Capítulo 8
Um Mínimo Sobre A Função Zeta de Riemann

Conteúdo

Números primos têm intrigado e fascinado matemáticos desde a antiguidade e seu estudo tem atraído o interesse de incontáveis gerações. Um dos capítulos mais interessantes desse empreendimento envolve uma função, a função zeta de Riemann, e nossa pretensão aqui é apresentar um mínimo de material sobre a mesma, especialmente aquele que concerne sua relação com a função gama de Euler. A função zeta de Riemann é também empregada em Física (na Teoria Quântica de Campos, na Mecânica Quântica) e está relacionada a alguns problemas em aberto da Mecânica Estatística (generalizações do Teorema de Lee-Yang).

Algumas referências mais técnicas sobre a função zeta de Riemann são [420], [111], [209] e [10]. Para um relato não técnico da história dos desenvolvimentos em torno da função zeta de Riemann e da relevância do estudo dessa função, vide [278], [98] ou [354]. A referência [111] desenvolve a teoria da função zeta seguindo proximamente os passos apontados pela história do assunto e contém uma tradução do histórico trabalho original de Riemann, sobre o qual falaremos um pouco no que segue.

8.1 Origens. Propriedades Básicas de Números Primos

Diversas propriedades da função zeta de Riemann são intimamente ligadas a propriedades dos números primos e essa função tem sido usada de forma importante como instrumento no estudo da distribuição dos mesmos. Vamos começar com alguns esclarecimentos sobre isso.

• **Números primos**

Um número natural $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, é dito ser um *número primo* se inexistir um número natural q com $1 < q < p$ tal que $p/q \in \mathbb{N}$. O número 1 usualmente não é considerado primo[1], mas 2 é primo, o único primo que é par. Denotaremos por $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ a coleção de todos os números primos.

Números naturais que não sejam primos são por vezes denominados *números compostos*.

O seguinte resultado fundamental, conhecido desde a Antiguidade, é uma consequência imediata da definição de número primo:

Teorema 8.1 (Teorema Fundamental da Aritmética) *A cada $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, existem univocamente associados:*

1. *um número natural $k \in \mathbb{N}$,*

[1] Há um comentário sobre isso logo adiante e também na nota-de-rodapé 4, à página 389.

2. um conjunto de k primos distintos $\{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{P}$ com $2 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ e

3. um conjunto de k números naturais $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\} \subset \mathbb{N}$,

tais que vale

$$n = p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k} . \tag{8.1}$$

Os números primos $p_1, \ldots, p_k$ são denominados fatores primos *de n. A expressão (8.1) é denominada* decomposição em fatores primos *de n. A decomposição em fatores primos de cada número natural é única.* □

Nota. Uma das razões de se excluir o número 1 do conjunto $\mathbb{P}$ dos números primos é que de outra forma não valeria a unicidade da decomposição em fatores primos, já que, trivialmente, poderíamos sempre incluir uma quantidade arbitrária de fatores 1 no lado direito de (8.1). Uma outra razão é comentada na nota-de-rodapé 4, página 389. ♣

O Teorema 8.1 revela o porquê da importância dos números primos: eles são os tijolos com os quais todos os demais números naturais podem ser construídos (por multiplicação).

A demonstração do importante Teorema 8.1 segue de forma relativamente direta da definição de número primo e pode ser encontrada em qualquer bom livro sobre Teoria dos Números, por exemplo em [171], [247] ou [133]. Para o benefício do leitor apresentamos uma demonstração no Apêndice 8.A, página 412.

Uma consequência desse teorema é o seguinte fato, conhecido pelo menos desde Euclides[2], que apresentou a primeira demonstração conhecida:

Proposição 8.1 *Há infinitos números primos.* □

Prova. A demonstração, devida a Euclides, é muito simples. Suponhamos que $\mathbb{P}$ seja um conjunto finito e seja P seu maior elemento. Considere-se $Q := P! + 1$. Como $Q > P$, Q não pode ser primo. Seja q um número primo pertencente ao conjunto de fatores primos de Q. Como q é primo, devemos ter $2 \leq q \leq P$. Agora, por um lado, pela definição de q tem-se $Q/q \in \mathbb{N}$, pois Q é divisível por q. Por outro lado, $Q/q = (P!)/q + 1/q \notin \mathbb{N}$, pois $P!$ é divisível por q (já que q aparece entre os fatores do produto $P! = P(P-1)\cdots 2$, dado que $2 \leq q \leq P$) e pois $1/q \notin \mathbb{N}$ (já que $q \geq 2$). Essa contradição mostra que a hipótese de partida, a finitude de $\mathbb{P}$, é falsa. ■

A referência [7] apresenta diversas outras demonstrações da infinitude do conjunto dos números primos.

A lista dos quarenta primeiros números primos é

$$\mathbb{P} = \Big\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,\ 53,\ 59,\ 61,\ 67,\ 71\ ,73,\ 79,\ 83,$$
$$89,\ 97,\ 101,\ 103,\ 107,\ 109,\ 113,\ 127,\ 131,\ 137,\ 139,\ 149,\ 151,\ 157,\ 163,\ 167,\ 173,\ \ldots\Big\} .$$

Até o presente (março de 2014) são conhecidos todos os primos sucessivamente até "apenas" cerca de 4×10^{18}, que são em número de $95.676.260.903.887.607 \approx 9,5 \times 10^{16}$. A partir daí os primos não foram mais determinados em sequência e o maior primo encontrado até o presente (março de 2014) é $2^{57.885.161} - 1$, que é "apenas" da ordem de $10^{17.425.170}$.

Sabendo-se que $\mathbb{P}$ é um conjunto infinito coloca-se de forma importante a questão sobre como os números primos estão distribuídos entre os naturais. Um primeiro fato que pode ser estabelecido indica que os números primos não ocorrem com uma frequência muito grande. Trata-se do seguinte: para cada $n \in \mathbb{N}$ existem infinitos conjuntos compostos por n números sucessivos onde não ocorrem números primos. Mais precisamente, tem-se o seguinte:

Proposição 8.2 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto de n números naturais consecutivos*

$$\Big\{k(n+1)! + 2,\ \ldots,\ k(n+1)! + n + 1\Big\}$$

não contém números primos. □

[2]Conhecido como Euclides de Alexandria (ci. 325 A.C.–ci. 265 A.C.).

Prova. A prova é uma simples variação do argumento de Euclides, acima apresentado, sobre a infinitude dos primos. Seja $q \in \{2, \ldots, n+1\}$. É claro que $(n+1)!$ é divisível por q e, portanto, $k(n+1)! + q$ também é divisível por q. ■

Para o estudo da distribuição dos números primos, seria de grande interesse encontrar uma função bijetora $\mathbb{N} \to \mathbb{P}$ explícita que, para cada $n \in \mathbb{N}$, fornecesse o n-ésimo primo, mas tal expressão não foi encontrada até o presente. Em verdade, é um fato um tanto surpreendente, e deveras intrigante, que os primos distribuem-se de uma forma que parece aleatória. O que justificaria a aparente aleatoriedade de sua distribuição? Contemplando-se listas de números primos percebe-se que eles parecem tornar-se cada vez mais raros, mas como colocar essa afirmação em termos mais precisos sem que se conheça a totalidade do conjunto $\mathbb{P}$ ou a regra que o produz? Haveria, afinal, alguma regularidade na distribuição dos primos?

Um dos primeiros a atacar a questão da distribuição dos primos foi Euler[3], no século XVIII (portanto cerca de dois mil anos após Euclides!), e suas ideias e resultados deram início a uma série de desenvolvimentos que estão em curso ainda hoje. Tentemos delinear seus raciocínios.

• **Euler e sua fórmula de produto**

No ano de 1735 Euler anunciou ter resolvido parcialmente um importante desafio de sua época, conhecido como *Problema de Basel*, o qual consistia em encontrar fórmulas fechadas para séries infinitas do tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} ,$$

onde k é um número natural. Trata-se de séries cujos termos são inversas de potências dos números naturais. Euler obteve uma solução para o caso em que k é par: a expressão (6.16), página 320 (o caso em que k é ímpar está em aberto até os dias de hoje!). Para $k = 2$, por exemplo, Euler obteve o célebre resultado

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} .$$

No caso em que $k = 1$, a série acima é denominada *série harmônica*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

e já era conhecido desde o século XVII que a mesma é uma série divergente (o que é fácil de se ver se se usar o chamado critério da integral).

Assim, Euler sabia que a soma das inversas dos números inteiros é divergente, mas as soma da inversas de seus quadrados é finita. Isso significa que o conjunto dos quadrados $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots\}$ torna-se cada vez mais esparso dentro do conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$ a ponto de que a soma de seus inversos convirja.

Euler voltou-se então para a distribuição de primos $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$, perguntando-se se eles eram mais ou menos densamente distribuídos que o conjunto de números quadrados $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots\}$. Uma maneira de saber isso é responder se a série

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} + \cdots , \tag{8.2}$$

a soma infinita das inversas dos números primos, é convergente ou não. Se for convergente, então os primos devem estar distribuídos de forma cada vez mais esparsa à medida que crescem, talvez como os números quadrados. Se não for convergente, então os números primos ocorrerão com mais frequência que os números quadrados, ou seja, de forma menos esparsa que os mesmos.

Como veremos, Euler estabeleceu que a série (8.2), analogamente à série harmônica, também é divergente, indicando que os primos não se tornam tão raros, na medida em que crescem, quanto os números quadrados.

[3]Leonhard Euler (1707–1783).

Euler atacou a questão da finitude ou não da série (8.2) de uma forma indireta. Ao invés de lidar diretamente com aquela série, Euler tentou antes responder a uma outra questão relacionada: a de se a produtória infinita

$$\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\cdots \tag{8.3}$$

convergia a zero ou não. Por que essas questões estão relacionadas? Pois como aprendemos na Proposição 6.1, página 325, caso a série (8.2) seja finita, então a produtória em (8.3) é não nula e, reciprocamente, se pudermos provar que a produtória em (8.3) converge a zero, então a série (8.2) não pode ser convergente.

Como Euler demonstrou que a produtória em (8.3) converge a zero? Lançando mão de um resultado que ele mesmo descobriu, provavelmente quando lidou com o Problema de Basel. Por volta de 1735 Euler anunciou ter provado a seguinte identidade, conhecida desde então como *fórmula de produto de Euler*:

$$\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^k}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\,, \tag{8.4}$$

para $k \in \mathbb{N}$, com $\mathbb{P}$ sendo o conjunto de todos os primos[4]. Apresentaremos uma demonstração dessa identidade (em um caso muito mais geral) logo adiante, na Seção 8.3, página 392. A demonstração original de Euler, ainda que não completamente rigorosa, é muito mais simples que aquela que apresentaremos e pode ser acompanhada em textos elementares (como *e.g.*, em [98] ou [92]).

O que nos importa é que no caso $k = 1$ a identidade (8.4) indicou a Euler que

$$\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty\,,$$

pois a série do lado direito é a série harmônica. Como a produtória do lado esquerdo é a inversa da produtória de (8.3), Euler concluiu que aquela produtória converge a zero e, portanto, que a série

$$\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}+\cdots$$

não pode ser uma série convergente[5].

Um dos pontos importantes da análise de Euler, especialmente de sua fórmula de produto (8.4), foi o de chamar a atenção para a relação entre propriedades das séries de Dirichlet[6] do tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} =: \zeta(k)\,, \tag{8.5}$$

com $k \in \mathbb{N}$, e propriedades do conjunto de números primos. A função definida pela série em (8.5) passou a ser denominada *função zeta* e, posteriormente, *função zeta de Riemann*[7]. Euler considerou-a apenas para valores de k dentre os naturais. Esse foi o ponto de partida para o próximo grande desenvolvimento desta narrativa, o qual foi devido a Riemann. Antes, porém, devemos fazer alguns comentários sobre a "densidade" de números primos.

• Como cresce o número de primos. A conjectura dos números primos

Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, denotemos por $\pi(n)$ o número de primos entre 2 e n, ou seja, $\pi(n)$ é a cardinalidade do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\} \cap \mathbb{P}$. Podemos formular a questão de como os primos se distribuem através da seguinte pergunta: de que forma $\pi(n)$ cresce com n para $n \to \infty$?

Um dos primeiros a colocar essa questão foi Gauss[8] que observou por volta de 1793[9] que $\pi(n)$ comportava-se aproximadamente como $n/\ln n$ para n "grande". Em 1838 Dirichlet apresentou uma conjectura mais precisa, afirmando que

[4] Comentário: o fato de nenhum fator correspondente a $p = 1$ poder aparecer na produtória do lado esquerdo de (8.4) é uma outra razão técnica para não se considerar o número 1 como elemento de $\mathbb{P}$, ou seja, como sendo um número primo.

[5] Para uma outra demonstração mais direta e rigorosa dessa afirmação, vide [171] ou [247].

[6] Séries de Dirichlet foram definidas à página 314.

[7] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866).

[8] Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855).

[9] Essa data é mencionada em uma carta de Gauss datada, porém, de 1849.

$\pi(n)$ parecia comportar-se como $\int_2^n \frac{dt}{\ln t}$ para n "grande"[10]. Isso equivale a dizer que a "densidade" de números primos próxima a um dado t é aproximadamente $1/\ln t$. Até onde se sabe, a afirmativa de Gauss tem origem puramente empírica e baseou-se na análise que o mesmo fez de tabelas de números primos existentes em seu tempo (que forneciam todos os números primos até aproximadamente $3,0 \times 10^6$, que são cerca de $2,16 \times 10^5$).

Dada a sua importância nesse e em outros contextos, a função $\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ é denominada *função logaritmo integral*[11] e é denotada por $\mathrm{Li}(x)$:

$$\mathrm{Li}(x) \; := \; \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \, , \qquad \text{para } x \in \mathbb{R} \text{ com } x \geq 2 \, . \tag{8.6}$$

A conjectura que então se formulou, baseada nas observações empíricas de Gauss, Dirichlet e outros, pode ser colocada nos seguintes termos mais precisos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Li}(n) - \pi(n)}{\mathrm{Li}(n)} \; = \; 0 \, , \tag{8.7}$$

ou seja, o erro relativo da aproximação de $\pi(n)$ por $\mathrm{Li}(n)$ vai a zero quando $n \to \infty$. Calculando-se a razão do lado direito constata-se, por exemplo, que para $n \approx 3,0 \times 10^6$ o erro relativo é da ordem de $1,0 \times 10^{-3}$.

Aparentemente Gauss, Dirichlet e outros contemporâneos tentaram sem sucesso provar essa conjectura. Sua demonstração somente foi obtida independentemente por de la Vallée-Poussin e por Hadamard, ambos em 1896 (vide página 391). Ambos os autores basearam-se em ideias lançadas por Riemann em seu histórico estudo da função zeta e suas consequências para a distribuição de primos.

• ***"Sobre o Número de Primos Abaixo de um Valor Dado"***

Como já dissemos, o estudo da função $\zeta(s)$ iniciou-se com Euler, que calculou-a nos números naturais pares e estabeleceu a fórmula de produto que leva seu nome (discutida na Seção 8.3, página 392). Euler limitou-se, porém, a considerar valores de s dentre os naturais. Em um célebre trabalho[12] de 1859, intitulado *"Sobre o Número de Primos Abaixo de um Valor Dado"* e apresentado à Academia Prussiana de Ciências, Riemann (que também foi um dos fundadores da Análise Complexa) decidiu tratar a variável s como complexa e estudou a estrutura analítica de ζ, demonstrando uma série de resultados seminais e discutindo suas consequências para o estudo das distribuições de números primos, lançando com isso algumas conjecturas que têm desafiado inúmeros matemáticos desde então. Alguns dos resultados de Riemann sobre propriedades analíticas da função ζ serão apresentados no restante deste capítulo.

O ponto revolucionário do trabalho de Riemann foi o de estender a função zeta ao plano complexo, o que permitiu explorar todo o arsenal de métodos e resultados da Análise Complexa e colocá-los a serviço da Teoria dos Números. A nova área da Matemática assim iniciada é denominada *Teoria Analítica de Números*, um ativo ramo de pesquisa até o presente. Para uma referência básica, vide [10].

O trabalho histórico de Riemann possui apenas nove páginas. Cópias, traduções e mesmo fac-símiles do original podem ser facilmente encontradas na *internet*. A referência [111] contém uma tradução para o inglês em um apêndice. Naquele artigo, após uma análise detalhada das propriedades de ζ no plano complexo (à qual dedicamos parte do que segue neste capítulo), Riemann passou a usar a função ζ para estudar a distribuição de primos. Seu principal resultado é uma expressão em série para $\pi(n)$ cujo primeiro termo é $\mathrm{Li}(n)$. No entanto, Riemann não demonstrou que esse primeiro termo é o termo dominante (isso foi feito após Riemann) e não fez qualquer menção à questão da convergência da série.

Em meio à sua análise Riemann formulou uma conjectura sobre os zeros complexos da função ζ, a saber, que eles teriam todos parte real igual a $1/2$ (a função ζ tem zeros reais, também descobertos por Riemann, sobre os inteiros negativos, que são denominados "zeros triviais" de ζ). Naquele trabalho, Riemann não fez nenhum esforço para provar essa conjectura ou mesmo para justificá-la (!), limitando-se a dizer que sua veracidade era "bastante provável"[13]. Essa assim chamada

[10] Aparentemente Gauss também fizera essa observação em 1793, mas divulgou-a somente na mencionada carta de 1849, após Dirichlet.

[11] Há uma outra função parecida que recebe o mesmo nome: $\mathrm{li}(x) := \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$, para $x > 0$. Claro está que $\mathrm{Li}(x) = \mathrm{li}(x) - \mathrm{li}(2)$.

[12] G. F. B. Riemann, "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse". Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 136–144, November (1859). Vide também [341].

[13] A motivação original de Riemann para lançar sua conjectura provavelmente foi esclarecida em 1932 por Carl Ludwig Siegel (1896–1981) em seu estudo de manuscritos não publicados de Riemann, depositados na Universidade de Göttingen. Recuperando certos resultados de Riemann, Siegel apresentou um resultado, hoje conhecido como "Teorema de Riemann-Siegel", ou "fórmula de Riemann-Siegel", que permite obter uma fórmula assintótica para o número de zeros da função zeta ao longo da linha crítica, fórmula essa que possivelmente está na origem de sua conjectura. O trabalho de Siegel é notável não apenas por trazer à luz manuscritos inacabados, desorganizados e escritos em caligrafia difícil, mas também elucidar os argumentos matemáticos, muito além do seu tempo, do seu autor. Para mais informações sobre a fórmula de Riemann-Siegel, incluindo notas históricas, vide [111], capítulo 7. Para mais notas históricas, vide [98], pág. 256 e seguintes. O artigo original de Siegel é [373].

conjectura de Riemann, ou *hipótese de Riemann*, ainda não foi demonstrada. Ela tem desafiado matemáticos há gerações e representa até hoje um dos maiores problemas em aberto da Matemática. Sua validade forneceriam uma visão mais precisa da distribuição dos primos.

Mais adiante, comentaremos um pouco mais sobre essa conjectura e sobre os (poucos) resultados obtidos em sua direção até o presente. A validade da conjectura de Riemann permitiria a demonstração de vários resultados da Teoria dos Números e em, particular, permitiria justificar as correções obtidas por Riemann à aproximação de $\pi(n)$ por $\mathrm{Li}(n)$, correções essas que forneceriam uma visão mais precisa da distribuição de primos.

O trabalho de Riemann foi muito admirado, mas também foi criticado, quer pela falta de demonstrações de alguns resultados quer pela natureza vaga de algumas das suas afirmações. No entanto, é preciso lembrar que o artigo de Riemann não fora escrito como um artigo científico detalhado regular. Riemann fora eleito membro correspondente da Academia Prussiana de Ciências, uma instituição de alto prestígio, na época, e fora convidado a redigir um texto apresentando resultados nos quais trabalhava no momento. Riemann decidiu-se por apresentar seus resultados sobre a função zeta e suas aplicações na Teoria de Números. Possivelmente, pretendia publicar um texto mais detalhado depois, mas não chegou a fazê-lo (Riemann faleceu em 1866 aos trinta e nove anos). Foi somente nos anos trinta do século XX, mais de sessenta anos após sua morte, que revelou-se a intensidade, a profundidade e a qualidade técnica do trabalho que Riemann devotou a essas questões, quando seus manuscritos foram organizados e estudados por Siegel[14], o qual pode revelar diversos resultados de Riemann ainda desconhecidos (por exemplo, a chamada relação de Riemann-Siegel) e que jaziam sob a publicação original.

• ***<u>O Teorema dos Números Primos</u>***

Um passo importante, posterior a Riemann, foi dado em 1896 de forma independente[15] por de la Vallée Poussin[16] e por Hadamard[17]. Seguindo ideias delineadas por Riemann, mas sem fazer uso da *conjectura de Riemann*, de la Vallée Poussin e Hadamard provaram a validade da conjectura (8.7), obtendo ainda a estimativa de erro

$$\left|\frac{\mathrm{Li}(n)-\pi(n)}{\mathrm{Li}(n)}\right| \leq e^{-c\sqrt{\ln n}}, \tag{8.8}$$

válida para todo n grande o suficiente, sendo $c > 0$ uma constante (a melhor estimativa conhecida para c é $c = 1/15$). A conjectura (8.7) transformou-se, assim, em um teorema, denominado *Teorema dos Números Primos*. Para uma demonstração, vide [111] ou [420].

Em 1903, usando ainda métodos de Análise Complexa, Edmund Landau[18] apresentou[19] uma demonstração do Teorema dos Números Primos que é significantemente mais simples que as de de la Vallée Poussin e Hadamard, abrindo caminho para mais avanços técnicos. Em 1949, Selberg[20] e Erdős[21] semi-independentemente apresentaram[22] uma demonstração do Teorema dos Números Primos usando recursos "elementares", ou seja, sem fazer uso de Análise Complexa.

Sabe-se hoje que a conjectura de Riemann, se for verdadeira, permitirá melhorar muitíssimo a estimativa expressa em (8.8) e fornecerá diversas outras informações mais precisas sobre como primos se distribuem em média. Para mais informações vide [420], [111], [209], [10] e outros títulos da literatura especializada.

8.2 Definição

Neste capítulo denotaremos por $\mathbb{C}_1$ o semi-plano aberto de $\mathbb{C}$ composto por todos os números complexos cuja parte real é maior que 1, ou seja, $\mathbb{C}_1 := \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,(z) > 1\}$.

[14] Carl Ludwig Siegel (1896–1981).

[15] Charles de la Vallée Poussin. "Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers". Ann. Soc. Sci. Bruxells (1897), e Jacques Hadamard. "Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques". Bull. Soc. Math. France, 24:199–220. JFM 27.0154.01.

[16] Charles-Jean Étienne Gustave Nicolas, baron de La Vallée Poussin (1866–1962).

[17] Jacques Salomon Hadamard (1865–1963).

[18] Edmund Georg Hermann Landau (1877–1938).

[19] Vide "Collected Works of Edmund Landau", Bull. London Math. Soc. **21**, 342–350 (1989).

[20] Atle Selberg (1917–2007).

[21] Paul Erdős (1913–1996).

[22] A. Selberg, "An elementary proof of the prime-number theorem". Ann. of Math., **50**, pp. 305–313 (1949) e P. Erdős, "On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem". Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **35**, pp. 374–384 (1949).

Para $s \in \mathbb{C}_1$, define-se a chamada *função zeta de Riemann* por

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} . \tag{8.9}$$

Usar a letra "s" para designar a variável da qual ζ depende é uma tradição iniciada com Riemann. Como comentamos à página 314, a série do lado direito é uma série de Dirichlet. É elementar constatar (vide logo abaixo) que a série do lado direito é absoluta e uniformemente convergente em compactos em $\mathbb{C}_1$ e, portanto, define uma função analítica nessa região. Como discutiremos, a função zeta de Riemann possui uma extensão analítica para fora dessa região onde, porém, a representação em série (8.9) não é mais válida. Mais especificamente, veremos que a função zeta de Riemann pode ser analiticamente estendida ao domínio $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, tendo no ponto 1 um polo simples com resíduo igual a 1.

Ao estudante iniciante recordamos que uma situação semelhante ocorre no exemplo da série de potências $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(-z)^m$, que também converge absoluta e uniformemente em compactos no disco aberto $|z| < 1$ de $\mathbb{C}$ e, portanto, define uma função analítica nessa região. Como é bem sabido, essa função definida por essa série pode ser estendida analiticamente para fora dessa região (exceto em $z = -1$) pela função $1/(1 + z)$, a qual é analítica em toda a região $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

• **Analiticidade em $\mathbb{C}_1$ da função definida em (8.9)**

Vamos primeiramente tratar da convergência e analiticidade da série posta ao lado direito de (8.9) na região $\mathbb{C}_1$.

Seja $K \subset \mathbb{C}_1$ um conjunto compacto. K é fechado e limitado e, portanto, existe $k > 1$ tal que $\mathrm{Re}\,(z) \geq k$ para todo $z \in K$. Tomemos $s \in K$ e escrevamos $s = s_0 + is_1$ com $s_0,\ s_1 \in \mathbb{R}$. Naturalmente $s_0 \geq k > 1$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \left|\frac{1}{n^{s_0+is_1}}\right| = \frac{1}{n^{s_0}} \leq \frac{1}{n^k} .$$

Para $N \in \mathbb{N}$ tem-se, portanto,

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{1}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^k} .$$

Como $k > 1$, o limite $N \to \infty$ de $\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n^k}$ existe[23] e, portanto, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ converge absolutamente para todo $s \in K$. Essa convergência é, ademais, uniforme, pois a majoração $\left|\frac{1}{n^s}\right| \leq \frac{1}{n^k}$ é válida para todo $s \in K$. Agora, cada função $\mathbb{C} \ni s \mapsto f_n(s) := 1/n^s = \exp\big(s \ln n\big)$ é evidentemente analítica em todo $\mathbb{C}$. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ é uma série absoluta e uniformemente convergente em compactos de $\mathbb{C}_1$ de funções analíticas e seu limite, portanto[24], é também uma função analítica em $\mathbb{C}_1$.

Isso estabeleceu a analiticidade da função ζ de Riemann na região $\mathbb{C}_1$, de acordo com a definição (8.9). No que segue trataremos de estender o domínio de definição e analiticidade de ζ. A função gama de Euler desempenhará nisso um papel importante.

8.3 A Fórmula de Produto de Euler e Outras Relações Envolvendo ζ

Apresentemos primeiramente a demonstração da já mencionada *fórmula de produto de Euler*.

[23] Essa convergência pode ser facilmente estabelecida, por exemplo, pelo critério da integral:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^k} \leq 1 + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^k} \leq 1 + \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{x^k}\,dx = 1 + \lim_{N\to\infty}\left(\frac{N^{1-k}}{1-k} - \frac{1}{1-k}\right) = 1 + \frac{1}{k-1} < \infty .$$

Vide e.g. [266] e [267] ou qualquer outro bom livro de Cálculo ou Análise.

[24] Esse é um resultado bem-conhecido de Análise Complexa.

Proposição 8.3 *Para $s \in \mathbb{C}_1$ vale a identidade*

$$\zeta(s) \;=\; \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} , \tag{8.10}$$

onde $\mathbb{P} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ é a coleção (infinita) de todos os números primos. Ambos os lados de (8.10) representam funções analíticas em $\mathbb{C}_1$. □

Prova. A primeira etapa da demonstração é provar a convergência da produtória infinita $\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$. Como acima, seja $K \subset \mathbb{C}_1$ um compacto. K é fechado e limitado e, portanto, existe $k > 1$ tal que $\mathrm{Re}\,(z) \geq k$ para todo $z \in K$. Tomemos $s \in K$ e escrevamos $s = s_0 + is_1$ com $s_0,\ s_1 \in \mathbb{R}$. Naturalmente $s_0 \geq k > 1$. Para cada $p \in \mathbb{P}$ as funções $s \mapsto 1 - \frac{1}{p^s}$ são analíticas em K. Além disso,

$$\sup_{s\in K}\left|\left(1-\frac{1}{p^s}\right)-1\right| \;=\; \sup_{s\in K}\left|\frac{1}{p^s}\right| \;\leq\; \frac{1}{p^k} .$$

Com isso,

$$\sum_{p\in\mathbb{P}}\sup_{s\in K}\left|\left(1-\frac{1}{p^s}\right)-1\right| \;\leq\; \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^k} \;<\; \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^k} \;<\; \infty ,$$

a segunda desigualdade sendo uma consequência trivial do fato que $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$. Pelo Corolário 6.1, página 325, a produtória $\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$ converge e define uma função analítica em todo $\mathbb{C}_1$.

Para $j \in \mathbb{N}$, seja $\mathbb{P}_j \equiv \{p_1,\ \ldots,\ p_j\} \subset \mathbb{P}$ o conjunto dos j primeiros números primos, ordenados de forma crescente. Considere-se a produtória finita $\prod_{p\in\mathbb{P}_j}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$. Como $|p^s| > 1$, tem-se

$$\prod_{p\in\mathbb{P}_j}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \;=\; \prod_{p\in\mathbb{P}_j}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p^{sm}} \;=\; \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_j=0}^{\infty}\prod_{p\in\mathbb{P}_j}\frac{1}{\left(p^{m_k}\right)^s} \;=\; \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_j=0}^{\infty}\frac{1}{\left(p_1^{m_1}\cdots p_j^{m_j}\right)^s} ,$$

a penúltima igualdade sendo válida pois a produtória é finita e as somatórias são absolutamente convergentes, o que permite a inversão de ordem entre as mesmas.

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, conjunto $\left\{p_1^{m_1}\cdots p_j^{m_j},\ \text{ com }\ m_1,\ \ldots,\ m_P \in \mathbb{N}_0\right\}$ coincide com o conjunto composto de 1 e de todos os números em $\mathbb{N}$ cujos fatores primos são todos menores ou iguais a p_j. Logo, devido à convergência absoluta da somatória em (8.9), concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} - \prod_{p\in\mathbb{P}_j}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}_j}\frac{1}{n^s} ,$$

onde $\mathbb{N}_j$ é o conjunto de todos os números em $\mathbb{N}$ que possuem ao menos um fator primo <u>maior</u> que p_j. O menor elemento de $\mathbb{N}_j$ é p_{j+1}. Portanto,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} - \prod_{p\in\mathbb{P}_j}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right| \;\leq\; \sum_{n\in\mathbb{N}_j}\left|\frac{1}{n^s}\right| \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}_j}\frac{1}{n^k} \;\leq\; \sum_{n=p_{j+1}}^{\infty}\frac{1}{n^k} .$$

É claro pelo exposto anteriormente que o lado direito vai a 0 quando $j \to \infty$. Logo, provamos que

$$\lim_{j\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} - \prod_{p\in\mathbb{P}_j}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right| \;=\; 0 ,$$

completando a prova de (8.10). ■

A fórmula de produto de Euler (8.10) revela uma insuspeita conexão entre a função zeta de Riemann e o conjunto dos números primos. Essa conexão é a razão de ser da função zeta de Riemann e a principal motivação para seu estudo.

Uma consequência de (8.10) é a seguinte afirmação:

Corolário 8.1 *A função zeta de Riemann não possui zeros em $\mathbb{C}_1$.* □

Prova. A afirmação é evidente por (8.10), já que a produtória e convergente e nenhum dos fatores anula-se. Uma prova direta (e um tanto redundante) seria nas seguintes linhas. Seja $P \in \mathbb{P}$. Por (8.10) tem-se

$$\left[\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leq P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\right]\zeta(s) \;=\; \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p> P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Pelos mesmos passos da demonstração da Proposição 8.3, tem-se que o lado direito da última expressão é igual a $1+\sum_{n\in\mathbb{N}_P^*}\frac{1}{n^s}$, onde $\mathbb{N}_P^* \subset \mathbb{N}$ é o conjunto de todos os naturais cujos fatores primos são todos maiores que P. Agora,

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}_P^*}\frac{1}{n^s}\right| \;\leq\; \sum_{n\in\mathbb{N}_P^*}\frac{1}{n^k} \;\leq\; \sum_{n=P+1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\,.$$

O lado direito pode ser feito menor que 1 tomando-se P grande o suficiente. Isso implica que

$$\left|\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leq P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\right|\big|\zeta(s)\big| \;=\; \left|1+\sum_{n\in\mathbb{N}_P^*}\frac{1}{n^s}\right| \;\geq\; 1-\sum_{n=P+1}^{\infty}\frac{1}{n^k} \;>\; 0\,.$$

Logo, $\zeta(s) \neq 0$, como queríamos estabelecer. ■

Mais adiante, com auxílio da chamada relação fundamental de Riemann, estabeleceremos que $\zeta(s)$ também não se anula na região $\mathrm{Re}\,(s) < 0$, exceto quanto s é um inteiro par negativo.

- **A função $1/\zeta(s)$ e a função de Möbius**

Define-se a chamada função de Möbius[25], $\mu : \mathbb{N} \to \{-1,\ 0,\ 1\}$ por

$$\mu(n) \;:=\; \begin{cases} 1\,, & \text{se } n=1\,,\\[2mm] (-1)^k\,, & \text{se a decomposição de } n \text{ em fatores primos for da forma } n \;=\; p_1\dots p_k\,,\\[2mm] 0\,, & \text{de outra forma.}\end{cases}$$

Tem-se o seguinte resultado:

Proposição 8.4 *Para $s \in \mathbb{C}_1$ vale*

$$\frac{1}{\zeta(s)} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\,, \tag{8.11}$$

Note-se que o lado esquerdo de (8.11) está bem definido e representa uma função analítica em $\mathbb{C}_1$, pois, como vimos acima, ζ é analítica e não se anula nesse domínio. □

Prova. Pela fórmula do produto de Euler, temos, tomando $P \in \mathbb{P}$,

$$\frac{1}{\zeta(s)} \;=\; \lim_{\substack{P\to\infty\\ P\in\mathbb{P}}}\prod_{\substack{p=2\\ p\in\mathbb{P}}}^{P}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\,. \tag{8.12}$$

[25] August Ferdinand Möbius (1790–1868).

Agora,

$$\prod_{\substack{p=2\\p\in\mathbb{P}}}^{P}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) \stackrel{(6.38)}{=} \sum_{N\subset\{1,\,\ldots,\,P\}\cap\mathbb{P}} (-1)^{|N|}\left(\prod_{p\in N} p\right)^{-s} = \sum_{n=1}^{P}\frac{\mu(n)}{n^s}\;.$$

A última igualdade se deve ao fato que os números da forma $\prod_{p\in N} p$ com $N\subset\{1,\,\ldots,\,P\}\cap\mathbb{P}$ são precisamente aqueles números contidos em $\{1,\,\ldots,\,P\}$ para os quais a função de Möbius μ não se anula. O fator $(-1)^{|N|}$ é coerente com a definição de μ.

Como $|\mu(n)|\leq 1$, a série $\lim_{\substack{P\to\infty\\P\in\mathbb{P}}}\sum_{n=1}^{P}\frac{\mu(n)}{n^s}$ converge absoltamente em $\mathbb{C}_1$ e uniformemente em compactos, como já discutido na prova da analiticidade de ζ nessa região. ■

E. 8.1 *Exercício*. Mostre que para $s\in\mathbb{C}_1$ vale

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1+\frac{1}{p^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^s}\;. \tag{8.13}$$

Sugestão. Usando fórmula de produto de Euler, mostre que

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \prod_{p\in\mathbb{P}}\left[\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\right] = \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)$$

e prossiga a partir disso, notando que a produtória do lado direito, acima, só difere da produtória em (8.12) pelos sinais. ✠

• Relação entre ζ e a função π

Já definimos anteriormente $\pi(n)$, com $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, como sendo o número de primos em $\{2,\,\ldots,\,n\}$, ou seja, como sendo a cardinalidade de $\{2,\,\ldots,\,n\}\cap\mathbb{P}$. É útil estender essa definição para números reais. Para $x\in\mathbb{R}$ com $x<2$ definimos $\pi(x)=0$ e para $x\in\mathbb{R}$ com $x\geq 2$ definimos $\pi(x)$ sendo o número de primos no intervalo fechado $[2,\;x]$, ou seja, como sendo a cardinalidade de $[2,\;x]\cap\mathbb{P}$.

Já mencionamos anteriormente a relação entre ζ e a distribuição dos primos. Vamos agora tornar mais explícita a relação entre $\zeta(s)$ e a função $\pi(x)$, que conta o número de primos menores ou iguais a x. A ideia chave é a observação de que para cada $n\in\mathbb{N}$ a diferença $\pi(n)-\pi(n-1)$ vale 1 se n for primo e vale 0 se n não for primo.

E. 8.2 *Exercício*. Justifique! ✠

Com isso em mente, considere-se uma função $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ definida nos naturais. Para $P\in\mathbb{P}$, podemos escrever

$$\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\p\leq P}} f(p) = \sum_{n=2}^{P}\big(\pi(n)-\pi(n-1)\big)f(n)\;.$$

Assim, pela fórmula de produto de Euler temos, para $s \in \mathbb{C}_1$,

$$
\begin{aligned}
\log\big(\zeta(s)\big) &= -\lim_{\substack{P\to\infty \\ p\in\mathbb{P}}} \log\left(1-\frac{1}{p^s}\right) \\
&= -\lim_{\substack{P\to\infty \\ p\in\mathbb{P}}} \sum_{n=2}^{P} \big(\pi(n)-\pi(n-1)\big)\log\left(1-\frac{1}{n^s}\right) \\
&= -\lim_{\substack{P\to\infty \\ p\in\mathbb{P}}} \left[\sum_{n=2}^{P} \pi(n)\log\left(1-\frac{1}{n^s}\right) - \sum_{n=2}^{P} \pi(n-1)\log\left(1-\frac{1}{n^s}\right)\right] \\
&= -\lim_{\substack{P\to\infty \\ p\in\mathbb{P}}} \left[\sum_{n=2}^{P} \pi(n)\log\left(1-\frac{1}{n^s}\right) - \sum_{n=1}^{P-1} \pi(n)\log\left(1-\frac{1}{(n+1)^s}\right)\right] \\
&= -\lim_{\substack{P\to\infty \\ p\in\mathbb{P}}} \left[\sum_{n=2}^{P} \pi(n)\left(\log\left(1-\frac{1}{n^s}\right) - \log\left(1-\frac{1}{(n+1)^s}\right)\right)\right] \\
&\quad -\lim_{\substack{P\to\infty \\ p\in\mathbb{P}}} \left[-\pi(1)\log\left(1-\frac{1}{(2)^s}\right) + \pi(P)\log\left(1-\frac{1}{(P+1)^s}\right)\right] \\
&= -\lim_{\substack{P\to\infty \\ p\in\mathbb{P}}} \sum_{n=2}^{P} \pi(n)\left[\log\left(1-\frac{1}{n^s}\right) - \log\left(1-\frac{1}{(n+1)^s}\right)\right] .
\end{aligned}
$$

Na última igualdade acima usamos o fato que $\pi(1) = 0$ e o fato que $\pi(P) \leq P$, o que implica que, para P grande o suficiente,

$$
\left|\pi(P)\log\left(1-\frac{1}{(P+1)^s}\right)\right| \leq P\left|\log\left(1-\frac{1}{(P+1)^s}\right)\right| = P\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{1}{(P+1)^{ms}}\right| \leq P\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{1}{(P+1)^{ms_0}} ,
$$

donde fica claro que $\lim_{P\to\infty}\pi(P)\log\left(1-\frac{1}{(P+1)^s}\right) = 0$. Acima, $s_0 > 1$ é a parte real de s.

Prosseguindo, observemos que

$$
\frac{d}{dx}\log\left(1-\frac{1}{x^s}\right) = \frac{s}{x\big(x^s-1\big)} .
$$

Assim, temos

$$
\begin{aligned}
\log\big(\zeta(s)\big) &= -\lim_{\substack{P\to\infty \\ p\in\mathbb{P}}} \sum_{n=2}^{P} \pi(n)\left[\log\left(1-\frac{1}{n^s}\right) - \log\left(1-\frac{1}{(n+1)^s}\right)\right] \\
&= \lim_{\substack{P\to\infty \\ p\in\mathbb{P}}} \sum_{n=2}^{P} \pi(n)\left[\int_n^{n+1}\frac{s}{x\big(x^s-1\big)}\,dx\right] \\
&= \lim_{\substack{P\to\infty \\ p\in\mathbb{P}}} \sum_{n=2}^{P} \int_n^{n+1}\frac{s\pi(x)}{x\big(x^s-1\big)}\,dx \\
&= \int_2^{\infty}\frac{s\pi(x)}{x\big(x^s-1\big)}\,dx
\end{aligned}
$$

Portanto, para $s \in \mathbb{C}_1$,

$$
\zeta(s) = \exp\left(s\int_2^{\infty}\frac{\pi(x)}{x\big(x^s-1\big)}\,dx\right) . \tag{8.14}
$$

Essa expressão explicita a relação entre ζ e π, como pretendíamos.

8.4 Primeiras Relações de ζ com a Função Gama de Euler

• **Uma primeira relação entre as funções zeta e gama**

Um passo importante no estudo das propriedades elementares da função zeta de Riemann é estabelecer uma ligação da mesma com a função gama de Euler. Tomemos $s \in \mathbb{C}_1$. Com uma simples mudança de variáveis é elementar constatar que para $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\Gamma(s) \;=\; n^s \int_0^\infty e^{-nx}\, x^{s-1}\, dx \;.$$

Assim, podemos escrever, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(s)\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \;=\; \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^N e^{-nx}\right) x^{s-1}\, dx \;=\; \int_0^\infty \frac{1}{e^x-1}\big(1-e^{-Nx}\big)\, x^{s-1}\, dx \;,$$

onde, na segunda igualdade, usamos a bem conhecida expressão para a soma de uma progressão geométrica: $\sum_{n=1}^N a^n = \frac{a}{1-a}\big(1-a^N\big)$, válida para todo $a \in \mathbb{C}$ (acima, tomamos $a = e^{-x}$). Nosso próximo passo é mostrar que

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-Nx}}{e^x-1}\, x^{s-1}\, dx \;=\; 0 \tag{8.15}$$

(uniformemente na região $\mathbb{C}_1$), o que estabelece a seguinte relação fundamental entre as funções gama e zeta:

$$\Gamma(s)\zeta(s) \;=\; \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\, dx \;, \tag{8.16}$$

válida em toda o domínio $\mathbb{C}_1$.

Para provar (8.15), escrevamos $s = s_0 + is_1$, com s_0 e s_1 reais e com $s_0 > 1$. Temos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty \frac{e^{-Nx}}{e^x-1}\, x^{s-1}\, dx\right| \;&\leq\; \int_0^\infty \frac{e^{-Nx}}{e^x-1}\, \left|x^{s-1}\right|\, dx \\
&=\; \int_0^\infty \frac{e^{-Nx}}{e^x-1}\, x^{s_0-1}\, dx \\
&\stackrel{y=Nx}{=}\; \frac{1}{N^{s_0}}\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{e^{y/N}-1}\, y^{s_0-1}\, dy \\
&\stackrel{(*)}{<}\; \frac{1}{N^{s_0}}\int_0^\infty e^{-y}\,\frac{1}{y/N}\, y^{s_0-1}\, dy \\
&\leq\; \frac{1}{N^{s_0-1}}\int_0^\infty e^{-y}\, y^{s_0-2}\, dy \\
&=\; \frac{\Gamma(s_0-1)}{N^{s_0-1}} \;.
\end{aligned}$$

(Acima, na passagem indicada por "(*)" usamos o fato que, para todo $t > 0$ vale[26] $\frac{1}{e^t-1} < \frac{1}{t}$). Portanto,

$$\lim_{N\to\infty}\left|\int_0^\infty \frac{e^{-Nx}}{e^x-1}\, x^{s-1}\right| \;<\; \lim_{N\to\infty}\frac{\Gamma(s_0-1)}{N^{s_0-1}} \;=\; 0 \;,$$

[26]Isso pode ser provado de diversas formas, por exemplo, da seguinte: segue da expansão em série de Taylor da função exponencial $e^t = \sum_{k=0}^\infty t^k/k! = 1 + t + \sum_{k=2}^\infty t^k/k!$ que $e^t - 1 > t$ para $t > 0$ (pois $\sum_{k=2}^\infty t^k/k! > 0$, já que cada termo é positivo). Disso segue diretamente a relação desejada: $\frac{1}{e^t-1} < \frac{1}{t}$

para $s_0 > 1$. Provando (8.16). Note-se que o limite é uniforme em compactos na região $\mathrm{Re}\,(s) > 1$.

• **Uma integração complexa**

Um salto importante realizado por Riemann foi considerar, ainda provisoriamente no caso $s \in \mathbb{C}_1$, a seguinte integral complexa:

$$\int_{\mathscr{R}_\delta} \frac{\exp\big(s\log(-z)\big)}{\exp(z)-1}\,\frac{1}{z}\,dz\;, \tag{8.17}$$

onde $\mathscr{R}_\delta$ é a curva em $\mathbb{C}$ definida para $\delta > 0$ na Figura 8.1, página 398.

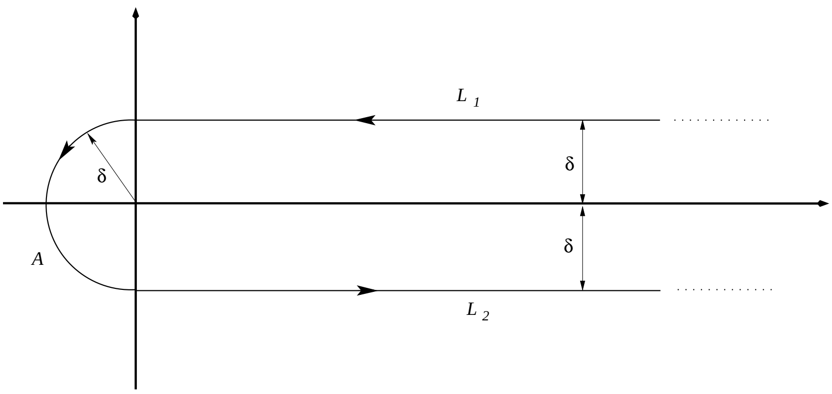

Figura 8.1: A curva $\mathscr{R}_\delta$, consistindo nas semirretas orientadas L_1 e L_2 (paralelas ao eixo real) e do arco orientado A, de raio δ e de ângulo de abertura π, centrado na origem.

Nota. Por conveniência, adotaremos $0 < \delta < 2\pi$ para garantir que $\mathscr{R}_\delta$ não envolva outras raízes da função $\exp(z) - 1$ que não a raiz em $z = 0$. ♣

O leitor deve observar que quando a variável de integração z "passeia" ao longo da curva $\mathscr{R}_\delta$, o argumento $-z$ da função log no integrando em (8.17) nunca passa pelo semi-eixo real negativo. Assim, $\log(-z)$ está definido dentro do ramo principal da função log (com o argumento no intervalo $(-\pi,\ \pi)$).

Disso se conclui que o integrando em (8.17) é analítico na variável z em todo o plano complexo, exceto no eixo real positivo. Consequentemente, a integral em (8.17) independe de δ (desde que este permaneça positivo) e, portanto, pode ser calculada tomando-se o limite $\delta \to 0$ com $\delta > 0$.

Para cada $\delta > 0$ a integral em (8.17) pode, naturalmente, ser escrita como soma de três integrais: ao longo da semirreta orientada L_1, ao longo da semirreta orientada L_2 e ao longo do arco orientado A. Denotaremos essas integrais por I_1, I_2 e I_3, respectivamente. Para as duas primeiras, temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_\infty^0 \frac{\exp\big(s\log(-x-i\delta)\big)}{\exp(x+i\delta)-1}\,\frac{1}{x+i\delta}\,dx \;=\; -\int_0^\infty \frac{\exp\big(s\log(-x-i\delta)\big)}{\exp(x+i\delta)-1}\,\frac{1}{x+i\delta}\,dx\;, \\ I_2 &= \int_0^\infty \frac{\exp\big(s\log(-x+i\delta)\big)}{\exp(x-i\delta)-1}\,\frac{1}{x-i\delta}\,dx\;. \end{aligned}$$

Agora, $\log(-x \pm i\delta) = \ln\sqrt{x^2+\delta^2} \pm i\arccos\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+\delta^2}}\right)$ expressão essa que, para $x > 0$, aproxima-se quando $\delta \to 0$ de $\ln x \pm i\pi$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \lim_{\delta\to 0} I_1 &= -e^{-is\pi}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx \;\overset{(8.16)}{=}\; -e^{-is\pi}\Gamma(s)\zeta(s)\;, \\ \lim_{\delta\to 0} I_1 &= e^{+is\pi}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx\;. \;\overset{(8.16)}{=}\; e^{is\pi}\Gamma(s)\zeta(s) \end{aligned}$$

A integral I_3 é dada por (tomando-se $z = \delta e^{i\varphi}$ com $\varphi \in [\pi/2, \ 3\pi/2]$ e $dz/z = id\varphi$)

$$I_3 \ = \ i\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\exp\big(s\log(-\delta e^{i\varphi})\big)}{\exp(\delta e^{i\varphi})-1}\,d\varphi \ = \ i\delta^s e^{is\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{e^{is\varphi}}{\exp(\delta e^{i\varphi})-1}\,d\varphi \ .$$

Agora, $\exp(\delta e^{i\varphi})-1 = e^{\delta\cos\varphi}e^{i\delta\,\mathrm{sen}\varphi}-1 = \Big(e^{\delta\cos\varphi}\cos\big(\delta\,\mathrm{sen}\varphi\big)-1\Big)+ie^{\delta\cos\varphi}\,\mathrm{sen}\big(\delta\,\mathrm{sen}\varphi\big)$. Logo,

$$\begin{aligned}\big|\exp(\delta e^{i\varphi})-1\big|^2 \ &= \ \Big(e^{\delta\cos\varphi}\cos\big(\delta\,\mathrm{sen}\varphi\big)-1\Big)^2+e^{2\delta\cos\varphi}\,\mathrm{sen}^2\big(\delta\,\mathrm{sen}\varphi\big)\\ &= \ e^{2\delta\cos\varphi}+1-2e^{\delta\cos\varphi}\cos\big(\delta\,\mathrm{sen}\varphi\big) \ \geq \ e^{2\delta\cos\varphi}+1-2e^{\delta\cos\varphi}\\ &= \ \big(e^{\delta\cos\varphi}+1\big)^2 \ \geq \ \big(e^{-\delta}+1\big)^2 \ .\end{aligned}$$

Portanto, escrevendo-se novamente $s = s_0+is_1$,

$$\begin{aligned}\big|I_3\big| \ &\leq \ \left|i\delta^s e^{is\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{e^{is\varphi}}{\exp(\delta e^{i\varphi})-1}\,d\varphi\right| \ \leq \ \delta^{s_0}e^{-s_1\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{e^{-s_1\varphi}}{\big|\exp(\delta e^{i\varphi})-1\big|}\,d\varphi\\ &\leq \ \delta^{s_0}e^{-s_1\pi}\frac{1}{e^{-\delta}+1}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}e^{-s_1\varphi}\,d\varphi \ = \ 2\pi\delta^{s_0}e^{-2s_1\pi}\frac{\mathrm{senh}\big(s_1\pi/2\big)}{s_1}\frac{1}{\big(e^{-\delta}+1\big)} \ ,\end{aligned}$$

donde se extrai que $\lim_{\delta\to 0} I_3 = 0$, devido ao fator δ^{s_0}.

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{R}_\delta}\frac{\exp\big(s\log(-z)\big)}{\exp(z)-1}\,\frac{1}{z}\,dz \ &= \ I_1+I_2+I_3 \ = \ \lim_{\delta\to 0}\big(I_1+I_2+I_3\big)\\ &= \ -e^{-is\pi}\Gamma(s)\zeta(s)+e^{is\pi}\Gamma(s)\zeta(s) \ = \ 2i\,\mathrm{sen}\big(s\pi\big)\Gamma(s)\zeta(s)\end{aligned}$$

ou seja,

$$\zeta(s) \ = \ \frac{1}{2i\,\mathrm{sen}\big(s\pi\big)\Gamma(s)}\int_{\mathscr{R}_\delta}\frac{\exp\big(s\log(-z)\big)}{\exp(z)-1}\,\frac{1}{z}\,dz \ . \tag{8.18}$$

Fazendo uso da *fórmula de reflexão de Euler*, relação (7.39), segue da última igualdade que

$$\zeta(s) \ = \ \frac{1}{2\pi i}\Gamma(1-s)\int_{\mathscr{R}_\delta}\frac{\exp\big(s\log(-z)\big)}{\exp(z)-1}\,\frac{1}{z}\,dz \ . \tag{8.19}$$

Essas importantes relações foram obtidas por Riemann no trabalho supracitado. Note-se que, de acordo com a dedução acima, as mesmas são válidas para $s \in \mathbb{C}_1$. A razão, porém, de por que essas relações são importantes reside no fato de o lado direito de ambas poder ser analiticamente continuado em toda a região $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Esse é nosso próximo assunto.

• **Continuação analítica de (8.19)**

Afirmamos que a integral

$$\int_{\mathscr{R}_\delta}\frac{\exp\big(s\log(-z)\big)}{\exp(z)-1}\,\frac{1}{z}\,dz \tag{8.20}$$

define uma função analítica em s para todo $s \in \mathbb{C}$. Para estabelecer isso, observemos primeiro que, para cada $z \in \mathscr{R}_\delta$, a função de s dada por $\exp\big(s\log(-z)\big)$ é (evidentemente) analítica para todo $s \in \mathbb{C}$. Assim, é suficiente demonstrar que a integral em (8.20) é absolutamente convergente para todo $s \in \mathbb{C}$. Para tal, é suficiente demonstrar que as integrais que definem as funções I_1 e I_2, acima, são absolutamente convergente para todo $s \in \mathbb{C}$. Para tal, precisamos obter um majorante para

$$\left|\frac{\exp\big(s\log(-x\pm i\delta)\big)}{\exp(x\mp i\delta)-1}\,\frac{1}{x\mp i\delta}\right| ,$$

com $x > 0$. Escrevendo $s = s_0 + is_1$, com $s_0,\ s_1 \in \mathbb{R}$, arbitrários, e $\log(-x \pm i\delta) = \ln\left(\sqrt{x^2+\delta^2}\right) + i\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+\delta^2}}\right)$ temos

$$\left|\exp\big(s\log(-x\pm i\delta)\big)\right| \;\leq\; e^{s_0\ln\left(\sqrt{x^2+\delta^2}\right)-s_1\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+\delta^2}}\right)} \;\leq\; \left(x^2+\delta^2\right)^{s_0/2}e^{|s_1|\pi} .$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\Big|\exp(x\mp i\delta)-1\Big| \;&=\; \Big|e^x\cos\delta-1+ie^x\,\mathrm{sen}\delta\Big| \;=\; \sqrt{(e^x\cos\delta-1)^2+e^{2x}\,\mathrm{sen}^2(\delta)}\\ &=\; \sqrt{e^{2x}+1-2e^x\cos\delta} \;\geq\; \sqrt{e^{2x}+1-2e^x} \;=\; e^x-1 .\end{aligned}$$

Por fim, $|x+i\delta| = \sqrt{x^2+\delta^2}$. Reunindo esses fatos, podemos afirmar que

$$\left|\frac{\exp\big(s\log(-x\pm i\delta)\big)}{\exp(x\mp i\delta)-1}\,\frac{1}{x\mp i\delta}\right| \;\leq\; e^{|s_1|\pi}\frac{\left(x^2+\delta^2\right)^{(s_0-1)/2}}{e^x-1} .$$

Com isso, fica claro que para $a > 0$, fixo, tem-se

$$\int_a^\infty\left|\frac{\exp\big(s\log(-x\pm i\delta)\big)}{\exp(x\mp i\delta)-1}\,\frac{1}{x\mp i\delta}\right|dx \;\leq\; e^{|s_1|\pi}\int_a^\infty\frac{\left(x^2+\delta^2\right)^{(s_0-1)/2}}{e^x-1}\,dx \;<\; \infty ,$$

a finitude da última integração sendo devida à presença do fator $(e^x-1)^{-1} \approx e^{-x}$ (para x "grande"), que domina o fator $\left(x^2+\delta^2\right)^{(s_0-1)/2} \approx x^{s_0-1}$ (para x "grande") qualquer que seja valor de s_0.

Concluímos que a integral em (8.20) é absolutamente convergente para todo $s \in \mathbb{C}$ e, portanto, define uma função analítica para todo $s \in \mathbb{C}$.

A conclusão importante é que o lado direito da relação (8.19) pode ser considerada uma extensão de ζ em todos os pontos $s \in \mathbb{C}$ para os quais $\Gamma(1-s)$ é analítica. Da estrutura analítica da função gama de Euler (Proposição 7.1, página 346) sabemos que $\Gamma(1-s)$ possui polos simples quando $1-s = 0,\ -1,\ -2,\ -3, \ldots$, ou seja, para $s \in \mathbb{N}$.

Assim, concluímos provisoriamente que (8.19) define uma extensão analítica de de ζ ao conjunto $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N} = \mathbb{C}\setminus\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$, sendo que nos pontos $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ a função $\zeta(s)$ pode no máximo ter polos simples.

Sabemos, porém, que $\zeta(s)$ é finita para s real com $s > 1$. Portanto, (8.19) define uma extensão analítica de ζ ao conjunto $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, sendo que no ponto 1 a função ζ possui um polo simples.

Observações. Como o fator $\Gamma(1-s)$ certamente possui um polo em $s = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$, deve ser valer que a integral $\int_{\mathscr{R}_\delta}\frac{\exp\big(s\log(-z)\big)}{\exp(z)-1}\,\frac{1}{z}\,dz$ anula-se nesses pontos. Esse fato pode ser constatado diretamente, pois para $s = n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$, a integral vale

$$\int_{\mathscr{R}_\delta}\frac{\exp\big(n\log(-z)\big)}{\exp(z)-1}\,\frac{1}{z}\,dz \;=(-1)^n\int_{\mathscr{R}_\delta}\frac{z^{n-1}}{\exp(z)-1}\,dz \;=\; (-1)^n\int_{\mathscr{C}_\delta}\frac{z^{n-1}}{\exp(z)-1}\,dz \;=0 ,$$

onde $\mathscr{C}_\delta$ é o círculo de raio δ centrado na origem e orientado no sentido horário e onde, na última igualdade, usamos o Teorema de Cauchy, pois o integrando é analítico em z no interior do disco limitado por $\mathscr{C}_\delta$ (no caso em que $n = 1$ isso não é verdade).

É interessante ainda notar que para $n = 1$ a integral vale

$$\int_{\mathscr{C}_\delta}\frac{1}{\exp(z)-1}\,dz \;=\; \int_{\mathscr{C}_\delta}\frac{1}{z}L(z)\,dz \;=\; 2\pi iL(0) \;=\; 2\pi i ,$$

(pelo Teorema dos Resíduos), onde $L(z) := \frac{z}{\exp(z)-1}$ com $L(0) = 1$, como facilmente se constata.

Concluímos disso e de (8.19) que o resíduo de ζ no polo 1 é igual ao resíduo da função $-\Gamma(1-s)$ no ponto $s = 1$, que é igual ao resíduo da função gama de Euler $\Gamma(z)$ em $z = 0$, o qual vale $+1$, segundo a Proposição 7.1, página 346. ♣

• **Coletando resultados**

Resumimos nossos resultados sobre a estrutura analítica da função zeta de Riemann na seguinte

Proposição 8.5 *A função zeta de Riemann, definida no domínio* $\mathbb{C}_1 := \{s \in \mathbb{C}, \ \mathrm{Re}(s) > 1\}$*, por*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{8.21}$$

é analítica nessa região e possui uma extensão analítica a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ *dada por*

$$\zeta(s) = \frac{1}{2\pi i}\Gamma(1-s) \int_{\mathscr{R}_\delta} \frac{\exp\big(s\log(-z)\big)}{\exp(z)-1} \frac{1}{z}\, dz , \tag{8.22}$$

onde, para $0 < \delta < 2\pi$*, a curva orientada* $\mathscr{R}_\delta$ *é descrita na Figura 8.1, página 398. No ponto* $s = 1$ *a função* $\zeta(s)$ *apresenta um polo simples, cujo resíduo vale* 1*.* □

E. 8.3 *Exercício.* Prove que $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\overline{s})$ para todo $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. ✠

• **A função η de Dirichlet**

E. 8.4 *Exercício.* A chamada *função η de Dirichlet* é definida para $s \in \mathbb{C}_1$ por

$$\eta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} . \tag{8.23}$$

Sua analiticidade em $\mathbb{C}_1$ é garantida pelos mesmos argumentos usados para provar a analiticidade da função ζ nesse domínio. A função η de Dirichlet é também denominada *função ζ alternante*, devido aos fatores $(-1)^{n-1}$ que distinguem sua definição da definição (8.9) de ζ em $\mathbb{C}_1$. Ambas as funções, porém, são intimamente ligadas.

Mostre que para todo $s \in \mathbb{C}_1$ vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \big(1 - 2^{1-s}\big)\zeta(s) , \tag{8.24}$$

ou seja,

$$\eta(s) = \big(1 - 2^{1-s}\big)\zeta(s) , \quad s \in \mathbb{C}_1 . \tag{8.25}$$

Sugestão: explore a convergência absoluta da série de Dirichlet do lado esquerdo de (8.24) e da série de Dirichlet que define $\zeta(s)$ em (8.9).

Como a função $\big(1 - 2^{1-s}\big)$ tem um zero simples em $s = 1$, as propriedades de analiticidade de ζ e a relação $\eta(s) = \big(1 - 2^{1-s}\big)\zeta(s)$ garantem que η pode ser analiticamente estendida a todo o plano complexo $\mathbb{C}$. Trata-se de uma função inteira, portanto.

A série do lado direito em (8.23) é convergente (mas não absolutamente convergente) na região $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ e também converge a $\big(1 - 2^{1-s}\big)\zeta(s)$ nessa região. Além disso, é possível provar que a série do lado esquerdo é somável no sentido de Abel para todo $s \in \mathbb{C}$, com a somatória de Abel convergindo também a $\big(1 - 2^{1-s}\big)\zeta(s)$. ✠

8.5 Os Valores de ζ nos Inteiros

É possível computar valores explícitos para a função ζ de Riemann em alguns pontos especiais, notadamente, nos números inteiros positivos pares, nos números inteiros negativos e em $s = 0$.

• **Os Valores de ζ nos Inteiros Positivos Pares**

Na Seção 6.1.3, página 319, mostramos como a função ζ de Riemann pode ser explicitamente determinada nos números inteiros positivos pares com uso dos chamados *números de Bernoulli* e apresentamos a seguinte expressão:

$$\zeta(2m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = (-1)^{m+1} \frac{(2\pi)^{2m} B_{2m}}{2(2m)!} , \tag{8.26}$$

(vide relação (6.16)) válida para todo inteiro $m > 0$, expressão essa obtida por Euler em 1735. Assim, usando a Tabela 6.1, página 320, para os números de Bernoulli, obtemos os primeiros valores de ζ nos inteiros positivos pares:

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} , \\
\zeta(4) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} , \\
\zeta(6) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} , \\
\zeta(8) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450} , \\
\zeta(10) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555} .
\end{aligned}$$

Até o presente não são conhecidas fórmulas fechadas simples para os valores de ζ nos inteiros ímpares positivos. Em verdade, sabe-se muito pouco sobre esses valores. Sabe-se que $\zeta(3)$ é um irracional[27], sabe-se que ao menos um dentre os números $\{\zeta(5),\ \zeta(7),\ \zeta(9),\ \zeta(11)\}$ é irracional[28] e sabe-se que há infinitos outros valores de ζ nos inteiros ímpares positivos que também são irracionais[29] sem que se possa ainda especificar quais.

• **Os valores de ζ nos inteiros negativos e em zero**

Para $s = m$, um inteiro negativo ou nulo, podemos escrever $\exp\big(s \log(-z)\big) = (-1)^m z^m$, função essa que não possui nenhuma linha de ramificação. Assim, temos que

$$\zeta(m) = (-1)^m \frac{|m|!}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_\delta} z^{m-2} \frac{z}{\exp(z) - 1}\, dz , \tag{8.27}$$

usando o fato que $\Gamma(1-m) = |m|!$. Na Seção 6.1.3, página 319, introduzimos os chamados *números de Bernoulli* através da representação em série de potências (6.9):

$$\frac{z}{e^z - 1} =: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n . \tag{8.28}$$

Introduzindo-a em (8.27), obtemos

$$\zeta(m) = (-1)^m \frac{|m|!}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_\delta} z^{m-2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) dz = (-1)^m \frac{|m|!}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \int_{\mathscr{C}_\delta} z^{m+n-2}\, dz = (-1)^m |m|! \frac{B_{1+|m|}}{(1+|m|)!} .$$

Pois, como é bem sabido, a integral $\int_{\mathscr{C}_\delta} z^{m+n-2}\, dz$ é nula exceto se $m + n - 2 = -1$, em cujo caso vale $2\pi i$. Obtemos assim, seguinte resultado geral: para todo $n \in \mathbb{N}_0$ vale

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} . \tag{8.29}$$

Sabemos da Seção 6.1.3, página 319, que os números de Bernoulli B_m são nulos quando m é um número ímpar maior ou igual a 3. Logo, concluímos que $\zeta(-n)$ anula-se quando n é par (exceto caso $n = 0$):

$$\zeta(-2k) = 0 , \quad \forall k \in \mathbb{N} . \tag{8.30}$$

[27] Roger Apéry, "Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, Astérisque, **61** (1979), 11–13. Vide também Alfred van der Poorten, "A proof that Euler missed. Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. An informal report", Math. Intell., **1** (1979), 195–203.

[28] Wadim Zudilin. "One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ is irrational". Russ. Math. Surv. 56 (4): 774–776 (2001).

[29] Tanguy Rivoal, "La fonction Zêta de Riemann prend une infinit'e de valeurs irrationnelles aux entiers impairs". Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, **331** (2000), 267–270.

Para $n = 0$ vale, por (8.29),

$$\zeta(0) \;=\; B_1 \;=\; -\frac{1}{2} \,. \tag{8.31}$$

Para inteiros negativos ímpares (todos da forma $1 - 2k$, com $k \in \mathbb{N}$), temos

$$\zeta(1-2k) \;=\; -\frac{B_{2k}}{2k} \,, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \,. \tag{8.32}$$

Usando a Tabela 6.1, página 320, para os números de Bernoulli, obtemos os primeiros valores de ζ nos inteiros negativos ímpares:

$$\zeta(-1) \;=\; -\frac{B_2}{2} \;=\; -\frac{1}{12} \,, \tag{8.33}$$

$$\zeta(-3) \;=\; -\frac{B_4}{4} \;=\; \frac{1}{120} \,, \tag{8.34}$$

$$\zeta(-5) \;=\; -\frac{B_6}{6} \;=\; -\frac{1}{252} \,, \tag{8.35}$$

$$\zeta(-7) \;=\; -\frac{B_8}{8} \;=\; \frac{1}{240} \,, \tag{8.36}$$

$$\zeta(-9) \;=\; -\frac{B_{10}}{10} \;=\; -\frac{5}{660} \,, \tag{8.37}$$

$$\zeta(-11) \;=\; -\frac{B_{12}}{12} \;=\; \frac{691}{32760} \,, \tag{8.38}$$

$$\zeta(-13) \;=\; -\frac{B_{14}}{14} \;=\; -\frac{7}{84} \,, \tag{8.39}$$

$$\zeta(-15) \;=\; -\frac{B_{16}}{16} \;=\; \frac{3617}{8169} \,. \tag{8.40}$$

8.5.1 Um Interlúdio. A Fórmula $1+2+3+4+5+\cdots = -1/12$ (?!) e Alguns de Seus Amigos

Como já dissemos, a relação (8.9) não é válida caso $\mathrm{Re}\,(s) \leq 1$. Se, no entanto, suspendêssemos por um momento o uso da razão, e admitíssemos a validade daquela expressão para $s = 0$ ou para os inteiros negativos, obteríamos algumas curiosas relações. Para a relação $\zeta(0) = -1/2$, por exemplo, poderíamos oferecer a seguinte leitura:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^0 \;=\; 1+1+1+1+\cdots \;=\; -\frac{1}{2} \,. \qquad (?!)$$

No mesmo espírito, teríamos para a relação (8.33) a seguinte interpretação:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^1 \;=\; 1+2+3+4+5+\cdots \;=\; -\frac{1}{12} \,. \qquad (?!)$$

A história dessa relação pode ser lida em [354]. Como $\zeta(-2) = 0$, teríamos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \;=\; 1+4+9+16+25+\cdots \;=\; 0 \,. \qquad (?!)$$

Com a relação (8.34) obteríamos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \;=\; 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots \;=\; +\frac{1}{120} \,. \qquad (?!)$$

E assim por diante.

Seria desnecessário dizer que essas relações são falsas (as séries são divergentes) e inconsistentes[30] mas, infelizmente, as mesmas são mencionadas (e mesmo usadas!) em uma certa literatura pseudocientífica sem as devidas ressalvas, cuidados e esclarecimentos.

Outros exemplos de relações paradoxais da mesma categoria podem ser obtidas se extrapolarmos a bem-conhecida identidade que fornece a soma de uma progressão geométrica infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \;=\; \frac{1}{1-z} \;,$$

para além de seu domínio de validade (o disco aberto $\big\{z \in \mathbb{C}, \;, |z| < 1\big\}$). Tomando-se irresponsavelmente $z = 2$, obteríamos a "identidade"

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots \;=\; -1 \;. \qquad (?!)$$

Tomando-se levianamente $z = -2$, obteríamos

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdots \;=\; \frac{1}{3} \;. \qquad (?!)$$

Para $z = -1$ teríamos, descaradamante,

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots \;=\; \frac{1}{2} \;. \qquad (?!)$$

As diversas curiosidades que encontramos acima não devem, porém, ser vistas com absoluto descaso, pois elas inspiraram grandes matemáticos – de Euler[31] no século XVIII a Ramanujan[32] no século XX – e os paradoxos delas decorrentes foram de fundamental importância para a percepção da necessidade de maior precisão e rigor lógico em demonstrações matemáticas, culminando com o desenvolvimento de noções como as de convergência e limite e conduzindo ao nascimento da Análise. Nomes como os de D'Alembert[33], Cauchy[34] e Weierstrass[35] foram fundamentais nessa transição.

Aquelas curiosidades inserem-se no interessantíssimo capítulo da Matemática que envolve o estudo de séries divergentes e seus diversos métodos de "renormalização" (para usar uma linguagem cara a físicos), que consistem em métodos de obtenção de resultados finitos a partir de séries divergentes. Há uma extensa literatura séria a respeito (e uma muito mais extensa literatura não séria). Para um belo texto clássico sobre séries divergentes recomendamos [169].

Um dentre tais métodos de obtenção de resultados finitos a partir de séries divergentes, aplicável a certas séries divergentes específicas, é a chamada *soma de Abel*[36]. Seja $\{x_n \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N}_0\}$ uma sequência de números reais. Define-se a *soma de Abel* dessa sequência por

$$\mathscr{A}\sum_{n=0}^{\infty} x_n \;:=\; \lim_{\substack{a\to 1\\ 0<a<1}} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a^n\, x_n \;, \tag{8.41}$$

caso os limites do lado direito existam (atenção: a ordem dos limites não pode ser alterada!).

Em alguns casos, a *soma de Abel* de uma sequência de números complexos resulta finita mesmo se a série associada à essa sequência divirja, ou seja, mesmo se o limite $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} x_n$ não exista. Um caso bem conhecido é o da sequência $\big\{x_n = (-1)^n, \; n \in \mathbb{N}_0\big\} = \{+1, \; -1, \; +1, \; -1, \; +1, \; \ldots\}$. Tem-se

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \;=\; \frac{(-1)^N + 1}{2} \;=\; \begin{cases} 1 \;, & N \text{ par,} \\[2ex] 0 \;, & N \text{ ímpar,} \end{cases}$$

[30]Por exemplo, somando as identidades $1+1+1+1+1+\cdots = -\frac{1}{2}$ e $1+2+3+4+5+\cdots = -\frac{1}{12}$ teríamos $2+3+4+5+6+\cdots = -\frac{7}{12}$, mas subtraindo 1 de ambos os lados de $1+2+3+4+5+\cdots = -\frac{1}{12}$ tem-se $2+3+4+5+6+\cdots = -\frac{13}{12}$.

[31]Leonhard Euler (1707–1783).

[32]Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887–1920).

[33]Jean Le Rond D'Alembert (1717–1783).

[34]Augustin Louis Cauchy (1789–1857).

[35]Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897).

[36]Niels Henrik Abel (1802–1829).

e claramente o limite $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} x_n$ não existe. Porém, para sua soma de Abel, tem-se

$$\mathscr{A}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \;=\; \lim_{\substack{a\to 1\\ a<1}}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a^n\,(-1)^n \;=\; \lim_{\substack{a\to 1\\ a<1}}\lim_{N\to\infty}\frac{1-(-a)^{N+1}}{1+a} \;=\; \lim_{\substack{a\to 1\\ a<1}}\frac{1}{1+a} \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

Com o mesmo abuso de linguagem de antes, essa relação pode ser lida como a afirmação que

$$1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots \;=\; \frac{1}{2}\,. \qquad (?!)$$

A série formal do lado esquerdo é conhecida historicamente como *série de Grandi*[37].

Outro método de "renormalização" de séries divergentes é a *soma de Cesàro*[38], que utilizamos no estudo de séries de Fourier na Seção 36.4.5, página 1843. Define-se a *soma de Cesàro* de uma sequência $\{x_n\in\mathbb{R},\; n\in\mathbb{N}_0\}$ por

$$\mathscr{C}\sum_{n=0}^{\infty} x_n \;:=\; \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{m} x_p\right)\,,$$

caso o limite do lado direito exista. Como se vê, a soma de Cesàro de uma sequência x_m é formada pelo limite (caso exista) da média das somas parciais da sequência x_m. É fácil de se ver, por exemplo, que para a sequência $\{x_n=(-1)^n,\; n\in\mathbb{N}_0\}$ vale também $\mathscr{C}\sum_{n=0}^{\infty} x_n = 1/2$.

E. 8.5 *Exercício.* Prove essa última afirmação (ou dê uma olhada na página 1844!). ✠

Caso o limite $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} x_n$ exista, tanto a soma de Abel quanto a de Cesàro coincidirão com o mesmo[39]. No caso de séries divergentes (ou seja, para as quais o limite $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} x_n$ não existe) nem sempre a soma de Abel e de Cesàro fornecem resultados finitos (as somas de Abel e de Cesàro da sequência $\{n,\; n\in\mathbb{N}_0\}=\{0,\;1,\;2,\;3,\;\ldots\}$, por exemplo, são divergentes) e, quando o fazem, nem sempre fornecem resultados coincidentes.

E. 8.6 *Exercício.* Mostre que a soma de Abel da sequência $\big\{(-1)^{n+1}n,\; n\in\mathbb{N}_0\big\}=\{0,\;1,\;-2,\;3,\;-4,\;5,\;-6,\;7,\;\ldots\}$ vale

$$\mathscr{A}\sum_{n=0}^{N}(-1)^{n+1}n \;=\; \frac{1}{4}\,. \tag{8.42}$$

Sugestão: Use o fato que

$$\sum_{n=0}^{N} a^n(-1)^{n+1}n \;=\; -a\frac{d}{da}\left(\sum_{n=0}^{N}(-a)^n\right) \;=\; -a\frac{d}{da}\left(\frac{1-(-a)^{N+1}}{1+a}\right) \;=\; \frac{a+\big((1+a)N+1\big)(-a)^{N+1}}{(1+a)^2}\,.$$

Informalmente, a relação (8.42) pode ser interpretada como a afirmação que

$$1-2+3-4+5-6+\cdots \;=\; \frac{1}{4}\,. \qquad (?!)$$

Essa identidade paradoxal foi obtida primeiramente por Euler em 1749.

A soma de Cesàro da mesma sequência, ou seja $\mathscr{C}\sum_{n=0}^{N}(-1)^{n+1}n$, no entanto, diverge. Prove isso. ✠

* ** *** **** ***** ****** ******* ******** ********* ********** ***********

Além das somas de Abel e de Cesàro há muitos outros métodos de "renormalização" de séries divergentes, com graus de aplicabilidade distintos. Para um estudo mais aprofundado dessas questões, vide [169].

• Séries generalizadas

Para o leitor mais avançado descrevemos neste tópico em que estrutura matemática as noções de somas generalizadas, como as de Abel e de Cesàro, acima, se inserem. Não faremos uso disso no que segue.

[37]Luigi Guido Grandi (1671–1742). O trabalho de Grandi sobre essa série dada de 1703.
[38]Ernesto Cesàro (1859–1906).
[39]No caso da soma de Abel esse fato é conhecido como *Teorema de Abel*. Para a demonstração da afirmação no caso da soma de Cesàro, vide Seção 36.4.6, página 1843.

Seja $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} = \Big\{ \big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big),\ x_k \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0 \Big\}$ o conjunto de todas as sequências de números reais. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ possui uma estrutura natural de espaço vetorial com as operações óbvias de soma e multiplicação por escalares:

$$\begin{aligned} \big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big) + \big(y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\big) &= \big(x_0+y_0,\ x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \ldots\big) , \\ \lambda\big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big) &= \big(\lambda x_0,\ \lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \ldots\big) . \end{aligned}$$

Denotamos por $\ell_1(\mathbb{N}_0) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ o conjunto das sequências somáveis, ou seja, das sequências $\big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big)$ tais que o limite $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} |x_n|$ exista. São bem conhecidos os fatos que 1º : se $\big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big) \in \ell_1(\mathbb{N}_0)$ então a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N} x_n$ é convergente; 2º : se $\pi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ for bijetora, então $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\pi(n)}$; 3º $\ell_1(\mathbb{N}_0)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$.

Para demonstrações dos fatos 1º e 2º , vide, e.g., [390]. Para uma demonstração do fato 3º , vide Seção 24.5.1, página 1278 (em particular, vide Proposição 24.13, página 1280).

Uma *série generalizada* ou *soma generalizada* $\mathscr{S}$ em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ é uma função definida em um domínio $\mathrm{Dom}\,(\mathscr{S}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ com valores em $\mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

1. $\ell_1(\mathbb{N}_0) \subset \mathrm{Dom}\,(\mathscr{S}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$.
2. Para toda sequência $\big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big) \in \mathrm{Dom}\,(\mathscr{S}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ vale
$$\mathscr{S}\Big(\lambda\big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big)\Big) = \mathscr{S}\big(\lambda x_0,\ \lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \ldots\big) = \lambda\mathscr{S}\big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big) .$$
3. Se $\big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big) \in \mathrm{Dom}\,(\mathscr{S})$, então para todo $M \in \mathbb{N}$ tem-se
$$\mathscr{S}\left(\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{M\,\text{vezes}},\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\right) = \mathscr{S}\big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big) .$$
4. Caso exista $N \in \mathbb{N}_0$ tal que a sequência $\big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big)$ tenha a propriedade que $x_k = 0$ para todo $k > N$, então $\big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big) \in \mathrm{Dom}\,(\mathscr{S})$ e vale
$$\mathscr{S}\big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big) = \sum_{n=0}^{N} x_n .$$
5. Caso o limite $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N} x_n \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ exista, então
$$\mathscr{S}\big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n .$$
6. $\mathscr{S}$ é um funcional linear em $\ell_1(\mathbb{N}_0)$, ou seja, se $\big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big)$ e $\big(y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\big)$ são elementos de $\ell_1(\mathbb{N}_0)$ e $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, então
$$\mathscr{S}\Big(\alpha\big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big) + \beta\big(y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\big)\Big) = \alpha\mathscr{S}\big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big) + \beta\mathscr{S}\big(y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\big) .$$

Nota. De acordo com nossa formulação acima, o item 4 segue do item 5. Destacamos ambos, porém, pois por vezes o item 5 não é considerado. ♣

Como se vê, a noção de soma generalizada generaliza a de série associada a uma sequência. Por isso $\mathscr{S}\big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\big)$ é por vezes expresso como $\mathscr{S}\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. As relações supostas nos itens 2-6 significam nessa notação, portanto,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{S}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda x_n) &= \lambda\mathscr{S}\sum_{n=0}^{\infty} x_n\ , \\
\mathscr{S}\sum_{n=0}^{\infty} x_n &= \sum_{n=0}^{N} x_n\ , \qquad \text{caso } x_k = 0 \text{ para todo } k > N\ , \\
\mathscr{S}\sum_{n=0}^{\infty} x_n &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} x_n\ , \qquad \text{caso esse limite exista}\ , \\
\mathscr{S}\sum_{n=0}^{\infty} x_n &= \mathscr{S}\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+M+1} \qquad \text{para todo } M \in \mathbb{N} \text{ para o qual valha } x_0 = \cdots = x_M = 0\ , \\
\mathscr{S}\sum_{n=0}^{\infty}\big(\alpha x_n + \beta y_n\big) &= \alpha\mathscr{S}\sum_{n=0}^{\infty} x_n + \beta\mathscr{S}\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \alpha\sum_{n=0}^{\infty} x_n + \beta\sum_{n=0}^{\infty} y_n\ ,
\end{aligned}
$$

a última relação valendo para $(x_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ e $(y_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ em $\ell_1(\mathbb{N}_0)$ e quaisquer $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

As somas de Abel e de Cesàro definidas mais acima são exemplos de séries generalizadas. Seus domínios são estritamente menores que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$.

8.6 A Relação Funcional de Riemann

A função zeta de Riemann satisfaz uma importante relação, conhecida como *relação funcional da função* ζ, ou *relação funcional de Riemann*:

$$
\zeta(s) \;=\; 2(2\pi)^{s-1}\,\mathrm{sen}\big(\pi s/2\big)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)\ , \tag{8.43}
$$

válida para todo $s \in \mathbb{C} \setminus \{0,\ 1\}$.

Essa relação já era conhecida de Euler, ainda que o mesmo não apresentasse demonstração da mesma. Em seu célebre trabalho (vide nota-de-rodapé 12, página 390), Riemann ofereceu duas demonstrações dessa relação. No que segue, apresentaremos a segunda delas, mais simples. A primeira pode ser encontrada em diversas referências, por exemplo, em [111]. A referência [420] oferece diversas outras demonstrações da relação (8.43).

Antes da demonstração, apresentemos algumas consequências de (8.43). A primeira é obtida usando-se as fórmulas de reflexão e de duplicação da função gama, eqs. (7.39) e (7.53), páginas 356 e 360, respectivamente.

• A função ξ de Riemann

Usando a fórmula de reflexão (7.39) com $z = s/2$, temos

$$
\mathrm{sen}\big(\pi s/2\big) \overset{(7.39)}{=} \frac{\pi}{\Gamma(s/2)\Gamma(1-s/2)}
$$

e inserindo isso em (8.43), obtemos

$$
\zeta(s) \overset{(7.39)}{=} 2(2\pi)^{s-1}\frac{\pi}{\Gamma(s/2)\Gamma(1-s/2)}\Gamma(1-s)\zeta(1-s)\ . \tag{8.44}
$$

Substituindo z por $(1-s)/2$ na fórmula de duplicação (7.53), tem-se

$$
\Gamma(1-s) \overset{(7.53)}{=} \frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\ .
$$

Inserindo-se isso em (8.44), obtemos

$$\zeta(s) \stackrel{(7.39)}{=} \pi^{s-1/2}\frac{1}{\Gamma(s/2)}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) ,$$

o que equivale à identidade funcional

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \;=\; \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) , \tag{8.45}$$

válida para todo $s \in \mathbb{C} \setminus \{0,\ 1\}$. O que há de importante nessa relação é que um lado é obtido do outro pela troca $s \to 1-s$. Isso aponta para uma simetria especial associada à função zeta de Riemann cuja importância não passou desapercebida por Riemann.

Como já vimos, a função $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ tem polos simples nos pontos $s = -2n$, $n \in \mathbb{N}_0$, sendo essas suas únicas singularidades. Justamente nesses pontos (exceto caso $n = 0$) a função $\zeta(s)$ anula-se (vide (8.30)). Logo, a função $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ é analítica em toda parte, exceto por polos simples em $s = 0$ e e $s = 1$ (este último sendo um polo de $\zeta(s)$). Multiplicando-se ambos os lados de (8.45) pelo fator $s(s-1)/2$ (que também é invariante pela troca $s \to 1-s$), obtemos a identidade

$$\xi(s) \;=\; \xi(1-s) , \qquad \forall\, s \in \mathbb{C} , \tag{8.46}$$

onde introduzimos a chamada *função ξ de Riemann*, definida por

$$\xi(s) \;:=\; \pi^{-\frac{s}{2}}\frac{s(s-1)}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) . \tag{8.47}$$

Pelas considerações acima, $\xi(s)$ é uma função inteira, ou seja, analítica em toda parte, pois os polos simples de $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ são eliminados pelo fator $s(1-s)/2$. Devido a essas propriedades a função ξ desempenha um papel fundamental em estudos mais aprofundados da função zeta de Riemann, com consequências importantes na Teoria de Números.

Definindo-se

$$\Xi(z) \;:=\; \xi\left(\frac{1}{2} + iz\right) , \qquad z \in \mathbb{C} , \tag{8.48}$$

a relação funcional (8.46) fica

$$\Xi(z) \;=\; \Xi(-z) , \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} . \tag{8.49}$$

Comentamos, por fim, que a seguinte afirmação é evidente pelo Corolário 8.1, página 394, por (8.30) e pela relação fundamental:

Corolário 8.2 *A função $\zeta(s)$ não se anula na região* $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ *e na região* $\mathrm{Re}\,(s) < 0$*, exceto quanto s for um inteiro par negativo. Consequentemente, a função $\xi(s)$ não se anula na região* $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ *e na região* $\mathrm{Re}\,(s) < 0$. □

• A conjectura de Riemann

Como já vimos, a função ζ tem zeros nos números inteiros pares negativos. Esses zeros são denominados *zeros triviais da função zeta de Riemann* Como $\zeta(s)$ tem zeros nos números inteiros pares negativos e a função $\Gamma(s/2)$ tem polos simples nesses pontos, concluímos da definição (8.47) que ξ não se anula nesses pontos. A função ξ também não se anula em $s = 0$ e $s = 1$, como já comentamos acima. A função gama de Euler, como já comentamos, não tem zeros no plano complexo.

Podemos então colocar a seguinte questão: teria ζ outros zeros no plano complexo que não os inteiros negativos? Esses zeros seriam os únicos zeros de ξ e corresponderiam também a zeros de Ξ. Com base na relação (8.49) e em uma intuição obscura que até o dia de hoje não foi devidamente compreendida, Riemann conjecturou em seu trabalho clássico que $\Xi(z)$ teria apenas zeros para z real. Isso corresponde a dizer que além dos zeros triviais, $\zeta(s)$ teria zeros somente em pontos tais que $\mathrm{Re}\,(s) = 1/2$.

A demonstração dessa conjectura permanece até hoje um extraordinário desafio, considerado um dos maiores da Matemática e, quiçá, o mais importante. Sua validade teria consequências importantes para o entendimento da distribuição dos números primos e para outros problemas da Teoria de Números.

Apesar do enorme esforço intelectual investido na demonstração dessa conjectura, poucos são os resultados obtidos até o momento. Sabe-se que ζ possui infinitos zeros não triviais (vide e.g. [420]), sabe-se que todos estão na faixa $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ denominada *faixa crítica*. Mencionamos também que em dois trabalhos[40] Hardy[41] e Littlewood[42] demonstraram que há infinitos zeros de ζ sobre a *linha crítica* $\operatorname{Re}(s) = 1/2$.

• **Usos da relação funcional**

A relação funcional (8.43) fornece o valor de $\zeta(s)$ em função de $\zeta(1-s)$ e vice-versa, permitindo-se obter os valores de ζ na região $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_1$ a partir dos valores de ζ em $\mathbb{C}_1$ (definidos por (8.9)). Tomando, por exemplo, $s = 1 - 2n$, $n \in \mathbb{N}$, em (8.43), obtemos

$$\zeta(1-2n) \;=\; 2(2\pi)^{-2n} \operatorname{sen}\big(\pi(1-2n)/2\big)\Gamma(2n)\zeta(2n) \stackrel{(8.26)}{=} -\frac{B_{2n}}{2n} ,$$

o que fornece mais uma demonstração de (8.32). Tomando-se $s = -2n$, $n \in \mathbb{N}$, em (8.43), obtemos $\zeta(-2n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, o que fornece mais uma demonstração de (8.30).

8.6.1 Uma Demonstração da Relação Funcional de Riemann

Por simplicidade apresentaremos nestas notas apenas a segunda demonstração original apresentada por Riemann em seu trabalho seminal. Para diversas outras demonstrações, vide [420].

A chamada *Função θ de Jacobi*[43], denotada por θ, é definida por

$$\theta(z,\ t) \;:=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n z - \pi n^2 t} , \tag{8.50}$$

com $z \in \mathbb{C}$ e $t \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(t) > 0$. Ela satisfaz a identidade funcional

$$\theta(z,\ t) \;=\; \frac{e^{-\frac{\pi z^2}{t}}}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{-iz}{t},\ \frac{1}{t}\right) . \tag{8.51}$$

Para uma demonstração, vide Seção 37.2.3.2, página 1911. Frequentemente denota-se $\theta(0,\ t)$ por $\theta(t)$, $t \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(t) > 0$. Assim, tem-se,

$$\theta(t) \;:=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \;=\; 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} . \tag{8.52}$$

Pela identidade funcional (8.51), vale

$$\theta(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{t}} , \tag{8.53}$$

também para $\operatorname{Re}(t) > 0$.

Consideremos provisoriamente $s \in \mathbb{C}_1$. Se na expressão $\Gamma(s/2) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s/2-1} dx$ fizermos a mudança de variáveis $x = n^2 \pi t$ (com $n \in \mathbb{N}$), obtemos

$$\frac{1}{n^s}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2) \;=\; \int_0^\infty e^{-n^2\pi t} t^{s/2-1}\, dt .$$

Somando-se ambos os lados dessa expressão para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma(s/2) \;=\; \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t}\right) t^{s/2-1}\, dt \stackrel{(8.52)}{=} \frac{1}{2}\int_0^\infty \big(\theta(t) - 1\big)\, t^{s/2-1}\, dt . \tag{8.54}$$

[40] G. H. Hardy, "Sur les Zéros de la Fonction $\zeta(s)$ de Riemann", C. R. Acad. Sci. Paris **158**: 1012–1014, JFM 45.0716.04 (1914). G. H. Hardy and J. E. Littlewood, "The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line", Math. Z. **10** (3–4): p. 283–317 (1921), doi:10.1007/BF01211614.

[41] Godfrey Harold Hardy (1877–1947).

[42] John Edensor Littlewood (1885–1977).

[43] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851).

E. 8.7 *Exercício*. Justifique a troca da ordem da integração pela somatória realizada acima. ✠

Vamos agora fazer uma série de manipulações na integral do lado direito de (8.54), começando por quebrá-la em dois pedaços, um para o intervalo em $[0,\ 1]$ e outra para $(1,\ \infty)$. Temos,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \big(\theta(t)-1\big)\, t^{s/2-1}\, dt \quad &= \quad \int_0^1 \big(\theta(t)-1\big)\, t^{s/2-1}\, dt + \int_1^\infty \big(\theta(t)-1\big)\, t^{s/2-1}\, dt \\
&\overset{u=t^{-1}}{=} \quad \int_1^\infty \left(\theta\left(\frac{1}{u}\right)-1\right) u^{-s/2-1}\, du + \int_1^\infty \big(\theta(t)-1\big)\, t^{s/2-1}\, dt \\
&\overset{(8.53)}{=} \quad \int_1^\infty \Big(u^{1/2}\theta(u)-1\Big)\, u^{-s/2-1}\, du + \int_1^\infty \big(\theta(u)-1\big)\, u^{s/2-1}\, du \\
&= \quad \int_1^\infty \big(\theta(u)-1\big)\Big(u^{(1-s)/2-1}+u^{s/2-1}\Big)\, du + \int_1^\infty \Big(u^{-(s+1)/2}-u^{-s/2-1}\Big)\, du
\end{aligned}$$

Como $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, tem-se

$$\int_1^\infty u^{-(s+1)/2}\, du \;=\; \frac{2}{s-1} \qquad \text{e} \qquad \int_1^\infty u^{-s/2-1}\, du \;=\; \frac{2}{s}\,.$$

Retornando com esses fatos a (8.54), obtemos

$$\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma(s/2) \;=\; \frac{1}{2}\int_1^\infty \big(\theta(u)-1\big)\Big(u^{(1-s)/2-1}+u^{s/2-1}\Big)\, du + \frac{1}{s(s-1)}\,. \tag{8.55}$$

Do fato que $\theta(u)-1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}$ vai a zero para $u\to\infty$ mais rapidamente que qualquer potência em u segue facilmente que a integral do lado direito de (8.55) é absolutamente convergente. Como as funções $s \mapsto u^{(1-s)/2-1}$ e $s \mapsto u^{s/2-1}$ são, para cada $u \geq 1$, analíticas para todo $s \in \mathbb{C}$, concluímos que a aquela integral é analítica para todo $s \in \mathbb{C}$. As singularidades do lado direito de (8.55) provém apenas dos polos simples de $\frac{1}{s(s-1)}$ em $s = 0$ e em $s = 1$. Esses são, alias precisamente as singularidades do lado esquerdo de (8.55). Concluímos disso que (8.55) é válida não apenas em $\mathbb{C}_1$, mas em todo $\mathbb{C}\setminus\{0,\ 1\}$.

Sucede, agora, que o lado direito de (8.55) é ostensivamente invariante pela troca $s \to 1-s$ (que também deixa invariante o conjunto $\mathbb{C}\setminus\{0,\ 1\}$). Logo, concluímos que vale a identidade

$$\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma(s/2) \;=\; \pi^{-(1-s)/2}\zeta(1-s)\Gamma\big((1-s)/2\big) \tag{8.56}$$

para todo $s \in \mathbb{C}\setminus\{0,\ 1\}$. Isso concluiu a prova da relação funcional (8.45) e, portanto, de (8.43).

8.7 Exercícios Adicionais

E. 8.8 *Exercício.* Usando (8.16) e (8.26), mostre que

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m-1}}{e^x - 1}\, dx \;=\; (-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m} B_{2m}}{4m}\,, \tag{8.57}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, com B_{2m} sendo números de Bernoulli. ✠

E. 8.9 *Exercício.* A expressão (8.57) tem um uso relevante na Física Quântica. De acordo com a *Lei de Planck*[44], a densidade de energia eletromagnética por unidade de frequência de uma cavidade fechada, no vácuo, em equilíbrio térmico com suas paredes à temperatura T é dada por

$$\rho_\nu(T) \;=\; \frac{8\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/(\kappa T)} - 1}\,, \tag{8.58}$$

onde ν é a frequência, T é a temperatura, c é a velocidade da luz, h é a constante de Planck e κ é a constante de Boltzmann. Portanto, a densidade de energia eletromagnética dessa cavidade a temperatura T é dada por $\int_0^\infty \rho_\nu(T)\, d\nu$. Usando (8.57) no caso $m = 2$, mostre que essa densidade de energia radiante é dada por

$$\int_0^\infty \rho_\nu(T)\; d\nu \;=\; \frac{8\pi^5}{15}\frac{\kappa^4}{c^3h^3}T^4\,. \tag{8.59}$$

Essa expressão é aparentada (ainda que conceitualmente não idêntica) à bem-conhecida *Lei de Stefan-Boltzmann*[45][46] para a radiação de um *corpo negro*. Para um excelente tratamento físico do problema da radiação de corpo negro, vide [385]. ✠

E. 8.10 *Exercício.* Seja $a \in \mathbb{R}$ com $0 < |a| < 1$. Multiplicando (8.57) por $a^{2m-1}/(2m-1)!$ e somando para todo $m \geq 1$, obtenha

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1}\left(\sum_{m=1}^\infty \frac{(ax)^{2m-1}}{(2m-1)!}\right) dx \;=\; -\frac{1}{2a}\sum_{m=1}^\infty (-1)^m \frac{(2\pi a)^{2m} B_{2m}}{(2m)!}\,.$$

Justifique a troca de ordem entre a soma e a integral. Identifique a série do lado esquerdo como sendo a série de Taylor da função $\operatorname{senh}(ax)$ e, usando (6.14), identifique a série do lado direito como sendo $\pi a \operatorname{cotg}(\pi a) - 1$. Obtenha disso a identidade

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{senh}(ax)}{e^x - 1}\, dx \;=\; \frac{1 - \pi a \operatorname{cotg}(\pi a)}{2a}\,. \tag{8.60}$$

A integral do lado esquerdo é convergente se $0 < |a| < 1$. Por quê?. A expressão (8.60) permanece válida em $a = 0$, pois o lado direito converge a zero no limite $|a| \to 0$. Justifique!

Com a substituição $a \to ia$, obtenha justificadamente de (8.60) a identidade

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(ax)}{e^x - 1}\, dx \;=\; \frac{\pi a \coth(\pi a) - 1}{2a}\,, \tag{8.61}$$

válida agora para todo $a > 0$. Obtenha essa relação seguindo o mesmo tipo de ideia que conduziu-nos a (8.60). Justifique as passagens. ✠

[44] Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947).
[45] Jožef Stefan (1835–1893).
[46] Ludwig Eduard Boltzmann (1844–1906).

Apêndices

8.A Prova do Teorema Fundamental da Aritmética

Do que é presentemente conhecido sobre a história da Matemática, acredita-se que o Teorema Fundamental da Aritmética, Teorema 8.1, página 386, teve seu enunciado e demonstração completas apresentadas pela primeira vez nos *"Elementos"* de Euclides de Alexandria, redigido por volta de 300 A.C. Trata-se de um compêndio de todo o conhecimento geométrico e aritmético de seu tempo. Há diversas edições modernas desse texto, por exemplo, [119]. É certamente um dos livros mais influentes da história da Matemática[47]. É provavel, porém, que esse teorema já fosse conhecido muito anteriormente à redação dos *"Elementos"*.

A parte mais difícil da demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética é a prova da unicidade da decomposição em fatores primos. Para ela precisamos de alguns resultados preparatórios, todos elementares e úteis, com os quais começamos.

• **Alguma notação e alguns resultados preparatórios**

Vamos começar estabelecendo alguma notação e alguns resultados elementares. Para $m \in \mathbb{Z}$ denotamos por $m\mathbb{Z}$ a coleção de todos os múltiplos inteiros de m:

$$m\mathbb{Z} := \{mn, \ n \in \mathbb{Z}\} .$$

Se $a, \ b \in \mathbb{Z}$ dizemos que a divide b se $b/a \in \mathbb{Z}$ e denotamos esse fato por $a \mid b$. Se a não divide b denotamos esse fato por $a \nmid b$.

Sejam $a, \ b \in \mathbb{N}$ números inteiros com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Denotamos por $\mathrm{mdc}(a, \ b) \in \mathbb{N}$ o *máximo divisor comum* de a e b, ou seja, o maior inteiro positivo que divide ambos a e b:

$$\mathrm{mdc}(a, \ b) := \max\{d \in \mathbb{N} \text{ tais que } d \mid a \text{ e } d \mid b\} .$$

O máximo divisor comum de quaisquer pares de números não ambos nulos em $\mathbb{Z}$ sempre existe, sendo na pior hipótese igual a 1.

É relevante notar que se p é primo e a um inteiro maior ou igual a 1, então

$$\mathrm{mdc}(p, \ a) = \begin{cases} p , & \text{se } p \mid a , \\ 1 , & \text{se } p \nmid a . \end{cases} \tag{8.A.1}$$

De fato, se p for primo, $\mathrm{mdc}(p, \ a)$ só pode valer 1 ou p, pois se existir $d \in \mathbb{N}$ tal que $d \mid p$, então ou $d = 1$ ou $d = p$. Caso $p \nmid a$ o segundo caso $d = p$ é descartado, pois não podemos ter $d \mid a$, já que $p \nmid a$, por hipótese. Logo $\mathrm{mdc}(a, \ p) = 1$. Caso $p \mid a$, então valem $p \mid p$ e $p \mid a$ e, portanto, $\mathrm{mdc}(p, \ a) = p$.

Sejam $a, \ b \in \mathbb{Z}$ e defina-se

$$\mathrm{Mod}(a, \ b) := \{ma + nb, \ m, \ n \in \mathbb{Z}\} .$$

É claro que $\mathrm{Mod}(a, \ b)$ é um grupo aditivo e é um módulo à esquerda sobre $\mathbb{Z}$, pois $r(ma + nb) = (rm)a + (rn)b$ para todo $r \in \mathbb{Z}$. É claro também que $\mathrm{Mod}(a, \ b)$ contém o número 0, contém infinitos números positivos e infinitos números negativos.

O seguinte lema é importante:

Lema 8.1 *Sejam $a, \ b \in \mathbb{Z}$, com pelo menos um deles sendo não nulo. Então,* $\mathrm{Mod}(a, \ b) = d\mathbb{Z}$*, onde* $d \equiv \mathrm{mdc}(a, \ b)$. □

Prova. Seja f o menor elemento positivo de $\mathrm{Mod}(a, \ b)$. Sejam m_0 e $n_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $m_0 a + n_0 b = f$. Como todo múltiplo por $\mathbb{Z}$ de um elemento de $\mathrm{Mod}(a, \ b)$ está em $\mathrm{Mod}(a, \ b)$, concluímos que $f\mathbb{Z} \subset \mathrm{Mod}(a, \ b)$. Seja $ma + nb$ um elemento

[47] Foi usado como livro-texto escolar de Geometria e Aritmética até ao menos o início do século XX. Soma milhares de edições.

positivo de Mod(a, b), tomemos $s \in \mathbb{N}$. É claro que $ma + nb - sf \in$ Mod(a, b). Agora, escolhamos $s = \lfloor (ma + nb)/f \rfloor$, de modo que $ma+nb = sf+r$, onde $0 \leq r < f$. Como $r = ma+nb-sf$ concluímos que $r \in$ Mod(a, b). Como $0 \leq r < f$ devemos forçosamante ter $r = 0$, pois f é, por definição, o menor elemento positivo de Mod(a, b). Portanto, temos que $ma + nb = sf \in f\mathbb{Z}$. Assim, todos os elementos positivos de Mod(a, b) pertencem a $f\mathbb{Z}$ e, portanto, os negativos também, estabelecendo que Mod$(a, b) \subset f\mathbb{Z}$ e, com o visto acima, que Mod$(a, b) = f\mathbb{Z}$. Mas isso implica que $a = hf$ e $b = jf$ para $h, j \in \mathbb{Z}$. Disso segue que $f \mid a$ e $f \mid b$.

Isso provou que $f \leq d \equiv$ mdc(a, b). Agora, $d \mid a$ e $d \mid b$ e, portanto, d divide todo elemento de Mod(a, b). Em particular, como $f \in$ Mod(a, b), segue que $d \mid f$ e como $f \leq d$, concluímos que $f = d$, estabelecendo que Mod$(a, b) = d\mathbb{Z}$ com $d =$ mdc(a, b). ■

O seguinte lema é igualmente fundamantal e descende diretamente de Euclides de Alexandria.

Lema 8.2 (Lema de Euclides) *Seja p um número primo e sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $p \mid (ab)$. Então, ou $p \mid a$ ou $p \mid b$ ou ambos.* □

Prova. Sem perda de generalidade, vamos supor que $p \nmid a$. Sabemos por (8.A.1) que nesse caso vale mdc$(a, p) = 1$. Assim, pelo Lema 8.1, temos Mod$(a, p) = \mathbb{Z}$. Portanto, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $ma + np = 1$. Multiplicando ambos os lados por b, teremos $m(ab) + npb = b$. Como $p \mid (ab)$, segue que $b/p = m\big((ab)/p\big) + nb \in \mathbb{Z}$, provando que $p \mid b$. Isso completa a prova. ■

Nota. No Lema 8.2 é fundamantal que p seja primo. Por exemplo, 9 divide $15 \times 21 = 315$ (pois $315/9 = 35$), mas 9 não divide nem 15 nem 21. ♣

O seguinte corolário do Lema 8.2 é evidente:

Corolário 8.3 *Seja p primo e sejam $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ um conjunto finito de números inteiros tais que $p \mid (a_1 \cdots a_n)$. Então, p divide ao menos um deles, ou seja, existe ao menos um $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $p \mid a_k$.* □

Prova. A prova segue trivialmente do Lema de Euclides, Lema 8.2, por indução finita. ■

• Prova do Teorema Fundamental da Aritmética

Passemos agora à demonstração do Teorema 8.1, página 386. A afirmação do teorema é evidentemente válida para os números 2 e 3, que são primos. Seguindo o método de demonstração por indução, vamos supor a afirmação do teorema válida para todo número até $n \geq 2$ e vamos prová-la válida para $n + 1$. Há duas possibilidades: ou $n + 1$ é primo, em cujo caso a afirmação do teorema é válida, ou $n + 1$ não é primo. Nesse caso existem dois números $a, b \in \{2, \ldots, n\}$ que dividem $n + 1$ e $n + 1 = ab$. Como a e b são menores ou iguais a n ambos podem, pela hipótese de indução, ser escritos como produto de primos e, portanto, assim pode também ser escrito $n + 1$.

Isso estabeleceu que todo número natural maior ou igual a 2 possui uma decomposição em fatores primos.

O ponto mais delicado é provar a unicidade da decomposição em fatores primos. Vamos supor que exista $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, que possua duas decomposições distintas em fatores primos:

$$p_1^{n_1} \cdots p_j^{n_j} \; = \; q_1^{m_1} \cdots q_k^{m_k} \; . \tag{8.A.2}$$

Sem perda de generalidade, vamos supor que $k \geq j$. A igualdade (8.A.2) afirma que $p_1 \mid \big(q_1^{m_1} \cdots q_k^{m_k}\big)$. Logo, pelo Corolário 8.3, p_1 divide algum dos primos de $\{q_1, \ldots, q_k\}$. Como esse conjunto é composto por primos distintos, isso significa que p_1 é igual a precisamente um deles, digamos, a q_1. A igualdade (8.A.2) fica, portanto,

$$p_1^{n_1 - m_1} p_2^{n_2} \cdots p_j^{n_j} \; = \; q_2^{m_2} \cdots q_k^{m_k} \; , \tag{8.A.3}$$

onde, novamente sem perda de generalidade, supomos $n_1 \geq m_1$.

Agora, se $n_1 - m_1 \neq 0$ concluiríamos pelo mesmo raciocínio que p_1 deve dividir algum dos elementos de $\{q_2, \ldots, q_k\}$, o que é impossível, pois esses primos são distintos entre si e de $q_1 = p_1$. Assim, devemos ter $n_1 = m_1$ e (8.A.3) reduz-se a

$$p_2^{n_2} \cdots p_j^{n_j} \; = \; q_2^{m_2} \cdots q_k^{m_k} \; . \tag{8.A.4}$$

Como $k \geq j$ há dois casos possíveis: $1^{\underline{o}}$: Caso $k > j$, a repetição do argumento acima conduz a

$$1 \;=\; q_2^{m_{j+1}} \cdots q_k^{m_k} \;,$$

o que é absurdo, pois $m_l > 1$ para todo l. $2^{\underline{o}}$: Se $k = j$ a repetição do argumento acima levar-nos-ía a concluir que $p_1 = q_1, \; \ldots, \; p_j = q_j$ e $n_1 = m_1, \; \ldots, \; n_j = m_j$, que é a unicidade que desejávamos provar.

Isso completa a demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética, Teorema 8.1, página 386. ■