
Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Departamento de Física Matemática

2018

Notas para Cursos de Física-Matemática

João Carlos Alves Barata

Versão de 1 de janeiro de 2018

Estas notas, ou sua versão mais recente, podem ser encontradas no seguinte endereço WWW:

http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula

Índice

Prefácio	23
Bons Mots	24
Como Ler Este Livro	26
Notação e Advertências	27
I Capítulos Introdutórios	32
1 Noções Conjuntivistas Básicas	33
1.1 Conjuntos, Relações e Funções	33
1.1.1 Relações e Funções	35
1.1.1.1 Produtos Cartesianos Gerais	40
1.1.1.2 Relações de Incompatibilidade (ou de Compatibilidade)	41
1.1.1.3 Relações de Equivalência	42
1.1.1.4 Relações de Ordem	46
1.1.2 Cardinalidade	52
1.1.3 Ínfimos e Supremos de Famílias de Conjuntos	57
1.2 Sistemas de Conjuntos	59
1.2.1 Semi-Anéis de Conjuntos	60
1.2.2 Anéis de Conjuntos	60
1.2.3 Álgebras de Conjuntos	62
1.2.4 σ -Anéis de Conjuntos	63
1.2.5 σ -Álgebras de Conjuntos	64
1.2.6 Sistemas Monótonos de Conjuntos	65
1.2.7 Topologias	68
1.2.8 Filtros e Ultrafiltros	69
	APÊNDICES
1.A A Fórmula de Inversão de Möbius	72
2 Estruturas Algébricas Básicas	74
2.1 Estruturas Algébricas Básicas	75
2.1.1 Álgebras Universais	77
2.1.2 Reticulados e Álgebras Booleanas	79
2.1.3 Semigrupos, Monóides e Grupos	84
2.1.4 Corps	89
2.1.5 Espaços Vetoriais	92
2.1.6 Anéis, Módulos e Álgebras	95
2.1.6.1 Anéis	95
2.1.6.2 Módulos	96
2.1.6.3 Álgebras	96
2.1.7 Exemplos Especiais de Álgebras	99
2.1.7.1 Álgebras de Lie	99
2.1.7.2 Álgebras de Poisson	102
2.1.7.3 Álgebras de Jordan	102
2.1.7.4 Álgebras de Grassmann	103
2.1.7.5 Álgebras de Clifford	104
2.1.8 Mais sobre Anéis	104
2.1.9 Ações e Representações	106

2.1.9.1	Ações de Grupos	106
2.1.9.2	Representações de Grupos e de Álgebras	110
2.1.10	Morfismos, Homomorfismos, Epimorfismos, Isomorfismos, Monomorfismos, Endomorfismos e Automorfismos	111
2.1.11	Induzindo Estruturas Algébricas	113
2.2	Grupos. Estruturas e Construções Básicas	117
2.2.1	Cosets	117
2.2.2	Subgrupos Normais e o Grupo Quociente	119
2.2.2.1	Alguns Teoremas Sobre Isomorfismos e Homomorfismos de Grupos	121
2.2.2.2	O Centro de um Grupo. Centralizadores e Normalizadores	124
2.2.3	Grupos Gerados por Conjuntos. Grupos Gerados por Relações	126
2.2.4	O Produto Direto e o Produto Semi-Direto de Grupos. O Produto Tensorial de Grupos Abelianos	127
2.2.4.1	O Produto Direto (ou Soma Direta) de Grupos	127
2.2.4.2	O Produto Semi-Direto de Grupos	128
2.2.4.3	Produtos Tensoriais de Grupos Abelianos	132
2.3	Espaços Vetoriais. Estruturas e Construções Básicas	138
2.3.1	Bases Algébricas de um Espaço Vetorial	138
2.3.2	O Dual Algébrico de um Espaço Vetorial	142
2.3.3	Subespaços e Espaços Quocientes	149
2.3.4	Somas Diretas de Espaços Vetoriais	150
2.3.4.1	Formas Multilineares	151
2.3.5	Produtos Tensoriais de Espaços Vetoriais	153
2.3.5.1	Produtos Tensoriais, Duais Algébricos e Formas Multilineares	160
2.3.6	Produtos Tensoriais de um Espaço Vetorial com seu Dual	164
2.3.6.1	Tensores Associados a Formas Bilineares Simétricas Não-Degeneradas. Métricas	164
2.3.7	Produtos Tensoriais de um mesmo Espaço Vetorial. Os Espaços Simétrico e Antissimétrico	169
2.3.8	O Produto Tensorial de Módulos. Derivações	171
2.4	Anéis e Álgebras. Estruturas e Construções Básicas	173
2.4.1	Ideais em Anéis e Álgebras Associativas	173
2.4.1.1	Ideais em Anéis	173
2.4.1.2	Ideais em Álgebras Associativas	177
2.5	Espaços de Fock, Álgebras Tensoriais e Álgebras Exteriores	180
2.5.1	Álgebras Tensoriais	181
2.5.2	Álgebras Exteriores	182
2.6	Tópicos Especiais	185
2.6.1	O Grupo de Grothendieck	185
2.6.2	Grupóides	186
2.6.3	Quatérnios	188
	APÊNDICES	194
2.A	Prova de (2.150)	194
3	Formas Lineares e Normas em Espaços Vetoriais	195
3.1	Formas Lineares, Sesquilineares e Produtos Escalares em Espaços Vetoriais	195
3.1.1	Formas Multilineares	195
3.1.2	Formas Sesquilineares e as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Minkowski	200
3.1.3	Produtos Escalares	204
3.1.4	Exemplos	206
3.2	Normas em Espaços Vetoriais	207
3.3	Ortogonalidade, Conjuntos Ortonormais e o Procedimento de Gram-Schmidt	214
3.4	Formas Bilineares e Sesquilineares e Produtos Escalares em Espaços de Dimensão Finita	216

3.5	Estruturas Complexas sobre Espaços Vetoriais Reais	220
	APÊNDICES	227
3.A	Equivalência de Normas em Espaços Vetoriais de Dimensão Finita	227
3.B	Prova do Teorema de Fréchet, von Neumann e Jordan	228
II	Tópicos de Análise Real e Complexa	232
4	Recordações de Cálculo Vetorial em Três Dimensões	233
4.1	Alguns Operadores Diferenciais de Interesse	233
4.2	Teoremas Clássicos sobre Integrais de Volume e de Superfície	237
4.3	O Laplaciano em Sistemas de Coordenadas Gerais	239
4.4	Coordenadas Esféricas em n Dimensões	241
5	Funções Convexas	246
5.1	Funções Convexas. Definições e Propriedades Básicas	246
5.1.1	Funções Convexas de uma Variável	247
5.1.2	Funções Convexas de Várias Variáveis	257
5.2	Algumas Consequências da Convexidade e da Concauidade	260
5.2.1	A Desigualdade de Jensen	260
5.2.2	A Primeira Desigualdade de Young	261
5.2.3	Médias Geométricas, Aritméticas e Desigualdades Correlatas	263
5.2.3.1	A Desigualdade de Minkowski	266
6	Funções Geratrizes. Produtórias Complexas	268
6.1	Funções Geratrizes	268
6.1.1	Números de Bernoulli	274
6.2	Notas Sobre Convergência de Produtórias	276
6.2.1	Uma Dedução Elementar do Produto de Wallis	277
6.3	Exercícios Adicionais	280
7	A Função Gama de Euler	282
7.1	Introdução e Motivação	282
7.2	A Função Gama. Definição e Primeiras Propriedades	284
7.3	Outras Representações para a Função Gama	289
7.4	A Função Beta e Propriedades Adicionais da Função Gama	293
7.4.1	A Fórmula de Reflexão de Euler	294
7.4.2	A Fórmula de Duplicação de Legendre	298
7.5	Teoremas Sobre a Unicidade da Função Gama e Outros Resultados	299
7.5.1	O Teorema de Bohr-Mollerup	299
7.5.2	Fórmulas de Duplicação e Unicidade	300
7.5.3	O Teorema de Wielandt e Algumas de Suas Consequências	302
7.5.3.1	A Fórmula de Multiplicação de Gauss da Função Gama	303
7.6	A Aproximação de Stirling e suas Correções	305
7.6.1	A Aproximação de Stirling para Fatoriais e suas Correções. A Série de Gudermann	307
7.6.2	A Aproximação de Stirling para a Função Gama e suas Correções. A Série de Gudermann	312
7.7	Exercícios Adicionais	317
8	Um Mínimo Sobre A Função Zeta de Riemann	323
8.1	Origens	323
8.2	Definição	328

8.3	A Fórmula de Produto de Euler e Outras Relações Envolvendo ζ	329
8.4	Primeiras Relações de ζ com a Função Gama de Euler	333
8.5	Os Valores de ζ nos Inteiros	338
8.5.1	Um Interlúdio. A Fórmula $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -1/12$ (?) e Alguns de Seus Amigos	340
8.6	A Relação Funcional de Riemann	344
8.6.1	Uma Demonstração da Relação Funcional de Riemann	346
8.7	Exercícios Adicionais	348
	APÊNDICES	349
8.A	Prova do Teorema Fundamental da Aritmética	349

III Tópicos de Álgebra Linear

353

9	Tópicos de Álgebra Linear. I	354
9.1	Propriedades Básicas de Determinantes e Inversas de Matrizes	355
9.2	Noções Básicas sobre o Espectro de uma Matriz	365
9.2.1	Autovalores e Polinômios Característicos de Matrizes	365
9.2.2	Autovetores	368
9.2.3	O Traço de uma Matriz	371
9.2.3.1	Algumas Relações entre Determinantes e Traços de Matrizes	372
9.3	Polinômios de Matrizes	373
9.3.1	O Teorema de Hamilton-Cayley	375
9.3.1.1	O Teorema da Aplicação Espectral para Matrizes	380
9.4	Matrizes Diagonalizáveis e o Teorema Espectral	381
9.4.1	Diagonalização Simultânea de Matrizes	393
9.5	Matrizes Autoadjuntas, Normais e Unitárias	396
9.5.1	Matrizes Positivas	402
9.5.1.1	Matrizes Pseudo-Autoadjuntas e Quase-Autoadjuntas	404
9.5.2	O Teorema de Inércia de Sylvester. Superfícies Quadráticas	405
9.6	Matrizes Triangulares	410
9.7	O Teorema de Decomposição de Jordan e a Forma Canônica de Matrizes	412
9.7.1	Resultados Preparatórios	413
9.7.2	O Teorema da Decomposição de Jordan	417
9.7.3	Matrizes Nilpotentes e sua Representação Canônica	420
9.7.4	A Forma Canônica de Matrizes	423
9.7.5	Mais Alguns Resultados Sobre Matrizes Nilpotentes	426
9.8	Algumas Representações Especiais de Matrizes	428
9.8.1	A Decomposição Polar de Matrizes	428
9.8.2	A Decomposição em Valores Singulares	430
9.8.3	O Teorema da Triangularização de Schur	430
9.8.4	A Decomposição QR e a Decomposição de Iwasawa (“KAN”)	432
9.9	A Pseudoinversa de Moore-Penrose	435
9.9.1	Outras Propriedades da Pseudoinversa de Moore-Penrose	437
9.9.1.1	A Regularização de Tikhonov. Existência	440
9.9.1.2	A Pseudoinversa de Moore-Penrose e o Teorema Espectral	442
9.9.2	A Pseudoinversa de Moore-Penrose e Problemas de Otimização Linear	443
9.9.3	Existência e Decomposição em Valores Singulares	444
9.10	Produtos Tensoriais de Matrizes	446
9.11	Propriedades Especiais de Determinantes	448

9.11.1	Expansão do Polinômio Característico	448
9.11.2	A Desigualdade de Hadamard	448
9.12	Exercícios Adicionais	451
10	Tópicos de Álgebra Linear. II	456
10.1	Uma Topologia Métrica em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	457
10.2	Exponenciais, Logaritmos e Funções Analíticas de Matrizes	460
10.2.1	A Exponenciação de Matrizes e os Grupos $\text{GL}(\mathbb{C}, n)$ e $\text{GL}(\mathbb{R}, n)$	467
10.3	A Fórmula de Lie-Trotter e a Fórmula do Comutador	470
10.4	Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	473
10.4.1	Alguns Fatos Gerais sobre Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	473
10.4.2	Alguns Exemplos Específicos de Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	478
10.5	A Fórmula de Baker, Campbell e Hausdorff	483
10.6	A Fórmula de Duhamel e Algumas de suas Consequências	488
10.7	Exercícios Adicionais	493
IV	Equações Diferenciais	496
11	Equações Diferenciais Ordinárias. Uma Introdução	497
11.1	Definição e Alguns Exemplos	497
11.1.1	Equações Diferenciais Ordinárias Lineares	499
11.1.2	Equações Ordinárias de Segunda Ordem. Exemplos de Interesse	503
11.2	Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias	505
11.3	Discussão sobre Problemas de Valor Inicial	509
11.3.1	Problemas de Valor Inicial. Patologias e Exemplos a se Ter em Mente	511
11.3.2	Teoremas de Existência e Unicidade de Soluções	514
11.3.3	Soluções Globais	516
11.3.4	Dependência Contínua de Condições Iniciais e de Parâmetros	518
12	Alguns Métodos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias	519
12.1	Solução de Equações Ordinárias Lineares de Primeira Ordem	519
12.2	As Equações de Bernoulli e de Riccati	520
12.3	Integração de Equações Separáveis	522
12.4	O Método de Variação de Constantes	523
12.5	O Método de Substituição de Prüfer	524
12.6	O Método de Inversão	526
12.7	Solução de Equações Exatas e o Método dos Fatores Integrantes	527
12.8	Soluções das Equações de D'Alembert-Lagrange e Clairaut	531
13	Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares	535
13.1	Introdução	536
13.2	Unicidade e Existência de Soluções	536
13.2.1	Unicidade	536
13.2.2	Existência. A Série de Dyson	539
13.2.3	Propriedades de $D(s, t)$	543
13.3	Equações com Coeficientes Constantes	546
13.3.1	Alguns Exemplos e Aplicações	547
13.4	Perturbações de Sistemas Lineares	551
13.5	Mais sobre a Série de Dyson. Produtos de Tempo Ordenado	555

13.6	Sistemas de Equações Diferenciais Lineares no Plano Complexo	558
13.6.1	O Caso Analítico	558
13.6.2	Resolução por Séries de Potências	563
13.6.3	Sistemas com Pontos Singulares. Monodromia	564
13.6.4	Sistemas com Pontos Singulares Simples	573
13.7	Sistemas Provenientes de EDOs de Ordem m	576
13.7.1	Pontos Singulares Simples em EDO's de Ordem m	578
13.7.2	Singularidades no Infinito	582
13.7.3	Alguns Exemplos de Interesse	583
13.8	Equações Fuchsianas. Símbolos de Riemann	588
13.8.1	Equações Fuchsianas de Primeira Ordem	589
13.8.2	Equações Fuchsianas de Segunda Ordem	592
13.8.3	A Equação de Riemann-Papperitz. Símbolos de Riemann	600
13.8.3.1	Transformações de Simetria dos Símbolos de Riemann	603
13.8.3.2	Equações Fuchsianas com três pontos singulares e a equação hipergeométrica	606
13.9	Exercícios Adicionais	609
14	Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares no Plano Complexo	614
14.1	Soluções em Séries de Potências para Equações Regulares	615
14.1.1	A Equação do Oscilador Harmônico Simples	616
14.1.2	A Equação de Legendre	617
14.1.3	A Equação de Hermite	620
14.1.4	A Equação de Airy	622
14.1.5	A Equação de Tchebychev	624
14.1.6	O Caso de Equações Regulares Gerais	627
14.2	Solução de Equações Singulares Regulares. O Método de Frobenius	628
14.2.1	Equações Singulares Regulares. O Caso Geral	632
14.2.2	A Equação de Euler Revisitada	639
14.2.3	A Equação de Bessel	641
14.2.4	Equações Relacionadas à de Bessel. A Equação de Bessel Esférica	651
14.2.5	Equações Relacionadas à de Bessel. A Equação de Bessel Modificada	653
14.2.6	A Equação de Laguerre	654
14.2.7	A Equação Hipergeométrica	656
14.2.8	A Equação Hipergeométrica Confluente	659
14.3	Algumas Equações Associadas	662
14.3.1	A Equação de Legendre Associada	662
14.3.2	A Equação de Laguerre Associada	664
14.4	Exercícios Adicionais	666
	APÊNDICES	668
14.A	Prova da Proposição 14.1. Justificando os Polinômios de Legendre	668
14.B	Polinômios de Legendre: Provando (14.14)	669
14.C	Justificando os Polinômios de Hermite	671
14.D	Polinômios de Hermite: Provando (14.20)	672
14.E	Porque λ deve ser um Inteiro Positivo na Equação de Laguerre	673
14.F	Polinômios de Tchebychev: Obtendo (14.39) a Partir de (14.36)–(14.38)	675
15	Propriedades de Algumas Funções Especiais	677
15.1	Discussão Preliminar	677
15.1.1	Relações de Ortogonalidade	678

15.1.1.1	Condições de Contorno e a Origem das Relações de Ortogonalidade	683
15.1.2	Fórmulas de Rodrigues	687
15.2	Propriedades de Algumas Funções Especiais	689
15.2.1	Propriedades dos Polinômios de Legendre	689
15.2.2	Propriedades dos Polinômios de Legendre Associados	693
15.2.2.1	As Funções Harmônicas Esféricas	699
15.2.2.2	Fórmula de Adição de Funções Harmônicas Esféricas	701
15.2.3	Propriedades dos Polinômios de Hermite	705
15.2.3.1	As Funções de Hermite	708
15.2.4	Propriedades dos Polinômios de Tchebychev	712
15.2.5	Propriedades dos Polinômios de Laguerre	712
15.2.6	Propriedades dos Polinômios de Laguerre Associados	716
15.2.7	Algumas Propriedades das Funções de Bessel	719
15.2.7.1	Propriedades de Zeros das Funções de Bessel	729
15.2.7.2	Relações de Ortogonalidade das Funções de Bessel no Intervalo $[0, 1]$	731
15.2.7.3	Comentário sobre a equação de Bessel no intervalo $J = [0, \infty)$	737
15.2.8	Propriedades das Funções de Bessel Esféricas	737
15.2.8.1	Relações de Ortogonalidade Para as Funções de Bessel Esféricas no Intervalo $[0, 1]$	739
15.3	Exercícios Adicionais	741
	APÊNDICES	742
15.A	Provando (15.54) a Força Bruta	742
16	Completeza de Algumas Famílias de Funções	744
16.1	Completeza de Polinômios Ortogonais em Intervalos Compactos	744
16.2	Completeza dos Polinômios de Hermite	747
16.3	Completeza dos Polinômios Trigonométricos	748
16.4	Completeza das Funções de Bessel e Propriedades de seus Zeros	751
16.4.1	A Equação de Bessel como Problema de Sturm-Liouville	751
16.4.1.1	O Caso $\nu > 0$	752
16.4.1.2	O Caso $\nu > 0$ com $\beta_1 = -\nu\beta_2 \neq 0$	754
16.4.1.3	O Caso $\nu = 0$	755
16.4.2	Conclusões Sobre a Completeza das Funções de Bessel e Propriedades de seus Zeros	757
17	Rudimentos da Teoria das Equações a Derivadas Parciais	759
17.1	Definições, Notações e Alguns Exemplos	760
17.2	Algumas Classificações de Equações a Derivadas Parciais	768
17.2.1	Equações Lineares, Não-Lineares, Semi-Lineares e Quase-Lineares	768
17.2.2	Classificação de Equações de Segunda Ordem. Equações Parabólicas, Elípticas e Hiperbólicas	771
17.3	O Método de Separação de Variáveis	774
17.3.1	O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Lineares	774
17.3.2	O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Não-Lineares	777
17.4	Problemas de Cauchy e Superfícies Características. Definições e Exemplos Básicos	779
17.5	O Método das Características	786
17.5.1	Exemplos de Aplicação do Método das Características	791
17.5.2	Características. Comentários Adicionais	802
17.5.3	Sistemas de Equações Quase-Lineares de Primeira Ordem	803
17.5.3.1	Generalidades Sobre Problemas de Condição Inicial em Sistemas Quase-Lineares de Primeira Ordem	807
17.5.3.2	Sistemas Hiperbólicos Semi-Lineares de Primeira Ordem em Duas Variáveis	811
17.5.3.3	Soluções Ditas Simples de Sistemas Quase-Lineares, Homogêneos, de Primeira Ordem em Duas Variáveis	813

17.6	Alguns Teoremas de Unicidade de Soluções de Equações a Derivadas Parciais	817
17.6.1	Casos Simples. Discussão Preliminar	817
17.6.2	Unicidade de Solução para as Equações de Laplace e Poisson	820
17.6.3	Unicidade de Soluções. Generalizações	823
17.7	Exercícios Adicionais	830
18	Introdução ao Problema de Sturm-Liouville	831
18.1	Comentários Iniciais	831
18.2	O Problema de Sturm	836
18.2.1	Soluções Fundamentais e Funções de Green	837
18.2.2	A Função de Green. Resolvendo o Problema de Sturm	838
18.2.3	O Teorema de Green	841
18.3	O Problema de Sturm-Liouville	843
18.3.1	Propriedades Básicas dos Auto-Valores e Auto-Funções de Problemas de Sturm-Liouville	844
18.3.1.1	A Simplicidade dos Auto-Valores	845
18.3.1.2	O Lema de Green	846
18.3.1.3	Realidade dos Auto-Valores e Auto-funções. Ortogonalidade de Auto-funções	847
18.3.1.4	Propriedades dos Autovalores	848
18.3.2	A Equação Integral de Fredholm	852
18.3.3	Uma Aplicação do Problema de Sturm-Liouville	855
18.3.4	Métodos Variacionais de Determinação de Autovalores	858
18.4	Comentários Finais	860
18.4.1	Um Problema de Sturm-Liouville Singular	860
18.5	Exercícios Adicionais	863
	APÊNDICES	866
18.A	Prova do Teorema 18.1. Existência e Unicidade	866
18.B	Prova da Proposição 18.2	867
18.C	Comentário Sobre o Determinante Wronskiano	868
18.D	Demonstração do Teorema 18.3	869
18.D.1	Prova da Desigualdade (18.D.17)	872
19	Alguns Resultados sobre Equações Integrais	874
19.1	Descrição	874
19.2	O Método dos Determinantes de Fredholm	876
19.2.1	A Equação Integral de Fredholm Linear Não-Homogênea	876
19.2.2	A Equação Integral de Fredholm Linear Homogênea	880
19.3	Exercícios Adicionais	882
	APÊNDICES	883
19.A	Obtendo os Determinantes de Fredholm	883
20	Rudimentos da Teoria do Potencial	889
20.1	A Equação de Poisson em Três Dimensões	889
20.1.1	A Equação de Laplace em Domínios Limitados de \mathbb{R}^3 . O Problema de Dirichlet	893
20.1.2	A Equação de Poisson em \mathbb{R}^3	893
20.1.3	A Equação de Poisson Domínios Limitados de \mathbb{R}^3	894
20.1.3.1	O Caso de Condições de Dirichlet	894
20.1.3.2	O Caso de Condições de Neumann	895
20.1.3.3	Existência de Solução	895
20.1.4	Aplicações à Eletrostática: Capacitância	895

20.2	O Teorema de Decomposição de Helmholtz	895
20.2.1	Aplicações ao Eletromagnetismo	899
20.3	Propriedades Básicas de Funções Harmônicas em \mathbb{R}^3	900
21	Alguns Problemas Selecionados de Interesse Físico	902
21.1	Dedução de Algumas Equações Diferenciais de Interesse	903
21.1.1	Dedução Informal da Equação de Difusão de Calor	903
21.1.2	Dedução Informal da Equação da Corda Vibrante	907
21.2	As Equações de Helmholtz e de Laplace	913
21.2.1	Problemas em Duas Dimensões em Coordenadas Polares	915
21.2.2	Problemas em Três Dimensões em Coordenadas Esféricas	917
21.3	Problemas de Difusão em uma Dimensão	920
21.3.1	A Evolução da Temperatura de uma Barra Finita	920
21.3.2	A Evolução da Temperatura de uma Barra Infinita	924
21.3.3	A Evolução da Temperatura de uma Barra Semi-Infinita	929
21.4	A Equação de Ondas	934
21.4.1	A Equação de Ondas em $1 + 1$ Dimensões	935
21.4.2	Interlúdio: Ondas Caminhantes e a Equação do Telégrafo	938
21.4.3	Outro Interlúdio: Sólitons	940
21.4.3.1	Sólitons na Equação de Korteweg-de Vries	941
21.4.3.2	Sólitons na Equação de Sine-Gordon	943
21.4.3.3	Sólitons no Modelo de Poço-Duplo	944
21.4.3.4	Sólitons na Equação de Schrödinger Não-Linear	946
21.4.4	A Equação de Ondas e Transformadas de Fourier	950
21.4.4.1	A Equação de Ondas em $3 + 1$ Dimensões. A Solução de Kirchhoff	953
21.4.4.2	A Equação de Ondas em $2 + 1$ Dimensões	954
21.5	O Problema da Corda Vibrante	956
21.5.1	Corda Vibrante Homogênea	957
21.5.2	O Problema da Corda Homogênea Pendurada	959
21.5.3	Corda Vibrante Não-Homogênea	962
21.5.4	O Problema da Membrana Retangular Homogênea	965
21.6	O Problema da Membrana Circular Homogênea	966
21.7	O Oscilador Harmônico na Mecânica Quântica e a Equação de Hermite	968
21.8	O Átomo de Hidrogênio e a Equação de Laguerre Associada	971
21.9	Propagação de Ondas em Tanques Cilíndricos	973
21.10	Equações Hiperbólicas Lineares em $1+1$ Dimensões e Equações Integrais	981
21.11	Aplicações do Método da Função de Green	988
21.11.1	A Equação de Poisson em Três Dimensões	989
21.11.2	A Equação de Difusão Não-Homogênea	990
21.11.3	A Equação de Ondas Não-Homogênea em $n + 1$ -Dimensões	992
21.11.3.1	A Equação de Ondas Não-Homogênea em $3 + 1$ -Dimensões	996
21.11.3.2	Aplicações à Eletrodinâmica. Potenciais Retardados	999
21.11.3.3	A Equação de Ondas Não-Homogênea em $2 + 1$ -Dimensões	1001
21.11.3.4	A Equação de Ondas Não-Homogênea em $1 + 1$ -Dimensões	1004
21.12	Exercícios Adicionais	1005
21.12.1	Problemas Selecionados de Eletrostática	1005
21.12.2	Equação de Difusão em uma Dimensão	1008
21.12.3	Equação de Ondas em uma Dimensão	1010
21.12.4	Modos de Vibração de Membranas	1016

21.12.5 Problemas sobre Ondas e Difusão em Três Dimensões Espaciais	1019
21.12.6 Problemas Envolvendo Funções de Green	1021

APÊNDICES 1023

21.A Duas Transformadas de Laplace	1023
--	------

V Grupos 1026

22 Grupos. Alguns Exemplos 1027

22.1 O Grupo de Permutações	1028
22.1.1 Ciclos, Transposições e Transposições Elementares	1029
22.2 Alguns Grupos Matriciais	1032
22.2.1 Os Grupos $GL(n)$ e $SL(n)$	1032
22.2.2 O Grupo de Borel e o Grupo de Heisenberg	1035
22.2.2.1 O Grupo de Heisenberg	1035
22.2.3 Grupos Associados a Formas Bilineares e Sesquilineares	1042
22.2.4 Os Grupos Ortogonais	1046
22.2.5 Os Grupos Unitários	1047
22.3 Os Grupos $SO(2)$, $SO(3)$, $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{C})$	1048
22.3.1 Os Grupos $SO(2)$, $O(2)$, $SO(1, 1)$ e $O(1, 1)$	1048
22.3.2 O Grupo $SO(3)$	1052
22.3.2.1 Mais Propriedades das Matrizes de $SO(3)$	1060
22.3.2.2 $SO(3)$ e os Ângulos de Euler	1063
22.3.3 O Grupo $O(3)$	1068
22.3.4 O Grupo $SU(2)$	1071
22.3.5 A Relação Entre $SO(3)$ e $SU(2)$	1076
22.3.6 O Grupo $SL(2, \mathbb{C})$	1081
22.4 Generalidades Sobre os Grupos $SU(n)$ e $SO(n)$	1082
22.4.1 Os Grupos $SU(n)$	1082
22.4.1.1 Um Pouco Sobre o Grupo $SU(3)$	1085
22.4.2 Os Grupos $SO(n)$	1086
22.5 O Grupo Afim e o Grupo Euclidiano	1091
22.6 O Grupo de Lorentz em $3 + 1$ -Dimensões	1095
22.6.1 O Espaço-Tempo, a Noção de Intervalo e a Estrutura Causal	1095
22.6.2 A Invariância do Intervalo	1100
22.6.3 O Grupo de Lorentz	1103
22.6.4 Alguns Subgrupos do Grupo de Lorentz	1104
22.6.5 A Estrutura do Grupo de Lorentz	1107
22.6.6 Os Geradores do Grupo de Lorentz	1112
22.6.7 O Grupo de Galilei	1117
22.7 O Grupo de Poincaré	1119
22.8 Ações de Grupos em Espaços de Funções	1123
22.9 Exercícios Adicionais	1126

APÊNDICES 1128

22.A Extensão do Lema 22.1 e do Teorema 22.7 ao Caso Complexo	1128
22.B Prova do Teorema 22.10	1130

23 Notas Sobre Mecânica Clássica 1141

23.1 Sistemas de Referência e suas Transformações na Mecânica Clássica. Acelerações Inerciais	1142
---	------

23.2	Mecânica de Pontos Materiais	1152
23.3	Mecânica de Corpos Rígidos	1160
23.3.1	Propriedades do Tensor Momento de Inércia	1162
23.3.2	As Equações Dinâmicas	1164
23.3.3	Piões. Algumas Soluções	1170
23.4	Ângulos de Euler na Mecânica de Corpos Rígidos	1174
23.4.1	Usos dos Ângulos de Euler. O Pião de Lagrange	1175
23.5	Mecânica Analítica. Um Mínimo	1182
23.5.1	O Formalismo Lagrangiano	1182
23.5.1.1	A Invariância das Equações de Euler-Lagrange por Mudanças de Sistemas de Referência	1184
23.5.1.2	Modos Normais de Oscilação	1186
23.5.1.3	Sistemas de Coordenadas Não-Inerciais no Formalismo Lagrangiano	1190
23.5.2	O Formalismo Hamiltoniano	1192
23.5.2.1	Derivação Variacional das Equações de Hamilton	1194
23.5.3	Colchetes de Poisson	1196
23.5.3.1	Transformações Canônicas	1201
23.6	Exercícios Adicionais	1211
24	Grupos de Lie e Álgebras de Lie. Uma Breve Introdução	1218
24.1	Variedades e Grupos de Lie	1218
24.2	Breves Considerações sobre Grupos Topológicos	1220
24.3	Grupos de Lie Matriciais	1222
24.3.1	Uma Topologia Métrica em $GL(\mathbb{C}, n)$	1223
24.3.2	O Grupo de Lie $GL(\mathbb{C}, n)$	1223
24.3.3	Subgrupos Uniparamétricos e seus Geradores	1225
24.3.4	Subgrupos Uniparamétricos e Álgebras de Lie	1228
24.3.5	Subgrupos Fechados de $GL(\mathbb{C}, n)$	1232
24.4	A Relação entre Grupos de Lie Matriciais e suas Álgebras de Lie	1235
24.4.1	Álgebras de Lie Nilpotentes, Solúveis, Simples e Semi-Simples	1236
24.4.2	Questões sobre a Exponenciação de Álgebras de Lie	1239
24.4.3	Alguns Exemplos Especiais	1241
25	Uma Breve Introdução à Teoria das Representações de Grupos	1247
25.1	Representações de Grupos	1247
25.2	Médias Invariantes. A Medida de Haar	1253
25.3	Representações de Grupos Compactos	1255
25.3.1	Representações de Grupos Compactos em Espaços de Hilbert Separáveis	1256
25.4	O Teorema de Peter-Weyl	1262
25.5	Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de $SU(2)$	1271
25.6	Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de \mathcal{L}_+^\uparrow	1276
25.7	Exercícios Adicionais	1279
26	Spinores e o Grupo de Lorentz	1280
26.1	$SL(2, \mathbb{C})$ e o Grupo de Lorentz	1280
26.1.1	Ações de $SL(2, \mathbb{C})$ e o Grupo de Lorentz	1283
26.2	Spinores	1287
26.2.1	Spinores	1291
26.2.1.1	Produtos Escalares Invariantes para Spinores	1292
26.2.1.2	Spinores de Dirac e a Equação de Dirac	1299

APÊNDICES 1304

26.A Um Isomorfismo entre $SL(2, \mathbb{C}) / \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$ e \mathcal{L}_+^\uparrow 1304

VI Topologia Geral, Teoria da Medida e Integração **1312**

27 Espaços Métricos **1313**

27.1 Métricas e Espaços Métricos 1314
 27.1.1 Completeza e o Completamento Canônico 1322
 27.2 A Noção de Topologia de Espaços Métricos 1329
 27.3 Pseudométricas 1332
 27.4 Espaços de Funções Limitadas e Completeza 1334
 27.5 Espaços de Banach e de Hilbert 1337
 27.5.1 Espaços de Banach em Espaços de Sequências 1339
 27.6 Teorema do Melhor Aproximante em Espaços Normados Uniformemente Convexos 1350
 27.7 Exercícios Adicionais 1355

APÊNDICES 1358

27.A Números Reais e p -ádicos 1358
 27.A.1 A Construção de Cantor dos Números Reais 1358
 27.A.2 Outros Completamentos dos Racionais. Números p -ádicos 1361
 27.B Aproximações para π 1364

28 O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas de Suas Consequências **1370**

28.1 O Teorema de Ponto Fixo de Banach 1371
 28.1.1 Generalizações do Teorema de Ponto Fixo de Banach 1373
 28.2 Diversas Aplicações do Teorema de Ponto Fixo de Banach 1376
 28.2.1 Aplicação a Equações Numéricas. O Método de Newton 1376
 28.2.2 Aplicação a Sistemas Lineares. O Método de Jacobi 1379
 28.2.3 Aplicação às Equações Integrais de Fredholm e de Volterra 1380
 28.2.4 Aplicações à Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias 1387
 28.2.4.1 O Teorema de Picard-Lindelöf 1387
 28.2.4.2 Generalizando o Teorema de Picard-Lindelöf. Soluções Globais 1391
 28.2.4.3 Um Teorema de Comparação de Soluções de EDO's 1392
 28.3 O Teorema da Função Implícita e o Teorema da Função Inversa 1394
 28.3.1 O Teorema da Função Implícita 1395
 28.3.2 O Teorema da Função Inversa 1399

APÊNDICES 1400

28.A O Lema de Grönwall 1400

29 Espaços Topológicos e Espaços Mensuráveis. Definições e Propriedades Básicas **1401**

29.1 Definições, Propriedades Elementares e Exemplos 1401
 29.2 Algumas Construções Especiais e Exemplos 1407
 29.2.1 Topologias Geradas por Famílias de Conjuntos 1407
 29.2.1.1 A Topologia de Sorgenfrey 1408
 29.2.2 σ -Álgebras Geradas por Famílias de Conjuntos 1410
 29.2.3 Bases de Espaços Topológicos 1411
 29.2.4 Topologias e σ -Álgebras Induzidas 1413
 29.2.5 Topologias e σ -Álgebras Produto 1415
 29.3 Interior e Fecho de Conjuntos em Espaços Topológicos 1415
 29.3.1 Fecho de Conjuntos em Espaços Métricos 1422

29.4	Espaços Topológicos Separáveis e Segundo-Contáveis	1423
29.4.1	A Segundo-Contabilidade como Propriedade Herdada	1426
30	Medidas	1428
30.1	O Problema da Teoria da Medida	1428
30.2	Medidas de Conjuntos. Definição, Exemplos e Propriedades Básicas	1431
30.3	Construindo Medidas. A Medida Exterior e o Teorema de Carathéodory	1434
30.3.1	Medidas Exteriores Métricas e Conjuntos Borelianos	1441
30.4	Um Esquema de Construção de Medidas Exteriores	1444
30.5	Medidas sobre Anéis e suas Extensões	1446
	APÊNDICES	1451
30.A	Prova das Fórmulas de Inclusão-Exclusão	1451
31	A Medida de Lebesgue e a Medida de Hausdorff	1453
31.1	A Construção da Medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n	1453
31.1.1	A σ -álgebra de Borel em \mathbb{R}^n e a Medida de Borel-Lebesgue	1455
31.2	As Medidas de Hausdorff	1457
31.3	Conjuntos de Cantor	1461
31.4	Bases de Hamel e a Medida de Lebesgue	1470
31.5	Exercícios Adicionais	1472
32	Continuidade e Convergência em Espaços Topológicos	1477
32.1	Primeiras Definições	1477
32.2	Espaços Hausdorff	1479
32.3	Redes e o Caso de Espaços Topológicos Gerais	1480
32.3.1	Redes em Espaços Métricos	1483
32.4	O Limite do Ínfimo e o Limite do Supremo	1484
32.5	Continuidade de Funções em Espaços Topológicos	1487
32.5.1	Outras Noções Associadas à de Continuidade	1489
32.5.1.1	Homeomorfismos e Mergulhos Topológicos	1490
32.5.2	Outras Caracterizações do Conceito de Continuidade em Espaços Topológicos	1491
32.5.3	Continuidade e Convergência	1492
33	Elementos da Teoria da Integração	1495
33.1	Comentários Preliminares	1495
33.2	A Integração no Sentido de Riemann	1497
33.2.1	A Integral de Riemann Imprópria	1505
33.2.2	Diferenciação e Integração em Espaços de Banach	1507
33.3	A Integração no Sentido de Lebesgue	1511
33.3.1	Funções Mensuráveis e Funções Simples	1511
33.3.2	A Integral de Lebesgue. Integração em Espaços Mensuráveis	1516
33.3.3	A Integral de Lebesgue e sua Relação com a de Riemann	1523
33.3.4	Teoremas Básicos sobre Integração e Convergência	1526
33.3.5	Alguns Resultados de Interesse	1528
33.4	Os Espaços \mathcal{L}_p e L_p	1530
33.4.1	As Desigualdades de Hölder e de Minkowski	1532
33.4.2	O Teorema de Riesz-Fischer. Completeza	1535
	APÊNDICES	1536
33.A	Mais sobre a Integral de Darboux	1536
33.A.1	Equivalência das Definições II e III da Integrabilidade de Riemann	1537

33.B	Caracterizações e Propriedades de Funções Mensuráveis	1538
33.C	Prova do Lema 33.3	1543
33.D	Demonstração de (33.26)	1544
33.E	A Equivalência das Definições (33.27) e (33.28)	1544
33.F	Prova do Teorema da Convergência Monótona	1546
33.G	Prova do Lema de Fatou	1547
33.H	Prova do Teorema da Convergência Dominada	1548
33.I	Prova dos Teoremas 33.2 e 33.3	1549
33.J	Prova das Desigualdades de Hölder e Minkowski	1551
33.K	Prova do Teorema de Riesz-Fischer	1553
34	Alguns Tópicos Especiais em Topologia e Análise	1555
34.1	Uma Coletânea de Definições	1556
34.1.1	Conjuntos Densos em Espaços Topológicos	1556
34.1.2	A Noção de Conjunto Conexo em Espaços Topológicos	1557
34.2	Axiomas de Separabilidade	1561
34.2.1	Algumas Propriedades de Separação em Espaços Métricos	1561
34.2.2	Postulados de Separabilidade em Espaços Topológicos	1562
34.2.3	O Lema de Urysohn	1570
34.2.3.1	O Teorema de Extensão de Tietze	1575
34.2.4	A Propriedade de Hausdorff como Propriedade Herdada	1578
34.3	Compacidade, Compacidade Local e Paracompacidade	1579
34.3.1	Algumas Definições Gerais	1579
34.3.2	Espaços de Lindelöf. Um Mínimo	1581
34.3.3	Compacidade. Definições e Propriedades em Espaços Topológicos Gerais	1582
34.3.3.1	Compacidade em Espaços Hausdorff	1585
34.3.3.2	Compacidade em Espaços Métricos	1589
34.3.3.3	Compacidade em \mathbb{R}^n	1596
34.3.3.4	Compacidade na Reta de Sorgenfrey	1597
34.3.4	Os Teoremas de Ascoli e de Arzelà	1599
34.3.4.1	Equilimitação e Equicontinuidade de Famílias de Funções	1599
34.3.4.2	Os Teoremas de Ascoli e de Arzelà para Famílias de Funções de um Compacto sobre um Espaço Métrico	1601
34.3.4.3	O Teorema de Peano	1603
34.3.5	Espaços Compactos Hausdorff e Partições da Unidade	1607
34.3.5.1	Uma Excursão pelas Variedades Topológicas Compactas Hausdorff	1608
34.3.6	Compacidade Local	1611
34.3.6.1	Espaços Localmente Compactos Hausdorff	1612
34.3.7	Paracompacidade	1614
34.3.7.1	Espaços Paracompactos Hausdorff	1614
34.4	As Noções de Topologia Inicial e de Topologia Final	1619
34.4.1	A Topologia Inicial de uma Coleção de Funções	1619
34.4.2	A Topologia Final de uma Coleção de Funções	1621
34.4.3	A Topologia Quociente	1622
34.5	Somas de Espaços Topológicos	1623
34.6	A Topologia Produto de Espaços Topológicos	1623
34.6.1	Alguns Resultados Envolvendo Compacidade e Topologia Produto	1625
34.6.2	O Cubo de Hilbert	1627
34.7	Teoremas de Metrizabilidade	1629
34.7.1	O Teorema de Metrização de Urysohn e Tikhonov	1631

34.8	O Teorema da Categoria de Baire	1634
34.9	A Métrica de Hausdorff	1635
	APÊNDICES	1638
34.A	Prova da Proposição 34.35	1638

VII Geometria Diferencial e Topologia Diferencial 1641

35	Variedades	1642
35.1	Variedades Topológicas	1643
35.1.1	Construindo Variedades Topológicas	1648
35.2	Variedades Diferenciáveis	1650
35.2.1	Partições da Unidade Diferenciáveis	1654
35.2.2	A Noção de Espaço Tangente	1656
35.2.2.1	O Espaço Cotangente	1662
35.2.3	Tensores em Variedades	1664
35.2.3.1	Traços de Tensores. Contração de Índices	1666
35.2.3.2	Transposição de Tensores	1668
35.2.4	Aplicações Entre Variedades Diferenciáveis	1669
35.2.4.1	A Diferencial de Uma Aplicação Entre Variedades. “Pullback” e “Pushforward”	1669
35.2.4.2	Imersões, Mergulhos e Subvariedades	1674
35.3	Campos Vetoriais e Tensoriais	1676
35.3.1	A Derivada de Lie	1679
35.4	Exemplos de Variedades Topológicas e Diferenciáveis	1684
35.4.1	Uma Variedade Topológica Paracompacta não Segundo-Contável	1684
35.4.2	O Gráfico de uma Função Real em \mathbb{R}^n	1686
35.4.2.1	Cones. E Um Estudo de Caso	1688
35.4.3	Superfícies Regulares em \mathbb{R}^n	1689
35.4.4	As Esferas S^n	1692
35.4.5	Toros (e Algumas Generalizações)	1694
35.4.6	Espaços Projetivos Reais	1697
35.4.7	Grupos de Lie	1700
35.4.8	Fibrados, Fibrados Vetoriais e Principais	1700
	APÊNDICES	1702
35.A	Derivadas de Lie. Prova das Relações (35.71) e (35.82)	1702
35.B	Derivadas de Lie. Prova da Relação (35.91)	1703
36	Noções Geométricas em Variedades	1706
36.1	Tensores Métricos Riemannianos e Semi-Riemannianos	1707
36.1.1	Transposição em Relação a Tensores Métricos	1716
36.2	Conexões Afins	1720
36.2.1	Conexões Afins em Campos Vetoriais	1720
36.2.1.1	Conexões Afins em Campos Tensoriais	1726
36.2.2	O Tensor de Torção	1729
36.2.3	Tipos Especiais de Conexões Afins	1730
36.2.3.1	Conexões Simétricas (ou Livres de Torção)	1730
36.2.3.2	Conexões Métricas (ou Riemannianas)	1732
36.2.3.3	Conexões de Levi-Civita	1738
36.2.3.4	Conexões de Weyl e a Origem das Transformações de Calibre	1738

36.2.4	Gradiente, Divergente e Laplaciano	1741
36.3	O Tensor de Curvatura	1744
36.3.1	As Identidades de Bianchi e Outras Propriedades	1747
36.3.2	O Tensor de Curvatura em Coordenadas Locais	1749
36.3.3	A Curvatura Seccional	1751
36.3.4	O Tensor de Ricci e a Curvatura Escalar	1754
36.3.5	Comentário Sobre a Segunda Identidade de Bianchi e as Equações de Einstein	1757
36.4	Geodésicas	1760
36.4.1	O Lema de Gauss	1765
36.4.2	Pontos Conjugados e a Equação de Jacobi	1768
36.4.2.1	A Equação de Jacobi	1769
36.4.2.2	Pontos Conjugados	1771
36.5	Campos de Killing	1772
36.6	A Estrutura Causal de Variedades Lorentzianas	1777
36.6.1	A Identidade de Raychaudhuri	1779
	APÊNDICES	1789
36.A	Demonstração de Algumas Propriedades do Tensor de Curvatura	1789
36.A.1	Prova da Proposição 36.6	1789
36.A.2	Prova da Primeira Identidade de Bianchi, Proposição 36.8	1790
36.A.3	Prova da Segunda Identidade de Bianchi, Proposição 36.9	1791
36.A.4	Prova da Proposição 36.10	1793
36.A.5	Prova da Proposição 36.11	1794
37	Formas Diferenciais	1796
37.1	Formas Diferenciais	1796
37.1.1	A Derivada Exterior de Formas	1800
37.1.2	Formas Exatas e Formas Fechadas	1802
37.1.2.1	O Lema de Poincaré	1805
37.2	Dualidade de Hodge	1809
37.2.1	O Mapa Dual de Hodge	1809
37.2.2	A Coderivada Exterior	1812
37.2.3	O Operador de Laplace-de Rham	1814
37.2.3.1	Definindo Gradiente, Divergente e Rotacional Via Formas Diferenciais	1814
37.2.4	Formas Harmônicas. O Teorema de Decomposição de Hodge e o Teorema de Hodge	1819
	APÊNDICES	1822
37.A	Os Símbolos de Levi-Civita	1822
37.B	Composição de Mapas de Hodge. Demonstração de (37.39)	1825
37.C	Demonstração de (37.41) e (37.42)	1826
37.D	Demonstração de (37.50)	1827
VIII	Séries e Transformadas de Fourier. Distribuições	1829
38	Aproximação de Funções. Aproximações Polinomiais e Séries de Fourier	1830
38.1	Noções de Convergência para Sequências de Funções	1831
38.1.1	Importância da Convergência Uniforme	1832
38.1.1.1	Troca de Ordem entre Limites e Integrais	1833
38.1.1.2	Troca de Ordem entre Limites e Derivadas	1835
38.1.1.3	Troca de Ordem entre Derivadas e Integrais	1835

38.2	Sequências Delta de Dirac	1837
38.3	Aproximação de Funções por Polinômios	1843
38.3.1	O Teorema de Weierstrass	1843
38.3.2	O Teorema de Taylor	1850
38.4	Aproximação de Funções por Polinômios Trigonométricos	1857
38.4.1	Preliminares	1858
38.4.2	A Série de Fourier de Funções Periódicas de Período T	1860
38.4.3	Polinômios Trigonométricos e Funções Contínuas e Periódicas	1862
38.4.4	Convergência de Séries de Fourier	1867
38.4.4.1	Séries de Fourier em Senos ou Cossenos para Funções Definidas em Intervalos Compactos	1873
38.4.5	Revisitando a Aproximação Uniforme de Funções Contínuas e Periódicas por Polinômios Trigonométricos	1876
38.4.6	Séries de Fourier e o Espaço de Hilbert $L^2([-\pi, \pi], dx)$	1880
38.5	O Teorema de Stone-Weierstrass	1881
38.6	Exercícios Adicionais	1886
	APÊNDICES	1894
38.A	Prova do Teorema de Weierstrass Usando Polinômios de Bernstein	1894
38.B	A Demonstração de Weierstrass do Teorema de Weierstrass	1898
39	Introdução às Distribuições e às Transformadas de Fourier	1900
39.1	Funções de Schwartz e Funções de Teste	1901
39.1.1	Funções Gaussianas	1912
39.2	Transformadas de Fourier	1914
39.2.1	Transformadas de Fourier no Espaço de Schwartz	1918
39.2.1.1	As Relações de Weyl e a Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff	1921
39.2.1.2	A Transformada de Fourier de Funções Gaussianas	1924
39.2.1.3	Invertibilidade da Transformada de Fourier no Espaço de Schwartz	1927
39.2.1.4	Transformadas de Fourier, Produtos de Convolução e Identidade de Plancherel	1929
39.2.1.5	O “Princípio de Incerteza” para Transformadas de Fourier	1932
39.2.2	A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$	1933
39.2.2.1	Mais Algumas Transformadas de Fourier Relevantes em Aplicações	1936
39.2.2.2	A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ e suas Propriedades Espectrais	1939
39.2.3	Transformadas de Fourier: Tópicos Suplementares	1941
39.2.3.1	A Fórmula de Soma de Poisson	1942
39.2.3.2	Usos da Fórmula de Soma de Poisson. A Função θ de Jacobi	1944
39.2.3.3	Transformadas de Fourier e Médias Angulares	1945
39.3	Distribuições e Distribuições Temperadas	1950
39.3.1	Primeiros Exemplos de Distribuições	1952
39.3.2	Outros Exemplos de Distribuições	1958
39.3.2.1	A Distribuição Valor Principal	1958
39.3.2.2	Distribuições do Tipo Parte Finita de Hadamard	1960
39.3.3	Algumas Relações Úteis Envolvendo Distribuições	1963
39.3.4	Derivadas de Distribuições	1967
39.3.4.1	Alguns Exemplos de Derivadas de Distribuições	1970
39.3.4.2	Cálculo da Derivada de Algumas Distribuições de Interesse	1971
39.3.5	Alguns Resultados Estruturais sobre Distribuições	1973
39.3.6	Transformadas de Fourier de Distribuições Temperadas	1974
39.3.6.1	Cálculo de Transformadas de Fourier de Algumas Distribuições Temperadas	1974
39.3.7	Produtos de Distribuições	1978
39.3.7.1	Produto de Convolução de Distribuições	1983

39.4	Equações Diferenciais Distribucionais, Soluções Fundamentais e Funções de Green	1984
39.4.1	Soluções Fundamentais	1987
39.4.1.1	Soluções Fundamentais como Funções Generalizadas	1988
39.4.1.2	O Caso de Operadores Lineares a Coeficientes Constantes	1990
39.4.1.3	Alguns Exemplos Fisicamente Relevantes	1995
39.5	Exercícios Adicionais	1999
	APÊNDICES	2005
39.A	Prova de (39.21)	2005
39.B	Prova da Proposição 39.15	2006

IX Análise Funcional

2012

40	Noções Básicas Sobre Espaços de Hilbert	2013
40.1	Aspectos Topológicos Básicos de Espaços de Hilbert	2014
40.2	Aspectos Geométricos Básicos de Espaços de Hilbert	2016
40.2.1	Funcionais Lineares e o Dual Topológico de um Espaço de Hilbert	2020
40.2.1.1	O Teorema da Representação de Riesz	2021
40.2.2	Conjuntos Ortonormais Completos em Espaços de Hilbert	2022
40.2.3	Conjuntos Totais	2034
40.2.3.1	Um Exemplo no Espaço $L^2(\mathbb{R}, dx)$	2034
40.3	Somas Diretas e Produtos Tensoriais de Espaços de Hilbert. Espaços de Fock	2038
40.3.1	Somas Diretas de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert	2038
40.3.2	Somas Diretas de uma Coleção Contável de Espaços de Hilbert	2039
40.3.3	Produtos Tensoriais de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert	2042
40.3.4	Os Espaços de Fock	2046
40.4	Exercícios Adicionais	2048
	APÊNDICES	2049
40.A	Um Exemplo: os Sistemas de Rademacher e de Walsh	2049
41	Operadores Lineares Limitados em Espaços de Banach e de Hilbert	2052
41.1	Operadores Lineares em Espaços Vetoriais Normados	2054
41.1.1	Espaços de Banach de Operadores	2058
41.1.2	O Dual Topológico de um Espaço de Banach	2062
41.1.3	O Teorema de Hahn-Banach e Algumas Consequências do Mesmo	2066
41.1.4	O Teorema de Banach-Steinhaus ou Princípio de Limitação Uniforme	2071
41.1.5	O Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado	2072
41.2	Operadores Limitados em Espaços de Hilbert	2079
41.2.1	A Noção de Operador Adjunto em Espaços de Hilbert	2080
41.2.2	Operadores Autoadjuntos, Normais, Unitários, Projetores Ortogonais e Isometrias Parciais	2083
41.3	Rudimentos da Teoria das Álgebras de Banach e Álgebras C^*	2091
41.3.1	Álgebras de Banach	2091
41.3.2	Alguns Fatos Estruturais sobre Álgebras C^*	2094
41.3.2.1	Álgebras com Involução e a Unidade	2095
41.3.3	A Inversa de Operadores Limitados	2098
41.3.4	O Espectro de Operadores em Álgebras de Banach	2103
41.3.5	O Operador Resolvente e Propriedades Topológicas do Espectro	2104
41.3.5.1	O Teorema da Aplicação Espectral	2107
41.3.6	O Raio Espectral	2108

41.3.7	O Homomorfismo de Gelfand em Álgebras C^*	2112
41.3.8	Raízes Quadradas de Operadores em Álgebras de Banach	2114
41.3.9	Elementos Positivos de Álgebras C^*	2116
41.3.9.1	Relação de Ordem Decorrente da Positividade em Álgebras C^*	2120
41.3.10	Aproximantes da Unidade em Álgebras C^*	2122
41.3.10.1	Cosets por Bi-Ideais em Álgebras C^*	2125
41.4	Álgebras de von Neumann. Um Mínimo	2129
41.4.1	O Teorema do Bicomutante	2131
41.5	Um Pouco sobre Estados e Representações de Álgebras C^*	2134
41.5.1	Morfismos Entre Álgebras C^*	2134
41.5.2	Representações de Álgebras C^*	2136
41.5.2.1	Estados em Álgebras C^* e a Representação GNS	2138
41.5.2.2	Estados Puros, de Mistura e a Irredutibilidade de Representações GNS	2144
41.5.3	Exemplos em Álgebras de Matrizes. Construção GNS. Estados Puros e a Entropia de von Neumann	2146
41.5.3.1	A Entropia de von Neumann	2150
41.5.3.2	A Construção GNS em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	2154
41.6	O Espectro de Operadores em Espaços de Banach	2156
41.6.1	O Espectro de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert	2160
41.6.2	Espectro em Espaços de Banach. Alguns Exemplos e Contraexemplos	2162
41.7	O Lema da Raiz Quadrada em Espaços de Hilbert	2166
41.7.1	A Decomposição Polar de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert	2171
41.8	Operadores Compactos em Espaços de Banach e de Hilbert	2173
41.8.1	Alguns Fatos Gerais Sobre o Espectro de Operadores Compactos	2182
41.8.1.1	O Teorema da Alternativa de Fredholm	2184
41.8.2	O Teorema Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos	2190
41.9	O Teorema Espectral para Operadores Limitados Autoadjuntos em Espaços de Hilbert	2196
41.9.1	O Cálculo Funcional Contínuo e o Homomorfismo de Gelfand	2196
41.9.2	Generalizando o Cálculo Funcional Contínuo. As Medidas Espectrais	2198
41.9.3	Medidas com Valores em Projeções Ortogonais	2205
41.9.4	Os Projetores Espectrais e o Teorema Espectral	2209
41.10	Operadores Tipo Traço e de Hilbert-Schmidt	2212
41.10.1	Operadores Tipo Traço, ou Traciais	2214
41.10.1.1	O Traço de um Operador Tracial	2218
41.10.2	Operadores de Hilbert-Schmidt	2221
41.10.3	Operadores Traciais e de Hilbert-Schmidt e os Operadores Compactos	2229
41.10.4	Operadores de Hilbert-Schmidt e Operadores Integrais	2230
41.10.5	O Teorema de Lidskii. Traço e Espectro de Operadores Traciais	2234
	APÊNDICES	2235
41.A	Prova do Teorema 41.19	2235
41.B	Um Lema Sobre Espaços Normados Devido a F. Riesz	2237
42	Operadores Lineares Não-Limitados em Espaços de Hilbert	2239
42.1	Classificando Operadores Não-Limitados	2240
42.1.1	Operadores Fechados	2241
42.1.2	Operadores Fecháveis	2244
42.1.3	O Adjunto de um Operador Linear	2245
42.1.3.1	Operadores Simétricos, Autoadjuntos e Essencialmente Autoadjuntos	2250
42.2	Espaços de Deficiência e Extensões Autoadjuntas de Operadores Simétricos	2256
42.2.1	Considerações Preliminares	2256

42.2.2	Classificação de Extensões Simétricas Fechadas de Operadores Simétricos Fechados. Extensões Autoadjuntas	2257
42.3	Formas Quadráticas e Alguns de Seus Usos	2262
42.3.1	Alguns Usos de Formas Quadráticas	2269
42.3.1.1	A Forma de Soma	2269
42.3.1.2	A Extensão de Friedrichs	2269
42.4	Bestiário de Exemplos e Contraexemplos	2271
	APÊNDICES	2279
42.A	Prova do Lema 42.6	2279
43	Álgebras de Operadores e a Física Quântica	2280
43.1	Algumas Considerações Gerais Sobre Teorias Físicas	2280
43.2	O Modelo da Mecânica Clássica	2282
43.3	O Quadro da Física Quântica e a Relevância do Teorema Espectral	2284
43.3.1	Abstração da Noção de Medida na Física Quântica. POVM's	2287
43.3.1.1	Medidas com Valores em Operadores Positivos: POVMs	2287
43.4	O Princípio de Incerteza e as Desigualdades de Bell	2287
43.4.1	O Princípio de Incerteza	2287
43.4.2	As Desigualdades de Bell	2292
43.4.2.1	O Problema das Variáveis Escondidas	2292
43.4.3	Obtendo as Desigualdades de Bell	2298
43.4.4	Alguns Resultados Matemáticos sobre as Desigualdades de Bell	2303
43.5	O Paradoxo de Einstein-Podolsky-Rosen	2307
44	O Limite Indutivo de Álgebras	2308
	Bibliografia	2316
	Índice Remissivo	2329

Prefácio



intenção básica deste livro é fornecer a estudantes de Física noções matemáticas necessárias a uma melhor compreensão de desenvolvimentos modernos da Física Teórica e da Matemática. Longe vai o tempo em que o conhecimento matemático requerido a um físico teórico restringia-se a certos métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais. Essa visão, porém, infelizmente impregna até o presente a concepção de certas disciplinas ditas de Física-Matemática (ou de Métodos Matemáticos da Física Teórica) e de certos maus livros sobre o tema. Em contraste, noções sobre Estruturas Algébricas, Topologia Geral, Teoria da Medida e da Integração, Geometria Diferencial, Teoria de Grupos, Teoria de Distribuições, Análise Funcional e Álgebras de Operadores são hoje imprescindíveis ao trabalho de um físico teórico.

Este livro cresceu a partir de notas de aula escritas pelo autor em diversas disciplinas de graduação e pós-graduação ministradas no IFUSP. Diversos de seus capítulos podem ser empregados em disciplinas de graduação ou pós-graduação, mas o mesmo foi concebido primordialmente para servir ao auto-estudo de estudantes e docentes. De modo geral, o nível varia entre intermediário e avançado. Também de modo geral, o texto é de leitura auto-suficiente, mas vez por outra algum estudo complementar é sugerido. A melhor maneira de um estudante conduzir-se no estudo de assuntos matemáticos é munindo-se de uma boa coleção de exemplos e contraexemplos de várias situações específicas, patologias, casos especiais etc. Além de servirem de auxílio à memória, exemplos ajudam a melhor entender a motivação de certas definições e a compreender restrições mencionadas em enunciados de teoremas. Dessa forma, procuramos sempre que possível apresentar (muitas vezes em exercícios!) um bom número de exemplos e contraexemplos para as várias situações tratadas.

Este texto, porém, não é substituto à leitura dos bons livros especializados nos diversos assuntos aqui tratados. Parte do material aqui apresentado pode ser encontrado em diversas fontes, citadas na bibliografia (página 2317), mas a apresentação e sua ordem são próprias. Há também neste texto demonstrações do próprio autor de resultados conhecidos que são, por alguma razão, dificilmente encontradas na literatura. Mas como comenta o autor de [193] em seu prefácio, *“qualquer livro-texto deve mais aos livros e notas de outros do que a seu autor nominal”*.

Fazemos notar que este livro está ainda sendo trabalhado e alguns capítulos e seções podem vir a ser alterados, corrigidos, eliminados ou acrescidos de material. Além disso, novos capítulos serão escritos. O material já presente é, porém, útil a todos aqueles que queiram iniciar-se nos assuntos aqui expostos. Versões atualizadas serão colocadas na “rede” (no endereço acima indicado) sempre que possível.

O autor agradece a todos os que apresentarem sugestões. Fabulosas somas em dinheiro são oferecidas a todos aqueles que encontrarem erros no texto. Entre os já aquinhoados encontram-se Prof. Matheus Grasselli, Prof. Alexandre T. Baraviera, Prof. Marcos V. Travaglia, Daniel Augusto Cortez, Djogo F. C. Patrão, Cléber de Mico Muramoto, Profa. Katiúscia Nadyne Cassemiro, Urbano Lopes França Junior, Gustavo Barbagallo de Oliveira, Priscila Vieira Franco Gondeck, Darielder Jesus Ribeiro, Henrique Scemes Xavier, Prof. Daniel Augusto Turolla Vanzella, Leonardo Fernandes Dias da Motta, Krishnamurti José de Andrade, Prof. Pedro Tavares Paes Lopes, Diego Cortegoso Assêncio, Fleury José de Oliveira Filho, Paulo Henrique Reimberg, Fabíola Diacenco Xavier, Márcio André Prieto Aparício Lopez, Dorival Gonçalves Netto, Célia Santos Jordão Alves, Bruno Lima de Souza, Leandro Saccoletto, João Pedro Jericó de Andrade, Ronaldo da Silva Alves Batista, Carolina Dias Alexiou, Arão Benjamin Garcea, Cláudio Mayrink Verdun, Leonardo Hanao Gabriel, Felipe Contatto, Victor Bernardo Chabu, Bruno Hideki Kimura, Fabrizio Fogaça Bernardi, Alessandro Takeshi Morita Gagliardi, Cedrick Miranda Mello, Thiago Costa Raszeja, Pedro Rangel Caetano, Anderson Seigo Misobuchi, Leandro Silva Pimenta, Alexandre Homrich, Prof. Edélcio Gonçalves de Souza, Lissa de Souza Campos, Ricardo Correa da Silva, Leonardo Almeida Lessa e Marcos Carvalho Brum de Oliveira, aos quais somos muito gratos por correções e sugestões. Estas Notas foram escritas durante um intervalo longo de tempo, de sorte que alguns dos seus usuários são hoje colegas professores e fizemos menção a isso na lista acima, quando soubemos. Pedimos desculpas por eventuais omissões.

As Seções 26.A, página 1304, e 28.2.4.1, página 1387, foram originalmente escritas por Daniel Augusto Cortez. A Seção 21.9, página 973, foi originalmente escrita por André M. Timpanaro, Fleury J. Oliveira e Paulo H. Reimberg. A eles dedicamos agradecimentos especiais.

João Carlos Alves Barata

São Paulo, 1 de janeiro de 2018
 Departamento de Física Matemática do IFUSP
 Universidade de São Paulo

Bons Mots

“O comportamento de um físico em relação à Matemática é similar a de um ladrão inteligente em relação ao código penal: ele estuda apenas o suficiente para evitar punições”.

I. M. Gelfand (1913–2009).

“The greatest enemy of knowledge is not ignorance, it is the illusion of knowledge”.

Daniel J. Boorstin (1914–2004), também atribuído a Stephen W. Hawking (1942–).

“A mente não é um vaso a ser repleto, mas uma tocha a ser acesa”.

Plutarco (46?–120).

“The public has a distorted view of science, because children are taught in school that science is a collection of firmly established truths. In fact, science is not a collection of truths. It is a continuing exploration of mysteries”.

Freeman Dyson (1923–), in *How We Know*, The New York Review of Books, March 10, 2011.

“When a theoretical physicist can not solve a problem he goes for the next more difficult one”.

Sir Michael Francis Atiyah (1929–).

“My friend G. H. Hardy¹, who was professor of pure mathematics, enjoyed this pleasure [in mathematical demonstrations] in a very high degree. He told me once that if he could find a proof that I was going to die in five minutes he would of course be sorry to lose me, but this sorrow would be quite outweighed by pleasure in the proof”.

Bertrand Russell (1872–1970).

“Mathematics is not a deductive science – that’s a cliché. When you try to prove a theorem, you don’t just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial and error, experimentation, guesswork”.

Paul R. Halmos, in [135].

“The source of all great mathematics is the special case, the concrete example. It is frequent in mathematics that every instance of a concept of seemingly great generality is in essence the same as a small and concrete special case”.

Paul R. Halmos, in [135].

“Mathematics is a subarea of Applied Mathematics”.

Peter Lax (–).

“Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap”.

Vladimir I. Arnold (1937–2010). In “On teaching mathematics”. Address at the discussion on teaching of mathematics in Palais de Découverte in Paris on 7 March 1997.

“In science, self-satisfaction is death. Personal self-satisfaction is the death of the scientist. Collective self-satisfaction is the death of the research. It is restlessness, anxiety, dissatisfaction, agony of mind that nourish science”.

Jacques Lucien Monod (1910–1976), in *New Scientist*, 1976.

“Não existe nenhuma categoria da Ciência à qual se possa dar o nome de Ciência Aplicada. O que existe são a Ciência e as aplicações da Ciência, intimamente ligadas, como frutos à árvore que os gerou”.

¹Godfrey Harold Hardy (1877–1947).

Louis Pasteur (1822–1895), in “Pourquoi la France n’a pas trouvé d’hommes supérieurs au moment du péril”, *Revue Scientifique* (Paris, 1871).

“Disse Kant²: ‘Eu afirmo que em cada Ciência Natural específica pode-se atingir somente tanto Conhecimento verdadeiro quanto nela houver de Matemática’. *De fato, somente dominamos uma teoria das ciências naturais quando expomos seu núcleo matemático e o desvendamos completamente*”.

David Hilbert (1862–1943) em “Naturerkennen und Logik”, palestra apresentada em setembro de 1930, em Königsberg, em Congresso da Associação Alemã de Cientistas Naturais e Médicos.

“Não podemos nos permitir acreditar naqueles que em nossos dias, com cenho filosófico e em tom de superperiodidade, profetizam a decadência cultural e apologizam o Ignorabimus. Para nós não existe o Ignorabimus e, em minha opinião, também não para as Ciências Naturais. Em lugar do tolo Ignorabimus nosso lema é ‘Nós devemos saber, nós iremos saber’”.

David Hilbert. *ibidem*.

“A geometry implies the heterogeneity of locus, namely that there is a locus of the Other. Regarding this locus of the Other, of one sex as Other, as absolute Other, what do the most recent developments in topology allow us to posit? I will posit here the term compactness. Nothing is more compact than a fault, assuming that the intersection of everything that is enclosed therein is accepted as existing over an infinite number of sets, the result being that the intersection implies this infinite number. That is the very definition of compactness”.

Jacques Lacan (1901–1981), em *Le Séminaire Jacques Lacan*, Livre XX: *Encore*, 1972–1973. Texto organizado por Jacques-Alain Miller. Paris: Éditions du Seuil. Traduzido e citado por Alan Sokal e Paul Bricmont in *Intellectual Impostures*.

Para a definição de compacidade, vide Seção 34.3, página 1579.

* * * * *

“Unprovided with original learning, unformed in the habits of thinking, unskilled in the arts of composition, I resolved to write a book”.

Edward Gibbon (1737–1794).

“Talvez eu não tenha tido êxito em fazer as coisas difíceis tornarem-se fáceis, mas pelo menos eu nunca fiz um assunto fácil tornar-se difícil”.

F. G. Tricomi (1897–1978).

“... E costumava dizer que nenhum livro é tão ruim a ponto de nada conter de valor...”.

Plínio, o Novo (61–114), a respeito de seu tio, Plínio, o Velho (23–79).

“Would I had phrases that are not known, utterances that are strange, in new language that has not been used, free from repetition, not an utterance that has grown stale, which men of old have spoken”.

Khakheperresenb (ci. 1900 AC), escriba egípcio. Citado em “The Burden of the Past and the English Poet” de Walter Jackson Bate.

“Tudo que deveria ter sido dito já o foi, mas como ninguém ouvia, tudo tem de ser dito novamente”.

André Paul Guillaume Gide (1869–1951).

“Uma obra nunca é terminada, ela é apenas abandonada”.

Atribuído a Paul Valéry (1871–1945).

²Immanuel Kant (1724–1804).

Como Ler Este Livro

“Reading made Don Quixote a gentleman. Believing what he read made him mad”.

George Bernard Shaw (1856–1950).

O leitor deste livro não deve possuir o temor de que o mesmo deva (nem a expectativa de que o mesmo possa) ser lido linearmente, ou seja, na sequência numérica crescente dos capítulos e seções. Ele não foi concebido dessa forma e tal concepção não seria exequível devido à variedade de assuntos, às diferenças de nível de abordagem e à complexidade das conexões entre os diferentes temas. O Conhecimento não é um conjunto totalmente ordenado pela relação de complexidade conceitual ou pela relação de motivação (para a definição da noção de ordem total em conjuntos, vide página 48).

Os diversos capítulos não foram escritos em ordem crescente de complexidade. Por vezes, a motivação para um determinado tema é apresentada em um capítulo anterior, mas por vezes essa motivação surge em um capítulo posterior. Nos capítulos sobre equações diferenciais, por exemplo, a discussão de aplicações em Física é postergada para o Capítulo 21, página 903, e o leitor interessado na motivação para certos tratamentos pode sem perdas consultar esse capítulo antes ou durante o estudo de capítulos que lhe antecedem.

Um problema semelhante ocorre com temas ligados à Topologia e à Análise. Os capítulos dedicados a esses assuntos servem a capítulos que lhes sucedem, mas também, em parte, a capítulos que lhes antecedem. Cabe ao leitor perceber suas necessidades formativas, avançando ou retrocedendo na leitura conforme lhe aprouver. A consulta ao Índice Remissivo (página 2329) ou à lista de Capítulos e Seções que compõem o texto (página 3) deve ser de valia para tal.

Notação e Advertências

Para facilitar a consulta e a leitura, listamos aqui sem muitos comentários um pouco da notação que empregaremos nestas Notas.

- Se z é um número complexo denotaremos seu complexo conjugado por \bar{z} . A notação z^* (mais comum em textos de Física) pode ocorrer mais raramente.
- O símbolo $A := B$ ou $B =: A$ denota que A é definido pela expressão B . O símbolo $A \equiv B$ indica que A e B são duas notações distintas para o mesmo objeto.
- Sejam A e B conjuntos. Se A é um subconjunto de B , denotamos esse fato por $A \subset B$ ou por $B \supset A$. Por $A \subsetneq B$ ou $B \supsetneq A$ denotamos o fato de A ser um subconjunto próprio de B , ou seja, $A \subset B$, mas $A \neq B$.
- Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ são vetores reais com n componentes (ou seja, elementos de \mathbb{R}^n), então

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

define o chamado *produto escalar usual em \mathbb{R}^n* .

- Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ são vetores complexos com n componentes (ou seja, elementos de \mathbb{C}^n), então

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} := \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n$$

define o chamado *produto escalar usual em \mathbb{C}^n* .

- Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ são vetores complexos com n componentes (ou seja, elementos de \mathbb{C}^n), então

$$\beta(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

define a chamada *forma bilinear usual em \mathbb{C}^n* .

- $\text{Mat}(\mathbb{R}, m, n)$ ou $\text{Mat}(m, n, \mathbb{R})$ designa o conjunto de todas as matrizes reais $m \times n$ (m linhas e n colunas). Analogamente, $\text{Mat}(\mathbb{C}, m, n)$ ou $\text{Mat}(m, n, \mathbb{C})$ designa o conjunto de todas as matrizes complexas $m \times n$. O conjunto de todas as matrizes quadradas $n \times n$ com entradas reais (complexas) será denotado simplesmente por $\text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ (por $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$).
- Se A é um elemento de $\text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ ou de $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$, então A^T designa a matriz transposta de A , ou seja, a matriz cujos elementos de matriz ij são $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.
- Se A é um operador linear em um espaço vetorial complexo (com um certo produto escalar), seu adjunto é denotado por A^* . Em textos de Física é mais comum denotá-lo por A^\dagger , mas não usaremos isso aqui. Assim, se $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$, então A^* será a adjunta de A (em relação ao produto escalar usual, acima). O elemento de matriz ij de A^* será $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.
- Denotaremos o operador identidade agindo em um espaço vetorial (a matriz identidade, agindo em um espaço vetorial de dimensão finita) pelo símbolo $\mathbb{1}$. Esse símbolo também representará a unidade de uma álgebra.
- Designaremos um produto escalar entre dois vetores u e v sempre por $\langle u, v \rangle$ e nunca por (u, v) , para não causar confusão com a notação para par ordenado. Outra notação possível é aquela empregada frequentemente em textos de Mecânica Quântica: $\langle u | v \rangle$, mas faremos raramente uso da mesma.
- Ainda sobre produtos escalares, seguiremos sempre a convenção dos textos de Física: um produto escalar em um espaço vetorial sobre os complexos é linear em relação ao segundo argumento e antilinear em relação ao primeiro. Assim, se α e β são números complexos, teremos $\langle \alpha u, \beta v \rangle = \bar{\alpha} \beta \langle u, v \rangle$. Textos de Matemática adotam por vezes a convenção oposta (ou mesmo ambas!).

- Sobre o emprego das palavras *função, aplicação, mapeamento, mapa, funcional, operador, operação, produto e forma*, que por vezes causam perplexidade em estudantes, remetemos ao comentário à página 35.
- Dado um conjunto $X \neq \emptyset$, denota-se por $\mathbb{P}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos de X . $\mathbb{P}(X)$ é denominado o *conjunto das partes de X* .
- A topologia usual da reta real \mathbb{R} será denotada aqui por $\tau_{\mathbb{R}}$.
- A σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} será (quase sempre) denotada aqui por $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$.
- A σ -álgebra dos subconjuntos de \mathbb{R} mensuráveis por Lebesgue será (quase sempre) denotada aqui por \mathcal{M}_{μ_L} .
- Por \mathbb{N} denotamos o conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Por \mathbb{N}_0 denotamos o conjunto dos números naturais, incluindo o zero: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. O leitor deve ser advertido, porém, que essa convenção não é universal. O padrão ISO 31-11 (dedicado a sinais e símbolos matemáticos) recomenda a convenção $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. O leitor deve ter cuidado, portanto, ao comparar textos diferentes.
- Para $x \in \mathbb{R}$, o símbolo $\lfloor x \rfloor$ designa o maior inteiro menor ou igual a x . O símbolo $\lceil x \rceil$ designa o menor inteiro maior ou igual a x .

Em particular, para $n \in \mathbb{Z}$ valem

$$\lfloor n/2 \rfloor = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ (n-1)/2, & n \text{ ímpar}, \end{cases} \quad \lceil n/2 \rceil = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ (n+1)/2, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

- O símbolo \square indica o fim de um enunciado. O símbolo \blacksquare indica o fim de uma demonstração. O símbolo \spadesuit indica o fim do enunciado de um exercício. O símbolo \square indica o fim do enunciado de um exemplo. O símbolo \clubsuit indica o fim de uma observação, nota ou comentário. O símbolo \spadesuit indica o fim de uma definição.
- $\mathcal{B}(X)$ designa o conjunto de operadores limitados agindo em um espaço de Banach X . $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ designa o conjunto de operadores limitados agindo em um espaço de Hilbert \mathcal{H} .
- $C(L)$ designa o conjunto de todas as funções contínuas (reais ou complexas, dependendo do caso), definidas em L (na topologia que se estiver considerando em L).
- $\mathfrak{B}(L)$ designa a coleção de todos os conjuntos Borelianos de L (em relação à topologia que se estiver considerando em L). $B_l(L)$ designa a coleção de todas as funções Borelianas (reais ou complexas, dependendo do caso), definidas em L .
- O domínio de um operador T (agindo em um espaço de Banach ou de Hilbert) será denotado por $D(T)$ ou por $\text{Dom}(T)$. A imagem (“range”) de T será denotada por $R(T)$ ou por $\text{Ran}(T)$ ou, mais raramente, por $\text{Im}(T)$, mas essa última notação pode causar confusão com a da parte imaginária de um número complexo ou mesmo com a da parte imaginária de um operador agindo em um espaço de Hilbert: $\text{Im}(T) := \frac{1}{2i}(T - T^*)$.
- A noção de *propriedade válida quase em toda parte* é definida na página 1434.

• Intervalos

Ainda não introduzimos os números reais nem a relação de ordem entre eles mas, como essas noções são conhecidas, vamos colocar aqui uma palavra sobre a nomenclatura usada para descrever intervalos da reta real. Para $a < b \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a < x < b\}$$

é dito ser um intervalo aberto. Para $a \leq b \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a \leq x \leq b\}$$

é dito ser um intervalo fechado. Para $a < b \in \mathbb{R}$ os conjuntos

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a \leq x < b\}$$

e

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a < x \leq b\}$$

são ditos ser intervalos semiabertos (ou semifechados).

É importante dizer que a nomenclatura “aberto” ou “fechado” acima é usada independentemente da topologia usada em \mathbb{R} (a noção de topologia será introduzida adiante).

- **Delta de Krönecker**

De i e j pertencem a um conjunto contável C , definimos o chamado *delta de Krönecker* por

$$\delta_{ij} \equiv \delta^{ij} \equiv \delta_i^j \equiv \delta_j^i := \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

para todos $i, j \in C$. As diferentes notações δ_{ij} , δ^{ij} , δ_i^j e δ_j^i ocorrem, por exemplo, na Geometria Diferencial e na Teoria da Relatividade.

- **A esfera unitária**

Para $n \in \mathbb{N}_0$, denotaremos por \mathbb{S}^n a chamada *esfera unitária* em \mathbb{R}^{n+1} : o lugar geométrico de todos os pontos de \mathbb{R}^{n+1} situados a uma distância Euclidiana igual a 1 da origem:

$$\mathbb{S}^n := \left\{ (y^1, \dots, y^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sqrt{(y^1)^2 + \dots + (y^{n+1})^2} = 1 \right\}.$$

Note-se que $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$.

- **Classes C^k**

Por $C(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sejam contínuas. Por $C_0(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sejam contínuas e de suporte compacto.

Denotamos por $C^1(\mathbb{R})$ a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, diferenciáveis e com derivada contínua. Tais funções são ditas *funções continuamente diferenciáveis*, ou de *classe C^1* . Denotamos por $C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$ a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e cujas k primeiras derivadas f' , f'' , \dots , $f^{(k)}$ existam e sejam igualmente contínuas. Tais funções são ditas ser de *classe C^k* . Por $C^\infty(\mathbb{R})$ denotamos as funções infinitamente diferenciáveis (as quais serão, ocasionalmente, denominadas *funções suaves*). Por $C_0(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções contínuas e de suporte compacto. Por $C_0^\infty(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto.

As diversas notações acima estendem-se de forma natural a funções definidas em subconjuntos de \mathbb{R} , como intervalos abertos ou fechados, compactos ou não. Aqui, o estudante deve tomar certos cuidados. Por exemplo, $C((0, 1))$ contém, entre outras, funções contínuas que divergem em 0 e/ou em 1, mas $C([0, 1])$ só contém funções limitadas.

Parte I

Capítulos Introdutórios