inteiros positivos[3]:

31	é um número primo,
331	é um número primo,
3331	é um número primo,
33331	é um número primo,
333331	é um número primo,
3333331	é um número primo,
33333331	é um número primo.

  Isso parece sugerir um padrão: todo número da forma

$$\underbrace{3\cdots3}_{m \text{ vezes}}1 \text{ para } m \in \mathbb{N}\,,$$

  seria primo. Sucede, porém, que o número seguinte da lista (que corresponde a $m = 8$), ou seja, 333333331, não é um número primo, pois

$$333333331 \;=\; 17 \times 19.607.843\,.$$

- Outro exemplo similar, mas de certa forma oposto, provém da contemplação da seguinte lista de números:

12	não é um número primo,
121	não é um número primo,
1211	não é um número primo,
12111	não é um número primo,
121111	não é um número primo,
1211111	não é um número primo,
12111111	não é um número primo,
121111111	não é um número primo,
1211111111	não é um número primo.

  Ela sugere que nenhum número da forma

$$12\,\underbrace{1\cdots1}_{m \text{ vezes}}\,, \qquad m \in \mathbb{N}\,,$$

[2] Godfrey Harold Hardy (1877–1947).
[3] Salvo menção contrária, todos os números que aqui apresentamos são representados na base decimal.

é primo. Essa conjectura é verdadeira até $m = 135$ (!), porém, ela falha, infelizmente, para $m = 136$, onde o número em questão revelou-se como primo! Esse número é da ordem de 10^{138}! Isso é particularmente notável, pois os números primos vão se tornando mais e mais escassos quando crescem.

Comentário. Uma observação sobre os dois últimos exemplos. Um leitor experiente pode desconfiar que as conjecturas apresentadas acima não podem ser sempre corretas, se observar que a regularidade em números como $\underbrace{3\cdots3}_{m \text{ vezes}}1$ ou $12\underbrace{1\cdots1}_{m \text{ vezes}}$, ou seja, a repetição sucessiva do dígito 3 ou do dígito 1, só ocorre na representação na base decimal, não existindo em outras bases. O fato de um número ser ou não primo não pode depender da base que é usada em sua representação. ♣

- *Números de Fermat.* Considere-se a sequência $F_n := 2^{2^n} + 1$, com $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Os números F_n são conhecidos como *números de Fermat*[4]. É fácil constatar que eles são primos para $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. De fato, $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65.537$, todos primos.

  Isso levou Fermat a conjecturar em 1650 que todo F_n seria primo. Porém, Euler[5] verificou em 1732 que $F_5 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417$ e, portanto, F_5 não é primo!

  Como os números F_n crescem muito violentamente com n, a verificação de suas propriedades é extremente difícil, mesmo com os computadores atuais. Até a data presente (2024) os únicos F_n conhecidos por serem primos são justamente os listados acima: F_0, F_1, F_2, F_3 e F_4. Mais de três centenas de números de Fermat puderam ser fatorizados e, portanto, sabe-se que não são primos.

  É uma questão ainda em aberto se há infinitos números primos dentre os números de Fermat.

  E. 0.1 *Exercício*. Resolva essa questão. ♣

- *Números de Eisenstein.* Eisenstein[6] conjecturou que todos os números da sequência 2^2+1, $2^{2^2}+1$, $2^{2^{2^2}}+1$, $2^{2^{2^{2^2}}}+1$, $2^{2^{2^{2^{2^2}}}}+1$ seriam primos. Eles são definidos iterativamente por $E_{n+1} = 2^{E_n - 1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, com $E_1 = 2^2 + 1$. Os três primeiros números dessa lista são 5, 17, 65537, os quais, de fato, são primos.

  Devido ao fato de os números de Eisenstein crescerem muito violentamente, somente com o advento dos primeiros computadores foi possível dar alguns passos na questão de saber se outros números de Eisenstein eram primos.

  Infelizmente, Selfridge[7] verificou em 1953, usando um computador, que $E_4 = 2^{2^{2^{2^2}}} + 1$ não é primo, pois é divisível por 825.753.601. É uma questão ainda em aberto saber se há infinitos números primos na lista proposta por Eisenstein.

  E. 0.2 *Exercício*. Resolva essa questão. ♣

- *Números de Mersenne.* Os *números de Mersenne*[8] são números da forma $M_n := 2^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$. Por diversas razões, é uma questão relevante encontrar números primos dentre eles. Uma coisa que facilmente se vê é que se n não é primo, então M_n também não pode ser primo. De fato, se $n = rs$ com r e s naturais e maiores que 1, então é elemenar constatar que

$$M_{rs} \;=\; 2^{rs} - 1 \;=\; (2^r - 1)\Big(1 + 2^r + 2^{2r} + 2^{3r} + \cdots + 2^{(s-1)r}\Big)\,.$$

  Verifique! Isso claramente diz que M_{rs} não é primo. Assim, cabe perguntar quais números da forma $M_p = 2^p - 1$ com p primo são eles também primos. Tais números primos são denominados *primos de Mersenne*. Originalmente conjecturou-se que todos os números M_p, com p primo, seriam também primos, pois M_2, M_3, M_5 e M_7 o são. Um primeiro contraexemplo surge com $p = 11$, pois $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$, que, assim, não é primo.

  É uma questão ainda aberta (2024) saber se há infinitos primos de Mersenne.

  E. 0.3 *Exercício*. Resolva essa questão. ♣

[4] Pierre de Fermat (1607–1665).
[5] Leonhard Euler (1707–1783).
[6] Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823-1852).
[7] John Lewis Selfridge (1927-2010).
[8] Marin Mersenne (1588-1648).

Essa questão é relevante pois gerar números primos "grandes" é importante em Criptografia e é simples gerar números de Mersenne[9] e relativamente simples, algoritmicamente, determinar seus eventuais fatores primos. Atualmente (2024) são conhecidos 51 primos de Mersenne, o maior deles sendo $M_{82.589.833}$, que é um número da ordem de $10^{24.862.048}$. Os maiores números primos hoje conhecidos são primos de Mersenne.

- É fácil verificar que $3^2 + 4^2 = 5^2$ e que $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Isso parece sugerir um padrão, mas infelizmente tem-se $3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 \neq 7^4$.

  Inspirado na possibilidade sugerida pelos dois primeiros casos, Euler lançou em 1769 uma conjectura: se existirem $n+1$ números naturais $A_1,\ \ldots,\ A_n,\ B$ tais que para algum $k \in \mathbb{N}$ tem-se

  $$(A_1)^k + \cdots + (A_n)^k \ = \ B^k \ ,$$

  então deve sempre valer que $n \geq k$. Como exemplo, tomemos

  $$30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 \ = \ 353^4 \ ,$$

  onde $n = k = 4$.

  Um contraexemplo à conjectura de Euler foi encontrado apenas em 1966. Com auxílio de um dos primeiros supercomputadores, L. J. Lander and T. R. Parkin puderam constatar[10] que

  $$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 \ = \ 144^5 \ ,$$

  onde $n = 4$ mas $k = 5$ e, portanto, $n < k$. Outro contraexemplo, com $n = 3$ e $k = 4$, é

  $$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 \ = \ 20615673^4 \ ,$$

  encontrado por Elkies[11] junto a infinitos outros contraexemplos[12].

  A conjectura acima foi conhecida como *conjectura de Euler para soma de potências*, e é relacionada à célebre *última conjectura de Fermat*. Para mais sobre essa conjectura de Euler, vide a seção 21.11 de [213].

Os exemplos de conjecturas falhas, acima, são todos provenientes da Aritmética, mas há também conjecturas plausíveis, e erradas, em outras áreas. Seguem alguns exemplos.

- Considere-se a conjectura que sugere que para todo $n \in \mathbb{N}$ valha

  $$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{k}\right) \right) \frac{\operatorname{sen}(4x)}{x}\, dx \ = \ \frac{\pi}{2} \ \approx \ 1,57079632679\ldots \ .$$

  Essa conjectura está correta para todo n entre 1 e 30. Porém, para $n = 31$ tem-se

  $$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^{31} \cos\left(\frac{x}{k}\right) \right) \frac{\operatorname{sen}(4x)}{x}\, dx \ = \ 1,57079632533\ldots \ \neq \ \frac{\pi}{2} \ .$$

  Observe que a diferença entre os resultados inicia nos três últimos dígitos, ou seja, é da ordem de 10^{-9}!

- A fórmula

  $$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}\big(x/(2k-1)\big)}{x/(2k-1)} \right) dx \ = \ \frac{\pi}{2}$$

  vale para todo $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ 7$. Porém, para $n = 8$ tem-se

  $$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^{8} \frac{\operatorname{sen}(x/(2k-1))}{x/(2k-1)} \right) dx \ = \ \left(\frac{467.807.924.713.440.738.696.537.864.469}{935.615.849.440.640.907.310.521.750.000} \right) \pi \ .$$

[9] Na representação binária, usada internamente em computadores digitais, os números de Mersenne são todos da forma $M_n = \underbrace{1\cdots1}_{n \text{ vezes}}$.

[10] L. J. Lander and T. T. Parkin, "Counterexample to Euler's conjecture on sums of like powers". Bull. Amer. Math. Soc. **72** (6): 1079 (1966). doi:10.1090/S0002-9904-1966-11654-3.

[11] Noam David Elkies (1966–).

[12] N. Elkies, "On $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$". Mathematics of Computation. **51**, 184: 825-835 (1988). doi:10.1090/S0025-5718-1988-0930224-9.

O fator entre parenteses na última expressão difere de $1/2$ por cerca de $7,35 \times 10^{-12}$.

As integrais acima são conhecidas como *integrais de Borwein*[13][14] e delas se constroem exemplos ainda mais dramáticos[15]. Por exemplo, a identidade

$$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{100k+1}\right)}{\frac{x}{100k+1}} \right) \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \;=\; \frac{\pi}{2}$$

é válida para todo $n < 9,8 \times 10^{42}$ e seguramente falha para $n > 7,4 \times 10^{43}$. É impossível verificar esses fatos por computador e os mesmos requerem demonstrações. Vide artigo de John Baez[16] in [36] e outros exemplos e referências lá listados.

[13] David Borwein (1924–2021), Jonathan Michael Borwein (1951–2016) e Peter Benjamin Borwein (1953-2020). David Borwein era pai dos outros dois e os três colaboravam.

[14] A referência original é David Borwein and Jonathan M. Borwein, "Some remarkable properties of sinc and related integrals". The Ramanujan Journal, **5** (1): 73-89, (2001), doi:10.1023/A:1011497229317.

[15] Para uma referência, vide Hanspeter Schmid, "Two curious integrals and a graphic proof". Elem. Math. **69** 11-17 (2014).

[16] John Carlos Baez (1961–).

Parte I

Capítulos Introdutórios