

---

# Universidade de São Paulo

## Instituto de Física

Departamento de Física Matemática

3 de agosto de 2022

### Notas para Cursos de Física-Matemática

João Carlos Alves Barata

Versão de 3 de agosto de 2022

---

Estas notas, ou sua versão mais recente, podem ser encontradas no seguinte endereço WWW:

[http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas\\_de\\_aula](http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula)



# Lista de Capítulos

<b>I</b>	<b>Capítulos Introdutórios</b>	<b>39</b>
1	Noções Conjuntivistas Básicas	40
2	Estruturas Algébricas Básicas	79
3	Formas Lineares e Normas em Espaços Vetoriais	221
<b>II</b>	<b>Tópicos de Análise Real e Complexa</b>	<b>261</b>
4	Recordações de Cálculo Vetorial em Três Dimensões	262
5	Conjuntos Convexos e Funções Convexas	275
6	Funções Geratrizes. Produtórias Complexas. Algumas Identidades Combinatórias	313
7	A Função Gama de Euler	344
8	Um Mínimo Sobre A Função Zeta de Riemann	386
9	Transformações de Möbius	415
<b>III</b>	<b>Tópicos de Álgebra Linear</b>	<b>463</b>
10	Tópicos de Álgebra Linear. I	464
11	Tópicos de Álgebra Linear. II	587
<b>IV</b>	<b>Equações Diferenciais</b>	<b>631</b>
12	Equações Diferenciais Ordinárias. Uma Introdução	632
13	Alguns Métodos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias	655
14	Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares	671
15	Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares no Plano Complexo	751
16	Propriedades de Algumas Funções Especiais	814
17	Completeza de Algumas Famílias de Funções	885
18	Rudimentos da Teoria das Equações a Derivadas Parciais	900

19	Introdução ao Problema de Sturm-Liouville	972
20	Alguns Resultados sobre Equações Integrais	1016
<b>V</b>	<b>Grupos</b>	<b>1034</b>
21	Grupos. Alguns Exemplos	1035
22	Grupos de Lie e Álgebras de Lie. Uma Breve Introdução	1184
23	Uma Breve Introdução à Teoria das Representações de Grupos	1214
<b>VI</b>	<b>Topologia Geral, Teoria da Medida e Integração</b>	<b>1248</b>
24	Espaços Métricos	1249
25	O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas de Suas Consequências	1311
26	A Métrica de Hilbert e o Teorema de Perron-Frobenius	1342
27	Espaços Topológicos e Espaços Mensuráveis. Definições e Propriedades Básicas	1361
28	Medidas	1388
29	A Medida de Lebesgue e a Medida de Hausdorff	1413
30	Continuidade e Convergência em Espaços Topológicos	1437
31	Elementos da Teoria da Integração	1455
32	Alguns Tópicos Especiais em Topologia e Análise	1516
<b>VII</b>	<b>Geometria Diferencial e Topologia Diferencial</b>	<b>1607</b>
33	Variedades	1608
34	Noções Geométricas em Variedades	1673
35	Formas Diferenciais	1763
<b>VIII</b>	<b>Séries e Transformadas de Fourier. Distribuições</b>	<b>1796</b>
36	Aproximação de Funções. Aproximações Polinomiais e Séries de Fourier	1797
37	Introdução às Distribuições e às Transformadas de Fourier	1867
<b>IX</b>	<b>Análise Funcional</b>	<b>1979</b>
38	Noções Básicas Sobre Espaços de Hilbert	1980
39	Operadores Lineares Limitados em Espaços de Banach e de Hilbert	2020
40	Operadores Lineares Não-Limitados em Espaços de Hilbert	2211

41 O Limite Indutivo de Álgebras	2252
<b>X Aplicações e Usos em Física</b>	<b>2261</b>
42 Equações Diferenciais. Problemas Seleccionados de Interesse Físico	2262
43 Rudimentos da Teoria do Potencial	2388
44 Notas Sobre Mecânica Clássica. I	2401
45 Notas Sobre Mecânica Clássica. II. Problemas e Aplicações	2512
46 Spinors e o Grupo de Lorentz	2558
47 Operadores e a Física Quântica	2573
Bibliografia	2618
Índice Remissivo	2635

# Capítulos e Seções

## Índice

Prefácio	28
Bons Mots	30
Como Ler Este Livro	33
Notação e Advertências	34
<b>I Capítulos Introdutórios</b>	<b>39</b>
<b>1 Noções Conjuntivistas Básicas</b>	<b>40</b>
1.1 Conjuntos, Relações e Funções	40
1.1.1 Relações e Funções	42
1.1.1.1 Produtos Cartesianos Gerais	47
1.1.1.2 Relações de Incompatibilidade (ou de Compatibilidade)	48
1.1.1.3 Relações de Equivalência	49
1.1.1.4 Relações de Ordem	53
1.1.2 Cardinalidade	60
1.1.3 Ínfimos e Supremos de Famílias de Conjuntos	64
1.2 Sistemas de Conjuntos	67
1.2.1 Semi-Anéis de Conjuntos	67
1.2.2 Anéis de Conjuntos	68
1.2.3 Álgebras de Conjuntos	69
1.2.4 $\sigma$ -Anéis de Conjuntos	70
1.2.5 $\sigma$ -Álgebras de Conjuntos	71
1.2.6 Sistemas Monótonos de Conjuntos	73
1.2.7 Topologias	76
1.2.8 Filtros e Ultrafiltros	77
<b>2 Estruturas Algébricas Básicas</b>	<b>79</b>
2.1 Estruturas Algébricas Básicas	80
2.1.1 Álgebras Universais	82
2.1.2 Reticulados e Álgebras Booleanas	84
2.1.3 Semigrupos, Monóides e Grupos	89
2.1.3.1 Os Grupos $\mathbb{Z}_n$ . O Grupo do Círculo	93
2.1.3.2 Subgrupos	96
2.1.4 Corpos	98
2.1.5 Espaços Vetoriais	101
2.1.6 Anéis, Módulos e Álgebras	104
2.1.6.1 Anéis	104
2.1.6.2 Módulos	105
2.1.6.3 Álgebras	105
2.1.7 Exemplos Especiais de Álgebras	108
2.1.7.1 Álgebras de Lie	108
2.1.7.2 Álgebras de Poisson	111
2.1.7.3 Álgebras de Jordan	111
2.1.7.4 Álgebras de Grassmann	112
2.1.7.5 Álgebras de Clifford	113

2.1.8	Mais sobre Anéis . . . . .	116
2.1.9	Ações e Representações . . . . .	118
2.1.9.1	Ações de Grupos . . . . .	118
2.1.9.2	Representações de Grupos e de Álgebras . . . . .	123
2.1.10	Morfismos, Homomorfismos, Epimorfismos, Isomorfismos, Monomorfismos, Endomorfismos e Automorfismos . . . . .	123
2.1.11	Induzindo Estruturas Algébricas . . . . .	125
2.2	Grupos. Estruturas e Construções Básicas . . . . .	129
2.2.1	Cosets . . . . .	129
2.2.1.1	O Teorema de Lagrange . . . . .	131
2.2.2	Subgrupos Normais e o Grupo Quociente . . . . .	133
2.2.2.1	Alguns Teoremas Sobre Isomorfismos e Homomorfismos de Grupos . . . . .	136
2.2.2.2	O Centro de um Grupo. Centralizadores e Normalizadores . . . . .	140
2.2.2.3	O Centro de Alguns Grupos de Interesse . . . . .	141
2.2.3	Grupos Gerados por Conjuntos. Grupos Gerados por Relações . . . . .	144
2.2.4	O Produto Direto e o Produto Semidireto de Grupos. O Produto Tensorial de Grupos Abelianos . . . . .	145
2.2.4.1	O Produto Direto (ou Soma Direta) de Grupos . . . . .	145
2.2.4.2	O Produto Semidireto de Grupos . . . . .	147
2.2.4.3	Produtos Tensoriais de Grupos Abelianos . . . . .	151
2.2.5	O Produto Livre de Grupos. Amálgamas . . . . .	156
2.3	Espaços Vetoriais. Estruturas e Construções Básicas . . . . .	159
2.3.1	Bases Algébricas de um Espaço Vetorial . . . . .	159
2.3.2	O Dual Algébrico de um Espaço Vetorial . . . . .	164
2.3.3	Subespaços e Espaços Quocientes . . . . .	171
2.3.4	Somas Diretas de Espaços Vetoriais . . . . .	172
2.3.4.1	Formas Multilineares . . . . .	172
2.3.5	Produtos Tensoriais de Espaços Vetoriais . . . . .	174
2.3.5.1	Produtos Tensoriais, Duais Algébricos e Formas Multilineares . . . . .	182
2.3.6	Produtos Tensoriais de um Espaço Vetorial com seu Dual . . . . .	185
2.3.6.1	Tensores Associados a Formas Bilineares Simétricas Não Degeneradas. Métricas . . . . .	186
2.3.7	Produtos Tensoriais de um mesmo Espaço Vetorial. Os Espaços Simétrico e Antissimétrico . . . . .	190
2.3.8	O Produto Tensorial de Módulos. Derivações . . . . .	193
2.4	Anéis e Álgebras. Estruturas e Construções Básicas . . . . .	194
2.4.1	Ideais em Anéis e Álgebras Associativas . . . . .	194
2.4.1.1	Ideais em Anéis . . . . .	195
2.4.1.2	Ideais em Álgebras Associativas . . . . .	199
2.5	Espaços de Fock, Álgebras Tensoriais e Álgebras Exteriores . . . . .	201
2.5.1	Álgebras Tensoriais . . . . .	202
2.5.2	Álgebras Exteriores . . . . .	203
2.6	Tópicos Especiais . . . . .	206
2.6.1	O Grupo de Grothendieck . . . . .	206
2.6.2	Grupóides . . . . .	208
2.6.3	Quatérnios . . . . .	210
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	216
2.A	Prova de (2.172) . . . . .	216
2.B	Ação de $SL(2, C)$ e o Grupo de Lorentz em $3 + 1$ dimensões . . . . .	216
<b>3</b>	<b>Formas Lineares e Normas em Espaços Vetoriais</b> . . . . .	<b>221</b>
3.1	Formas Lineares, Sesquilineares e Produtos Escalares em Espaços Vetoriais . . . . .	221
3.1.1	Formas Multilineares . . . . .	221

3.1.2	Formas Sesquilineares e as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Minkowski . . . . .	227
3.1.3	Produtos Escalares . . . . .	230
3.1.4	Formas Quadráticas em Espaços Vetoriais Reais . . . . .	232
3.1.5	Exemplos . . . . .	232
3.2	Normas em Espaços Vetoriais . . . . .	234
3.2.0.1	O Lema da Simetria . . . . .	242
3.3	Ortogonalidade, Conjuntos Ortonormais e o Procedimento de Gram-Schmidt . . . . .	243
3.4	Formas Bilineares e Sesquilineares e Produtos Escalares em Espaços de Dimensão Finita . . . . .	245
3.5	Estruturas Complexas sobre Espaços Vetoriais Reais . . . . .	248
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	256
3.A	Equivalência de Normas em Espaços Vetoriais de Dimensão Finita . . . . .	256
3.B	Prova do Teorema de Fréchet, von Neumann e Jordan . . . . .	257

## II Tópicos de Análise Real e Complexa 261

<b>4</b>	<b>Recordações de Cálculo Vetorial em Três Dimensões</b> . . . . .	<b>262</b>
4.1	Alguns Operadores Diferenciais de Interesse . . . . .	262
4.2	Teoremas Clássicos sobre Integrais de Volume e de Superfície . . . . .	266
4.3	O Laplaciano em Sistemas de Coordenadas Gerais . . . . .	268
4.4	Coordenadas Esféricas em $n$ Dimensões . . . . .	270
<b>5</b>	<b>Conjuntos Convexos e Funções Convexas</b> . . . . .	<b>275</b>
5.1	Conjuntos Convexos. Noções Básicas . . . . .	275
5.1.1	Operações que Preservam Convexidade . . . . .	277
5.1.2	Um Exemplo. Células e Diagramas de Voronoy . . . . .	279
5.2	Funções Convexas e Côncavas em Espaços Vetoriais Reais . . . . .	283
5.2.1	Funções Convexas em Espaços Vetoriais Normados e sua Continuidade . . . . .	286
5.2.2	Funções Côncavas e Convexas de uma Variável . . . . .	287
5.2.3	Funções Convexas de Várias Variáveis . . . . .	300
5.3	Algumas Consequências da Convexidade e da Concavidade . . . . .	303
5.3.1	A Desigualdade de Jensen . . . . .	303
5.3.2	A Primeira Desigualdade de Young . . . . .	304
5.3.3	Médias Geométricas, Aritméticas e Desigualdades Correlatas . . . . .	306
5.3.3.1	A Desigualdade de Minkowski . . . . .	309
5.4	Exercícios Adicionais . . . . .	312
<b>6</b>	<b>Funções Geratrizes. Produtórias Complexas. Algumas Identidades Combinatórias</b> . . . . .	<b>313</b>
6.1	Funções Geratrizes . . . . .	313
6.1.1	Algumas Identidades Combinatórias . . . . .	315
6.1.2	Números de Fibonacci . . . . .	317
6.1.3	Números de Bernoulli . . . . .	319
6.1.4	Números de Bell . . . . .	321
6.2	Notas Sobre Convergência de Produtórias . . . . .	325
6.2.1	Uma Dedução Elementar do Produto de Wallis . . . . .	326
6.3	A Fórmula de Inversão de Möbius. As Fórmulas de Viète . . . . .	328
6.3.1	As Fórmulas de Viète . . . . .	330
6.3.1.1	Uma Aplicação. Localizando Zeros de Certos Polinômios . . . . .	331
6.3.1.2	As Desigualdades de Samuelson e Algumas Generalizações . . . . .	333
6.3.1.3	As Identidades de Girard-Newton . . . . .	337



6.4	Exercícios Adicionais . . . . .	342
<b>7</b>	<b>A Função Gama de Euler</b> . . . . .	<b>344</b>
7.1	Introdução e Motivação . . . . .	344
7.2	A Função Gama. Definição e Primeiras Propriedades . . . . .	346
7.3	Outras Representações para a Função Gama . . . . .	351
7.4	A Função Beta e Propriedades Adicionais da Função Gama . . . . .	355
7.4.1	A Fórmula de Reflexão de Euler . . . . .	356
7.4.2	A Fórmula de Duplicação de Legendre . . . . .	360
7.5	Teoremas Sobre a Unicidade da Função Gama e Outros Resultados . . . . .	361
7.5.1	O Teorema de Bohr-Mollerup . . . . .	361
7.5.2	Fórmulas de Duplicação e Unicidade . . . . .	362
7.5.3	O Teorema de Wielandt e Algumas de Suas Consequências . . . . .	364
7.5.3.1	A Fórmula de Multiplicação de Gauss da Função Gama . . . . .	365
7.5.4	A Função Gama de Euler e Equações Diferenciais. O Teorema de Hölder . . . . .	367
7.6	A Aproximação de Stirling e suas Correções . . . . .	368
7.6.1	A Aproximação de Stirling para Fatoriais e suas Correções. A Série de Gudermann . . . . .	370
7.6.2	A Aproximação de Stirling para a Função Gama e suas Correções. A Série de Gudermann . . . . .	376
7.7	Exercícios Adicionais . . . . .	380
<b>8</b>	<b>Um Mínimo Sobre A Função Zeta de Riemann</b> . . . . .	<b>386</b>
8.1	Origens. Propriedades Básicas de Números Primos . . . . .	386
8.2	Definição . . . . .	391
8.3	A Fórmula de Produto de Euler e Outras Relações Envolvendo $\zeta$ . . . . .	392
8.4	Primeiras Relações de $\zeta$ com a Função Gama de Euler . . . . .	397
8.5	Os Valores de $\zeta$ nos Inteiros . . . . .	401
8.5.1	Um Interlúdio. A Fórmula $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -1/12$ (!) e Alguns de Seus Amigos . . . . .	403
8.6	A Relação Funcional de Riemann . . . . .	407
8.6.1	Uma Demonstração da Relação Funcional de Riemann . . . . .	409
8.7	Exercícios Adicionais . . . . .	411
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	412
8.A	Prova do Teorema Fundamental da Aritmética . . . . .	412
<b>9</b>	<b>Transformações de Möbius</b> . . . . .	<b>415</b>
9.1	Transformações de Möbius. Definição e Propriedades Elementares . . . . .	415
9.2	O Teorema Fundamental das Transformações de Möbius . . . . .	421
9.3	Transformações de Möbius sobre Retas e Círculos . . . . .	424
9.4	Transformações de Möbius e Razões Anarmônicas . . . . .	426
9.4.1	Razões Anarmônicas em $\mathbb{R}^n$ e Transformações Lineares . . . . .	430
9.4.2	Razões Anarmônicas no Plano Complexo e Transformações de Möbius . . . . .	430
9.5	Transformações de Möbius e Automorfismos do Disco Unitário . . . . .	434
9.5.1	O Teorema do Módulo Máximo . . . . .	434
9.5.1.1	A Majoração de Cauchy e Algumas de suas Consequências . . . . .	435
9.5.1.2	O Módulo de uma Função Analítica. O Teorema do Módulo Máximo . . . . .	437
9.5.1.3	O Lema de Schwarz e Algumas Consequências . . . . .	439
9.5.2	Transformações de Möbius e Automorfismos do Disco Unitário . . . . .	442
9.5.3	O Lema de Schwarz-Pick . . . . .	448
9.5.3.1	Dois Métricas Invariantes em $D_1$ . Revisitando o Lema de Schwarz-Pick . . . . .	450
9.6	A Derivada de Schwarz . . . . .	454

**APÊNDICES** . . . . . 459

9.A Demonstração Alternativa da Proposição 9.8 . . . . . 459

9.B Prova do Teorema 9.12 . . . . . 459

**III Tópicos de Álgebra Linear** **463**

**10 Tópicos de Álgebra Linear. I** **464**

10.1 Propriedades Básicas de Determinantes e Inversas de Matrizes . . . . . 465

10.2 Noções Básicas sobre o Espectro de uma Matriz . . . . . 475

    10.2.1 Autovalores e Polinômios Característicos de Matrizes . . . . . 476

    10.2.2 Autovetores . . . . . 479

    10.2.3 O Traço de uma Matriz . . . . . 481

        10.2.3.1 Algumas Relações entre Determinantes e Traços de Matrizes . . . . . 483

    10.2.4 Localização dos Autovalores. Os Discos de Gershgorin . . . . . 484

10.3 Polinômios de Matrizes . . . . . 487

    10.3.1 O Teorema de Hamilton-Cayley . . . . . 489

        10.3.1.1 O Teorema da Aplicação Espectral para Matrizes . . . . . 493

10.4 Matrizes Diagonalizáveis e o Teorema Espectral . . . . . 494

    10.4.1 Diagonalização Simultânea de Matrizes . . . . . 506

10.5 Matrizes Autoadjuntas, Normais e Unitárias . . . . . 509

    10.5.1 Matrizes Positivas . . . . . 515

        10.5.1.1 Matrizes Pseudoautoadjuntas e Quaseautoadjuntas . . . . . 517

    10.5.2 O Teorema de Inércia de Sylvester. Superfícies Quadráticas . . . . . 519

    10.5.3 Um Resultado Sobre Localização do Espectro de Matrizes Autoadjuntas . . . . . 524

10.6 Matrizes Triangulares . . . . . 526

10.7 O Teorema de Decomposição de Jordan e a Forma Canônica de Matrizes . . . . . 527

    10.7.1 Resultados Preparatórios . . . . . 528

    10.7.2 O Teorema da Decomposição de Jordan . . . . . 532

    10.7.3 Matrizes Nilpotentes e sua Representação Canônica . . . . . 535

    10.7.4 A Forma Canônica de Matrizes . . . . . 539

    10.7.5 Mais Alguns Resultados Sobre Matrizes Nilpotentes . . . . . 541

10.8 Algumas Representações Especiais de Matrizes . . . . . 543

    10.8.1 A Decomposição Polar de Matrizes . . . . . 543

    10.8.2 A Decomposição em Valores Singulares . . . . . 545

        10.8.2.1 Uma Aplicação: a Decomposição de Schmidt . . . . . 548

        10.8.2.2 A Noção de Traço Parcial de Matrizes . . . . . 550

        10.8.2.3 Purificação . . . . . 551

    10.8.3 O Teorema da Triangularização de Schur . . . . . 552

    10.8.4 A Decomposição  $QR$  e a Decomposição de Iwasawa (“KAN”) . . . . . 555

    10.8.5 Diagonalização em Blocos de Matrizes Antissimétricas Reais . . . . . 557

        10.8.5.1 Resultado Principal. Enunciado e Demonstração . . . . . 558

    10.8.6 O Teorema de Williamson . . . . . 564

10.9 A Pseudoinversa de Moore-Penrose . . . . . 565

    10.9.1 Outras Propriedades da Pseudoinversa de Moore-Penrose . . . . . 568

        10.9.1.1 A Regularização de Tikhonov. Existência . . . . . 570

        10.9.1.2 A Pseudoinversa de Moore-Penrose e o Teorema Espectral . . . . . 573

    10.9.2 A Pseudoinversa de Moore-Penrose e Problemas de Otimização Linear . . . . . 574

    10.9.3 Existência e Decomposição em Valores Singulares . . . . . 575

10.10	Produtos Tensoriais de Matrizes . . . . .	576
10.11	Propriedades Especiais de Determinantes . . . . .	578
10.11.1	Expansão do Polinômio Característico . . . . .	578
10.11.2	A Desigualdade de Hadamard . . . . .	579
10.12	Exercícios Adicionais . . . . .	582
<b>11</b>	<b>Tópicos de Álgebra Linear. II</b>	<b>587</b>
11.1	Uma Topologia Métrica em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ . . . . .	588
11.2	Exponenciais, Logaritmos e Funções Analíticas de Matrizes . . . . .	591
11.2.1	Exponencial de Matrizes Como Limite de Potências . . . . .	598
11.2.2	A Exponenciação de Matrizes e os Grupos $\text{GL}(\mathbb{C}, n)$ e $\text{GL}(\mathbb{R}, n)$ . . . . .	601
11.3	A Fórmula de Lie-Trotter e a Fórmula do Comutador . . . . .	604
11.4	Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ . . . . .	607
11.4.1	Alguns Fatos Gerais sobre Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ . . . . .	607
11.4.2	Alguns Exemplos Específicos de Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ . . . . .	612
11.5	A Fórmula de Baker, Campbell e Hausdorff . . . . .	617
11.6	A Fórmula de Duhamel e Algumas de suas Consequências . . . . .	622
11.7	Continuidade do Determinante . . . . .	626
11.8	Exercícios Adicionais . . . . .	628
<b>IV</b>	<b>Equações Diferenciais</b>	<b>631</b>
<b>12</b>	<b>Equações Diferenciais Ordinárias. Uma Introdução</b>	<b>632</b>
12.1	Definição e Alguns Exemplos . . . . .	633
12.1.1	Equações Diferenciais Ordinárias Lineares . . . . .	635
12.1.2	Equações Ordinárias de Segunda Ordem. Exemplos de Interesse . . . . .	639
12.2	Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias . . . . .	641
12.3	Discussão sobre Problemas de Valor Inicial . . . . .	646
12.3.1	Problemas de Valor Inicial. Patologias e Exemplos a se Ter em Mente . . . . .	647
12.3.2	Teoremas de Existência e Unicidade de Soluções . . . . .	650
12.3.3	Soluções Globais . . . . .	652
12.3.4	Dependência Contínua de Condições Iniciais e de Parâmetros . . . . .	654
<b>13</b>	<b>Alguns Métodos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias</b>	<b>655</b>
13.1	Solução de Equações Ordinárias Lineares de Primeira Ordem . . . . .	655
13.2	As Equações de Bernoulli e de Riccati . . . . .	656
13.3	Integração de Equações Separáveis . . . . .	658
13.4	O Método de Variação de Constantes . . . . .	659
13.5	O Método de Substituição de Prüfer . . . . .	660
13.6	O Método de Inversão . . . . .	662
13.7	Solução de Equações Exatas e o Método dos Fatores Integrantes . . . . .	663
13.8	Soluções das Equações de D'Alembert-Lagrange e Clairaut . . . . .	667
<b>14</b>	<b>Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares</b>	<b>671</b>
14.1	Introdução . . . . .	672
14.2	Unicidade e Existência de Soluções . . . . .	672
14.2.1	Unicidade . . . . .	672
14.2.2	Existência. A Série de Dyson . . . . .	675
14.2.3	Propriedades de $D(s, t)$ . . . . .	679

14.3	Equações com Coeficientes Constantes . . . . .	682
14.3.1	Alguns Exemplos e Aplicações . . . . .	684
14.4	Perturbações de Sistemas Lineares . . . . .	688
14.5	Mais sobre a Série de Dyson. Produtos de Tempo Ordenado . . . . .	692
14.6	Sistemas de Equações Diferenciais Lineares no Plano Complexo . . . . .	694
14.6.1	O Caso Analítico . . . . .	695
14.6.2	Resolução por Séries de Potências . . . . .	700
14.6.3	Sistemas com Pontos Singulares. Monodromia . . . . .	701
14.6.4	Sistemas com Pontos Singulares Simples . . . . .	710
14.7	Sistemas Provenientes de EDOs de Ordem $m$ . . . . .	713
14.7.1	Pontos Singulares Simples em EDO's de Ordem $m$ . . . . .	715
14.7.2	Singularidades no Infinito . . . . .	719
14.7.3	Alguns Exemplos de Interesse . . . . .	720
14.8	Equações Fuchsianas. Símbolos de Riemann . . . . .	725
14.8.1	Equações Fuchsianas de Primeira Ordem . . . . .	726
14.8.2	Equações Fuchsianas de Segunda Ordem . . . . .	729
14.8.3	A Equação de Riemann-Papperitz. Símbolos de Riemann . . . . .	737
14.8.3.1	Transformações de Simetria dos Símbolos de Riemann . . . . .	740
14.8.3.2	Equações Fuchsianas com três pontos singulares e a equação hipergeométrica . . . . .	743
14.9	Exercícios Adicionais . . . . .	746
<b>15</b>	<b>Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares no Plano Complexo</b> . . . . .	<b>751</b>
15.1	Soluções em Séries de Potências para Equações Regulares . . . . .	752
15.1.1	A Equação do Oscilador Harmônico Simples . . . . .	753
15.1.2	A Equação de Legendre . . . . .	754
15.1.3	A Equação de Hermite . . . . .	757
15.1.4	A Equação de Airy . . . . .	759
15.1.5	A Equação de Tchebychev . . . . .	761
15.1.6	O Caso de Equações Regulares Gerais . . . . .	764
15.2	Solução de Equações Singulares Regulares. O Método de Frobenius . . . . .	766
15.2.1	Equações Singulares Regulares. O Caso Geral . . . . .	769
15.2.2	A Equação de Euler Revisitada . . . . .	776
15.2.3	A Equação de Bessel . . . . .	778
15.2.4	Equações Relacionadas à de Bessel. A Equação de Bessel Esférica . . . . .	788
15.2.5	Equações Relacionadas à de Bessel. A Equação de Bessel Modificada . . . . .	790
15.2.6	A Equação de Laguerre . . . . .	791
15.2.7	A Equação Hipergeométrica . . . . .	793
15.2.8	A Equação Hipergeométrica Confluente . . . . .	796
15.3	Algumas Equações Associadas . . . . .	799
15.3.1	A Equação de Legendre Associada . . . . .	799
15.3.2	A Equação de Laguerre Associada . . . . .	801
15.4	Exercícios Adicionais . . . . .	803
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>805</b>
15.A	Prova da Proposição 15.1. Justificando os Polinômios de Legendre . . . . .	805
15.B	Polinômios de Legendre: Provando (15.14) . . . . .	806
15.C	Justificando os Polinômios de Hermite . . . . .	808
15.D	Polinômios de Hermite: Provando (15.20) . . . . .	809
15.E	Porque $\lambda$ deve ser um Inteiro Positivo na Equação de Laguerre . . . . .	810
15.F	Polinômios de Tchebychev: Obtendo (15.39) a Partir de (15.36)–(15.38) . . . . .	812

<b>16 Propriedades de Algumas Funções Especiais</b>	<b>814</b>
16.1 Discussão Preliminar	814
16.1.1 Relações de Ortogonalidade	815
16.1.1.1 Condições de Contorno e a Origem das Relações de Ortogonalidade	820
16.1.2 Fórmulas de Rodrigues	824
16.2 Propriedades de Algumas Funções Especiais	826
16.2.1 Propriedades dos Polinômios de Legendre	826
16.2.2 Propriedades dos Polinômios de Legendre Associados	830
16.2.2.1 As Funções Harmônicas Esféricas	836
16.2.2.2 Fórmula de Adição de Funções Harmônicas Esféricas	838
16.2.3 Propriedades dos Polinômios de Hermite	842
16.2.3.1 As Funções de Hermite	845
16.2.4 Propriedades dos Polinômios de Tchebychev	849
16.2.5 Propriedades dos Polinômios de Laguerre	849
16.2.6 Propriedades dos Polinômios de Laguerre Associados	853
16.2.7 Algumas Propriedades das Funções de Bessel	856
16.2.7.1 Propriedades de Zeros das Funções de Bessel	866
16.2.7.2 Relações de Ortogonalidade das Funções de Bessel no Intervalo $[0, 1]$	868
16.2.7.3 Comentário sobre a equação de Bessel no intervalo $J = [0, \infty)$	874
16.2.7.4 A Expansão de Schlömilch	874
16.2.8 Propriedades das Funções de Bessel Esféricas	878
16.2.8.1 Relações de Ortogonalidade Para as Funções de Bessel Esféricas no Intervalo $[0, 1]$	880
16.3 Exercícios Adicionais	882
	<b>APÊNDICES</b>
16.A Provando (16.54) a Força Bruta	883
<b>17 Completeza de Algumas Famílias de Funções</b>	<b>885</b>
17.1 Completeza de Polinômios Ortogonais em Intervalos Compactos	885
17.2 Completeza dos Polinômios de Hermite	888
17.3 Completeza dos Polinômios Trigonométricos	889
17.4 Completeza das Funções de Bessel e Propriedades de seus Zeros	892
17.4.1 A Equação de Bessel como Problema de Sturm-Liouville	892
17.4.1.1 O Caso $\nu > 0$	893
17.4.1.2 O Caso $\nu > 0$ com $\beta_1 = -\nu\beta_2 \neq 0$	895
17.4.1.3 O Caso $\nu = 0$	896
17.4.2 Conclusões Sobre a Completeza das Funções de Bessel e Propriedades de seus Zeros	898
<b>18 Rudimentos da Teoria das Equações a Derivadas Parciais</b>	<b>900</b>
18.1 Definições, Notações e Alguns Exemplos	901
18.2 Algumas Classificações de Equações a Derivadas Parciais	910
18.2.1 Equações Lineares, Não-Lineares, Semi-Lineares e Quase-Lineares	910
18.2.2 Classificação de Equações de Segunda Ordem. Equações Parabólicas, Elípticas e Hiperbólicas	912
18.3 O Método de Separação de Variáveis	915
18.3.1 O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Lineares	916
18.3.2 O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Não-Lineares	919
18.4 Problemas de Cauchy e Superfícies Características. Definições e Exemplos Básicos	920
18.5 O Método das Características	927
18.5.1 Exemplos de Aplicação do Método das Características	932
18.5.2 Características. Comentários Adicionais	943

18.5.3	Sistemas de Equações Quase-Lineares de Primeira Ordem . . . . .	944
18.5.3.1	Generalidades Sobre Problemas de Condição Inicial em Sistemas Quase-Lineares de Primeira Ordem . . . . .	949
18.5.3.2	Sistemas Hiperbólicos Semi-Lineares de Primeira Ordem em Duas Variáveis . . . . .	952
18.5.3.3	Soluções Ditas Simples de Sistemas Quase-Lineares, Homogêneos, de Primeira Ordem em Duas Variáveis . . . . .	955
18.6	Alguns Teoremas de Unicidade de Soluções de Equações a Derivadas Parciais . . . . .	958
18.6.1	Casos Simples. Discussão Preliminar . . . . .	958
18.6.2	Unicidade de Solução para as Equações de Laplace e Poisson . . . . .	962
18.6.3	Unicidade de Soluções. Generalizações . . . . .	964
18.7	Exercícios Adicionais . . . . .	971
<b>19</b>	<b>Introdução ao Problema de Sturm-Liouville</b> . . . . .	<b>972</b>
19.1	Comentários Iniciais . . . . .	973
19.2	O Problema de Sturm . . . . .	977
19.2.1	Soluções Fundamentais e Funções de Green . . . . .	978
19.2.2	A Função de Green. Resolvendo o Problema de Sturm . . . . .	979
19.2.2.1	O Teorema de Green . . . . .	982
19.2.2.2	O Problema de Sturm com Condições de Contorno Não Homogêneas . . . . .	984
19.3	O Problema de Sturm-Liouville . . . . .	985
19.3.1	Propriedades Básicas dos Autovalores e Autofunções de Problemas de Sturm-Liouville . . . . .	986
19.3.1.1	A Simplicidade dos Autovalores . . . . .	986
19.3.1.2	O Lema de Green . . . . .	987
19.3.1.3	Realidade dos Autovalores e Autofunções. Ortogonalidade de Autofunções . . . . .	989
19.3.1.4	Propriedades dos Autovalores . . . . .	990
19.3.2	A Equação Integral de Fredholm . . . . .	994
19.3.3	Uma Aplicação do Problema de Sturm-Liouville . . . . .	997
19.3.4	Métodos Variacionais de Determinação de Autovalores . . . . .	1000
19.4	Comentários Finais . . . . .	1002
19.4.1	Um Problema de Sturm-Liouville Singular . . . . .	1002
19.5	Exercícios Adicionais . . . . .	1005
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>1008</b>
19.A	Prova do Teorema 19.1. Existência e Unicidade . . . . .	1008
19.B	Prova da Proposição 19.2 . . . . .	1009
19.C	Comentário Sobre o Determinante Wronskiano . . . . .	1010
19.D	Demonstração do Teorema 19.3 . . . . .	1011
19.D.1	Prova da Desigualdade (19.D.17) . . . . .	1014
19.E	Uma Relação Útil . . . . .	1015
<b>20</b>	<b>Alguns Resultados sobre Equações Integrais</b> . . . . .	<b>1016</b>
20.1	Descrição . . . . .	1016
20.2	O Método dos Determinantes de Fredholm . . . . .	1018
20.2.1	A Equação Integral de Fredholm Linear Não Homogênea . . . . .	1018
20.2.2	A Equação Integral de Fredholm Linear Homogênea . . . . .	1022
20.3	A Equação Integral de Schlömilch . . . . .	1023
20.4	Exercícios Adicionais . . . . .	1026
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>1027</b>
20.A	Obtendo os Determinantes de Fredholm . . . . .	1027

## V Grupos

1034

<b>21 Grupos. Alguns Exemplos</b>	<b>1035</b>
21.1 O Grupo de Permutações	1036
21.2 O Grupo de Permutações de $n$ Elementos	1037
21.2.1 Ciclos, Transposições e Transposições Elementares	1038
21.2.1.1 O Sinal, ou Paridade, de uma Permutação. O Símbolo de Levi-Civita	1041
21.3 Alguns Grupos Matriciais	1043
21.3.1 Grupos Lineares e Grupos Lineares Especiais	1043
21.3.1.1 Grupos Lineares Projetivos	1046
21.3.2 O Grupo de Borel e o Grupo de Heisenberg	1048
21.3.2.1 O Grupo de Heisenberg	1048
21.3.3 Grupos Associados a Formas Bilineares e Sesquilineares	1055
21.3.3.1 Os Grupos Ortogonais	1059
21.3.3.2 Os Grupos Unitários	1061
21.3.3.3 Os Grupos Simpléticos	1062
21.4 Os Grupos $SO(2)$ , $SO(3)$ , $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{C})$	1070
21.4.1 Os Grupos $SO(2)$ , $O(2)$ , $SO(1, 1)$ e $O(1, 1)$	1070
21.4.2 O Grupo $SO(3)$	1074
21.4.2.1 Mais Propriedades das Matrizes de $SO(3)$	1082
21.4.2.2 $SO(3)$ e os Ângulos de Euler	1085
21.4.2.3 A Parametrização de Cayley de $SO(3)$ (e de $SO(n)$ )	1090
21.4.3 O Grupo $O(3)$	1093
21.4.4 O Grupo $SU(2)$	1097
21.4.5 A Relação Entre $SO(3)$ e $SU(2)$	1102
21.4.6 O Grupo $SL(2, \mathbb{C})$	1106
21.5 Generalidades Sobre os Grupos $SU(n)$ e $SO(n)$	1108
21.5.1 Os Grupos $SU(n)$	1108
21.5.1.1 Um Pouco Sobre o Grupo $SU(3)$	1110
21.5.2 Os Grupos $SO(n)$	1112
21.6 O Grupo Afim e o Grupo Euclidiano	1116
21.7 O Grupo de Lorentz em $3 + 1$ -Dimensões	1120
21.7.1 O Espaço-Tempo, a Noção de Intervalo e a Estrutura Causal	1120
21.7.2 A Invariância do Intervalo	1126
21.7.3 O Grupo de Lorentz	1129
21.7.4 Alguns Subgrupos do Grupo de Lorentz	1130
21.7.5 Alguns Fatos Sobre a Estrutura do Grupo de Lorentz	1133
21.7.6 Os Geradores Infinitesimais do Grupo de Lorentz	1137
21.7.6.1 Fórmula de Rodrigues para <i>Boosts</i> de Lorentz	1143
21.7.7 O Grupo de Galilei	1145
21.7.7.1 Comparação Entre os Grupos de Galilei e Lorentz. Contrações	1147
21.8 O Grupo de Poincaré	1150
21.9 Mais Sobre Grupos Simpléticos	1154
21.9.1 O Subgrupo Simplético Real Ortogonal	1155
21.9.2 Grupos Simpléticos. Álgebras de Lie e Parametrização de Cayley	1159
21.9.3 O Teorema de Williamson	1162
21.10 Operadores Diferenciais como Geradores Infinitesimais sobre Funções	1163
21.11 Exercícios Adicionais	1169
<b>APÊNDICES</b>	<b>1171</b>

21.A	Extensão do Lema 21.3 e do Teorema 21.7 ao Caso Complexo	1171
21.B	Prova do Teorema 21.11	1173
<b>22</b>	<b>Grupos de Lie e Álgebras de Lie. Uma Breve Introdução</b>	<b>1184</b>
22.1	Variiedades e Grupos de Lie	1184
22.2	Breves Considerações sobre Grupos Topológicos	1186
22.3	Grupos de Lie Matriciais	1188
22.3.1	Uma Topologia Métrica em $GL(n, \mathbb{C})$	1189
22.3.2	O Grupo de Lie $GL(n, \mathbb{C})$	1189
22.3.3	Subgrupos Uniparamétricos e seus Geradores Infinitesimais	1192
22.3.4	Subgrupos Uniparamétricos e Álgebras de Lie	1195
22.3.5	Subgrupos Fechados de $GL(n, \mathbb{C})$	1199
22.4	A Relação entre Grupos de Lie Matriciais e suas Álgebras de Lie	1202
22.4.1	Álgebras de Lie Nilpotentes, Solúveis, Simples e Semissimples	1203
22.4.2	Questões sobre a Exponenciação de Álgebras de Lie	1206
22.4.3	Alguns Exemplos Especiais	1208
<b>23</b>	<b>Uma Breve Introdução à Teoria das Representações de Grupos</b>	<b>1214</b>
23.1	Representações de Grupos	1214
23.2	Médias Invariantes. A Medida de Haar	1220
23.3	Representações de Grupos Compactos	1222
23.3.1	Representações de Grupos Compactos em Espaços de Hilbert Separáveis	1223
23.4	O Teorema de Peter-Weyl	1229
23.5	Representações Irreduzíveis de Dimensão Finita de $SU(2)$	1238
23.6	Representações Irreduzíveis de Dimensão Finita de $\mathcal{L}_+^\uparrow$	1243
23.7	Exercícios Adicionais	1246
<b>VI</b>	<b>Topologia Geral, Teoria da Medida e Integração</b>	<b>1248</b>
<b>24</b>	<b>Espaços Métricos</b>	<b>1249</b>
24.1	Métricas e Espaços Métricos	1250
24.1.1	Completeza e o Completamento Canônico	1260
24.1.2	Conjuntos de Sequências	1268
24.2	A Noção de Topologia de Espaços Métricos	1269
24.3	Pseudométricas	1271
24.4	Espaços de Funções Limitadas e Completeza	1273
24.5	Espaços de Banach e de Hilbert	1276
24.5.1	Espaços de Banach em Espaços de Sequências	1278
24.5.1.1	Decrescimento das Normas dos Espaços $\ell_p(\mathbb{N})$	1289
24.6	Teorema do Melhor Aproximante em Espaços Normados Uniformemente Convexos	1291
24.7	Exercícios Adicionais	1296
	<b>APÊNDICES</b>	<b>1299</b>
24.A	Números Reais e $p$ -ádicos	1299
24.A.1	A Construção de Cantor dos Números Reais	1299
24.A.2	Outros Completamentos dos Racionais. Números $p$ -ádicos	1302
24.B	Aproximações para $\pi$	1305
<b>25</b>	<b>O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas de Suas Consequências</b>	<b>1311</b>
25.1	O Teorema de Ponto Fixo de Banach	1312



25.1.1	Generalizações do Teorema de Ponto Fixo de Banach . . . . .	1314
25.2	Diversas Aplicações do Teorema de Ponto Fixo de Banach . . . . .	1317
25.2.1	Aplicação a Equações Numéricas. O Método de Newton . . . . .	1317
25.2.2	Aplicação a Sistemas Lineares. O Método de Jacobi . . . . .	1320
25.2.3	Aplicação às Equações Integrais de Fredholm e de Volterra . . . . .	1322
25.2.4	Aplicações à Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias . . . . .	1328
25.2.4.1	O Teorema de Picard-Lindelöf . . . . .	1328
25.2.4.2	Generalizando o Teorema de Picard-Lindelöf. Soluções Globais . . . . .	1332
25.2.4.3	Um Teorema de Comparação de Soluções de EDO's . . . . .	1333
25.3	O Teorema da Função Implícita e o Teorema da Função Inversa . . . . .	1335
25.3.1	O Teorema da Função Implícita . . . . .	1336
25.3.2	O Teorema da Função Inversa . . . . .	1340
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1341
25.A	O Lema de Grönwall . . . . .	1341
<b>26</b>	<b>A Métrica de Hilbert e o Teorema de Perron-Frobenius</b> . . . . .	<b>1342</b>
26.1	A Métrica de Hilbert em Conjuntos Convexos Abertos Limitados . . . . .	1343
26.2	Cones. Definições, Conceitos e Alguns Exemplos Ilustrativos . . . . .	1349
26.2.1	Métricas Projetivas . . . . .	1353
26.3	A Métrica Projetiva de Hilbert em Cones Apontados . . . . .	1354
26.3.1	Estendendo a Métrica de Hilbert para Cones Apontados . . . . .	1354
26.3.2	A Métrica Projetiva de Hilbert, ou Métrica de Birkhoff . . . . .	1358
26.4	O Teorema de Perron-Frobenius . . . . .	1360
<b>27</b>	<b>Espaços Topológicos e Espaços Mensuráveis. Definições e Propriedades Básicas</b> . . . . .	<b>1361</b>
27.1	Definições, Propriedades Elementares e Exemplos . . . . .	1361
27.2	Algumas Construções Especiais e Exemplos . . . . .	1367
27.2.1	Topologias Geradas por Famílias de Conjuntos . . . . .	1367
27.2.1.1	A Topologia de Sorgenfrey . . . . .	1368
27.2.2	$\sigma$ -Álgebras Geradas por Famílias de Conjuntos . . . . .	1370
27.2.3	Bases de Espaços Topológicos . . . . .	1371
27.2.4	Topologias e $\sigma$ -Álgebras Induzidas . . . . .	1373
27.2.5	Topologias e $\sigma$ -Álgebras Produto . . . . .	1375
27.3	Interior e Fecho de Conjuntos em Espaços Topológicos . . . . .	1375
27.3.1	Fecho de Conjuntos em Espaços Métricos . . . . .	1382
27.4	Espaços Topológicos Separáveis e Segundo-Contáveis . . . . .	1383
27.4.1	A Segundo-Contabilidade como Propriedade Herdada . . . . .	1386
<b>28</b>	<b>Medidas</b> . . . . .	<b>1388</b>
28.1	O Problema da Teoria da Medida . . . . .	1388
28.2	Medidas de Conjuntos. Definição, Exemplos e Propriedades Básicas . . . . .	1391
28.3	Construindo Medidas. A Medida Exterior e o Teorema de Carathéodory . . . . .	1394
28.3.1	Medidas Exteriores Métricas e Conjuntos Borelianos . . . . .	1401
28.4	Um Esquema de Construção de Medidas Exteriores . . . . .	1404
28.5	Medidas sobre Anéis e suas Extensões . . . . .	1406
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1411
28.A	Prova das Fórmulas de Inclusão-Exclusão . . . . .	1411
<b>29</b>	<b>A Medida de Lebesgue e a Medida de Hausdorff</b> . . . . .	<b>1413</b>
29.1	A Construção da Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	1413

29.1.1	A $\sigma$ -álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$ e a Medida de Borel-Lebesgue . . . . .	1415
29.2	As Medidas de Hausdorff . . . . .	1417
29.3	Conjuntos de Cantor . . . . .	1421
29.4	Bases de Hamel e a Medida de Lebesgue . . . . .	1430
29.5	Exercícios Adicionais . . . . .	1432
<b>30</b>	<b>Continuidade e Convergência em Espaços Topológicos</b>	<b>1437</b>
30.1	Primeiras Definições . . . . .	1437
30.2	Espaços Hausdorff . . . . .	1439
30.3	Redes e o Caso de Espaços Topológicos Gerais . . . . .	1440
30.3.1	Redes em Espaços Métricos . . . . .	1443
30.4	O Limite do Ínfimo e o Limite do Supremo . . . . .	1444
30.5	Continuidade de Funções em Espaços Topológicos . . . . .	1447
30.5.1	Outras Noções Associadas à de Continuidade . . . . .	1449
30.5.1.1	Homeomorfismos e Mergulhos Topológicos . . . . .	1450
30.5.2	Outras Caracterizações do Conceito de Continuidade em Espaços Topológicos . . . . .	1451
30.5.3	Continuidade e Convergência . . . . .	1452
<b>31</b>	<b>Elementos da Teoria da Integração</b>	<b>1455</b>
31.1	Comentários Preliminares . . . . .	1455
31.2	A Integração no Sentido de Riemann . . . . .	1457
31.2.1	A Integral de Riemann Imprópria . . . . .	1465
31.2.2	Diferenciação e Integração em Espaços de Banach . . . . .	1467
31.3	A Integração no Sentido de Lebesgue . . . . .	1471
31.3.1	Funções Mensuráveis e Funções Simples . . . . .	1471
31.3.2	A Integral de Lebesgue. Integração em Espaços Mensuráveis . . . . .	1476
31.3.3	A Integral de Lebesgue e sua Relação com a de Riemann . . . . .	1483
31.3.4	Teoremas Básicos sobre Integração e Convergência . . . . .	1486
31.3.5	Alguns Resultados de Interesse . . . . .	1489
31.4	Os Espaços $\mathcal{L}_p$ e $L_p$ . . . . .	1491
31.4.1	As Desigualdades de Hölder e de Minkowski . . . . .	1493
31.4.2	O Teorema de Riesz-Fischer. Completeza . . . . .	1496
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1497
31.A	Mais sobre a Integral de Darboux . . . . .	1497
31.A.1	Equivalência das Definições II e III da Integrabilidade de Riemann . . . . .	1498
31.B	Caracterizações e Propriedades de Funções Mensuráveis . . . . .	1499
31.C	Prova do Lema 31.3 . . . . .	1504
31.D	Demonstração de (31.26) . . . . .	1505
31.E	A Equivalência das Definições (31.27) e (31.28) . . . . .	1505
31.F	Prova do Teorema da Convergência Monótona . . . . .	1507
31.G	Prova do Lema de Fatou . . . . .	1508
31.H	Prova do Teorema da Convergência Dominada . . . . .	1509
31.I	Prova dos Teoremas 31.2 e 31.3 . . . . .	1510
31.J	Prova das Desigualdades de Hölder e Minkowski . . . . .	1512
31.K	Prova do Teorema de Riesz-Fischer . . . . .	1514
<b>32</b>	<b>Alguns Tópicos Especiais em Topologia e Análise</b>	<b>1516</b>
32.1	Uma Coletânea de Definições . . . . .	1517
32.1.1	Conjuntos Densos em Espaços Topológicos . . . . .	1517

32.1.2	A Noção de Conjunto Conexo em Espaços Topológicos . . . . .	1518
32.2	Axiomas de Separabilidade . . . . .	1522
32.2.1	Algumas Propriedades de Separação em Espaços Métricos . . . . .	1522
32.2.2	Postulados de Separabilidade em Espaços Topológicos . . . . .	1523
32.2.3	O Lema de Urysohn . . . . .	1531
32.2.3.1	O Teorema de Extensão de Tietze . . . . .	1536
32.2.4	A Propriedade de Hausdorff como Propriedade Herdada . . . . .	1539
32.3	Compacidade, Compacidade Local e Paracompacidade . . . . .	1540
32.3.1	Algumas Definições Gerais . . . . .	1540
32.3.2	Espaços de Lindelöf. Um Mínimo . . . . .	1542
32.3.3	Compacidade. Definições e Propriedades em Espaços Topológicos Gerais . . . . .	1543
32.3.3.1	Compacidade em Espaços Hausdorff . . . . .	1546
32.3.3.2	Compacidade em Espaços Métricos . . . . .	1550
32.3.3.3	Compacidade em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	1557
32.3.3.4	Compacidade na Reta de Sorgenfrey . . . . .	1558
32.3.4	Os Teoremas de Ascoli e de Arzelà . . . . .	1560
32.3.4.1	Equilimitação e Equicontinuidade de Famílias de Funções . . . . .	1560
32.3.4.2	Os Teoremas de Ascoli e de Arzelà para Famílias de Funções de um Compacto sobre um Espaço Métrico . . . . .	1562
32.3.4.3	O Teorema de Peano . . . . .	1564
32.3.5	Espaços Compactos Hausdorff e Partições da Unidade . . . . .	1568
32.3.5.1	Uma Excursão pelas Variedades Topológicas Compactas Hausdorff . . . . .	1569
32.3.6	Compacidade Local . . . . .	1572
32.3.6.1	Espaços Localmente Compactos Hausdorff . . . . .	1573
32.3.7	Paracompacidade . . . . .	1575
32.3.7.1	Espaços Paracompactos Hausdorff . . . . .	1575
32.4	As Noções de Topologia Inicial e de Topologia Final . . . . .	1580
32.4.1	A Topologia Inicial de uma Coleção de Funções . . . . .	1580
32.4.2	A Topologia Final de uma Coleção de Funções . . . . .	1582
32.4.3	A Topologia Quociente . . . . .	1583
32.5	Somas de Espaços Topológicos . . . . .	1584
32.6	A Topologia Produto de Espaços Topológicos . . . . .	1585
32.6.1	Alguns Resultados Envolvendo Compacidade e Topologia Produto . . . . .	1587
32.6.2	O Cubo de Hilbert . . . . .	1588
32.7	Teoremas de Metrizabilidade . . . . .	1591
32.7.1	O Teorema de Metrização de Urysohn e Tikhonov . . . . .	1592
32.8	O Teorema da Categoria de Baire . . . . .	1595
32.9	A Métrica de Hausdorff . . . . .	1596
32.9.1	Continuidade do Conjunto de Raízes de Polinômios . . . . .	1599
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1604
32.A	Prova da Proposição 32.35 . . . . .	1604

## VII Geometria Diferencial e Topologia Diferencial

1607

### 33 Variedades

1608

33.1	Variedades Topológicas . . . . .	1609
33.1.1	Construindo Variedades Topológicas . . . . .	1614
33.2	Variedades Diferenciáveis . . . . .	1616
33.2.1	Partições da Unidade Diferenciáveis . . . . .	1620

33.2.2	A Noção de Espaço Tangente . . . . .	1622
33.2.2.1	O Espaço Cotangente . . . . .	1628
33.2.3	Tensores em Variedades . . . . .	1630
33.2.3.1	Traços de Tensores. Contração de Índices . . . . .	1632
33.2.3.2	Transposição de Tensores . . . . .	1634
33.2.4	Aplicações Entre Variedades Diferenciáveis . . . . .	1635
33.2.4.1	A Diferencial de Uma Aplicação Entre Variedades. “Pullback” e “Pushforward” . . . . .	1635
33.2.4.2	Imersões, Mergulhos e Subvariedades . . . . .	1640
33.3	Campos Vetoriais e Tensoriais . . . . .	1642
33.3.1	A Derivada de Lie . . . . .	1645
33.4	Exemplos de Variedades Topológicas e Diferenciáveis . . . . .	1650
33.4.1	Uma Variedade Topológica Paracompacta não Segundo-Contável . . . . .	1650
33.4.2	O Gráfico de uma Função Real em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	1652
33.4.2.1	Cones. E Um Estudo de Caso . . . . .	1654
33.4.3	Superfícies Regulares em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	1655
33.4.4	As Esferas $S^n$ . . . . .	1658
33.4.5	Toros (e Algumas Generalizações) . . . . .	1660
33.4.6	Espaços Projetivos Reais . . . . .	1663
33.4.7	Grupos de Lie . . . . .	1667
33.4.8	Fibrados, Fibrados Vetoriais e Principais . . . . .	1667
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1669
33.A	Derivadas de Lie. Prova das Relações (33.71) e (33.82) . . . . .	1669
33.B	Derivadas de Lie. Prova da Relação (33.91) . . . . .	1670
<b>34</b>	<b>Noções Geométricas em Variedades</b> . . . . .	<b>1673</b>
34.1	Tensores Métricos Riemannianos e Semi-Riemannianos . . . . .	1674
34.1.1	Transposição em Relação a Tensores Métricos . . . . .	1683
34.2	Conexões Afins . . . . .	1687
34.2.1	Conexões Afins em Campos Vetoriais . . . . .	1687
34.2.1.1	Conexões Afins em Campos Tensoriais . . . . .	1693
34.2.2	O Tensor de Torção . . . . .	1696
34.2.3	Tipos Especiais de Conexões Afins . . . . .	1697
34.2.3.1	Conexões Simétricas (ou Livres de Torção) . . . . .	1697
34.2.3.2	Conexões Métricas (ou Riemannianas) . . . . .	1699
34.2.3.3	Conexões de Levi-Civita . . . . .	1705
34.2.3.4	Conexões de Weyl e a Origem das Transformações de Calibre . . . . .	1705
34.2.4	Gradiente, Divergente e Laplaciano . . . . .	1708
34.3	O Tensor de Curvatura . . . . .	1711
34.3.1	As Identidades de Bianchi e Outras Propriedades . . . . .	1714
34.3.2	O Tensor de Curvatura em Coordenadas Locais . . . . .	1716
34.3.3	A Curvatura Seccional . . . . .	1718
34.3.4	O Tensor de Ricci e a Curvatura Escalar . . . . .	1721
34.3.5	Comentário Sobre a Segunda Identidade de Bianchi e as Equações de Einstein . . . . .	1724
34.4	Geodésicas . . . . .	1727
34.4.1	O Lema de Gauss . . . . .	1732
34.4.2	Pontos Conjugados e a Equação de Jacobi . . . . .	1735
34.4.2.1	A Equação de Jacobi . . . . .	1736
34.4.2.2	Pontos Conjugados . . . . .	1738
34.5	Campos de Killing . . . . .	1739

34.6	A Estrutura Causal de Variedades Lorentzianas . . . . .	1744
34.6.1	A Identidade de Raychaudhuri . . . . .	1746
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1756
34.A	Demonstração de Algumas Propriedades do Tensor de Curvatura . . . . .	1756
34.A.1	Prova da Proposição 34.6 . . . . .	1756
34.A.2	Prova da Primeira Identidade de Bianchi, Proposição 34.8 . . . . .	1757
34.A.3	Prova da Segunda Identidade de Bianchi, Proposição 34.9 . . . . .	1758
34.A.4	Prova da Proposição 34.10 . . . . .	1760
34.A.5	Prova da Proposição 34.11 . . . . .	1761
<b>35</b>	<b>Formas Diferenciais</b> . . . . .	<b>1763</b>
35.1	Formas Diferenciais . . . . .	1763
35.1.1	A Derivada Exterior de Formas . . . . .	1767
35.1.2	Formas Exatas e Formas Fechadas . . . . .	1769
35.1.2.1	O Lema de Poincaré . . . . .	1772
35.2	Dualidade de Hodge . . . . .	1776
35.2.1	O Mapa Dual de Hodge . . . . .	1776
35.2.2	A Coderivada Exterior . . . . .	1779
35.2.3	O Operador de Laplace-de Rham . . . . .	1781
35.2.3.1	Definindo Gradiente, Divergente e Rotacional Via Formas Diferenciais . . . . .	1781
35.2.4	Formas Harmônicas. O Teorema de Decomposição de Hodge e o Teorema de Hodge . . . . .	1786
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1789
35.A	Os Símbolos de Levi-Civita . . . . .	1789
35.B	Composição de Mapas de Hodge. Demonstração de (35.39) . . . . .	1792
35.C	Demonstração de (35.41) e (35.42) . . . . .	1793
35.D	Demonstração de (35.50) . . . . .	1794
<b>VIII</b>	<b>Séries e Transformadas de Fourier. Distribuições</b> . . . . .	<b>1796</b>
<b>36</b>	<b>Aproximação de Funções. Aproximações Polinomiais e Séries de Fourier</b> . . . . .	<b>1797</b>
36.1	Noções de Convergência para Sequências de Funções . . . . .	1798
36.1.1	Importância da Convergência Uniforme . . . . .	1799
36.1.1.1	Troca de Ordem entre Limites e Integrais . . . . .	1800
36.1.1.2	Troca de Ordem entre Limites e Derivadas . . . . .	1802
36.1.1.3	Troca de Ordem entre Derivadas e Integrais . . . . .	1802
36.2	Sequências Delta de Dirac . . . . .	1804
36.3	Aproximação de Funções por Polinômios . . . . .	1810
36.3.1	O Teorema de Weierstrass . . . . .	1810
36.3.2	O Teorema de Taylor . . . . .	1817
36.4	Aproximação de Funções por Polinômios Trigonométricos . . . . .	1824
36.4.1	Preliminares . . . . .	1825
36.4.2	A Série de Fourier de Funções Periódicas de Período $T$ . . . . .	1828
36.4.3	Polinômios Trigonométricos e Funções Contínuas e Periódicas . . . . .	1829
36.4.4	Convergência de Séries de Fourier . . . . .	1834
36.4.4.1	Séries de Fourier em Senos ou Cossenos para Funções Definidas em Intervalos Compactos . . . . .	1840
36.4.5	Revisitando a Aproximação Uniforme de Funções Contínuas e Periódicas por Polinômios Trigonométricos . . . . .	1843
36.4.6	Somas de Cesàro . . . . .	1843
36.4.6.1	O Núcleo de Fejér . . . . .	1845

36.4.7	Séries de Fourier e o Espaço de Hilbert $L^2([-\pi, \pi], dx)$ . . . . .	1847
36.5	O Teorema de Stone-Weierstrass . . . . .	1848
36.6	Exercícios Adicionais . . . . .	1853
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1861
36.A	Prova do Teorema de Weierstrass Usando Polinômios de Bernstein . . . . .	1861
36.B	A Demonstração de Weierstrass do Teorema de Weierstrass . . . . .	1865
<b>37</b>	<b>Introdução às Distribuições e às Transformadas de Fourier</b> . . . . .	<b>1867</b>
37.1	Funções de Schwartz e Funções de Teste . . . . .	1868
37.1.1	Funções Gaussianas . . . . .	1879
37.2	Transformadas de Fourier . . . . .	1882
37.2.1	Transformadas de Fourier no Espaço de Schwartz . . . . .	1885
37.2.1.1	As Relações de Weyl e a Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff . . . . .	1888
37.2.1.2	A Transformada de Fourier de Funções Gaussianas . . . . .	1891
37.2.1.3	Invertibilidade da Transformada de Fourier no Espaço de Schwartz . . . . .	1894
37.2.1.4	Transformadas de Fourier, Produtos de Convolução e Identidade de Plancherel . . . . .	1897
37.2.1.5	“Relações de Incerteza” para Transformadas de Fourier . . . . .	1899
37.2.2	A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ . . . . .	1901
37.2.2.1	Mais Algumas Transformadas de Fourier Relevantes em Aplicações . . . . .	1904
37.2.2.2	A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ e suas Propriedades Espectrais . . . . .	1906
37.2.3	Transformadas de Fourier: Tópicos Suplementares . . . . .	1909
37.2.3.1	A Fórmula de Soma de Poisson . . . . .	1909
37.2.3.2	Usos da Fórmula de Soma de Poisson. A Função $\theta$ de Jacobi . . . . .	1911
37.2.3.3	Transformadas de Fourier e Médias Angulares . . . . .	1912
37.3	Distribuições e Distribuições Temperadas . . . . .	1918
37.3.1	Primeiros Exemplos de Distribuições . . . . .	1919
37.3.2	Outros Exemplos de Distribuições . . . . .	1925
37.3.2.1	A Distribuição Valor Principal . . . . .	1925
37.3.2.2	Distribuições do Tipo Parte Finita de Hadamard . . . . .	1927
37.3.3	Algumas Relações Úteis Envolvendo Distribuições . . . . .	1930
37.3.4	Derivadas de Distribuições . . . . .	1934
37.3.4.1	Alguns Exemplos de Derivadas de Distribuições . . . . .	1937
37.3.4.2	Cálculo da Derivada de Algumas Distribuições de Interesse . . . . .	1938
37.3.5	Alguns Resultados Estruturais sobre Distribuições . . . . .	1940
37.3.6	Transformadas de Fourier de Distribuições Temperadas . . . . .	1941
37.3.6.1	Cálculo de Transformadas de Fourier de Algumas Distribuições Temperadas . . . . .	1941
37.3.7	Produtos de Distribuições . . . . .	1945
37.3.7.1	Produto de Convolução de Distribuições . . . . .	1950
37.4	Equações Diferenciais Distribucionais, Soluções Fundamentais e Funções de Green . . . . .	1951
37.4.1	Soluções Fundamentais . . . . .	1954
37.4.1.1	Soluções Fundamentais como Funções Generalizadas . . . . .	1955
37.4.1.2	O Caso de Operadores Lineares a Coeficientes Constantes . . . . .	1957
37.4.1.3	Alguns Exemplos Fisicamente Relevantes . . . . .	1962
37.5	Exercícios Adicionais . . . . .	1966
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	1972
37.A	Prova de (37.21) . . . . .	1972
37.B	Prova da Proposição 37.16 . . . . .	1973

**IX Análise Funcional****1979**

<b>38</b>	<b>Noções Básicas Sobre Espaços de Hilbert</b>	<b>1980</b>
38.1	Aspectos Topológicos Básicos de Espaços de Hilbert . . . . .	1982
38.2	Aspectos Geométricos Básicos de Espaços de Hilbert . . . . .	1983
38.2.1	Funcionais Lineares e o Dual Topológico de um Espaço de Hilbert . . . . .	1987
38.2.1.1	O Teorema da Representação de Riesz . . . . .	1988
38.2.2	Conjuntos Ortonormais Completos em Espaços de Hilbert . . . . .	1990
38.2.3	Conjuntos Totais . . . . .	2001
38.2.3.1	Um Exemplo no Espaço $L^2(\mathbb{R}, dx)$ . . . . .	2001
38.3	Somas Diretas e Produtos Tensoriais de Espaços de Hilbert. Espaços de Fock . . . . .	2005
38.3.1	Somas Diretas de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert . . . . .	2005
38.3.2	Somas Diretas de uma Coleção Contável de Espaços de Hilbert . . . . .	2006
38.3.3	Produtos Tensoriais de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert . . . . .	2010
38.3.4	Os Espaços de Fock . . . . .	2013
38.4	Exercícios Adicionais . . . . .	2016
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	2017
38.A	Um Exemplo: os Sistemas de Rademacher e de Walsh . . . . .	2017
<b>39</b>	<b>Operadores Lineares Limitados em Espaços de Banach e de Hilbert</b>	<b>2020</b>
39.1	Operadores Lineares em Espaços Vetoriais Normados . . . . .	2022
39.1.1	Espaços de Banach de Operadores . . . . .	2026
39.1.2	O Dual Topológico de um Espaço de Banach . . . . .	2030
39.1.3	O Teorema de Hahn-Banach e Algumas Consequências do Mesmo . . . . .	2034
39.1.4	O Teorema de Banach-Steinhaus ou Princípio de Limitação Uniforme . . . . .	2039
39.1.5	O Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado . . . . .	2040
39.2	Operadores Limitados em Espaços de Hilbert . . . . .	2047
39.2.1	A Noção de Operador Adjunto em Espaços de Hilbert . . . . .	2048
39.2.2	Operadores Autoadjuntos, Normais, Unitários, Projetores Ortogonais e Isometrias Parciais . . . . .	2051
39.3	Rudimentos da Teoria das Álgebras de Banach e Álgebras $C^*$ . . . . .	2060
39.3.1	Álgebras de Banach . . . . .	2060
39.3.2	Alguns Fatos Estruturais sobre Álgebras $C^*$ . . . . .	2063
39.3.2.1	Álgebras com Involução e a Unidade . . . . .	2063
39.3.3	A Inversa de Operadores Limitados . . . . .	2067
39.3.4	O Espectro de Operadores em Álgebras de Banach . . . . .	2071
39.3.5	O Operador Resolvente e Propriedades Topológicas do Espectro . . . . .	2073
39.3.5.1	O Teorema da Aplicação Espectral . . . . .	2076
39.3.6	O Raio Espectral . . . . .	2077
39.3.7	O Homomorfismo de Gelfand em Álgebras $C^*$ . . . . .	2081
39.3.8	Raízes Quadradas de Operadores em Álgebras de Banach . . . . .	2083
39.3.9	Elementos Positivos de Álgebras $C^*$ . . . . .	2085
39.3.9.1	Relação de Ordem Decorrente da Positividade em Álgebras $C^*$ . . . . .	2089
39.3.10	Aproximantes da Unidade em Álgebras $C^*$ . . . . .	2091
39.3.10.1	Cosets por Bi-Ideais em Álgebras $C^*$ . . . . .	2093
39.4	Álgebras de von Neumann. Um Mínimo . . . . .	2098
39.4.1	O Teorema do Bicomutante . . . . .	2099
39.5	Um Pouco sobre Estados e Representações de Álgebras $C^*$ . . . . .	2102
39.5.1	Morfismos Entre Álgebras $C^*$ . . . . .	2102
39.5.2	Representações de Álgebras $C^*$ . . . . .	2105

39.5.2.1	Estados em Álgebras $C^*$ e a Representação GNS . . . . .	2106
39.5.2.2	Estados Puros, de Mistura e a Irredutibilidade de Representações GNS . . . . .	2112
39.5.3	Exemplos em Álgebras de Matrizes. Construção GNS. Estados Puros e a Entropia de von Neumann . . . . .	2115
39.5.3.1	A Entropia de von Neumann . . . . .	2119
39.5.3.2	A Construção GNS em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ . . . . .	2123
39.6	O Espectro de Operadores em Espaços de Banach . . . . .	2125
39.6.1	O Espectro de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert . . . . .	2129
39.6.2	Espectro em Espaços de Banach. Alguns Exemplos e Contraexemplos . . . . .	2130
39.7	O Lema da Raiz Quadrada em Espaços de Hilbert . . . . .	2135
39.7.1	A Decomposição Polar de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert . . . . .	2140
39.8	Operadores Compactos em Espaços de Banach e de Hilbert . . . . .	2142
39.8.1	Alguns Fatos Gerais Sobre o Espectro de Operadores Compactos . . . . .	2151
39.8.1.1	O Teorema da Alternativa de Fredholm . . . . .	2153
39.8.2	O Teorema Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos . . . . .	2159
39.9	O Teorema Espectral para Operadores Limitados Autoadjuntos em Espaços de Hilbert . . . . .	2165
39.9.1	O Cálculo Funcional Contínuo e o Homomorfismo de Gelfand . . . . .	2165
39.9.2	Generalizando o Cálculo Funcional Contínuo. As Medidas Espectrais . . . . .	2167
39.9.3	Medidas com Valores em Projeções Ortogonais . . . . .	2174
39.9.4	Os Projetores Espectrais e o Teorema Espectral . . . . .	2178
39.10	Operadores Tipo Traço e de Hilbert-Schmidt . . . . .	2181
39.10.1	Operadores Tipo Traço, ou Traciais . . . . .	2183
39.10.1.1	O Traço de um Operador Tracial . . . . .	2187
39.10.2	Operadores de Hilbert-Schmidt . . . . .	2190
39.10.3	Operadores Traciais e de Hilbert-Schmidt e os Operadores Compactos . . . . .	2197
39.10.4	Operadores de Hilbert-Schmidt e Operadores Integrais . . . . .	2199
39.10.5	O Teorema de Lidskii. Traço e Espectro de Operadores Traciais . . . . .	2202
39.11	O Traço Parcial . . . . .	2203
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	2207
39.A	Prova do Teorema 39.19 . . . . .	2207
39.B	Um Lema Sobre Espaços Normados Devido a F. Riesz . . . . .	2209
<b>40</b>	<b>Operadores Lineares Não-Limitados em Espaços de Hilbert</b> . . . . .	<b>2211</b>
40.1	Classificando Operadores Não-Limitados . . . . .	2212
40.1.1	Operadores Fechados . . . . .	2213
40.1.2	Operadores Fecháveis . . . . .	2216
40.1.3	O Adjunto de um Operador Linear . . . . .	2217
40.1.3.1	Operadores Simétricos, Autoadjuntos e Essencialmente Autoadjuntos . . . . .	2222
40.2	Espaços de Deficiência e Extensões Autoadjuntas de Operadores Simétricos . . . . .	2228
40.2.1	Considerações Preliminares . . . . .	2228
40.2.2	Classificação de Extensões Simétricas Fechadas de Operadores Simétricos Fechados. Extensões Autoadjuntas . . . . .	2229
40.3	Formas Quadráticas e Alguns de Seus Usos . . . . .	2234
40.3.1	Alguns Usos de Formas Quadráticas . . . . .	2241
40.3.1.1	A Forma de Soma . . . . .	2241
40.3.1.2	A Extensão de Friedrichs . . . . .	2241
40.4	Bestiário de Exemplos e Contraexemplos . . . . .	2243
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	2251
40.A	Prova do Lema 40.6 . . . . .	2251
<b>41</b>	<b>O Limite Indutivo de Álgebras</b> . . . . .	<b>2252</b>



## X Aplicações e Usos em Física

2261

<b>42 Equações Diferenciais. Problemas Seleccionados de Interesse Físico</b>	<b>2262</b>
42.1 Dedução de Algumas Equações Diferenciais de Interesse . . . . .	2263
42.1.1 Dedução Informal da Equação de Difusão de Calor . . . . .	2263
42.1.2 Dedução Informal da Equação da Corda Vibrante . . . . .	2267
42.2 As Equações de Helmholtz e de Laplace . . . . .	2273
42.2.1 Problemas em Duas Dimensões em Coordenadas Polares . . . . .	2275
42.2.2 Problemas em Três Dimensões em Coordenadas Esféricas . . . . .	2277
42.3 Problemas de Difusão em uma Dimensão . . . . .	2280
42.3.1 A Evolução da Temperatura de uma Barra Finita . . . . .	2280
42.3.2 A Evolução da Temperatura de uma Barra Infinita . . . . .	2284
42.3.3 A Evolução da Temperatura de uma Barra Semi-Infinita . . . . .	2289
42.4 A Equação de Ondas . . . . .	2294
42.4.1 A Equação de Ondas em $1 + 1$ Dimensões . . . . .	2295
42.4.2 Interlúdio: Ondas Caminhantes e a Equação do Telégrafo . . . . .	2298
42.4.3 Outro Interlúdio: Sólitons . . . . .	2300
42.4.3.1 Sólitons na Equação de Korteweg-de Vries . . . . .	2301
42.4.3.2 Sólitons na Equação de Sine-Gordon . . . . .	2303
42.4.3.3 Sólitons no Modelo de Poço-Duplo . . . . .	2304
42.4.3.4 Sólitons na Equação de Schrödinger Não-Linear . . . . .	2306
42.4.4 A Equação de Ondas e Transformadas de Fourier . . . . .	2310
42.4.4.1 A Equação de Ondas em $3 + 1$ Dimensões. A Solução de Kirchhoff . . . . .	2313
42.4.4.2 A Equação de Ondas em $2 + 1$ Dimensões . . . . .	2314
42.5 O Problema da Corda Vibrante . . . . .	2316
42.5.1 Corda Vibrante Homogênea . . . . .	2317
42.5.2 O Problema da Corda Homogênea Pendurada . . . . .	2319
42.5.3 Corda Vibrante Não-Homogênea . . . . .	2322
42.5.4 O Problema da Membrana Retangular Homogênea . . . . .	2325
42.6 O Problema da Membrana Circular Homogênea . . . . .	2326
42.7 O Oscilador Harmônico na Mecânica Quântica e a Equação de Hermite . . . . .	2328
42.8 O Átomo de Hidrogênio e a Equação de Laguerre Associada . . . . .	2331
42.9 Propagação de Ondas em Tanques Cilíndricos . . . . .	2333
42.10 Equações Hiperbólicas Lineares em $1+1$ Dimensões e Equações Integrais . . . . .	2341
42.11 Aplicações do Método da Função de Green . . . . .	2348
42.11.1 A Equação de Poisson em Três Dimensões . . . . .	2349
42.11.2 A Equação de Difusão Não-Homogênea . . . . .	2350
42.11.3 A Equação de Ondas Não-Homogênea em $n + 1$ -Dimensões . . . . .	2352
42.11.3.1 A Equação de Ondas Não-Homogênea em $3 + 1$ -Dimensões . . . . .	2356
42.11.3.2 Aplicações à Eletrodinâmica. Potenciais Retardados e Equações de Jefimenko . . . . .	2359
42.11.3.3 A Equação de Ondas Não-Homogênea em $2 + 1$ -Dimensões . . . . .	2364
42.11.3.4 A Equação de Ondas Não-Homogênea em $1 + 1$ -Dimensões . . . . .	2366
42.12 Exercícios Adicionais . . . . .	2368
42.12.1 Problemas Seleccionados de Eletrostática . . . . .	2368
42.12.2 Equação de Difusão em uma Dimensão . . . . .	2371
42.12.3 Equação de Ondas em uma Dimensão . . . . .	2373
42.12.4 Modos de Vibração de Membranas . . . . .	2379
42.12.5 Problemas sobre Ondas e Difusão em Três Dimensões Espaciais . . . . .	2382
42.12.6 Problemas Envolvendo Funções de Green . . . . .	2384

	<b>APÊNDICES</b>	2386
42.A	Duas Transformadas de Laplace	2386
<b>43</b>	<b>Rudimentos da Teoria do Potencial</b>	<b>2388</b>
43.1	A Equação de Poisson em Três Dimensões	2388
43.1.1	A Equação de Laplace em Domínios Limitados de $\mathbb{R}^3$ . O Problema de Dirichlet	2392
43.1.2	A Equação de Poisson em $\mathbb{R}^3$	2392
43.1.3	A Equação de Poisson Domínios Limitados de $\mathbb{R}^3$	2393
43.1.3.1	O Caso de Condições de Dirichlet	2393
43.1.3.2	O Caso de Condições de Neumann	2394
43.1.3.3	Existência de Solução	2394
43.1.4	Aplicações à Eletrostática: Capacitância	2394
43.2	O Teorema de Decomposição de Helmholtz	2394
43.2.1	Aplicações ao Eletromagnetismo	2398
43.3	Propriedades Básicas de Funções Harmônicas em $\mathbb{R}^3$	2399
<b>44</b>	<b>Notas Sobre Mecânica Clássica. I</b>	<b>2401</b>
44.1	Sistemas de Referência e suas Transformações na Mecânica Clássica. Acelerações Inerciais	2402
44.2	Mecânica de Pontos Materiais	2414
44.3	Interlúdio. Aceleração de Coriolis e a Rotação Diurna da Terra	2422
44.3.1	Experimentos de Queda Livre e Mensuração de seu Desvio	2424
44.3.2	O Experimento do Pêndulo de Foucault sob Pequenas Oscilações	2427
44.4	Mecânica de Corpos Rígidos	2434
44.4.1	Propriedades do Tensor Momento de Inércia	2436
44.4.2	As Equações Dinâmicas para Corpos Rígidos	2438
44.4.2.1	Estabilidade de Rotações em Torno dos Eixos Principais. O Teorema do Eixo Intermediário	2442
44.4.3	Movimento de Piões. Algumas Soluções	2445
44.5	O Formalismo Lagrangiano. Fundamentos	2451
44.5.1	O Princípio de Hamilton e as Equações de Euler-Lagrange em Sistemas sem Vínculos	2453
44.5.2	Invariância das Equações de Euler-Lagrange por Mudanças de Coordenadas e de Sistemas de Referência	2458
44.5.3	Sistemas com Vínculos Holonômicos	2460
44.5.4	O Princípio de D'Alembert e o Tratamento de Forças não Conservativas	2461
44.5.4.1	Partícula Carregada em um Campo Eletromagnético. A Força de Lorentz	2467
44.5.5	Sistemas de Coordenadas Não Inerciais no Formalismo Lagrangiano	2469
44.5.6	O Formalismo Lagrangiano em Sistemas Não Autônomos	2471
44.6	O Formalismo Lagrangiano. Simetrias Contínuas e Leis de Conservação. O Teorema de Noether	2473
44.6.1	A Noção de Transformação de Simetria	2475
44.6.2	Simetrias Contínuas com $\gamma = 0$ e Leis de Conservação	2476
44.6.3	Similitude Mecânica	2480
44.6.4	Simetrias Contínuas com $\gamma \neq 0$	2481
44.7	O Formalismo Hamiltoniano	2482
44.7.1	Derivação Variacional das Equações de Hamilton	2485
44.7.2	Colchetes de Poisson	2486
44.7.3	Transformações Canônicas	2493
44.8	Exercícios Adicionais	2504
	<b>APÊNDICES</b>	2509
44.A	Mais Algumas Consequências da Proposição 44.1	2509
44.B	Um Lema Útil Sobre Funções Contínuas	2510

<b>45 Notas Sobre Mecânica Clássica. II. Problemas e Aplicações</b>	<b>2512</b>
45.1 As Curvas Tautócrona, Cicloide e Braquistócrona . . . . .	2512
45.2 Movimento em Potenciais Centrais e o Problema de Kepler . . . . .	2518
45.2.1 O Problema de Um Corpo sob Forças Centrais . . . . .	2519
45.2.2 O Problema de Dois Corpos sob Forças Centrais . . . . .	2521
45.2.3 O Problema de Kepler. Determinação das Órbitas . . . . .	2522
45.2.4 O Problema de Kepler. Determinação das Trajetórias. A Equação de Kepler . . . . .	2525
45.3 Modos Normais de Oscilação . . . . .	2530
45.3.1 Modos Normais e a Energia Mecânica . . . . .	2538
45.4 Ângulos de Euler na Mecânica de Corpos Rígidos . . . . .	2540
45.4.1 Usos dos Ângulos de Euler. O Pião de Lagrange . . . . .	2541
45.5 Exercícios Adicionais . . . . .	2549
<b>APÊNDICES</b> . . . . .	2551
45.A Seções Cônicas . . . . .	2551
45.A.1 Elipses e Círculos . . . . .	2551
45.A.2 Hipérbolas . . . . .	2552
45.A.3 Parábolas . . . . .	2554
45.B Parametrização Polar de Seções Cônicas . . . . .	2554
<b>46 Spinores e o Grupo de Lorentz</b>	<b>2558</b>
46.1 $SL(2, \mathbb{C})$ e o Grupo de Lorentz . . . . .	2558
46.1.1 Ações de $SL(2, \mathbb{C})$ e o Grupo de Lorentz . . . . .	2561
<b>APÊNDICES</b> . . . . .	2566
46.A Um Isomorfismo entre $PSL(2, \mathbb{C})$ e $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . . . . .	2566
<b>47 Operadores e a Física Quântica</b>	<b>2573</b>
47.1 Algumas Considerações Gerais Sobre Teorias Físicas . . . . .	2573
47.2 O Modelo da Mecânica Clássica . . . . .	2576
47.3 O Quadro da Física Quântica e a Relevância do Teorema Espectral . . . . .	2578
47.4 As Relações de Incerteza . . . . .	2580
47.4.1 A Relação de Incerteza de Heisenberg . . . . .	2583
47.4.2 A Relação de Incerteza de Schrödinger . . . . .	2584
47.4.3 As Relações de Incerteza para Operadores Não Limitados . . . . .	2588
47.4.3.1 As Relações de Incerteza e Transformações Simpléticas . . . . .	2590
47.4.4 Discussão Adicional . . . . .	2591
47.5 As Desigualdades de Bell . . . . .	2594
47.5.1 O Problema das Variáveis Escondidas . . . . .	2594
47.5.2 Obtendo as Desigualdades de Bell . . . . .	2600
47.5.3 Alguns Resultados Matemáticos sobre as Desigualdades de Bell . . . . .	2605
47.6 Fidelidade e Purificação . . . . .	2609
47.6.1 Purificação . . . . .	2612
47.7 O Teorema de Wigner. Simetrias . . . . .	2615
<b>Bibliografia</b>	<b>2618</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>2635</b>

# Prefácio



intenção básica deste livro é fornecer a estudantes de Física noções matemáticas necessárias a uma melhor compreensão de desenvolvimentos modernos da Física Teórica e da Matemática. Longe vai o tempo em que o conhecimento matemático requerido a um físico teórico restringia-se a certos métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais. Essa visão, porém, infelizmente impregna até o presente a concepção de certas disciplinas ditas de Física-Matemática (ou de Métodos Matemáticos da Física Teórica) e de certos maus livros sobre o tema. Em contraste, noções sobre Estruturas Algébricas, Topologia Geral, Teoria da Medida e da Integração, Geometria Diferencial, Teoria de Grupos, Teoria de Distribuições, Análise Funcional e Álgebras de Operadores são hoje imprescindíveis ao trabalho de um físico teórico.

Este livro cresceu a partir de notas de aula escritas pelo autor em diversas disciplinas de graduação e pós-graduação ministradas no IFUSP. Diversos de seus capítulos podem ser empregados em disciplinas de graduação ou pós-graduação, mas o mesmo foi concebido primordialmente para servir ao autoestudo de estudantes e docentes. De modo geral, o nível varia entre intermediário e avançado. Também de modo geral, o texto é de leitura autossuficiente, mas vez por outra algum estudo complementar é sugerido. A melhor maneira de um estudante conduzir-se no estudo de assuntos matemáticos é munindo-se de uma boa coleção de exemplos e contraexemplos de várias situações específicas, patologias, casos especiais etc. Além de servirem de auxílio à memória, exemplos ajudam a melhor entender a motivação de certas definições e a compreender restrições mencionadas em enunciados de teoremas. Dessa forma, procuramos sempre que possível apresentar (muitas vezes em exercícios!) um bom número de exemplos e contraexemplos para as várias situações tratadas.

Este texto, porém, não é substituto à leitura dos bons livros especializados nos diversos assuntos aqui tratados. Parte do material aqui apresentado pode ser encontrado em diversas fontes, citadas na bibliografia (página 2619), mas a apresentação e sua ordem são próprias. Há também neste texto demonstrações do próprio autor de resultados conhecidos que são, por alguma razão, dificilmente encontradas na literatura. Mas como comenta o autor de [238] em seu prefácio, *“qualquer livro-texto deve mais aos livros e notas de outros do que a seu autor nominal”*.

Fazemos notar que este livro está ainda sendo trabalhado e alguns capítulos e seções podem vir a ser alterados, corrigidos, eliminados ou acrescidos de material. Além disso, novos capítulos serão escritos. O material já presente é, porém, útil a todos aqueles que queiram iniciar-se nos assuntos aqui expostos. Versões atualizadas serão colocadas na “rede” (no endereço acima indicado) sempre que possível.

O autor agradece a todos os que apresentarem sugestões. Fabulosas somas em dinheiro são oferecidas a todos aqueles que encontrarem erros no texto. Entre os já aquinhoados encontram-se Prof. Matheus Grasselli, Prof. Alexandre T. Baraviera, Prof. Marcos V. Travaglia, Daniel Augusto Cortez, Djogo F. C. Patrão, Cléber de Mico Muramoto, Profa. Katiúscia Nadyne Casemiro, Urbano Lopes França Junior, Gustavo Barbagallo de Oliveira, Priscila Vieira Franco Gondeck, Darielder Jesus Ribeiro, Henrique Scemes Xavier, Prof. Daniel Augusto Turolla Vanzella, Leonardo Fernandes Dias da Motta, Krishnamurti José de Andrade, Prof. Pedro Tavares Paes Lopes, Diego Cortegoso Assêncio, Fleury José de Oliveira Filho, Paulo Henrique Reimberg, Fabíola Diacenco Xavier, Márcio André Prieto Aparício Lopez, Dorival Gonçalves Netto, Célia Santos Jordão Alves, Bruno Lima de Souza, Leandro Saccoletto, João Pedro Jericó de Andrade, Ronaldo da Silva Alves Batista, Carolina Dias Alexiou, Arão Benjamin Garcea, Cláudio Mayrink Verdun, Leonardo Hanao Gabriel, Felipe Contatto, Victor Bernardo Chabu, Bruno Hideki Kimura, Fabrizio Fogaça Bernardi, Alessandro Takeshi Morita Gagliardi, Cedrick Miranda Mello, Thiago Costa Raszeja, Pedro Rangel Caetano, Anderson Seigo Misobuchi, Leandro Silva Pimenta, Alexandre Homrich, Prof. Edélcio Gonçalves de Souza, Lissa de Souza Campos, Ricardo Correa da Silva, Leonardo Almeida Lessa, Prof. Marcos Carvalho Brum de Oliveira, Victor Luccas Ramalho Moura, Felipe Dilho Alves, Caio Lopes Junqueira Reis, Bernardo Leal de Oliveira e Jose Eduardo Rodrigues Martins Peres y Peres, aos quais somos muito gratos por correções e sugestões. Estas Notas foram escritas durante um intervalo longo de tempo, de sorte que alguns dos seus usuários são hoje colegas professores e fizemos menção a isso na lista acima, quando soubemos. Pedimos desculpas por eventuais omissões.

As Seções 46.A, página 2566, e 25.2.4.1, página 1328, foram originalmente escritas por Daniel Augusto Cortez. A Seção 42.9, página 2333, foi originalmente escrita por André M. Timpanaro, Fleury J. Oliveira e Paulo H. Reimberg. A eles dedicamos agradecimentos especiais.

João Carlos Alves Barata

São Paulo, 3 de agosto de 2022

Departamento de Física Matemática do IFUSP



# Bons Mots

*“All my life, I have worked as a scientist looking for situations where a little elegant mathematics can help us to understand nature. I found problems that I could solve with a teaspoonful of elegant mathematics, in physics and engineering and astronomy and biology. I never worried whether the problems were important or unimportant. So long as the mathematics was beautiful, I was happy”.*

Freeman J. Dyson (1923–2020), in “Playing with Numbers”, published in “One Hundred Reasons to be a Scientist”, Copyright 2004 by the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP).

*“O comportamento de um físico em relação à Matemática é similar a de um ladrão inteligente em relação ao código penal: ele estuda apenas o suficiente para evitar punições”.*

I. M. Gelfand (1913–2009).

*“The greatest enemy of knowledge is not ignorance, it is the illusion of knowledge”.*

Daniel J. Boorstin (1914–2004), também atribuído a Stephen W. Hawking (1942–2018).

*“A mente não é um vaso a ser repleto, mas uma tocha a ser acesa”.*

Plutarco (46?–120).

*“Mathematical proofs really aren’t there to convince you that something is true – they’re there to show you why it is true”.*

Andrew M. Gleason (1921–2008).

*“It can be said with complete confidence that any scientist of any age who wants to make important discoveries must study important problems. Dull or piffling problems yield duff or piffling answers. It is not enough that a problem should be ‘interesting’ - almost any problem is interesting if it is studied in sufficient depth. ... No, the problem must be such that it matters what the answer is - whether to science generally or to mankind”.*

Peter Brian Medawar (1915–1987), ‘Advice to a Young Scientist’ (1979).

*“The public has a distorted view of science, because children are taught in school that science is a collection of firmly established truths. In fact, science is not a collection of truths. It is a continuing exploration of mysteries”.*

Freeman Dyson (1923–2020), in *How We Know*, The New York Review of Books, March 10, 2011.

*“When a theoretical physicist can not solve a problem he goes for the next more difficult one”.*

Sir Michael Francis Atiyah (1929–).

*“My friend G. H. Hardy<sup>1</sup>, who was professor of pure mathematics, enjoyed this pleasure [in mathematical demonstrations] in a very high degree. He told me once that if he could find a proof that I was going to die in five minutes he would of course be sorry to lose me, but this sorrow would be quite outweighed by pleasure in the proof”.*

Bertrand Russell (1872–1970).

*“Mathematics is not a deductive science – that’s a cliché. When you try to prove a theorem, you don’t just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial and error, experimentation, guesswork”.*

Paul R. Halmos, in [167].

*“The source of all great mathematics is the special case, the concrete example. It is frequent in mathematics that every instance of a concept of seemingly great generality is in essence the same as a small and concrete special case”.*

Paul R. Halmos, in [167].

---

<sup>1</sup>Godfrey Harold Hardy (1877–1947).

*“Mathematics is a subarea of Applied Mathematics”.*

Peter Lax (-).

*“Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap”.*

Vladimir I. Arnold (1937–2010). In “On teaching mathematics”. Address at the discussion on teaching of mathematics in Palais de Découverte in Paris on 7 March 1997.

*“In science, self-satisfaction is death. Personal self-satisfaction is the death of the scientist. Collective self-satisfaction is the death of the research. It is restlessness, anxiety, dissatisfaction, agony of mind that nourish science”.*

Jacques Lucien Monod (1910–1976), in *New Scientist*, 1976.

*“Não existe nenhuma categoria da Ciência à qual se possa dar o nome de Ciência Aplicada. O que existe são a Ciência e as aplicações da Ciência, intimamente ligadas, como frutos à árvore que os gerou”.*

Louis Pasteur (1822–1895), in “Pourquoi la France n'a pas trouvé d'hommes supérieurs au moment du péril”, *Revue Scientifique* (Paris, 1871).

*“Disse Kant<sup>2</sup>: ‘Eu afirmo que em cada Ciência Natural específica pode-se atingir somente tanto Conhecimento verdadeiro quanto nela houver de Matemática’. De fato, somente dominamos uma teoria das ciências naturais quando expomos seu núcleo matemático e o desvendamos completamente”.*

David Hilbert (1862–1943) em “Naturerkennen und Logik”, palestra apresentada em setembro de 1930, em Königsberg, em Congresso da Associação Alemã de Cientistas Naturais e Médicos.

*“Não podemos nos permitir acreditar naqueles que em nossos dias, com cenho filosófico e em tom de superperiodidade, profetizam a decadência cultural e apologizam o Ignorabimus. Para nós não existe o Ignorabimus e, em minha opinião, também não para as Ciências Naturais. Em lugar do tolo Ignorabimus nosso lema é ‘Nós devemos saber, nós iremos saber’”.*

David Hilbert. *ibidem*.

*“A geometry implies the heterogeneity of locus, namely that there is a locus of the Other. Regarding this locus of the Other, of one sex as Other, as absolute Other, what do the most recent developments in topology allow us to posit? I will posit here the term compactness. Nothing is more compact than a fault, assuming that the intersection of everything that is enclosed therein is accepted as existing over an infinite number of sets, the result being that the intersection implies this infinite number. That is the very definition of compactness”.*

Jacques Lacan (1901–1981), em *Le Séminaire Jacques Lacan*, Livre XX: Encore, 1972–1973. Texto organizado por Jacques-Alain Miller. Paris: Éditions du Seuil. Traduzido e citado por Alan Sokal e Paul Bricmont in *Intellectual Impostures*.

Para a definição de compacidade, vide Seção 32.3, página 1540.

\* \* \* \* \*

*“Unprovided with original learning, unformed in the habits of thinking, unskilled in the arts of composition, I resolved to write a book”.*

Edward Gibbon (1737–1794).

*“Talvez eu não tenha tido êxito em fazer as coisas difíceis tornarem-se fáceis, mas pelo menos eu nunca fiz um assunto fácil tornar-se difícil”.*

F. G. Tricomi (1897–1978).

---

<sup>2</sup>Immanuel Kant (1724–1804).

*“... E costumava dizer que nenhum livro é tão ruim a ponto de nada conter de valor...”.*

Plínio, o Novo (61–114), a respeito de seu tio, Plínio, o Velho (23–79).

*“Would I had phrases that are not known, utterances that are strange, in new language that has not been used, free from repetition, not an utterance that has grown stale, which men of old have spoken”.*

Khakheperresenb (ci. 1900 AC), escriba egípcio. Citado em “The Burden of the Past and the English Poet” de Walter Jackson Bate.

*“Tudo que deveria ter sido dito já o foi, mas como ninguém ouvia, tudo tem de ser dito novamente”.*

André Paul Guillaume Gide (1869–1951).

*“Uma obra nunca é terminada, ela é apenas abandonada”.*

Atribuído a Paul Valéry (1871–1945).



# Como Ler Este Livro

*“Reading made Don Quixote a gentleman. Believing what he read made him mad”.*

George Bernard Shaw (1856–1950).

O leitor deste livro não deve possuir o temor de que o mesmo deva (nem a expectativa de que o mesmo possa) ser lido linearmente, ou seja, na seqüência numérica crescente dos capítulos e seções. Ele não foi concebido dessa forma e tal concepção não seria exequível devido à variedade de assuntos, às diferenças de nível de abordagem e à complexidade das conexões entre os diferentes temas. O *Conhecimento* não é um conjunto totalmente ordenado pela relação de complexidade conceitual ou pela relação de motivação (para a definição da noção de ordem total em conjuntos, vide página 55).

Fizemos um esforço para tornar autosuficientes as diversas seções e os diversos capítulos, incluindo sempre que possível, por vezes de forma repetida, todas as definições localmente necessárias. Como é natural, porém, nem sempre é possível manter essa linha de organização, de modo que ocorrem também muitas referências cruzadas entre seções e capítulos.

Os diversos capítulos não foram escritos em ordem crescente de complexidade. Por vezes, a motivação para um determinado tema é apresentada em um capítulo anterior, mas por vezes essa motivação surge em um capítulo posterior. Nos capítulos sobre equações diferenciais, por exemplo, a discussão de aplicações em Física é postergada para o Capítulo 42, página 2263, e o leitor interessado na motivação para certos tratamentos pode sem perdas consultar esse capítulo antes ou durante o estudo de capítulos que lhe antecedem.

Um problema semelhante ocorre com temas ligados à Topologia e à Análise. Os capítulos dedicados a esses assuntos servem a capítulos que lhes sucedem, mas também, em parte, a capítulos que lhes antecedem. Cabe ao leitor perceber suas necessidades formativas, avançando ou retrocedendo na leitura conforme lhe aprouver. A consulta ao Índice Remissivo (página 2635) ou à lista de Capítulos e Seções que compõem o texto (página 6) deve ser de valia para tal.

# Notação e Advertências

Para facilitar a consulta e a leitura, listamos aqui sem muitos comentários um pouco da notação que empregaremos nestas Notas.

- Se  $z$  é um número complexo denotaremos seu complexo conjugado por  $\bar{z}$ . A notação  $z^*$  (mais comum em textos de Física) pode ocorrer mais raramente.
- O símbolo  $A := B$  ou  $B =: A$  denota que  $A$  é definido pela expressão  $B$ . O símbolo  $A \equiv B$  indica que  $A$  e  $B$  são duas notações distintas para o mesmo objeto.
- Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Se  $A$  é um subconjunto de  $B$ , denotamos esse fato por  $A \subset B$  ou por  $B \supset A$ . Por  $A \subsetneq B$  ou  $B \supsetneq A$  denotamos o fato de  $A$  ser um subconjunto próprio de  $B$ , ou seja,  $A \subset B$ , mas  $A \neq B$ .
- Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  são vetores reais com  $n$  componentes (ou seja, elementos de  $\mathbb{R}^n$ ), então

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

define o chamado *produto escalar usual em  $\mathbb{R}^n$* .

- Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  são vetores complexos com  $n$  componentes (ou seja, elementos de  $\mathbb{C}^n$ ), então

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} := \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n$$

define o chamado *produto escalar usual em  $\mathbb{C}^n$* .

- Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  são vetores complexos com  $n$  componentes (ou seja, elementos de  $\mathbb{C}^n$ ), então

$$\beta(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

define a chamada *forma bilinear usual em  $\mathbb{C}^n$* .

- $\text{Mat}(\mathbb{R}, m, n)$  ou  $\text{Mat}(m, n, \mathbb{R})$  designa o conjunto de todas as matrizes reais  $m \times n$  ( $m$  linhas e  $n$  colunas). Analogamente,  $\text{Mat}(\mathbb{C}, m, n)$  ou  $\text{Mat}(m, n, \mathbb{C})$  designa o conjunto de todas as matrizes complexas  $m \times n$ . O conjunto de todas as matrizes quadradas  $n \times n$  com entradas reais (complexas) será denotado simplesmente por  $\text{Mat}(\mathbb{R}, n)$  (por  $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ ).
- Se  $A$  é um elemento de  $\text{Mat}(\mathbb{R}, n)$  ou de  $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ , então  $A^T$  designa a matriz transposta de  $A$ , ou seja, a matriz cujos elementos de matriz  $ij$  são  $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ .
- Se  $A$  é um operador linear em um espaço vetorial complexo (com um certo produto escalar), seu adjunto é denotado por  $A^*$ . Em textos de Física é mais comum denotá-lo por  $A^\dagger$ , mas não usaremos isso aqui. Assim, se  $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ , então  $A^*$  será a adjunta de  $A$  (em relação ao produto escalar usual, acima). O elemento de matriz  $ij$  de  $A^*$  será  $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$ .
- Denotaremos o operador identidade agindo em um espaço vetorial (a matriz identidade, agindo em um espaço vetorial de dimensão finita) pelo símbolo  $\mathbb{1}$ . Esse símbolo também representará a unidade de uma álgebra.
- Designaremos um produto escalar entre dois vetores  $u$  e  $v$  sempre por  $\langle u, v \rangle$  e nunca por  $(u, v)$ , para não causar confusão com a notação para par ordenado. Outra notação possível é aquela empregada frequentemente em textos de Mecânica Quântica:  $\langle u | v \rangle$ , mas faremos raramente uso da mesma.
- Ainda sobre produtos escalares, seguiremos sempre a convenção dos textos de Física: um produto escalar em um espaço vetorial sobre os complexos é linear em relação ao segundo argumento e antilinear em relação ao primeiro. Assim, se  $\alpha$  e  $\beta$  são números complexos, teremos  $\langle \alpha u, \beta v \rangle = \bar{\alpha} \beta \langle u, v \rangle$ . Textos de Matemática adotam por vezes a convenção oposta (ou mesmo ambas!).

- Sobre o emprego das palavras *função*, *aplicação*, *mapeamento*, *mapa*, *funcional*, *operador*, *operação*, *produto* e *forma*, que por vezes causam perplexidade em estudantes, remetemos ao comentário à página 42.
- Dado um conjunto  $X \neq \emptyset$ , denota-se por  $\mathbb{P}(X)$  a coleção de todos os subconjuntos de  $X$ .  $\mathbb{P}(X)$  é denominado o *conjunto das partes* de  $X$ .
- A topologia usual da reta real  $\mathbb{R}$  será denotada aqui por  $\tau_{\mathbb{R}}$ .
- A  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}$  será (quase sempre) denotada aqui por  $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$ .
- A  $\sigma$ -álgebra dos subconjuntos de  $\mathbb{R}$  mensuráveis por Lebesgue será (quase sempre) denotada aqui por  $\mathcal{M}_{\mu_L}$ .
- Por  $\mathbb{N}$  denotamos o conjunto dos números naturais:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Por  $\mathbb{N}_0$  denotamos o conjunto dos números naturais, incluindo o zero:  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . O leitor deve ser advertido, porém, que essa convenção não é universal. O padrão ISO 31-11 (dedicado a sinais e símbolos matemáticos) recomenda a convenção  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  e  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ . O leitor deve ter cuidado, portanto, ao comparar textos diferentes.
- Para  $x \in \mathbb{R}$ , o símbolo  $\lfloor x \rfloor$  designa o maior inteiro menor ou igual a  $x$ . O símbolo  $\lceil x \rceil$  designa o menor inteiro maior ou igual a  $x$ .

Em particular, para  $n \in \mathbb{Z}$  valem

$$\lfloor n/2 \rfloor = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ (n-1)/2, & n \text{ ímpar}, \end{cases} \quad \lceil n/2 \rceil = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ (n+1)/2, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

- O símbolo  $\square$  indica o fim de um enunciado. O símbolo  $\blacksquare$  indica o fim de uma demonstração. O símbolo  $\spadesuit$  indica o fim do enunciado de um exercício. O símbolo  $\boxtimes$  indica o fim do enunciado de um exemplo. O símbolo  $\clubsuit$  indica o fim de uma observação, nota ou comentário. O símbolo  $\spadesuit$  indica o fim de uma definição.
- $\mathcal{B}(X)$  designa o conjunto de operadores limitados agindo em um espaço de Banach  $X$ .  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  designa o conjunto de operadores limitados agindo em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ .
- $C(L)$  designa o conjunto de todas as funções contínuas (reais ou complexas, dependendo do caso), definidas em  $L$  (na topologia que se estiver considerando em  $L$ ).
- $\mathfrak{B}(L)$  designa a coleção de todos os conjuntos Borelianos de  $L$  (em relação à topologia que se estiver considerando em  $L$ ).  $B_l(L)$  designa a coleção de todas as funções Borelianas (reais ou complexas, dependendo do caso), definidas em  $L$ .
- O domínio de um operador  $T$  (agindo em um espaço de Banach ou de Hilbert) será denotado por  $D(T)$  ou por  $\text{Dom}(T)$ . A imagem (“range”) de  $T$  será denotada por  $R(T)$  ou por  $\text{Ran}(T)$  ou, mais raramente, por  $\text{Im}(T)$ , mas essa última notação pode causar confusão com a da parte imaginária de um número complexo ou mesmo com a da parte imaginária de um operador agindo em um espaço de Hilbert:  $\text{Im}(T) := \frac{1}{2i}(T - T^*)$ .
- A noção de *propriedade válida quase em toda parte* é definida na página 1394.

## • Intervalos

Ainda não introduzimos os números reais nem a relação de ordem entre eles mas, como essas noções são conhecidas, vamos colocar aqui uma palavra sobre a nomenclatura usada para descrever intervalos da reta real. Para  $a < b \in \mathbb{R}$  o conjunto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a < x < b\}$$

é dito ser um intervalo aberto. Para  $a \leq b \in \mathbb{R}$  o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a \leq x \leq b\}$$

é dito ser um intervalo fechado. Para  $a < b \in \mathbb{R}$  os conjuntos

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a \leq x < b\}$$

e

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a < x \leq b\}$$

são ditos ser intervalos semiabertos (ou semifechados).

É importante dizer que a nomenclatura “aberto” ou “fechado” acima é usada independentemente da topologia usada em  $\mathbb{R}$  (a noção de topologia será introduzida adiante).

Salvo menção em contrário, empregaremos por vezes as notações

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R}, x > 0\} = (0, \infty)$$

e

$$\mathbb{R}_{0+} := \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} = [0, \infty).$$

### • Delta de Krönecker

De  $i$  e  $j$  pertencem a um conjunto contável  $C$ , definimos o chamado *delta de Krönecker* por

$$\delta_{ij} \equiv \delta^{ij} \equiv \delta_i^j \equiv \delta_j^i := \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

para todos  $i, j \in C$ . As diferentes notações  $\delta_{ij}$ ,  $\delta^{ij}$ ,  $\delta_i^j$  e  $\delta_j^i$  ocorrem, por exemplo, na Geometria Diferencial e na Teoria da Relatividade.

### • A esfera unitária

Para  $n \in \mathbb{N}_0$ , denotaremos por  $\mathbb{S}^n$  a chamada *esfera unitária* em  $\mathbb{R}^{n+1}$ : o lugar geométrico de todos os pontos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  situados a uma distância Euclidiana igual a 1 da origem:

$$\mathbb{S}^n := \left\{ (y^1, \dots, y^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sqrt{(y^1)^2 + \dots + (y^{n+1})^2} = 1 \right\}.$$

Note-se que  $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ .

### • Classes $C^k$

Por  $C(\mathbb{R})$  denotaremos a coleção de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que sejam contínuas. Por  $C_0(\mathbb{R})$  denotaremos a coleção de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que sejam contínuas e de suporte compacto.

Denotamos por  $C^1(\mathbb{R})$  a coleção de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas, diferenciáveis e com derivada contínua. Tais funções são ditas *funções continuamente diferenciáveis*, ou de *classe  $C^1$* . Denotamos por  $C^k(\mathbb{R})$ ,  $k \in \mathbb{N}$  a coleção de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas e cujas  $k$  primeiras derivadas  $f'$ ,  $f''$ ,  $\dots$ ,  $f^{(k)}$  existam e sejam igualmente contínuas. Tais funções são ditas ser de *classe  $C^k$* . Por  $C^\infty(\mathbb{R})$  denotamos as funções infinitamente diferenciáveis (as quais serão, ocasionalmente, denominadas *funções suaves*). Por  $C_0(\mathbb{R})$  denotaremos a coleção de todas as funções contínuas e de suporte compacto. Por  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  denotaremos a coleção de todas as funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto.

As diversas notações acima estendem-se de forma natural a funções definidas em subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , como intervalos abertos ou fechados, compactos ou não. Aqui, o estudante deve tomar certos cuidados. Por exemplo,  $C((0, 1))$  contém, entre outras, funções contínuas que divergem em 0 e/ou em 1, mas  $C([0, 1])$  só contém funções limitadas.





# Parte I

## Capítulos Introdutórios