

---

# Universidade de São Paulo

## Instituto de Física

- Departamento de Física Matemática -

2017

### Notas para Cursos de Física-Matemática

João Carlos Alves Barata

Versão de 21 de junho de 2017



# Índice

Prefácio . . . . .	22
Bons Mots . . . . .	23
Como Ler Este Livro . . . . .	25
Notação e Advertências . . . . .	26
<b>I Capítulos Introdutórios</b>	<b>31</b>
<b>1 Noções Conjuntivistas Básicas</b>	<b>32</b>
1.1 Conjuntos, Relações e Funções . . . . .	32
1.1.1 Relações e Funções . . . . .	34
1.1.1.1 Produtos Cartesianos Gerais . . . . .	39
1.1.1.2 Relações de Incompatibilidade (ou de Compatibilidade) . . . . .	40
1.1.1.3 Relações de Equivalência . . . . .	41
1.1.1.4 Relações de Ordem . . . . .	45
1.1.2 Cardinalidade . . . . .	51
1.1.3 Ínfimos e Supremos de Famílias de Conjuntos . . . . .	56
1.2 Sistemas de Conjuntos . . . . .	58
1.2.1 Semi-Anéis de Conjuntos . . . . .	59
1.2.2 Anéis de Conjuntos . . . . .	59
1.2.3 Álgebras de Conjuntos . . . . .	61
1.2.4 $\sigma$ -Anéis de Conjuntos . . . . .	62
1.2.5 $\sigma$ -Álgebras de Conjuntos . . . . .	63
1.2.6 Sistemas Monótonos de Conjuntos . . . . .	64
1.2.7 Topologias . . . . .	67
1.2.8 Filtros e Ultrafiltros . . . . .	68
	<b>APÊNDICES</b>
1.A A Fórmula de Inversão de Möbius . . . . .	71
<b>2 Estruturas Algébricas Básicas</b>	<b>73</b>
2.1 Estruturas Algébricas Básicas . . . . .	74
2.1.1 Álgebras Universais . . . . .	76
2.1.2 Reticulados e Álgebras Booleanas . . . . .	78
2.1.3 Semigrupos, Monóides e Grupos . . . . .	83
2.1.4 Corpos . . . . .	88
2.1.5 Espaços Vetoriais . . . . .	91
2.1.6 Anéis, Módulos e Álgebras . . . . .	94
2.1.6.1 Anéis . . . . .	94
2.1.6.2 Módulos . . . . .	95
2.1.6.3 Álgebras . . . . .	95
2.1.7 Exemplos Especiais de Álgebras . . . . .	98
2.1.7.1 Álgebras de Lie . . . . .	98
2.1.7.2 Álgebras de Poisson . . . . .	101
2.1.7.3 Álgebras de Jordan . . . . .	101
2.1.7.4 Álgebras de Grassmann . . . . .	102
2.1.7.5 Álgebras de Clifford . . . . .	103
2.1.8 Mais sobre Anéis . . . . .	103
2.1.9 Ações e Representações . . . . .	105

2.1.9.1	Ações de Grupos . . . . .	105
2.1.9.2	Representações de Grupos e de Álgebras . . . . .	109
2.1.10	Morfismos, Homomorfismos, Epimorfismos, Isomorfismos, Monomorfismos, Endomorfismos e Automorfismos . . . . .	110
2.1.11	Induzindo Estruturas Algébricas . . . . .	112
2.2	Grupos. Estruturas e Construções Básicas . . . . .	116
2.2.1	Cosets . . . . .	116
2.2.2	Subgrupos Normais e o Grupo Quociente . . . . .	118
2.2.2.1	Alguns Teoremas Sobre Isomorfismos e Homomorfismos de Grupos . . . . .	120
2.2.2.2	O Centro de um Grupo. Centralizadores e Normalizadores . . . . .	123
2.2.3	Grupos Gerados por Conjuntos. Grupos Gerados por Relações . . . . .	125
2.2.4	O Produto Direto e o Produto Semi-Direto de Grupos. O Produto Tensorial de Grupos Abelianos . . . . .	126
2.2.4.1	O Produto Direto (ou Soma Direta) de Grupos . . . . .	126
2.2.4.2	O Produto Semi-Direto de Grupos . . . . .	127
2.2.4.3	Produtos Tensoriais de Grupos Abelianos . . . . .	131
2.3	Espaços Vetoriais. Estruturas e Construções Básicas . . . . .	137
2.3.1	Bases Algébricas de um Espaço Vetorial . . . . .	137
2.3.2	O Dual Algébrico de um Espaço Vetorial . . . . .	141
2.3.3	Subespaços e Espaços Quocientes . . . . .	148
2.3.4	Somas Diretas de Espaços Vetoriais . . . . .	149
2.3.4.1	Formas Multilineares . . . . .	150
2.3.5	Produtos Tensoriais de Espaços Vetoriais . . . . .	152
2.3.5.1	Produtos Tensoriais, Duais Algébricos e Formas Multilineares . . . . .	159
2.3.6	Produtos Tensoriais de um Espaço Vetorial com seu Dual . . . . .	163
2.3.6.1	Tensores Associados a Formas Bilineares Simétricas Não-Degeneradas. Métricas . . . . .	163
2.3.7	Produtos Tensoriais de um mesmo Espaço Vetorial. Os Espaços Simétrico e Antissimétrico . . . . .	168
2.3.8	O Produto Tensorial de Módulos. Derivações . . . . .	170
2.4	Anéis e Álgebras. Estruturas e Construções Básicas . . . . .	172
2.4.1	Ideais em Anéis e Álgebras Associativas . . . . .	172
2.4.1.1	Ideais em Anéis . . . . .	172
2.4.1.2	Ideais em Álgebras Associativas . . . . .	176
2.5	Espaços de Fock, Álgebras Tensoriais e Álgebras Exteriores . . . . .	179
2.5.1	Álgebras Tensoriais . . . . .	179
2.5.2	Álgebras Exteriores . . . . .	180
2.6	Tópicos Especiais . . . . .	183
2.6.1	O Grupo de Grothendieck . . . . .	184
2.6.2	Grupóides . . . . .	185
2.6.3	Quatérnios . . . . .	187
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	193
2.A	Prova de (2.148) . . . . .	193
<b>3</b>	<b>Formas Lineares e Normas em Espaços Vetoriais</b> . . . . .	<b>194</b>
3.1	Formas Lineares, Sesquilineares e Produtos Escalares em Espaços Vetoriais . . . . .	194
3.1.1	Formas Multilineares . . . . .	194
3.1.2	Formas Sesquilineares e as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Minkowski . . . . .	199
3.1.3	Produtos Escalares . . . . .	203
3.1.4	Exemplos . . . . .	205
3.2	Normas em Espaços Vetoriais . . . . .	206
3.3	Ortogonalidade, Conjuntos Ortonormais e o Procedimento de Gram-Schmidt . . . . .	213
3.4	Formas Bilineares e Sesquilineares e Produtos Escalares em Espaços de Dimensão Finita . . . . .	215

3.5	Estruturas Complexas sobre Espaços Vetoriais Reais . . . . .	219
<b>APÊNDICES</b> . . . . .		226
3.A	Equivalência de Normas em Espaços Vetoriais de Dimensão Finita . . . . .	226
3.B	Prova do Teorema de Fréchet, von Neumann e Jordan . . . . .	227
 <b>II Tópicos de Análise Real e Complexa</b>		<b>231</b>
<b>4</b>	<b>Recordações de Cálculo Vetorial em Três Dimensões</b>	<b>232</b>
4.1	Alguns Operadores Diferenciais de Interesse . . . . .	232
4.2	Teoremas Clássicos sobre Integrais de Volume e de Superfície . . . . .	236
4.3	O Laplaciano em Sistemas de Coordenadas Gerais . . . . .	238
4.4	Coordenadas Esféricas em $n$ Dimensões . . . . .	240
<b>5</b>	<b>Funções Convexas</b>	<b>244</b>
5.1	Funções Convexas. Definições e Propriedades Básicas . . . . .	244
5.1.1	Funções Convexas de uma Variável . . . . .	245
5.1.2	Funções Convexas de Várias Variáveis . . . . .	255
5.2	Algumas Consequências da Convexidade e da Concauidade . . . . .	258
5.2.1	A Desigualdade de Jensen . . . . .	258
5.2.2	A Primeira Desigualdade de Young . . . . .	259
5.2.3	Médias Geométricas, Aritméticas e Desigualdades Correlatas . . . . .	261
5.2.3.1	A Desigualdade de Minkowski . . . . .	264
<b>6</b>	<b>Funções Geratrizes. Produtórias Complexas</b>	<b>266</b>
6.1	Funções Geratrizes . . . . .	266
6.1.1	Números de Bernoulli . . . . .	272
6.2	Notas Sobre Convergência de Produtórias . . . . .	274
6.2.1	Uma Dedução Elementar do Produto de Wallis . . . . .	275
6.3	Exercícios Adicionais . . . . .	278
<b>7</b>	<b>A Função Gama de Euler</b>	<b>280</b>
7.1	Introdução e Motivação . . . . .	280
7.2	A Função Gama. Definição e Primeiras Propriedades . . . . .	282
7.3	Outras Representações para a Função Gama . . . . .	287
7.4	A Função Beta e Propriedades Adicionais da Função Gama . . . . .	291
7.4.1	A Fórmula de Reflexão de Euler . . . . .	292
7.4.2	A Fórmula de Duplicação de Legendre . . . . .	296
7.5	Teoremas Sobre a Unicidade da Função Gama e Outros Resultados . . . . .	297
7.5.1	O Teorema de Bohr-Mollerup . . . . .	297
7.5.2	Fórmulas de Duplicação e Unicidade . . . . .	298
7.5.3	O Teorema de Wielandt e Algumas de Suas Consequências . . . . .	300
7.5.3.1	A Fórmula de Multiplicação de Gauss da Função Gama . . . . .	301
7.6	A Aproximação de Stirling e suas Correções . . . . .	303
7.6.1	A Aproximação de Stirling para Fatoriais e suas Correções. A Série de Gudermann . . . . .	305
7.6.2	A Aproximação de Stirling para a Função Gama e suas Correções. A Série de Gudermann . . . . .	310
7.7	Exercícios Adicionais . . . . .	315
<b>8</b>	<b>Um Mínimo Sobre A Função Zeta de Riemann</b>	<b>321</b>
8.1	Origens . . . . .	321
8.2	Definição . . . . .	326

8.3	A Fórmula de Produto de Euler e Outras Relações Envolvendo $\zeta$ . . . . .	327
8.4	Primeiras Relações de $\zeta$ com a Função Gama de Euler . . . . .	331
8.5	Os Valores de $\zeta$ nos Inteiros . . . . .	336
8.5.1	Um Interlúdio. A Fórmula $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -1/12$ (!) e Alguns de Seus Amigos . . . . .	338
8.6	A Relação Funcional de Riemann . . . . .	342
8.6.1	Uma Demonstração da Relação Funcional de Riemann . . . . .	344
8.7	Exercícios Adicionais . . . . .	346
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	347
8.A	Prova do Teorema Fundamental da Aritmética . . . . .	347

### III Tópicos de Álgebra Linear

351

<b>9</b>	<b>Tópicos de Álgebra Linear. I</b> . . . . .	<b>352</b>
9.1	Propriedades Básicas de Determinantes e Inversas de Matrizes . . . . .	353
9.2	Noções Básicas sobre o Espectro de uma Matriz . . . . .	363
9.2.1	Autovalores e Polinômios Característicos de Matrizes . . . . .	363
9.2.2	Autovetores . . . . .	366
9.2.3	O Traço de uma Matriz . . . . .	369
9.2.3.1	Algumas Relações entre Determinantes e Traços de Matrizes . . . . .	370
9.3	Polinômios de Matrizes . . . . .	371
9.3.1	O Teorema de Hamilton-Cayley . . . . .	373
9.3.1.1	O Teorema da Aplicação Espectral para Matrizes . . . . .	378
9.4	Matrizes Diagonalizáveis e o Teorema Espectral . . . . .	379
9.4.1	Diagonalização Simultânea de Matrizes . . . . .	391
9.5	Matrizes Autoadjuntas, Normais e Unitárias . . . . .	394
9.5.1	Matrizes Positivas . . . . .	400
9.5.1.1	Matrizes Pseudo-Autoadjuntas e Quase-Autoadjuntas . . . . .	402
9.5.2	O Teorema de Inércia de Sylvester. Superfícies Quadráticas . . . . .	403
9.6	Matrizes Triangulares . . . . .	408
9.7	O Teorema de Decomposição de Jordan e a Forma Canônica de Matrizes . . . . .	410
9.7.1	Resultados Preparatórios . . . . .	411
9.7.2	O Teorema da Decomposição de Jordan . . . . .	415
9.7.3	Matrizes Nilpotentes e sua Representação Canônica . . . . .	418
9.7.4	A Forma Canônica de Matrizes . . . . .	421
9.7.5	Mais Alguns Resultados Sobre Matrizes Nilpotentes . . . . .	424
9.8	Algumas Representações Especiais de Matrizes . . . . .	426
9.8.1	A Decomposição Polar de Matrizes . . . . .	426
9.8.2	A Decomposição em Valores Singulares . . . . .	428
9.8.3	O Teorema da Triangularização de Schur . . . . .	428
9.8.4	A Decomposição $QR$ e a Decomposição de Iwasawa (“KAN”) . . . . .	430
9.9	A Pseudoinversa de Moore-Penrose . . . . .	433
9.9.1	Outras Propriedades da Pseudoinversa de Moore-Penrose . . . . .	435
9.9.1.1	A Regularização de Tikhonov. Existência . . . . .	438
9.9.1.2	A Pseudoinversa de Moore-Penrose e o Teorema Espectral . . . . .	440
9.9.2	A Pseudoinversa de Moore-Penrose e Problemas de Optimização Linear . . . . .	441
9.9.3	Existência e Decomposição em Valores Singulares . . . . .	442
9.10	Produtos Tensoriais de Matrizes . . . . .	444
9.11	Propriedades Especiais de Determinantes . . . . .	446

9.11.1	Expansão do Polinômio Característico	446
9.11.2	A Desigualdade de Hadamard	446
9.12	Exercícios Adicionais	449
<b>10</b>	<b>Tópicos de Álgebra Linear. II</b>	<b>454</b>
10.1	Uma Topologia Métrica em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	455
10.2	Exponenciais, Logaritmos e Funções Analíticas de Matrizes	458
10.2.1	A Exponenciação de Matrizes e os Grupos $\text{GL}(\mathbb{C}, n)$ e $\text{GL}(\mathbb{R}, n)$	465
10.3	A Fórmula de Lie-Trotter e a Fórmula do Comutador	468
10.4	Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	471
10.4.1	Alguns Fatos Gerais sobre Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	471
10.4.2	Alguns Exemplos Específicos de Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	476
10.5	A Fórmula de Baker, Campbell e Hausdorff	481
10.6	A Fórmula de Duhamel e Algumas de suas Consequências	486
10.7	Exercícios Adicionais	491
<b>IV</b>	<b>Equações Diferenciais</b>	<b>494</b>
<b>11</b>	<b>Equações Diferenciais Ordinárias. Uma Introdução</b>	<b>495</b>
11.1	Definição e Alguns Exemplos	495
11.1.1	Equações Diferenciais Ordinárias Lineares	497
11.1.2	Equações Ordinárias de Segunda Ordem. Exemplos de Interesse	501
11.2	Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias	503
11.3	Discussão sobre Problemas de Valor Inicial	507
11.3.1	Problemas de Valor Inicial. Patologias e Exemplos a se Ter em Mente	509
11.3.2	Teoremas de Existência e Unicidade de Soluções	512
11.3.3	Soluções Globais	514
11.3.4	Dependência Contínua de Condições Iniciais e de Parâmetros	516
<b>12</b>	<b>Alguns Métodos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias</b>	<b>517</b>
12.1	Solução de Equações Ordinárias Lineares de Primeira Ordem	517
12.2	As Equações de Bernoulli e de Riccati	518
12.3	Integração de Equações Separáveis	520
12.4	O Método de Variação de Constantes	521
12.5	O Método de Substituição de Prüfer	522
12.6	O Método de Inversão	524
12.7	Solução de Equações Exatas e o Método dos Fatores Integrantes	525
12.8	Soluções das Equações de D'Alembert-Lagrange e Clairaut	529
<b>13</b>	<b>Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares</b>	<b>533</b>
13.1	Introdução	534
13.2	Unicidade e Existência de Soluções	534
13.2.1	Unicidade	534
13.2.2	Existência. A Série de Dyson	537
13.2.3	Propriedades de $D(s, t)$	541
13.3	Equações com Coeficientes Constantes	544
13.3.1	Alguns Exemplos e Aplicações	545
13.4	Perturbações de Sistemas Lineares	549
13.5	Mais sobre a Série de Dyson. Produtos de Tempo Ordenado	553

13.6	Sistemas de Equações Diferenciais Lineares no Plano Complexo . . . . .	556
13.6.1	O Caso Analítico . . . . .	556
13.6.2	Resolução por Séries de Potências . . . . .	561
13.6.3	Sistemas com Pontos Singulares. Monodromia . . . . .	562
13.6.4	Sistemas com Pontos Singulares Simples . . . . .	571
13.7	Sistemas Provenientes de EDOs de Ordem $m$ . . . . .	574
13.7.1	Pontos Singulares Simples em EDO's de Ordem $m$ . . . . .	576
13.7.2	Singularidades no Infinito . . . . .	580
13.7.3	Alguns Exemplos de Interesse . . . . .	581
13.8	Equações Fuchsianas. Símbolos de Riemann . . . . .	586
13.8.1	Equações Fuchsianas de Primeira Ordem . . . . .	587
13.8.2	Equações Fuchsianas de Segunda Ordem . . . . .	590
13.8.3	A Equação de Riemann-Papperitz. Símbolos de Riemann . . . . .	598
13.8.3.1	Transformações de Simetria dos Símbolos de Riemann . . . . .	601
13.8.3.2	Equações Fuchsianas com três pontos singulares e a equação hipergeométrica . . . . .	604
13.9	Exercícios Adicionais . . . . .	607
<b>14</b>	<b>Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares no Plano Complexo</b>	<b>612</b>
14.1	Soluções em Séries de Potências para Equações Regulares . . . . .	613
14.1.1	A Equação do Oscilador Harmônico Simples . . . . .	614
14.1.2	A Equação de Legendre . . . . .	615
14.1.3	A Equação de Hermite . . . . .	618
14.1.4	A Equação de Airy . . . . .	620
14.1.5	A Equação de Tchebychev . . . . .	622
14.1.6	O Caso de Equações Regulares Gerais . . . . .	625
14.2	Solução de Equações Singulares Regulares. O Método de Frobenius . . . . .	626
14.2.1	Equações Singulares Regulares. O Caso Geral . . . . .	630
14.2.2	A Equação de Euler Revisitada . . . . .	637
14.2.3	A Equação de Bessel . . . . .	639
14.2.4	Equações Relacionadas à de Bessel. A Equação de Bessel Esférica . . . . .	649
14.2.5	Equações Relacionadas à de Bessel. A Equação de Bessel Modificada . . . . .	651
14.2.6	A Equação de Laguerre . . . . .	652
14.2.7	A Equação Hipergeométrica . . . . .	654
14.2.8	A Equação Hipergeométrica Confluente . . . . .	657
14.3	Algumas Equações Associadas . . . . .	660
14.3.1	A Equação de Legendre Associada . . . . .	660
14.3.2	A Equação de Laguerre Associada . . . . .	662
14.4	Exercícios Adicionais . . . . .	664
	<b>APÊNDICES</b>	666
14.A	Prova da Proposição 14.1. Justificando os Polinômios de Legendre . . . . .	666
14.B	Polinômios de Legendre: Provando (14.14) . . . . .	667
14.C	Justificando os Polinômios de Hermite . . . . .	669
14.D	Polinômios de Hermite: Provando (14.20) . . . . .	670
14.E	Porque $\lambda$ deve ser um Inteiro Positivo na Equação de Laguerre . . . . .	671
14.F	Polinômios de Tchebychev: Obtendo (14.39) a Partir de (14.36)–(14.38) . . . . .	673
<b>15</b>	<b>Propriedades de Algumas Funções Especiais</b>	<b>675</b>
15.1	Discussão Preliminar . . . . .	675
15.1.1	Relações de Ortogonalidade . . . . .	676



15.1.1.1	Condições de Contorno e a Origem das Relações de Ortogonalidade . . . . .	681
15.1.2	Fórmulas de Rodrigues . . . . .	685
15.2	Propriedades de Algumas Funções Especiais . . . . .	687
15.2.1	Propriedades dos Polinômios de Legendre . . . . .	687
15.2.2	Propriedades dos Polinômios de Legendre Associados . . . . .	691
15.2.2.1	As Funções Harmônicas Esféricas . . . . .	697
15.2.2.2	Fórmula de Adição de Funções Harmônicas Esféricas . . . . .	699
15.2.3	Propriedades dos Polinômios de Hermite . . . . .	703
15.2.3.1	As Funções de Hermite . . . . .	706
15.2.4	Propriedades dos Polinômios de Tchebychev . . . . .	710
15.2.5	Propriedades dos Polinômios de Laguerre . . . . .	710
15.2.6	Propriedades dos Polinômios de Laguerre Associados . . . . .	714
15.2.7	Algumas Propriedades das Funções de Bessel . . . . .	717
15.2.7.1	Propriedades de Zeros das Funções de Bessel . . . . .	727
15.2.7.2	Relações de Ortogonalidade das Funções de Bessel no Intervalo $[0, 1]$ . . . . .	729
15.2.7.3	Comentário sobre a equação de Bessel no intervalo $J = [0, \infty)$ . . . . .	735
15.2.8	Propriedades das Funções de Bessel Esféricas . . . . .	735
15.2.8.1	Relações de Ortogonalidade Para as Funções de Bessel Esféricas no Intervalo $[0, 1]$ . . . . .	737
15.3	Exercícios Adicionais . . . . .	739
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	740
15.A	Provando (15.54) a Força Bruta . . . . .	740
<b>16</b>	<b>Completeza de Algumas Famílias de Funções</b> . . . . .	<b>742</b>
16.1	Completeza de Polinômios Ortogonais em Intervalos Compactos . . . . .	742
16.2	Completeza dos Polinômios de Hermite . . . . .	745
16.3	Completeza dos Polinômios Trigonométricos . . . . .	746
16.4	Completeza das Funções de Bessel e Propriedades de seus Zeros . . . . .	749
16.4.1	A Equação de Bessel como Problema de Sturm-Liouville . . . . .	749
16.4.1.1	O Caso $\nu > 0$ . . . . .	750
16.4.1.2	O Caso $\nu > 0$ com $\beta_1 = -\nu\beta_2 \neq 0$ . . . . .	752
16.4.1.3	O Caso $\nu = 0$ . . . . .	753
16.4.2	Conclusões Sobre a Completeza das Funções de Bessel e Propriedades de seus Zeros . . . . .	755
<b>17</b>	<b>Rudimentos da Teoria das Equações a Derivadas Parciais</b> . . . . .	<b>757</b>
17.1	Definições, Notações e Alguns Exemplos . . . . .	758
17.2	Algumas Classificações de Equações a Derivadas Parciais . . . . .	766
17.2.1	Equações Lineares, Não-Lineares, Semi-Lineares e Quase-Lineares . . . . .	766
17.2.2	Classificação de Equações de Segunda Ordem. Equações Parabólicas, Elípticas e Hiperbólicas . . . . .	769
17.3	O Método de Separação de Variáveis . . . . .	772
17.3.1	O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Lineares . . . . .	772
17.3.2	O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Não-Lineares . . . . .	775
17.4	Problemas de Cauchy e Superfícies Características. Definições e Exemplos Básicos . . . . .	777
17.5	O Método das Características . . . . .	784
17.5.1	Exemplos de Aplicação do Método das Características . . . . .	789
17.5.2	Características. Comentários Adicionais . . . . .	800
17.5.3	Sistemas de Equações Quase-Lineares de Primeira Ordem . . . . .	801
17.5.3.1	Generalidades Sobre Problemas de Condição Inicial em Sistemas Quase-Lineares de Primeira Ordem . . . . .	805
17.5.3.2	Sistemas Hiperbólicos Semi-Lineares de Primeira Ordem em Duas Variáveis . . . . .	809
17.5.3.3	Soluções Ditas Simples de Sistemas Quase-Lineares, Homogêneos, de Primeira Ordem em Duas Variáveis . . . . .	811

17.6	Alguns Teoremas de Unicidade de Soluções de Equações a Derivadas Parciais . . . . .	815
17.6.1	Casos Simples. Discussão Preliminar . . . . .	815
17.6.2	Unicidade de Solução para as Equações de Laplace e Poisson . . . . .	818
17.6.3	Unicidade de Soluções. Generalizações . . . . .	821
17.7	Exercícios Adicionais . . . . .	828
<b>18</b>	<b>Introdução ao Problema de Sturm-Liouville</b> . . . . .	<b>829</b>
18.1	Comentários Iniciais . . . . .	829
18.2	O Problema de Sturm . . . . .	834
18.2.1	Soluções Fundamentais e Funções de Green . . . . .	835
18.2.2	A Função de Green. Resolvendo o Problema de Sturm . . . . .	836
18.2.3	O Teorema de Green . . . . .	839
18.3	O Problema de Sturm-Liouville . . . . .	841
18.3.1	Propriedades Básicas dos Auto-Valores e Auto-Funções de Problemas de Sturm-Liouville . . . . .	842
18.3.1.1	A Simplicidade dos Auto-Valores . . . . .	843
18.3.1.2	O Lema de Green . . . . .	844
18.3.1.3	Realidade dos Auto-Valores e Auto-funções. Ortogonalidade de Auto-funções . . . . .	845
18.3.1.4	Propriedades dos Autovalores . . . . .	846
18.3.2	A Equação Integral de Fredholm . . . . .	850
18.3.3	Uma Aplicação do Problema de Sturm-Liouville . . . . .	853
18.3.4	Métodos Variacionais de Determinação de Autovalores . . . . .	856
18.4	Comentários Finais . . . . .	858
18.4.1	Um Problema de Sturm-Liouville Singular . . . . .	858
18.5	Exercícios Adicionais . . . . .	861
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>864</b>
18.A	Prova do Teorema 18.1. Existência e Unicidade . . . . .	864
18.B	Prova da Proposição 18.2 . . . . .	865
18.C	Comentário Sobre o Determinante Wronskiano . . . . .	866
18.D	Demonstração do Teorema 18.3 . . . . .	867
18.D.1	Prova da Desigualdade (18.D.17) . . . . .	870
<b>19</b>	<b>Alguns Resultados sobre Equações Integrais</b> . . . . .	<b>872</b>
19.1	Descrição . . . . .	872
19.2	O Método dos Determinantes de Fredholm . . . . .	874
19.2.1	A Equação Integral de Fredholm Linear Não-Homogênea . . . . .	874
19.2.2	A Equação Integral de Fredholm Linear Homogênea . . . . .	878
19.3	Exercícios Adicionais . . . . .	880
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>881</b>
19.A	Obtendo os Determinantes de Fredholm . . . . .	881
<b>20</b>	<b>Rudimentos da Teoria do Potencial</b> . . . . .	<b>887</b>
20.1	A Equação de Poisson em Três Dimensões . . . . .	887
20.1.1	A Equação de Laplace em Domínios Limitados de $\mathbb{R}^3$ . O Problema de Dirichlet . . . . .	891
20.1.2	A Equação de Poisson em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	891
20.1.3	A Equação de Poisson Domínios Limitados de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	892
20.1.3.1	O Caso de Condições de Dirichlet . . . . .	892
20.1.3.2	O Caso de Condições de Neumann . . . . .	893
20.1.3.3	Existência de Solução . . . . .	893
20.1.4	Aplicações à Eletrostática: Capacitância . . . . .	893

20.2	O Teorema de Decomposição de Helmholtz . . . . .	893
20.2.1	Aplicações ao Eletromagnetismo . . . . .	897
20.3	Propriedades Básicas de Funções Harmônicas em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	898
<b>21</b>	<b>Alguns Problemas Selecionados de Interesse Físico</b> . . . . .	<b>900</b>
21.1	Dedução de Algumas Equações Diferenciais de Interesse . . . . .	901
21.1.1	Dedução Informal da Equação de Difusão de Calor . . . . .	901
21.1.2	Dedução Informal da Equação da Corda Vibrante . . . . .	905
21.2	As Equações de Helmholtz e de Laplace . . . . .	911
21.2.1	Problemas em Duas Dimensões em Coordenadas Polares . . . . .	913
21.2.2	Problemas em Três Dimensões em Coordenadas Esféricas . . . . .	915
21.3	Problemas de Difusão em uma Dimensão . . . . .	918
21.3.1	A Evolução da Temperatura de uma Barra Finita . . . . .	918
21.3.2	A Evolução da Temperatura de uma Barra Infinita . . . . .	922
21.3.3	A Evolução da Temperatura de uma Barra Semi-Infinita . . . . .	927
21.4	A Equação de Ondas . . . . .	932
21.4.1	A Equação de Ondas em $1 + 1$ Dimensões . . . . .	933
21.4.2	Interlúdio: Ondas Caminhantes e a Equação do Telégrafo . . . . .	936
21.4.3	Outro Interlúdio: Sólitons . . . . .	938
21.4.3.1	Sólitons na Equação de Korteweg-de Vries . . . . .	939
21.4.3.2	Sólitons na Equação de Sine-Gordon . . . . .	941
21.4.3.3	Sólitons no Modelo de Poço-Duplo . . . . .	942
21.4.3.4	Sólitons na Equação de Schrödinger Não-Linear . . . . .	944
21.4.4	A Equação de Ondas e Transformadas de Fourier . . . . .	948
21.4.4.1	A Equação de Ondas em $3 + 1$ Dimensões. A Solução de Kirchhoff . . . . .	951
21.4.4.2	A Equação de Ondas em $2 + 1$ Dimensões . . . . .	952
21.5	O Problema da Corda Vibrante . . . . .	954
21.5.1	Corda Vibrante Homogênea . . . . .	955
21.5.2	O Problema da Corda Homogênea Pendurada . . . . .	957
21.5.3	Corda Vibrante Não-Homogênea . . . . .	960
21.5.4	O Problema da Membrana Retangular Homogênea . . . . .	963
21.6	O Problema da Membrana Circular Homogênea . . . . .	964
21.7	O Oscilador Harmônico na Mecânica Quântica e a Equação de Hermite . . . . .	966
21.8	O Átomo de Hidrogênio e a Equação de Laguerre Associada . . . . .	969
21.9	Propagação de Ondas em Tanques Cilíndricos . . . . .	971
21.10	Equações Hiperbólicas Lineares em $1+1$ Dimensões e Equações Integrais . . . . .	979
21.11	Aplicações do Método da Função de Green . . . . .	986
21.11.1	A Equação de Poisson em Três Dimensões . . . . .	987
21.11.2	A Equação de Difusão Não-Homogênea . . . . .	988
21.11.3	A Equação de Ondas Não-Homogênea em $n + 1$ -Dimensões . . . . .	990
21.11.3.1	A Equação de Ondas Não-Homogênea em $3 + 1$ -Dimensões . . . . .	994
21.11.3.2	Aplicações à Eletrodinâmica. Potenciais Retardados . . . . .	997
21.11.3.3	A Equação de Ondas Não-Homogênea em $2 + 1$ -Dimensões . . . . .	999
21.11.3.4	A Equação de Ondas Não-Homogênea em $1 + 1$ -Dimensões . . . . .	1002
21.12	Exercícios Adicionais . . . . .	1003
21.12.1	Problemas Selecionados de Eletrostática . . . . .	1003
21.12.2	Equação de Difusão em uma Dimensão . . . . .	1006
21.12.3	Equação de Ondas em uma Dimensão . . . . .	1008
21.12.4	Modos de Vibração de Membranas . . . . .	1014

21.12.5 Problemas sobre Ondas e Difusão em Três Dimensões Espaciais . . . . .	1017
21.12.6 Problemas Envolvendo Funções de Green . . . . .	1019

<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1021
----------------------------	------

21.A Duas Transformadas de Laplace . . . . .	1021
--	------

## V Grupos 1024

### 22 Grupos. Alguns Exemplos 1025

22.1 O Grupo de Permutações . . . . .	1026
22.1.1 Ciclos, Transposições e Transposições Elementares . . . . .	1027
22.2 Alguns Grupos Matriciais . . . . .	1030
22.2.1 Os Grupos $GL(n)$ e $SL(n)$ . . . . .	1030
22.2.2 O Grupo de Borel e o Grupo de Heisenberg . . . . .	1033
22.2.2.1 O Grupo de Heisenberg . . . . .	1033
22.2.3 Grupos Associados a Formas Bilineares e Sesquilineares . . . . .	1040
22.2.4 Os Grupos Ortogonais . . . . .	1044
22.2.5 Os Grupos Unitários . . . . .	1045
22.3 Os Grupos $SO(2)$ , $SO(3)$ , $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	1046
22.3.1 Os Grupos $SO(2)$ , $O(2)$ , $SO(1, 1)$ e $O(1, 1)$ . . . . .	1046
22.3.2 O Grupo $SO(3)$ . . . . .	1050
22.3.2.1 Mais Propriedades das Matrizes de $SO(3)$ . . . . .	1058
22.3.2.2 $SO(3)$ e os Ângulos de Euler . . . . .	1061
22.3.3 O Grupo $O(3)$ . . . . .	1066
22.3.4 O Grupo $SU(2)$ . . . . .	1069
22.3.5 A Relação Entre $SO(3)$ e $SU(2)$ . . . . .	1074
22.3.6 O Grupo $SL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	1079
22.4 Generalidades Sobre os Grupos $SU(n)$ e $SO(n)$ . . . . .	1080
22.4.1 Os Grupos $SU(n)$ . . . . .	1080
22.4.1.1 Um Pouco Sobre o Grupo $SU(3)$ . . . . .	1083
22.4.2 Os Grupos $SO(n)$ . . . . .	1084
22.5 O Grupo Afim e o Grupo Euclidiano . . . . .	1089
22.6 O Grupo de Lorentz em $3 + 1$ -Dimensões . . . . .	1093
22.6.1 O Espaço-Tempo, a Noção de Intervalo e a Estrutura Causal . . . . .	1093
22.6.2 A Invariância do Intervalo . . . . .	1098
22.6.3 O Grupo de Lorentz . . . . .	1101
22.6.4 Alguns Subgrupos do Grupo de Lorentz . . . . .	1102
22.6.5 A Estrutura do Grupo de Lorentz . . . . .	1105
22.6.6 Os Geradores do Grupo de Lorentz . . . . .	1110
22.6.7 O Grupo de Galilei . . . . .	1115
22.7 O Grupo de Poincaré . . . . .	1117
22.8 Ações de Grupos em Espaços de Funções . . . . .	1121
22.9 Exercícios Adicionais . . . . .	1124
<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1126
22.A Extensão do Lema 22.1 e do Teorema 22.7 ao Caso Complexo . . . . .	1126
22.B Prova do Teorema 22.10 . . . . .	1128

### 23 Notas Sobre Mecânica Clássica 1139

23.1 Sistemas de Referência e suas Transformações na Mecânica Clássica. Acelerações Inerciais . . . . .	1140
---	------

23.2	Mecânica de Pontos Materiais . . . . .	1150
23.3	Mecânica de Corpos Rígidos . . . . .	1158
23.3.1	Propriedades do Tensor Momento de Inércia . . . . .	1160
23.3.2	As Equações Dinâmicas . . . . .	1162
23.3.3	Piões. Algumas Soluções . . . . .	1168
23.4	Ângulos de Euler na Mecânica de Corpos Rígidos . . . . .	1172
23.4.1	Usos dos Ângulos de Euler. O Pião de Lagrange . . . . .	1173
23.5	Mecânica Analítica. Um Mínimo . . . . .	1180
23.5.1	O Formalismo Lagrangiano . . . . .	1180
23.5.1.1	A Invariância das Equações de Euler-Lagrange por Mudanças de Sistemas de Referência . . . . .	1182
23.5.1.2	Modos Normais de Oscilação . . . . .	1184
23.5.1.3	Sistemas de Coordenadas Não-Inerciais no Formalismo Lagrangiano . . . . .	1188
23.5.2	O Formalismo Hamiltoniano . . . . .	1190
23.5.2.1	Derivação Variacional das Equações de Hamilton . . . . .	1192
23.5.3	Colchetes de Poisson . . . . .	1194
23.5.3.1	Transformações Canônicas . . . . .	1199
23.6	Exercícios Adicionais . . . . .	1209
<b>24</b>	<b>Grupos de Lie e Álgebras de Lie. Uma Breve Introdução</b> . . . . .	<b>1216</b>
24.1	Variiedades e Grupos de Lie . . . . .	1216
24.2	Breves Considerações sobre Grupos Topológicos . . . . .	1218
24.3	Grupos de Lie Matriciais . . . . .	1220
24.3.1	Uma Topologia Métrica em $GL(\mathbb{C}, n)$ . . . . .	1221
24.3.2	O Grupo de Lie $GL(\mathbb{C}, n)$ . . . . .	1221
24.3.3	Subgrupos Uniparamétricos e seus Geradores . . . . .	1223
24.3.4	Subgrupos Uniparamétricos e Álgebras de Lie . . . . .	1226
24.3.5	Subgrupos Fechados de $GL(\mathbb{C}, n)$ . . . . .	1230
24.4	A Relação entre Grupos de Lie Matriciais e suas Álgebras de Lie . . . . .	1233
24.4.1	Álgebras de Lie Nilpotentes, Solúveis, Simples e Semi-Simples . . . . .	1234
24.4.2	Questões sobre a Exponenciação de Álgebras de Lie . . . . .	1237
24.4.3	Alguns Exemplos Especiais . . . . .	1239
<b>25</b>	<b>Uma Breve Introdução à Teoria das Representações de Grupos</b> . . . . .	<b>1245</b>
25.1	Representações de Grupos . . . . .	1245
25.2	Médias Invariantes. A Medida de Haar . . . . .	1251
25.3	Representações de Grupos Compactos . . . . .	1253
25.3.1	Representações de Grupos Compactos em Espaços de Hilbert Separáveis . . . . .	1254
25.4	O Teorema de Peter-Weyl . . . . .	1260
25.5	Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de $SU(2)$ . . . . .	1269
25.6	Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . . . . .	1274
25.7	Exercícios Adicionais . . . . .	1277
<b>26</b>	<b>Spinores e o Grupo de Lorentz</b> . . . . .	<b>1278</b>
26.1	$SL(2, \mathbb{C})$ e o Grupo de Lorentz . . . . .	1278
26.1.1	Ações de $SL(2, \mathbb{C})$ e o Grupo de Lorentz . . . . .	1281
26.2	Spinores . . . . .	1285
26.2.1	Spinores . . . . .	1289
26.2.1.1	Produtos Escalares Invariantes para Spinores . . . . .	1290
26.2.1.2	Spinores de Dirac e a Equação de Dirac . . . . .	1297

**APÊNDICES** . . . . . 1302

26.A Um Isomorfismo entre  $SL(2, \mathbb{C}) / \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$  e  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  . . . . . 1302

**VI Topologia Geral, Teoria da Medida e Integração** **1310**

**27 Espaços Métricos** **1311**

27.1 Métricas e Espaços Métricos . . . . . 1312  
 27.1.1 Completeza e o Completamento Canônico . . . . . 1320  
 27.2 A Noção de Topologia de Espaços Métricos . . . . . 1327  
 27.3 Pseudométricas . . . . . 1330  
 27.4 Espaços de Funções Limitadas e Completeza . . . . . 1332  
 27.5 Espaços de Banach e de Hilbert . . . . . 1335  
 27.5.1 Espaços de Banach em Espaços de Sequências . . . . . 1337  
 27.6 Teorema do Melhor Aproximante em Espaços Normados Uniformemente Convexos . . . . . 1348  
 27.7 Exercícios Adicionais . . . . . 1353

**APÊNDICES** . . . . . 1356

27.A Números Reais e  $p$ -ádicos . . . . . 1356  
 27.A.1 A Construção de Cantor dos Números Reais . . . . . 1356  
 27.A.2 Outros Completamentos dos Racionais. Números  $p$ -ádicos . . . . . 1359  
 27.B Aproximações para  $\pi$  . . . . . 1362

**28 O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas de Suas Consequências** **1368**

28.1 O Teorema de Ponto Fixo de Banach . . . . . 1369  
 28.1.1 Generalizações do Teorema de Ponto Fixo de Banach . . . . . 1371  
 28.2 Diversas Aplicações do Teorema de Ponto Fixo de Banach . . . . . 1374  
 28.2.1 Aplicação a Equações Numéricas. O Método de Newton . . . . . 1374  
 28.2.2 Aplicação a Sistemas Lineares. O Método de Jacobi . . . . . 1377  
 28.2.3 Aplicação às Equações Integrais de Fredholm e de Volterra . . . . . 1378  
 28.2.4 Aplicações à Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias . . . . . 1385  
 28.2.4.1 O Teorema de Picard-Lindelöf . . . . . 1385  
 28.2.4.2 Generalizando o Teorema de Picard-Lindelöf. Soluções Globais . . . . . 1389  
 28.2.4.3 Um Teorema de Comparação de Soluções de EDO's . . . . . 1390  
 28.3 O Teorema da Função Implícita e o Teorema da Função Inversa . . . . . 1392  
 28.3.1 O Teorema da Função Implícita . . . . . 1393  
 28.3.2 O Teorema da Função Inversa . . . . . 1397

**APÊNDICES** . . . . . 1398

28.A O Lema de Grönwall . . . . . 1398

**29 Espaços Topológicos e Espaços Mensuráveis. Definições e Propriedades Básicas** **1399**

29.1 Definições, Propriedades Elementares e Exemplos . . . . . 1399  
 29.2 Algumas Construções Especiais e Exemplos . . . . . 1405  
 29.2.1 Topologias Geradas por Famílias de Conjuntos . . . . . 1405  
 29.2.1.1 A Topologia de Sorgenfrey . . . . . 1406  
 29.2.2  $\sigma$ -Álgebras Geradas por Famílias de Conjuntos . . . . . 1408  
 29.2.3 Bases de Espaços Topológicos . . . . . 1409  
 29.2.4 Topologias e  $\sigma$ -Álgebras Induzidas . . . . . 1411  
 29.2.5 Topologias e  $\sigma$ -Álgebras Produto . . . . . 1413  
 29.3 Interior e Fecho de Conjuntos em Espaços Topológicos . . . . . 1413  
 29.3.1 Fecho de Conjuntos em Espaços Métricos . . . . . 1420

29.4	Espaços Topológicos Separáveis e Segundo-Contáveis . . . . .	1421
29.4.1	A Segundo-Contabilidade como Propriedade Herdada . . . . .	1424
<b>30</b>	<b>Medidas</b> . . . . .	<b>1426</b>
30.1	O Problema da Teoria da Medida . . . . .	1426
30.2	Medidas de Conjuntos. Definição, Exemplos e Propriedades Básicas . . . . .	1429
30.3	Construindo Medidas. A Medida Exterior e o Teorema de Carathéodory . . . . .	1432
30.3.1	Medidas Exteriores Métricas e Conjuntos Borelianos . . . . .	1439
30.4	Um Esquema de Construção de Medidas Exteriores . . . . .	1442
30.5	Medidas sobre Anéis e suas Extensões . . . . .	1444
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1449
30.A	Prova das Fórmulas de Inclusão-Exclusão . . . . .	1449
<b>31</b>	<b>A Medida de Lebesgue e a Medida de Hausdorff</b> . . . . .	<b>1451</b>
31.1	A Construção da Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	1451
31.1.1	A $\sigma$ -álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$ e a Medida de Borel-Lebesgue . . . . .	1453
31.2	As Medidas de Hausdorff . . . . .	1455
31.3	Conjuntos de Cantor . . . . .	1459
31.4	Bases de Hamel e a Medida de Lebesgue . . . . .	1468
31.5	Exercícios Adicionais . . . . .	1470
<b>32</b>	<b>Continuidade e Convergência em Espaços Topológicos</b> . . . . .	<b>1475</b>
32.1	Primeiras Definições . . . . .	1475
32.2	Espaços Hausdorff . . . . .	1477
32.3	Redes e o Caso de Espaços Topológicos Gerais . . . . .	1478
32.3.1	Redes em Espaços Métricos . . . . .	1481
32.4	O Limite do Ínfimo e o Limite do Supremo . . . . .	1482
32.5	Continuidade de Funções em Espaços Topológicos . . . . .	1485
32.5.1	Outras Noções Associadas à de Continuidade . . . . .	1487
32.5.1.1	Homeomorfismos e Mergulhos Topológicos . . . . .	1488
32.5.2	Outras Caracterizações do Conceito de Continuidade em Espaços Topológicos . . . . .	1489
32.5.3	Continuidade e Convergência . . . . .	1490
<b>33</b>	<b>Elementos da Teoria da Integração</b> . . . . .	<b>1493</b>
33.1	Comentários Preliminares . . . . .	1493
33.2	A Integração no Sentido de Riemann . . . . .	1495
33.2.1	A Integral de Riemann Imprópria . . . . .	1503
33.2.2	Diferenciação e Integração em Espaços de Banach . . . . .	1505
33.3	A Integração no Sentido de Lebesgue . . . . .	1509
33.3.1	Funções Mensuráveis e Funções Simples . . . . .	1509
33.3.2	A Integral de Lebesgue. Integração em Espaços Mensuráveis . . . . .	1514
33.3.3	A Integral de Lebesgue e sua Relação com a de Riemann . . . . .	1521
33.3.4	Teoremas Básicos sobre Integração e Convergência . . . . .	1524
33.3.5	Alguns Resultados de Interesse . . . . .	1526
33.4	Os Espaços $\mathcal{L}_p$ e $L_p$ . . . . .	1528
33.4.1	As Desigualdades de Hölder e de Minkowski . . . . .	1530
33.4.2	O Teorema de Riesz-Fischer. Completeza . . . . .	1533
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1534
33.A	Mais sobre a Integral de Darboux . . . . .	1534
33.A.1	Equivalência das Definições II e III da Integrabilidade de Riemann . . . . .	1535

33.B	Caracterizações e Propriedades de Funções Mensuráveis . . . . .	1536
33.C	Prova do Lema 33.3 . . . . .	1541
33.D	Demonstração de (33.26) . . . . .	1542
33.E	A Equivalência das Definições (33.27) e (33.28) . . . . .	1542
33.F	Prova do Teorema da Convergência Monótona . . . . .	1544
33.G	Prova do Lema de Fatou . . . . .	1545
33.H	Prova do Teorema da Convergência Dominada . . . . .	1546
33.I	Prova dos Teoremas 33.2 e 33.3 . . . . .	1547
33.J	Prova das Desigualdades de Hölder e Minkowski . . . . .	1549
33.K	Prova do Teorema de Riesz-Fischer . . . . .	1551
<b>34</b>	<b>Alguns Tópicos Especiais em Topologia e Análise</b> . . . . .	<b>1553</b>
34.1	Uma Coletânea de Definições . . . . .	1554
34.1.1	Conjuntos Densos em Espaços Topológicos . . . . .	1554
34.1.2	A Noção de Conjunto Conexo em Espaços Topológicos . . . . .	1555
34.2	Axiomas de Separabilidade . . . . .	1559
34.2.1	Algumas Propriedades de Separação em Espaços Métricos . . . . .	1559
34.2.2	Postulados de Separabilidade em Espaços Topológicos . . . . .	1560
34.2.3	O Lema de Urysohn . . . . .	1568
34.2.3.1	O Teorema de Extensão de Tietze . . . . .	1573
34.2.4	A Propriedade de Hausdorff como Propriedade Herdada . . . . .	1576
34.3	Compacidade, Compacidade Local e Paracompacidade . . . . .	1577
34.3.1	Algumas Definições Gerais . . . . .	1577
34.3.2	Espaços de Lindelöf. Um Mínimo . . . . .	1579
34.3.3	Compacidade. Definições e Propriedades em Espaços Topológicos Gerais . . . . .	1580
34.3.3.1	Compacidade em Espaços Hausdorff . . . . .	1583
34.3.3.2	Compacidade em Espaços Métricos . . . . .	1587
34.3.3.3	Compacidade em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	1594
34.3.3.4	Compacidade na Reta de Sorgenfrey . . . . .	1595
34.3.4	Os Teoremas de Ascoli e de Arzelà . . . . .	1597
34.3.4.1	Equilimitação e Equicontinuidade de Famílias de Funções . . . . .	1597
34.3.4.2	Os Teoremas de Ascoli e de Arzelà para Famílias de Funções de um Compacto sobre um Espaço Métrico . . . . .	1599
34.3.4.3	O Teorema de Peano . . . . .	1601
34.3.5	Espaços Compactos Hausdorff e Partições da Unidade . . . . .	1605
34.3.5.1	Uma Excursão pelas Variedades Topológicas Compactas Hausdorff . . . . .	1606
34.3.6	Compacidade Local . . . . .	1609
34.3.6.1	Espaços Localmente Compactos Hausdorff . . . . .	1610
34.3.7	Paracompacidade . . . . .	1612
34.3.7.1	Espaços Paracompactos Hausdorff . . . . .	1612
34.4	As Noções de Topologia Inicial e de Topologia Final . . . . .	1617
34.4.1	A Topologia Inicial de uma Coleção de Funções . . . . .	1617
34.4.2	A Topologia Final de uma Coleção de Funções . . . . .	1619
34.4.3	A Topologia Quociente . . . . .	1620
34.5	Somas de Espaços Topológicos . . . . .	1621
34.6	A Topologia Produto de Espaços Topológicos . . . . .	1621
34.6.1	Alguns Resultados Envolvendo Compacidade e Topologia Produto . . . . .	1623
34.6.2	O Cubo de Hilbert . . . . .	1625
34.7	Teoremas de Metrizabilidade . . . . .	1627
34.7.1	O Teorema de Metrização de Urysohn e Tikhonov . . . . .	1629



34.8	O Teorema da Categoria de Baire . . . . .	1632
34.9	A Métrica de Hausdorff . . . . .	1633
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1636
34.A	Prova da Proposição 34.35 . . . . .	1636

## VII Geometria Diferencial e Topologia Diferencial 1639

<b>35</b>	<b>Variedades</b> . . . . .	<b>1640</b>
35.1	Variedades Topológicas . . . . .	1641
35.1.1	Construindo Variedades Topológicas . . . . .	1646
35.2	Variedades Diferenciáveis . . . . .	1648
35.2.1	Partições da Unidade Diferenciáveis . . . . .	1652
35.2.2	A Noção de Espaço Tangente . . . . .	1654
35.2.2.1	O Espaço Cotangente . . . . .	1660
35.2.3	Tensores em Variedades . . . . .	1662
35.2.3.1	Traços de Tensores. Contração de Índices . . . . .	1664
35.2.3.2	Transposição de Tensores . . . . .	1666
35.2.4	Aplicações Entre Variedades Diferenciáveis . . . . .	1667
35.2.4.1	A Diferencial de Uma Aplicação Entre Variedades. “Pullback” e “Pushforward” . . . . .	1667
35.2.4.2	Imersões, Mergulhos e Subvariedades . . . . .	1671
35.3	Campos Vetoriais e Tensoriais . . . . .	1674
35.3.1	A Derivada de Lie . . . . .	1676
35.4	Exemplos de Variedades Topológicas e Diferenciáveis . . . . .	1681
35.4.1	Uma Variedade Topológica Paracompacta não Segundo-Contável . . . . .	1681
35.4.2	O Gráfico de uma Função Real em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	1683
35.4.2.1	Cones. E Um Estudo de Caso . . . . .	1685
35.4.3	Superfícies Regulares em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	1686
35.4.4	As Esferas $S^n$ . . . . .	1689
35.4.5	Toros (e Algumas Generalizações) . . . . .	1691
35.4.6	Espaços Projetivos Reais . . . . .	1694
35.4.7	Grupos de Lie . . . . .	1697
35.4.8	Fibrados, Fibrados Vetoriais e Principais . . . . .	1697
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1699
35.A	Derivadas de Lie. Prova das Relações (35.70) e (35.81) . . . . .	1699
35.B	Derivadas de Lie. Prova da Relação (35.88) . . . . .	1700
<b>36</b>	<b>Noções Geométricas em Variedades</b> . . . . .	<b>1703</b>
36.1	Métricas Riemannianas e Semi-Riemannianas . . . . .	1703
36.1.1	Transposição em Relação a Tensores Métricos . . . . .	1713
36.2	Conexões Afins . . . . .	1717
36.2.1	Conexões Afins em Campos Vetoriais . . . . .	1717
36.2.1.1	Conexões Afins em Campos Tensoriais . . . . .	1722
36.2.2	O Tensor de Torção . . . . .	1725
36.2.3	Tipos Especiais de Conexões Afins . . . . .	1726
36.2.3.1	Conexões Simétricas (ou Livres de Torção) . . . . .	1726
36.2.3.2	Conexões Métricas (ou Riemannianas) . . . . .	1728
36.2.3.3	Conexões de Levi-Civita . . . . .	1734
36.2.4	Gradiente, Divergente e Laplaciano . . . . .	1735

36.3	O Tensor de Curvatura . . . . .	1738
36.3.1	A Curvatura Seccional . . . . .	1744
36.3.2	O Tensor de Ricci e a Curvatura Escalar . . . . .	1747
36.4	Geodésicas . . . . .	1749
36.4.1	O Lema de Gauss . . . . .	1753
36.4.2	Pontos Conjugados e a Equação de Jacobi . . . . .	1757
36.4.2.1	A Equação de Jacobi . . . . .	1757
36.4.2.2	Pontos Conjugados . . . . .	1759
36.5	A Estrutura Causal de Variedades Lorentzianas . . . . .	1761
36.5.1	A Identidade de Raychaudhuri . . . . .	1763
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1773
36.A	Demonstração de Algumas Propriedades do Tensor de Curvatura . . . . .	1773
36.A.1	Prova da Proposição 36.6 . . . . .	1773
36.A.2	Prova da Primeira Identidade de Bianchi, Proposição 36.8 . . . . .	1774
36.A.3	Prova da Segunda Identidade de Bianchi, Proposição 36.9 . . . . .	1775
36.A.4	Prova da Proposição 36.10 . . . . .	1777
36.A.5	Prova da Proposição 36.11 . . . . .	1778

## VIII Séries e Transformadas de Fourier. Distribuições 1781

<b>37</b>	<b>Aproximação de Funções. Aproximações Polinomiais e Séries de Fourier</b>	<b>1782</b>
37.1	Noções de Convergência para Sequências de Funções . . . . .	1783
37.1.1	Importância da Convergência Uniforme . . . . .	1784
37.1.1.1	Troca de Ordem entre Limites e Integrais . . . . .	1785
37.1.1.2	Troca de Ordem entre Limites e Derivadas . . . . .	1787
37.1.1.3	Troca de Ordem entre Derivadas e Integrais . . . . .	1787
37.2	Sequências Delta de Dirac . . . . .	1789
37.3	Aproximação de Funções por Polinômios . . . . .	1795
37.3.1	O Teorema de Weierstrass . . . . .	1795
37.3.2	O Teorema de Taylor . . . . .	1802
37.4	Aproximação de Funções por Polinômios Trigonométricos . . . . .	1809
37.4.1	Preliminares . . . . .	1810
37.4.2	A Série de Fourier de Funções Periódicas de Período $T$ . . . . .	1812
37.4.3	Polinômios Trigonométricos e Funções Contínuas e Periódicas . . . . .	1814
37.4.4	Convergência de Séries de Fourier . . . . .	1819
37.4.4.1	Séries de Fourier em Senos ou Cossenos para Funções Definidas em Intervalos Compactos . . . . .	1825
37.4.5	Revisitando a Aproximação Uniforme de Funções Contínuas e Periódicas por Polinômios Trigonométricos . . . . .	1828
37.4.6	Séries de Fourier e o Espaço de Hilbert $L^2([-\pi, \pi], dx)$ . . . . .	1832
37.5	O Teorema de Stone-Weierstrass . . . . .	1833
37.6	Exercícios Adicionais . . . . .	1838
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1846
37.A	Prova do Teorema de Weierstrass Usando Polinômios de Bernstein . . . . .	1846
37.B	A Demonstração de Weierstrass do Teorema de Weierstrass . . . . .	1850
<b>38</b>	<b>Introdução às Distribuições e às Transformadas de Fourier</b>	<b>1852</b>
38.1	Funções de Schwartz e Funções de Teste . . . . .	1853
38.1.1	Funções Gaussianas . . . . .	1864
38.2	Transformadas de Fourier . . . . .	1866

38.2.1	Transformadas de Fourier no Espaço de Schwartz . . . . .	1870
38.2.1.1	A Transformada de Fourier de Funções Gaussianas . . . . .	1873
38.2.1.2	Invertibilidade da Transformada de Fourier no Espaço de Schwartz . . . . .	1876
38.2.1.3	Transformadas de Fourier, Produtos de Convolação e Identidade de Plancherel . . . . .	1879
38.2.2	A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ . . . . .	1882
38.2.2.1	Mais Algumas Transformadas de Fourier Relevantes em Aplicações . . . . .	1885
38.2.2.2	A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ e suas Propriedades Espectrais . . . . .	1888
38.2.3	Transformadas de Fourier: Tópicos Suplementares . . . . .	1890
38.2.3.1	A Fórmula de Soma de Poisson . . . . .	1891
38.2.3.2	Usos da Fórmula de Soma de Poisson. A Função $\theta$ de Jacobi . . . . .	1893
38.2.3.3	Transformadas de Fourier e Médias Angulares . . . . .	1894
38.3	Distribuições e Distribuições Temperadas . . . . .	1899
38.3.1	Primeiros Exemplos de Distribuições . . . . .	1901
38.3.2	Outros Exemplos de Distribuições . . . . .	1907
38.3.2.1	A Distribuição Valor Principal . . . . .	1907
38.3.2.2	Distribuições do Tipo Parte Finita de Hadamard . . . . .	1909
38.3.3	Algumas Relações Úteis Envolvendo Distribuições . . . . .	1912
38.3.4	Derivadas de Distribuições . . . . .	1916
38.3.4.1	Alguns Exemplos de Derivadas de Distribuições . . . . .	1919
38.3.4.2	Cálculo da Derivada de Algumas Distribuições de Interesse . . . . .	1920
38.3.5	Alguns Resultados Estruturais sobre Distribuições . . . . .	1922
38.3.6	Transformadas de Fourier de Distribuições Temperadas . . . . .	1923
38.3.6.1	Cálculo de Transformadas de Fourier de Algumas Distribuições Temperadas . . . . .	1923
38.3.7	Produtos de Distribuições . . . . .	1927
38.3.7.1	Produto de Convolação de Distribuições . . . . .	1932
38.4	Equações Diferenciais Distribucionais, Soluções Fundamentais e Funções de Green . . . . .	1933
38.4.1	Soluções Fundamentais . . . . .	1936
38.4.1.1	Soluções Fundamentais como Funções Generalizadas . . . . .	1937
38.4.1.2	O Caso de Operadores Lineares a Coeficientes Constantes . . . . .	1939
38.4.1.3	Alguns Exemplos Fisicamente Relevantes . . . . .	1944
38.5	Exercícios Adicionais . . . . .	1948
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1954
38.A	Prova de (38.21) . . . . .	1954
38.B	Prova da Proposição 38.15 . . . . .	1955

## IX Análise Funcional

1961

<b>39</b>	<b>Noções Básicas Sobre Espaços de Hilbert</b>	<b>1962</b>
39.1	Aspectos Topológicos Básicos de Espaços de Hilbert . . . . .	1963
39.2	Aspectos Geométricos Básicos de Espaços de Hilbert . . . . .	1965
39.2.1	Funcionais Lineares e o Dual Topológico de um Espaço de Hilbert . . . . .	1969
39.2.1.1	O Teorema da Representação de Riesz . . . . .	1970
39.2.2	Conjuntos Ortonormais Completos em Espaços de Hilbert . . . . .	1971
39.2.3	Conjuntos Totais . . . . .	1982
39.2.3.1	Um Exemplo no Espaço $L^2(\mathbb{R}, dx)$ . . . . .	1983
39.3	Somas Diretas e Produtos Tensoriais de Espaços de Hilbert. Espaços de Fock . . . . .	1986
39.3.1	Somas Diretas de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert . . . . .	1986
39.3.2	Somas Diretas de uma Coleção Contável de Espaços de Hilbert . . . . .	1987

39.3.3	Produtos Tensoriais de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert . . . . .	1991
39.3.4	Os Espaços de Fock . . . . .	1994
39.4	Exercícios Adicionais . . . . .	1997
<b>40</b>	<b>Operadores Lineares Limitados em Espaços de Banach e de Hilbert</b>	<b>1998</b>
40.1	Operadores Lineares em Espaços Vetoriais Normados . . . . .	2000
40.1.1	Espaços de Banach de Operadores . . . . .	2004
40.1.2	O Dual Topológico de um Espaço de Banach . . . . .	2008
40.1.3	O Teorema de Hahn-Banach e Algumas Consequências do Mesmo . . . . .	2011
40.1.4	O Teorema de Banach-Steinhaus ou Princípio de Limitação Uniforme . . . . .	2017
40.1.5	O Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado . . . . .	2018
40.2	Operadores Limitados em Espaços de Hilbert . . . . .	2025
40.2.1	A Noção de Operador Adjunto em Espaços de Hilbert . . . . .	2025
40.2.2	Operadores Autoadjuntos, Normais, Unitários, Projetores Ortogonais e Isometrias Parciais . . . . .	2028
40.3	Rudimentos da Teoria das Álgebras de Banach e Álgebras $C^*$ . . . . .	2036
40.3.1	Álgebras de Banach . . . . .	2036
40.3.2	Alguns Fatos Estruturais sobre Álgebras $C^*$ . . . . .	2039
40.3.2.1	Álgebras com Involução e a Unidade . . . . .	2040
40.3.3	A Inversa de Operadores Limitados . . . . .	2043
40.3.4	O Espectro de Operadores em Álgebras de Banach . . . . .	2048
40.3.5	O Operador Resolvente e Propriedades Topológicas do Espectro . . . . .	2049
40.3.5.1	O Teorema da Aplicação Espectral . . . . .	2052
40.3.6	O Raio Espectral . . . . .	2053
40.3.7	O Homomorfismo de Gelfand em Álgebras $C^*$ . . . . .	2057
40.3.8	Raízes Quadradas de Operadores em Álgebras de Banach . . . . .	2060
40.3.9	Elementos Positivos de Álgebras $C^*$ . . . . .	2062
40.3.9.1	Relação de Ordem Decorrente da Positividade em Álgebras $C^*$ . . . . .	2066
40.3.10	Aproximantes da Unidade em Álgebras $C^*$ . . . . .	2067
40.3.10.1	Cosets por Bi-Ideais em Álgebras $C^*$ . . . . .	2070
40.4	Álgebras de von Neumann. Um Mínimo . . . . .	2074
40.4.0.1	O Teorema do Bicomutante . . . . .	2076
40.5	Um Pouco sobre Estados e Representações de Álgebras $C^*$ . . . . .	2079
40.5.1	Morfismos Entre Álgebras $C^*$ . . . . .	2079
40.5.2	Representações de Álgebras $C^*$ . . . . .	2081
40.5.2.1	Estados em Álgebras $C^*$ e a Representação GNS . . . . .	2083
40.5.2.2	Estados Puros, de Mistura e a Irredutibilidade de Representações GNS . . . . .	2089
40.5.3	Exemplos em Álgebras de Matrizes. Construção GNS. Estados Puros e a Entropia de von Neumann . . . . .	2091
40.5.3.1	A Entropia de von Neumann . . . . .	2095
40.5.3.2	A Construção GNS em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ . . . . .	2099
40.6	O Espectro de Operadores em Espaços de Banach . . . . .	2101
40.6.1	O Espectro de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert . . . . .	2105
40.6.2	Espectro em Espaços de Banach. Alguns Exemplos e Contraexemplos . . . . .	2107
40.7	O Lema da Raiz Quadrada em Espaços de Hilbert . . . . .	2111
40.7.1	A Decomposição Polar de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert . . . . .	2116
40.8	Operadores Compactos em Espaços de Banach e de Hilbert . . . . .	2118
40.8.1	Alguns Fatos Gerais Sobre o Espectro de Operadores Compactos . . . . .	2128
40.8.1.1	O Teorema da Alternativa de Fredholm . . . . .	2129
40.8.2	O Teorema Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos . . . . .	2135
40.9	O Teorema Espectral para Operadores Limitados autoadjuntos em Espaços de Hilbert . . . . .	2141

40.9.1	O Cálculo Funcional Contínuo e o Homomorfismo de Gelfand . . . . .	2141
40.9.2	Generalizando o Cálculo Funcional Contínuo. As Medidas Espectrais . . . . .	2143
40.9.3	Medidas com Valores em Projeções Ortogonais . . . . .	2150
40.9.4	Os Projetores Espectrais e o Teorema Espectral . . . . .	2154
40.10	Operadores Tipo Traço e de Hilbert-Schmidt . . . . .	2157
40.10.1	Operadores Tipo Traço, ou Traciais . . . . .	2159
40.10.1.1	O Traço de um Operador Tracial . . . . .	2163
40.10.2	Operadores de Hilbert-Schmidt . . . . .	2166
40.10.3	Operadores Traciais e de Hilbert-Schmidt e os Operadores Compactos . . . . .	2174
40.10.4	Operadores de Hilbert-Schmidt e Operadores Integrais . . . . .	2175
40.10.5	O Teorema de Lidskii. Traço e Espectro de Operadores Traciais . . . . .	2179
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	2180
40.A	Prova do Teorema 40.19 . . . . .	2180
40.B	Um Lema Devido a F. Riesz Sobre Espaços Normados . . . . .	2182
<b>41</b>	<b>Operadores Lineares Não-Limitados em Espaços de Hilbert</b>	<b>2184</b>
41.1	Classificando Operadores Não-Limitados . . . . .	2185
41.1.1	Operadores Fechados . . . . .	2186
41.1.2	Operadores Fecháveis . . . . .	2188
41.1.3	O Adjunto de um Operador . . . . .	2190
41.1.3.1	Operadores Simétricos, Autoadjuntos e Essencialmente Autoadjuntos . . . . .	2195
41.2	Espaços de Deficiência e Extensões Autoadjuntas de Operadores Simétricos . . . . .	2200
41.2.1	Considerações Preliminares . . . . .	2200
41.2.2	Classificação de Extensões Simétricas Fechadas de Operadores Simétricos Fechados. Extensões Autoadjuntas . . . . .	2202
41.3	Bestiário de Exemplos e Contraexemplos . . . . .	2206
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	2214
41.A	Prova do Lema 41.6 . . . . .	2214
<b>42</b>	<b>Álgebras de Operadores e a Física Quântica</b>	<b>2215</b>
42.1	Algumas Considerações Gerais Sobre Teorias Físicas . . . . .	2215
42.2	O Modelo da Mecânica Clássica . . . . .	2217
42.3	O Quadro da Física Quântica e a Relevância do Teorema Espectral . . . . .	2219
42.3.1	Abstração da Noção de Medida na Física Quântica. POVM's . . . . .	2222
42.3.1.1	Medidas com Valores em Operadores Positivos: POVMs . . . . .	2222
42.4	O Princípio de Incerteza e as Desigualdades de Bell . . . . .	2222
42.4.1	O Princípio de Incerteza . . . . .	2222
42.4.2	As Desigualdades de Bell . . . . .	2227
42.4.2.1	O Problema das Variáveis Escondidas . . . . .	2227
42.4.3	Obtendo as Desigualdades de Bell . . . . .	2233
42.4.4	Alguns Resultados Matemáticos sobre as Desigualdades de Bell . . . . .	2238
42.5	O Paradoxo de Einstein-Podolsky-Rosen . . . . .	2242
<b>43</b>	<b>O Limite Indutivo de Álgebras</b>	<b>2243</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>2251</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>2264</b>

# Prefácio



intenção básica deste livro é fornecer a estudantes de Física noções matemáticas necessárias a uma melhor compreensão de desenvolvimentos modernos da Física Teórica e da Matemática. Longe vai o tempo em que o conhecimento matemático requerido a um físico teórico restringia-se a certos métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais. Essa visão, porém, infelizmente impregna até o presente a concepção de certas disciplinas ditas de Física-Matemática (ou de Métodos Matemáticos da Física Teórica) e de certos maus livros sobre o tema. Em contraste, noções sobre Estruturas Algébricas, Topologia Geral, Teoria da Medida e da Integração, Geometria Diferencial, Teoria de Grupos, Teoria de Distribuições, Análise Funcional e Álgebras de Operadores são hoje imprescindíveis ao trabalho de um físico teórico.

Este livro cresceu a partir de notas de aula escritas pelo autor em diversas disciplinas de graduação e pós-graduação ministradas no IFUSP. Diversos de seus capítulos podem ser empregados em disciplinas de graduação ou pós-graduação, mas o mesmo foi concebido primordialmente para servir ao auto-estudo de estudantes e docentes. De modo geral, o nível varia entre intermediário e avançado. Também de modo geral, o texto é de leitura auto-suficiente, mas vez por outra algum estudo complementar é sugerido. A melhor maneira de um estudante conduzir-se no estudo de assuntos matemáticos é munindo-se de uma boa coleção de exemplos e contraexemplos de várias situações específicas, patologias, casos especiais etc. Além de servirem de auxílio à memória, exemplos ajudam a melhor entender a motivação de certas definições e a compreender restrições mencionadas em enunciados de teoremas. Dessa forma, procuramos sempre que possível apresentar (muitas vezes em exercícios!) um bom número de exemplos e contraexemplos para as várias situações tratadas.

Este texto, porém, não é substituto à leitura dos bons livros especializados nos diversos assuntos aqui tratados. Parte do material aqui apresentado pode ser encontrado em diversas fontes, citadas na bibliografia (página 2252), mas a apresentação e sua ordem são próprias. Há também neste texto demonstrações do próprio autor de resultados conhecidos que são, por alguma razão, dificilmente encontradas na literatura. Mas como comenta o autor de [185] em seu prefácio, *“qualquer livro-texto deve mais aos livros e notas de outros do que a seu autor nominal”*.

Fazemos notar que este livro está ainda sendo trabalhado e alguns capítulos e seções podem vir a ser alterados, corrigidos, eliminados ou acrescidos de material. Além disso, novos capítulos serão escritos. O material já presente é, porém, útil a todos aqueles que queiram iniciar-se nos assuntos aqui expostos. Versões atualizadas serão colocadas na “rede” (no endereço acima indicado) sempre que possível.

O autor agradece a todos os que apresentarem sugestões. Fabulosas somas em dinheiro são oferecidas a todos aqueles que encontrarem erros no texto. Entre os já aquinhoados encontram-se Prof. Matheus Grasselli, Prof. Alexandre T. Baraviera, Prof. Marcos V. Travaglia, Daniel Augusto Cortez, Djogo F. C. Patrão, Cléber de Mico Muramoto, Profa. Katiúscia Nadyne Cassemiro, Urbano Lopes França Junior, Gustavo Barbagallo de Oliveira, Priscila Vieira Franco Gondeck, Darielder Jesus Ribeiro, Henrique Scemes Xavier, Prof. Daniel Augusto Turolla Vanzella, Leonardo Fernandes Dias da Motta, Krishnamurti José de Andrade, Prof. Pedro Tavares Paes Lopes, Diego Cortegoso Assêncio, Fleury José de Oliveira Filho, Paulo Henrique Reimberg, Fabíola Diacenco Xavier, Márcio André Prieto Aparício Lopez, Dorival Gonçalves Netto, Célia Santos Jordão Alves, Bruno Lima de Souza, Leandro Saccoletto, João Pedro Jericó de Andrade, Ronaldo da Silva Alves Batista, Carolina Dias Alexiou, Arão Benjamin Garcea, Cláudio Mayrink Verdun, Leonardo Hanao Gabriel, Felipe Contatto, Victor Bernardo Chabu, Bruno Hideki Kimura, Fabrizio Fogaça Bernardi, Alessandro Takeshi Morita Gagliardi, Cedrick Miranda Mello, Thiago Costa Raszeja, Pedro Rangel Caetano, Anderson Seigo Misobuchi, Leandro Silva Pimenta, Alexandre Homrich, Prof. Edélcio Gonçalves de Souza, Lissa de Souza Campos e Ricardo Correa da Silva, aos quais somos muito gratos por correções e sugestões. Estas Notas foram escritas durante um intervalo longo de tempo, de sorte que alguns dos seus usuários são hoje colegas professores e fizemos menção a isso na lista acima, quando soubemos. Pedimos desculpas por eventuais omissões.

As Seções 26.A, página 1302, e 28.2.4.1, página 1385, foram originalmente escritas por Daniel Augusto Cortez. A Seção 21.9, página 971, foi originalmente escrita por André M. Timpanaro, Fleury J. Oliveira e Paulo H. Reimberg. A eles dedicamos agradecimentos especiais.

João Carlos Alves Barata

São Paulo, 21 de junho de 2017  
 Departamento de Física Matemática do IFUSP  
 Universidade de São Paulo

# Bons Mots

*“O comportamento de um físico em relação à Matemática é similar a de um ladrão inteligente em relação ao código penal: ele estuda apenas o suficiente para evitar punições”.*

I. M. Gelfand (1913–2009).

*“The greatest enemy of knowledge is not ignorance, it is the illusion of knowledge”.*

Daniel J. Boorstin (1914–2004), também atribuído a Stephen W. Hawking (1942–).

*“A mente não é um vaso a ser repleto, mas uma tocha a ser acesa”.*

Plutarco (46?–120).

*“The public has a distorted view of science, because children are taught in school that science is a collection of firmly established truths. In fact, science is not a collection of truths. It is a continuing exploration of mysteries”.*

Freeman Dyson (1923–), in *How We Know*, The New York Review of Books, March 10, 2011.

*“When a theoretical physicist can not solve a problem he goes for the next more difficult one”.*

Sir Michael Francis Atiyah (1929–).

*“My friend G. H. Hardy<sup>1</sup>, who was professor of pure mathematics, enjoyed this pleasure [in mathematical demonstrations] in a very high degree. He told me once that if he could find a proof that I was going to die in five minutes he would of course be sorry to lose me, but this sorrow would be quite outweighed by pleasure in the proof”.*

Bertrand Russell (1872–1970).

*“Mathematics is not a deductive science – that’s a cliché. When you try to prove a theorem, you don’t just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial and error, experimentation, guesswork”.*

Paul R. Halmos, in [130].

*“The source of all great mathematics is the special case, the concrete example. It is frequent in mathematics that every instance of a concept of seemingly great generality is in essence the same as a small and concrete special case”.*

Paul R. Halmos, in [130].

*“Mathematics is a subarea of Applied Mathematics”.*

Peter Lax (–).

*“Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap”.*

Vladimir I. Arnold (1937–2010). In “On teaching mathematics”. Address at the discussion on teaching of mathematics in Palais de Découverte in Paris on 7 March 1997.

*“In science, self-satisfaction is death. Personal self-satisfaction is the death of the scientist. Collective self-satisfaction is the death of the research. It is restlessness, anxiety, dissatisfaction, agony of mind that nourish science”.*

Jacques Lucien Monod (1910–1976), in *New Scientist*, 1976.

*“Não existe nenhuma categoria da Ciência à qual se possa dar o nome de Ciência Aplicada. O que existe são a Ciência e as aplicações da Ciência, intimamente ligadas, como frutos à árvore que os gerou”.*

---

<sup>1</sup>Godfrey Harold Hardy (1877–1947).



Louis Pasteur (1822–1895), in “Pourquoi la France n’a pas trouvé d’hommes supérieurs au moment du péril”, *Revue Scientifique* (Paris, 1871).

“Disse Kant<sup>2</sup>: ‘Eu afirmo que em cada Ciência Natural específica pode-se atingir somente tanto Conhecimento verdadeiro quanto nela houver de Matemática’. *De fato, somente dominamos uma teoria das ciências naturais quando expomos seu núcleo matemático e o desvendamos completamente*”.

David Hilbert (1862–1943) em “Naturerkennen und Logik”, palestra apresentada em setembro de 1930, em Königsberg, em Congresso da Associação Alemã de Cientistas Naturais e Médicos.

“Não podemos nos permitir acreditar naqueles que em nossos dias, com cenho filosófico e em tom de superperiodidade, profetizam a decadência cultural e apologizam o Ignorabimus. Para nós não existe o Ignorabimus e, em minha opinião, também não para as Ciências Naturais. Em lugar do tolo Ignorabimus nosso lema é ‘Nós devemos saber, nós iremos saber’”.

David Hilbert. *ibidem*.

“A geometry implies the heterogeneity of locus, namely that there is a locus of the Other. Regarding this locus of the Other, of one sex as Other, as absolute Other, what do the most recent developments in topology allow us to posit? I will posit here the term compactness. Nothing is more compact than a fault, assuming that the intersection of everything that is enclosed therein is accepted as existing over an infinite number of sets, the result being that the intersection implies this infinite number. That is the very definition of compactness”.

Jacques Lacan (1901–1981), em *Le Séminaire Jacques Lacan*, Livre XX: *Encore*, 1972–1973. Texto organizado por Jacques-Alain Miller. Paris: Éditions du Seuil. Traduzido e citado por Alan Sokal e Paul Bricmont in *Intellectual Impostures*.

Para a definição de compacidade, vide Seção 34.3, página 1577.

\* \*\* \*\*\* \*\* \*

“Unprovided with original learning, unformed in the habits of thinking, unskilled in the arts of composition, I resolved to write a book”.

Edward Gibbon (1737–1794).

“Talvez eu não tenha tido êxito em fazer as coisas difíceis tornarem-se fáceis, mas pelo menos eu nunca fiz um assunto fácil tornar-se difícil”.

F. G. Tricomi (1897–1978).

“... E costumava dizer que nenhum livro é tão ruim a ponto de nada conter de valor...”.

Plínio, o Novo (61–114), a respeito de seu tio, Plínio, o Velho (23–79).

“Would I had phrases that are not known, utterances that are strange, in new language that has not been used, free from repetition, not an utterance that has grown stale, which men of old have spoken”.

Khakheperresenb (ci. 1900 AC), escriba egípcio. Citado em “The Burden of the Past and the English Poet” de Walter Jackson Bate.

“Tudo que deveria ter sido dito já o foi, mas como ninguém ouvia, tudo tem de ser dito novamente”.

André Paul Guillaume Gide (1869–1951).

“Uma obra nunca é terminada, ela é apenas abandonada”.

Atribuído a Paul Valéry (1871–1945).

---

<sup>2</sup>Immanuel Kant (1724–1804).



# Como Ler Este Livro

*“Reading made Don Quixote a gentleman. Believing what he read made him mad”.*

George Bernard Shaw (1856–1950).

O leitor deste livro não deve possuir o temor de que o mesmo deva (nem a expectativa de que o mesmo possa) ser lido linearmente, ou seja, na sequência numérica crescente dos capítulos e seções. Ele não foi concebido dessa forma e tal concepção não seria exequível devido à variedade de assuntos, às diferenças de nível de abordagem e à complexidade das conexões entre os diferentes temas. O Conhecimento não é um conjunto totalmente ordenado pela relação de complexidade conceitual ou pela relação de motivação (para a definição da noção de ordem total em conjuntos, vide página 47).

Os diversos capítulos não foram escritos em ordem crescente de complexidade. Por vezes, a motivação para um determinado tema é apresentada em um capítulo anterior, mas por vezes essa motivação surge em um capítulo posterior. Nos capítulos sobre equações diferenciais, por exemplo, a discussão de aplicações em Física é postergada para o Capítulo 21, página 901, e o leitor interessado na motivação para certos tratamentos pode sem perdas consultar esse capítulo antes ou durante o estudo de capítulos que lhe antecedem.

Um problema semelhante ocorre com temas ligados à Topologia e à Análise. Os capítulos dedicados a esses assuntos servem a capítulos que lhes sucedem, mas também, em parte, a capítulos que lhes antecedem. Cabe ao leitor perceber suas necessidades formativas, avançando ou retrocedendo na leitura conforme lhe aprouver. A consulta ao Índice Remissivo (página 2264) ou à lista de Capítulos e Seções que compõem o texto (página 3) deve ser de valia para tal.

# Notação e Advertências

Para facilitar a consulta e a leitura, listamos aqui sem muitos comentários um pouco da notação que empregaremos nestas Notas.

- Se  $z$  é um número complexo denotaremos seu complexo conjugado por  $\bar{z}$ . A notação  $z^*$  (mais comum em textos de Física) pode ocorrer mais raramente.
- O símbolo  $A := B$  ou  $B =: A$  denota que  $A$  é definido pela expressão  $B$ . O símbolo  $A \equiv B$  indica que  $A$  e  $B$  são duas notações distintas para o mesmo objeto.
- Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Se  $A$  é um subconjunto de  $B$ , denotamos esse fato por  $A \subset B$  ou por  $B \supset A$ . Por  $A \subsetneq B$  ou  $B \supsetneq A$  denotamos o fato de  $A$  ser um subconjunto próprio de  $B$ , ou seja,  $A \subset B$ , mas  $A \neq B$ .

- Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  são vetores reais com  $n$  componentes (ou seja, elementos de  $\mathbb{R}^n$ ) então definimos

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n .$$

Trata-se do produto escalar usual em  $\mathbb{R}^n$ .

- Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  são vetores complexos com  $n$  componentes (ou seja, elementos de  $\mathbb{C}^n$ ) então definimos

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} := \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n .$$

Trata-se do produto escalar usual em  $\mathbb{C}^n$ .

- Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  são vetores complexos com  $n$  componentes (ou seja, elementos de  $\mathbb{C}^n$ ) então definimos

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n .$$

Trata-se de uma forma bilinear em  $\mathbb{C}^n$ .

- $\text{Mat}(\mathbb{R}, m, n)$  ou  $\text{Mat}(m, n, \mathbb{R})$  designa o conjunto de todas as matrizes reais  $m \times n$  ( $m$  linhas e  $n$  colunas). Analogamente,  $\text{Mat}(\mathbb{C}, m, n)$  ou  $\text{Mat}(m, n, \mathbb{C})$  designa o conjunto de todas as matrizes complexas  $m \times n$ . O conjunto de todas as matrizes quadradas  $n \times n$  com entradas reais (complexas) será denotado simplesmente por  $\text{Mat}(\mathbb{R}, n)$  (por  $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ ).

- Se  $A$  é um elemento de  $\text{Mat}(\mathbb{R}, n)$  ou de  $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ , então  $A^T$  designa a matriz transposta de  $A$ , ou seja, a matriz cujos elementos de matriz  $ij$  são  $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ .

- Se  $A$  é um operador linear em um espaço vetorial complexo (com um certo produto escalar), seu adjunto é denotado por  $A^*$ . Em textos de Física é mais comum denotá-lo por  $A^\dagger$ , mas não usaremos isso aqui.

Assim, se  $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ , então  $A^*$  será a adjunta de  $A$  (em relação ao produto escalar usual, acima). O elemento de matriz  $ij$  de  $A^*$  será  $(A^*)_{ij} = \bar{A}_{ji}$ .

- Denotaremos o operador identidade agindo em um espaço vetorial (a matriz identidade, agindo em um espaço vetorial de dimensão finita) pelo símbolo  $\mathbb{1}$ . Esse símbolo também representará a unidade de uma álgebra.

- Designaremos um produto escalar entre dois vetores  $u$  e  $v$  sempre por  $\langle u, v \rangle$  e nunca por  $(u, v)$ , para não causar confusão com a notação para par ordenado. Outra notação possível é aquela empregada frequentemente em textos de Mecânica Quântica:  $\langle u | v \rangle$ , mas faremos raramente uso da mesma.

- Ainda sobre produtos escalares, seguiremos sempre a convenção dos textos de Física: um produto escalar em um espaço vetorial sobre os complexos é linear em relação ao segundo argumento e antilinear em relação ao primeiro. Assim, se  $\alpha$  e  $\beta$  são números complexos, teremos  $\langle \alpha u, \beta v \rangle = \bar{\alpha} \beta \langle u, v \rangle$ . Textos de Matemática adotam por vezes a convenção oposta (ou mesmo ambas!).

- Sobre o emprego das palavras *função*, *aplicação*, *mapeamento*, *mapa*, *funcional*, *operador*, *operação*, *produto* e *forma*, que por vezes causam perplexidade em estudantes, remetemos ao comentário à página 34.
- Dado um conjunto  $X \neq \emptyset$ , denota-se por  $\mathbb{P}(X)$  a coleção de todos os subconjuntos de  $X$ .  $\mathbb{P}(X)$  é denominado o *conjunto das partes* de  $X$ .
- A topologia usual da reta real  $\mathbb{R}$  será denotada aqui por  $\tau_{\mathbb{R}}$ .
- A  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}$  será (quase sempre) denotada aqui por  $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$ .
- A  $\sigma$ -álgebra dos subconjuntos de  $\mathbb{R}$  mensuráveis por Lebesgue será (quase sempre) denotada aqui por  $\mathcal{M}_{\mu_L}$ .
- Por  $\mathbb{N}$  denotamos o conjunto dos números naturais:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Por  $\mathbb{N}_0$  denotamos o conjunto dos números naturais, incluindo o zero:  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . O leitor deve ser advertido, porém, que essa convenção não é universal. O padrão ISO 31-11 (dedicado a sinais e símbolos matemáticos) recomenda a convenção  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  e  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ . O leitor deve ter cuidado, portanto, ao comparar textos diferentes.
- Para  $x \in \mathbb{R}$ , o símbolo  $\lfloor x \rfloor$  designa o maior inteiro menor ou igual a  $x$ . O símbolo  $\lceil x \rceil$  designa o menor inteiro maior ou igual a  $x$ .

Em particular, para  $n \in \mathbb{Z}$  valem

$$\lfloor n/2 \rfloor = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ (n-1)/2, & n \text{ ímpar}, \end{cases} \quad \lceil n/2 \rceil = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ (n+1)/2, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

- O símbolo  $\square$  indica o fim de um enunciado. O símbolo  $\blacksquare$  indica o fim de uma demonstração. O símbolo  $\spadesuit$  indica o fim do enunciado de um exercício. O símbolo  $\boxplus$  indica o fim do enunciado de um exemplo. O símbolo  $\clubsuit$  indica o fim de uma observação, nota ou comentário. O símbolo  $\spadesuit$  indica o fim de uma definição.
- $\mathcal{B}(X)$  designa o conjunto de operadores limitados agindo em um espaço de Banach  $X$ .  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  designa o conjunto de operadores limitados agindo em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ .
- $C(L)$  designa o conjunto de todas as funções contínuas (reais ou complexas, dependendo do caso), definidas em  $L$  (na topologia que se estiver considerando em  $L$ ).
- $\mathfrak{B}(L)$  designa a coleção de todos os conjuntos Borelianos de  $L$  (em relação à topologia que se estiver considerando em  $L$ ).  $B_l(L)$  designa a coleção de todas as funções Borelianas (reais ou complexas, dependendo do caso), definidas em  $L$ .
- O domínio de um operador  $T$  (agindo em um espaço de Banach ou de Hilbert) será denotado por  $D(T)$  ou por  $\text{Dom}(T)$ . A imagem (“range”) de  $T$  será denotada por  $R(T)$  ou por  $\text{Ran}(T)$  ou, mais raramente, por  $\text{Im}(T)$ , mas essa última notação pode causar confusão com a da parte imaginária de um número complexo ou mesmo com a da parte imaginária de um operador agindo em um espaço de Hilbert:  $\text{Im}(T) := \frac{1}{2i}(T - T^*)$ .
- A noção de *propriedade válida quase em toda parte* é definida na página 1432.

## • Intervalos

Ainda não introduzimos os números reais nem a relação de ordem entre eles mas, como essas noções são conhecidas, vamos colocar aqui uma palavra sobre a nomenclatura usada para descrever intervalos da reta real. Para  $a < b \in \mathbb{R}$  o conjunto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a < x < b\}$$

é dito ser um intervalo aberto. Para  $a \leq b \in \mathbb{R}$  o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a \leq x \leq b\}$$

é dito ser um intervalo fechado. Para  $a < b \in \mathbb{R}$  os conjuntos

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a \leq x < b\}$$

e

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a < x \leq b\}$$

são ditos ser intervalos semiabertos (ou semifechados).

É importante dizer que a nomenclatura “aberto” ou “fechado” acima é usada independentemente da topologia usada em  $\mathbb{R}$  (a noção de topologia será introduzida adiante).

- **Delta de Krönecker**

De  $i$  e  $j$  pertencem a um conjunto contável  $C$ , definimos o chamado *delta de Krönecker* por

$$\delta_{ij} \equiv \delta^{ij} \equiv \delta_i^j \equiv \delta_j^i := \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

para todos  $i, j \in C$ . As diferentes notações  $\delta_{ij}$ ,  $\delta^{ij}$ ,  $\delta_i^j$  e  $\delta_j^i$  ocorrem, por exemplo, na Geometria Diferencial e na Teoria da Relatividade.

- **A esfera unitária**

Para  $n \in \mathbb{N}_0$ , denotaremos por  $\mathbb{S}^n$  a chamada *esfera unitária* em  $\mathbb{R}^{n+1}$ : o lugar geométrico de todos os pontos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  situados a uma distância Euclidiana igual a 1 da origem:

$$\mathbb{S}^n := \left\{ (y^1, \dots, y^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sqrt{(y^1)^2 + \dots + (y^{n+1})^2} = 1 \right\}.$$

Note-se que  $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ .

- **Classes  $C^k$**

Por  $C(\mathbb{R})$  denotaremos a coleção de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que sejam contínuas. Por  $C_0(\mathbb{R})$  denotaremos a coleção de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que sejam contínuas e de suporte compacto.

Denotamos por  $C^1(\mathbb{R})$  a coleção de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas, diferenciáveis e com derivada contínua. Tais funções são ditas *funções continuamente diferenciáveis*, ou de *classe  $C^1$* . Denotamos por  $C^k(\mathbb{R})$ ,  $k \in \mathbb{N}$  a coleção de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas e cujas  $k$  primeiras derivadas  $f'$ ,  $f''$ ,  $\dots$ ,  $f^{(k)}$  existam e sejam igualmente contínuas. Tais funções são ditas ser de *classe  $C^k$* . Por  $C^\infty(\mathbb{R})$  denotamos as funções infinitamente diferenciáveis (as quais serão, ocasionalmente, denominadas *funções suaves*). Por  $C_0(\mathbb{R})$  denotaremos a coleção de todas as funções contínuas e de suporte compacto. Por  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  denotaremos a coleção de todas as funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto.

As diversas notações de acima estendem-se de forma natural a funções definidas em subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , como intervalos abertos ou fechados, compactos ou não. Aqui, o estudante deve tomar certos cuidados. Por exemplo,  $C((0, 1))$  contém, entre outras, funções contínuas que divergem em 0 e/ou em 1, mas  $C([0, 1])$  só contém funções limitadas.





# Parte I

## Capítulos Introdutórios