Capítulo 12
Equações Diferenciais Ordinárias. Uma Introdução

Sumário

Neste capítulo apresentaremos uma breve introdução à teoria das equações diferenciais ordinárias, abordando vários assuntos que serão aprofundados em outros capítulos. Na Física, equações diferenciais são representações matemáticas diretas ou indiretas de leis naturais e não é de surpreender, portanto, o papel central que as mesmas nela desempenham. Pode-se, sem medo de exagero, afirmar que o desenvolvimento da Física moderna pós-Newtoniana só se tornou possível quando se compreendeu a importância de se expressar as leis básicas da natureza em termos de equações diferenciais e quando se desenvolveram métodos de resolução das mesmas. Desde o século XVIII as equações diferenciais tornaram-se não apenas um dos principais instrumentos teóricos de trabalho dos físicos, mas a linguagem mesma pela qual as leis da Física se expressam.

Um exemplo básico é a segunda lei de Newton da Mecânica Clássica, que popularmente consiste na afirmação que para uma partícula de massa m (movendo-se em, digamos, uma dimensão, do ponto de vista de um referencial inercial) o produto de sua massa por sua aceleração é igual à força que age sobre ela. Se $y(t)$ é a posição da partícula (em um sistema de referência inercial) e a força F que age sobre ela em um instante de tempo t depender apenas do tempo t, da posição $y(t)$ no instante t e da velocidade $\dot{y}(t)$ no mesmo instante t, então a segunda lei de Newton assume a forma da equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$m\ddot{y}(t) \;=\; F\big(t,\; y(t),\; \dot{y}(t)\big)\;.$$

A Física apresenta outros exemplos de leis que se expressam em termos de equações diferenciais (parciais), tais como as leis do Eletromagnetismo (equações de Maxwell), da Mecânica dos Fluidos (equações de Euler e de Navier-Stokes), da Mecânica Quântica (equações de Schrödinger, de Klein-Gordon e de Dirac), da Teoria da Relatividade Geral (equação de Einstein) etc.

Atualmente, o estudo das equações diferenciais e suas aplicações estende-se a outras subáreas da Física, tais como a química, a biologia, a economia, finanças ☺ etc. Para excelentes introduções, legíveis, profundas e abrangentes, à teoria das equações diferenciais ordinárias, recomendamos [22] e [255].

O emprego de equações diferenciais ordinárias para a expressão de leis físicas iniciou-se com a obra de Newton[1] sobre dinâmica, ainda que ele mesmo tivesse feito pouco uso dessa ferramenta em seu *Principia*. Já o emprego de equações diferenciais parciais na Física teve início com a obra de D'Alembert[2] sobre as causas dos ventos, sobre o movimento da corda vibrante e, em especial, sobre hidrodinâmica. Vide [419], cap. 5, e [120].

[1] Sir Isaac Newton (1643–1727).

[2] Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783). Um dos grandes nomes do Iluminismo, D'Alembert trouxe importantes contribuições à Análise (a noção de limite, por exemplo, é atribuida a ele), à Geometria Analítica, à Teoria das Equações Diferenciais. Foi também filósofo e político, tendo sido, juntamente a Diderot, editor e organizador da *Encyclopédie*.

12.1 Definição e Alguns Exemplos

Vamos iniciar nossa discussão tentando, de um modo geral e abstrato, definir o que se entende por uma equação diferencial ordinária (que, seguindo a praxe, abreviaremos frequentemente por *EDO*).

• **Definição geral de EDOs**

Em termos simples, uma equação diferencial ordinária é uma relação a ser satisfeita em um determinado domínio por uma função de uma variável e um conjunto finito de suas derivadas. Vamos tentar formalizar essa ideia.

Seja $n \geq 1$ um número natural e seja $G(x_1, \ldots, x_{n+2})$ uma função (real ou complexa) de $n+2$ variáveis (reais ou complexas). Entende-se por uma *equação diferencial ordinária de ordem* n de uma função (incógnita) y de uma variável t associada à função G a equação

$$G\Big(t,\ y(t),\ y'(t),\ \ldots,\ y^{(n)}(t)\Big) \ = \ 0 \ . \tag{12.1}$$

Assim sendo, o número n é dito ser a *ordem da equação.* Como dissemos, apenas as derivadas de uma função incógnita em relação a uma das variáveis da qual eventualmente depende ocorrem em uma *equação diferencial ordinária.* Se ocorrerem derivadas em relação a várias variáves, a equação é dita ser uma *equação diferencial parcial.* Equações diferenciais parciais serão discutidas em outros capítulos, adiante.

Um exemplo (escolhido arbitrariamente, sem aplicação prática conhecida) seria o caso da função de três variáveis

$$G(x_1,\ x_2,\ x_3) \ = \ x_1^2 + \operatorname{sen}(x_2) - 3x_1\cos(x_3) \ . \tag{12.2}$$

A equação diferencial ordinária de primeira ordem associada a essa função seria

$$t^2 + \operatorname{sen}\big(y(t)\big) - 3t\cos\big(y'(t)\big) \ = \ 0 \ . \tag{12.3}$$

É evidente que só faz sentido associar uma equação diferencial a uma função G de $n+2$ variáveis, como acima, se a mesma possuir zeros, ou seja, se a equação algébrica $G(x_1, \ldots, x_{n+2}) = 0$ possuir soluções (reais ou complexas, dependendo do interesse). Por exemplo, se $G(x_1,\ x_2,\ x_3)$ é uma função de três variáveis reais ou complexas da forma $G(x_1,\ x_2,\ x_3) = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + 1$ então não há nenhuma equação diferencial associada à mesma, já que não há números reais ou complexos tais que $G(x_1,\ x_2,\ x_3) = 0$ e, portanto, a equação $|t|^2 + \big|y(t)\big|^2 + \big|y'(t)\big|^2 + 1 = 0$, ainda que possa ser escrita, trivialmente não possui qualquer solução.

Em muitos casos a equação algébrica $G(x_1, \ldots, x_{n+2}) = 0$ permite escrever de modo único (ao menos em uma região finita) a variável x_{n+2} em termos das demais:

$$x_{n+2} \ = \ F\big(x_1,\ \ldots,\ x_{n+1}\big) \ , \tag{12.4}$$

onde F é alguma função de $n+1$ variáveis. Condições para isso são garantidas pelo importante *Teorema da Função Implícita* (vide Seção 26.3, página 1525, ou qualquer bom livro-texto sobre funções de várias variáveis). Nesses casos felizes, a equação diferencial para G equivale (ao menos localmente) à equação

$$y^{(n)}(t) \ = \ F\big(t,\ y(t),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t)\big) \ . \tag{12.5}$$

Nos casos em que G é tal que não permite a separação global da dependência de x_{n+2} como em (12.4) a equação diferencial é dita ser uma *equação diferencial implícita.* Equações implícitas são por vezes difíceis de lidar. Trataremos da solução de algumas delas no Capítulo 13, página 745. Um exemplo de uma equação implícita foi apresentado em (12.2)-(12.3). Outro exemplo é a equação diferencial (associada à conservação de energia mecânica de uma partícula de massa m se movendo em uma dimensão sob a ação de um potencial U):

$$\frac{m}{2}\big(\dot{y}(t)\big)^2 + U\big(y(t)\big) \ = \ E \ ,$$

onde E é uma constante.

Daqui por diante estaremos mais frequentemente interessados em equações diferenciais de ordem n da forma (12.5) para alguma função de $n+1$ variáveis F. Para ilustrar equações do tipo (12.5), apresentemos mais alguns exemplos.

Exemplo 12.1 Sejam m, ρ e k constantes positivas e f uma função de uma variável. Seja G a função de quatro variáveis

$$G(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \;=\; mx_4 + kx_2 + \rho x_3 - f(x_1)\ .$$

É evidente que para a equação algébrica $G(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0$ podemos escrever

$$x_4 \;=\; F(x_1,\ x_2,\ x_3)\ ,$$

onde

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3) \;=\; -\frac{1}{m}\big(kx_2 + \rho x_3 - f(x_1)\big)\ .$$

A equação diferencial (de segunda ordem) associada a essa função F é $\ddot{y}(t) = F\big(t,\ y(t)\ \dot{y}(t)\big)$, ou seja

$$m\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + ky(t) \;=\; f(t)\ .$$

O estudante pode imediatamente reconhecer que se trata da equação do oscilador harmônico amortecido submetido a uma força dependente do tempo $f(t)$. ♦

Vamos a outros exemplos escritos diretamente em termos da função F.

Exemplo 12.2 Sejam g e l duas constantes positivas e seja F a função

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3) \;=\; -\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}(x_2)\ .$$

A equação diferencial (de segunda ordem) associada a essa função F é

$$\ddot{y}(t) \;=\; -\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}(y(t))\ .$$

O estudante pode imediatamente reconhecer que se trata da equação do pêndulo simples. ♦

Exemplo 12.3 (Equação de van der Pol) Sejam μ e k constantes e

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3) \;=\; -\mu x_3\big(x_2^2 - 1\big) - kx_2\ .$$

A equação diferencial (de segunda ordem) associada a essa função F é

$$y''(t) + \mu y'(t)\big(y(t)^2 - 1\big) + ky(t) \;=\; 0\ .$$

Esta equação é conhecida como *equação de van der Pol*[3], em honra ao engenheiro que a propôs como a equação básica para o triodo (uma espécie de “avô” do transistor). ♦

Exemplo 12.4 Sejam α e β constantes e

$$F(x_1,\ x_2) \;=\; -\alpha x_2 + \beta x_2^2\ .$$

A equação diferencial (de primeira ordem) associada a essa função F é

$$y'(t) \;=\; -\alpha y(t) + \beta y(t)^2\ .$$

Essa equação aparece em vários problemas, por exemplo no estudo da evolução de populações. ♦

Vários outros exemplos serão apresentados adiante.

• A noção de solução clássica de uma EDO

Algumas palavras devem ser ditas sobre a noção de solução de uma equação diferencial ordinária. Uma *solução clássica* de uma equação diferencial ordinária de ordem m em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}$ ou $\Omega \subset \mathbb{C}$ (suposto conexo e de interior não-vazio) é uma função m-vezes diferenciável que satisfaz a equação em todos os pontos do interior de Ω. Existem também outras noções de solução, como a de solução fraca, de solução distribucional etc. Discutiremos por ora apenas

[3]Balthazar van der Pol (1889–1959). Os trabalhos originais de van der Pol sobre a equação que leva seu nome são: B. van der Pol, Radio Rev. **1**, 704–754, (1920) e B. van der Pol, “Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance (reception with reactive triode)”, Phil. Mag. **3**, 65–80, (1927).

as soluções clássicas e, por isso, abusando um pouco da linguagem, nos referiremos a elas simplesmente como "soluções", sem pender o qualificativo "clássicas".

• **Equações diferenciais algébricas**

Uma *equação diferencial algébrica* de ordem n é caracterizada por uma função de $n+2$ variáveis $P(x;\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$, onde P é um polinômio nas variáveis $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ e os coeficientes desse polinômio (onde encontra-se a dependência com a variável x) são funções racionais de x, ou seja, são funções da forma $p(x)/q(x)$, onde p e q são polinônios em x.

A equação diferencial algébrica associada a P é

$$P\Big(x;\ y(x), y'(x)\ \ldots,\ y^{(n)}(x)\Big)\ =\ 0\ .$$

Ela é obtida substituindo-se a variável x_k por $y^{(k)}(x)$, $k=0,\ \ldots,\ n$. Note-se que se trata, de fato, de uma equação diferencial de ordem n.

Exemplo 12.5 Um exemplo de uma equação algébrica de ordem 1 seria dado pelo polinômio

$$P(x;\ x_0,\ x_1)\ =\ \frac{p_1(x)}{q_2(x)}+\frac{p_2(x)}{q_2(x)}x_0+\frac{p_3(x)}{q_3(x)}x_1+\frac{p_4(x)}{q_4(x)}x_0\Big((x_1)^2-x_0x_1\Big)+\frac{p_5(x)}{q_5(x)}(x_1)^3\ ,$$

onde p_k e q_k, $k=1,\ \ldots,\ 5$, são polinômios. A correspondente equação diferencial algébrica seria $P\big(x;\ y(x),\ y'(x)\big)=0$, ou seja,

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)}+\frac{p_2(x)}{q_2(x)}y(x)+\frac{p_3(x)}{q_3(x)}y'(x)+\frac{p_4(x)}{q_4(x)}y(x)\Big(\big(y'(x)\big)^2-y(x)y'(x)\Big)+\frac{p_5(x)}{q_5(x)}\big(y'(x)\big)^3\ =\ 0\ .$$

♦

Sempre podemos multiplicar uma equação diferencial algébrica pelo produto da polinômios q que surgem nos denominadores dos coeficientes de P (no caso do exemplo acima, seria o produto $q_1(x)q_2(x)q_3(x)q_4(x)q_5(x)$), fazendo com que os coeficientes se tornem polinômios em x. Assim, podemos alternativamente definir uma equação diferencial algébrica de ordem m da seguinte forma: seja uma função de $n+2$ variáveis $P(x;\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$, onde P é um polinômio nas variáveis $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ e os coeficientes desse polinômio (onde encontra-se a dependência com a variável x) são também polinômios em x. A equação diferencial algébrica associada a P é

$$P\Big(x;\ y(x), y'(x)\ \ldots,\ y^{(n)}(x)\Big)\ =\ 0\ .$$

Ela é obtida substituindo-se a variável x_k por $y^{(k)}(x)$, $k=0,\ \ldots,\ n$.

Segue da observação do último parágrafo que uma equação algébrica de ordem n pode ser também caracterizada por uma função de $n+2$ variáveis $P(x;\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$, onde P é um polinômio em todas as variáveis $x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$.

A maioria das equações diferenciais ordinárias comummente estudadas são equações diferenciais algébricas. A equação diferencial $y'(x)=y(x)$, cuja solução é um múltiplo da função exponencial e^x, é um exemplo de uma equação diferencial algébrica, assim com a diferencial $y''(x)+y(x)=0$, cuja solução é uma combinação linear de $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$. A equação de Bessel de ordem ν, $x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-\nu^2)y(x)=0$, é outro exemplo de uma equação diferencial algébrica e suas soluções são combinações lineares de funções de Bessel e de Neumann de ordem ν.

Uma função transcendente que não é solução de nenhuma equação diferencial algébrica é dita ser uma *função transcendentalmente transcendente*, ou uma *função hipertranscendente*.

A Função Gama de Euler é um exemplo de uma função transcendentalmente transcendente, ou hipertranscendente, como discutido na Seção 7.5.4, página 448.

12.1.1 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

No estudo das equações diferenciais é muito útil classificar equações que possuam certas propriedades comuns. Uma classificação muito importante é aquela que separa as equações diferenciais em *lineares* e *não-lineares* e as primeiras em *homogêneas* e *não-homogêneas*.

- **Equações diferenciais ordinárias lineares**

Seja a equação diferencial ordinária de ordem n

$$y^{(n)}(t) = F\Big(t,\ y(t),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t)\Big)\ . \tag{12.6}$$

Se a função $F(x_1,\ \ldots x_{n+1})$ for uma função linear das variáveis $x_2,\ \ldots x_{n+1}$, então (12.6) é dita ser *linear*. Em um tal caso, $F(x_1,\ \ldots x_{n+1})$ é da forma

$$F(x_1,\ \ldots x_{n+1}) \ = \ f_1(x_1) + f_2(x_1)x_2 + \cdots + f_{n+1}(x_1)x_{n+1}\ ,$$

para certas funções de uma variável $f_1,\ \ldots,\ f_{n+1}$.

É fácil constatar que toda equação diferencial ordinária e linear de ordem n é da forma

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) \ = \ f(t)\ , \tag{12.7}$$

para funções reais ou complexas $a_0,\ \ldots, a_{n-1}$ e f. Veremos inúmeros exemplos adiante (vide Seção 12.1.2).

Equações que não são lineares são (obviamente) ditas ser *não-lineares*. Exemplos são a equação do pêndulo simples

$$\ddot{x}(t) + \operatorname{sen}\big(x(t)\big) \ = \ 0$$

e a de van der Pol

$$\ddot{y}(t) + \mu\dot{y}(t)\big(y(t)^2 - 1\big) + ky(t) \ = \ 0\ .$$

Equações não-lineares são em muitos sentidos mais “complexas” que equações lineares e têm sido objeto de intenso estudo nas últimas décadas, especialmente no que concerne ao comportamento “caótico” observado em muitas delas. Nos capítulos que seguem, nossa ênfase será o desenvolvimento de métodos de resolução de equações lineares, mas trataremos de métodos de resolução de algumas equações não-lineares no Capítulo 13, página 745, e também no Capítulo 26, página 1499, quando desenvolvermos métodos recursivos no tratamento das equações integrais de Fredholm e de Volterra.

- **Equações diferenciais ordinárias lineares a coeficientes constantes**

Caso as funções $a_0,\ \ldots, a_{n-1}$ em (12.7) sejam constantes, a equação (12.7) é dita ser a *equação a coeficientes constantes*. Como discutiremos, há um método geral para obter soluções de equações diferenciais ordinárias lineares a coeficientes constantes (para qualquer ordem n).

- **Equações lineares homogêneas e não-homogêneas**

Caso a função f seja identicamente nula, a equação (12.7) é dita ser uma *equação diferencial homogênea*. De outra forma, se f não for identicamente nula, equação (12.7) é dita ser uma *equação diferencial não-homogênea*.

Equações lineares e homogêneas têm uma propriedade de grande importância, o chamado *princípio de sobreposição*, do qual trataremos agora.

- **O princípio de sobreposição para equações lineares homogêneas**

Seja uma equação diferencial ordinária linear e homogênea de ordem n

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) \ = \ 0\ . \tag{12.8}$$

O chamado *princípio de sobreposição* é a afirmativa que se y_a e y_b são duas soluções de (12.8) então combinações lineares arbitrárias $\alpha y_a + \beta y_b$ são também soluções de (12.8). Aqui α e β são números reais ou complexos arbitrários. A prova é simples. A k-ésima derivada de $\alpha y_a + \beta y_b$ é $\alpha y_a^{(k)} + \beta y_b^{(k)}$. Assim, substituindo-se y por $\alpha y_a + \beta y_b$ no lado esquerdo de

(12.8), teremos

$$
\begin{aligned}
&(\alpha y_a+\beta y_b)^{(n)}+a_{n-1}(t)(\alpha y_a+\beta y_b)^{(n-1)}+\cdots+a_1(t)(\alpha y_a+\beta y_b)'+a_0(t)(\alpha y_a+\beta y_b) \;=\\
&\qquad (\alpha y_a^{(n)}+\beta y_b^{(n)})+a_{n-1}(t)(\alpha y_a^{(n-1)}+\beta y_b^{(n-1)})+\cdots+a_1(t)(\alpha y_a'+\beta y_b')+a_0(t)(\alpha y_a+\beta y_b) \;=\\
&\qquad\qquad \alpha\left(\underbrace{y_a^{(n)}+a_{n-1}(t)y_a^{(n-1)}+\cdots+a_1(t)y_a'+a_0(t)y_a}_{=\,0}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad +\beta\left(\underbrace{y_b^{(n)}+a_{n-1}(t)y_b^{(n-1)}+\cdots+a_1(t)y_b'+a_0(t)y_b}_{=\,0}\right) \;=\; 0\;.
\end{aligned}
$$

Uma conclusão importante que se extrai do princípio de sobreposição é que o conjunto de todas as soluções de uma equação diferencial ordinária linear e homogênea é um espaço vetorial, real ou complexo, dependendo do caso.

Como o estudante facilmente percebe, o princípio de sobreposição vale também para sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares e homogêneas, assim como para equações diferenciais parciais lineares e homogêneas, tais como as equações de difusão, de onda, de Laplace, as equações de Maxwell no vácuo, a equação de Schrödinger e muitas outras equações da Física. Nelas o princípio de sobreposição é amplamente empregado.

Historicamente, o princípio de sobreposição era conhecido desde os primeiros estudos sobre equações diferenciais no século XVIII, mas foi devido aos trabalhos de Helmholtz[4] sobre acústica que sua importância foi inteiramente percebida na resolução de equações diferenciais (ordinárias e parciais) lineares de interesse físico. A influência de Helmholtz não pode ser subestimada, mesmo no que concerne a aplicações práticas: a leitura de Helmholtz, que também inventara um dispositivo eletromecânico para a produção artificial do som de vogais, inspirou Bell[5] a realizar experiências de transmissão simultânea de múltiplos sinais de código Morse[6] em uma única linha telegráfica, empregando frequências distintas para cada mensagem. Tais experiências conduziram Bell em 1876 à invenção do telefone.

• O caso de equações lineares não-homogêneas

Vamos colocar a seguinte questão. Vale o princípio de sobreposição para equações diferenciais ordinárias lineares não-homogêneas? Para tentar responder isso, considere-se a equação não-homogênea

$$
y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t) \;=\; f(t) \tag{12.9}
$$

e sejam y_a e y_b duas soluções. Como acima, consideremos uma combinação linear $\alpha y_a+\beta y_b$ e tentemos repetir o que fizemos no caso homogêneo. Assim, substituindo-se y por $\alpha y_a+\beta y_b$ no lado esquerdo de (12.9), teremos

$$
\begin{aligned}
&(\alpha y_a+\beta y_b)^{(n)}+a_{n-1}(t)(\alpha y_a+\beta y_b)^{(n-1)}+\cdots+a_1(t)(\alpha y_a+\beta y_b)'+a_0(t)(\alpha y_a+\beta y_b) \;=\\
&\qquad (\alpha y_a^{(n)}+\beta y_b^{(n)})+a_{n-1}(t)(\alpha y_a^{(n-1)}+\beta y_b^{(n-1)})+\cdots+a_1(t)(\alpha y_a'+\beta y_b')+a_0(t)(\alpha y_a+\beta y_b) \;=\\
&\qquad\qquad \alpha\left(\underbrace{y_a^{(n)}+a_{n-1}(t)y_a^{(n-1)}+\cdots+a_1(t)y_a'+a_0(t)y_a}_{=\,f(t)}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad +\beta\left(\underbrace{y_b^{(n)}+a_{n-1}(t)y_b^{(n-1)}+\cdots+a_1(t)y_b'+a_0(t)y_b}_{=\,f(t)}\right) \;=\; (\alpha+\beta)f(t)\;.
\end{aligned}
$$

[4] Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894).
[5] Alexander Graham Bell (1847–1922).
[6] Samuel Finley Breese Morse (1791–1872).

O que concluímos é que $\alpha y_a + \beta y_b$ somente é uma nova solução de (12.9) se $\alpha + \beta = 1$. Portanto, se y_a e y_b são soluções de (12.9) então $\alpha y_a + (1 - \alpha)y_b$ é também solução de (12.9) para qualquer α.

Vimos que o princípio de sobreposição para equações não-homogêneas não se dá para α e β arbitrários. Não se pode mais, portanto, dizer que o conjunto de soluções de uma equação não-homogênea como (12.9) é um espaço vetorial, mas sim um espaço convexo.

Há ainda uma outra propriedade importante satisfeita pelas soluções de equações não-homogêneas. Seja y_{nh} uma solução particular da equação não-homogênea (12.9) e y_h solução particular da equação homogênea (12.8), a qual difere de (12.9) apenas pelo fato de ter-se $f(t) = 0$. Então, tem-se que

$$y \;=\; \alpha y_h + y_{nh} \tag{12.10}$$

é também solução da equação não-homogênea (12.9) para qualquer constante α. Para ver isso, inserimos $y = \alpha y_h + y_{nh}$ no lado esquerdo de (12.9) e teremos

$$\begin{aligned}
&\big(\alpha y_h + y_{nh}\big)^{(n)} + a_{n-1}(t)\big(\alpha y_h + y_{nh}\big)^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\big(\alpha y_h + y_{nh}\big)' + a_0(t)\big(\alpha y_h + y_{nh}\big) \;=\\
&\left(\alpha y_h^{(n)} + y_{nh}^{(n)}\right) + a_{n-1}(t)\left(\alpha y_h^{(n-1)} + y_{nh}^{(n-1)}\right) + \cdots + a_1(t)\Big(\alpha y_h' + y_{nh}'\Big) + a_0(t)\Big(\alpha y_h + y_{nh}\Big) \;=\\
&\alpha\left(\underbrace{y_h^{(n)} + a_{n-1}(t)y_h^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y_h' + a_0(t)y_h}_{=0}\right)\\
&\qquad + \left(\underbrace{y_{nh}^{(n)} + a_{n-1}(t)y_{nh}^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y_{nh}' + a_0(t)y_{nh}}_{=f(t)}\right) \;=\; f(t)\;.
\end{aligned}$$

O que aprendemos com isso é que se tivermos uma solução particular de uma equação linear não-homogênea obtemos uma outra solução mais geral adicionando a esta uma solução da equação linear homogênea associada. Essa propriedade é muito útil na solução de equações não-homogêneas, especialmente se forem também envolvidas condições iniciais ou de contorno.

• Equações diferenciais ordinárias com retardo

Apenas por curiosidade informamos que não apenas equações diferenciais do tipo (12.1) ou (12.5) são objeto de interesse e de pesquisa. Um outro tipo são as chamadas *equações com retardo*, as quais existem em diversas formas. Uma dessas formas é a seguinte. Sejam $T_0, \ldots, T_{n_1}$ constantes positivas. Uma equação com retardo (fixo) é uma equação da forma

$$y^{(n)}(t) = F\Big(t,\; y(t - T_0),\; \ldots,\; y^{(n-1)}(t - T_{n-1})\Big)\;. \tag{12.11}$$

A diferença com relação a (12.5) é que aqui $y^{(n)}$ no instante t não depende de $y, \ldots, y^{n-1}$ no mesmo instante t, mas em instantes anteriores.

Um exemplo interessante é o seguinte. Suponha que $y(t)$ designe a população de uma espécie de seres vivos vivendo em um certo habitat. O número de falecimentos por causas naturais (como doenças) no intervalo t e $t + dt$ é tipicamente proporcional a $y(t)$ (justifique!). Assim, se a espécie não se reproduz, a variação dy da população no intervalo t e $t + dt$ será $dy = -\alpha y(t)dt$ para uma certa constante α, ou seja, y satisfará a equação diferencial $y'(t) = -\alpha y(t)$, que é uma equação de primeira ordem sem retardo. Agora, admitamos que a espécie se reproduz. O número de cruzamentos entre elementos da espécie no intervalo t e $t + dt$ é tipicamente proporcional a $y(t)^2$ (justifique!). Se admitirmos que o número de nascimentos no intervalo entre t e $t + dt$ é proporcional ao de cruzamentos ocorridos em $t - T_0$ (descontando assim o tempo de gestação T_0) a equação diferencial para y terá que ser modificada para

$$y'(t) \;=\; -\alpha y(t) + \beta\big(y(t - T_0)\big)^2\;,$$

com uma nova constante β. Esta é uma equação de primeira ordem com retardo.

Há vários outros tipos de equações com retardo, por exemplo, aquelas onde os tempos de retardo T_i não são fixos, mas dependem de t ou mesmo de y, como por exemplo, a equação de primeira ordem

$$\dot{y}(t) \;=\; F\Big(t,\;\; y\Big(t-T\big(t,\; y(t)\big)\Big)\Big) \;,$$

onde $T\big(t,\; y\big)$ é uma função dada. Tais equações aparecem no Eletromagnetismo, onde o retardo é devido à finitude da velocidade da luz.

O estudo de equações com retardo requer outros métodos que não aqueles que discutiremos aqui e é assunto ativo de pesquisa atualmente, encontrando aplicações mesmo fora da Física, em áreas tais como a Epidemiologia - como o exemplo acima ilustra - onde os retardos são tipicamente consequência quer de tempos de gestação quer de tempos de latência (de doenças).

12.1.2 Equações Ordinárias de Segunda Ordem. Exemplos de Interesse

Para futura referência vamos aqui listar uma série de equações diferenciais lineares de segunda ordem de particular interesse.

1. A *Equação linear de segunda ordem e homogênea* (forma geral):
$$a(t)\ddot{y}+b(t)\dot{y}+c(t)y \;=\; 0 \;,$$
com $a(t)$ não-identicamente nula.

2. *Equação linear de segunda ordem não-homogênea* (forma geral):
$$a(t)\ddot{y}(t)+b(t)\dot{y}(t)+c(t)y(t) \;=\; f(t) \;,$$
com $a(t)$ e $f(t)$ não-identicamente nulas.

3. *Equação do oscilador harmônico forçado amortecido*:
$$m\ddot{x}(t)+\gamma\dot{x}(t)+kx(t) \;=\; f(t) \;,$$
com $m>0$, $\gamma>0$ e $k>0$.

4. *Equação do oscilador anarmônico amortecido*:
$$m\ddot{x}(t)+\gamma\dot{x}(t)+kx(t)+\lambda\big(x(t)\big)^3 \;=\; 0 \;,$$
com $m>0$, $\gamma>0$ e $k>0$.

5. *Equação de Duffing*[7]:
$$m\ddot{x}(t)+\gamma\dot{x}(t)+kx(t)+\lambda\big(x(t)\big)^3 \;=\; \alpha\cos(\omega t+\delta) \;,$$
com $m>0$, $\gamma>0$ e $k>0$.

6. *Equação de Langevin*[8]
$$m\ddot{x}(t)+\gamma\dot{x}(t) \;=\; f(t) \;,$$
com $m>0$ e $\gamma>0$.

7. A *Equação de Euler*[9]:
$$t^2\,\ddot{y}(t)+at\,\dot{y}(t)+by(t) \;=\; 0 \;,$$
onde a e b são constantes.

[7]Georg Duffing (1861–1944). A referência onde a equação de Duffing foi originalmente apresentada e estudada é [139]. A equação de Duffing adquiriu alguma popularidade nos anos 70 do século XX com a emergência do estudo de sistemas que exibem comportamento caótico. Para uma referência geral sobre essa equação, vide [313].

[8]Paul Langevin (1872–1946). A equação de Langevin surgiu como equação estocástica em P. Langevin, “On the Theory of Brownian Motion”. C. R. Acad. Sci. (Paris) **146**, 530–533 (1908).

[9]Leonhard Euler (1707–1783).

8. A *Equação de Hill*[10]:
$$\ddot{y}(t) + \big(\lambda + P(t)\big)\, y(t) \; = \; 0 \; ,$$
onde $P(t)$ é uma função periódica e λ constante. Um caso particular importante é o da equação de Mathieu:

9. A *Equação de Mathieu*[11]:
$$\ddot{y}(t) + \big(a + b\cos(\omega t)\big) y(t) \; = \; 0 \; ,$$
com a, b e ω constantes.

10. A *Equação de Bessel*[12]:
$$x^2 y''(x) + x y'(x) + \big(x^2 - \nu^2\big) y(x) \; = \; 0 \; ,$$
$\nu \in \mathbb{R}$.

11. A *Equação de Legendre*[13]:
$$(1-x^2) y''(x) - 2x y'(x) + \lambda(\lambda+1) y(x) \; = \; 0 \; ,$$
$\lambda \in \mathbb{R}$, e a *equação de Legendre associada*
$$(1-x^2) y''(x) - 2x y'(x) + \lambda(\lambda+1) y(x) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\, y(x) \; = \; 0 \; ,$$
$\lambda, \ \mu \in \mathbb{R}$.

12. A *Equação de Hermite*[14]:
$$y''(x) - 2x y'(x) + \lambda y(x) \; = \; 0 \; ,$$
$\lambda \in \mathbb{R}$.

13. A *Equação de Airy*[15]:
$$y''(x) - x y(x) \; = \; 0 \; .$$

14. A *Equação de Laguerre*[16]:
$$x y''(x) + (1-x) y'(x) + \lambda y(x) \; = \; 0 \; ,$$
$\lambda \in \mathbb{R}$, e a *Equação de Laguerre associada*:
$$x y'' + (m+1-x) y' + (n-m) y \; = \; 0 \; ,$$
$m, \ n$ constantes.

15. A *Equação de Tchebychev*[17]:
$$(1-x^2) y''(x) - x y'(x) + \lambda^2 y(x) \; = \; 0 \; ,$$
$\lambda \in \mathbb{R}$.

16. A *Equação Hipergeométrica*[18], ou *Equação de Gauss*[19]:
$$z(1-z) y''(z) + \big[c - (1+a+b) z\big] y'(z) - ab y(z) \; = \; 0 \; ,$$
$a, \ b, \ c$ constantes.

[10] George William Hill (1838–1914).
[11] Emile-Léonard Mathieu (1835–1890).
[12] Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846).
[13] Adrien-Marie Legendre (1752–1833).
[14] Charles Hermite (1822–1901).
[15] George Biddell Airy (1801–1892).
[16] Edmond Nicolas Laguerre (1834–1886).
[17] Pafnuty Lvovich Tchebychev (1821–1894).
[18] Assim denominada pois uma de suas solução envolve uma generalização da série geométrica.
[19] Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855).

17. A *Equação Hipergeométrica Confluente*, ou *Equação de Kummer*[20]:

$$zy''(z) + [c - z]y'(z) - ay(z) \ = \ 0 \ ,$$

a, c constantes.

18. A *Equação de Heun*[21]:

$$z(z-1)(z-a)y''(z) + \big[\gamma(z-1)(z-a) + \delta\, z(z-a) + \epsilon\, z(z-1)\big]y'(z) + \big(\alpha\beta z - q\big)y(z) \ = \ 0 \ ,$$

onde α, δ, ϵ, q e a são constantes.

O leitor interessado poderá encontrar no Capítulo 45, página 2607, problemas físicos dos quais emergem algumas das equações listadas acima.

12.2 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

Um sistema de equações diferenciais ordinárias envolvendo m funções desconhecidas $y_1, \ldots, y_m$ de uma variável é um conjunto de equações do tipo

$$\begin{aligned} y_1^{(n_1)}(t) \quad &= \quad F_1\Big(t;\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(n_1-1)};\ \ \ldots;\ y_m,\ y_m',\ \ldots,\ y_m^{(n_m-1)}\Big) \ , \\ y_2^{(n_2)}(t) \quad &= \quad F_2\Big(t;\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(n_1-1)};\ \ \ldots;\ y_m,\ y_m',\ \ldots,\ y_m^{(n_m-1)}\Big) \ , \\ &\ \vdots \\ y_m^{(n_m)}(t) \quad &= \quad F_m\Big(t;\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(n_1-1)};\ \ \ldots;\ y_m,\ y_m',\ \ldots,\ y_m^{(n_m-1)}\Big) \ , \end{aligned} \tag{12.12}$$

onde cada F_i é uma função de um certo número de variáveis e n_k são números inteiros maiores ou iguais a 1. Para cada y_j tem-se, portanto, uma equação de ordem n_j, na qual comparecem também as demais funções y_k e suas derivadas de ordem até $n_k - 1$.

Sistemas de equações diferenciais ordinárias são muito frequentes em Física. Considere-se, por exemplo, um sistema isolado de m partículas de massas M_i e coordenadas $\vec{x_i}$, $i = 1, \ldots, m$, interagindo de forma que a partícula j exerce sobre a partícula i uma força $\vec{F}_{ij}\big(\vec{x_i} - \vec{x_j}\big)$. A segunda lei de Newton fica

$$M_i\ddot{\vec{x_i}}(t) \ = \ \sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}\Big(\vec{x_i}(t) - \vec{x_j}(t)\Big) \ ,$$

$i = 1, \ldots, m$, que é um sistema de equações diferenciais ordinárias.

• **O sistema de Lotka-Volterra**

Um outro exemplo de sistema de equações diferenciais é o chamado *sistema de caça-presa* de *Lotka*[22] e *Volterra*[23], empregado no estudo de evolução de populações[24]. Esse sistema é da forma

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) \quad &= \quad -\alpha_1 p_1(t) + \beta_1 p_1(t)p_2(t) \\ \dot{p}_2(t) \quad &= \quad +\alpha_2 p_2(t) - \beta_2 p_1(t)p_2(t) \end{aligned} \ , \tag{12.13}$$

[20] Ernst Eduard Kummer (1810–1893).
[21] Karl Heun (1859–1929).
[22] Alfred James Lotka (1880–1949).
[23] Vito Volterra (1860–1940).
[24] O modelo foi proposto em 1920 por Lotka para o estudo de certas reações químicas e em 1926 por Volterra, em uma tentativa de modelar a evolução de populações de peixes e tubarões do mar Adriático. Para uma referência histórica, vide V. Volterra "Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie". Gauthier-Villars et Cie., Paris, 1931. Os trabalhos originais de Volterra nesse campo são: V. Volterra. "Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi". Mem. R. Accad. Naz. dei Lincei **2**, 31–113 (1926). V. Volterra. "Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically". Nature **118**, 558–560 (1926).

onde α_i e β_i, $i = 1,\ 2$ são constantes positivas. O sistema de Lotka-Volterra descreve a evolução de duas populações de acordo com um modelo de interação entre caça (a população p_1) e presa (a população p_2).

A ideia do modelo é a seguinte: p_1 representa uma população que se alimenta da população p_2. Esta, alimenta-se de recursos do habitat. Tenha-se em mente, por exemplo, a situação onde p_1 representa uma população de raposas que se alimentam de coelhos, representados por p_2. Estes, sendo herbívoros, alimentam-se de plantas de seu habitat. Se as duas populações estão isoladas, p_1 tende a desaparecer (por falta de alimento) exponencialmente com uma taxa α_1. Já p_2 cresce exponencialmente com uma taxa α_2, por não ter inimigos naturais. Assim, quando as duas populações estão isoladas, suas evoluções são descritas pelo sistema

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -\alpha_1 p_1(t) \\ \dot{p}_2(t) &= +\alpha_2 p_2(t) \end{aligned} \quad . \tag{12.14}$$

Postas em contacto, as populações começam a interagir, e de modo que p_1 tem uma chance de sobrevivência por se alimentar de p_2, que ganha agora um predador. As chances de sobrevivência de p_1 são proporcionais ao número de encontros entre elementos de p_1 e de p_2 no habitat, pois em um encontro um elemento de p_1 pode eventualmente matar um elemento de p_2 e, assim, alimentar-se. Esse número de encontros é grosseiramente proporcional ao produto das duas populações p_1p_2 (por quê?). Assim, a taxa de sobrevivência de p_1 deve ser acrescida de um termo como $\beta_1 p_1(t)p_2(t)$, enquanto que a taxa de sobrevivência de p_2 deve ser subtraída de um termo como $\beta_2 p_1(t)p_2(t)$. Esses termos levam ao sistema de Lotka-Volterra acima. O resultado da evolução de um tal sistema é ilustrado na Figura 12.1.

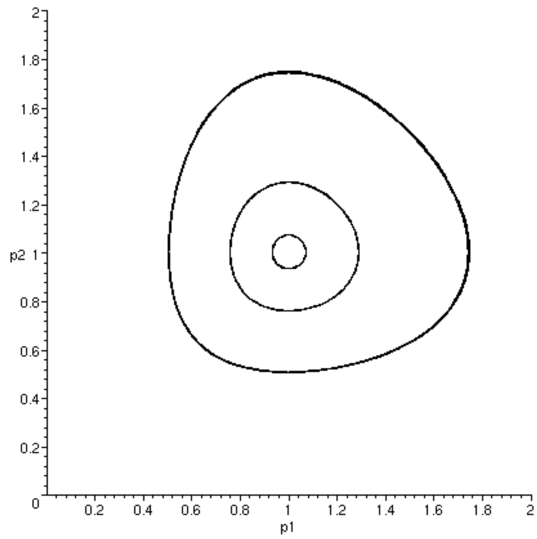

Figura 12.1: A evolução do sistema de Lotka-Volterra para três condições iniciais distintas. O eixo horizontal é a população p_1 e o vertical p_2. Note que a evolução se dá em ciclos periódicos fechados, uma característica especial do sistema de Lotka-Volterra.

Também estudado em modelos de ecologia é o *modelo de competição de Lotka-Volterra*, descrito pelo sistema

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= \alpha_1 p_1(t) - \beta_1 p_1(t)^2 - \gamma_1 p_1(t)p_2(t) \\ \dot{p}_2(t) &= \alpha_2 p_2(t) - \beta_2 p_2(t)^2 - \gamma_2 p_1(t)p_2(t) \end{aligned} \quad . \tag{12.15}$$

Acima β_i e γ_i são positivos, mas α_i podem ser positivos ou negativos. Na primeira equação, o termo $+\alpha_1 p_1(t)$ descreve o crescimento (ou decrescimento) da população p_1 por consumir recursos de seu habitat (supostamente ilimitados), se reproduzir e morrer. O termo $-\beta_1 p_1(t)^2$ descreve, por exemplo, a taxa de propagação de doenças fatais entre elementos da população p_1, que é proporcional ao número de encontros de elementos da espécie p_1 com elementos da espécie p_1. Esse número é grosseiramente proporcional a p_1^2 (por quê?). O termo $-\gamma_1 p_1(t)p_2(t)$ descreve a competição entre as duas espécies cujas populações são p_1e p_2.

Também muito estudados[25] são os modelos do tipo Lotka-Volterra com n espécies, caracterizados pelo sistema de equações

$$\dot{p}_j(t) \;=\; \alpha_j p_j(t) + \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk}\, p_j(t)\, p_k(t) \;, \qquad j \;=\; 1,\; \ldots,\; n \;.$$

Mais generalidades sobre o modelo de Lotka-Volterra e sobre outras aplicações de equações diferenciais em modelos ecológicos e epidemiológicos podem ser encontradas, por exemplo, em [81] e [11]. Para outra referência sobre o modelo de Lotka-Volterra e assuntos correlatos, vide [260].

Comparados à realidade dos sistemas biológicos os modelos apresentados acima são bastante simplificados, deixando de lado vários efeitos possivelmente relevantes, tais como reprodução sexuada (machos só se reproduzem com fêmeas, não com outros machos, fêmeas idem), imunidade ou não a doenças por parte das populações, tempos de gestação, ausência de reprodução durante a gestação, tempos de latência de doenças, limitação dos recursos do habitat, surgimento aleatório de mutações e vários outros fatores. Há toda uma área de pesquisa voltada à modelagem realista de sistemas biológicos e eco-sistemas. Alguns modelos estudados chegam a ser extremamente complexos, envolvendo dezenas de equações e de incógnitas. Para referências atualizadas sobre modelagem de sistemas biológicos, vide , [81], [260] ou [295].

• **Sistemas de primeira ordem**

O sistema de equações diferenciais ordinárias mais básico é o de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
\dot{y_1}(t) \;&=\; F_1(t,\; y_1,\; \ldots,\; y_m) \;, \\
\dot{y_2}(t) \;&=\; F_2(t,\; y_1,\; \ldots,\; y_m) \;, \\
&\;\vdots \\
\dot{y_m}(t) \;&=\; F_m(t,\; y_1,\; \ldots,\; y_m) \;,
\end{aligned} \tag{12.16}$$

onde cada F_i é uma função de $m+1$ variáveis. É conveniente simplificarmos um pouco a expressão (12.16). Introduzindo os vetores de m componentes

$$Y \;=\; \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^m$$

e as funções $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$

$$F(t,\, Y) \;=\; \begin{pmatrix} F_1(t,\; y_1,\; \ldots,\; y_m) \\ \vdots \\ F_m(t,\; y_1,\; \ldots,\; y_m) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} F_1(t,\; Y) \\ \vdots \\ F_m(t,\; Y) \end{pmatrix}$$

a expressão (12.16) fica

$$\dot{Y}(t) \;=\; F\big(t,\, Y(t)\big) \;. \tag{12.17}$$

Como veremos logo adiante, todo sistema de equações diferenciais ordinárias pode ser escrito como um sistema de equações diferenciais ordinárias *de primeira ordem*, escrito quer na forma (12.16), quer na forma (12.17), para algum m e para alguma função $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$.

[25]Para um trabalho recente, vide P. Duarte R. L. Fernandez e W. M. Oliva "Dynamics on the attractor of the Lotka-Volterra equations". J. Diff. Equations **149**, 143–189 (1998) e referências lá citadas.

• **Sistemas lineares de primeira ordem**

Muito importantes são os sistemas de m equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem, os quais têm a forma

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= a_{11}(t)y_1(t) + \cdots + a_{1m}(t)y_m(t) + b_1(t) \ , \\
\dot{y}_2(t) &= a_{21}(t)y_1(t) + \cdots + a_{2m}(t)y_m(t) + b_2(t) \ , \\
&\vdots \\
\dot{y}_m(t) &= a_{m1}(t)y_1(t) + \cdots + a_{mm}(t)y_m(t) + b_m(t) \ ,
\end{aligned} \tag{12.18}$$

para certas funções a_{ij} e b_j de t.

No casos em que as funções b_j acima são identicamente nulas o sistema é dito ser *homogêneo*. Caso contrário, é dito ser *não-homogêneo*.

• **Representação matricial de sistemas lineares**

Como veremos, é muito conveniente escrever o sistema linear (12.18) acima em *notação matricial*. De fato, definindo,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix}, \qquad A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & \cdots & a_{mm}(t) \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_m(t) \end{pmatrix},$$

podemos escrever o sistema (12.18) como

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + B(t) \ ,$$

como facilmente se vê. Sistemas lineares de primeira ordem serão estudados em detalhe no Capítulo 14 onde, em particular, faremos uso abundante da notação matricial acima.

• **Equivalência entre equações de ordem n e sistemas de EDOs**

Provaremos agora um fato simples, mas de grande relevância, tanto teórica quanto em aplicações (analíticas ou numéricas), a saber, que toda equação diferencial ordinária de ordem n é equivalente a um sistema de n equações de primeira ordem.

Seja a equação diferencial ordinária de ordem n

$$y^{(n)}(t) = F\Big(t, \ y(t), \ \ldots, \ y^{(n-1)}(t)\Big) \ . \tag{12.19}$$

Definindo $y_k(t) := y^{(k-1)}(t)$, para todo $k = 1, \ldots, n$, teremos $y_1(t) = y(t)$ e

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= y_2(t) \ , \\
\dot{y}_2(t) &= y_3(t) \ , \\
&\vdots \\
\dot{y}_{n-1}(t) &= y_n(t) \ , \\
\dot{y}_n(t) &= F\big(t, \ y_1(t), \ \ldots, \ y_n(t)\big) \ .
\end{aligned} \tag{12.20}$$

E. 12.1 *Exercício*. Verifique! ✠

Este é um sistema como (12.16), onde, aqui,

$$
\begin{aligned}
F_1(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) &= y_2\ ,\\
F_2(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) &= y_3\ ,\\
&\vdots\\
F_{n-1}(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) &= y_n\ ,\\
F_n(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) &= F\big(t,\ y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t)\big)\ .
\end{aligned}
$$

Isso mostra que toda equação diferencial ordinária de ordem n, como (12.19), equivale a um sistema de n equações de primeira ordem, como (12.20).

E. 12.2 *Exercício importante*. Seja a equação diferencial ordinária linear de ordem n

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) \;=\; f(t)\ .$$

Determine o sistema linear de n equações de primeira ordem equivalente e mostre que o mesmo pode ser escrito na forma matricial

$$\dot{Y}(t) \;=\; A(t)Y(t) + B(t)\ ,$$

onde

$$Y(t) \;:=\; \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}\ , \qquad B(t) \;:=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

e $A(t)$ é a matriz $n \times n$

$$A(t) \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}\ .$$

Equação matriciais como acima serão estudadas com mais detalhe no Capítulo 14. ✠

E. 12.3 *Exercício.* Mostre que todo sistema de equações diferenciais ordinárias como (12.12) equivale a um sistema de equações de primeira ordem. *Sugestão:* use a mesma ideia acima, dando nomes às derivadas $y_i^{(n_j)}$ que aparecem no lado direito de (12.12). ✠

12.3 Discussão sobre Problemas de Valor Inicial

• Problemas de valor inicial

Como é bem sabido, a solução da equação diferencial $\dot{y}(t) = y(t)$ é dada por $y(t) = ce^t$, onde c é uma constante, a qual pode ser fixada, por exemplo, prescrevendo-se o valor da função y em $t = 0$: $y(0)$. Há outros exemplos simples em que a necessidade de fixação de certos valores para a função y pode ser vista de modo explícito. Considere-se a equação do oscilador harmônico simples $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. A solução geral dessa equação é $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$, onde A e B são duas constantes arbitrárias. Para determiná-las é preciso fornecer duas informações extras sobre a função, por exemplo, sua posição e sua velocidade em um instante de tempo. Se x_0 e v_0 forem a posição e velocidade no instante $t = 0$, então é fácil constatar que $A = x_0$ e $B = v_0/\omega_0$. Outro par de informações é também eventualmente possível. Por exemplo, podemos fornecer posição e velocidade em outro instante de tempo que não $t = 0$, ou em dois instantes de tempo distintos, um para a posição, outro para a velocidade. Em muitos casos é possível fixar a solução desejada informando apenas a posição em dois instantes de tempo distintos ou as velocidades em dois instantes de tempo distintos.

De modo geral, para a determinação completa da solução de uma equação diferencial ordinária de ordem n é preciso fornecer n informações sobre o valor da função e/ou suas derivadas em certos instantes[26].

O tipo de situação mais comum para a determinação completa da solução de uma equação diferencial ordinária de ordem n, especialmente em problemas da Mecânica, é aquele na qual são fornecidas informações sobre a função e suas $n-1$ primeiras derivadas em um único instante de tempo, digamos $t = 0$. Tais problemas são conhecidos como *problemas de valor inicial*, ou *problemas de Cauchy*[27]. O exemplo do oscilador harmônico acima é um típico problema de valor inicial: qual é a função que satisfaz a equação diferencial $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ e satisfaz $x(0) = x_0$ e $v(0) = v_0$, para certos números x_0 e v_0 dados? Resposta: $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + (v_0/\omega_0)\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$.

Assim, o problema de valor inicial associado à equação de ordem n

$$y^{(n)}(t) \;=\; F\big(t,\; y(t),\; \ldots,\; y^{(n-1)}(t)\big)\;.$$

consiste em determinar a solução dessa equação que satisfaça

$$y(0) \;=\; y_1, \quad \dot{y}(0) \;=\; y_2, \quad \ddot{y}(0) \;=\; y_3, \; \ldots, \; y^{(n-1)}(0) \;=\; y_n\;,$$

para certos números dados $y_1, \ldots, y_n$, os quais são denominados *condições iniciais* ou *dados iniciais.*

Após definirmos o que se entende por problema de valor inicial, uma série de questões se coloca. **1.** Todo problema de valor inicial tem solução? **2.** Se tiver, é única? **3.** Há condições suficientes para garantir que uma solução exista? **4.** E para que seja única? **5.** E se existir solução, será ela válida para todo t? **6.** Há condições suficientes para garantir que uma solução exista para todo t? **7.** Há condições suficientes para garantir continuidade da solução em relação às condições iniciais? **8.** Há condições suficientes para garantir continuidade da solução em relação aos parâmetros que ocorrem na equação?

Por várias razões as questões acima são muito importantes. Naturalmente, a melhor maneira de mostrar que um problema de valor inicial tem solução é exibindo a solução. Isso, porém, nem sempre é factível, pois muitas equações são difíceis, ou mesmo impossíveis, de se resolver de modo explícito. Por exemplo, a equação do pêndulo simples $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}(\theta) = 0$ tem solução para quaisquer condições iniciais, mas essa solução não pode ser apresentada de forma fechada em termos de funções elementares conhecidas, apenas em termos de expansões ou das chamadas funções elípticas. Vide, por exemplo, [322]. (Para um tratamento da equação do pêndulo em termos de equações integrais, vide Seção 26.2.3, página 1510, destas Notas). Daí a importância da questão **3**: é muitas vezes necessário saber *a priori* se uma solução existe antes de tentar encontrá-la.

[26] Uma exceção notável é a equação de Clairaut, discutida na Seção 13.8, página 757, que possui uma solução, dita solução singular, não dependente de nenhum parâmetro livre.

[27] Augustin Louis Cauchy (1789–1857).

Saber *a priori* se um problema de valor inicial tem solução e se essa solução é única pode ser importante para justificar métodos de solução. Muitas vezes, ao encontrarmos a solução de um problema de valor inicial perguntamo-nos se a solução encontrada é única. Por exemplo, pode-se facilmente constatar que as funções $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + (v_0/\omega_0) \operatorname{sen}(\omega_0 t)$ são soluções da equação do oscilador harmônico simples $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ com as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $v(0) = v_0$. O que, porém, garante que não há outras funções que também sejam solução dessa equação para essas condições iniciais? Nisso reside a importância da questão **4**: em se sabendo *a priori* que a solução é única (esse é o caso para a equação do oscilador harmônico simples) não é necessário procurar outras soluções.

Equações diferenciais de interesse em Física tipicamente dependem de certos parâmetros. Por exemplo, a equação do oscilador harmônico simples, acima, depende do parâmetro ω_0, a equação do pêndulo simples depende de g/l. Saber se uma solução depende continuamente de condições iniciais ou de parâmetros é importante em aplicações, por exemplo em Física, pois em problemas reais tais dados são frequentemente fornecidos com imprecisões e é, portanto, importante poder garantir que erros pequenos no conhecimento dessas grandezas têm efeitos igualmente pequenos nas soluções (ao menos para tempos não muito afastados do instante inicial).

Comecemos por dizer que a resposta às questões **1** e **2** é negativa. Veremos exemplos logo adiante. Uma resposta às questões **3** e **4** será apresentada na forma de dois teoremas importantes, o de Peano (Teorema 12.1, página 732), que fornece condições suficientes para garantir existência de soluções, e o de Picard-Lindelöf (Teorema 12.2, página 733. Vide também sua generalização para espaços de Banach, Teorema 26.4, página 1517), que fornece condições suficientes para garantir existência e unicidade de soluções. Mostraremos em exemplos que a resposta à questão **5** é também negativa. Uma resposta parcial à questão **6** (que é chamado de problema da existência de soluções globais) será discutida na Seção 12.3.3, página 734, e as demonstrações dos resultados lá apresentados encontram-se na Seção 26.2.4.3, página 1521. As questões **7** e **8** são discutidas à página 736 e, com mais detalhe, na Seção 26.2.4.4, página 1522. Vide Teorema 26.7, página 1523, sua demonstração e os comentários que se lhe seguem. Referências para várias dessas questões são [8], [171], [105], [61] e [244].

• **Problemas bem-postos**

Um comentário sobre nomenclatura. Na literatura sobre a teoria das equações diferenciais (ordinárias ou parciais), um problema no qual se possa garantir existência, unicidade e continuidade de soluções em relação a condições iniciais e de contorno em alguma topologia (estabilidade) é dito ser um *problema bem-posto*[28].

• **Outros problemas que não de valor inicial**

Como já mencionamos acima, há outros problemas que não o de valor inicial. Pode-se querer fixar a função em dois pontos, por exemplo. Problemas desse tipo são muito comuns em equações ordinárias obtidas pelo método de separação de variáveis em problemas de equações diferenciais parciais com certas condições de contorno. Trataremos abundantemente desse tipo de problema quando discutirmos o Problema de Sturm-Liouville no Capítulo 19, página 1067.

Outros problemas envolvem outros tipos de exigência sobre a solução. Por exemplo, que ela seja finita em certos pontos, ou de quadrado integrável. Esse último caso é comummente encontrado na Mecânica Quântica.

12.3.1 Problemas de Valor Inicial. Patologias e Exemplos a se Ter em Mente

Nesta seção listaremos alguns exemplos instrutivos de problemas de valor inicial que exibem comportamento patológico, como inexistência ou não-unicidade de solução ou inexistência de solução global, ou seja, inexistência de solução válida em toda a reta real. É instrutivo ter alguns desses exemplos em mente. Na Seção 12.3.2, página 732, e na Seção 12.3.3, página 734, apresentaremos condições suficientes para evitar essas patologias.

• **Inexistência de solução**

[28] A noção de prolema bem-posto foi introduzida por Jacques Salomon Hadamard (1865–1963) ao listar propriedades que modelos matemáticos de sistemas físicos devem idealmente possuir. Jaques Hadamard: "Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique". Princeton University Bulletin, 49–52 (1902).

Exemplo 12.6 (Inexistência de solução) Considere-se o problema de valor inicial no qual procura-se a solução da equação

$$\dot{y}(t) \ = \ \frac{1}{t}$$

que satisfaça a condição inicial $y(0) = 0$. Esse problema não possui nenhuma solução. ♦

E. 12.4 *Exercício*. Mostre isso. ✠

Exemplo 12.7 (Inexistência de solução) Considere-se o problema de valor inicial no qual procura-se a solução da equação

$$\dot{y}(t) \ = \ -\frac{1}{y(t)}$$

que satisfaça a condição inicial $y(0) = 0$. Esse problema não possui nenhuma solução que seja *real* para $t > 0$. ♦

E. 12.5 *Exercício*. Mostre isso. ✠

Exemplo 12.8 (Inexistência de solução) Considere-se o problema de valor inicial no qual procura-se a solução da equação

$$\dot{y}(t) \ = \ \sqrt{1 - y(t)^2}$$

que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$. Esse problema não possui nenhuma solução real. ♦

E. 12.6 *Exercício*. Mostre isso. ✠

Exemplo 12.9 (Inexistência de solução) (De [255]) Considere-se o problema de valor inicial no qual procura-se a solução da equação

$$\dot{y}(t) \ = \ H\big(y(t)\big) \ ,$$

onde

$$H(y) \ := \ \begin{cases} 1, & y < 0 \\ -1, & y \geq 0 \end{cases} \ ,$$

com a condição inicial $y(0) = 0$. Esse problema não possui nenhuma solução. Para entender por que, observe que se $y(0) = 0$ então, pela equação diferencial, $y'(0) = -1$, o que implica $y(t)$ é decrescente para t próximo de 0, tornando-se negativa para t positivo próximo de 0. Mas para y negativo $\dot{y}(t)$ vale 1 e y é crescente, uma contradição. ♦

E. 12.7 *Exercício*. Certo? ✠

• Não-unicidade de soluções

Exemplo 12.10 (Não-unicidade de soluções) Considere-se o problema de valor inicial no qual procura-se a solução da equação

$$\dot{y}(t) \ = \ 3\big(y(t)\big)^{2/3}$$

que satisfaça a condição inicial $y(0) = 0$. Esse problema não tem solução única. Por exemplo, as funções

$$y_1(t) \ \equiv \ 0 \qquad \text{e} \qquad y_2(t) \ = \ t^3$$

ambas satisfazem a equação diferencial e $y_1(0) = y_2(0) = 0$. ♦

E. 12.8 *Exercício*. Verifique! ✠

O Exemplo 12.10, acima, foi encontrado por Peano em 1890. Há várias outras soluções, como vemos na seguinte generalização.

Exemplo 12.11 (Não-unicidade de soluções) Seja $0 < \beta < 1$. Considere-se o problema de valor inicial no qual procura-se a solução da equação

$$\dot{y}(t) \;=\; \frac{1}{1-\beta}\big|y(t)\big|^{\beta}$$

que satisfaça a condição inicial $y(0) = 0$. Esse problema não tem solução única: a função $y(t) \;\equiv\; 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, assim como, para todos $c_1 \leq 0$, $c_2 \geq 0$, as funções

$$y_{c_1,\,c_2}(t) \;=\; \begin{cases} -(c_1 - t)^{\frac{1}{1-\beta}}, & t \leq c_1 \;, \\ 0, & c_1 < t < c_2 \;, \\ (t - c_2)^{\frac{1}{1-\beta}}, & t \geq c_2 \;, \end{cases} \tag{12.21}$$

$$y_{c_1}(t) \;=\; \begin{cases} -(c_1 - t)^{\frac{1}{1-\beta}}, & t \leq c_1 \;, \\ 0, & t > c_1 \;, \end{cases} \qquad y_{c_2}(t) \;=\; \begin{cases} 0, & t < c_2 \;, \\ (t - c_2)^{\frac{1}{1-\beta}}, & t \geq c_2 \;, \end{cases} \tag{12.22}$$

satisfazem a equação diferencial e anulam-se em $t = 0$. ♦

E. 12.9 *Exercício*. Verifique! Desenhe gráficos de várias funções $y_{c_1,\,c_2}(t)$, $y_{c_1}(t)$ e $y_{c_2}(t)$ para vários valores de $c_1 \leq 0$, $c_2 \geq 0$. ✠

• Inexistência de soluções globais

Exemplo 12.12 (Solução que só existe em um intervalo finito) A equação diferencial é aquela apresentada no Exemplo 12.9, acima, com condição inicial $y(0) = y_0 > 0$. Para $-\infty < t < y_0$ a solução é $y(t) = y_0 - t$ mas para $t \geq y_0$ surge a contradição discutida no Exemplo 12.9 e a equação diferencial não mais possui solução. ♦

Exemplo 12.13 (Solução que diverge em tempo finito) Considere-se o problema de valor inicial no qual procura-se a solução real da equação

$$\dot{y}(t) \;=\; y(t)^2 \;,$$

$t \in \mathbb{R}$, que satisfaça a condição inicial $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 > 0$. A solução é

$$y(t) \;=\; \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t} \;, \tag{12.23}$$

a qual diverge para $t = 1/y_0$. ♦

Exemplo 12.14 (Solução que diverge em tempo finito) Considere-se a equação diferencial

$$\dot{y}(t) \;=\; 1 + y(t)^2 \;,$$

$t \in \mathbb{R}$. Sua solução é $y(t) = \tan(t + k)$, onde k é fixada por uma condição inicial. Se, por exemplo, tomarmos $y(0) = y_0$, então $k = \arctan(y_0)$. Essa solução, porém, existe apenas no intervalo aberto $\left(-k - \frac{\pi}{2},\; -k + \frac{\pi}{2}\right)$, pois $\tan(t + k)$ diverge nos extremos. ♦

Exemplo 12.15 (Solução que diverge em tempo finito) Os exemplos acima podem ser generalizados de uma forma importante. Considere-se a equação diferencial

$$\dot{y}(t) \;=\; F\big(t,\; y(t)\big) \;,$$

para t e y reais, onde a função F satisfaz a desigualdade $F(a,\, b) \leq -b^2$ para todos $a,\, b \in \mathbb{R}$ (uma situação como essa ocorre na equação diferencial $\dot{y}(t) = -\big(y(t)\big)^2 - f\big(t,\; y(t)\big)$ caso f seja uma função não-negativa). Vale, portanto, a inequação diferencial $\dot{y}(t) \leq -\big(y(t)\big)^2$, e como $\big(y(t)\big)^2 \geq 0$ (pois y é uma função real), podemos escrever $\frac{\dot{y}(t)}{\left(y(t)\right)^2} \;\leq\; -1$, o que implica, como facilmente se vê, $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y(t)}\right) \geq 1$. Integrando-se ambos os lados entre 0 e t, obtemos

$$\frac{1}{y(t)} \;\geq\; t + \frac{1}{y(0)} \;. \tag{12.24}$$

Agora vejamos, se a condição inicial $y(0)$ for tal que $y(0) < 0$ então $1/y(t)$ começará negativa mas, de acordo com (12.24), passará a ser positiva o mais tardar no instante $t_0 = -\frac{1}{y(0)} > 0$. Consequentemente, devido à continuidade de $y(t)$, podemos afirmar que existe um instante $t_* \in (0,\ t_0]$ tal que $1/y(t_*) = 0$. Provamos, portanto, que sob as circunstâncias acima, a solução $y(t)$ existe apenas no intervalo $[0,\ t_*)$, divergindo em t_*.

Precisamente a situação acima descrita ocorre em um problema de suma importância na Teoria da Relatividade Geral, a saber, na demonstração de um célebre teorema, devido a Hawking[29], Penrose[30] e outros, da existência de singularidades espaço-temporais em modelos que satisfaçam uma condição denominada *condição forte de exergia*. A demonstração daquele teorema utiliza uma equação diferencial, denominada equação de Raychaudhuri[31], a qual tem a forma $\dot{y}(t)+\big(y(t)\big)^2+f\big(t,\ y(t)\big) = 0$ com f não-negativa. A divergência da solução y, em um tempo finito está naquele caso relacionada à impossibilidade de prolongar curvas geodésicas tipo-tempo além de um instante passado, fato diretamente interpretado como a presença do chamado "big bang" em certos modelos cosmológicos. ♦

Exemplo 12.16 (Solução que diverge em tempo finito) Considere-se uma partícula de massa m que se move em uma dimensão sob a ação de um potencial repulsivo $U(x) = -\frac{k}{4}x^4$, com $k > 0$, com condição inicial $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 > 0$. Sua equação de movimento (a segunda lei de Newton) é

$$\ddot{x}(t) - k'x(t)^3 \ = \ 0 \ ,$$

onde $k' = k/m$. Qual o tempo que essa partícula leva para, partindo de $x(0) = 0$, chegar ao infinito? A resposta é

$$T_{0\to\infty} \ = \ \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E+\frac{k}{4}x^4\right)}} \ ,$$

onde $E = \frac{mv_0^2}{2} > 0$ é a energia mecânica da partícula. ♦

E. 12.10 *Exercício*. Justifique a expressão dada acima para $T_{0\to\infty}$. ✠

Para $E > 0$ a integral acima é finita (justifique!). Logo, a partícula leva um tempo finito para chegar ao infinito, ou seja, $x(t)$ diverge em tempo finito. Isso mostra que a solução da equação diferencial $\ddot{x}(t) - k'x(t)^3 = 0$, com $k' > 0$ e $v_0 > 0$, existe apenas em um intervalo finito de valores de t.

E. 12.11 *Exercício*. Mostre que o mesmo se passa com as equações diferenciais $\ddot{x}(t) - k'x(t)^d = 0$, para todo $d > 1$, desde que $k' > 0$. O que acontece se $k' < 0$? O que acontece se $k' > 0$ mas $d \geq 1$? ✠

12.3.2 Teoremas de Existência e Unicidade de Soluções

Os vários exemplos dados acima não devem causar uma impressão negativa sobre problemas de valor inicial pois, em verdade, os mesmos refletem patologias nem sempre encontradas na "prática" (entenda-se, na Física). No caso da Mecânica, por exemplo, assim como em outras áreas da Física, pode-se garantir existência e unicidade de solução da "maioria" dos problemas de valor inicial. Os exemplos acima advertem-nos, porém, da necessidade de alguns teoremas gerais que forneçam pelo menos condições suficientes para garantir existência e/ou unicidade de problemas de valor inicial. Na teoria das equações diferenciais ordinárias os mais importantes desses teoremas são os de Peano[32] e de Picard[33]-Lindelöf[34], os quais enunciaremos agora.

Teorema 12.1 Teorema de Peano (Existência de Soluções). *Seja a equação diferencial ordinária real de primeira ordem*

$$\dot{y}(t) \ = \ F\big(t,\ y(t)\big) \tag{12.25}$$

($F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sendo não-identicamente nula) com a condição inicial

$$y(t_0) \ = \ y_0 \ , \tag{12.26}$$

[29]Stephen William Hawking (1942–2018).
[30]Sir Roger Penrose (1931–).
[31]Amal Kumar Raychaudhuri (1923–2005).
[32]Giuseppe Peano (1858–1932). O Teorema de Peano data de 1886.
[33]Charles Émile Picard (1856–1941).
[34]Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946). Seus trabalhos sobre existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias datam de 1890.

sendo $y_0 \in \mathbb{R}$. *Seja* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *contínua no retângulo fechado*

$$\mathcal{R} = \Big\{ (t,\ y) \ : \ |t - t_0| \ \leq \ a, \ \ |y - y_0| \ \leq b \ \Big\}, \tag{12.27}$$

com $a, \ b > 0$*, sendo, portanto, limitada em* $\mathcal{R}$*. Seja*

$$M \ := \ \max_{(t,\ y) \in \mathcal{R}} |F(t,\ y)| \ . \tag{12.28}$$

Então, o problema de valor inicial descrito pelas relações (12.25) e (12.26) apresenta pelo menos uma solução. Além disso, essa solução existe pelo menos no intervalo fechado $[t_0 - \beta, \ t_0 + \beta]$*, onde*

$$\beta \ := \ \min\left\{ a, \ \ \frac{b}{M} \right\} . \tag{12.29}$$

□

Em essência, o que esse teorema afirma é que se pode garantir a existência de soluções do problema de valor inicial descrito pelas relações (12.25) e (12.26) se pelo menos a função F for contínua em um retângulo centrado na condição inicial.

A prova do Teorema de Peano é baseada no importante Teorema de Ascoli discutido na Seção 33.3.4, página 1769 (vide Teoremas 33.18 e 33.19, páginas 1771 e 1772, respectivamente). A demonstração do Teorema de Peano é apresentada na Seção 33.3.4.3, página 1773, onde fazemos mais alguns comentários sobre o mesmo.

O estudante pode (deve) verificar que os Exemplos 12.6 a 12.8, página 729, não satisfazem as condições do Teorema de Peano, daí não haver solução naqueles casos.

O teorema de Peano garante condições suficientes para existência, mas não para unicidade de solução. O estudante também pode (deve) verificar que os Exemplos 12.10 e 12.11, página 730 acima, satisfazem as condições do teorema de Peano, mas para eles não vale a unicidade. É preciso requerer mais da função F para ter-se unicidade da solução. Isso é obtido com o próximo teorema.

Teorema 12.2 Teorema de Picard-Lindelöf (Existência e Unicidade de Soluções). *Seja a equação diferencial ordinária real de primeira ordem*

$$\dot{y}(t) \ = \ F\big(t, \ y(t)\big) \tag{12.30}$$

($F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *sendo não-identicamente nula) com a condição inicial*

$$y(t_0) \ = \ y_0 \ , \tag{12.31}$$

com $y_0 \in \mathbb{R}$*. Seja* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *contínua no retângulo fechado*

$$\mathcal{R} = \Big\{ (t,\ y) \ : \ |t - t_0| \ \leq \ a, \ \ |y - y_0| \ \leq b \ \Big\}, \tag{12.32}$$

com $a, \ b > 0$*, sendo, portanto, limitada em* $\mathcal{R}$*. Seja*

$$M \ := \ \max_{(t,\ y) \in \mathcal{R}} \big|F(t,\ y)\big| \ . \tag{12.33}$$

Suponha ainda que F *seja Lipschitz contínua em* $\mathcal{R}$ *com relação ao seu segundo argumento, ou seja, existe uma constante* k *(denominada constante de Lipschitz) tal que para todos* $(t, \ y)$*,* $(t, \ v) \in \mathcal{R}$ *valha*

$$\big|F(t,\ y) - F(t,\ v)\big| \ \leq \ k\, |y - v| \ . \tag{12.34}$$

Então, o problema de valor inicial descrito pelas relações (12.30) e (12.31) apresenta uma única solução. Além disso, essa solução existe pelo menos no intervalo fechado $[t_0 - \beta, \ t_0 + \beta]$*, onde*

$$\beta \ := \ \min\left\{ a, \ \ \frac{b}{M} \right\} . \tag{12.35}$$

Uma condição suficiente para que a condição de Lipschitz acima se cumpra é que $\partial_y f(t, \ y)$ *exista e seja limitada em todo* $\mathcal{R}$*, em cujo caso a constante de Lipschitz seria dada por* $k := \sup\limits_{(t,\,y) \in \mathcal{R}} \big|\partial_y f(t, \ y)\big|$. □

A prova do Teorema de Picard-Lindelöf será apresentada com bastante generalidade no Capítulo 26, página 1499. Vide Teorema 26.4, página 1517.

É importante notar que a condição de F ser Lipschitz[35] contínua em $\mathcal{R}$ com relação ao seu segundo argumento pode ser obtida de uma condição mais forte, a saber, que a derivada parcial $\partial_y F(t,\ y)$ de F em relação ao segundo argumento seja contínua em $\mathcal{R}$. De fato, da relação

$$F(t,\ v) - F(t,\ u) \ = \ \int_u^v \partial_y F(t,\ y)\, dy\ ,$$

segue facilmente que $\big|F(t,\ v) - F(t,\ u)\big| \leq k|v-u|$, onde $k := \max\limits_{(t,\, y)\in\mathcal{R}} |\partial_y F(t,\ y)|$, que é uma constante finita se $\partial_y F(t,\ y)$ for contínua em $\mathcal{R}$. Assim, em essência, o que o Teorema de Picard-Lindelöf afirma é que se pode garantir a existência e a unicidade de soluções do problema de valor inicial descrito pelas relações (12.30) e (12.31) se pelo menos a função F e sua derivada parcial $\partial_y F(t,\ y)$ forem contínuas em um retângulo centrado na condição inicial.

Como comentário final, afirmamos que os teoremas de Peano e Picard-Lindelöf podem ser facilmente estendidos para sistemas de equações diferenciais de primeira ordem (em verdade, o Teorema 26.4, página 1517, já é enunciado com essa generalidade, o mesmo se dando com o Teorema de Peano, Teorema 33.21, página 1775). Como toda equação diferencial de ordem n é equivalente a um tal sistema, essas generalizações garantem condições suficientes para existência ou unicidade de solução de equações diferenciais ordinárias de qualquer ordem.

No caso de equações diferenciais parciais não existem teoremas tão fortes relativos à existência e unicidade de problemas de valor inicial como há no caso de equações diferenciais ordinárias. Um dos resultados mais importantes nessa direção, porém, é o Teorema de Cauchy-Kovalevskaya[36]. Seu enunciado e sua demonstração podem ser encontrados, por exemplo, em [114, 115].

12.3.3 Soluções Globais

Vimos nos Exemplos 12.12 a 12.16 (página 731) que há equações diferencias cujas soluções, ainda que existam e sejam eventualmente únicas, não são globais, ou seja, não podem ser definidas em toda reta real. A questão que naturalmente se coloca é a de encontrar condições suficientes para garantir a existência de soluções globais. Essa é uma vasta questão e nos limitaremos aqui a apresentar o resultado mais simples, o Teorema 12.3, abaixo. Igualmente importante é a questão de se demonstrar que uma determinada equação diferencial não possui soluções globais (se tal puder ser o caso). Um dos principais resultados da Teoria da Relatividade Geral e da Cosmologia, a existência do chamado "big bang" em uma classe bastante grande de modelos para o universo, foi tratado como um problema de não-existência de soluções globais de determinadas equações diferenciais. Vide [230].

O seguinte teorema, cuja demonstração é apresentada com mais generalidade na Seção 26.2.4.3, página 1521, apresenta condições suficientes para a existência de soluções globais.

Teorema 12.3 (Existência e unicidade de soluções globais) *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua em todo $\mathbb{R}^2$. Suponhamos também que para todo $a > 0$, a função F seja Lipschitz contínua em relação ao seu segundo argumento na faixa*

$$\mathcal{F}_{a,\, t_0} \ = \ \Big\{ (t,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ |t - t_0| \leq a\ ,\ \ y \in \mathbb{R}\ \textit{arbitrário} \Big\}\ ,$$

ou seja, para cada $a > 0$ existe uma constante k_a (eventualmente dependente de a e denominada constante de Lipschitz*) tal que para todos $(t,\ y)$, $(t,\ v) \in \mathcal{F}_{a,\, t_0}$ vale $\big|F(t,\ y) - F(t,\ v)\big| \leq k_a\, |y - v|$. Então, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$, o problema de valor inicial $\dot{x}(t) = F(t,\ x(t))$ com $x(t_0) = x_0$ apresenta uma solução única válida para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Uma condição suficiente para que a condição de Lipschitz acima se cumpra é que $\partial_y F(t,\ y)$ exista em todo $\mathbb{R}^2$ e seja limitada em cada faixa $\mathcal{F}_{a,\, t_0}$, em cujo caso as constantes de Lipschitz podem ser escolhidas como $k_a := \sup\limits_{(t,\, y)\in\mathcal{F}_{a,\, t_0}} |\partial_y F(t,\ y)|$.

□

[35] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903).
[36] Sofia Vasilyevna Kovalevskaya (1850–1891).

E. 12.12 *Exercício.* Mostre que a equação diferencial não-linear $\dot{x} = \cos(x)$ satisfaz as condições do Teorema 12.3 e, portanto, possui soluções globais. Mostre explicitamente, por integração, que as soluções são dadas por $x(t) = \arctan(\operatorname{senh}(t + c))$, onde c é uma constante a ser fixada pela condição inicial. Por meio dessa expressão explícita constata-se claramente que as soluções existem para todo $t \in \mathbb{R}$. ✣

E. 12.13 *Exercício(de [104]).* Mostre que a equação diferencial não-linear

$$\dot{x} = \frac{x^3 e^t}{1 + x^2} + t^2 \cos(x)$$

satisfaz as condições do Teorema 12.3. Sugestão: mostre que para esse caso

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t,\ y) = \frac{(y^4 + 3y^2)}{(1 + y^2)} e^t - t^2 \operatorname{sen}(y) \text{ e, portanto, em cada faixa } \mathcal{F}_{a,\, t_0},\ \left|\frac{\partial F}{\partial y}(t,\ y)\right| \leq 3e^a + a^2 ,$$

e podemos adotar $k_a = 3e^a + a^2$ para cada $a > 0$. ✣

E. 12.14 *Exercício.* A equação diferencial não-linear $\dot{x} = x^2$ não satisfaz as condições do Teorema 12.3, pois a condição de Lipschitz requerida não é satisfeita em nenhuma faixa $\mathcal{F}_{a,\, t_0}$. Mostre isso. Com efeito, vimos no Exemplo 12.13, da página 731, que essa equação não possui soluções globais. Vide também os comentários da página 735 sobre esse problema. ✣

E. 12.15 *Exercício.* Faça o mesmo para o Exemplo 12.14, página 731. ✣

• Comentários sobre soluções globais. O Exemplo 12.10

Analisemos agora o Exemplo 12.10, página 730 sob a luz dos Teoremas de Peano e de Picard-Lindelöf. Aqui, $F(t,\ y) = 3y^{2/3}$, $t_0 = 0$, $y_0 = 0$. Tomando-se um retângulo fechado centrado em $(t_0,\ y_0) = (0,\ 0)$, ou seja, $\mathcal{R} = \{(t,\ y) :\ |t| \leq a,\ |y| \leq b\}$, constata-se elementarmente que F é contínua e que

$$M := \max_{(t,\, y)\in\mathcal{R}} \big|F(t,\ y)\big| = \max_{y\in[-b,\, b]} 3y^{2/3} = 3b^{2/3} .$$

Assim, o Teorema de Peano garante a existência de solução para o intervalo fechado $[-\beta,\ \beta]$, onde $\beta := \min\left\{a,\ \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{a,\ \frac{b^{1/3}}{3}\right\}$ (vide (12.29)). Os valores de a e de b podem ser escolhidos arbitrariamente grandes, sem violar a condição de continuidade de F. Conclui-se disso que podemos tomar β arbitrariamente grande. Assim, nesse particular exemplo, o Teorema de Peano garante-nos a existência de uma solução global, para todo t. Isso condiz com a observação que a solução identicamente nula, bem como as soluções (12.21) e (12.22) existem para todo t.

Por fim, é fácil verificar que a função $F(t,\ y) = 3y^{2/3}$ não satisfaz a condição de Lipschitz $|F(t,\ y) - F(t,\ v)| \leq k|y - v|$ para nenhum k em nenhum retângulo centrado em $(0,\ 0)$. Para isso observe que se tomássemos $v = 0$ e $y \geq 0$, a condição de Lipschitz diria que $3y^{2/3} \leq ky$, ou seja, $3y^{-1/3} \leq k$. Mas uma tal desigualdade é impossível, pois para $y \to 0$ o lado esquerdo diverge!

Isso justifica por que não se pode aplicar Picard-Lindelöf nesse caso (e a solução, de fato, não é única).

• Comentários sobre soluções globais. O Exemplo 12.13

O fato de o Teorema de Peano em princípio garantir apenas uma região conservadora de validade de solução, a saber o intervalo $[t_0 - \beta,\ t_0 + \beta]$, onde β é dado pela expressão (12.29), não está em desacordo com os exemplos: há sistemas satisfazendo as condições do Teorema de Peano para os quais não há soluções globais, ou seja, soluções que existem para todo $t \in \mathbb{R}$. O Exemplo 12.13, página 731, é um tal caso. Vamos reanalisá-lo sob a luz dos Teoremas de Peano e Picard-Lindelöf, estudando particularmente o que o Teorema de Peano nos diz sobre a região de existência de solução.

É bastante claro que no Exemplo 12.13 tem-se $F(t,\ y) = y^2$, e $t_0 = 0$ com $y_0 > 0$. Tomando-se um retângulo fechado centrado em $(t_0,\ y_0) = (0,\ y_0)$, ou seja, $\mathcal{R} = \{(t,\ y) :\ |t| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$, constata-se elementarmente que F é contínua e que

$$M := \max_{(t,\, y)\in\mathcal{R}} \big|F(t,\ y)\big| = \max_{y\in[y_0 - b,\, y_0 + b]} y^2 = (y_0 + b)^2 .$$

O Teorema de Peano garante a existência de solução para o intervalo fechado $[-\beta,\ \beta]$, onde $\beta := \min\left\{a,\ \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{a,\ \frac{b}{(y_0+b)^2}\right\}$. O valor de a pode ser escolhido arbitrariamente grande, sem alterar o valor de M e sem violar a condição de continuidade de F. Conclui-se disso que podemos tomar $\beta = \frac{b}{(y_0+b)^2}$. Para qual escolha de b a constante β assume seu maior valor? É um exercício fácil (faça-o!) mostrar que o lado direito da última expressão assume seu máximo em $b = y_0$, em cujo caso $\beta = \frac{1}{4y_0}$. Assim, o Teorema de Peano garante existência de solução no intervalo $[-\frac{1}{4y_0},\ \frac{1}{4y_0}]$. Sabemos, porém que a solução (12.23) existe em um intervalo maior (e que contenha $t = t_0 = 0$), a saber $(-\infty,\ \frac{1}{y_0})$.

O que se aprende disso é que o intervalo de solução obtido pela estimativa (12.29) nem sempre é maximal, mas nem por isso contradiz-se o fato de nesse caso não haver solução válida para todo t.

Para sabermos se a solução é única, devemos estudar as condições do Teorema de Picard-Lindelöf. Sabemos que $F(t,\ y) - F(t,\ v) = y^2 - v^2 = (y+v)(y-v)$. Logo, $\big|F(t,\ y) - F(t,\ v)\big| = |y+v|\,|y-v|$ e, para y e v no intervalo $[y_0 - b,\ y_0 + b]$, tem-se $|y+v| \leq 2(y_0+b)$. Assim, adotando-se $k = 2(y_0+b)$, vale a condição de Lipschitz

$$\big|F(t,\ y) - F(t,\ v)\big| \ \leq\ k|y-v|$$

para todos $(t,\ y),\ (t,\ v) \in \mathcal{R}$. Assim, a solução do problema do Exemplo 12.13 será única para quaisquer a e b que se tome.

12.3.4 Dependência Contínua de Condições Iniciais e de Parâmetros

Conforme mencionamos na página 728, é importante determinarmos condições sob as quais a solução de um problema de valor inicial é contínua em relação às condições iniciais e a parâmetros que ocorram na equação diferencial. Essas questões são respondidas com bastante generalidade e detalhe na Seção 26.2.4.4, página 1522. Vide Teorema 26.7, página 1523, sua demonstração e comentários que se lhe seguem. Os resultados encontram-se resumidos nos dois teoremas abaixo, os quais valem também para sistemas de equações diferenciais ordinárias.

Teorema 12.4 *Seja a equação diferencial ordinária real de primeira ordem $\dot{y}(t) = F(t,\ y(t))$ com a condição inicial $y(t_0) = y_0$, com $y_0 \in \mathbb{R}$, e suponhamos que sejam satisfeitas as condições descritas no Teorema 12.2, página 733, de modo que se garanta a existência de uma solução única $y(t,\ y_0)$ do problema de valor inicial em um intervalo $[t_0 - \beta,\ t_0 + \beta]$. Então, existe uma vizinhança J de $y_0 \in \mathbb{R}$ onde a solução $y(t,\ y_0)$ depende continuamente de y_0. Mais precisamente, existe uma constante $\kappa > 0$ e uma vizinhança T de t_0 contida em $[t_0 - \beta,\ t_0 + \beta]$ tal que vale $|y(t,\ y_0) - y(t,\ y_0')| \leq \kappa|y_0 - y_0'|e^{\kappa|t-t_0|}$ para todo $y_0' \in J$ e todo $t \in T$.* □

Teorema 12.5 *Seja a equação diferencial ordinária real de primeira ordem e dependente de um parâmetro p: $\dot{y}(t) = F(t,\ y(t),\ p)$ com a condição inicial $y(t_0) = y_0$, com $y_0 \in \mathbb{R}$, e suponhamos que sejam satisfeitas as condições descritas no Teorema 12.2, página 733, de modo que se garanta a existência de uma solução única $y(t,\ p)$ do problema de valor inicial em um intervalo $[t_0 - \beta,\ t_0 + \beta]$. Suponhamos também que F seja contínua e continuamente diferenciável em relação a p em alguma vizinhança. Então, $y(t,\ p)$ depende continuamente de p nessa vizinhança.* □

12.4 Linearização de EDO's e Estabilidade

Em conexão com os resultados anteriores discutiremos aqui um tema muito importante na teoria das equações diferenciais ordinárias: a análise da estabilidade de soluções a partir da linearização das equações. Por simplicidade, trataremos o caso de equações em $\mathbb{R}^n$, mas alguns de nossos resultados se deixam generalizar.

• **Algumas noções relevantes sobre estabilidade**

Comecemos com algumas definições relevantes. Abaixo, $\|\cdot\|$ denota a norma Euclidiana em $\mathbb{R}^n$. Seja uma equação diferencial ordinária

$$\dot{x}(t) \ = \ f\big(t,\ x(t)\big)\ , \tag{12.36}$$

com $x(t)$ sujeita à condição inicial $x(0) = x_0$ e onde $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e f satisfaz condições de continuidade em suas variáveis.

1. Dizemos que um ponto $x_* \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto de equilíbrio* de (12.36) se a função constante $x(t) = x_*$, $\forall t \geq 0$, for uma solução da mesma, ou seja, se $f\big(t,\ x_*\big) = 0$ para todo $t \geq 0$.

2. Um ponto de equilíbrio x_* de (12.36) é dito ser *Lyapunov estável*, ou *estável segundo Lyapunov*, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta \equiv \delta(\epsilon)$ tal que $\big\|x(t) - x_*\big\| \leq \epsilon$ para todo $t \geq 0$ sempre que $\big\|x_0 - x_*\big\| \leq \delta$. Aqui, $x(t)$ é uma solução de (12.36).

3. Um ponto de equilíbrio x_* de (12.36) é dito ser *assintoticamente estável* se existir $\delta > 0$ tal que se $\|x_0 - x_*\| \leq \delta$ então $\lim_{t\to\infty} \|x(t) - x_*\| = 0$.

4. Um ponto de equilíbrio assintoticamente estável x_* de (12.36) é dito ser *exponencialmente estável* se existirem $\delta > 0$, $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$ tais que tal que se $\|x_0 - x_*\| \leq \delta$ então $\|x(t) - x_*\| \leq \alpha\|x_0 - x_*\|e^{-\lambda t}$ para todo $t \geq 0$.

Em palavras mais simples, um ponto de equilíbrio x_* é estável segundo Lyapunov se uma solução que inicie suficientemente próxima a x_* em $t = 0$ continuar próxima desse ponto em tempos futuros. Um ponto de equilíbrio x_* é assintoticamente estável se uma solução que inicie suficientemente próxima a x_* aproxime-se arbitráriamente de x_* quando t cresce e é dito exponencialmente estável se essa aproximação for exponencialmente rápida.

A literatura matemática e física possui uma grande variedade de resultados sobre estabilidade de soluções de equações diferenciais ordinárias (vide, por exemplo, [255] e [559]) e o assunto se insere na área maior da Teoria dos Sistemas Dinâmicos. Importantes são resultados a respeito de estabilidade de equações diferenciais não lineares, estudo iniciado pelo próprio Lyapunov. Especialmente importantes também são resultados a respeito de equações lineares ou não lineares, mas que se deixem aproximar bem por equações lineares, as chamadas equações linearizáveis. O Teorema de Poincaré-Lyapunov, Teorema 12.6, página 737, trata exatamente de tais equações e possui muitos usos em Física.

• O Teorema de Poincaré-Lyapunov

O teorema a seguir é de central importância na discussão de problemas de estabilidade em equações diferenciais ordinárias e é atribuido a Poincaré[37] e Lyapunov[38]. Ele estabelece condições suficientes para que um ponto de equilíbrio de uma equação linearizável seja exponencialmente estável. O enunciado e a demonstração que apresentamos são baseados nas de [559], com correções e melhorias.

Teorema 12.6 (Teorema de Poincaré-Lyapunov) *Seja em $\mathbb{R}^n$ a norma euclidiana usual e denotemos também por $\|\cdot\|$ a correspondente norma operatorial em $\mathrm{Mat}(\mathbb{R},\ n)$. Considere-se a o problema de valor inicial*

$$\dot{x}(t) \ = \ Ax(t) + B(t)x(t) + g\big(t,\ x(t)\big) \ , \qquad x(t_0) \ = \ x_0 \in \mathbb{R}^n \ , \tag{12.37}$$

para $t_0 \in \mathbb{R}$, onde $x \in \mathbb{R}^n$, sob as seguintes hipóteses:

1. *$A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R},\ n)$ é uma matriz constante cujos autovalores todos possuam parte real negativa*[39].

2. *$B(t) \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R},\ n)$ é uma família de matrizes contínuas em $t \in \mathbb{R}$ com a propriedade adicional $\lim_{t\to\infty} \|B(t)\| = 0$.*

3. *A função $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é contínua em todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e também Lipschitz-contínua em relação à segunda variável, ou seja, existe uma constante k tal que para todos $(t,\ y)$, $(t,\ v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$: vale $\big\|g(t,\ y) - g(t,\ v)\big\| \leq k\,\|y - v\|$.*

4. *Além disso, supomos que*

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\big\|g(t,\ x)\big\|}{\|x\|} \ = \ 0 \qquad \text{uniformemente em } t \in \mathbb{R}. \tag{12.38}$$

Então, existem constantes $\delta_0 > 0$, $\beta > 0$, suficientemente pequenas, e $t_0 \equiv t_0(\beta)$ e $\mu' > 0$ tais que, se $\|x_0\| \leq \delta_0/2$ vale

$$\|x(t)\| \ \leq \ \frac{\delta_0}{2} \exp\Big(- \mu'(t - t_0)\Big) \ , \tag{12.39}$$

para todo $t \geq t_0$. □

---

[37] Jules Henri Poincaré (1854–1912).
[38] Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857–1918).
[39] Uma matriz com essa propriedade é denominada *matriz de estabilidade* (em textos de Engenharia) ou *matriz de Hurwitz*. Adolf Hurwitz (1859–1919).

Comentários. A condição 4 indica que g não é de primeira ordem em x e que os termos de primera ordem da equação diferencial em (12.37) são $\big(A+B(t)\big)x$.

Pela hipótese 4, $g(t,\ 0)=0$ para todo t e, portanto, $x_*\equiv 0$ é um ponto de equilíbrio da equação diferencial $\dot{x}(t)=Ax(t)+B(t)x(t)+g\big(t,\ x(t)\big)$. ♣

Prova do Teorema 12.6. Iniciemos com alguns comentários e definições pertinentes.

- Definindo $f(t,\ x):=\big(A+B(t)\big)x+g(t,\ x)$ a equação diferencial em (12.37) é $\dot{x}(t)=f\big(t,\ x(t)\big)$. Agora, $\big\|f(t,\ x)-f(t,\ x)\big\|\ \leq\ \Big(\|A\|+\big\|B(t)\big\|\Big)\|x-y\|+\big\|g(t,\ x)-g(t,\ y)\big\|$. Pelas hipóteses, $B_0:=\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\big\|B(t)\big\|<\infty$, e $\big\|g(t,\ x)-g(t,\ y)\big\|\leq k\|x-y\|$ para todo t e todo $x,\ y\in\mathbb{R}^n$ e, portanto,
$$\big\|f(t,\ x)-f(t,\ x)\big\|\ \leq\ \Big(\|A\|+B_0+k\Big)\|x-y\|\ .$$
Assim, $f(t,\ x)$ é também Lipschitz-contínua para todo t e, assim, pelo Teorema 12.3, página 734 (ou equivalentemente, pelo Teorema 26.6, página 1522) o problema de valor inicial (12.37) tem solução global para todo t_0 e todo x_0.
- Pela hipótese de que os autovalores de A tenham todos parte real negativa, podemos afirmar (vide Proposição 10.32, página 617) que existem constantes $C>0$ e $\mu>0$ tais que $\big\|e^{\tau A}\big\|\leq Ce^{-\mu\tau}$ para todo $\tau>0$.
- Pela hipótese 2 sobre as matrizes $B(t)$, existe para qualquer $\beta>0$ um $t_0\equiv t_0(\beta)$ grande o suficiente tal que $\|B(t)\|\leq\beta$ para <u>todo</u> $t\geq t_0$. Fixemos β adequadamente pequeno e tomemos $t_0=t_0(\beta)$, como acima.
- Pela hipótese 4, $g(0,\ t)=0$ para todo t e, portanto, $x(t)\equiv 0$ é solução de equação diferencial $\dot{x}(t)=Ax(t)+B(t)x(t)+g\big(t,\ x(t)\big)$. Pelo fato de $g(t,\ x)$ anular-se em $x=0$ e ser Lipschitz contínua, temos que existem $\delta_0>0$ e $\gamma(\delta_0)\geq 0$ tal que $\big\|g(s,\ x)\big\|\leq\gamma(\delta_0)\|x\|$ sempre que $\|x\|\leq\delta_0$. Pela hipótese 4, $\gamma(\delta_0)$ pode ser escolhida independente de t e de sorte a ser tão pequena quanto se deseje fazendo δ_0 pequeno.
- Tomemos $\delta_0>0$, a ser adequadamente escolhido, e definamos $\delta:=\min\{\delta_0/2,\ \delta_0/(2C)\}$. Consideremos que a condição inicial $x(t_0)\equiv x_0$ satisfaz $\|x_0\|\leq\delta$. Naturalmente, isso implica $\|x_0\|\leq\delta_0/2$.
- Como $x(t)$ é contínua, certamente existe um intervalo $[t_0,\ t_0+T]$ com $T>0$ tal que $\big\|x(t)\big\|\leq\delta_0$ para todo $t\in[t_0,\ t_0+T]$.

Com esses comentários e definições preliminares, passemos à demonstração propriamente dita. Tomemos $t\in[t_0,\ t_0+T]$. Multiplicando-se (12.37) por $e^{-(t-t_0)A}$, obtemos
$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-(t-t_0)A}x(t)\Big)\ =\ e^{-(t-t_0)A}\Big(B(t)x(t)+g\big(t,\ x(t)\big)\Big)$$
e integrando-se essa expressão no intervalo $(t_0,\ t)$, com $t\in[t_0,\ t_0+T]$, obtemos
$$e^{-(t-t_0)A}x(t)-x(t_0)\ =\ \int_{t_0}^{t}e^{-(s-t_0)A}\Big(B(s)x(s)+g\big(s,\ x(s)\big)\Big)ds$$
ou seja, como $x(t_0)=x_0$,
$$x(t)\ =\ e^{(t-t_0)A}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{(t-s)A}\Big(B(s)x(s)+g\big(s,\ x(s)\big)\Big)ds\ . \tag{12.40}$$
Com isso, temos a estimativa em norma
$$\|x(t)\|\ \leq\ \big\|e^{(t-t_0)A}\big\|\|x_0\|+\int_{t_0}^{t}\big\|e^{(t-s)A}\big\|\Big(\big\|B(s)\big\|\|x(s)\|+\big\|g\big(s,\ x(s)\big)\big\|\Big)ds\ ,\qquad\forall t\geq t_0\ . \tag{12.41}$$

Como já comentamos, pelas hipóteses existem constantes $C>0$ e $\mu>0$ tais que $\big\|e^{\tau A}\big\|\leq Ce^{-\mu\tau}$ para todo $\tau>0$. Com isso, obtemos de (12.41),
$$\begin{aligned}\|x(t)\|\ &\leq\ Ce^{-\mu(t-t_0)}\|x_0\|+\int_{t_0}^{t}Ce^{-\mu(t-s)}\Big(\big\|B(s)\big\|\|x(s)\|+\big\|g\big(s,\ x(s)\big)\big\|\Big)ds\\ &\leq\ Ce^{-\mu(t-t_0)}\|x_0\|+\int_{t_0}^{t}Ce^{-\mu(t-s)}\Big(\beta\|x(s)\|+\big\|g\big(s,\ x(s)\big)\big\|\Big)ds\ ,\qquad\forall t\geq t_0\ .\end{aligned} \tag{12.42}$$

Como $s \in [t_0, \ t_0 + T]$, temos $\|x(s)\| \leq \delta_0$. Com isso, a desigualdade (12.42) fica

$$\|x(t)\| \ \leq \ Ce^{-\mu(t-t_0)}\|x_0\| + C\big(\beta + \gamma(\delta_0)\big)\int_{t_0}^{t} e^{-\mu(t-s)}\|x(s)\|ds$$

válida para todo $t \in [t_0, \ t_0 + T]$. Deste modo, temos

$$e^{\mu(t-t_0)}\|x(t)\| \ \leq \ C\|x_0\| + C\big(\beta + \gamma(\delta_0)\big)\int_{t_0}^{t} e^{\mu(s-t_0)}\|x(s)\| \, ds \ .$$

Assim, pelo Lema de Grönwall, Lema 26.3, página 1531, aplicado à função $u(t) := e^{\mu(t-t_0)}\|x(t)\|$, tem-se

$$e^{\mu(t-t_0)}\|x(t)\| \ \leq \ C\|x_0\| \exp\Big(C\big(\beta + \gamma(\delta_0)\big)(t - t_0)\Big) \ ,$$

ou seja,

$$\|x(t)\| \ \leq \ C\|x_0\| \exp\Big(\big[C\big(\beta + \gamma(\delta_0)\big) - \mu\big](t - t_0)\Big) \ , \qquad t \in [t_0, \ t_0 + T] \ .$$

Como dissemos, a constante β pode ser escolhida tão pequena quanto se queira (eventualmente implicando em um valor maior para t_0). Como também já comentamos, a constante $\gamma(\delta_0)$ também pode ser escolhida tão pequena quanto se deseje se tomarmos δ_0 pequeno. Sob essas hipóteses, definindo $\mu' := \mu - C\big(\beta + \gamma(\delta_0)\big)$ teremos $\mu' > 0$. Assim, como $C\|x_0\| \leq C\delta \leq \delta_0/2$, temos

$$\|x(t)\| \ \leq \ \frac{\delta_0}{2} \exp\Big(- \mu'(t - t_0)\Big) \ , \qquad t \in [t_0, \ t_0 + T] \ .$$

Essa relação mostra que podemos escolher T arbitráriamente grande e demonstra a relação (12.39) para todo $t \geq t_0$. ■

• Alguns exemplos ilustrativos

Para ilustrar o uso do Teorema 12.6 vamos discutir alguns exemplos associados ao movimento unidimensional de um ponto material de massa $m = 1$ sob potenciais conservativos e sob a ação também de uma força dissipativa de atrito viscoso. Vide Figura 12.2, página 740.

Exemplo 12.17 Caso do potencial harmônico $V(x) = \frac{\omega_0^2}{2}x^2$, com $\omega_0 > 0$. Na equação do oscilador harmônico amortecido $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, com $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix}$, sendo $\omega_0 > 0$ e $\gamma > 0$, os autovalores de A são $\lambda_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$ e ambos têm parte real negativa. Verifique! Assim, pelo Teorema 12.6, o ponto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável para quaquer condição inicial, fato bem conhecido. ♦

Exemplo 12.18 No caso do oscilador anarmônico amortecido o pótencial é $V(x) = \frac{\omega_0^2}{2}x^2 + \frac{\kappa}{4}x^4$, com $\omega_0 > 0$ e $\kappa > 0$. A equação de movimento é $\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x - \kappa x^3$, ou seja, $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + g\big(t, \ x(t)\big)$, com $g(t, \ x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\kappa x^3 \end{pmatrix}$, e A como em Exemplo 12.17. Como g é cúbica em x, aplicam-se as condições do Teorema 12.6 e temos que se a condição inicial $\begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix}$ for suficientemente próxima do ponto de equilíbrio $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a solução se aproximará exponencialmente dele quando $t \to \infty$. Isso ocorre mesmo se $\kappa < 0$, ou seja, quando o potencial $V(x) = \frac{\omega_0^2}{2}x^2 + \frac{\kappa}{4}x^4$ é repulsivo para x grande o suficiente.

Esclarecendo melhor, se $\kappa > 0$ (potencial atrativo; Figura 12.2, esquerda) o ponto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um ponto de equilíbrio exponencial para qualquer condição inicial $\begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix}$. Se $\kappa < 0$ (Figura 12.2, centro), porém, é necessário que a condição inicial $\begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix}$ esteja suficientemente próxima ao ponto de equilíbrio $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para que a solução se aproxime exponencialmente do mesmo. De outra forma, se $\big|x(0)\big| > \sqrt{\frac{\omega_0^2}{-\kappa}}$ o caráter repulsivo do potencial torna-se dominante com a evolução do sistema e $x(t)$ divergirá para $t \to \infty$. ♦

Exemplo 12.19 Uma outra situação similar que também pode ser descrita sob a luz do Teorema 12.6 é o potencial de poço duplo $V(x) = -\frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\kappa}{4}x^4$, com $\alpha > 0$ e $\kappa > 0$ (Figura 12.2, direita). O movimento na presença de amortecimento é regido pela equação $\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + \alpha x - \kappa x^3$. Os pontos de equilíbrio são $x_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $x_* = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\kappa}} \\ 0 \end{pmatrix}$. Consideremos primeiramente $x_* = \begin{pmatrix} +\sqrt{\frac{\alpha}{\kappa}} \\ 0 \end{pmatrix}$ (o tratamento do ponto $x_* = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\alpha}{\kappa}} \\ 0 \end{pmatrix}$ é análogo). Façamos a mudança de variáveis $y := x - \sqrt{\frac{\alpha}{\kappa}}$ e escrevamos a equação diferencial do oscilador anarmônico amortecido como $\ddot{y} = -\gamma\dot{y} + \alpha\left(y + \sqrt{\frac{\alpha}{\kappa}}\right) - \kappa\left(y + \sqrt{\frac{\alpha}{\kappa}}\right)^3$, ou

$$\ddot{y} \ = \ -\gamma\dot{y} - 2\alpha y + W(y) \ , \qquad \text{com} \qquad W(y) \ = \ -\kappa y^3 - 3\sqrt{\kappa\alpha}y^2 \ .$$

Verifique! Isso equivale ao sistema (com $v(t) \equiv \dot{y}(t)$)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + g\big(t, \, y(t)\big) , \qquad \text{com} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\alpha & -\gamma \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad g(t, \, y) := \begin{pmatrix} 0 \\ W(y) \end{pmatrix} .$$

É fácil ver que os autovalores de A são $\lambda_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - 2\alpha}$ e que ambos têm parte real negativa. Fora isso, é de se notar que g é quadrático em y e, portanto, satisfaz as hipóteses do Teorema 12.6. Pelo mesmo teorema concluímos que $x_* = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\alpha}{\kappa}} \\ 0 \end{pmatrix}$ é um ponto de equilíbrio exponencial do sistema, sendo alcançado assintoticamente no tempo se o ponto de partida for suficientemente próximo a si. As mesmas conclusões aplicam-se ao ponto $x_* = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\alpha}{\kappa}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Consideremos, por fim, o ponto de equilíbrio $x_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. A equação diferencial $\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + \alpha x - \kappa x^3$ equivale ao sistema

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + g\big(t, \, x(t)\big) , \qquad \text{com} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & -\gamma \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad g(t, \, x) := \begin{pmatrix} 0 \\ -\kappa x^3 \end{pmatrix} .$$

A função g satisfaz os requerimentos do Teorema 12.6. Porém, os autovalores de A são $\lambda_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \alpha}$, ambos reais, sendo que λ_- é negativo, mas λ_+ é positivo. Assim, o ponto $x_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ não satisfaz as condições suficientes listadas no Teorema 12.6 e, de fato, não é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável, não sendo sequer estável. ♦

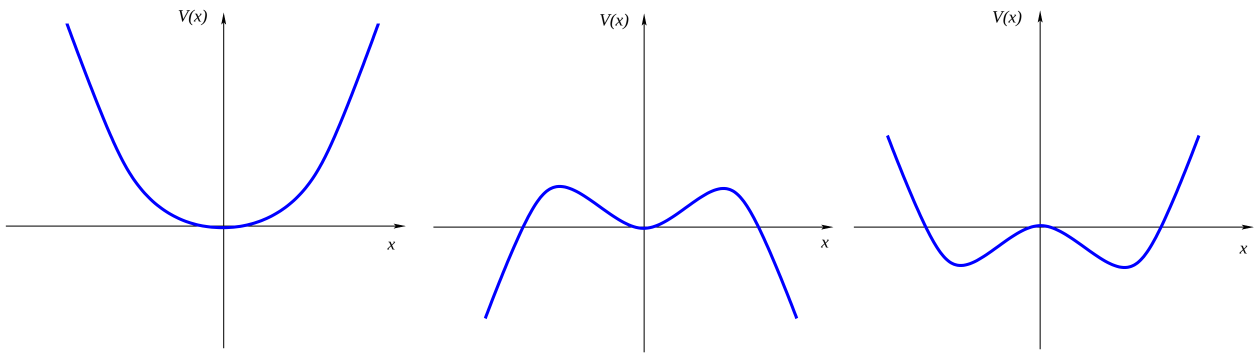

Figura 12.2: À esquerda, o potencial do oscilador anarmônico $V(x) = \frac{\omega_0^2}{2}x^2 + \frac{\kappa}{4}x^4$, com $\omega_0 > 0$ e $\kappa > 0$. Ao centro, o potencial $V(x) = \frac{\omega_0^2}{2}x^2 + \frac{\kappa}{4}x^4$, com $\omega_0 > 0$ e $\kappa < 0$. À direita, o potencial de poço duplo $V(x) = -\frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\kappa}{4}x^4$, com $\alpha > 0$ e $\kappa > 0$. Com a inclusão da forma de atrito $-\gamma\dot{x}$, $\gamma > 0$. O ponto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável para os dois primeiros potenciais (para o segundo, a condição inicial deve estar suficientemente próxima a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) e um ponto de ponto de equilíbrio instável para o último.

12.5 Equações Periódicas e o Teorema de Floquet

Sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias com coeficientes periódicos, de um mesmo período T, ocorrem na descrição de vários sistemas físicos e problemas ligados à sua estabilidade são também importantes.

Um exemplo muito estudado é a chamada *equação de Hill*[40], $\ddot{x}(t) + \big(\lambda + P(t)\big)x(t) = 0$, com λ constante e P periódica, que surge no tratamento perturbativo do problema de três corpos (vide Seção 48.3, página 2873). Para o trabalho original de Hill, vide [248, 249, 250]. Um texto clássico sobre a equação de Hill é [350].

Outro exemplo importante específico é a chamada *equação de Mathieu*[41] $\ddot{x}(t) + \big(\lambda + \mu\cos(t)\big)x(t) = 0$, com λ e μ constantes, que surge, por exemplo, no tratamento por separação de variáveis da equação de ondas em uma membrana elíptica (com uso de coordenadas elípticas). Para o trabalho original, vide [357].

A primeira observação importante a se fazer sobre tais equações lineares com coeficientes periódicos de período T é que suas soluções não são necessariamente periódicas de período T, podendo eventualmente acontecer de não serem sequer periódicas! Um exemplo é a equação $\dot{x}(t) + \big(1 + \text{sen}(t)\big)x(t) = 0$, que 2π-periódica, mas cuja solução geral é

[40] George William Hill (1838–1914).
[41] Emile-Léonard Mathieu (1835–1890).

$x_0 \exp\big(-t+\cos(t)-1\big)$ (verifique!), com $x_0 \equiv x(0)$, constante, que não é periódica, não sendo sequer limitada em $\mathbb{R}$. Analogamente. a equação diferencial $\dot{x}(t) = \cos(t)^2 x(t)$ tem por solução geral $x(t) = x_0 \exp\big(t/2 + \operatorname{sen}(2t)/4\big)$, com $x_0 \equiv x(0)$, constante (verifique!) que também não é periódica ou limitada em $\mathbb{R}$.

Felizmente, porém, a situação geral pode ser completamente compreendida por meio de um teorema fundamental devido a Floquet[42], de 1883 (para a referência original, vide [174]), que passamos a apresentar.

Teorema 12.7 (Teorema de Floquet) *Para $n \in \mathbb{N}$, seja o problema de valor inicial $\dot{X} = A(t)X(t)$, com $t \in \mathbb{R}$, $X(t) \in \mathbb{C}^n$, $A(t) \in \mathrm{Mat}\,(n,\ \mathbb{C})$ contínua a periódica de período $T > 0$, com a condição inicial $X(0) = X_0 \in \mathbb{C}^n$. Então, existem uma matriz constante $E \in \mathrm{Mat}\,(n,\ \mathbb{C})$ e uma função $\mathbb{R} \ni t \mapsto \Phi(t) \in \mathrm{Mat}\,(n,\ \mathbb{C})$ continuamente diferenciável e periódica de período T (ou seja, $\Phi(t) = \Phi(t+T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$), satisfazendo também $\Phi(0) = \mathbb{1}_n$, tais que a solução $X(t)$ pode ser escrita na forma*

$$X(t) \ = \ \Phi(t)e^{tE}X_0 \ ,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Com isso, $X(T)$ satisfaz $X(T) = CX_0$, onde a matriz $C := e^{ET}$ é denominada matriz de monodromia *e pode ser expressa em termos da série de Dyson convergente*

$$C \ = \ \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\, dt_n dt_{n-1} \cdots dt_1 \ . \tag{12.43}$$

Uma vez conhecida a matriz E, podemos obter $\Phi(t)$ por meio da série de Dyson

$$\Phi(t) \ = \ \left(\mathbb{1}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\, dt_n dt_{n-1} \cdots dt_1\right) e^{-Et} \ . \tag{12.44}$$

A matriz E deve satisfazer $e^{ET} = C$ com C dada em (12.43).

Um situação particularmente interessante se dá se $A(t)A(t') = A(t')A(t)$ para todos $t,\ t' \in \mathbb{R}$. Nesse caso, por (12.43) teremos

$$C \ = \ \exp\left(\int_0^T A(\tau)d\tau\right) \tag{12.45}$$

e podemos tomar

$$E \ = \ \frac{1}{T}\int_0^T A(\tau)d\tau \ . \tag{12.46}$$

Também nesse caso teremos,

$$\Phi(t) \ = \ \exp\left(\int_0^t A(\tau)d\tau\right) e^{-Et} \ = \ \exp\left(\int_0^t A(\tau)d\tau - \frac{t}{T}\int_0^T A(\tau)d\tau\right) \ = \ \exp\left(\int_0^t \Big(A(\tau) - E\Big)d\tau\right) \ , \tag{12.47}$$

também por (12.44) e (12.46). □

Após a demonstração apresentaremos alguns comentários relevantes sobre o Teorema de Floquet, Teorema 12.7.

Prova do Teorema 12.7. Sabemos pela discussão da Seção 14.2, página 762, que a solução geral do problema de valor inicial considerado é dada por $X(t) = D(t,\ 0)X_0$, onde $D(t,\ 0)$, a chamada *solução fundamental*, pode ser expressa pela série de Dyson (14.10), página 765, que é convergente sob a hipótese de $A(t)$ ser contínua, sendo que valem $X(t) = D(t,\ s)X(s)$ para todos $t,\ s \in \mathbb{R}$ (vide (14.23), página 771), sendo $D(t,\ s)$ matrizes inversíveis que, em particular, satisfazem $D(t,\ s)^{-1} = D(s,\ t)$ (vide (14.22), página 771) e $D(t,\ t) = \mathbb{1}_n$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sabemos também que valem (relações (14.13) e (14.15), páginas 766 e 767, respectivamente) $\frac{d}{dt}D(t,\ 0) = A(t)D(t,\ 0)$ e $\frac{d}{dt}D(0,\ t) = -D(0,\ t)A(t)$. Considere-se $B(t) := D(0,\ t)D(t+T,\ 0)$. Teremos, pela regra de Leibniz,

$$\frac{d}{dt}B(t) \ = \ -D(0,\ t)A(t)D(t+T,\ 0) - D(0,\ t)A(t+T)D(t+T,\ 0) \ = \ 0$$

[42]Achille Marie Gaston Floquet (1847-1920).

pois, por hipótese, $A(t+T) = A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, $B(t) = C$, com $C \in \text{Mat}\,(n,\ \mathbb{C})$, constante. Portanto,

$$D(t+T,\ 0) \;=\; D(t,\ 0)C \qquad \forall t \in \mathbb{R}\ . \tag{12.48}$$

Como $C = D(0,\ t)D(t+T,\ 0)$ e ambos os fatores são matrizes inversíveis, concluímos que C é também inversível.

A matriz C é denominada *matriz de monodromia*. Como C independe de t, vale, tomando-se $t = 0$, que $C = D(T,\ 0)$. Assim, por (14.10), página 765, podemos escrever

$$C \;=\; \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\, dt_n dt_{n-1}\cdots dt_1\ .$$

No caso particular em que $A(t)A(t') = A(t')A(t)$ para todos $t,\ t' \in \mathbb{R}$, vale por (14.51), página 784,

$$C \;=\; \exp\left(\int_0^T A(\tau)d\tau\right)\ .$$

Isso justifica (12.45) e permite-nos, também nesse caso comutativo, tomar E como em (12.46).

Pela Proposição 11.12, página 684, que é uma consequência do Teorema de Decomposição de Jordan, Teorema 10.22, página 615, a exponencial de matrizes é sobrejetora enquanto aplicação de $\text{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ no conjunto $\text{GL}(\mathbb{C},\ n)$ das matrizes complexas inversíveis. Assim, existe ao menos uma matriz $E \in \text{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ tal que podemos escrever $C = e^{TE}$ e, assim, para uma tal E, (12.48) escreve-se na forma

$$D(t+T,\ 0) \;=\; D(t,\ 0)e^{ET}\ , \qquad \forall t \in \mathbb{R}\ . \tag{12.49}$$

Defina-se agora

$$\Phi(t) \;:=\; D(t,\ 0)e^{-Et}\ , \qquad \forall t \in \mathbb{R}\ . \tag{12.50}$$

Observe-se que, segundo essa definição, $\Phi(0) = \mathbb{1}_n$, pois $D(0,\ 0) = \mathbb{1}_n$. Por (12.49), vale para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(t+T) \;\stackrel{(12.50)}{=}\; D(t+T,\ 0)e^{-E(t+T)} \;\stackrel{(12.49)}{=}\; D(t,\ 0)e^{ET}e^{-E(t+T)} \;=\; D(t,\ 0)e^{-Et} \;\stackrel{(12.50)}{=}\; \Phi(t)\ ,$$

o que mostra que $\Phi(t)$ é periódica de período T. Vemos dessa forma que a solução $X(t) = D(t,\ 0)X_0$ do problema de valor inicial considerado pode ser expressa na forma

$$X(t) \;=\; \Phi(t)e^{Et}X_0\ , \qquad t \in \mathbb{R}\ ,$$

com Φ periódica de período T.

A relação (12.44) decorre de (12.50) com o uso da série de Dyson (14.10), página 765.

A expressão para Φ em (12.47) é válida devido a (14.51), página 784, no caso em que $A(t)A(t') = A(t')A(t)$ para todos $t,\ t' \in \mathbb{R}$ e com uso de (12.46). Isso completa a demonstração. ■

• Comentários sobre o Teorema de Floquet, Teorema 12.7

1. O Teorema de Floquet possui uma importante manifestação na Mecânica Quântica, na forma do bem conhecido *Teorema de Bloch*[43], um teorema fundamental no estudo do movimento de elétrons em redes cristalinas[44]. Vide, *e.g.*, [26, 301]. O Teorema de Floquet (de 1883) antecede temporalmente o Teorema de Bloch em cerca de 46 anos! Há de se dizer, porém, que o Teorema de Bloch é enunciado para equações a derivadas parciais espacialmente periódicas (a equação de Schrödinger com potenciais periódicos), um contexto ligeiramente diferente da formulação original do Teorema de Floquet. Ainda assim, não se justifica a quase ausência de menção ao trabalho pioneiro de Floquet em textos de Mecânica Quântica e Física de Estado Sólido.

[43] Felix Bloch (1905–1983).

[44] O artigo original é Felix Bloch, "Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern", Z. Physik **52**, 555-600 (1929).

2. A matriz $E \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}^n)$ foi escolhida de sorte que $e^{ET} = C$. Observe-se, porém, que $E' = E + i\frac{2\pi k}{T}\mathbb{1}_n$ possui a mesma propriedade para qualquer $k \in \mathbb{Z}$. Outros exemplos também são possíveis. Observe-se, porém, que $\Phi'(t)$ dada por $\Phi'(t) = D(t, 0)e^{-E't} = \Phi(t)e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}$ é também periódica de período T e também satisfaz $\Phi'(0) = \mathbb{1}_n$. Assim, $D(t, 0) = \Phi'(t)e^{E't} = \Phi(t)e^{Et}$. Vê-se, assim, que as matrizes E e $\Phi(t)$ do enunciado do Teorema de Floquet não são univocamente definidas.

3. Conforme já observamos em (14.29), página 773, os elementos de matriz de e^{tE} são combinações lineares de exponenciais de t vezes autovalores de E com coeficientes que são polinômios em t cujo grau é no máximo $n-1$:
$$\left(e^{tE}\right)_{ab} = \sum_{k=1}^{n} c_{ab}^k(t)\, e^{\lambda_k t} .$$
onde λ_k são os autovalores de E e $c_{ab}^k(t)$ são os mencionados polinômios. Os polinômios não serão todos constantes caso na decomposição de Jordan de E (ou seja, a representação de E na forma $E = D + N$, com N nilpotente e D diagonalizável, sendo que $DN = ND$) tenhamos $N \neq 0$.

   Como os autovalores de uma matriz nilpotente N são todos nulos (Proposição 10.31, página 611) existe ao menos um vetor não nulo $\hat{X}_0$ que é autovetor de N com autovalor nulo: $N\hat{X}_0 = 0$. Portanto, $e^{Et}\hat{X}_0$ é uma combinação linear de exponenciais dos autovalores de E: $e^{\lambda_k t}$. Se tivermos um desses vetores $\hat{X}_0$ como condição inicial, a solução $D(t, 0)\hat{X}_0$ será uma combinação linear de funções periódicas de período T com fatores $e^{\lambda_k t}$. Caso os autovalores λ_k sejam imaginários puros, cada termo será uma função periódica com frequências $\frac{2\pi l}{T} + \lambda_k$, com $l \in \mathbb{Z}$.

   Assim, o comportamento das soluções depende crucialmente da natureza dos autovalores de E.

4. Como $X(t) = \phi(t)e^{Et}X_0$ e ϕ é periódica de período T com $\phi(0) = \mathbb{1}_n$, seque que para todo $m \in \mathbb{N}$ vale $X(mT) = e^{EmT}X_0 = C^m X_0$. Com isso, extraímos facilmente os seguintes fatos:

   1º Se $\|C\| < 1$ o ponto $X = 0$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável[45], pois $\|C^m\| \leq \|C\|^m$ para qualquer $m \in \mathbb{N}$ e qualquer matriz C.

   2º Se $\|C\| = 1$ temos $\|C^m\| \leq \|C\|^m = 1$ e a situação é, em geral, inconclusiva. Se, porém, C for autoadjunta ou normal[46], teremos $\|C^m\| = \|C\|^m = 1$ e podemos afirmar que o ponto $X = 0$ é um ponto de equilíbrio estável segundo Lyapunov.

   3º Se $\|C\| > 1$ não segue necessariamente que $\|C^m\| > 1$. Por exemplo, se C é nilpotente, ocorrerá que $C^m = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ grande o suficiente[47]. Porém, se C for autoadjunta ou normal, vale, como comentamos, $\|C^m\| = \|C\|^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e, aí sim, podemos concluir que o ponto $X = 0$ é um ponto de equilíbrio instável.

   Os autovalores de E são por vezes denominados *exponentes de Floquet*. As partes reais dos autovelores de E, ou seja, dos exponentes de Floquet, são denominadas *exponentes de Lyapunov*.

   A transformação $Y(t) = \Phi(t)^{-1}X(t)$ é denominada *transformação de Lyapunov*. É evidente que $Y(t) = e^{Et}X_0$ e que Y satisfaz $\dot{Y}(t) = EY(t)$. Vemos, portanto (e podemos aqui evocar o Teorema 12.6, página 737, aqui embora isso seja desnecessário), que o ponto $X = 0$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável caso os autovalores de E tenham todos parte real negativa, ou seja, caso os exponentes de Lyapunov sejam todos negativos. Se ao menos um deles for positivo, $X = 0$ será um ponto de equilíbrio exponencialmente instável. Se E for diagonalizável (por exemplo, se for autoadjunta ou normal) e os exponentes de Lyapunov forem todos nulos, a solução $X(t)$ será quasi-periódica e o ponto $X = 0$ será um ponto de equilíbrio de Lyapunov.

5. Observe-se que, na última igualdade em (12.47), a diferença $A(\tau) - E$ é a diferença entre A e seu valor médio.

6. Caso A seja uma matriz real ela é, ainda assim, um elemento de $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$ e, portanto, as conclusões do Teorema de Floquet ainda se aplicam. Pode ocorrem, porém, de a matriz E ser complexa.

7. O Teorema de Floquet guarda uma íntima relação com a Teoria de Representação de Grupos, ligada ao fato de as representações irredutíveis complexas e de dimensão finita de grupos Abelianos (no caso, do grupo aditivo dos reais) serem unidimensionais (Corolário 23.5, página 1346). Não exploraremos esse ponto na versão corrente destas Notas.

[45] Para uma classificação de tipos de equilíbrio, vide página 736.

[46] Se C for autoadjunta ou normal, vale $\|C^m\| = \|C\|^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Vide, por exemplo, Corolário 42.11, página 2422.

[47] A condição de C ser nilpotente não é incompatível com a condição $\|C\| > 1$. Por exemplo, a matriz $C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ é nilpotente, pois $C^2 = 0$, mas $C\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, mostrando que $\|C\| \geq 2$.

• **Exemplos**

Os exemplos discutidos no início da corrente Seção podem ser revistos sob a luz das relações (12.44), (12.46) e (12.47).

Exemplo 12.20 Para a equação $\dot{x}(t) + \big(1 + \operatorname{sen}(t)\big)x(t) = 0$ temos $T = 2\pi$, $A(t) = -\big(1 + \operatorname{sen}(t)\big)$, como uma matriz 1×1. Assim, $E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(\tau)d\tau = -1$. Como $\int_0^t A(\tau)d\tau = -t + \cos(t) - 1$, tem-se $\Phi(t) = \exp\big(\cos(t) - 1\big)$. Portanto, a solução é $x(t) = \Phi(t)e^{Et}x_0 = \exp\big(\cos(t) - 1 - t\big)x_0$, coincidindo com o resultado anteriormente apresentado. Verifique!

A matriz de monodromia é $C = e^{TE} = e^{-2\pi}$. Como $|C| < 1$, o ponto $x_* = 0$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável para $t \to +\infty$, o que também se vê da solução obtida, pois claramente $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ exponecialmente rápido. ♦

Exemplo 12.21 Para a equação $\dot{x}(t) = \cos(t)^2 x(t)$ temos $T = \pi$ e $A(t) = \cos(t)^2$. Assim, $E = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A(\tau)d\tau = 1/2$. Vale também $\int_0^t A(\tau)d\tau = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)$ e, com isso, $\Phi(t) = \exp\big(\operatorname{sen}(2t)/4\big)$. Logo, a solução é $x(t) = \Phi(t)e^{Et}x_0 = \exp\big(\operatorname{sen}(2t)/4 + t/2\big)$, coincidindo com o resultado anteriormente apresentado. Verifique!

A matriz de monodromia é $C = e^{TE} = e^{\pi/2}$. Como C é uma matriz autoadjunta (por ser real e 1×1) e $|C| > 1$, o ponto $x_* = 0$ é um ponto de equilíbrio instável para $t \to +\infty$, o que também se vê pela solução obtida, pois claramente $x(t)$ diverge quando $t \to +\infty$. ♦