Capítulo 9
Transformações de Möbius

Sumário

TRANSFORMAÇÕES DE Möbius (que também são denominadas *transformações lineares fracionais*) são certas funções de variável complexa que surgem em aplicações na Teoria de Campos (simetrias conformes), na Mecânica Estatística (modelo de Ising na chamada *árvore de Cayley*), na Teoria dos Sistemas Dinâmicos, na Geometria Projetiva, nas Geometrias Hiperbólicas, na Análise Funcional e nas Álgebras de Operadores (via transformadas de Cayley), na Teoria de Grupos de Lie, assim como em outras áreas. Possuem diversas propriedades notáveis e associam-se de forma natural à Teoria de Grupos e à Álgebra Linear.

O estudo de Transformações de Möbius é a porta de entrada para o estudo de funções e formas modulares e de funções e formas automorfas, assuntos de importância na Teoria de Números, na Análise Harmônica e fortemente ligados à Topologia Algébrica.

Neste capítulo demonstraremos e discutiremos algumas das propriedades mais simples e relevantes de Transformações de Möbius e temas associados.

9.1 Transformações de Möbius. Definição e Propriedades Elementares

• Transformações de Möbius. Definição

Seja $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ 2)$ da forma $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ com c e d não simultaneamente nulos. A transformação de Möbius[1] M_A associada à matriz A é a função de variável complexa definida por

$$M_A(z) \;:=\; \frac{az+b}{cz+d}\,. \tag{9.1}$$

[1]August Ferdinand Möbius (1790–1868).

Observe-se que z pode ser arbitrário em $\mathbb{C}$, excetuando-se o ponto $-d/c$, caso $c \neq 0$. É relevante observar também que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tem-se

$$M_{\lambda A}(z) \;=\; M_A(z) \;, \tag{9.2}$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$.

Caso $c \neq 0$ transformação de Möbius acima possui um polo simples no ponto $z = -d/c$ (exceto quando $\det(A) = 0$, como veremos adiante). Em manipulações algébricas frequentemente omitiremos especificar esses pontos singulares, exceto quando estritamente necessário. Essas menções aos pontos singulares podem ser completamente eliminadas expressando-se as transformações de Möbius como funções da chamada *Esfera de Riemann*[2] em si mesma, como indicaremos adiante.

Uma transformação de Möbius é especificada por uma matriz complexa 2×2, que possui quatro elementos independentes. A relação (9.2) nos ensina, porém, que cada transformação de Möbius é especificada por no máximo três parâmetros complexos. Esse fato será explorado mais adiante (Teorema 9.1, página 428).

• **Casos triviais**

Há alguns casos triviais dignos de nota. Caso $c = 0$ (em cujo caso $d \neq 0$) a correspondente transformação de Möbius é a função linear $M_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Em particular, vale $M_{\mathbb{1}}(z) = z$, a função identidade.

Caso o par $(a,\ b)$ seja um múltiplo do par $(c,\ d)$, ou seja, se $(a,\ b) = \lambda(c,\ d)$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, então a correspondente transformação de Möbius é a função constante igual a λ. Logo adiante veremos que M_A é constante se e somente se $\det(A) = 0$.

• **A transformação de Cayley**

Para $C \equiv \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, a transformação M_C é denominada *transformação de Cayley*[3], ou *transformada de Cayley*. Nesse caso, $M_C(z) = (1-z)/(1+z)$, $z \neq -1$. Transformações de Cayley têm utilidade na Teoria de Grupos (vide Seção 21.4.2.3, página 1105) e nas Álgebras de Operadores.

Em certas aplicações, usa-se a expressão *transformação de Cayley*, ou *transformada de Cayley*, para denominar a função complexa $M_D(z) = (z-i)/(z+i)$, $z \neq -i$. Aqui, $D \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)$.

• **Transformações de Möbius elementares**

A função $T_b(z) := z - b$ é uma transformação de Möbius, correspondente, por exemplo, a $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. A função $P_a(z) := az$ é uma transformação de Möbius, correspondente, por exemplo, a $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. A função $I(z) := \frac{1}{z}$ (com $z \neq 0$) é uma transformação de Möbius, correspondente, por exemplo, a $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Essas transformações de Möbius são por vezes denominadas *transformações de Möbius elementares*.

Em particular, a transformação T_b é denominada *translação* (por $b \in \mathbb{C}$) e a transformação I é denominada *inversão*.

Observe-se que para todos $a,\ b \in \mathbb{C}$ valem as relações

$$P_a \circ T_b \;=\; T_{ab} \circ P_a \tag{9.3}$$

e para todo $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, valem

$$P_a \circ I \;=\; I \circ P_{1/a} \;. \tag{9.4}$$

E. 9.1 *Exercício*. Verifique (9.3) e (9.4). ✠

• **Homotetias e rotações**

Uma transformação $P_\rho(z) = \rho z$ com $\rho > 0$ é dita ser uma *homotetia*, *dilatação* ou ainda *transformação de escala*. Já uma transformação como $P_{e^{i\alpha}}$, para $\alpha \in (-\pi,\ \pi]$, é dita ser uma *rotação*, pois $P_{e^{i\alpha}}(z) = e^{i\alpha}z$, o que significa que o número complexo z é rodado em torno da origem por um ângulo α.

[2]Trata-se de uma variedade complexa obtida da "compactificação de um ponto" de $\mathbb{C}$, ou seja, com acréscimo de um ponto no "infinito", denotado por ∞.

[3]Arthur Cayley (1821–1895).

Seja $a \in \mathbb{C}$ com a decomposição polar $a = |a|e^{i\alpha}$, $\alpha \in (-\pi, \pi]$. A transformação P_a, também pode ser escrita como a composição $P_a = P_{|a|} \circ P_{e^{i\alpha}} = P_{e^{i\alpha}} \circ P_{|a|}$. Portanto, a transformação de Möbius P_a é a combinação de uma homotetia com uma rotação.

• Funções meromorfas. Funções inteiras

Uma função de variável complexa é dita uma *função inteira* em $\mathbb{C}$ se for analítica em todo $\mathbb{C}$.

Uma função de variável complexa é dita uma *função meromorfa* em um domínio D se for analítica nesse domínio, exceto em um conjunto discreto de pontos isolados (*i.e.*, sem pontos de acumulação), nos quais possui polos de ordem finita. Vide, *e.g.*, [248].

A função $f(z) = P(z)/Q(z)$, onde P e Q são polinômios, é meromorfa, pois suas únicas possíveis singularidades são os zeros de Q que não forem zeros de ordem igual ou superior de P.

A função $f(z) = 1/\operatorname{sen}(z)$ é meromorfa, pois tem somente polos nos pontos $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, que são isolados e não se acumulam.

A função Gama de Euler, estudada no Capítulo 7, página 351, e a função Zeta de Riemann, estudada no Capítulo 8, página 393, são funções meromorfas, pois possuem apenas polos isolados como singularidades.

A função $f(z) = 1/\operatorname{sen}(1/z)$ <u>não</u> é meromorfa. Ela tem singularidades em 0 e polos em $z = 1/(n\pi)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, mas esses polos não são isolados, já que se acumulam em 0.

As funções $f(z) = \exp(1/z)$ e $\operatorname{sen}(1/z)$ não são meromorfas, pois possuem singularidades essenciais (polos de ordem infinita) em $z = 0$.

As funções $f(z) = \ln(z)$ e $\sqrt{z}$ não são meromorfas em todo $\mathbb{C}$, pois não podem ser feitas analíticas pela mera exclusão de um conjunto de pontos isolados de $\mathbb{C}$.

• Propriedades elementares das transformações de Möbius

Voltando ao caso geral, é fácil provar a seguinte afirmação: M_A é constante se e somente se $\det(A) = 0$. De fato, se $\det(A) = 0$ a primeira linha da matriz A é proporcional à segunda, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $a = \lambda c$ e $b = \lambda d$, o que implica $M_A(z) = \lambda$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Reciprocamente, se $M_A(z) = \lambda$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então $(a - \lambda c)z + (b - \lambda d) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, o que implica $a = \lambda c$ e $b = \lambda d$, de onde se extrai que $\det(A) = 0$.

Note-se que para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\alpha \neq 0$, vale $M_{\alpha \mathbb{1}}(z) = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, ou seja, $M_{\alpha\mathbb{1}}$ é a função identidade. Suponhamos, reciprocamente, que A seja tal que $M_A(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Então, valeria $cz^2 + (a - d)z - b = 0$ para todo z, o que implica $c = 0$, $d = a$ e $b = 0$. Essas condições significam que $A = a\mathbb{1}$. Assim, estabelecemos que M_A é a função identidade se e somente se A for um múltiplo não nulo da matriz identidade.

Mais adiante, mostraremos que se para duas matrizes $A, B \in \operatorname{Mat}(\mathbb{C}, 2)$ valer em um domínio conveniente que $M_A = M_B$ e uma delas for inversível, então existe constante $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $B = \lambda A$. (Caso nenhuma das duas for inversível, então M_A e M_B são constantes e a condição $M_A = M_B$ informa que são a mesma constante).

No caso em que $c = 0$, M_A é uma função linear e, portanto, inteira, Caso $c \neq 0$ e $\det(A) \neq 0$, então M_A é uma função meromorfa com um polo simples em $z = -d/c$.

No caso em que $c = 0$ e $\det(A) \neq 0$, $M_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é linear e, portanto, bijetora.

No caso em que $c \neq 0$ e $\det(A) \neq 0$, $M_A : \mathbb{C}\setminus\{-d/c\} \to \mathbb{C}\setminus\{a/c\}$ é uma aplicação bijetora. Para provar a injetividade, observemos que se z e w são elementos de $\mathbb{C}\setminus\{-d/c\}$ e vale $M_A(z) = M_A(w)$, então $(az+b)(cw+d) = (aw+b)(cz+d)$, ou seja, $(ad-bc)z = (ad-bc)w$, o que implica $z = w$ pois supomos $\det(A) \neq 0$. Para provar que $M_A : \mathbb{C}\setminus\{-d/c\} \to \mathbb{C}\setminus\{a/c\}$ é sobrejetora, seja $y \in \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ e coloquemos a questão se existe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ tal que $M_A(z) = y$. Isso implicaria $az + b - czy - dy = 0$, ou seja, $(a - cy)z = dy - b$ e, portanto, $z = (dy - b)/(a - cy)$. Como $a - cy \neq 0$, um tal z existe, demonstrando a sobrejetividade desejada.

• A Esfera de Riemann

O plano complexo $\mathbb{C}$ pode ser mapeado bijetivamente na esfera unitária bidimensional de $\mathbb{R}^3$ centrada na origem e subtraída de um de seus pontos, digamos seu polo norte: $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Isso pode ser obtido pela chamada *projeção estereográfica*, ilustrada na Figura 9.1, página 425 e descrita com mais detalhes à página 1679. Operações entre números complexos, como somas e produtos, podem ser traduzidos como operações entre os pontos de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ e, analogamente, funções $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ também podem ser entendidas como funções de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ em si mesmo.

O acréscimo do ponto N a $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ corresponde ao acréscimo a $\mathbb{C}$ de todos os seus pontos localizados no infinito. Esse acréscimo é muito útil no estudo de propriedades de funções meromorfas, como as transformações de Möbius.

O ponto infinito que é acrescentado a $\mathbb{C}$ por esse procedimento será denotado por $\boldsymbol{\infty}$ (o símbolo de infinito em negrito). Topologicamente o acréscimo do ponto infinito a $\mathbb{C}$ corresponde à chamada *compactificação de um ponto* de $\mathbb{C}$. O conjunto $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\boldsymbol{\infty}\}$ é denominado *plano complexo estendido* e a esfera $\mathbb{S}^2$ associada é, nesse contexto, denominada *Esfera de Riemann*[4]. Dado existir uma bijeção entre a Esfera de Riemann e o plano complexo estendido é costume chamar também $\widehat{\mathbb{C}}$ de "Esfera de Riemann".

A Esfera de Riemann é um exemplo, dos mais simples, de uma *variedade complexa*, mas não trataremos esses aspectos aqui.

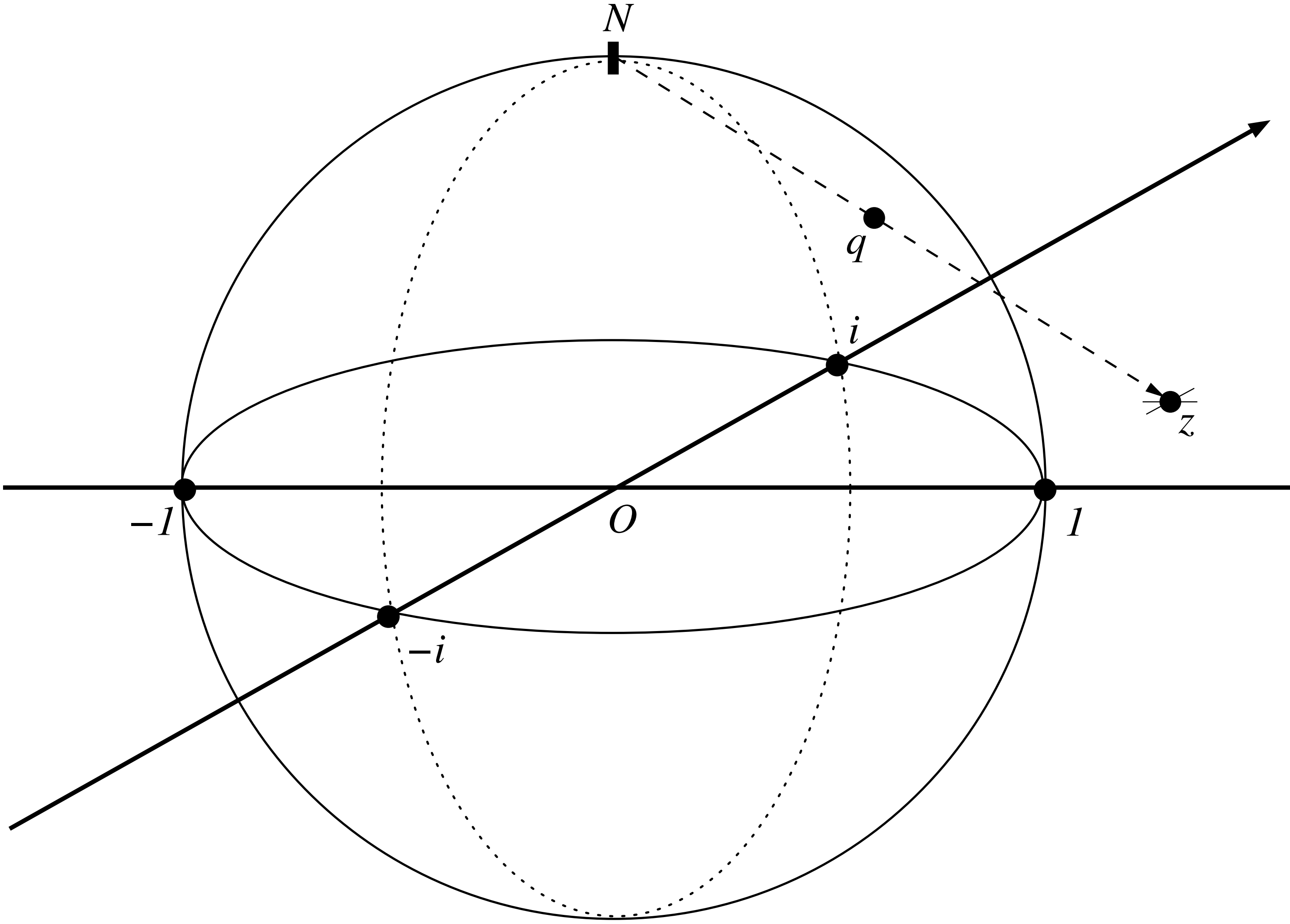

Figura 9.1: A Esfera de Riemann. Cada ponto q da esfera bidimensional unitária centrada na origem e sem seu polo norte, $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, pode ser mapeado univocamente a um ponto z do plano complexo $\mathbb{C}$, que é o plano horizontal da figura. O ponto N (com coordenadas $(0,\ 0,\ 1)$) indica o polo norte. O ponto z é definido pelo cruzamento da reta que conecta N a q com o plano horizontal. Se as coordenadas de q são $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ com $(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1$, então $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{x_1}{1-x_3}$ e $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{x_2}{1-x_3}$. Reciprocamente, tem-se $q \equiv (x_1,\ x_2,\ x_3) = \frac{1}{|z|^2+1}\big(2\mathrm{Re}\,(z),\ 2\mathrm{Im}\,(z),\ |z|^2 - 1\big)$. Verifique! Isso define a chamada *projeção estereográfica* da esfera unitária. O ponto N pode ser simultaneamente associado a todos os números complexos "infinitos", conjuntamente identificados e denotados por $\boldsymbol{\infty}$.

[4]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866).

Certas operações aritméticas podem ser definidas em $\widehat{\mathbb{C}}$: se $z \in \mathbb{C}$, definimos $z + \infty = \infty$; se $z \neq 0$ define-se $z \times \infty = \infty$. Além disso $\infty + \infty = \infty$ e $\infty \times \infty = \infty$. As operações $\infty - \infty$ e $0 \times \infty$ não são definidas[5]. Dessa forma, $\widehat{\mathbb{C}}$ não compõe um *corpo* (noção definida na Seção 2.1.4, página 100).

As transformações de Möbius definidas em (9.1) podem ser estendidas de forma natural a todo $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ por meio das seguintes definições:

1. **Caso** $c \neq 0$**.** Definimos
$$M_A\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty \qquad \text{e} \qquad M_A(\infty) := \frac{a}{c} . \tag{9.5}$$

2. **Caso** $c = 0$**.** Definimos
$$M_A(\infty) := \infty . \tag{9.6}$$

No caso 1 vemos como podemos estender a transformação de Möbius atribuindo-lhe o valor ∞ no polo $-d/c$. O valor a/c atribuído ao ponto infinito é obtido do limite $\lim\limits_{|z|\to\infty} M_A(z) = a/c$, como facilmente se vê.

Como veremos mais adiante, essas atribuições são plenamente consistentes com outras propriedades das transformações de Möbius.

• Pontos fixos de transformações de Möbius

Seja A como acima com $c \neq 0$ e $\det(A) \neq 0$. Consideremos a questão da existência de pontos fixos de M_A, ou seja, da existência de pontos $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ tais que $M_A(z_0) = z_0$. Isso implicaria que $cz_0^2 + (d-a)z_0 - b = 0$, cujas soluções são
$$z_0 = \frac{a - d \pm \sqrt{\Delta}}{2c} ,$$
onde o discriminante é
$$\Delta := (d-a)^2 + 4bc = (d+a)^2 + 4(bc - ad) = \big(\mathrm{Tr}(A)\big)^2 - 4\det(A) .$$
Concluímos que M_A possui dois pontos fixos, exceto se $(d-a)^2 + 4bc = 0$, quando possui apenas um.

No caso $c = 0$ temos $M_A(z) = ad^{-1}z + bd^{-1}$. Logo, a equação de ponto fixo seria $ad^{-1}z + bd^{-1} = z$, ou seja, $\big(a-d\big)z = -b$. Caso $a \neq d$ há, portanto, somente um ponto fixo: $-b/(a-d)$. Caso $a = d$ a equação de ponto fixo só será satisfeita se $b = 0$, em cujo caso $M_A(z) = z$, o mapa identidade. Nessa particular situação todos os pontos de $\mathbb{C}$ são pontos fixos. Isso se dá se $A = \lambda\mathbb{1}$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Essa é a única situação na qual uma transformação de Möbius pode ter mais de dois pontos fixos.

Uma transformação de Möbius com exatamente um ponto fixo é dita ser uma *transformação parabólica*. Uma transformação de Möbius com exatamente dois pontos fixos distintos é dita ser uma *transformação loxodrômica*[6]. Assim, uma transformação é loxodrômica se e somente se $c \neq 0$ e $(d-a)^2 + 4bc \neq 0$ e parabólica se 1) $c \neq 0$ e $(d-a)^2 + 4bc = 0$, ou se 2) $c = 0$ e $a \neq d$. Para mais propriedades geométricas elementares de transformações loxodrômicas, parabólicas, ou das chamadas *transformações hiperbólicas*, não definidas aqui, vide, *e.g.*, [202].

• Regra de composição de transformações de Möbius

A propriedade algébrica mais importante das transformações de Möbius, e que liga as mesmas a álgebras de matrizes e à Teoria de Grupos (vide página 428), é a seguinte regra de composição:
$$M_A\big(M_B(z)\big) = M_{AB}(z) , \qquad \text{ou seja,} \qquad M_A \circ M_B = M_{AB} . \tag{9.7}$$
De fato, sejam $A, B \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, 2)$ da forma $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, com c e d não simultaneamente nulos e $B = \left(\begin{smallmatrix} p & q \\ r & s \end{smallmatrix}\right)$ com r e s não simultaneamente nulos. Então,
$$M_A\big(M_B(z)\big) = \frac{aM_B(z) + b}{cM_B(z) + d} = \frac{a(pz+q) + b(rz+s)}{c(pz+q) + d(rz+s)} = \frac{(ap+br)z + (aq+bs)}{(cp+dr)z + (cq+ds)} = M_{AB}(z) ,$$

[5] O estudante deve notar que $-\infty$ seria a inversa aditiva de ∞, a qual não existe, e não pode ser confundida com $(-1) \times \infty$, pois $(-1) \times \infty = \infty$, pelas regras anteriores.

[6] Do Grego *"loxós"*, "oblíquo" e *"drómos"*, "que corre". A palavra se origina da Geodesia e da Cartografia, onde designa linhas na superfície da Terra que formam um ângulo constante com todos os meridianos que cruzam, tendo sido introduzidas e estudadas pelo matemático Pedro Nunes (1502–1578), em 1537.

sendo a última igualdade decorrente do fato que $AB = \left(\begin{smallmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{smallmatrix}\right)$, como facilmente se constata.

A elegante relação (9.7) pode ser estendida a todo $\widehat{\mathbb{C}}$. Esse é o conteúdo do Exercício que segue.

E. 9.2 *Exercício*. Usando (9.5) e (9.6) verifique que (9.7) é também válida em todo $\widehat{\mathbb{C}}$, incluindo os polos de M_A, M_B, M_{AB} e a ∞.

Considere, por exemplo, o que ocorre no ponto $-s/r$, para $r \neq 0$, que é um polo de M_B. Mostre, usando (9.5), que $M_A\big(M_B(-s/r)\big) = M_A(\infty) = a/c$ e mostre também, por cômputo direto, que $M_{AB}(-s/r) = a/c$. Constate também, novamente usando (9.5), que $M_A\big(M_B(\infty)\big)$ é igual a $M_{AB}(\infty)$. Os demais casos são tratados analogamente. ✠

• A inversa de uma transformação de Möbius

Seja $A \in \operatorname{Mat}(\mathbb{C},\ 2)$ da forma $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ e $\det(A) \neq 0$. Então, temos de (9.7) que $M_{A^{-1}} \circ M_A(z) = M_{\mathbb{1}}(z) = z$, a função identidade. Assim, concluímos que

$$\big(M_A\big)^{-1} \;=\; M_{A^{-1}}\ . \tag{9.8}$$

Sabemos que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A_0$, onde $A_0 = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$. Logo, por (9.2), temos também

$$\big(M_A\big)^{-1} \;=\; M_{A_0}\ . \tag{9.9}$$

Em termos mais explícitos, a função inversa de

$$M_A(z) \;=\; \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{é} \qquad M_{A_0}(z) \;=\; \frac{dz-b}{-cz+a}\ . \tag{9.10}$$

Há de ser dito ainda que o lado direito das relações (9.8) e (9.10) está definido excetuando-se o ponto $z = a/c$ (onde $M_{A^{-1}}(z) = M_{A_0}$ possui um polo simples). Isso é coerente com o fato já apontado que esse ponto não é parte da imagem de M_A. Pela definição (9.5), podemos definir $M_{A^{-1}}$ também nesse polo por $M_{A^{-1}}(a/c) = \infty$ e, adicionalmente, $M_{A^{-1}}(\infty) = -d/c$. Comparando a (9.5) vemos que essa extensão de $M_{A^{-1}}$ é também a aplicação inversa de M_A também quando estendidas a $\widehat{\mathbb{C}}$.

No caso $c = 0$ a aplicação $M_{A^{-1}}$ (assim como M_A) não tem polos em $\mathbb{C}$ e podemos estendê-la a $\widehat{\mathbb{C}}$, via (9.6), assumindo $M_{A^{-1}}(\infty) = \infty$. Também por (9.6) vemos que também aqui $M_{A^{-1}}$ é a aplicação inversa de M_A quando estendidas a $\widehat{\mathbb{C}}$.

• Transformações de Möbius como composição de transformações de Möbius elementares

Como antes, seja $A \in \operatorname{Mat}(\mathbb{C},\ 2)$ da forma $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ com c e d não simultaneamente nulos.

Para $c \neq 0$ podemos escrever

$$M_A(z) \;=\; \frac{\frac{a}{c}cz + \frac{a}{c}d + b - \frac{a}{c}d}{cz+d} \;=\; \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{a}{c}d}{cz+d}$$

e concluímos que

$$M_A(z) \;=\; \frac{a}{c} - \left(\frac{ad-bc}{c^2}\right)\frac{1}{z+\frac{d}{c}} \;=\; \frac{a}{c} - \left(\frac{\det(A)}{c^2}\right)\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\ . \tag{9.11}$$

É fácil ver de (9.11) que toda transformação de Möbius é a composição de até quatro transformações de Möbius elementares, pois é claro de (9.11) que, no caso $c \neq 0$,

$$M_A(z) \;=\; T_{-a/c} \circ P_{-\left(\frac{ad-bc}{c^2}\right)} \circ I \circ T_{-d/c}(z)\ . \tag{9.12}$$

E. 9.3 *Exercício*. Verifique! ✠

Para $c = 0$ e $d \neq 0$ (lembrar que não permitimos o caso $c = d = 0$) tem-se simplesmente

$$M_A(z) \;=\; \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = T_{-b/d} \circ P_{a/d}(z)\ . \tag{9.13}$$

Usando-se (9.3) e (9.4) as relações (9.12) e (9.13) podem ser reescritas de diversas formas.

• **Transformações de Möbius e o semiplano superior de $\mathbb{C}$**

Por $\mathbb{H}_\pm = \{z \in \mathbb{C},\ \pm\mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ denotamos o semiplano superior (inferior) do plano complexo. Sua fronteira é o eixo real.

Vamos aqui considerar o caso em que a matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ é uma matriz real com $\det(A) \neq 0$. Escrevendo-se $z = x+iy$ com $x,\ y \in \mathbb{R}$, vemos que se $c \neq 0$ a transformação de Möbius $M_A(z) = (az+b)/(cz+d)$ tem um polo sobre o eixo real no ponto $-d/c$. Caso $c = 0$ não há polos.

Multiplicando e dividindo $M_A(z)$ por $\overline{cz+d} = (cx+d) - icy$, temos

$$M_A(z) \;=\; \frac{(ax+b)+iay}{(cx+d)+icy} \;=\; \frac{\big[(ax+b)(cx+d) - acy^2\big] + i(ad-bc)y}{(cx+d)^2 + c^2y^2} \;.$$

Vemos dessa expressão que $\mathrm{Im}\,\big(M_A(z)\big) = 0$, caso $\mathrm{Im}\,(z) = y = 0$ e que o sinal da parte imaginária de $M_A(z)$ é igual ao sinal de $(ad-bc)y = \det(A)y$.

Concluímos que, caso A seja real e $\det(A) > 0$, a transformação de Möbius mapeia $\mathbb{H}_+$ bijetivamente em si mesmo e o eixo real (com a possível exceção de um polo em $-d/c$) em si mesmo. Funções de variável complexa que mapeiam $\mathbb{H}_+$ em si mesmo e são analíticas nesse semiplano são por vezes denominadas *funções de Nevanlinna-Herglotz*[7] e desfrutam de diversas propriedades especiais.

• **O grupo de Möbius, o grupo projetivo e o grupo de Lorentz**

Reunindo algumas das observações que fizemos antes podemos afirmar que o conjunto de todas as transformações de Möbius M_A, com $A \in \mathrm{Mat}\,(2,\ \mathbb{C})$ com determinante não nulo, ou seja, com $A \in \mathrm{GL}(2,\ \mathbb{C})$[8], é um grupo para a operação de composição. As regras: 1º $M_A = M_B$ se e somente se $A = \alpha B$ para algum $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; 2º $M_A \circ M_B = M_{AB}$ para $A,\ B \in \mathrm{GL}(2,\ \mathbb{C})$ e 3º $M_{\lambda A} = M_A$, com $A \in \mathrm{GL}(2,\ \mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, mostram que esse grupo é isomorfo ao grupo projetivo linear complexo $\mathrm{PGL}(2,\ \mathbb{C})$, o qual, por sua vez, é isomorfo ao grupo linear projetivo especial $\mathrm{PSL}(2,\ \mathbb{C})$. Vide Seção 21.3.1.1, página 1061. Esse grupo, por sua vez, é isomorfo ao grupo de Lorentz próprio ortócrono $\mathscr{L}_+^\uparrow$, como detalhadamente discutido no Capítulo 46, página 2605.

O grupo de Möbius tem outros subgrupos de interesse. Um deles é obtido considerando-se matrizes $A \in \mathrm{Mat}\,(2,\ \mathbb{R})$, reais e com determinante positivo, ou seja, $A \in \mathrm{GL}(2,\ \mathbb{R})^+$ (vide (21.13), página 1060). Temos, porém, que $\mathbf{P}\big(\mathrm{GL}(2,\ \mathbb{R})^+\big)$ e $\mathrm{PSL}(2,\ \mathbb{C})$ são isomorfos (vide novamente Seção 21.3.1.1). Já vimos que as transformações de Möbius M_A com $A \in \mathrm{GL}(2,\ \mathbb{R})^+$ mapeiam bijetivamente o semiplano superior $\mathbb{H}_+$ do plano complexo em si mesmo, o mesmo se dando, portanto, com os elementos de $\mathrm{PSL}(2,\ \mathbb{R})$.

9.2 O Teorema Fundamental das Transformações de Möbius

Vamos agora apresentar um resultado sobre Transformações de Möbius que encontra-se na base de outros desenvolvimentos sobre essas funções.

Teorema 9.1 (Teorema Fundamental das Transformações de Möbius) *Sejam $z_1,\ z_2,\ z_3$ três pontos distintos de $\mathbb{C}$ e, igualmente, sejam $w_1,\ w_2,\ w_3$ três pontos distintos de $\mathbb{C}$. Vide Figura 9.2, página 429. Então, existe uma transformação de Möbius, única, M_A tal que $M_A(z_k) = w_k$ para cada $k = 1,\ 2,\ 3$.* □

Nota. Apesar dos conjuntos $\{z_1,\ z_2,\ z_3\}$ e $\{w_1,\ w_2,\ w_3\}$ serem ambos compostos por pontos distintos, é permitido que eles tenham uma intersecção não vazia. ♣

Prova do Teorema 9.1. Seja $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ 2)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. As relações $M_A(z_k) = w_k$, $k = 1,\ 2,\ 3$, correspondem ao sistema

[7] Rolf Herman Nevanlinna (1895–1980). Gustav Herglotz (1881–1953).

[8] $\mathrm{GL}(2,\ \mathbb{C})$ é o grupo das matrizes inversíveis 2×2 complexas. Vide Seção 21.3.1, página 1058.

linear

$$
\begin{aligned}
z_1 a + b - w_1 z_1 c - w_1 d &= 0 , \\
z_2 a + b - w_2 z_2 c - w_2 d &= 0 , \\
z_3 a + b - w_3 z_3 c - w_3 d &= 0 .
\end{aligned}
\tag{9.14}
$$

Para $z_1, \ z_2, \ z_3$ distintos e $w_1, \ w_2, \ w_3$ distintos, desejamos determinar $a \ b, \ c, \ d$ de modo que essas relações sejam satisfeitas. Há dois casos distintos a se considerar

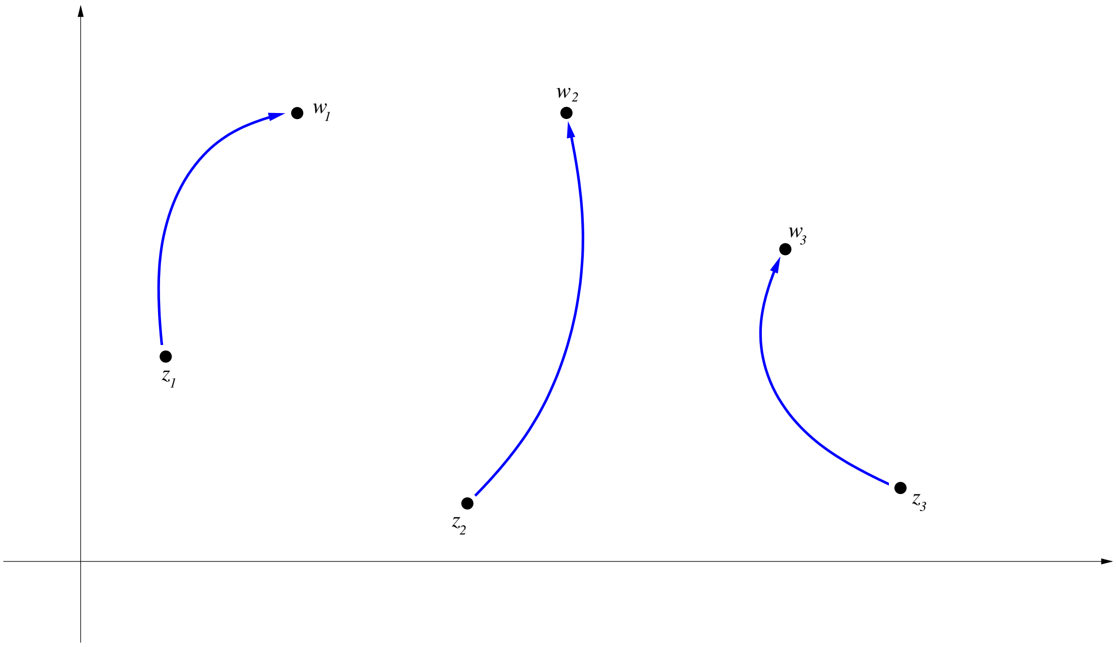

Figura 9.2: Três pontos distintos z_1, z_2 e z_3 do plano complexo são mapeados em pontos distintos w_1, w_2 e w_3, respectivamente, por uma transformação de Möbius univocamente determinada. Esse é o conteúdo do Teorema 9.1, página 428.

Caso I. $z_1(w_3 - w_2) + z_2(w_1 - w_3) + z_3(w_2 - w_1) \neq 0$.

O sistema (9.14) equivale ao problema linear

$$
N_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} z_1 w_1 \\ z_2 w_2 \\ z_3 w_3 \end{pmatrix} , \qquad \text{onde} \qquad N_1 = \begin{pmatrix} z_1 & 1 & -w_1 \\ z_2 & 1 & -w_2 \\ z_3 & 1 & -w_3 \end{pmatrix} .
$$

Verifique! Um cálculo explícito (faça-o!) revela que

$$
\det(N_1) = z_1(w_3 - w_2) + z_2(w_1 - w_3) + z_3(w_2 - w_1) ,
$$

sendo, portanto, não nulo, por hipótese. Com isso, N_1 é inversível e podemos escrever

$$
\begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} = c N_1^{-1} \begin{pmatrix} z_1 w_1 \\ z_2 w_2 \\ z_3 w_3 \end{pmatrix} .
$$

Isso mostra que as razões a/c, b/c e d/c com as propriedades desejadas podem ser encontradas em termos dos pontos $z_1,\ z_2,\ z_3$ e $w_1,\ w_2,\ w_3$, estabelecendo a existência da matriz A, a menos de um fator multiplicativo não nulo irrelevante, dada em termos desses pontos. Isso prova que, no caso considerado, uma transformação M_A satisfazendo $M_A(z_k) = w_k$, $k = 1,\ 2,\ 3$, existe.

Caso II. $z_1(w_3 - w_2) + z_2(w_1 - w_3) + z_3(w_2 - w_1) = 0$.

Nesse caso, podemos escrever

$$z_1 \;=\; z_1^+ \;\equiv\; z_2\frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} + z_3\frac{w_1 - w_2}{w_3 - w_2}\ . \tag{9.15}$$

Note-se que $w_3 - w_2 \neq 0$, pelas hipóteses gerais do Teorema.

O sistema (9.14) também equivale ao problema linear

$$N_2 \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} = -a \begin{pmatrix} z_1^+ \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \qquad \text{onde} \qquad N_2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -z_1^+ w_1 & -w_1 \\ 1 & -z_2 w_2 & -w_2 \\ 1 & -z_3 w_3 & -w_3 \end{pmatrix}.$$

Um cálculo explícito usando (9.15) revela que

$$\begin{aligned}
\det(N_2) \quad &= \quad z_2w_2w_3 - z_3w_2w_3 - z_1^+ w_1w_3 + z_3w_1w_3 + z_1^+ w_1w_2 - z_2w_1w_2 \\
&= \quad z_1^+ w_1(w_2 - w_3) + z_2w_2(w_3 - w_1) + z_3w_3(w_1 - w_2) \\
&\overset{(9.15)}{=} \quad w_1z_2(w_1 - w_3) + w_1z_3(w_2 - w_1) + z_2w_2(w_3 - w_1) + z_3w_3(w_1 - w_2) \\
&= \quad (w_1 - w_3)(w_1 - w_2)(z_2 - z_3)\ .
\end{aligned} \tag{9.16}$$

Verifique! O lado direito de (9.16) é não nulo, pelas hipóteses gerais do Teorema. Assim, N_2 possui inversa e podemos escrever

$$\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} \;=\; -aN_2^{-1} \begin{pmatrix} z_1^+ \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Similarmente à análise feita no caso **I**, isso mostra que as razões b/a, c/a e d/a com as propriedades desejadas podem ser encontradas em termos dos pontos $z_1,\ z_2,\ z_3$ e $w_1,\ w_2,\ w_3$, estabelecendo a existência da matriz A, a menos de um fator multiplicativo não nulo irrelevante, dada em termos desses pontos. Isso prova que, no caso considerado, uma transformação M_A satisfazendo $M_A(z_k) = w_k$, $k = 1,\ 2,\ 3$, existe.

\+ ++ +++ ++ +

Voltando agora à discussão geral, a questão da existência de transformações de Möbius com as propriedades desejadas foi resolvida com as considerações acima, tanto no caso **I** quanto no **II**. Para a questão da unicidade dessas transformações vamos apresentar um argumento baseado na nossa discussão prévia sobre os pontos fixos das transformações de Möbius.

Seja M_A a transformação de Möbius que mapeia três pontos distintos $z_1,\ z_2$ e z_3 em três outros três pontos distintos $w_1,\ w_2$ e w_3 e seja M_B uma outra transformação de Möbius que mapeia $z_1,\ z_2$ e z_3 em $w_1,\ w_2$ e w_3. Então, a composição $M_B^{-1} \circ M_A = M_{B^{-1}A}$ é uma transformação de Möbius que mapeia cada z_k, $k = 1,\ 2,\ 3$, em si mesmo. Ou seja, a transformação de Möbius $M_{B^{-1}A}$ teria ao menos três pontos fixos distintos. Ora, vimos que isso só é possível se $B^{-1}A = \lambda\mathbb{1}$, com $\lambda \neq 0$. Logo, $A = \lambda B$, o que significa que $M_A = M_B$, estabelecendo a unicidade. ■

9.3 Transformações de Möbius sobre Retas e Círculos

Uma das propriedades geométricas mais importantes das transformações de Möbius é a seguinte: elas transformam retas em $\mathbb{C}$ em círculos ou retas em $\mathbb{C}$ e, analogamente, transformam círculos em $\mathbb{C}$ em círculos ou retas em $\mathbb{C}$. No que segue demonstraremos essa afirmação. Comecemos com algumas observações elementares sobre círculos e retas em $\mathbb{C}$.

• **Retas e círculos em $\mathbb{C}$**

Um círculo de raio $R > 0$ em $\mathbb{C}$, centrado em $z_0 \in \mathbb{C}$, que denotamos por $\mathscr{C}(R,\ z_0)$, é o conjunto de todos os pontos $z \in \mathbb{C}$ tais que $|z - z_0|^2 = R^2$. Escrevendo $z_0 = x_0 + iy_0$ e $z = x + iy$, com $x_0,\ y_0,\ x,\ y \in \mathbb{R}$, temos a condição $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$, ou seja,

$$\mathscr{C}(R,\ z_0) \;=\; \left\{z = x + iy,\ x,\ y \in \mathbb{R} \middle| \ \left(x^2 + y^2\right) - 2x_0 x - 2y_0 y + \left(x_0^2 + y_0^2 - R^2\right) \;=\; 0\right\} . \tag{9.17}$$

Uma linha reta em $\mathbb{C}$, que denotamos por $\mathscr{R}(B,\ C,\ D)$, pode ser parametrizada por três números reais B, C e D, com B e C não simultaneamente nulos:

$$\mathscr{R}(B,\ C,\ D) \;=\; \left\{z = x + iy,\ x,\ y \in \mathbb{R} \middle| \ Bx + Cy + D \;=\; 0\right\} . \tag{9.18}$$

A equação $Bx + Cy + D = 0$ descreve, caso $C \neq 0$, uma reta de inclinação $-B/C$ que corta o eixo imaginário no ponto $y = -D/C$. Caso $C = 0$, trata-se de uma reta paralela ao eixo imaginário que cruza o eixo real no ponto $x = -D/B$. Caso $B = 0$ trata-se de uma reta paralela ao eixo real que passa cruza o eixo imaginário no ponto $y = -D/C$.

Comparando (9.17) e (9.18), vemos que podemos descrever os dois tipos de objetos como o lugar geométrico dos pontos $z = x + iy \in \mathbb{C}$ satisfazendo

$$A\left(x^2 + y^2\right) + Bx + Cy + D \;=\; 0 ,$$

sendo que, para o círculo $\mathscr{C}(R,\ z_0)$, temos $A \neq 0$, $B/A = -2x_0$, $C/A = -2y_0$ e $D/A = x_0^2 + y_0^2 - R^2$. Para linhas retas, temos $A = 0$, mas com com B e C não simultaneamente nulos.

Com essas convenções, denotamos, círculos <u>*ou*</u> retas em $\mathbb{C}$ por

$$\mathscr{F}(A,\ B,\ C,\ D) \;=\; \left\{z = x + iy,\ x,\ y \in \mathbb{R} \middle| \ A\left(x^2 + y^2\right) + Bx + Cy + D \;=\; 0\right\} , \tag{9.19}$$

sendo $A,\ B,\ C$ e D reais e, caso $A = 0$, com B e C não simultaneamente nulos.

É relevante observar que, caso $A \neq 0$, tem-se

$$\mathscr{F}(A,\ B,\ C,\ D) \;=\; \mathscr{F}\left(1,\ \frac{B}{A},\ \frac{C}{A},\ \frac{D}{A}\right) , \tag{9.20}$$

pois as condições $A\left(x^2 + y^2\right) + Bx + Cy + D = 0$ e $\left(x^2 + y^2\right) + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}y + \frac{D}{A} = 0$ se equivalem. Analogamente, caso $D \neq 0$,

$$\mathscr{F}(A,\ B,\ C,\ D) \;=\; \mathscr{F}\left(\frac{A}{D},\ \frac{B}{D},\ \frac{C}{D},\ 1\right) . \tag{9.21}$$

• **Inversões de retas e círculos em $\mathbb{C}$**

Chegamos agora ao resultado tecnicamente mais relevante da corrente seção, e que diz respeito à ação de inversões sobre retas e círculos.

Proposição 9.1 *A transformação de Möbius definida pela inversão* $\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto I(z) := 1/z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *mapeia bijetivamente o conjunto de pontos* $\mathscr{F}(A,\ B,\ C,\ D) \setminus \{0\}$ *no conjunto de pontos* $\mathscr{F}(D,\ B,\ -C,\ A) \setminus \{0\}$. *A inversão, portanto, mapeia retas em círculos ou retas e, igualmente, círculos em círculos ou retas (excluindo-se eventualmente a origem). A imagem de um círculo somente pode ser uma linha reta se o círculo contiver a origem.* □

<u>*Nota*</u>. A exclusão da origem observada no enunciado só é necessária caso as retas ou círculos envolvidos contenham esse elemento. Os exemplos listados após a demonstração tornam isso claro. ♣

Prova da Proposição 9.1. Se $z = x + iy$, $z \neq 0$, tem-se $1/z = w_1 + iw_2$, com $w_1 := \frac{x}{x^2+y^2}$ e $w_2 := -\frac{y}{x^2+y^2}$. Assim,

$$D\big(w_1^2 + w_2^2\big) + Bw_1 - Cw_2 + A \;=\; \frac{D}{x^2+y^2} + \frac{Bx}{x^2+y^2} + \frac{Cy}{x^2+y^2} + A \;=\; \frac{1}{x^2+y^2}\Big[A\big(x^2+y^2\big) + Bx + Cy + D\Big]\;.$$

O lado direito anula-se se e somente se $z \in \mathscr{F}(A,\ B,\ C,\ D) \setminus \{0\}$, implicando que $1/z \in \mathscr{F}(D,\ B,\ -C,\ A) \setminus \{0\}$, e vice-versa.

O mapa $\mathscr{F}(A,\ B,\ C,\ D) \setminus \{0\}$ no conjunto $\mathscr{F}(D,\ B,\ -C,\ A) \setminus \{0\}$ é bijetor pois a inversão é bijetora como função de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sobre si mesmo.

Como a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é também um conjunto compacto (Teorema 32.5, página 1561), a imagem de um círculo pela inversão somente pode ser uma linha reta se o círculo contiver a origem. ■

• **Significado geométrico da Proposição 9.1**

Tratando os casos possíveis, passemos à interpretação da afirmação da Proposição 9.1.

1. No caso em que $R^2 \neq x_0^2 + y_0^2 = |z_0|^2$, o raio do círculo é estritamente maior ou estritamente menor que a distância de seu centro z_0 à origem. Portanto, o círculo $\mathscr{C}(R,\ z_0) = \mathscr{F}\big(1,\ -2x_0,\ -2y_0,\ x_0^2 + y_0^2 - R^2\big)$ não contém a origem e é levado pela inversão no conjunto

$$\mathscr{F}\big(x_0^2 + y_0^2 - R^2,\ -2x_0,\ 2y_0,\ 1\big) \overset{(9.20)}{=} \mathscr{F}\left(1,\ -2\frac{x_0}{|z_0|^2 - R^2},\ 2\frac{y_0}{|z_0|^2 - R^2},\ \frac{1}{|z_0|^2 - R^2}\right)\;,$$

que é um círculo centrado em $\overline{z_0}/\big(|z_0|^2 - R^2\big)$ de raio $\frac{R}{\big||z_0|^2 - R^2\big|}$, conjunto esse que também não contém a origem.

2. Caso $R^2 = x_0^2 + y_0^2 = |z_0|^2$, o raio do círculo original $\mathscr{F}\big(1,\ -2x_0,\ -2y_0,\ 0\big)$ é igual à distância de seu centro z_0 à origem, o que implica que $\mathscr{F}\big(1,\ -2x_0,\ -2y_0,\ 0\big)$ contém a origem. A imagem de $\mathscr{F}\big(1,\ -2x_0,\ -2y_0,\ 0\big) \setminus \{0\}$ pela inversão é $\mathscr{F}\big(0,\ -2x_0,\ 2y_0,\ 1\big) \setminus \{0\}$, que é uma reta passando pela origem com inclinação $-x_0/y_0$ (excluindo-se a origem).

3. Reciprocamente, a reta $\mathscr{F}(0,\ B,\ C,\ 0) \setminus \{0\}$, que passa pela origem (excluída) com inclinação $-B/C$, tem por imagem pela inversão o conjunto $\mathscr{F}(0,\ B,\ -C,\ 0) \setminus \{0\}$, também uma reta passando pela origem (excluída) com inclinação B/C.

4. Por fim, a reta $\mathscr{F}(0,\ B,\ C,\ D)$ com $D \neq 0$ não contém a origem e sua imagem pela inversão é o conjunto $\mathscr{F}(D,\ B,\ -C,\ 0) \setminus \{0\}$. Notar que $\mathscr{F}(D,\ B,\ -C,\ 0) = \mathscr{F}(1,\ B/D,\ -C/D,\ 0)$ é um círculo centrado em $-B/(2D) + iC/(2D)$ com raio $\sqrt{B^2 + C^2}/(2D)$ e que contém a origem.

As três últimas situações são as únicas em que a exclusão da origem se faz necessária.

• **Transformações de Möbius gerais sobre retas e círculos em $\mathbb{C}$**

Vimos nas relações (9.12) e (9.13) que transformações de Möbius gerais são composições de inversões, translações, dilatações e rotações. Ora, translações evidentemente levam retas em retas e círculos em círculos, assim como dilatações e rotações em $\mathbb{C}$. Pela Proposição 9.1, página 431, inversões levam círculos e retas em círculos ou retas. Concluímos disso que transformações de Möbius gerais devem também possuir a mesma propriedade. Demonstramos, portanto, o seguinte fato relevante sobre a geometria de transformações de Möbius gerais.

Teorema 9.2 *Uma transformação de Möbius M_K, com $\det K \neq 0$, mapeia bijetivamente o conjunto $\mathscr{F}(A,\ B,\ C,\ D) \setminus \{0\}$ num conjunto do tipo $\mathscr{F}(A',\ B',\ C',\ A') \setminus \{0\}$, para certos A', B', C' e D' reais. Uma transformação de Möbius geral, portanto, mapeia retas em círculos ou retas e, igualmente, círculos em círculos ou retas (excluindo-se eventualmente a origem).*

Como a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é também um conjunto compacto (Teorema 32.5, página 1561), a imagem de um círculo por uma transformação de Möbius M_K somente pode ser uma linha reta se o círculo contiver o polo de M_K. □

Fórmulas explícitas para os parâmetros A', B', C' e D' em termos de A, B, C e D e dos parâmetros da matriz K são complexas e pouco iluminantes. O Exercício que segue ilustra isso em um caso bem simples.

E. 9.4 *Exercício*. Mostre que, para $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, com $\alpha_1, \ \alpha_2 \in \mathbb{R}$, tem-se

$$T_\alpha\Big(\mathscr{F}(A, \ B, \ C, \ D)\Big) \ = \ \mathscr{F}\Big(A, \ B - 2A\alpha_1, \ C - 2A\alpha_2, \ D + A\big(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\big) - B\alpha_1 - C\alpha_2\Big) \ ,$$

com a translação T_α definida à página 423. Essa fórmula descreve a ação de uma translação por $\alpha \in \mathbb{C}$ sobre $\mathscr{F}(A, \ B, \ C, \ D)$. Descreva também a ação da operação de multiplicação P_β, $\beta \in \mathbb{C}$, sobre o conjunto $\mathscr{F}(A, \ B, \ C, \ D)$. ✠

Para uso futuro, capturemos uma conclusão direta da análise de casos da página 432 e do Teorema 9.2:

Corolário 9.1 *Todo círculo em $\mathbb{C}$ pode ser levado em uma reta por meio de alguma transformação de Möbius e vice-versa.* □

9.4 Transformações de Möbius e Razões Anarmônicas

Trataremos nesta seção da relação entre transformações de Möbius e as chamadas *razões anarmônicas*, noção iniciada na Geometria Plana, como introduziremos, e relevante no contexto da Geometria Projetiva, assim como na chamada Geometria Hiperbólica, via o *modelo de Beltrami-Klein*[9][10]. Essas noções são também relevantes na Análise Convexa em associação com a chamada *métrica de Hilbert* e com a chamada *métrica projetiva de Hilbert*, apresentadas no Capítulo 26, página 1358.

Vamos nos limitar aos aspectos mais simples, mas que revelam a similaridade entre transformações de Möbius e mapas projetivos. Para um tratamento elementar de Geometria Projetiva e dos desenvolvimentos básicos da noção de razão anarmônica, recomendamos a inspiradora referência [98], Capítulo IV. Para um artigo de revisão sobre a noção de razão anarmônica e alguns de seus usos modernos, citamos [258].

• **Razões anarmônicas na Geometria Plana**

Sejam dois pontos distintos, p e q, situados no plano bidimensional $\mathbb{R}^2$. Denotemos por pq o segmento de reta conectando esses pontos e por $\overline{pq}$ a distância Euclidiana entre ambos, ou seja, o comprimento do segmento pq.

Sejam quatro pontos colineares distintos a, b, c e d, situados ao longo de uma linha reta $\mathbf{R}$ e ordenados em algum dos sentidos dessa reta, com o ponto b situado entre a e c e o ponto c entre b e d. Vide Figura 9.3, página 435.

A razão $\frac{\overline{bc}}{\overline{ac}}$ indica a fração do segmento ac que é ocupada pelo segmento bc. Analogamente, $\frac{\overline{bd}}{\overline{ad}}$ indica a fração do segmento ad que é ocupada pelo segmento bd.

A razão entre essas duas frações, mais precisamente, a quantidade

$$\big[a, \ b; \ c, \ d\big] \ := \ \frac{\overline{bd}}{\overline{ad}}\Big/\frac{\overline{bc}}{\overline{ac}} \ = \ \frac{\overline{ac}\,\overline{bd}}{\overline{bc}\,\overline{ad}} \tag{9.22}$$

é denominada *razão anarmônica*[11] dos pontos colineares a, b, c e d. Como é fácil constatar,

$$\big[a, \ b; \ c, \ d\big] \ = \ \big[b, \ a; \ d, \ c\big] \ . \tag{9.23}$$

Além disso, valem também as relações

$$\big[a, \ b; \ c, \ d\big] \ = \ \big[c, \ d; \ a, \ b\big] \tag{9.24}$$

e

$$\big[b, \ a; \ c, \ d\big] \ = \ \big[a, \ b; \ d, \ c\big] \ = \ \frac{1}{\big[a, \ b; \ c, \ d\big]} \ . \tag{9.25}$$

[9] Eugenio Beltrami (1835–1900).

[10] Christian Felix Klein (1849–1925).

[11] Em Inglês, "*cross-ratio*", em Francês "*rapport anharmonique*" ou "*birapport*", em Alemão "*Doppelverhältnis*". A expressão *rapport anharmonique* foi cunhada por Michel Floréal Chasles (1793–1880) em seus trabalhos sobre Geometria Projetiva.

De fato, pela definição,

$$\big[c,\ d;\ a,\ b\big] \;=\; \frac{\overline{ca}\,\overline{db}}{\overline{da}\,\overline{cb}} \;=\; \big[a,\ b;\ c,\ d\big]$$

e

$$\big[b,\ a;\ c,\ d\big] \;=\; \frac{\overline{bc}\,\overline{ad}}{\overline{ac}\,\overline{bd}} \;=\; \frac{1}{\big[a,\ b;\ c,\ d\big]}\ ,$$

idem para $\big[a,\ b;\ d,\ c\big]$.

Vale ainda notar que temos

$$\big[a,\ b;\ c,\ d\big] \;=\; \big[a,\ b;\ c,\ e\big]\,\big[a,\ b;\ e,\ d\big]\ , \tag{9.26}$$

$$\big[a,\ b;\ c,\ d\big] \;=\; \big[a,\ e;\ c,\ d\big]\,\big[e,\ b;\ c,\ d\big]\ , \tag{9.27}$$

onde e é colinear com $a,\ b,\ c,\ d$. Após cancelamentos,

$$\big[a,\ b;\ c,\ e\big]\,\big[a,\ b;\ e,\ d\big]\ , = \frac{\overline{ac}\,\overline{be}}{\overline{bc}\,\overline{ae}}\frac{\overline{ae}\,\overline{bd}}{\overline{be}\,\overline{ad}} \;=\; \frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}\,\frac{\overline{bd}}{\overline{ad}} \;=\; \big[a,\ b;\ c,\ d\big]$$

provando (9.26). A prova de (9.26) é análoga.

Para referência futura, listemos os resultados obtidos acima:

$$\big[a,\ b;\ c,\ d\big] \;=\; \big[b,\ a;\ d,\ c\big]\ , \tag{9.28}$$

$$\big[a,\ b;\ c,\ d\big] \;=\; \big[c,\ d;\ a,\ b\big]\ , \tag{9.29}$$

$$\big[b,\ a;\ c,\ d\big] \;=\; \big[a,\ b;\ d,\ c\big] \;=\; \frac{1}{\big[a,\ b;\ c,\ d\big]}\ , \tag{9.30}$$

$$\big[a,\ b;\ c,\ d\big] \;=\; \big[a,\ b;\ c,\ e\big]\,\big[a,\ b;\ e,\ d\big]\ , \tag{9.31}$$

$$\big[a,\ b;\ c,\ d\big] \;=\; \big[a,\ e;\ c,\ d\big]\,\big[e,\ b;\ c,\ d\big]\ . \tag{9.32}$$

• **Invariância por projeções centrais**

A razão anarmônica é conhecida desde a Antiguidade, tendo sido particularmente estudada pelo geômetra grego-alexandrino Papo[12] (e possivelmente por Euclides[13]), que descobriu uma propriedade notável: sua *invariância por projeções centrais.*

Essa propriedade consiste no seguinte. Seja $\mathbf{S}$ uma segunda reta, não necessariamente paralela a $\mathbf{R}$ e seja P um ponto fora de $\mathbf{R}$ e de $\mathbf{S}$. Sejam a', b', c' e d' as projeções dos pontos a, b, c e d sobre $\mathbf{S}$ a partir de P, respectivamente. Vide Figura 9.3, página 435. Por serem projeções a partir de um ponto, no caso P, essas projeções são ditas *centrais.* Então, vale (para a demonstração, vide adiante)

$$\big[a,\ b;\ c,\ d\big] \;=\; \big[a',\ b';\ c',\ d'\big]\ , \tag{9.33}$$

ou seja, a razão anarmônica associada a quatro pontos situados em uma reta não se altera quando os mesmos pontos são centralmente projetados sobre uma outra reta.

Note-se que, como a reta $\mathbf{S}$ não é necessariamente paralela à reta $\mathbf{R}$, a fração $\frac{\overline{bc}}{\overline{ac}}$ pode diferir da fração $\frac{\overline{b'c'}}{\overline{a'c'}}$. Analogamente, a fração $\frac{\overline{bd}}{\overline{ad}}$ pode diferir da fração $\frac{\overline{b'd'}}{\overline{a'd'}}$. O notável, porém, é que a razão entre as frações $\frac{\overline{bd}}{\overline{ad}}$ e $\frac{\overline{bc}}{\overline{ac}}$ é igual à razão entre as frações $\frac{\overline{b'd'}}{\overline{a'd'}}$ e $\frac{\overline{b'c'}}{\overline{a'c'}}$. É nisso que consiste a invariância por projeções centrais da razão anarmônica.

A relação (9.33) será demonstrada no que segue com métodos elementares extraídos da referência [98], Capítulo IV, §3. Para três pontos distintos do plano, p, q e r, denotamos por $\Delta(pqr)$ a área do triângulo que tem esses pontos como

[12] Papo de Alexandria (ci. 290–ci. 350).

[13] Euclides de Alexandria (ci. 325 A.C.–ci. 265 A.C.).

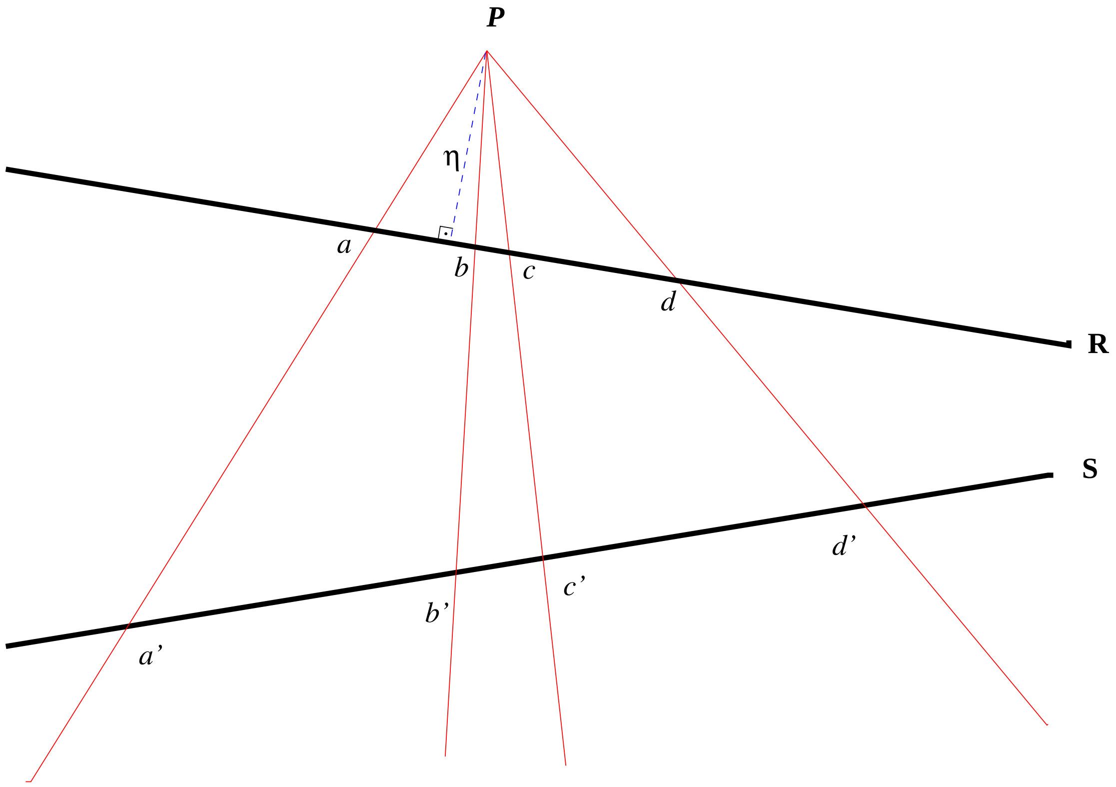

Figura 9.3: Os pontos colineares a, b, c e d, situados ao longo de uma linha reta $\mathbf{R}$, e suas projeções centrais a', b', c' e d', respectivamente, sobre uma segunda reta $\mathbf{S}$, a partir de um ponto P. Aqui η denota a distância de P à reta $\mathbf{R}$ e é a altura de todos os triângulos com vértices em P e dois pontos distintos quaisquer de $\mathbf{R}$.

vértices. Essa área tanto pode ser expressa como 1/2 do produto de um dos lados pela altura da perpendicular desse lado até terceiro ponto, como pode ser expressa como 1/2 do produto de dois dos lados pelo seno do ângulo que esses lados formam no outro vértice. Assim, como indicado na Figura 9.4, página 436, temos, por exemplo

$$\Delta(pqr) = \frac{1}{2}\overline{pq}h = \frac{1}{2}\overline{pr}\ \overline{qr}\,\mathrm{sen}\big(\widehat{pqr}\big) ,$$

onde $\widehat{pqr}$ denota o ângulo que os segmentos pr e qr formam no vértice r. Assim, pela Figura 9.3, página 435, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(aPc) &= \frac{1}{2}\eta\overline{ac} = \frac{1}{2}\overline{aP}\ \overline{Pc}\,\mathrm{sen}\big(\widehat{aPc}\big) , \\
\Delta(bPc) &= \frac{1}{2}\eta\overline{bc} = \frac{1}{2}\overline{bP}\ \overline{Pc}\,\mathrm{sen}\big(\widehat{bPc}\big) , \\
\Delta(aPd) &= \frac{1}{2}\eta\overline{ad} = \frac{1}{2}\overline{aP}\ \overline{Pd}\,\mathrm{sen}\big(\widehat{aPd}\big) , \\
\Delta(bPd) &= \frac{1}{2}\eta\overline{bd} = \frac{1}{2}\overline{bP}\ \overline{Pd}\,\mathrm{sen}\big(\widehat{bPd}\big) .
\end{aligned}$$

Com as igualdades acima, podemos escrever, após cancelar os fatores η comuns,

$$\big[a,\ b;\ c,\ d\big] = = \frac{\overline{ac}\ \overline{bd}}{\overline{bc}\ \overline{ad}} = \frac{\overline{aP}\ \overline{Pc}\,\mathrm{sen}\big(\widehat{aPc}\big)\overline{bP}\ \overline{Pd}\,\mathrm{sen}\big(\widehat{bPd}\big)}{\overline{bP}\ \overline{Pc}\,\mathrm{sen}\big(\widehat{bPc}\big)\overline{aP}\ \overline{Pd}\,\mathrm{sen}\big(\widehat{aPd}\big)} = \frac{\mathrm{sen}\big(\widehat{aPc}\big)\,\mathrm{sen}\big(\widehat{bPd}\big)}{\mathrm{sen}\big(\widehat{bPc}\big)\,\mathrm{sen}\big(\widehat{aPd}\big)} . \tag{9.34}$$

O ponto notável nessa expressão é que o lado direito depende apenas de ângulos formados no ponto P por vários

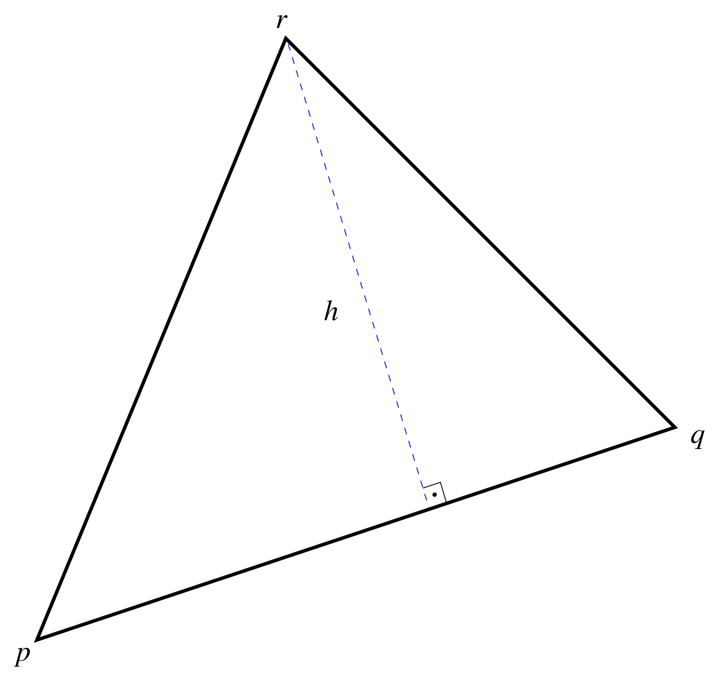

Figura 9.4: Um triângulo com vértices p, q e r. A altura de q até a reta gerada por p e q é denotada por h. Assim, $\Delta(prq) = \overline{pq}h/2 = \overline{pr}\ \overline{qr}\operatorname{sen}\big(\widehat{prq}\big)/2$

segmentos, e não dos comprimentos desses segmentos. De maneira totalmente análoga, concluímos que

$$\big[a',\ b';\ c',\ d'\big] \ = \ \frac{\operatorname{sen}\big(\widehat{a'Pc'}\big)\operatorname{sen}\big(\widehat{b'Pd'}\big)}{\operatorname{sen}\big(\widehat{b'Pc'}\big)\operatorname{sen}\big(\widehat{a'Pd'}\big)}\ . \tag{9.35}$$

Agora, é evidente pela construção e visível na Figura 9.3, página 435, que $\widehat{a'Pc'} = \widehat{aPc}$, $\widehat{b'Pd'} = \widehat{bPd}$, $\widehat{b'Pc'} = \widehat{bPc}$ e $\widehat{a'Pd'} = \widehat{aPd}$, o que nos leva a concluir imediatamente de (9.34) e (9.35) que

$$\big[a',\ b';\ c',\ d'\big] \ = \ \big[a,\ b;\ c,\ d\big]\ ,$$

como desejávamos demonstrar.

Vale ainda notar que, mantidas as definições acima, também vale

$$\big[a',\ c';\ b',\ d'\big] \ = \ \big[a,\ c;\ b,\ d\big]\ . \tag{9.36}$$

De fato,

$$\big[a,\ c;\ b,\ d\big] \ = \ \frac{\overline{ab}\ \overline{cd}}{\overline{cb}\ \overline{ad}} \ = \ \frac{\overline{aP}\ \overline{Pb}\operatorname{sen}\big(\widehat{aPb}\big)\overline{cP}\ \overline{Pd}\operatorname{sen}\big(\widehat{cPd}\big)}{\overline{cP}\ \overline{Pb}\operatorname{sen}\big(\widehat{cPb}\big)\overline{aP}\ \overline{Pd}\operatorname{sen}\big(\widehat{aPd}\big)} \ = \ \frac{\operatorname{sen}\big(\widehat{aPb}\big)\operatorname{sen}\big(\widehat{cPd}\big)}{\operatorname{sen}\big(\widehat{cPb}\big)\operatorname{sen}\big(\widehat{aPd}\big)} \ = \ \big[a',\ c';\ b',\ d'\big]\ ,$$

a última igualdade seguindo dos mesmos argumentos de antes. Devido à identidade (9.23), temos também

$$\big[c',\ a';\ d',\ b'\big] \ = \ \big[c,\ a;\ d,\ b\big]\ . \tag{9.37}$$

Esse fato, unido às relações (9.28)–(9.30) permitem-nos afirmar o seguinte:

Proposição 9.2 *Sejam a_1, a_2, a_2 e a_4 pontos colineares do plano e a'_1, a'_2, a'_2 e a'_4 suas respectivas projeções centrais situados em outra reta, em relação a um ponto P. Então, vale*

$$\big[a_{\pi(1)},\ a_{\pi(2)};\ a_{\pi(3)},\ a_{\pi(4)}\big] \ = \ \big[a'_{\pi(1)},\ a'_{\pi(2)};\ a'_{\pi(3)},\ a'_{\pi(4)}\big]$$

para qualquer permutação π de $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. □

• **Invariância por projeções paralelas**

Além da invariância por projeções centrais a partir de um ponto P, como acima descrito, a razão anarmônica é também invariante por projeções paralelas. A forma mais simples de ver isso consiste em mandar o ponto P para o infinito ao longo de uma reta.

9.4.1 Razões Anarmônicas em $\mathbb{R}^n$ e Transformações Lineares

A noção de razão anarmônica de quatro pontos colineares distintos pode ser facilmente generalizada do plano para $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e seja $\|\cdot\|$ a norma Euclidiana nesse espaço. Para quatro pontos colineares distintos $x_1,\ x_2,\ x_3$ e $x_4 \in \mathbb{R}^n$, definimos a ração anarmônica

$$\big[x_1,\ x_2;\ x_3,\ x_4\big] \ := \ \frac{\|x_1 - x_3\|\,\|x_2 - x_4\|}{\|x_2 - x_3\|\,\|x_1 - x_4\|}\ . \tag{9.38}$$

Como os pontos $x_1,\ x_2,\ x_3$ e $x_4 \in \mathbb{R}^n$ são colineares e distintos, existem constantes reais não nulas α, β e γ tais que $x_2 - x_4 = \alpha(x_1 - x_3)$, $x_2 - x_3 = \beta(x_1 - x_3)$ e $x_1 - x_4 = \gamma(x_1 - x_3)$. Assim, as diferenças $x_1 - x_3$, $x_2 - x_4$, $x_2 - x_3$ e $x_1 - x_4$ pertencem a um mesmo subespaço unidimensional, que denotamos por $\mathscr{L}\big(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\big)$.

Seja $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{R},\ n)$ uma matriz real $n\times n$. Pela linearidade de A, teremos $Ax_2 - Ax_4 = \alpha(Ax_1 - Ax_3)$, $Ax_2 - Ax_3 = \beta(Ax_1 - Ax_3)$ e $Ax_1 - Ax_4 = \gamma(Ax_1 - Ax_3)$, o que mostra que os pontos $Ax_1,\ Ax_2,\ Ax_3,\ Ax_4$ são colineares.

Observe-se que se $\mathscr{L}\big(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\big)$ não estiver contido em $\mathrm{Ker}\,(A)$, então $Ax_i \neq Ax_j$ para todos $i,\ j \in \{1,\ \ldots,\ 4\}$, $i \neq j$. Nesse caso, portanto, os pontos $Ax_1,\ Ax_2,\ Ax_3,\ Ax_4$ são colineares e distintos.

O resultado que desejamos apresentar aqui é o seguinte:

Proposição 9.3 *Seja $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{R},\ n)$ uma matriz real $n \times n$ e sejam pontos colineares distintos $x_1,\ x_2,\ x_3$ e $x_4 \in \mathbb{R}^n$. Então,*

$$\big[Ax_1,\ Ax_2;\ Ax_3,\ Ax_4\big] \ = \ \big[x_1,\ x_2;\ x_3,\ x_4\big] \tag{9.39}$$

sempre que $\mathscr{L}\big(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\big)$ não estiver contido em $\mathrm{Ker}\,(A)$. □

Prova. Como os pontos $x_1,\ x_2,\ x_3$ e $x_4 \in \mathbb{R}^n$ são colineares e distintos, existem constantes reais não nulas α, β e γ tais que $x_2 - x_4 = \alpha(x_1 - x_3)$, $x_2 - x_3 = \beta(x_1 - x_3)$ e $x_1 - x_4 = \gamma(x_1 - x_3)$. Logo,

$$\big[x_1,\ x_2;\ x_3,\ x_4\big] \ = \ \frac{|\alpha|\|x_1 - x_3\|^2}{|\beta|\,|\gamma|\|x_1 - x_3\|^2} \ = \ \frac{|\alpha|}{|\beta|\,|\gamma|}\ .$$

Por outro lado,

$$\big[Ax_1,\ Ax_2;\ Ax_3,\ Ax_4\big] \ = \ \frac{\big\|A(x_1 - x_3)\big\|\,\big\|A(x_2 - x_4)\big\|}{\big\|A(x_2 - x_3)\big\|\,\big\|A(x_1 - x_4)\big\|} \ = \ \frac{|\alpha|\big\|A(x_1 - x_3)\big\|^2}{|\beta|\,|\gamma|\big\|A(x_1 - x_3)\big\|^2} \ = \ \frac{|\alpha|}{|\beta|\,|\gamma|}\ ,$$

completando a prova de (9.39). ■

A afirmação da Proposição 9.3 é relevante em algumas aplicações da noção de razão anarmônica, por exemplo, na demonstração do Teorema de Perron-Frobenius.

9.4.2 Razões Anarmônicas no Plano Complexo e Transformações de Möbius

A razão anarmônica não ficou limitada à Antiguidade, tendo ela sido estudada por geômetras do século XIX, notadamente por Möbius, os quais provaram diversas propriedades adicionais e generalizações de resultados conhecidos, incluindo situações nas quais os quatro pontos não são colineares. No que segue, mostraremos a conexão entre a razão anarmônica e as transformações de Möbius no plano complexo, resultado também devido a matemáticos do século XIX.

Dada uma quádrupla ordenada $(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)$ de pontos distintos de $\mathbb{C}$ (não necessariamente colineares!), define-se sua *razão anarmônica* por

$$\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \ := \ \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)} \ . \tag{9.40}$$

Observe-se que o valor absoluto $\Big|\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big]\Big|$ é $\frac{|z_1-z_3|\,|z_2-z_4|}{|z_2-z_3|\,|z_1-z_4|}$, que é precisamente razão anarmônica associada aos pontos $z_1,\ z_2,\ z_3$ e z_4 tal como definimos na Geometria Plana. Aqui, porém, os quatro pontos não são necessariamente colineares e a razão anarmônica $\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big]$ é, em geral, um número complexo.

Mais sobre a relação entre a razão anarmônica no plano complexo e a razão anarmônica no plano Euclidiano, que apresentamos anteriormente, será visto no Comentário após a prova do Corolário 9.2, página 441.

Segue facilmente da definição que

$$\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \ = \ \big[z_3,\ z_4;\ z_1,\ z_2\big] \tag{9.41}$$

e que

$$\big[z_2,\ z_1;\ z_3,\ z_4\big] \ = \ \big[z_1,\ z_2;\ z_4,\ z_3\big] \ = \ \frac{1}{\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big]} \ . \tag{9.42}$$

E. 9.5 *Exercício.* Verifique! Demonstre também a relação

$$\big[z_1,\ z_3;\ z_2,\ z_4\big] \ = \ 1-\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \ . \tag{9.43}$$

✠

Outras identidades envolvendo permutações dos pontos $z_1,\ z_2,\ z_3$ e z_4 podem ser facilmente obtidas a partir de (9.41)–(9.43).

Outras relações relevantes, denominadas *relações de cociclo da razão anarmônica*, são as seguintes:

$$\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \ = \ \big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_5\big]\,\big[z_1,\ z_2;\ z_5,\ z_4\big] \ , \tag{9.44}$$

$$\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \ = \ \big[z_1,\ z_5;\ z_3,\ z_4\big]\,\big[z_5,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \ , \tag{9.45}$$

válidas para todos $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ e $z_5 \in \mathbb{C}$, distintos.

Para provar (9.44), verifique, após cancelamentos triviais, que o lado direito vale

$$\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_5\big]\,\big[z_1,\ z_2;\ z_5,\ z_4\big] \ = \ \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_5)}{(z_2-z_3)(z_1-z_5)}\frac{(z_1-z_5)(z_2-z_4)}{(z_2-z_5)(z_1-z_4)} \ = \ \frac{(z_1-z_3)}{(z_2-z_3)}\frac{(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)} \ = \ \big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \ ,$$

como desejávamos estabelecer. A prova de (9.45) é análoga (faça-a!).

O fato mais relevante sobre a razão anarmônica que desejamos apresentar é o seguinte: elas são preservadas por transformações de Möbius. Mais precisamente:

Proposição 9.4 *Seja* $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ 2)$ *da forma* $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ *com* $\det(A) = ad-bc \neq 0$. *Temos,*

$$\Big[M_A(z_1),\ M_A(z_2);\ M_A(z_3),\ M_A(z_4)\Big] \ = \ \big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \tag{9.46}$$

para quaisquer pontos distintos $z_1,\ z_2,\ z_3$ *e* $z_4 \in \mathbb{C}$. □

Prova. Um cômputo direto fornece

$$\Big[M_A(z_1),\ M_A(z_2);\ M_A(z_3),\ M_A(z_4)\Big] \;=\; \frac{\big(M_A(z_1)-M_A(z_3)\big)\big(M_A(z_2)-M_A(z_4)\big)}{\big(M_A(z_2)-M_A(z_3)\big)\big(M_A(z_1)-M_A(z_4)\big)}$$

$$= \frac{\big((az_1+b)(cz_3+d)-(az_3+b)(cz_1+d)\big)\big((az_2+b)(cz_4+d)-(az_4+b)(cz_2+d)\big)}{\big((az_2+b)(cz_3+d)-(az_3+b)(cz_2+d)\big)\big((az_1+b)(cz_4+d)-(az_4+b)(cz_1+d)\big)}$$

$$= \frac{\big((ad-bc)(z_1-z_3)\big)\big((ad-bc)(z_2-z_4)\big)}{\big((ad-bc)(z_2-z_3)\big)\big((ad-bc)(z_1-z_4)\big)} \;=\; \big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big]\,. \tag{9.47}$$

■

E. 9.6 *Exercício*. Complete os detalhes faltantes em (9.47). ✠

E. 9.7 *Exercício*. Uma maneira alternativa de provar a invariância da razão anarmônica por transformações de Möbius, expressa em (9.46), é lembrar do resultado estabelecido anteriormente segundo o qual transformações de Möbius são resultado da composição de multiplicações, translações e inversões. É bastante evidente pela definição (9.40) que razões anarmônicas são invariantes por multiplicação simultânea dos pontos $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ por uma mesma constante complexa e por sua translação simultânea pelo mesmo número complexo. Quanto às inversões, tem-se

$$\big[I(z_1),\ I(z_2);\ I(z_3),\ I(z_4)\big] \;=\; \frac{\left(\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_3}\right)\left(\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_4}\right)}{\left(\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_3}\right)\left(\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_4}\right)} \;=\; \frac{\big(z_3-z_1\big)\big(z_4-z_2\big)}{\big(z_3-z_2\big)\big(z_4-z_1\big)} \;=\; \big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big]\,.$$

Complete os detalhes. Como proceder se um dos pontos for nulo? ✠

• Estendendo a razão anarmônica para $\widehat{\mathbb{C}}$

A definição de razão anarmônica (9.40) pode ser estendida para $\widehat{\mathbb{C}}$. Define-se

$$\big[\infty,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \;:=\; \frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}\,, \qquad \big[z_1,\ \infty;\ z_3,\ z_4\big] \;:=\; \frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\,, \tag{9.48}$$

$$\big[z_1,\ z_2;\ \infty,\ z_4\big] \;:=\; \frac{z_2-z_4}{z_1-z_4}\,, \qquad \big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ \infty\big] \;:=\; \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\,. \tag{9.49}$$

Essas expressões podem ser obtidas de (9.40) tomando-se os limites $|z_1|\to\infty$, $|z_2|\to\infty$, $|z_3|\to\infty$ e $|z_4|\to\infty$, respectivamente.

O estudante pode facilmente se convencer que os resultados e relações anteriormente obtidos para a razão anarmônica estendem-se para essa nova situação em que o ponto ∞ é incluído, bastando para tal atentar para a tomada dos limites acima mencionados. Por exemplo, a relação de cociclo (9.44) para $z_1=\infty$ fica

$$\big[\infty,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \;=\; \big[\infty,\ z_2;\ z_3,\ z_5\big]\,\big[\infty,\ z_2;\ z_5,\ z_4\big]\,,$$

e isso é correto, pois o lado esquerdo é $\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}$ e o lado direito $\frac{z_2-z_5}{z_2-z_3}\,\frac{z_2-z_4}{z_2-z_5}=\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}$. Em um outro exemplo, se substituirmos z_5 por ∞ na mesma (9.44) teremos,

$$\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \;=\; \big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ \infty\big]\,\big[z_1,\ z_2;\ \infty,\ z_4\big]\,.$$

Novamente, o lado esquerdo é $\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}$ e o lado direito é $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\,\frac{z_2-z_4}{z_1-z_4}$ e ambas as expressões são obviamente iguais.

E. 9.8 *Exercício*. Mostre que as relações (9.41), (9.42) e (9.43), assim como (9.46), permanecem válidas se um dos pontos é substituído por ∞. ✠

• **Mais alguns resultados úteis sobre a razão anarmônica**

Apresentemos agora mais alguns resultados úteis a respeito da noção de razão anarmônica.

Lema 9.1 *Sejam quatro números complexos distintos $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$. Então, a razão anarmônica $\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big]$ é um número real se e somente se os quatro pontos forem forem colineares ou estiverem em um mesmo círculo do plano complexo.*

Além disso, se $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ forem colineares, se z_1 e z_4 forem os pontos extremos dentre os quatro e se z_2 estiver entre z_1 e z_3, então $\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] > 0$. □

Prova. Vamos supor que $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ pertençam a uma mesma linha reta $\mathscr{R}$ e, sem perda de generalidade, que z_2 e z_3 estejam entre os pontos z_1 e z_4. Então, podemos escrever z_2 e z_3 como combinação linear convexa de z_1 e z_4: $z_2 = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_4$ e $z_3 = \mu z_1 + (1-\mu)z_4$, onde $\lambda,\ \mu \in (0,\ 1)$, sendo $\lambda \neq \mu$. Substituindo, temos

$$\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \ := \ \frac{\big(z_1-z_3\big)\big(z_2-z_4\big)}{\big(z_2-z_3\big)\big(z_1-z_4\big)} \ = \ \frac{(1-\mu)\lambda}{(\lambda-\mu)}$$

(verifique!), que é, naturalmente, real. Essa expressão também mostra que se z_2 estiver entre z_1 e z_3 (em cujo caso, $\lambda > \mu$), então $\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] > 0$.

Vamos agora supor que $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ pertençam a um mesmo círculo $\mathscr{C}$ do plano complexo. Seja M_A uma transformação de Möbius que transforma $\mathscr{C}$ em uma linha reta (que tal transformação exista é garantido pelo Corolário 9.1, página 433). Então, $\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \stackrel{(9.46)}{=} \Big[M_A(z_1),\ M_A(z_2);\ M_A(z_3),\ M_A(z_4)\Big]$, que é real, pois os pontos $M_A(z_1),\ M_A(z_2),\ M_A(z_3)$ e $M_A(z_4)$ são colineares.

Vamos agora estabelecer a recíproca, assumindo que $\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \equiv \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Sejam $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ e $w_3 = -1$ três pontos da reta real e seja M_A a transformação de Möbius que satisfaz $M_A(z_k) = w_k$, $k = 1,\ 2,\ 3$, cuja existência é garantida pelo Teorema 9.1, página 428. Defina-se $w_4 \equiv M_A(z_4)$. Temos,

$$\alpha \ \equiv \ \big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \ \stackrel{(9.46)}{=} \ \Big[M_A(z_1),\ M_A(z_2);\ M_A(z_3),\ M_A(z_4)\Big] \ = \ \big[w_1,\ w_2;\ w_3,\ w_4\big]$$

$$= \ \frac{\big(w_1-w_3\big)\big(w_2-w_4\big)}{\big(w_2-w_3\big)\big(w_1-w_4\big)} \ = \ \frac{1-w_4}{-2w_4} \ = \ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{w_4}\right) . \qquad (9.50)$$

Logo, $w_4 = \frac{1}{1-2\alpha}$, que é real (caso $\alpha = 1/2$ podemos adotar $w_4 = \infty$).

Assim, vemos que os quatro pontos $w_1,\ w_2,\ w_3$ e w_4 estão sobre a reta real. Portanto, os quatro pontos $z_1,\ z_2,\ z_3$ e z_4 estão na imagem da reta real pela transformação de Möbius M_A^{-1}. Sabemos pelo Teorema 9.2, página 432, que essa imagem ou é uma reta ou é um círculo em $\mathbb{C}$, completando a prova. ■

Observe-se também que se $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ forem colineares, z_1 e z_4 forem os pontos extremos dentre os quatro e z_2 estiver entre z_1 e z_3, então $\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big]$ coincide com a razão anarmônica que introduzimos na Geometria Plana, pois $\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] = \Big|\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big]\Big|$.

Vamos a um outro resultado.

Lema 9.2 *Sejam $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ pontos distintos de $\mathbb{C}$. Suponhamos que existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $\big[w,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] = \big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big]$. Então, $w = z_1$.* □

Prova. A prova é elementar. A igualdade $\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] = \big[w,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big]$ significa $\frac{\big(z_1-z_3\big)\big(z_2-z_4\big)}{\big(z_2-z_3\big)\big(z_1-z_4\big)} = \frac{\big(w-z_3\big)\big(z_2-z_4\big)}{\big(z_2-z_3\big)\big(w-z_4\big)}$, ou seja, após cancelamentos triviais, $\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4} = \frac{w-z_3}{w-z_4}$, do que segue facilmente que $w = z_1$. ■

O resultado seguinte pode ser extraído como corolário dos Teoremas 9.1 e 9.2 e da relação (9.46), acima. Ele generaliza nossas observações sobre o significado da noção de razão anarmônica no contexto da Geometria Plana.

Corolário 9.2 *Sejam z_1, z_2, z_3, z_4 quatro pontos distintos e colineares de $\mathbb{C}$, localizados sobre uma linha reta $\mathscr{R}$ e sejam w_1, w_2, w_3 três pontos distintos e colineares de $\mathbb{C}$, localizados sobre uma linha reta $\mathscr{S}$. Então, existe uma transformação de Möbius M_A, única, tal que*

$$\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \ = \ \big[w_1,\ w_2;\ w_3,\ M_A(z_4)\big] \tag{9.51}$$

e tal que $M_A(z_4) \in \mathscr{S}$, ou seja, os quatro pontos w_1, w_2, w_3 e $w_4 \equiv M_A(z_4)$ também são colineares e $\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] = \big[w_1,\ w_2;\ w_3,\ w_4\big]$.

Caso w_1, w_2, w_3 forem três pontos distintos e não colineares, então pertencem a um círculo $\mathscr{C}$. Nesse caso, afirmamos que existe uma transformação de Möbius M_A, única, tal que $M_A(z_4) \in \mathscr{C}$ e tal que (9.51) é novamente válida. □

Prova. Consideremos primeiro o caso em que w_1, w_2, w_3 são colineares. Seja M_A a transformação de Möbius que satisfaz $M_A(z_k) = w_k$ para $k = 1,\ 2,\ 3$, cuja existência e unicidade foi garantida no Teorema 9.1, página 428. Os quatro pontos z_1, z_2, z_3, z_4 localizam-se sobre uma mesma reta $\mathscr{R}$ e os três pontos w_1, w_2, w_3 sobre uma mesma reta $\mathscr{S}$. Portanto, concluímos que a imagem de $\mathscr{R}$ por M_A é a reta $\mathscr{S}$, já que transformações de Möbius mapeiam retas em retas ou círculos (Teorema 9.2, página 432). Logo, a imagem de qualquer outro ponto de $\mathscr{R}$, como z_4, será um elemento de $\mathscr{R}$. Assim,

$$\big[w_1,\ w_2;\ w_3,\ M_A(z_4)\big] \ = \ \big[M_A(z_1),\ M_A(z_2);\ M_A(z_3),\ M_A(z_4)\big] \ \stackrel{(9.46)}{=} \ \big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \ . \tag{9.52}$$

Se w_1, w_2, w_3 não são colineares, mas pertencem a um círculo $\mathscr{C}$, o argumento segue a mesma linha: existe uma transformação de Möbius M_A com $M_A(z_k) = w_k$ para $k = 1,\ 2,\ 3$ e que, portanto, mapeia a reta $\mathscr{R}$ no círculo $\mathscr{C}$, onde deve, portanto, estar a imagem de $M_A(z_4)$. Também nesse caso aplica-se o raciocínio expresso em (9.52). ■

Comentário sobre o Corolário 9.2. Se os pontos w_1, w_2 e w_3 forem projeções centrais de z_1, z_2 e z_3, respectivamente, a partir de um ponto P, afirmamos que $w_4 \equiv M_A(z_4)$ é também uma projeção central de z_4 a partir do mesmo ponto P. De fato, sabemos da análise que nos levou a (9.33) que haverá um ponto d' em $\mathscr{S}$ tal que $\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] = \big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ d'\big]$ (lembrar aqui que $\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big]$ é real, pelo Lema 9.1, página 440) e esse ponto d' é a projeção central de z_4 em $\mathcal{S}$ a partir de P. Pela unicidade expressa no Lema 9.2, esse ponto há de ser $M_A(z_4)$.

Vemos, com isso, que o resultado expresso no Corolário 9.2, assim como na Proposição 9.4, são generalizações não triviais das afirmações sobre a invariância da razão anarmônica na Geometria Plana, expressa em (9.33). Note, por exemplo, que o Corolário 9.2 vale mesmo que os pontos w_1, w_2 e w_3 não sejam projeções centrais de z_1, z_2 e z_3 a partir de um mesmo ponto P. ♣

9.5 Transformações de Möbius e Automorfismos do Disco Unitário

Se D é um aberto conexo de $\mathbb{C}$ e $f : D \to D$ é analítica e bijetora, dizemos que D é um *automorfismo* do domínio D. (Recordar que se $f : D \to D$ for analítica e bijetora, então f' não se anula em D e a função inversa $f^{-1} : D \to D$ é também analítica). É bastante claro que os automorfismos de um aberto conexo D compõem um grupo (pela operação de composição de funções), muitas vezes denotado por $\mathrm{Aut}(D)$, o grupo de automorfismos de D.

Nesta seção descreveremos mais uma propriedade relevante de *certas* transformações de Möbius, a saber, a de serem os únicos automorfismos do disco unitário do plano complexo centrado na origem. Esse é o conteúdo do Teorema 9.8, página 452. Ao final, falaremos também da relação entre as transformações de Möbius e os automorfismos do semiplano superior $\mathbb{H}_+$.

Faremos uso de dois resultados de Análise Complexa que possuem interesse por si: o Teorema do Módulo Máximo e o Lema de Schwarz, os quais serão apresentados e demonstrados a seguir.

9.5.1 O Teorema do Módulo Máximo

O Teorema do Módulo Máximo, originalmente devido a Weierstrass[14], é um importante resultado da Análise Complexa e diz que se f é analítica e não constante em uma região aberta D e contínua na fronteira de D, que denotaremos por ∂D, então $|f|$ atinge seu máximo valor não D, mas em ∂D.

[14] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897).

Há vários fatos a respeito de funções analíticas que podem ser demonstrados a partir dessa afirmação, como estimativas e majorações, e colheremos alguns desses frutos no que segue.

O Teorema do Módulo Máximo é fortemente aparentado a um outro resultado, conhecido como *Princípio do Máximo*, válido para funções harmônicas (ou seja, que satisfazem a equação de Laplace $\Delta u = 0$) reais definidas em um conjunto compacto e conexo K de $\mathbb{R}^n$: essas funções atingem seu máximo valor na fronteira de K. Para uma prova no caso de $\mathbb{R}^3$, vide Teorema 43.5, página 2421 e a discussão em seu entorno. Para o caso geral (cujo tratamento é análogo) vide, *e.g.*, [128].

Comecemos com algumas definições úteis. Denotamos por $C(r,\ a)$ o círculo de raio $r > 0$ em $\mathbb{C}$ centrado em $a \in \mathbb{C}$ e por $D(r,\ a)$ o disco aberto de de raio $r > 0$ em $\mathbb{C}$ centrado em $a \in \mathbb{C}$:

$$C(r,\ a) \ := \ \Big\{z \in \mathbb{C}\Big|\ |z-a| = r\Big\} \ . \qquad \text{e} \qquad D(r,\ a) \ := \ \Big\{z \in \mathbb{C}\Big|\ |z-a| < r\Big\} \ .$$

Por $\overline{D}(r,\ a)$ ou $\overline{D(r,\ a)}$ denotamos o fecho de $D(r,\ a)$: $\overline{D}(r,\ a) := \Big\{z \in \mathbb{C}\Big|\ |z-a| \leq r\Big\}$, o disco fechado de raio $r > 0$ em $\mathbb{C}$ centrado em $a \in \mathbb{C}$. É claro que $C(r,\ a)$ é a fronteira de $D(r,\ a)$ e que $\overline{D}(r,\ a) = D(r,\ a) \cup C(r,\ a)$.

É comum denotar-se $C(1,\ 0)$, o círculo de raio 1 centrado na origem, simplesmente por $\mathbb{S}^1$ e $D(1,\ 0)$, o disco aberto de raio 1 centrado na origem, simplesmente por D_1.

Seja f uma função analítica em $D(R,\ a)$, para algum $R > 0$. Definimos, para $0 < r < R$,

$$M(r,\ a,\ f) \ := \ \max\Big\{|f(z)|,\ z \in C(r,\ a)\Big\} \ .$$

Trata-se claramente do maior valor que $|f|$ assume no círculo $C(r,\ a)$.

9.5.1.1 A Majoração de Cauchy e Algumas de suas Consequências

Para uma função f analítica em $D(R,\ a)$ vale a bem conhecida *fórmula de Cauchy*[15]: para todo $n \in \mathbb{N}_0$ tem-se

$$f^{(n)}(a) \ = \ \frac{n!}{2\pi i}\int_{C(r,\ a)} \frac{f(z')}{(z'-a)^{n+1}}dz' \ , \tag{9.53}$$

válida para todo $0 < r < R$. Como os pontos de $C(r,\ a)$ são da forma $a + re^{i\theta}$ com $\theta \in [0,\ 2\pi)$, podemos escrever (9.53) como

$$f^{(n)}(a) \ = \ \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f\big(a+re^{i\theta}\big)e^{-in\theta}\, d\theta \ . \tag{9.54}$$

Verifique! Dela decorre imediatamente que

$$\big|f^{(n)}(a)\big| \ \leq \ \frac{n!\, M(r,\ a,\ f)}{r^n} \ . \tag{9.55}$$

Essa expressão é frequentemente denominada *majoração de Cauchy*, ou *estimativa de Cauchy*, para a n-ésima derivada de f. Um caso relevante se dá para $n = 0$, quando (9.55) informa que

$$\big|f(a)\big| \ \leq \ M(r,\ a,\ f) \ . \tag{9.56}$$

Essa é uma forma fraca do Teorema do Módulo Máximo que estenderemos adiante.

• **Convergência da série de Taylor**

Para f analítica em $D(R,\ a)$ vale a também bem conhecida *expansão em série de Taylor*[16]:

$$f(z) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \ ,$$

[15] Augustin Louis Cauchy (1789–1857).
[16] Brook Taylor (1685–1731).

uma série de potências absolutamente convergente para todo $z \in D(R,\ a)$. A convergência absoluta pode ser provada com o uso de (9.55). De fato, seja $z \in D(R,\ a)$ e escolhamos r de sorte que $|z-a| < r < R$. Teremos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n\right| \overset{(9.55)}{\leq} M(r,\ a,\ f)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n ,$$

que é uma progressão geométrica convergente, pois $|z-a| < r$.

• Funções inteiras e o Teorema de Liouville

Uma função analítica em todo $\mathbb{C}$ é dita ser uma *função inteira*. Naturalmente, podemos identificar $\mathbb{C}$ com $D(\infty,\ a)$ para qualquer $a \in \mathbb{C}$.

Temos o seguinte fato fundamental, devido a Liouville[17]:

Teorema 9.3 (Teorema de Liouville) *Se f é inteira e limitada, ou seja, se existe $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então f é constante.* □

Prova. Por hipótese, $M(r,\ a,\ f) \leq M$ para todo $r > 0$ e todo $a \in \mathbb{C}$. Logo, por (9.55), $\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!\,M}{r^n}$ para todo $r > 0$. Para $n \geq 1$ isso significa que $f^{(n)}(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{C}$ e, portanto, que f é constante. ■

O Teorema de Liouville possui diversas outras demonstrações, como pode ser visto na literatura básica de Análise Complexa.

• Funções inteiras de crescimento polinomial

O Teorema de Liouville ou, mais precisamente, sua demonstração, pode ser estendido de modo a abarcar uma informação relevante sobre funções inteiras.

Proposição 9.5 *Seja f inteira e tal que existam constantes $M \geq 0$ e $\kappa \geq 0$ (κ não necessariamente um inteiro) tais que para cada $r > 0$ valha*

$$M(r,\ 0,\ f) \leq Mr^{\kappa} .$$

Então, f é um polinômio de grau menor ou igual a κ. □

Prova. Por (9.55), temos $\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!\,M}{r^{n-\kappa}}$ para todo $r > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}_0$. Como essa desigualdade é válida para todo $r > 0$, segue que $f^{(n)}(0) = 0$ sempre que $n > \kappa$, provando que f é um polinômio de menor ou igual a κ. ■

• Funções subarmônicas

Seja D um aberto conexo em $\mathbb{C}$ e seja $F : D \to \mathbb{R}$ (uma função real de uma variável complexa) que seja contínua. A função F é dita ser uma *função subarmônica*[18] se para todo $a \in D$ todo $r > 0$ suficientemente pequeno de sorte que $D(a,\ r) \subset D$ valha

$$F(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\big(a + re^{i\theta}\big)\, d\theta .$$

Um exemplo relevante é o seguinte. Por (9.54), para o caso $n = 0$, temos que

$$\big|f(a)\big| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|f\big(a + re^{i\theta}\big)\Big|\, d\theta ,$$

para todo a em um domínio aberto conexo onde f seja analítica e $r > 0$ pequeno o suficiente. Isso mostra que $|f|$ é uma função subarmônica nesse domínio.

[17] Joseph Liouville (1809–1882).

[18] A referência [202] atribui essa definição, que se tornou muito importante em Análise, a Frigyes Riesz (1880–1956).

9.5.1.2 O Módulo de uma Função Analítica. O Teorema do Módulo Máximo

No que segue apresentaremos uma demonstração do chamado Teorema do Módulo Máximo (Mínimo) da Análise Complexa, um resultado com diversas implicações relevantes.

Vamos primeiramente apresentar um teorema fundamental (Teorema 9.4), devido a Weierstrass, sobre a inexistência de máximos e mínimos locais do valor absoluto de funções analíticas definidas em domínios abertos. O enunciado e a demonstração do teorema a seguir foram extraídos, com ligeiras adaptações, de [202] e seguem a versão original de Weierstrass.

Teorema 9.4 *Seja D um aberto em $\mathbb{C}$ e seja $f : D \to \mathbb{C}$, analítica, que não seja constante. Seja $a \in D$ e seja $N_a \subset D$ uma vizinhança arbitrária de a em D. Então, existe um ponto $z_1 \in N_a$ tal que*

$$|f(z_1)| \; > \; |f(a)| \; . \tag{9.57}$$

Além disso, se $|f(a)| \neq 0$, existe um ponto $z_2 \in N_a$ tal que

$$|f(z_2)| \; < \; |f(a)| \; . \tag{9.58}$$

A relação (9.57) nos informa que f não for constante, então $|f|$ não pode ter máximos locais em D e (9.58) nos informa que $|f|$ não pode ter mínimos locais em D, exceto nos pontos em que f se anula. □

Prova. Vamos primeiramente supor $|f(a)| \neq 0$. Seja $m \geq 1$ tal que as derivadas $f^{(k)}(a)$ sejam nulas se $1 \leq k \leq m-1$, mas $f^{(m)}(a) \neq 0$. Que um tal k exista é garantido pela hipótese que f não é constante.

Com isso, a série de Taylor de f, centrada em a é

$$f(z) \; = \; a_0 + a_m(z-a)^m + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k(z-a)^k \; , \qquad \text{com} \qquad a_j \; \equiv \; \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \; , \quad \forall j \in \mathbb{N} \; , \tag{9.59}$$

sendo que $a_m \neq 0$. Essa série de potências converge para todo $z \in D(r, \; a)$ com $r > 0$ mas pequeno o suficiente.

Consideremos $z \neq a$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, escrevemos $a_k = |a_k|e^{i\alpha_k}$, com $\alpha_k \in [0, \; 2\pi)$ e, similarmente, escrevemos $z - a = |z-a|e^{i\phi}$ também com $\phi \in [0, \; 2\pi)$. Vamos escolher um ponto z tal que valha

$$m\phi \; = \; \big(\alpha_0 - \alpha_m\big) \bmod 2\pi \; . \tag{9.60}$$

Vale notar que há aqui m possíveis escolhas.

Para qualquer dessas escolhas, temos $a_0 + a_m(z-a)^m = |a_0|e^{i\alpha_0} + |a_m|\,|z-a|^m e^{i(m\phi+\alpha_m)} = e^{i\alpha_0}\big(|a_0| + |a_m|\,|z-a|^m\big)$ e, portanto,

$$\big|a_0 + a_m(z-a)^m\big| \; = \; |a_0| + |a_m|\,|z-a|^m \; > \; |a_0| \; . \tag{9.61}$$

Paralelamente, afirmamos que podemos escolher $|z-a|$ pequeno o suficiente de modo a garantir que

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+m}(z-a)^k\right| \; < \; \frac{|a_m|}{2} \; . \tag{9.62}$$

De fato, por continuidade sabemos que o lado esquerdo vai a zero quando $z \to a$ e, portanto, pode ser escolhido de sorte a ser menor que $|a_m|/2$.

Escrevendo a série de Taylor em (9.59) na forma

$$f(z) \; = \; a_0 + a_m(z-a)^m + (z-a)^m \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+m}(z-a)^k$$

e denotando por z_1 um ponto que satisfaça (9.61) e (9.62), podemos escrever[19]

$$
\begin{aligned}
|f(z_1)| \quad &\geq \quad \left| \left| a_0 + a_m(z_1-a)^m \right| - |z_1-a|^m \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+m}(z-a)^k \right| \right| \\
&\geq \quad \left| a_0 + a_m(z_1-a)^m \right| - |z_1-a|^m \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+m}(z_1-a)^k \right| \\
&\overset{(9.61)}{=} \quad |a_0| + |a_m|\,|z_1-a|^m - |z_1-a|^m \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+m}(z_1-a)^k \right| \\
&\overset{(9.62)}{>} \quad |a_0| + \frac{|a_m|}{2}|z_1-a|^m \; > \; |a_0| \; = \; |f(a)| \; .
\end{aligned}
$$

Isso demonstrou (9.57) no caso em que $f(a) \neq 0$. No caso $f(a) = 0$ temos $a_0 = 0$ e obtemos similarmente, para $z_1 \neq a$ satisfazendo (9.62),

$$
|f(z_1)| \; \geq \; \frac{|a_m|}{2}|z_1-a|^m \; > \; 0 \; ,
$$

o que estabelece (9.57) no caso em que $f(a) = 0$.

Para provar a existência de z_2 satisfazendo (9.58) procedemos de forma similar, assumindo $a_0 = f(a) \neq 0$ e substituindo (9.60) pela condição

$$
m\phi \; = \; \big(\alpha_0 - \alpha_m + \pi\big) \bmod 2\pi \; . \tag{9.63}
$$

Vale notar novamente que há aqui m possíveis escolhas.

Temos com isso, $a_0 + a_m(z-a)^m = |a_0|e^{\alpha_0} + |a_m|\,|z-a|^m e^{i(m\phi+\alpha_m)} = e^{i\alpha_0}\big(|a_0| - |a_m|\,|z-a|^m\big)$ e, portanto

$$
\left| a_0 + a_m(z-a)^m \right| \; = \; |a_0| - |a_m|\,|z-a|^m \; . \tag{9.64}
$$

Retornemos à série de Taylor, temos

$$
|f(z)| \; \leq \; \left| a_0 + a_m(z-a)^m \right| + \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k(z-a)^k \right|
$$

e escolhendo z_2 satisfazendo (9.64) e $\left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k(z_2-a)^k \right| < |a_m|\,|z-a|^m/2$ (o que vimos ser possível por continuidade), teremos

$$
\begin{aligned}
|f(z_2)| \quad &\leq \quad \left| a_0 + a_m(z_2-a)^m \right| + \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k(z_2-a)^k \right| \\
&= \quad |a_0| - |a_m|\,|z_2-a|^m + \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k(z_2-a)^k \right| \\
&\leq \quad |a_0| - \frac{|a_m|\,|z_2-a|^m}{2} \; < \; |a_0| \; = \; |f(a)| \; ,
\end{aligned}
$$

demonstrando (9.58). ■

Chegamos agora ao enunciado que mais desejávamos.

[19]Na primeira linha usamos o fato bem conhecido que $|\alpha+\beta| \geq \big||\alpha| - |\beta|\big|$, com $\alpha, \; \beta \in \mathbb{C}$.

Teorema 9.5 (Teorema do Módulo Máximo) *Seja D um aberto limitado e conexo de $\mathbb{C}$ e seja ∂D sua fronteira. Seja $f : D \to \mathbb{C}$ analítica, não constante, e tal que possa ser continuamente estendida a ∂D. Como o fecho de D, denotado por $\overline{D} = D \cup \partial D$, é compacto, $|f|$ assume um máximo em $\overline{D}$. Então,*

$$\max_{w\in\overline{D}} |f(w)| = \max_{w\in\partial D} |f(w)|$$

e, além disso, vale para todo $z \in D$ que

$$|f(z)| < \max_{w\in\partial D} |f(w)| . \tag{9.65}$$

Em palavras, $|f|$ não atinge o máximo em D, mas na fronteira ∂D. □

Prova. $|f(z)|$ não pode atingir seu máximo em D, pois isso contrariaria o Teorema 9.4, página 444. ■

Com uma ligeira adaptação, temos também o

Teorema 9.6 (Teorema do Módulo Mínimo) *Seja D um aberto limitado e conexo de $\mathbb{C}$ e seja ∂D sua fronteira. Seja $f : D \to \mathbb{C}$ analítica, não constante, e tal que possa ser continuamente estendida a ∂D. Vamos adicionalmente supor que f não se anula em $\overline{D}$. Como o fecho de D, denotado por $\overline{D} = D \cup \partial D$, é compacto, $|f|$ assume um mínimo em $\overline{D}$. Então,*

$$\min_{w\in\overline{D}} |f(w)| = \min_{w\in\partial D} |f(w)|$$

e, além disso, vale para todo $z \in D$ que

$$|f(z)| > \min_{w\in\partial D} |f(w)| . \tag{9.66}$$

Em palavras, $|f|$ não atinge o mínimo em D, mas na fronteira ∂D. □

Prova. Podemos analogamente argumentar que $|f(z)|$ não pode atingir seu mínimo em D, pois isso contrariaria o Teorema 9.4, página 444. Ou podemos considerar a função analítica $g(z) = 1/f(z)$ (lembrar que f não se anula em D, por hipótese) e aplicar a ela o Teorema do Módulo Máximo, Teorema 9.5, página 446. ■

Comentários. O Teorema do Módulo Máximo (Mínimo) é também conhecido como *Princípio do Módulo Máximo (Mínimo)*.

Chamamos a atenção do leitor para o fato de as desigualdades (9.65) e (9.66) serem estritas.

Um comentário relevante a se fazer sobre o Teorema 9.4, página 444, e seus corolários, os Teoremas 9.5 e 9.6, acima, é que esses dois últimos exigem que o domínio aberto D seja limitado, mas não há tal restrição no Teorema 9.4. ♣

9.5.1.3 O Lema de Schwarz e Algumas Consequências

Apresentaremos agora uma das consequências do Teorema 9.4, página 444, conhecido como *Lema de Schwarz*[20]. Esse resultado é aparentemente simples, mas possui diversas consequências não triviais, algumas das quais serão exploradas adiante. Para um estudo amplo desse importante resultado e de algumas de seus usos, vide [105] (que também contém notas históricas), assim como o excelente artigo [341].

Como antes, D_1 ($\overline{D_1}$) designa o disco aberto (fechado) de raio 1 centrado na origem, sendo que $C(r) \equiv C(r,\ 0)$ denota o círculo de raio $r > 0$ centrado na origem. Por ∂D_1 denotamos a fronteira de D_1, que coincide com $C(1)$.

Teorema 9.7 (Lema de Schwarz) *Seja $f : D_1 \to \mathbb{C}$ analítica e satisfazendo $\sup_{z\in D_1} |f(z)| = K_1$, onde $K_1 \geq 0$, constante. Suponhamos também que f tenha um zero de ordem $m \geq 1$ em $z = 0$, ou seja, que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(m-1)}(0) = 0$ com $f^{(m)}(0) \neq 0$. Então, para todo $z \in D_1$ tem-se*

$$\big|f(z)\big| \leq K_1 |z|^m \tag{9.67}$$

e

$$\big|f^{(m)}(0)\big| \leq K_1\, m! \ . \tag{9.68}$$

[20]Karl Hermann Amandus Schwarz (1843–1921).

Caso a igualdade em (9.67) ocorra para algum $z \in D_1 \setminus \{0\}$ ou caso a igualdade em (9.68) ocorra, então tem-se

$$f(z) \ = \ a\, z^m \tag{9.69}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, onde $a \in \mathbb{C}$ é uma constante com $|a| = K_1$ e, portanto, $\left|f^{(m)}(0)\right| = K_1\, m!$.

As afirmações acima equivalem a afirmar a validade das seguintes possibilidades excludentes:

1. *Para todo $z \in D_1 \setminus \{0\}$ tem-se*
$$\left|f(z)\right| \ < \ K_1\, |z|^m$$
e $\left|f^{(m)}(0)\right| < K_1\, m!$.

2. *Para todo $z \in \mathbb{C}$ tem-se*
$$f(z) \ = \ a\, z^m \ ,$$
onde $a \in \mathbb{C}$ é uma constante com $|a| = K_1$. Portanto, $\left|f^{(m)}(0)\right| = K_1\, m!$. □

Prova.[21] Pelas hipóteses, a série de Taylor centrada em 0 de f é $f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k z^k$ e converge absolutamente em D_1. Assim, a função $g(z) := z^{-m} f(z)$ é analítica em D_1, sendo que $g(0) = a_m = f^{(m)}(0)/m!$.

Tomando $z \in D_1$, podemos afirmar pelo Teorema do Módulo Máximo que para todo r com $|z| < r < 1$ vale

$$|g(z)| \ \leq \ \max_{w \in C(r)} \frac{|f(w)|}{|w|^m} \ = \ \frac{1}{r^m} \max_{w \in C(r)} |f(w)| \ < \ \frac{K_1}{r^m} \ .$$

Podemos agora fazer r arbitrariamente próximo de 1 e, com isso, obtemos[22]

$$|g(z)| \ \leq \ K_1 \ , \qquad \forall\, z \in D_1 \ . \tag{9.70}$$

Como $f(z) = z^m g(z)$, $z \in D_1$, obtemos $|f(z)| \leq K_1 |z|^m$, também para todo $z \in D_1$. Como $f^m(0) = m! g(0)$, segue que $\left|f^m(0)\right| \leq K_1 m!$.

Vamos supor que exista $z_0 \in D_1 \setminus \{0\}$ tal que $|f(z_0)| = K_1 |z_0|^m$, ou seja, tal que $|g(z_0)| = K_1$. Pelo Teorema 9.4, página 444, se g não for constante, haveria um ponto z_1 em um vizinhança de z_0 com $|g(z_1)| > K_1$, contrariando (9.70). Logo, nesse caso devemos ter $g(z) = a$ em todo $\overline{D_1}$, onde $a \in \mathbb{C}$ é constante com $|a| = K_1$ (pois, supostamente $|g(z_0)| = K_1$) e, portanto, $f(z) = az^m$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Se alternativamente valer $\left|f^m(0)\right| = K_1 m!$, teremos novamente $|g(0)| = K_1$ (pois $f^m(0) = m! g(0)$) e o mesmo raciocínio se aplica: pelo Teorema 9.4, página 444, $g(z) = a$ em todo D_1, onde $a \in \mathbb{C}$ é constante com $|a| = K_1$ e, portanto, $f(z) = az^m$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Isso completa a prova. ■

O Lema de Schwarz, Teorema 9.7, página 446, tem a seguinte generalização imediata útil.

Proposição 9.6 *Seja $D_R \equiv D(R,\, 0) \subset \mathbb{C}$ o disco aberto de raio $R > 0$ centrado na origem. Seja $f : D_R \to \mathbb{C}$ analítica e satisfazendo $\sup_{z \in D_R} |f(z)| = K_R$, onde $K_R \geq 0$, constante. Suponhamos também que f tenha um zero de ordem $m \geq 1$ em $z = 0$, ou seja, que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(m-1)}(0) = 0$ com $f^{(m)}(0) \neq 0$. Então, vale uma das seguintes afirmações:*

1. *Para todo $z \in D_R \setminus \{0\}$ tem-se*
$$\left|f(z)\right| \ < \ K_R \frac{|z|^m}{R^m} \tag{9.71}$$
e
$$\left|f^{(m)}(0)\right| < \frac{K_R\, m!}{R^m} \ . \tag{9.72}$$

[21] Seguimos parcialmente [203], mas melhorando diversas imprecisões daquele texto.

[22] Lembrar que $1/r > 1$. Daí, se $|g(z)| < 1/r^m$ obtemos $|g(z)| \leq 1$ se fizermos r crescer, tornando-se mais próximo a 1.

2. *Para todo $z \in \mathbb{C}$ tem-se*
$$f(z) \;=\; \frac{a\, z^m}{R^m}\;, \tag{9.73}$$
onde $a \in \mathbb{C}$ é uma constante com $|a| = K_R$. Portanto,
$$\bigl|f^{(m)}(0)\bigr| = \frac{K_R\, m!}{R^m}\;. \tag{9.74}$$

□

Prova. Defina-se para $z \in D_1$ a função $h(z) := f(Rz)$. Então h satisfaz as hipóteses do Teorema 9.7, página 446 e temos as seguintes possibilidades excludentes:

1. Para todo $z \in D_1 \setminus \{0\}$ tem-se $\bigl|h(z)\bigr| < K_R\, |z|^m$ e $\bigl|h^{(m)}(0)\bigr| < K_R\, m!$. Como $f(z) = h(z/R)$, $z \in D_R \setminus \{0\}$, temos $\bigl|f(z)\bigr| < K_R\, \frac{|z|^m}{R^m}$ e $\bigl|f^{(m)}(0)\bigr| < K_R\, m!/R^m$.
2. Para todo $z \in \mathbb{C}$,
$$h(z) \;=\; a\, z^m\;,$$
onde $a \in \mathbb{C}$ é uma constante com $|a| = K_R$. Como $f(z) = h(z/R)$, $z \in D_R$, temos $f(z) = \frac{a\, z^m}{R^m}$, $z \in \mathbb{C}$. ■

Uma importante generalização do Lema de Schwarz, o chamado *Lema de Schwarz-Pick*, será estudada na Seção 9.5.3, página 455.

• Uma outra generalização elementar do Lema de Schwarz e o Teorema de Liouville revisitado

Seja uma função analítica $F : D_R \to \mathbb{C}$, limitada em D_R, $R > 0$, mas que não satisfaz a hipótese de anular-se, junto com suas $m-1$ primeiras derivadas, no ponto 0. A função $f(z) := F(z) - p_{m-1}(z)$, $z \in D_R$, com p_{m-1}, $m \in \mathbb{N}$, sendo o polinômio de Taylor de ordem $m-1$ centrado na origem, $p_{m-1}(z) := \sum_{k=0}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} z^k$, satisfaz as hipóteses da Proposição 9.6, página 447: é limitada em D_R e anula-se em 0 juntamente com suas $m-1$ primeiras derivadas.

Podemos, portanto, generalizar o Lema de Schwarz e a Proposição 9.6 eliminando a necessidade de a função considerada anular-se em 0 (juntamente com algumas de suas derivadas), substituindo-a adequadamente por uma outra função analítica e limitada que o faça. Esse fato será melhor elaborado no Lema de Schwarz-Pick, Teorema 9.10, página 456, adiante.

Tendo isso em mente, podemos mostrar que também o Teorema de Liouville, Teorema 9.3, página 443, pode ser inferido como consequência do Lema de Schwarz na sua versão dada na Proposição 9.6.

Seja $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ inteira e globalmente limitada, ou seja, tal que existe constante $M \geq 0$ com a qual valha $|F(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Defina-se $f(z) = F(z) - F(0)$. Temos $\bigl|f(z)\bigr| = |F(z) - F(0)| \leq M + \bigl|F(0)\bigr|$ em todo $\mathbb{C}$.

Seja $R > 0$ e tomemos provisoriamente $z \in D_R$. Podemos identificar a constante majorante $M + \bigl|F(0)\bigr|$, acima, com a constante K_R do enunciado da Proposição 9.6 e concluir de (9.71) e (9.73) que, para $z \in D_R$,
$$\bigl|F(z) - F(0)\bigr| \;=\; \bigl|f(z)\bigr| \;\leq\; \frac{K_R |z|}{R} \;=\; \frac{M + \bigl|F(0)\bigr|}{R}\, |z|\;.$$
Como isso vale para todo $R > 0$, concluímos que $F(z) = F(0)$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, e, portanto, F é constante em todo $\mathbb{C}$, que é a afirmação do Teorema de Liouville, Teorema 9.3.

Para outros resultados fundamentais obteníveis a partir do Lema de Schwarz vide, *e.g.*, [105] e [341].

★★★ ★★ ★ ★★ ★★★

Como veremos, um dos corolários do Lema de Schwarz afirma que os automorfismos de D_1 são todos transformações de Möbius de um certo tipo, permitindo-nos, assim, retomar nossa discussão sobre essas transformações. Tratar dessas questões será nosso objetivo na Seção 9.5.2, 449.

9.5.2 Transformações de Möbius e Automorfismos do Disco Unitário

Vamos agora tratar da relação entre as transformações de Möbius e os automorfismos do disco unitário D_1. Ao final, falaremos também da relação entre as transformações de Möbius e os automorfismos do semiplano superior $\mathbb{H}_+$.

• **Transformações de Möbius que mantém o círculo unitário invariante**

Proposição 9.7 *Uma condição necessária e suficiente para que uma transformação de Möbius mapeie o círculo unitário centrado na origem, $\mathbb{S}^1$, em si mesmo é que seja da forma*

$$M_A(z) \;=\; \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}} \;, \tag{9.75}$$

com $a,\ b \in \mathbb{C}$ tais que $\det(A) \neq 0$, ou seja, tais que $|a|^2 - |b|^2 \neq 0$. □

Prova. Consideremos a transformação de Möbius (9.75) e tomemos $z \in \mathbb{S}^1$, ou seja, da forma $z = e^{i\phi}$ para todo $\phi \in [0,\ 2\pi)$. Temos,

$$M_A(e^{i\phi}) \;=\; \frac{ae^{i\phi}+b}{\overline{b}e^{i\phi}+\overline{a}} \;=\; e^{i\phi}\frac{w}{\overline{w}} \qquad \text{com} \qquad w \;=\; be^{-i\phi}+a \;,$$

e vemos que $M_A(e^{i\phi})$ é um número complexo de módulo 1, pois $e^{i\phi}$ e um número complexo da forma $w/\overline{w}$ são números complexos de módulo 1. Assim, M_A mapeia $\mathbb{S}^1$ em si mesmo bijetivamente (a bijetividade de transformações de Möbius no caso geral foi provada no início do capítulo corrente).

Vamos agora demonstrar a recíproca e seja uma transformação de Möbius $M_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, que mapeie $\mathbb{S}^1$ em si mesmo. Isso significa que para todo $\phi \in [0,\ 2\pi)$ tem-se

$$\left|ae^{i\phi}+b\right|^2 \;=\; \left|ce^{i\phi}+d\right|^2 . \tag{9.76}$$

O lado esquerdo de (9.76) é

$$\big(\overline{a}e^{-i\phi}+\overline{b}\big)\big(ae^{i\phi}+b\big) \;=\; |a|^2+|b|^2+\overline{a}be^{-i\phi}+\overline{b}ae^{i\phi}$$

e, analogamente, o lado direito de (9.76) é

$$\left|ce^{i\phi}+d\right|^2 \;=\; |c|^2+|d|^2+\overline{c}de^{-i\phi}+\overline{d}ce^{i\phi} .$$

Assim, a imposição de (9.76) corresponde à imposição de

$$\big(|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2\big)+\big(\overline{a}b-\overline{c}d\big)e^{-i\phi}+\big(\overline{b}a-\overline{d}c\big)e^{i\phi} \;=\; 0$$

para todo $\phi \in [0,\ 2\pi)$. A nulidade desse polinômio trigonométrico impõe a nulidade de seus coeficientes (vide Corolário 36.3, página 1847), ou seja, devemos ter

$$|a|^2+|b|^2 \;=\; |c|^2+|d|^2 \;, \tag{9.77}$$

$$\overline{a}b \;=\; \overline{c}d \;, \tag{9.78}$$

(a terceira condição $\overline{b}a = \overline{d}c$ equivale a (9.78)). A condição (9.78) significa que o determinante da matriz $\left(\begin{smallmatrix} \overline{a} & d \\ \overline{c} & b \end{smallmatrix}\right)$ é nulo. Isso, por sua vez significa que a segunda coluna dessa matriz é proporcional à primeira, ou seja, que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$d \;=\; \lambda\overline{a} \qquad \text{e} \qquad b \;=\; \lambda\overline{c} \;.$$

Agora, λ não pode ser nula, pois isso implicaria em $d = b = 0$ e a matriz A teria determinante nulo.

Com isso, a condição (9.77) fica

$$|a|^2+|b|^2 \;=\; \frac{|b|^2}{|\lambda|^2}+|\lambda|^2|a|^2 \;, \qquad \text{ou seja,} \qquad \big(1-|\lambda|^2\big)\left(|a|^2-\frac{|b|^2}{|\lambda|^2}\right) \;=\; 0 \;.$$

Para tal, há duas possibilidades:

I. $|a|^2 = \frac{|b|^2}{|\lambda|^2}$ ou

II. $|\lambda|^2 = 1$.

No caso **I** não podemos ter $|a| = 0$, pois isso implicaria $|b| = 0$ e, com isso, o determinante de A seria nulo. Assim, teríamos $|\lambda| = \frac{|b|}{|a|}$. Escrevendo λ na sua forma polar, $\lambda = |\lambda|e^{i\alpha} = \frac{|b|}{|a|}e^{i\alpha}$ a matriz A ficaria

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{\overline{b}}{\overline{\lambda}} & \lambda\overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{\overline{b}|a|}{|b|}e^{i\alpha} & \frac{\overline{a}|b|}{|a|}e^{i\alpha} \end{pmatrix} .$$

Ocorre, porém, que o determinante dessa matriz vale $|a|\,|b|\,e^{i\alpha} - |a|\,|b|\,e^{i\alpha} = 0$, o que descarta o caso **I**.

No caso **II** temos que $\lambda = e^{i\alpha}$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, teríamos

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{\overline{b}}{\overline{\lambda}} & \lambda\overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ e^{i\alpha}\overline{b} & e^{i\alpha}\overline{a} \end{pmatrix} = e^{i\alpha/2}\begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}a & e^{-i\alpha/2}b \\ \overline{e^{-i\alpha/2}b} & \overline{e^{-i\alpha/2}a} \end{pmatrix} = e^{i\alpha/2}\begin{pmatrix} a' & b' \\ \overline{b'} & \overline{a'} \end{pmatrix} ,$$

sendo que absorvemos os fatores $e^{-i\alpha/2}$ em a e em b, definindo $a' = e^{-i\alpha/2}a$ e $b' = e^{-i\alpha/2}b$, vemos que a correspondente transformação de Möbius é

$$M_A(z) = \frac{a'z + b'}{\overline{b'}z + \overline{a'}} ,$$

que é da forma considerada em (9.75). A condição $|a'|^2 - |b'|^2 \neq 0$ é simplesmente a condição para que o determinante de A não se anule. ■

E. 9.9 *Exercício para obsessivos.* Seja $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Na demonstração acima, argumentamos que a condição (9.78) significa que o determinante da matriz $B \equiv \left(\begin{smallmatrix} \overline{a} & d \\ \overline{c} & b \end{smallmatrix}\right)$ é nulo e prosseguimos dizendo que isso impõe que a segunda coluna seja proporcional à primeira. Poderíamos, porém, prosseguir impondo que a segunda linha é proporcional à primeira, ou seja, dizendo que existe $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{c} = \mu\overline{a}$ e $b = \mu d$. Como é de se esperar a conclusão será a mesma, como mostra o procedimento a seguir, um pouco menos direto que o anterior.

Com as escolhas acima, teríamos $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{\mu}a & b/\mu \end{smallmatrix}\right)$. Mostre que a condição (9.77) ficaria na forma $\big(1 - |\mu|^2\big)\big(|a|^2 - |b|^2/|\mu|^2\big) = 0$. Mostre que agora a condição $|\mu| = 1$ leva a uma matriz A de determinante nulo. A outra condição significa $|\mu| = |b|/|a|$ e mostre que escrevendo μ na forma polar como $\mu = e^{i\gamma}|b|/|a|$, teremos $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ e^{-i\gamma}\frac{\overline{a}|b|}{|a|} & e^{-i\gamma}\frac{\overline{b}|a|}{|b|} \end{smallmatrix}\right)$. Escrevendo $a = |a|e^{i\alpha}$ e $b = |b|e^{i\beta}$ e definindo $\delta := \gamma - \alpha - \beta$, mostre que $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ e^{-i\delta}\overline{b} & e^{-i\delta}\overline{a} \end{smallmatrix}\right)$. Mostre agora que $A = e^{-i\delta/2}\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ \overline{b'} & \overline{a'} \end{smallmatrix}\right)$, onde $a' = e^{i\delta/2}a$ e $b' = e^{i\delta/2}b$. Como no tratamento anterior, essa matriz tem a forma desejada. ✠

• Transformações de Möbius que mantém o disco unitário invariante

A condição $|a|^2 - |b^2| \neq 0$ constante na Proposição 9.7, página 449, tem, naturalmente, duas alternativas: $|a| < |b|$ e $|b| < |a|$. No primeiro caso não podemos ter $|b| = 0$ e no segundo não podemos ter $|a| = 0$. Qual a diferença entre ambas? Para responder a essa pergunta observemos que a transformação de Möbius $M_A(z) = (az + b)/(\overline{b}z + \overline{a})$ possui um polo em $z_p = -\frac{\overline{a}}{\overline{b}}$. No caso $|a| < |b|$ esse polo estará contido no disco unitário centrado na origem, D_1. No caso $|b| < |a|$ o polo estará contido no complementar de seu fecho, $\mathbb{C} \setminus \overline{D_1}$.

Completando essa discussão, temos a seguinte

Proposição 9.8 *Uma condição necessária e suficiente para que uma transformação de Möbius seja analítica em D_1 e mapeie $\mathbb{S}^1$ em si mesmo é que seja da forma*

$$M_A(z) = \frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}} , \qquad com \qquad A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right) , \tag{9.79}$$

com $a,\ b \in \mathbb{C}$ satisfazendo $|b| < |a|$, ou seja, satisfazendo $\det(A) > 0$. *Tais transformações de Möbius mapeiam bijetivamente D_1 em si mesmo e são, portanto, automorfismos de D_1.*

Comentamos ainda que as transformações de Möbius (9.79) possuem um (único) zero em D_1 pois, sob a condição $|b| < |a|$, o ponto $z_0 = -b/a$ está em D_1. □

Prova da Proposição 9.8. Pelo que acabamos de ver, a transformação de Möbius (9.79) com $|b| < |a|$ é analítica em D_1 e, pelo que vimos na Proposição 9.7, página 449, satisfaz $|M_A(z)| = 1$ quando z encontra-se na fronteira de D_1, que é $\mathbb{S}^1$. Com isso, podemos evocar o Teorema do Módulo Máximo, Teorema 9.5, página 446, para afirmar que $|M_A(z)| < 1$ quando z encontra-se em D_1. Isso significa que M_A mapeia D_1 em si mesmo. ■

Comentário. A Proposição 9.8, página 450, pode ser provada por meios elementares, sem recurso ao Teorema do Módulo Máximo. Vide Proposição 9.16, página 466. ♣

[[[[[·]]]]]

Mais adiante, no Teorema 9.8, página 452, provaremos que as transformações de Möbius consideradas na Proposição 9.8 são os únicos (!) automorfismos de D_1.

• Uma propriedade dos automorfismos de D_1

Proposição 9.9 *Seja $A \in \mathscr{U}$ da forma $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a}\end{smallmatrix}\right)$, com a, $b \in \mathbb{C}$, e $\det(A) > 0$. Então, para qualquer $z_1 \in D_1$ vale*

$$\left|\frac{M_A(z) - M_A(z_1)}{1 - \overline{M_A(z_1)}\, M_A(z)}\right| = \left|\frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1}\, z}\right| , \tag{9.80}$$

onde $z \in D_1$, arbitrário. □

Comentários. Mais adiante, no Teorema 9.10, página 456, apresentaremos uma recíproca dessa afirmação. Na Proposição 9.12, página 457, mostraremos que (9.80) pode ser interpretado como a afirmação de invariância de uma certa métrica pelo grupo de automorfismos de D_1. ♣

Prova da Proposição 9.9. Seja $G = \left(\begin{smallmatrix} -1 & M_A(z_1) \\ -\overline{M_A(z_1)} & 1\end{smallmatrix}\right)$. Como $z_1 \in D_1$ e $A \in \mathscr{U}$, temos $\big|M_A(z_1)\big|^1 < 1$ e, portanto, $\det(G) > 0$, revelando que $G \in \mathscr{U}$.

Agora,

$$g(z) := \frac{M_A(z) - M_A(z_1)}{1 - \overline{M_A(z_1)}\, M_A(z)} = M_G\big(M_A(z)\big) = M_{GA}(z) .$$

Um cálculo explícito (faça-o!) revela que

$$GA = \begin{pmatrix} a - \overline{b}M_A(z_1) & b - \overline{a}M_A(z_1) \\ \\ \overline{b} - a\overline{M_A(z_1)} & \overline{a} - b\overline{M_A(z_1)} \end{pmatrix} .$$

Assim,

$$g(z) = \frac{\big(a - \overline{b}M_A(z_1)\big)z + \big(b - \overline{a}M_A(z_1)\big)}{\big(\overline{b} - a\overline{M_A(z_1)}\big)z + \big(\overline{a} - b\overline{M_A(z_1)}\big)} = \left(\frac{a - \overline{b}M_A(z_1)}{\overline{a} - b\overline{M_A(z_1)}}\right)\left[\frac{z + \left(\frac{b - \overline{a}M_A(z_1)}{a - \overline{b}M_A(z_1)}\right)}{\left(\frac{\overline{b} - a\overline{M_A(z_1)}}{\overline{a} - b\overline{M_A(z_1)}}\right) z + 1}\right]$$

Como $A^{-1} = \frac{1}{|a|^2 - |b|^2}\left(\begin{smallmatrix} \overline{a} & -b \\ -\overline{b} & a\end{smallmatrix}\right)$, vemos que

$$\frac{b - \overline{a}M_A(z_1)}{a - \overline{b}M_A(z_1)} = -M_{A^{-1}}\big(M_A(z_1)\big) = -z_1 .$$

Constatamos, portanto, que

$$g(z) = \psi\frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1}z} ,$$

onde $\psi = \left(\frac{a-\overline{b}M_A(z_1)}{\overline{a}-b\overline{M_A(z_1)}}\right)$, que é um número complexo com $|\psi|=1$, pois é a razão entre um número e seu complexo conjugado. Portanto,

$$|g(z)| \;=\; \left|\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}\right| \,,$$

que é o que queríamos estabelecer. ■

• **Reparametrizando as transformações de Möbius que são automorfismos de D_1**

Para a discussão que ora se inicia é conveniente escrever as transformações de Möbius de (9.79) de uma forma diferente. Para $a,\; b\in\mathbb{C}$ sati fazendo $|b|<|a|$, temos

$$M_A(z) \;=\; \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}} \;=\; \frac{a}{\overline{a}}\,\frac{z+b/a}{\overline{b/a}z+1} \;=\; e^{2i\alpha}\,\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\,, \tag{9.81}$$

onde $z_0=-b/a$ e onde escrevemos a em sua forma polar $a=|a|e^{i\alpha}$, ou seja, $\alpha=\arg(a)\bmod 2\pi$.

Dessa forma, podemos parametrizar as transformações de Möbius que são automorfismos de D_1 com dois parâmetros, $\alpha\in[0,\;2\pi)$ e $z_0\in D_1$, da forma

$$M_{\alpha,\,z_0}(z) \;:=\; e^{2i\alpha}\,\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\,. \tag{9.82}$$

Cabe aqui notar que a derivada $M'_{\alpha,\,z_0}(z)$ é dada por

$$M'_{\alpha,\,z_0}(z) \;=\; e^{2i\alpha}\,\frac{1-|z_0|^2}{(1-\overline{z_0}z)^2}$$

e, portanto, $M'_{\alpha,\,z_0}(z_0)=e^{2i\alpha}\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$, donde concluímos que o expoente 2α em (9.82) coincide com $\arg\left(M'_{\alpha,\,z_0}(z_0)\right)$.

Temos então que os parâmetros z_0 e α que caracterizam (9.82) satisfazem

$$M_{\alpha,\,z_0}(z_0) \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad 2\alpha \;=\; \arg\left(M'_{\alpha,\,z_0}(z_0)\right)\bmod 2\pi\,.$$

• **Automorfismos gerais de D_1**

Seja $N: D_1\to D_1$ um automorfismo do disco unitário D_1, ou seja, uma função analítica em todo D_1 que mapeia D_1 bijetivamente em si mesmo. Devido à bijetividade podemos afirmar que existe $w_0\in D_1$ tal que $N(w_0)=0$. Afirmamos que $N'(w_0)\neq 0$. De fato, a inversa $N^{-1}: D_1\to D_1$ é analítica em D_1 e satisfaz $N\big(N^{-1}(z)\big)=z$ para todo $z\in D_1$. Logo, pela regra da cadeia, $N'\big(N^{-1}(z)\big)\,\big(N^{-1}\big)'(z)=1$. Para $z=0$, temos $N'(w_0)\big(N^{-1}\big)'(0)=1$, o que implica $N'(w_0)\neq 0$. Disso concluímos também que $\arg\big(N'(w_0)\big)$ está bem definido.

Com esses ingredientes preparatórios podemos enunciar e demonstrar o resultado principal, que essencialmente afirma as transformações de Möbius que são automorfismos de D_1 são todos os possíveis automorfismos do disco unitário.

Teorema 9.8 *Seja $N: D_1\to D_1$ um automorfismo do disco unitário D_1 que seja contínuo na borda $\partial D_1\equiv\mathbb{S}^1$. Sejam $w_0\in D_1$ tal que $N(w_0)=0$ e seja $\beta\in[0,\;2\pi)$ dado por $2\beta=\arg\big(N'(w_0)\big)\bmod 2\pi$. Então,*

$$N(z) \;=\; M_{\beta,\,w_0}(z)$$

para todo $z\in D_1$. Em outras palavras, todos os automorfismos de D_1 são todos da forma (9.82), o que equivale a dizer que são todos da forma (9.75). □

Prova.[23] Seja N com as propriedades descritas no enunciado e, para simplificar a notação, denotemos $M_{\beta,\,w_0}(z)$ por $M(z)$. Sejam as funções $g: D_1\to D_1$ e $h: D_1\to D_1$ definidas por $g:=M\circ N^{-1}$ e $h:=N\circ M^{-1}$.

[23] A demonstração que segue corrige a argumentação defeituosa encontrada em [203].

Essas duas funções são também, evidentemente, automorfismos de D_1 (satisfazendo, em particular $|g(z)| \leq 1$ e $|h(z)| \leq 1$ em $\overline{D_1}$) e temos $g(0) = M\big(N^{-1}(0)\big) = M(w_0) = 0$ e $h(0) = N\big(M^{-1}(0)\big) = N(w_0) = 0$. Assim, podemos evocar o Lema de Schwarz, Teorema 9.7, página 446, para ambas as funções e afirmar que vale uma das condições a seguir:

I. $|g(z)| < |z|$ e $|h(z)| < |z|$, $z \in D_1 \setminus \{0\}$.

II. $g(z) = e^{i\alpha} z$, $z \in D_1$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|h(z)| < |z|$, $z \in D_1 \setminus \{0\}$.

III. $h(z) = e^{i\beta} z$, $z \in D_1$, com $\beta \in \mathbb{R}$ e $|g(z)| < |z|$, $z \in D_1 \setminus \{0\}$.

IV. $g(z) = e^{i\alpha} z$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $h(z) = e^{i\beta} z$, $z \in D_1$, com $\beta \in \mathbb{R}$.

No caso **I**, tomando $z = N(w)$, $w \neq w_0$, na desigualdade $|g(z)| < |z|$, $z \in D_1 \setminus \{0\}$, obtemos $|M(w)| < |N(w)|$, $w \neq w_0$. Tomando $z = M(w)$, $w \neq w_0$, na desigualdade $|h(z)| < |z|$, $z \in D_1 \setminus \{0\}$, obtemos $|N(w)| < |M(w)|$, $w \neq w_0$. Essas duas desigualdades são incompatíveis e esse caso é descartado.

No caso **II**, temos $g(z) = e^{i\alpha} z$, $z \in D_1$. Tomando $z = N(w)$, teremos $M(w) = e^{i\alpha} N(w)$ e, portanto $|M(w)| = |N(w)|$. Já a condição $|h(z)| < |z|$, $z \in D_1 \setminus \{0\}$, tomando-se $z = M(w)$, $w \neq w_0$, fica $|N(w)| < |M(w)|$, $w \neq w_0$. As duas condições são, portanto, incompatíveis e esse caso é também descartado.

O caso **III** é, *mutatis mutandis*, similar ao anterior, sendo também descartado.

O caso **IV** é, portanto, o único verdadeiro. Na igualdade $g(z) = e^{i\alpha} z$, $z \in D_1$, escolhemos $z = N(w)$ para concluir que $M(w) = e^{i\alpha} N(w)$. Na igualdade $h(z) = e^{i\beta} z, z \in D_1$, escolhemos $z = M(w)$ para concluir que $N(w) = e^{i\beta} M(w)$. Naturalmente, devemos ter $\alpha = -\beta \bmod 2\pi$.

Agora, se $M(w) = e^{i\alpha} N(w)$ para algum α real, obtemos que $M'(w) = e^{i\alpha} N'(w)$ e, em particular, para w_0, obtemos $\arg\big(M'(w_0)\big) = \alpha + \arg\big(N'(w_0)\big) \bmod 2\pi$, o que implica, pela hipótese que $\arg\big(N'(w_0)\big) = \arg\big(M'(w_0)\big)$, que $\alpha = 0$. Com isso, provamos que $M(w) = N(w)$ para todo $w \in D_1$. ■

• O grupo de automorfismos de D_1

A afirmação da proposição a seguir é esperada diante do fato de automorfismos de D_1, que pela Proposição 9.8, página 450, são precisamente da forma (9.79), formarem um grupo.

Proposição 9.10 *O conjunto $\mathscr{U}$, definido por*

$$\mathscr{U} := \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad \textit{com } a,\, b \in \mathbb{C}, \quad \textit{e } \det(A) > 0 \right\} \tag{9.83}$$

compõe um grupo, um subgrupo de $\mathrm{GL}(2,\, \mathbb{C})$. □

Prova. A matriz identidade está em $\mathscr{U}$ (corresponde a $a = 1$, $b = 0$) e se $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{U}$, tem-se $\det(A) = |a|^2 - |b|^2 \neq 0$, o que mostra que A tem inversa, com

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|a|^2 - |b|^2} \begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ -\overline{b} & a \end{pmatrix} \in \mathscr{U} .$$

Além disso, se $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right)$ e $B = \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ \overline{d} & \overline{c} \end{smallmatrix}\right)$ são elementos de $\mathscr{U}$, tem-se

$$AB = \begin{pmatrix} ac + b\overline{d} & ad + b\overline{c} \\ \overline{b}c + \overline{ad} & \overline{b}d + \overline{ac} \end{pmatrix} , \tag{9.84}$$

que é manifestamente um elemento de $\mathscr{U}$. Notar também que $\det(AB) = \det(A)\det(B) > 0$. Isso provou que $\mathscr{U}$ é um grupo. ■

É um exercício fácil provar que $\mathbf{Z}(\mathscr{U})$, o centro de $\mathscr{U}$, é composto por todas as matrizes da forma $\lambda\mathbb{1}_2$ com $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

E. 9.10 *Exercício*. Sejam $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a}\end{smallmatrix}\right)$ e $B = \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ \overline{d} & \overline{c}\end{smallmatrix}\right)$ elementos $\mathscr{U}$, como acima. Constate que $BA = \left(\begin{smallmatrix} ca+d\overline{b} & cb+d\overline{a} \\ \overline{d}a+\overline{c}\overline{b} & \overline{d}b+\overline{c}\overline{a}\end{smallmatrix}\right)$ e prove com isso e com (9.84) que se B é um elemento de $\mathscr{U}$ que comuta com todo $A \in \mathscr{U}$, então $B = \lambda\mathbb{1}_2$ com $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. ✣

A afirmação do exercício que segue será usada adiante.

E. 9.11 *Exercício*. Seja $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a}\end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{U}$ e seja F uma matriz da forma $F = \left(\begin{smallmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi\end{smallmatrix}\right)$, onde ϕ e ψ são números complexos com $|\phi| = |\psi| = 1$. Mostre que $F^{-1}AF \in \mathscr{U}$. ✣

Sob a luz do Teorema 9.8, página 452, e das considerações acima, podemos agora enunciar e demonstrar a seguinte proposição sobre o grupo $\mathrm{Aut}(D_1)$, dos automorfismos de D_1:

Proposição 9.11 *O grupo* $\mathrm{Aut}(D_1)$*, de automorfismos de* D_1*, é isomorfo ao grupo* $\mathrm{PS}\mathscr{U}$*, o grupo projetivo das matrizes de determinante* 1 *de* $\mathscr{U}$*.* □

Prova. O determinante de cada elemento de $\mathscr{U}$ é real e positivo. Multiplicando cada elemento $A \in \mathscr{U}$ por $1/\sqrt{\det(A)}$, obtemos o grupo $\mathrm{S}\mathscr{U}$, o subgrupo de $\mathscr{U}$ de matrizes de determinante 1. Tal multiplicação não altera a transformação de Möbius M_A. O centro desse grupo é composto pelas matrizes $\{-\mathbb{1}_2,\ \mathbb{1}_2\}$ e o quociente de $\mathrm{S}\mathscr{U}$ por esse centro é o grupo projetivo $\mathrm{PS}\mathscr{U}$, no qual são identificadas as matrizes de $\mathrm{S}\mathscr{U}$ que diferem apenas por um sinal. Essa diferença de sinal também não altera a transformação de Möbius M_A. Concluímos disso que $\mathrm{Aut}(D_1)$ e o grupo projetivo $\mathrm{PS}\mathscr{U}$ são isomorfos. ■

• O grupo de automorfismos do semiplano superior de $\mathbb{C}$

Por $\mathbb{H}_\pm = \{z \in \mathbb{C},\ \pm\mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ denotamos o semiplano superior (inferior) do plano complexo. Sua fronteira é o eixo real. A transformação de Möbius $M_J(z) = \frac{z-i}{z+i}$, com $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 1 & i\end{smallmatrix}\right)$ e $J^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} i & i \\ -1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ mapeia bijetivamente D_1 em $\mathbb{H}_+$: $M_J : D_1 \to \mathbb{H}_+$. Sua inversa é $M_{J^{-1}} : \mathbb{H}_+ \to D_1$, dada por $M_{J^{-1}}(z) = i\frac{z+1}{1-z}$.

Para verificar que M_J mapeia $\mathbb{H}_+$ em D_1, escrevamos $z = x + iy$, $x,\ y \in \mathbb{R}$. Obtemos

$$M_J(x+iy) \;=\; \frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)} \qquad \text{e} \qquad \left|M_J(x+iy)\right|^2 \;=\; \frac{x^2+y^2+1-2y}{x^2+y^2+1+2y}$$

e concluímos que $\left|M_J(x+iy)\right|^2 < 1$ se e somente se $y > 0$, ou seja, se e somente se $z \in \mathbb{H}_+$.

Para verificar que $M_{J^{-1}}$ mapeia D_1 em $\mathbb{H}_+$, escrevemos novamente $z = x + iy$, $x,\ y \in \mathbb{R}$ e obtemos

$$M_{J^{-1}}(x+iy) \;=\; \frac{-2y}{(x-1)^2+y^2} + i\frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2}\;,$$

e vemos que a parte imaginária de $M_{J^{-1}}(x+iy)$ é positiva se e somente se $1 - x^2 - y^2 > 0$, ou seja, se e somente se $z \in D_1$.

E. 9.12 *Exercício*. Verifique os cálculos acima. ✣

Concluímos do exposto acima e do Teorema 9.8, página 452, que <u>todos</u> os automorfismos de $\mathbb{H}_+$ são da forma $M_{J^{-1}} \circ M_A \circ M_J = M_{J^{-1}AJ}$, onde $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a}\end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{U}$, com $a,\ b \in \mathbb{C}$ e $|b| < |a|$.

Denotemos $J^{-1}AJ$ por B. Um cálculo direto (faça-o!) revela que

$$B \;=\; \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(a+b) & \mathrm{Im}\,(a-b) \\ \mathrm{Im}\,(a+b) & \mathrm{Re}\,(a-b) \end{pmatrix}\;. \tag{9.85}$$

Como $\det B = \det A$, temos que $\alpha\delta - \beta\gamma = |a|^2 - |b|^2 > 0$. A conclusão é

Teorema 9.9 *Todo automorfismo de* $\mathbb{H}_+$ *é da forma*

$$M_B(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \text{onde } B \text{ é a matriz real} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

cujas entradas satisfazem $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$. *Se* M_B *é um automorfismo de* $\mathbb{H}_+$*, então também mapeia a reta real em sim mesma (exceto, eventualmente, pelo um polo em* $-\delta/\gamma$*, caso* $\gamma \neq 0$*) e, portanto, também mapeia bijetivamente* $\mathbb{H}_-$ *em si mesmo.*

O grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_+)$ *é isomorfo ao grupo* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. □

Prova. O único ponto de resta demonstrar diz respeito ao grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_+)$. O conjunto de matrizes B de (9.85), com determinante positivo compõe o grupo $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})_+$ é o grupo das matrizes reais 2×2 de determinante positivo. Podemos normalizar essas matrizes por multiplicação da constante $1/\sqrt{\det(B)}$, sem alterar a transformação de Möbius M_B, e obtemos as matrizes de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, de determinante 1. O centro desse grupo é composto pelas matrizes $\{-\mathbb{1}_2, \mathbb{1}_2\}$ e o quociente de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ por esse centro é o grupo projetivo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, no qual são identificadas as matrizes de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ que diferem apenas por um sinal. Essa diferença de sinal também não altera a transformação M_B. Concluímos disso que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_+)$ e $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ são isomorfos. ■

No caso em que $\alpha = \delta$ e $\beta = \gamma$, todos números reais com $\alpha^2 > \beta^2$, a matriz B acima é também um elemento (real) do grupo $\mathscr{U}$. Nesse caso, a transformação de Möbius M_B é simultaneamente um automorfismo de $\mathbb{H}_+$ e de D_1, ou seja, é também um automorfismo de $\mathbb{H}_+ \cap D_1$, o semidisco unitário superior.

Um exemplo são as matrizes de determinante 1 dadas por $\left(\begin{smallmatrix} \cosh z & -\mathrm{senh} z \\ -\mathrm{senh} z & \cosh z \end{smallmatrix}\right)$, onde aqui z é um parâmetro real. Essas matrizes representam transformações de Lorentz próprias ortócronas em um espaço-tempo bidimensional e, nesse contexto, z é denominado "rapidez". Vide Seção 21.4.1, página 1085 e, em particular, (21.84), página 1087.

• O grupo modular e funções modulares

O grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_+) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ possui um subgrupo importante, denominado *grupo modular* e denotado por $\mathrm{Mod}(\mathbb{H}_+) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Trata-se do grupo discreto formado pelas transformações de Möbius da forma $M_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, sendo $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ com a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$ satisfazendo $ad - bc = 1$ e com a identificação de A e $-A$. (O próprio grupo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ é denominado *grupo modular*).

Uma função de variável complexa f é dita ser uma *função modular* se for meromorfa em $\mathbb{H}_+$ (ou seja, se for analítica em $\mathbb{H}_+$ exceto por um conjunto discreto de polos) e se satisfazer $f \circ M_A = f$ para toda transformação de Möbius M_A contida em um subgrupo de $\mathrm{Mod}(\mathbb{H}_+)$ (que não seja o subgrupo trivial, que consiste apenas da identidade).

É possível provar (vide, *e.g.*, [203] ou [13]) que o grupo $\mathrm{Mod}(\mathbb{H}_+)$ é gerado por composição das transformações $S(z) = z + 1$ e $U(z) = -1/z$, as quais satisfazem as relações $U \circ U = \mathbf{id}$ e $(U \circ S)^3 = \mathbf{id}$ (verifique!). Assim, uma função modular satisfaz, em particular, $f(z) = f(z + 1)$ e $f(z) = f(-1/z)$, $z \in \mathbb{H}_+$. A primeira condição informa que f é periódica de período 1 e, portanto, por ser contínua e continuamente diferenciável, possui uma série de Fourier convergente a f.

Nestas Notas não nos aventuraremos adiante na teoria das funções modulares e remetemos o leitor interessado a referências gerais sobre Análise Complexa que tratem do assunto, como [214] e [373], e a textos mais especializados, como [13] e [313]. O estudo das funções modulares abre caminho para o estudo das chamadas *formas modulares* e de generalizações suas, as chamadas *funções e formas automorfas.* São áreas riquíssimas da Análise Complexa com inúmeras ligações com Teoria de Números, Análise Harmônica e Topologia Algébrica.

9.5.3 O Lema de Schwarz-Pick

O Lema de Schwarz, Teorema 9.7, página 446, refere-se a propriedades de funções analíticas definidas no disco D_1. Nele, um papel especial é conferido ao ponto 0, a origem de D_1, onde f supostamente se anula. Como é de se esperar, porém, nada há de especial nesse ponto particular, nem na suposição de que f deva anular-se, e as afirmações daquele teorema podem ser generalizadas de sorte a independerem do particular ponto de D_1 onde f se anula, nem mesmo de f se anular em D_1.

Essa generalização assenta-se sobre uma generalização do Lema de Schwarz, denominada *Lema de Schwarz-Pick*[24] e ficará mais clara na reformulação do Lema de Schwarz-Pick apresentada no Teorema 9.11, página 460. Formulemos e demonstremos agora uma primeira versão do Lema de Schwarz-Pick.

Teorema 9.10 (Lema de Schwarz-Pick) *Seja $f : D_1 \to D_1$ analítica (satisfazendo, portanto, $|f(z)| < 1$ para todo $z \in D_1$). Então, para todos $z,\ z_1 \in D_1$ vale*

$$\left|\frac{f(z) - f(z_1)}{1 - \overline{f(z_1)}\, f(z)}\right| \;\leq\; \left|\frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1}\, z}\right| . \tag{9.86}$$

Além disso, vale

$$\big|f'(z)\big| \;\leq\; \frac{1 - \big|f(z)\big|^2}{1 - |z|^2} , \tag{9.87}$$

também para todo $z \in D_1$.

Caso caso $z \neq z_1$, a igualdade em (9.86) ocorre se e somente se f for um automorfismo de D_1, ou seja, se for uma transformação de Möbius da forma (9.79), página 450, em cujo caso temos

$$\left|\frac{f(z) - f(z_1)}{1 - \overline{f(z_1)}\, f(z)}\right| \;=\; \left|\frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1}\, z}\right|$$

para todos $z,\ z_1 \in D_1$. □

<u>*Comentário*</u>. A desigualdade (9.87) é relevante por mostrar que há limites para o valor de $\big|f'(z)\big|$ de uma função $f : D_1 \to D_1$ para um dado valor de $\big|f(z)\big|$. Esse fato é uma manifestação da propriedade de "rigidez" das funções analíticas. ♣

Prova do Teorema 9.10. Para $z_1 \in D_1$ seja $A := \begin{pmatrix} -1 & z_1 \\ \overline{z_1} & -1 \end{pmatrix}$. Como $\det(A) = 1 - |z_1|^2 > 0$, a correspondente transformação de Möbius $M_A(z) = \frac{z_1 - z}{\overline{z_1} z - 1}$ satisfaz as condições da Proposição 9.8, página 450. Portanto, M_A é um automorfismo de D_1. Evidentemente a transformação de Möbius M_A possui um único zero em D_1, a saber, em z_1.

Seja agora $B := \begin{pmatrix} -1 & f(z_1) \\ \overline{f(z_1)} & -1 \end{pmatrix}$. Como $\det(B) = 1 - |f(z_1)|^2 > 0$, vale igualmente que $M_B(z) = \frac{f(z_1) - z}{\overline{f(z_1)}\, z - 1}$ é um automorfismo de D_1. Evidentemente a transformação de Möbius M_A possui um único zero em D_1, a saber, em $f(z_1)$.

Considere-se agora a composição $h := M_B \circ f \circ M_A^{-1}$. A função h é também analítica em D_1 e sua imagem também está em D_1. Além disso, tem-se que $h(0) = M_B\Big(f\big(M_A^{-1}(0)\big)\Big) = M_B\Big(f\big(z_1\big)\Big) = 0$.

Com isso, vemos que h satisfaz as condições do Lema de Schwarz, Teorema 9.7, página 446, e concluímos que ou temos

$$\big|h(z)\big| \;\leq\; |z| \tag{9.88}$$

para todo $z \in D_1$. Substituindo-se $z \to M_A(z)$ nesses expressões, temos

$$\Big|M_B\big(f(z)\big)\Big| \;\leq\; \big|M_A(z)\big| , \qquad \text{ou seja,} \qquad \left|\frac{f(z_1) - f(z)}{\overline{f(z_1)}\, f(z) - 1}\right| \;\leq\; \left|\frac{z_1 - z}{\overline{z_1} z - 1}\right| , \quad z \in D_1 , \tag{9.89}$$

provando (9.86). Da última desigualdade decorre, caso $z_1 \neq z$, que

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z}\right| \;\leq\; \left|\frac{\overline{f(z_1)}\, f(z) - 1}{\overline{z_1} z - 1}\right| .$$

Tomando-se o limite $z_1 \to 0$, obtemos (9.87).

[24]Georg Alexander Pick (1859–1942). Pick foi tragicamente assassinado em 26 julho de 1942 no campo de concentração de Theresienstadt.

O Lema de Schwarz informa-nos que a igualdade em (9.88) só pode ser alcançada em um ponto de D_1 se valer $h(z) = az$, onde $a \in \mathbb{C}$ e $|a| = 1$. Adotemos $a = e^{i\alpha}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$. Teríamos $M_B\Big(f\big(M_A^{-1}(z)\big)\Big) = az = M_C(z)$, com $C = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Portanto, $f(z) = M_B^{-1}\Big(M_C\big(M_A(z)\big)\Big) = M_{B^{-1}CA}(z)$.

Note-se agora que $B^{-1}CA = CEA$, onde $E = \big(C^{-1}BC\big)^{-1}$. Podemos escrever $C = \big(e^{i\alpha/}\mathbb{1}_2\big)C'$, onde $C' = \left(\begin{smallmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{smallmatrix}\right)$. Como $e^{i\alpha/}\mathbb{1}_2$ é um múltiplo da identidade, temos $f(z) = M_{C'EA}(z)$. Vale notar agora que C', A e E são elementos do grupo $\mathscr{U}$ de automorfismos do disco unitário, definido em (9.83), página 453 (a matriz E devido ao Exercício E. 9.11, página 454).

Concluímos disso que $f \in \mathrm{Aut}(D_1)$ e, portanto, é uma transformação de Möbius da forma (9.79), página 450.

A afirmação recíproca é também verdadeira se $f = M_A$ para qualquer $A \in \mathscr{U}$, temos também válida a igualdade

$$\left|\frac{M_A(z_1) - M_A(z)}{1 - \overline{M_A(z_1)}\, M_A(z)}\right| = \left|\frac{z_1 - z}{1 - \overline{z_1}\, z}\right|$$

conforme o estabelecido na Proposição 9.9, página 451. ■

9.5.3.1 Duas Métricas Invariantes em D_1. Revisitando o Lema de Schwarz-Pick

O Teorema 9.10, página 456, enseja introduzir duas métricas[25] em D_1, a chamada *métrica pseudo-hiperbólica* e a chamada *métrica de Poincaré*, ambas fortemente aparentadas e invariantes por automorfismos de D_1. Trataremos de ambas aqui, o que nos permitirá uma releitura do próprio Teorema 9.10, na forma do Teorema 9.11, página 460.

• **Uma métrica invariante em D_1: a métrica pseudo-hiperbólica**

Desejamos reinterpretar as afirmações do Teorema 9.10, página 456, de uma forma sugestiva e para tal vamos introduzir uma métrica em D_1 com certas propriedades especiais.

Para $z_1,\ z_2 \in D_1$ definimos

$$d(z_1,\ z_2) := \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}\, z_2}\right| \tag{9.90}$$

e afirmamos que d é uma métrica em D_1, denominada *métrica pseudo-hiperbólica.* É claro que $d(z_1,\ z_2) \geq 0$ e que $d(z_1,\ z_2) = 0$ se e somente se $z_1 = z_2$. Fora isso, tem-se $d(z_1,\ z_2) = \big|M_B(z_2)\big|$, onde $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -z_1 \\ \overline{z_1} & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{U}$, o que implica que $d(z_1,\ z_2) < 1$ para quaisquer $z_1,\ z_2 \in D_1$. Como $\big|1 - \overline{z_1}z_2\big| = \big|1 - \overline{z_2}z_1\big|$, segue imediatamente que $d(z_1,\ z_2) = d(z_2,\ z_1)$. A demonstração da desigualdade triangular, $d(z_1,\ z_2) \leq d(z_1,\ z_3) + d(z_3,\ z_2)$ para todos $z_1,\ z_2,\ z_3 \in D_1$, é bem mais elaborada e a apresentaremos adiante no Corolário 9.3, página 458, o qual requer alguma preparação.

A primeira observação que fazemos é a seguinte:

Proposição 9.12 *Seja A um elemento do grupo $\mathscr{U}$ e M_A a correspondente transformação de Möbius que é um automorfismo de D_1. Então, para a função d, definida em (9.90), página 457, vale*

$$d\big(M_A(z_1),\ M_A(z_2)\big) = d(z_1,\ z_2) \tag{9.91}$$

para todos $z_1,\ z_2 \in D_1$. Ou seja, d é invariante pelos automorfismos de D_1. □

Prova da Proposição 9.12. A afirmação é a mesma da Proposição 9.9, página 451. ■

O lema técnico a seguir será empregado no que segue.

Lema 9.3 *Seja d definida em (9.90), página 457. Para todos $z,\ w \in D_1$ vale*

$$d(z,\ w) \leq \frac{|z| + |w|}{1 + |z|\,|w|}\,. \tag{9.92}$$

[25] A noção de topológica de *métrica* aqui referida é apresentada e discutida no Capítulo 24, página 1264.

Segue trivialmente disso que

$$d(z,\ w)\ \leq\ |z| + |w|\ , \tag{9.93}$$

pois $1 + |z|\,|w| \geq 1$. □

Prova.[26] Como $z,\ w \in D_1$, temos que $|z|$ e $-|w|$ são números reais pertencentes a D_1. Portanto, a expressão $d\big(|z|,\ -|w|\big)$ está bem definida e

$$1 - d\big(|z|,\ -|w|\big)^2\ =\ 1 - \left(\frac{|z| + |w|}{1 + |z|\,|w|}\right)^2\ =\ \frac{\big(1 + |z|\,|w|\big)^2 - \big(|z| + |w|\big)^2}{\big(1 + |z|\,|w|\big)^2}\ =\ \frac{\big(1 - |z|^2\big)\big(1 - |w|^2\big)}{\big(1 + |z|\,|w|\big)^2}\ .$$

Temos, porém,

$$\begin{aligned} 1 - d(z,\ w)^2\ =\ 1 - \left|\frac{z - w}{1 - \overline{z}w}\right|^2 \ &=\ \frac{\big|1 - \overline{z}w\big|^2 - |z - w|^2}{\big|1 - \overline{z}w\big|^2} \\ &=\ \frac{\big(1 - \overline{z}w\big)\big(1 - \overline{w}z\big) - \big(\overline{z} - \overline{w}\big)\big(z - w\big)}{\big|1 - \overline{z}w\big|^2} \\ &=\ \frac{1 + |z|^2|w|^2 - |z|^2 - |w|^2}{\big|1 - \overline{z}w\big|^2} \\ &=\ \frac{\big(1 - |z|^2\big)\big(1 - |w|^2\big)}{\big|1 - \overline{z}w\big|^2} \\ &\geq\ \frac{\big(1 - |z|^2\big)\big(1 - |w|^2\big)}{\big(1 + |z|\,|w|\big)^2}\ =\ 1 - d\big(|z|,\ -|w|\big)^2\ . \end{aligned}$$

Verifique! A última desigualdade decorre de $\big(1 - |z|^2\big)\big(1 - |w|^2\big) \geq 0$ e de $\big|1 - \overline{z}w\big| \leq 1 + |z|\,|w|$. Assim, vemos que $1 - d(z,\ w)^2 \geq 1 - d\big(|z|,\ -|w|\big)^2$ e, portanto,

$$d(z,\ w)\ \leq\ d\big(|z|,\ -|w|\big)\ ,$$

completando a prova. ■

Podemos agora provar a desigualdade triangular para a função d definida em (9.90), página 457.

Corolário 9.3 *Para quaisquer* $z_1,\ z_2,\ z_3 \in D_1$ *vale a desigualdade*

$$d(z_1,\ z_2)\ \leq\ \frac{d(z_1,\ z_3) + d(z_3,\ z_2)}{1 + d(z_1,\ z_3)d(z_3,\ z_2)} \tag{9.94}$$

Como $1 + d(z_1,\ z_3)d(z_3,\ z_2) \geq 1$, *vale a desigualdade triangular*

$$d(z_1,\ z_2)\ \leq\ d(z_1,\ z_3) + d(z_3,\ z_2) \tag{9.95}$$

para quaisquer $z_1,\ z_2,\ z_3 \in D_1$, *completando a prova que* d *é uma métrica em* D_1. □

<u>*Comentários*</u>. Com a demonstração da desigualdade triangular fica estabelecido que d é uma métrica em D_1, denominada *métrica pseudo-hiperbólica*. A desigualdade (9.94) será utilizada na discussão sobre a métrica de Poincaré, adiante. ♣

[26] A elegante demonstração que apresentamos é devida a Tai-Danae Bradley.

Prova. Por (9.91), temos para todo $A \in \mathscr{U}$, e todo $z, w \in D_1$, $d\big(M_A(z),\ M_A(w)\big) = d(z,\ w)$. Assim,

$$d(z_1,\ z_2) \ = \ d\big(M_A(z_1),\ M_A(z_2)\big) \ \stackrel{(9.92)}{\leq} \ \frac{\big|M_A(z_1)\big| + \big|M_A(z_2)\big|}{1 + \big|M_A(z_1)\big|\,\big|M_A(z_2)\big|} \ . \tag{9.96}$$

Tomando M_A da forma $M_A(z) = \frac{z - z_3}{1 - \overline{z_3} z}$, com $z_3 \in D_1$, teremos $\big|M_A(z_1)\big| = d(z_1,\ z_3)$ e $\big|M_A(z_2)\big| = d(z_2,\ z_3)$ e a desigualdade (9.96) fica

$$d(z_1,\ z_2) \ \leq \ \frac{d(z_1,\ z_3) + d(z_3,\ z_2)}{1 + d(z_1,\ z_3)d(z_3,\ z_2)} \ ,$$

completando a demonstração. ■

Como vimos na Proposição 9.12, página 457, essa métrica é invariante pelo grupo de automorfismos de D_1. Para que se aprecie essa propriedade de invariância basta recordar que a métrica usual em $\mathbb{C}$, dada por $d(z,\ w) := |z - w|$, é invariante por translações e por rotações (multiplicação por um número complexo de módulo 1). Isso indica que o grupo de automorfismos em D_1 desempenha um papel similar ao das translações e rotações em $\mathbb{C}$: o de ser um grupo de isometrias.

• **A métrica de Poincaré em D_1**

Para $z_1,\ z_2 \in D_2$, defina-se[27]

$$\varrho(z_1,\ z_2) \ := \ \operatorname{argtanh}\big(d(z_1,\ z_2)\big) \ , \tag{9.97}$$

onde argtanh é a função inversa da função tanh e e d é a métrica pseudo-hiperbólica definida em (9.90), ou seja,

$$\varrho(z_1,\ z_2) \ := \ \operatorname{argtanh}\left(\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2}\right|\right) \ = \ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\big|1 - \overline{z_1}z_2\big| + \big|z_1 - z_2\big|}{\big|1 - \overline{z_1}z_2\big| - \big|z_1 - z_2\big|}\right) \ .$$

Aqui usamos a bem conhecida a identidade[28]

$$\operatorname{argtanh}(x) \ = \ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ ,$$

válida para $x \in (-1,\ 1)$. Lembremos também que argtanh nesse intervalo é uma função bijetora e estritamente crescente e sua imagem é todo $\mathbb{R}$.

Afirmamos que essa função ϱ também define uma métrica em D_1, denominada *métrica de Poincaré*[29]. Essa métrica é revelante na Geometria Hiperbólica e remetemos o leitor interessado à literatura pertinente. Vide, por exemplo, [11], [76], [397], [105] e também o excelente artigo [309].

Que ϱ é positivo, que $\varrho(z_1,\ z_2) = 0$ se e somente se $z_1 = z_2$ e que $\varrho(z_1,\ z_2) = \varrho(z_2,\ z_1)$ são decorrências das mesmas propriedades da métrica d, já demonstradas. O ponto menos trivial é provar que ϱ satisfaz a desigualdade triangular. Isso será feito no Corolário 9.4, página 460, o qual é consequência do seguinte resultado:

Lema 9.4 *Sejam a, b e c pertencentes ao intervalo $[0,\ 1)$, sendo $b + c > 0$. Seja*

$$T(a,\ b,\ c) \ := \ \operatorname{argtanh}(a) - \operatorname{argtanh}(b) - \operatorname{argtanh}(c) \ . \tag{9.98}$$

Então, o sinal de T coincide com o sinal de $a - \frac{b+c}{1+bc}$. □

Prova. A função argtanh satisfaz as bem conhecidas relações $\operatorname{argtanh}(x) \pm \operatorname{argtanh}(y) = \operatorname{argtanh}\left(\frac{x \pm y}{1 \pm xy}\right)$, para todos $x,\ y \in (-1,\ 1)$. Fazendo uso repetido dessas relações é fácil ver, após um cômputo maçante, porém direto, que

$$T(a,\ b,\ c) \ := \ \operatorname{argtanh}\left[\left(\frac{1+bc}{b+c}\right)\left(\frac{a - d(b,\ -c)}{\frac{1}{d(b,\ -c)} - a}\right)\right] \ , \tag{9.99}$$

[27] Alguns autores adicionam um fator 2 ao lado direito de (9.97). Esse fator é matéria de convenção e não é relevante (com ele a curvatura da variedade hiperbólica D_1, que é constante, fica fixada no valor -1).

[28] Para o estudante: ela pode ser demonstrada verificando-se que as derivadas das funções de ambos os lados da igualdade coincidem e ambas as funções assumem o mesmo valor em $x = 0$.

[29] Jules Henri Poincaré (1854–1912).

sendo $d(b,\ -c) = \frac{b+c}{1+bc} > 0$. Verifique! Como b e c são números reais em D_1, segue que $0 < d(b,\ -c) < 1$. Assim, $d(b,\ -c)^{-1} - a > 0$, pois $a \in [0,\ 1)$. Logo, o sinal de T coincide com o sinal da diferença $a - d(b,\ -c) = a - \frac{b+c}{1+bc}$, completando a prova. ■

Corolário 9.4 *A função ϱ definida em (9.97), satisfaz a desigualdade triangular*

$$\varrho(z_1,\ z_2)\ \leq\ \varrho(z_1,\ z_3) + \varrho(z_3,\ z_2)$$

para todos $z_1,\ z_2,\ z_3 \in D_1$, e, portanto, define uma métrica em D_1, denominada métrica de Poincaré.

Prova. Se os três pontos $z_1,\ z_2$ e z_3 coincidirem não há o que se demonstrar. Caso $z_1 = z_2$, idem. Vamos então supor que $z_3 \neq z_1$ ou $z_3 \neq z_2$ ou ambos.

Pela definição da métrica de Poincaré em (9.97), e com $z_1,\ z_2,\ z_3 \in D_1$, temos que

$$\varrho(z_1,\ z_2) - \varrho(z_1,\ z_3) - \varrho(z_3,\ z_2)\ =\ T\Big(d(z_1,\ z_2),\ d(z_1,\ z_3),\ d(z_3,\ z_2)\Big)\ ,$$

onde T foi definida em (9.98). Devido à desigualdade (9.94), página 458, e ao Lema 9.4, página 459, concluímos que $\varrho(z_1,\ z_2) - \varrho(z_1,\ z_3) - \varrho(z_3,\ z_2) \leq 0$ para todos $z_1,\ z_2,\ z_3 \in D_1$, que é a desigualdade triangular para a métrica de Poincaré. ■

No modelo de Geometria Hiperbólica formulado em D_1 (conhecido como *modelo do disco de Poincaré*) a métrica ϱ é associada a um *tensor métrico Riemanniano* definido em D_1, o chamado *tensor métrico de Poincaré*, e $\varrho(z_1,\ z_2)$ é o comprimento de uma geodésica, segundo esse tensor métrico, conectando z_1 a z_2. Vide, por exemplo, [11], [76], [105], [397] e também o excelentes artigos [309] e [341]. A desigualdade triangular para ϱ é usualmente demonstrada como consequência dessa interpretação. Naturalmente, ϱ é também invariante pelos automorfismos de D_1.

E. 9.13 *Exercício*. Mostre que a métrica pseudo-hiperbólica d e a métrica de Poincaré ϱ são equivalentes: existem constantes $0 < c_2 < c_2$ tais que $c_1 d(z_1,\ z_2) \leq \varrho(z_1,\ z_2) \leq c_2 d(z_1,\ z_2)$ para todos $z_1,\ z_2 \in D_1$. ✠

• Reinterpretando o Lema de Schwarz-Pick

Com a introdução das métricas invariantes d e ϱ podemos reformular parte do Lema de Schwarz-Pick, Teorema 9.10, página 456, da seguinte forma:

Teorema 9.11 (Lema de Schwarz-Pick II) *Seja $f : D_1 \to D_1$ analítica (satisfazendo, portanto, $|f(z)| < 1$ para todo $z \in D_1$). Então, para todos $z_1,\ z_2 \in D_1$ vale*

$$d\big(f(z_1),\ f(z_2)\big)\ \leq\ d\big(z_1,\ z_2\big)\ . \tag{9.100}$$

A igualdade em (9.100) pode ocorrer para um par de pontos $z_1 \neq z_2$ se e somente se f for um automorfismo de D_1, ou seja, se for uma transformação de Möbius da forma (9.79), página 450, em cujo caso temos

$$d\big(f(z_1),\ f(z_2)\big)\ =\ d\big(z_1,\ z_2\big) \tag{9.101}$$

para todos $z_1,\ z_2 \in D_1$. Nesse caso a relação acima decorre imediatamente de (9.91), página 457.

Como a função argtanh *é estritamente crescente, ambas as expressões (9.100) e (9.101) permanecem válidas se substituirmos a métrica pseudo-hiperbólica d pela métrica de Poincaré ϱ.* □

Essa formulação do Teorema 9.10 foi obtida por Pick em 1916[30] e tem a vantagem de ser invariante por automorfismos de D_1 (por d e ϱ terem essa propriedade) e de não necessariamente pressupor que f anule-se em algum ponto. Ela corresponde, portanto, a uma versão do Lema de Schwarz que não privilegia o papel da origem de D_1 sobre a qual falamos no início da Seção 9.5.3, na página 455.

Depreendemos do Teorema 9.11 que se $f : D_1 \to D_1$ for analítica, mas não um automorfismo de D_1, então ela é contrativa nas métricas d ou ϱ.

[30] Georg Pick, *"Über eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreisförmiger Bereiche"*, Mathematische Annalen, Bd. **77**, S. 1–6, (1916).

9.6 A Derivada de Schwarz

Seja uma função f de uma variável real ou complexa z e que seja ao menos três vezes diferenciável em algum domínio aberto. A expressão

$$\mathsf{S}(f)(z) \ := \ \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 \tag{9.102}$$

define a chamada *derivada de Schwarz*[31] de f. A derivada de Schwarz de f em z é também denotada pelo símbolo $\{f, \ z\}$.

Naturalmente, a definição (9.102) pressupõe que f' não se anule no ponto z considerado. Essa expressão aparece de forma natural no estudo de transformações de Möbius e, no que segue, tentaremos motivar sua definição e apresentar suas propriedades básicas. A derivada de Schwarz aparece também na Geometria Projetiva, no estudo de aplicações conformes[32] (onde nasceu), no estudo de funções modulares, assim como no estudo do problema de Sturm-Liouville. Sobre o último, falaremos um pouco adiante. Para nós, a derivada de Schwarz é relevante por ser invariante por transformações de Möbius e por sua relação com as razões anarmônicas, assuntos dos quais também trataremos adiante.

É um exercício elementar verificar que a definição (9.102) pode ser reescrita como

$$\mathsf{S}(f)(z) \ := \ \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 \tag{9.103}$$

que equivale a

$$\mathsf{S}(f)(z) \ := \ \frac{d^2}{dz^2}\bigg(\ln\big(f'(z)\big)\bigg) - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}\ln\big(f'(z)\big)\right)^2 . \tag{9.104}$$

Além disso, (9.102) pode também ser reescrita como

$$\mathsf{S}(f)(z) \ = \ \left[\frac{d}{dz}\ln\big(f''(z)\big) - \frac{3}{2}\frac{d}{dz}\ln\big(f'(z)\big)\right]\frac{d}{dz}\ln\big(f'(z)\big) \ = \ \left[\frac{d}{dz}\ln\left(\frac{f''(z)}{\big(f'(z)\big)^{3/2}}\right)\right]\frac{d}{dz}\ln\big(f'(z)\big) . \tag{9.105}$$

E. 9.14 *Exercício*. Obtenha as relações (9.103), (9.104) e (9.105) a partir de (9.102). ✠

A noção de derivada de Schwarz é tratada em diversos livros-texto, como [201] (que dedica um capítulo ao assunto), [203][33] e [214], com abordagens distintas. Para um instrutivo artigo de revisão com notas históricas, vide [342].

• Fatos básicos sobre a derivada de Schwarz

Aqui vamos apresentar algumas propriedades básicas da derivada de Schwarz. Infelizmente, algumas das demonstrações são obtidas pelo emprego de força bruta. Trataremos de funções analíticas de variável complexa, mas nossos resultados são também válidos para funções suficientemente diferenciáveis.

Seja $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ com $\det(A) \neq 0$ e seja $M_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ a correspondente transformação de Möbius. Afirmamos que vale o seguinte fato importante:

$$\mathsf{S}(M_A) \ = \ 0 \ . \tag{9.106}$$

Como veremos, isso permite obter outras propriedades da derivada de Schwarz e auxilia também em sua interpretação. Vamos verificá-lo.

Temos

$$M_A'(z) \ = \ \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \quad \text{e disso decorre que} \quad M_A''(z) \ = \ -2c\frac{ad-bc}{(cz+d)^3} \quad \text{e que} \quad M_A'''(z) \ = \ 6c^2\frac{ad-bc}{(cz+d)^4} \ .$$

[31] A denominação dessa quantidade como uma "derivada" é um legado histórico espúrio. S não é sequer linear e não segue a regra da cadeia nem a regra de Leibniz, mas variações delas, como veremos. A denominação "derivada de Schwarz" é devida a Cayley. Schwarz ele mesmo atribui corretamente sua invenção a Lagrange. Vide [342].

[32] Aplicações conformes são transformações entre variedades diferenciáveis que preservam ângulos entre curvas. Vide Capítulo **??**, página **??** e, em particular a Seção **??**, página **??**.

[33] O estudante deve atentar, porém, que [203] define a derivada de Schwarz como $\frac{f'''(z)}{(f'(z))^2} - \frac{3}{2}\frac{(f''(z))^2}{(f'(z))^3}$, que difere de (9.102) por um fator $1/f'(z)$. Trata-se provavelmente de um erro tipográfico, pois essa definição não parece satisfazer nenhuma das propriedades relevantes da derivada de Schwarz.

Logo,

$$\mathsf{S}(M_A)(z) \;=\; 6c^2\frac{ad-bc}{(cz+d)^4}\frac{(cz+d)^2}{ad-bc}-\frac{3}{2}\left(-2c\frac{ad-bc}{(cz+d)^3}\frac{(cz+d)^2}{ad-bc}\right)^2 \;=\; 0\,,$$

como facilmente se constata. A afirmação recíproca é igualmente válida: se $\mathsf{S}(f)=0$, então f é uma transformação de Möbius. Isso é o conteúdo do exercício que segue:

E. 9.15 *Exercício*. Escreva $\mathsf{S}(f)$ na forma (9.105) e conclua que se $\mathsf{S}(f)=0$, então ou f é linear (*i.e.*, $f(z)=az+b$, com a e b constantes arbitrárias) ou satisfaz a equação diferencial $f''(z)=c_0\big(f'(z)\big)^{3/2}$, onde c_0 é uma constante arbitrária. Definindo $g=f'$ obtenha $g'=c_0g^{3/2}$. Obtenha disso que $g(z)=\big(-c_0z/2+c_1\big)^{-2}$, onde c_1 é uma constante arbitrária. Extraia disso que $f(z)=\frac{2}{c_0\left(-c_0z/2+c_1\right)}+c_2$, onde c_2 é uma constante arbitrária e verifique, assim, que f é uma transformação de Möbius genérica. ✠

Estabelecemos, portanto, o seguinte resultado

Proposição 9.13 *Uma função f satisfaz $\mathsf{S}(f)=0$ se e somente se for uma transformação de Möbius.* □

Com isso podemos arriscar uma interpretação sobre a derivada de Schwarz de uma função f: ela "mede" o quanto f se desvia de uma transformação de Möbius. Essa interpretação será reforçada adiante quando falarmos sobre a relação entre a derivada de Schwarz e a razão anarmônica.

Outra relação importante é a expressão para a derivada de Schwarz da composição de duas funções. Se f e g são analíticas e sua composição $f\circ g$ está definida em algum domínio aberto adequado, então

$$\mathsf{S}\big(f\circ g\big) \;=\; \big(\mathsf{S}(f)\circ g\big)\big(g'\big)^2+\mathsf{S}(g)\,. \tag{9.107}$$

De fato, temos, por aplicação da regra da cadeia e da regra de Leibniz,

$$\begin{aligned}
\big(f\circ g\big)' &= (f'\circ g)g'\,,\\
\big(f\circ g\big)'' &= (f''\circ g)\big(g'\big)^2+(f'\circ g)g''\,,\\
\big(f\circ g\big)''' &= (f'''\circ g)\big(g'\big)^3+3(f''\circ g)g'g''+(f'\circ g)g'''\,.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\big(f\circ g\big)'''}{\big(f\circ g\big)'} \;=\; \frac{(f'''\circ g)}{(f'\circ g)}\big(g'\big)^2+3\frac{(f''\circ g)}{(f'\circ g)}g''+\frac{g'''}{g'}\,.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\left(\frac{\big(f\circ g\big)''}{\big(f\circ g\big)'}\right)^2 \;&=\; \frac{3}{2}\left(\frac{(f''\circ g)\big(g'\big)^2+(f'\circ g)g''}{(f'\circ g)g'}\right)^2 \;=\; \frac{3}{2}\left(\frac{(f''\circ g)}{(f'\circ g)}g'+\frac{g''}{g'}\right)^2\\
&=\; \frac{3}{2}\left(\frac{(f''\circ g)}{(f'\circ g)}\right)^2\big(g'\big)^2+3\frac{(f''\circ g)}{(f'\circ g)}g''+\frac{3}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2\,.
\end{aligned}$$

Com isso, juntando termos similares e fazendo o cancelamento de dois termos,

$$\mathsf{S}\big(f\circ g\big) \;=\; \left[\frac{(f'''\circ g)}{(f'\circ g)}-\frac{3}{2}\left(\frac{(f''\circ g)}{(f'\circ g)}\right)^2\right]\big(g'\big)^2+\left[\frac{g'''}{g'}-\frac{3}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2\right] \;=\; \Big(\mathsf{S}(f)\circ g\Big)\big(g'\big)^2+\mathsf{S}(g)\,,$$

como desejávamos mostrar.

As relações (9.106) e (9.107) têm duas consequências imediatas, ambas importantes:

$$\mathsf{S}\big(M_A \circ g\big) \;=\; \mathsf{S}(g) \qquad \text{e} \tag{9.108}$$

$$\mathsf{S}\big(f \circ M_A\big) \;=\; \Big(\mathsf{S}(f) \circ M_A\Big)\big(M_A'\big)^2 \,. \tag{9.109}$$

A relação (9.108), em particular, nos informa que a derivada de Schwarz é invariante por transformações de Möbius: $\mathsf{S} \circ M_A = \mathsf{S}$.

A afirmação recíproca é igualmente válida: se $\mathsf{S}\big(f \circ g\big) = \mathsf{S}(g)$ para toda g analítica, então f é uma transformação de Möbius. Se fato, essa hipótese e (9.107) implicam que $\big(\mathsf{S}(f) \circ g\big)\big(g'\big)^2 = 0$ para toda g analítica. Adotando-se, em particular, $g(z) = z$, temos $\mathsf{S}(f) = 0$ o que implica, pela Proposição 9.13, página 462, que f é uma transformação de Möbius. Estabelecemos, portanto, o seguinte resultado:

Proposição 9.14 *Uma função f satisfaz $\mathsf{S}\big(f \circ g\big) = \mathsf{S}(g)$ para toda g analítica se e somente se for uma transformação de Möbius.* □

Vale observar que a transformação $g \mapsto 1/g$ é uma transformação de Möbius. Portanto, segue de (9.108) que

$$\mathsf{S}(g) \;=\; \mathsf{S}\left(\frac{1}{g}\right) \,, \tag{9.110}$$

fato esse que também pode ser verificado diretamente da definição (9.102), mas com um certo trabalho. No mesmo espírito, é fácil constatar que

$$\mathsf{S}(g) \;=\; \mathsf{S}\big(ag + b\big) \;=\; \mathsf{S}\left(\frac{1}{ag + b}\right) \tag{9.111}$$

para quaisquer a, b constantes, sendo $a \neq 0$.

• A derivada de Schwarz e as razões anarmônicas

Sejam $z,\ w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4 \in \mathbb{C}$ e, para $\varepsilon \in \mathbb{R}$, defina-se $z_k = z + \varepsilon w_k$, $k = 1,\ \ldots,\ 4$. Sabemos que

$$\big[z_1,\ z_2;\ z_3,\ z_4\big] \;=\; \big[z + \varepsilon w_1,\ z + \varepsilon w_2;\ z + \varepsilon w_3,\ z + \varepsilon w_4\big] \;=\; \big[w_1,\ w_2;\ w_3,\ w_4\big] \,,$$

pois, como já vimos, a razão anarmônica é invariante por translações (no caso, por z) e por dilatações (no caso, por ε). A razão anarmônica é também invariante por transformações de Möbius. Logo, concluímos que vale

$$\big[M_A(z + \varepsilon w_1),\ M_A(z + \varepsilon w_2);\ M_A(z + \varepsilon w_3),\ M_A(z + \varepsilon w_4)\big] - \big[w_1,\ w_2;\ w_3,\ w_4\big] \;=\; 0$$

para qualquer transformação de Möbius M_A, para qualquer $z \in \mathbb{C}$ e qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Essa identidade inspira a seguinte pergunta: quanto vale a diferença

$$\big[f(z + \varepsilon w_1),\ f(z + \varepsilon w_2);\ f(z + \varepsilon w_3),\ f(z + \varepsilon w_4)\big] - \big[w_1,\ w_2;\ w_3,\ w_4\big] \tag{9.112}$$

se f for analítica em um domínio aberto e conexo contendo $z,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$? Se f não for uma transformação de Möbius devemos esperar que essa expressão seja não nula. De fato, assim é e, ao menos no caso em que ε é suficientemente "pequeno", podemos mostrar que a diferença acima é proporcional a $\mathsf{S}(f)(z)$. Em um certo sentido esse resultado vem ao encontro da noção que $\mathsf{S}(f)$ é uma medida de o quanto f se afasta de uma transformação de Möbius. É de se notar também que $\mathsf{S}(f)$, como vimos acima, é invariante pela substituição de f por $M_A \circ f$, assim como o lado direito de (9.112).

Em termos mais precisos, temos o seguinte resultado:

Teorema 9.12 *Sejam $z,\ w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4 \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e seja f analítica em uma vizinhança aberta de z com $f'(z) \neq 0$. Então, para todo $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno, vale*

$$\big[f(z+\varepsilon w_1),\ f(z+\varepsilon w_2);\ f(z+\varepsilon w_3),\ f(z+\varepsilon w_4)\big] - \big[w_1,\ w_2;\ w_3,\ w_4\big] \;=\; \frac{\varepsilon^2}{6}\mathsf{S}(f)(z)(w_1 - w_3)(w_4 - w_2) + O(\varepsilon^3) \,, \tag{9.113}$$

e, portanto,

$$\mathsf{S}(f)(z)\,\frac{(w_1-w_3)(w_4-w_2)}{6} \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\Bigg(\big[f(z+\varepsilon w_1),\ f(z+\varepsilon w_2);\ f(z+\varepsilon w_3),\ f(z+\varepsilon w_4)\big]-\big[w_1,\ w_2;\ w_3,\ w_4\big]\Bigg)\ , \tag{9.114}$$

que expressa a relação entre as derivadas de Schwarz e as razões anarmônicas. A diferença no lado direito de (9.113) também pode ser expressa como

$$\big[f(z+\varepsilon w_1),\ f(z+\varepsilon w_2);\ f(z+\varepsilon w_3),\ f(z+\varepsilon w_4)\big]-\big[M_A(z+\varepsilon w_1),\ M_A(z+\varepsilon w_2);\ M_A(z+\varepsilon w_3),\ M_A(z+\varepsilon w_4)\big]\ ,$$

onde M_A é qualquer transformação de Möbius não constante. Assim, vemos mais uma vez manifesta a ideia de que a derivada de Schwarz $\mathsf{S}(f)(z)$ é uma medida de o quanto a função f difere de uma transformação de Möbius. □

A demonstração do Teorema 9.12, bastante elaborada, é apresentada com detalhe na Seção 9.B, página 466.

• A derivada de Schwarz no problema de Sturm-Liouville

Vamos agora discutir um uso da derivada de Schwarz no contexto de equações diferenciais. Considere-se a equação diferencial linear, homogênea e de segunda ordem

$$y''(z)+v(z)y(z) \;=\; 0 \tag{9.115}$$

definida em um aberto $\Omega\subset\mathbb{C}$ (podemos também, sem perdas, considerar equações definidas em abertos de $\mathbb{R}$). Acima, v é uma função dada da qual suporemos apenas continuidade.

Essa equação é por vezes denominada, um tanto impropriamente, *equação de Sturm-Liouville*[34]. Equações como essa ocorrem em muitos problemas de Física, por exemplo, na Mecânica Quântica unidimensional, onde, a menos de uma constante multiplicativa, v representa a diferença $V-E$ entre o potencial V e um nível de energia E. Por essa razão a função v é por vezes (e um tanto impropriamente) denominada *potencial*.

A questão que colocamos é a seguinte: se u_1 e u_2 forem duas soluções linearmente independentes de (9.115), podemos obter o potencial v a partir da razão u_1/u_2? A proposição a seguir responde essa pergunta.

Proposição 9.15 *Sejam u_1 e u_2 duas soluções linearmente independentes arbitrárias da equação diferencial $y''(z)+v(z)y(z)=0$. Seja $\phi:=u_1/u_2$. Então,*

$$\mathsf{S}(\phi) \;=\; 2v\ , \tag{9.116}$$

o que permite recuperar o potencial v a partir do conhecimento da razão ϕ, por intermédio da derivada de Schwarz S. □

<u>*Comentário*</u>. Antes de apresentarmos a demonstração, façamos uma observação interessante. Na proposição acima, u_1 e u_2 podem ser duas soluções linearmente independentes arbitrárias de (9.115). Podemos nos perguntar, o que ocorre se as substituirmos por outras duas soluções linearmente independentes, por exemplo, por combinações lineares au_1+bu_2 e cu_1+du_2, obtidas das soluções originais? Aqui, a, b, c e d são constantes. Sucede que a nova razão entre soluções seria

$$\psi \;:=\; \frac{au_1+bu_2}{cu_1+du_2} \;=\; \frac{a\phi+b}{c\phi+d}\ ,$$

que é uma transformação de Möbius da razão $\phi=u_1/u_2$. Assim, pela relação (9.108), vemos que $\mathsf{S}(\psi)=\mathsf{S}(\phi)$, o que mostra que a escolha do particular par de soluções linearmente independentes não é relevante. Isso é satisfatório, pois o lado direito de (9.116) independe das particulares soluções de (9.115). ♣

Demonstração da Proposição 9.15. As soluções u_1 e u_2 satisfazem $u_2''+vu_1=0$ e $u_2''+vu_2=0$. Sabemos também que, em decorrência, a combinação $u_1'u_2-u_2'u_1$ (denominada *Wronskiano*) é constante. De fato, sua derivada é $u_1''u_2-u_2''u_1=vu_1u_2-vu_2u_1=0$.

Para a demonstração precisamos calcular as três primeiras derivadas da razão $\phi=u_1/u_2$, o que será facilitado pela constância do Wronskiano. Assim, temos

$$\phi' \;=\; \left(\frac{u_1}{u_2}\right)' \;=\; \frac{u_1'u_2-u_2'u_1}{(u_2)^2} \qquad \text{e} \qquad \phi'' \;=\; -2\big(u_1'u_2-u_2'u_1\big)\frac{u_2'}{(u_2)^3}\ .$$

[34]Dedicamos todo o Capítulo 19, página 987, ao tratamento do chamado *problema de Sturm-Liouville*, onde equações desse tipo ocorrem.

Com isso, e usando o fato que $u_2'' = -vu_2$,

$$\phi''' = -2\big(u_1'u_2 - u_2'u_1\big)\frac{u_2''(u_2)^3 - 3(u_2')^2(u_2)^2}{(u_2)^6} = 2\big(u_1'u_2 - u_2'u_1\big)\frac{v(u_2)^2 + 3(u_2')^2}{(u_2)^4} \; .$$

Reunindo esses resultados, vemos que

$$\frac{\phi'''}{\phi'} = 2\frac{v(u_2)^2 + 3(u_2')^2}{(u_2)^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\phi''}{\phi'} = -2\frac{u_2'}{u_2} \; .$$

Consequentemente,

$$\mathsf{S}(\phi) = \frac{\phi'''}{\phi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\phi''}{\phi'}\right)^2 = 2\frac{v(u_2)^2 + 3(u_2')^2}{(u_2)^2} - 6\frac{(u_2')^2}{(u_2)^2} = 2v \; ,$$

completando a prova. ■

Apêndices

9.A Demonstração Alternativa da Proposição 9.8

A Proposição 9.8, página 450, pode ser demonstrada por meios elementares, sem recurso ao Teorema do Módulo Máximo, como exibimos a seguir.

Proposição 9.16 *Uma transformação de Möbius M_A é um automorfismo de D_1 se e somente se A for da forma $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right)$ com $a, \ b \in \mathbb{C}$, com e $\det(A) > 0$, ou seja, $|a| > |b|$. Caso para uma matriz A dessa forma com $\det(A) < 0$, ou seja, $|a| < |b|$, a transformação M_A mapeia D_1 no complementar de $\overline{D_1}$.*

Para uma tal matriz A temos em ambos os casos, $\det(A) > 0$ ou $\det(A) < 0$, que $M_A(z) \in \mathbb{S}^1$ se e somente se $z \in \mathbb{S}^1$.

□

Prova. Se a transformação de Möbius M_A for um automorfismo de D_1, então o polo z_p de M_A não pode, evidentemente, estar localizado em D_1. Não pode também estar localizado no fecho de D_1, $\mathbb{S}^1$, pois em uma vizinhança de um polo o valor absoluto de M_A assume valores arbitrariamente grandes e, portanto, haveria pontos em D_1 mapeados fora de D_1. Assim, o polo de M_A localiza-se no conjunto complementar de $\overline{D_1}$. A transformação M_A é, por hipótese, bijetora em D_1 e também bijetora em $\mathbb{C} \setminus \{z_p\}$. Logo, a imagem de $\mathbb{S}^1$ por M_A não pode conter pontos em D_1. A transformação M_A é continua em $\mathbb{C} \setminus \{z_p\}$. Por essa razão, a imagem de $\mathbb{S}^1$ por M_A não pode conter pontos no complementar de $\overline{D_1}$, de outra forma a continuidade seria violada.

Portanto, se M_A for um automorfismo de D_1 ela mapeia $\mathbb{S}^1$ em si mesmo. Pela Proposição 9.7, página 449, isso ocorre se e somente se A for da forma $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right)$ com $a, \ b \in \mathbb{C}$ satisfazendo $|a|^2 - |b|^2 \neq 0$, ou seja, $\det(A) \neq 0$.

Seja $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right)$ com $a, \ b \in \mathbb{C}$. Seja também $z \in D_1$ e $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & z \\ \overline{z} & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Temos $\det(B) = 1 - |z|^2 > 0$. Agora,

$$AB = \begin{pmatrix} a + b\overline{z} & az + b \\ \\ \overline{b} + \overline{a}\overline{z} & \overline{b}z + \overline{a} \end{pmatrix} \qquad \text{e, portanto,} \qquad \det(AB) = \left|\overline{b}z + \overline{a}\right|^2 - \left|az + b\right|^2 .$$

Temos também que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Logo, caso $\det(A) > 0$, ou seja, caso ou seja, $|a|^2 - |b|^2 > 0$, teremos $\left|\overline{b}z + \overline{a}\right| > \left|az + b\right|$. Portanto,

$$\left|M_A(z)\right| = \left|\frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}}\right| < 1 .$$

Note-se que o polo de M_A em $-\overline{a}/\overline{b}$ localiza-se no complementar de $\overline{D_1}$, pois $|a| > |b|$.

Caso $\det(A) < 0$, ou seja, caso ou seja, $|a|^2 - |b|^2 < 0$, então teremos $\left|\overline{b}z + \overline{a}\right| < \left|az + b\right|$. Portanto,

$$\left|M_A(z)\right| = \left|\frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}}\right| > 1 .$$

Note-se que o polo de M_A em $-\overline{a}/\overline{b}$ localiza-se agora em D_1, pois $|a| < |b|$.

Concluímos que para $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right)$ com $a, \ b \in \mathbb{C}$, a transformação M_A será um automorfismo de D_1 se $\det(A) > 0$.

Caso $z \in \mathbb{S}^1$, temos $\det(B) = 0$ e, portanto, $\det(AB) = 0$ independente do sinal de $\det(A)$. Com isso, $\left|\overline{b}z + \overline{a}\right| = \left|az + b\right|$ e, consequentemente, $\left|M_A(z)\right| = 1$. ■

9.B Prova do Teorema 9.12

Esta seção é dedicada à demonstração do Teorema 9.12, página 463, o qual permite uma interpretação da derivada de Schwarz em termos de razões anarmônicas.

Prova do Teorema 9.12. No que segue, suporemos também que $f'(z) \neq 0$. Temos, pela definição de razão anarmônica,

$$\big[f(z+\varepsilon w_1),\ f(z+\varepsilon w_2);\ f(z+\varepsilon w_3),\ f(z+\varepsilon w_4)\big] \;=\; \frac{\big(f(z+\varepsilon w_1)-f(z+\varepsilon w_3)\big)\big(f(z+\varepsilon w_2)-f(z+\varepsilon w_4)\big)}{\big(f(z+\varepsilon w_2)-f(z+\varepsilon w_3)\big)\big(f(z+\varepsilon w_1)-f(z+\varepsilon w_4)\big)}\ . \tag{9.B.1}$$

Estaremos interessados no limite em que ε tende a zero e, portanto, tomaremos primeiramente $|\varepsilon|$ pequeno o suficiente para que cada $z_k = z + \varepsilon w_k$ esteja dentro do raio de convergência da série de Taylor de f centrada em z.

Faremos uso dessa expansão de Taylor até terceira ordem, escrevendo

$$f(z+\varepsilon w_k) \;=\; f(z) + f'(z)\varepsilon w_k + \frac{f''(z)}{2}\varepsilon^2 w_k^2 + + \frac{f'''(z)}{6}\varepsilon^3 w_k^3 + O(\varepsilon^4)\ .$$

Agora, com uso da expansão de Taylor acima, escrevemos

$$f(z+\varepsilon w_k) - f(z+\varepsilon w_l) \;=\; \varepsilon\left[f'(z)(w_k - w_l) + \frac{f''(z)}{2}\varepsilon\big(w_k^2 - w_l^2\big) + \frac{f'''(z)}{6}\varepsilon^2\big(w_k^3 - w_l^3\big)\right]\ .$$

Acima e doravante, por simplicidade notacional, omitimos os termos de ordem superior a ε^2, pois eles não serão relevantes no que segue. Agora, sabemos que $w_k^2 - w_l^2 = (w_k - w_l)(w_k + w_l)$ e $w_k^3 - w_l^3 = (w_k - w_l)(w_k^2 + w_k w_l + w_l^2)$ e podemos escrever

$$f(z+\varepsilon w_k) - f(z+\varepsilon w_l) \;=\; \varepsilon f'(z)(w_k - w_l)\left[1 + \frac{f''(z)}{2f'(z)}\varepsilon\big(w_k + w_l\big) + \frac{f'''(z)}{6f'(z)}\varepsilon^2\big(w_k^2 + w_k w_l + w_l^2\big)\right]\ .$$

Definindo

$$A_{kl} \;:=\; \frac{f''(z)}{2f'(z)}\big(w_k + w_l\big) \qquad \text{e} \qquad B_{kl} \;:=\; \frac{f'''(z)}{6f'(z)}\big(w_k^2 + w_k w_l + w_l^2\big)\ , \tag{9.B.2}$$

temos simplesmente

$$f(z+\varepsilon w_k) - f(z+\varepsilon w_l) \;=\; \varepsilon f'(z)(w_k - w_l)\left[1 + \varepsilon A_{kl} + \varepsilon^2 B_{kl}\right]\ .$$

Substituindo isso nos vários fatores que surgem do lado direito de (9.B.1), ficamos com

$$\begin{aligned}\big[f(z+\varepsilon w_1),\ f(z+\varepsilon w_2);\ f(z+\varepsilon w_3),\ f(z+\varepsilon w_4)\big] \;&=\; \frac{(w_1-w_3)(w_2-w_4)}{(w_2-w_3)(w_1-w_4)}\,\frac{\big(1+\varepsilon A_{13}+\varepsilon^2 B_{13}\big)\big(1+\varepsilon A_{24}+\varepsilon^2 B_{24}\big)}{\big(1+\varepsilon A_{23}+\varepsilon^2 B_{23}\big)\big(1+\varepsilon A_{14}+\varepsilon^2 B_{14}\big)}\\[2mm] &=\; \big[w_1,\ w_2;\ w_3,\ w_4\big]\left\{\frac{\big(1+\varepsilon A_{13}+\varepsilon^2 B_{13}\big)\big(1+\varepsilon A_{24}+\varepsilon^2 B_{24}\big)}{\big(1+\varepsilon A_{23}+\varepsilon^2 B_{23}\big)\big(1+\varepsilon A_{14}+\varepsilon^2 B_{14}\big)}\right\}\ .\end{aligned} \tag{9.B.3}$$

No passo seguinte, vamos expandir o fator entre chaves acima em potências de ε, ignorando termos de ordem ε^3 e superior. Façamos notar para tal que, para $a,\ b \in \mathbb{C}$, temos

$$\frac{1}{1+\varepsilon a + \varepsilon^2 b} \;=\; 1 - \varepsilon a + \varepsilon^2\big(a^2 - b\big) + O(\varepsilon^3)\ . \tag{9.B.4}$$

De fato, pela bem conhecida série de Neumann

$$\frac{1}{1+s} \;=\; 1 - s + s^2 + O(s^3)$$

e tomando $s = \varepsilon a + \varepsilon^2 b$, temos

$$\frac{1}{1+\varepsilon a + \varepsilon^2 b} \;=\; 1 - \varepsilon a - \varepsilon^2 b + \big(\varepsilon a + \varepsilon^2 b\big)^2 \;=\; 1 - \varepsilon a - \varepsilon^2 b + \varepsilon^2 a^2 + O(\varepsilon^3)\ .$$

Usando (9.B.4), temos

$$\begin{aligned}&\frac{\big(1+\varepsilon A_{13}+\varepsilon^2 B_{13}\big)\big(1+\varepsilon A_{24}+\varepsilon^2 B_{24}\big)}{\big(1+\varepsilon A_{23}+\varepsilon^2 B_{23}\big)\big(1+\varepsilon A_{14}+\varepsilon^2 B_{14}\big)}\\ &\qquad=\; \Big(1+\varepsilon A_{13}+\varepsilon^2 B_{13}\Big)\Big(1+\varepsilon A_{24}+\varepsilon^2 B_{24}\Big)\Big(1-\varepsilon A_{23}+\varepsilon^2\big(A_{23}^2 - B_{23}\big)\Big)\Big(1-\varepsilon A_{14}+\varepsilon^2\big(A_{14}^2 - B_{14}\big)\Big)\ ,\end{aligned} \tag{9.B.5}$$

omitindo, como sempre, termos de ordem igual ou superior a ε^3. O passo seguinte é coletar os termos em ε e ε^2 do lado direito da expressão acima, um trabalho um tanto maçante mas sem obstáculos. O resultado é que o lado direito de (9.B.5) é

$$
\begin{aligned}
&1+\varepsilon\Big[A_{13}+A_{24}-A_{23}-A_{14}\Big]\\
&\quad+\varepsilon^2\left\{\Big[A_{13}\big(A_{24}-A_{23}-A_{14}\big)-A_{24}\big(A_{23}+A_{14}\big)+A_{23}A_{14}+A_{23}^2+A_{14}^2\Big]+\Big[B_{13}+B_{24}-B_{23}-B_{14}\Big]\right\}+O(\varepsilon^3)\ .
\end{aligned}
\tag{9.B.6}
$$

Devemos agora calcular cada um dos termos entre chaves acima. Para o primeiro termo entre chaves, temos, pela definição de A_{kl} em (9.B.2),

$$
A_{13}+A_{24}-A_{23}-A_{14} \;=\; \frac{f''(z)}{2f'(z)}\big(w_1+w_3+w_2+w_4-w_2-w_3-w_1-w_4\big) \;=\; 0\ .
$$

Para o segundo termo entre chaves, com o uso da definição de A_{kl} em (9.B.2) e após cálculos maçantes, porém, diretos, que sugerimos ao leitor pacientemente reproduzir, temos

$$
A_{13}\big(A_{24}-A_{23}-A_{14}\big)-A_{24}\big(A_{23}+A_{14}\big)+A_{23}A_{14}+A_{23}^2+A_{14}^2 \;=\; -\left(\frac{f''(z)}{2f'(z)}\right)^2(w_1-w_4)(w_3-w_2)\ .
$$

Por fim, para o último termo entre chaves, usando a definição de B_{kl} em (9.B.2), temos

$$
B_{13}+B_{24}-B_{23}-B_{14} \;=\; \frac{f'''(z)}{6f'(z)}(w_1-w_4)(w_3-w_2)\ ,
$$

Retornando com esses resultados a (9.B.5) vemos que o lado direito daquela expressão fica

$$
1+\varepsilon^2\left[\frac{f'''(z)}{6f'(z)}-\left(\frac{f''(z)}{2f'(z)}\right)^2\right](w_1-w_4)(w_3-w_2)+O(\varepsilon^3) \;=\; 1+\frac{\varepsilon^2}{6}\mathsf{S}(f)(z)(w_1-w_4)(w_3-w_2)+O(\varepsilon^3)\ ,
$$

onde manifesta-se pela primeira vez, no corrente contexto, a derivada de Schwarz de f. Retornando finalmente com isso a (9.B.3), obtemos,

$$
\begin{aligned}
&\big[f(z+\varepsilon w_1),\ f(z+\varepsilon w_2);\ f(z+\varepsilon w_3),\ f(z+\varepsilon w_4)\big]\\
&\qquad=\;\big[w_1,\ w_2;\ w_3,\ w_4\big]\left\{1+\frac{\varepsilon^2}{6}\mathsf{S}(f)(z)(w_1-w_4)(w_3-w_2)+O(\varepsilon^3)\right\}\ .
\end{aligned}
\tag{9.B.7}
$$

Observemos ainda que $\big[w_1,\ w_2;\ w_3,\ w_4\big](w_1-w_4)(w_3-w_2)=(w_1-w_3)(w_4-w_2)$ e, assim,

$$
\big[f(z+\varepsilon w_1),\ f(z+\varepsilon w_2);\ f(z+\varepsilon w_3),\ f(z+\varepsilon w_4)\big]-\big[w_1,\ w_2;\ w_3,\ w_4\big] \;=\; \frac{\varepsilon^2}{6}\mathsf{S}(f)(z)(w_1-w_3)(w_4-w_2)+O(\varepsilon^3)\ , \tag{9.B.8}
$$

demonstrando (9.113), página 463, e, consequentemente, o Teorema 9.12, como desejávamos. ■

Parte III

Tópicos de Álgebra Linear