Capítulo 12
Alguns Métodos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias

Conteúdo

O problema de encontrar métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias tem cativado a imaginação e instigado a engenhosidade de gerações de cientistas e matemáticos. Muitas informações sobre o comportamento de soluções de equações diferenciais ordinárias podem ser obtidas sem que essas soluções sejam conhecidas explicitamente, mas esse conhecimento explícito é muitas vezes desejável, pois assim o poder de previsão de teorias e modelos torna-se evidentemente maior. Neste capítulo apresentaremos algumas das diversas situações felizes nas quais métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias foram encontrados. Todos os métodos apresentados têm sua validade e sua eficácia limitadas a certas classes de equações. No Capítulo 14, página 614, desenvolveremos com bastante detalhe métodos de solução de equações lineares baseados em expansões, a saber, o método de expansão em séries de potências e o método de Frobenius, válidos para equações diferenciais lineares gozando de certas propriedades de analiticidade. Com o propósito de centrar a discussão nos métodos de solução, não trataremos aqui de questões relativas à continuidade de soluções em relação a parâmetros e condições iniciais e ao domínio de validade de soluções. Essas questões são discutidas na Seção 11.3, página 509. Métodos iterativos, perturbativos ou numéricos também não serão discutidos neste capítulo. Dada a profusão de métodos de solução de equações diferenciais (uma ciência que se desenvolve já há mais de trezentos anos!), nossa apresentação será, reconhecidamente, limitada. Para um texto introdutório sobre equações diferenciais ordinárias centrado em métodos de solução, vide [47].

12.1 Solução de Equações Ordinárias Lineares de Primeira Ordem

Equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem são particularmente interessantes pois, sob hipóteses simples, é possível apresentar soluções gerais para as mesmas e de modo relativamente fácil. Infelizmente a mesma facilidade não é encontrada para o caso das equações diferenciais lineares de ordem dois ou maior. Considere-se a equação diferencial ordinária linear de primeira ordem

$$\dot{y}(t) \;=\; a(t)y(t) + b(t) \;, \tag{12.1}$$

para funções a e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, contínuas. Vamos mostrar como resolver uma tal equação. Para tal, defina-se

$$p(t) \;:=\; \exp\left(\int_0^t a(\tau)d\tau\right) \;.$$

Multiplicando-se (12.1) por $p(t)^{-1}$ e usando o fato que $\dot{p}(t) = a(t)p(t)$, teremos

$$\frac{d}{dt}\left[p(t)^{-1}y(t)\right] \;=\; p(t)^{-1}b(t) \;,$$

donde conclui-se que

$$y(t) \ = \ p(t)\left[y(0)+\int_0^t \frac{b(s)}{p(s)}\,ds\right] \ = \ p(t)y(0)+\int_0^t \big(p(t)p(s)^{-1}\big)\,b(s)\,ds\ . \tag{12.2}$$

Essa solução pode ser obtida por outros meios. Vide (13.47), página 557. Essa expressão representa a solução geral de (12.1), a qual depende do valor de $y(0)$, a ser especificado (condição inicial).

E. 12.1 *Exercício*. A solução (12.2) é da forma (11.10), pois $p(t)$ é solução da equação homogênea $\dot{y}(t) = a(t)y(t)$ enquanto que $p(t)\int_0^t b(s)p(s)^{-1}\,ds$ é solução particular da equação não-homogênea (12.1). Verifique essas afirmações. ✠

Naturalmente, para o cálculo explícito de y é necessário calcular a integral $\int_0^t a(\tau)d\tau$ que aparece na definição de p, assim como, numa segunda etapa, a integral $\int_0^t b(s)p(s)^{-1}ds$. Como essas funções são conhecidas, isso pode ser possível, em princípio, mas nem sempre obtem-se fórmulas explícitas para as mencionadas integrais. Ainda assim, (12.2) representa a solução completa do problema. Na pior das hipóteses as integrais mencionadas podem ser calculadas numericamente de modo aproximado.

A solução (12.2) de (12.1) pode ser reobtida com o método dos fatores integrantes, tal como descrito no Exemplo 12.3, página 529.

12.2 As Equações de Bernoulli e de Riccati

• A equação de Bernoulli

Para a e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ambas contínuas, a equação diferencial ordinária não-linear homogênea de primeira ordem

$$\dot{y}(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t)^2 \ = \ 0 \tag{12.3}$$

é denominada *equação de Bernoulli*[1]. Apesar desta equação ser um dos representantes mais simples da classe das equações diferenciais não-lineares, a não-linearidade da mesma não acrescenta nenhuma barreira à sua solubilidade, pois a simples substituição $y(t) = 1/w(t)$ conduz à equação

$$\dot{w}(t) - a(t)w(t) - b(t) \ = \ 0$$

que é linear e tem por solução (vide acima)

$$w(t) \ = \ p(t)\left(w(0)+\int_0^t b(s)p(s)^{-1}\,ds\right),$$

onde

$$p(t) \ := \ \exp\left(\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right)\ .$$

Portanto, a solução geral da equação de Bernoulli (12.3) é

$$y(t) \ = \ \frac{y(0)}{p(t)\left(1+y(0)\displaystyle\int_0^t b(s)p(s)^{-1}\,ds\right)}\ .$$

É interessante observar que essa solução pode ser singular em um instante t' caso tenhamos $y(0)\int_0^{t'} b(s)p(s)^{-1}\,ds = -1$.

E. 12.2 *Exercício*. Determine a solução geral da equação de Bernoulli generalizada

$$\dot{y}(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t)^n \ = \ 0\ ,$$

$n \neq 1$. Sugestão: Defina w por $y(t) = w(t)^{\frac{1}{1-n}}$ e proceda como acima. ✠

[1] Jacob Bernoulli (1654–1705). Vide nota histórica à página 521.

As equações de Bernoulli são um caso particular de uma classe maior de equações diferenciais ordinárias não-lineares, as chamadas *equações de Riccati generalizadas*.

• A equação de Riccati generalizada

Para a, b e $c : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, contínuas, a equação diferencial ordinária não-linear não-homogênea de primeira ordem

$$\dot{y}(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t)^2 + c(t) \;=\; 0 \tag{12.4}$$

é denominada equação de Riccati[2] generalizada.

Ao contrário da equação de Bernoulli, a equação de Riccati generalizada não é, em geral, explicitamente solúvel. Apenas em casos particulares há soluções mais ou menos explícitas para as mesmas, normalmente em termos de expansões em série, como expansões em série de potências.

Apesar de sua não-solubilidade genérica (em contraposição com a equação de Bernoulli, que é também não-linear mas solúvel), é possível obter a solução geral de (12.4) se uma solução particular sua for conhecida. De fato, se u é uma solução particular conhecida de (12.4) então a solução geral é da forma

$$y(t) \;=\; u(t) + v(t) \;,$$

onde v obedece à equação de Bernoulli

$$\dot{v}(t) + \big[a(t) + 2b(t)u(t)\big]v(t) + b(t)v(t)^2 \;=\; 0 \;.$$

E. 12.3 *Exercício*. Verifique isso, substituindo $y = u + v$ em (12.4) e usando a hipótese que u é solução de (12.4). ✠

Assim, conhecida a função u, a solução geral da equação de Riccati generalizada é

$$y(t) \;=\; u(t) + \frac{1}{p_1(t)\left(w_0 + \displaystyle\int_0^t b(s)p_1(s)^{-1}\,ds\right)} \;,$$

onde $w_0 = 1/(y(0) - u(0))$, para $y(0) \neq u(0)$, é uma constante e onde

$$p_1(t) \;:=\; \exp\left(\int_0^t \big[a(\tau) + 2b(\tau)u(\tau)\big]\,d\tau\right) \;.$$

E. 12.4 *Exercício*. Complete os detalhes. ✠

Observemos que qualquer equação diferencial ordinária linear homogênea de segunda ordem associa-se naturalmente a uma equação de Riccati generalizada. De fato, dada a equação

$$\ddot{w}(t) + a(t)\dot{w}(t) + b(t)w(t) \;=\; 0 \;,$$

com a e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínuas, o Ansatz $w(t) = \exp\left(\displaystyle\int_0^t y(\tau)d\tau\right)$ conduz a

$$\dot{y}(t) + a(t)y(t) + y(t)^2 + b(t) \;=\; 0 \;,$$

que é uma equação de Riccati generalizada.

E. 12.5 *Exercício*. Complete os detalhes. ✠

• Nota histórica

A equação de Riccati generalizada deve seu nome ao matemático e conde veneziano Iacopo Francesco Riccati (1676–1754), que estudou a equação diferencial

$$y'(x) \;=\; \alpha\left(y^2(x) + x^n\right) \;, \tag{12.5}$$

[2] Jacopo Francesco Riccati (1676–1754).

com α constante e $n \in \mathbb{N}$, em monografia publicada em 1724 sem, no entanto, resolvê-la. A equação

$$y'(x) \;=\; y^2(x) + x^2 \tag{12.6}$$

fora previamente estudada por Johann Bernoulli (1667–1748) em trabalho de 1694, sem que este apresentasse solução para a mesma. Jacob Bernoulli (1654–1705), que honrou com seu nome a equação (12.3), resolvida por ele em 1696, também estudara (12.6) e encontrara em 1703 uma solução para a mesma em termos de uma razão de série de potências, que então expressou como uma série de potências simples. Somente em 1841 Joseph Liouville (1809–1882) demonstrou que a solução de (12.6) não pode ser expressa em termos de funções elementares. Em notação moderna a solução geral de (12.6) é

$$y(x) \;=\; x\left(\frac{AJ_{-3/4}\left(\frac{x^2}{2}\right)+J_{3/4}\left(\frac{x^2}{2}\right)}{J_{-1/4}\left(\frac{x^2}{2}\right)-AJ_{1/4}\left(\frac{x^2}{2}\right)}\right) ,$$

onde A é uma constante e J_ν são funções de Bessel de primeiro tipo e ordem ν.

Equações do tipo (12.5) são hoje denominadas simplesmente *equações de Riccati*. A associação do nome de Riccati a tais equações (e não dos nomes de Johann Bernoulli ou Jacob Bernoulli) é parcialmente devida ao fato de (12.5) ser ligeiramente mais geral que (12.6) e às referências ao trabalho de Riccati feitas por outro Bernoulli, Daniel Bernoulli (1700–1782), que estudou as equações (12.5) em trabalho datado de 1725. Daniel Bernoulli menciona que soluções de equações como (12.5) foram obtidas anteriormente por Johann Bernoulli, Nicolaus Bernoulli e Nicolaus Bernoulli II. A desconsideração de Daniel Bernoulli pela contribuição prévia de seu tio Jacob Bernoulli deve-se talvez à rivalidade deste com seu irmão Johann Bernoulli, pai de Daniel Bernoulli, mas talvez seja meramente consequência do fato de sua época não estar ainda preparada para aceitar soluções de equações diferenciais em termos de séries infinitas. De fato, em seu trabalho, Daniel Bernoulli preocupou-se em apontar casos em que (12.5) pode ser resolvida por séries finitas, a saber, quando n é a forma $-4m/(2m \pm 1)$, com m inteiro.

O método acima descrito de obter a solução geral da equação de Riccati generalizada a partir de uma solução particular é devido a Leonhard Euler (1707–1783) e publicado em 1764.

Para mais notas históricas sobre as equações (12.5) e (12.6) e sua relação com as funções de Bessel, vide por exemplo [344], Capítulo I.

12.3 Integração de Equações Separáveis

Entre as equações diferenciais de resolução mais simples encontram-se as chamadas equações separáveis. Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem é dita ser uma *equação separável*[3] se for da forma

$$y'(x) \;=\; f(x)\, g\big(y(x)\big) , \tag{12.7}$$

para funções f e g convenientes. Consideremos a condição inicial $y(x_0) = y_0$ para algum x_0. Definindo,

$$A(y) \;:=\; \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}ds \qquad \text{e} \qquad B(x) \;:=\; \int_{x_0}^{x} f(s)ds ,$$

caso as integrais existam, teremos, caso $y(x)$ satisfaça (12.7),

$$\frac{d}{dx}A\big(y(x)\big) \;=\; A'\big(y(x)\big)\, y'(x) \;=\; \frac{1}{g\big(y(x)\big)}y'(x) \qquad \text{e} \qquad B'(x) = f(x) .$$

Logo, $\frac{d}{dx}A\big(y(x)\big) \;=\; B'(x)$ e, portanto, $A\big(y(x)\big) \;=\; B(x) + c$, c sendo uma constante. Como $B(x_0) = 0$, segue que $c = A(y_0) = 0$ (caso $y(x_0) = y_0$) e, consequentemente, $A\big(y(x)\big) = B(x)$. Se a função A possuir uma inversa em algum aberto em torno de y_0, teremos

$$y(x) \;=\; A^{-1}\big(B(x)\big) \tag{12.8}$$

[3] Há também uma noção de equação separável na teoria das equações diferenciais parciais (vide Seção 17.3, página 774), mas trata-se de outra coisa.

como solução de (12.7) (com a condição inicial $y(x_0) = y_0$) em um aberto em torno de x_0.

É interessante notar que, pelo Teorema da Função Inversa[4], A é inversível em um aberto em torno de y_0 se A' for contínua e $A'(y_0) \neq 0$. Assim, a condição $\frac{1}{g(y_0)} \neq 0$ garante a existência da solução y dada em (12.8) para uma vizinhança de x_0.

E. 12.6 *Exercício*. Determine a solução de

$$y'(x) = \frac{3x^7 - 5x^2 - 1}{1 + y^2} ,$$

com $y(0) = 0$. ✠

E. 12.7 *Exercício*. Determine a solução de

$$y'(x) = \frac{\left(1 + x^2\right)}{\cos\left(y(x)\right)} ,$$

com $y(0) = y_0$. Estude os vários casos. ✠

12.4 O Método de Variação de Constantes

Seja a equação linear não-homogênea

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) , \tag{12.9}$$

definida em um certo intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, com f contínua por partes, e vamos supor que sejam conhecidas duas soluções independentes y_1 e y_2 da equação homogênea $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$. O *método de variação de constantes* consiste em determinar funções v_1 e v_2 tais que a combinação

$$y_v(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) , \tag{12.10}$$

seja solução da equação não-homogênea (12.9). A denominação do método como de "variação de constantes", uma contradição em termos, provém do fato de que, como é bem sabido, a solução geral da equação homogênea é $v_1y_1(x) + v_2y_2(x)$ para v_1 e v_2 constantes.

Substituindo (12.10) em (12.9), e usando as hipóteses que $y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$ e $y_2'' + ay_2' + by_2 = 0$, obtem-se

$$\left[v_1'y_1 + v_2'y_2\right]' + a\left[v_1'y_1 + v_2'y_2\right] + \left[v_1'y_1' + v_2'y_2'\right] = f . \tag{12.11}$$

E. 12.8 *Exercício*. Complete os detalhes que levam à última expressão. ✠

Para determinar as duas funções v_1 e v_2 é preciso acrescentar mais uma equação diferencial envolvendo ambas as funções. A escolha dessa equação extra é essencialmente arbitrária, mas uma análise de (12.11) mostra ser muito conveniente impor a relação $v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0$ pois a expressão $v_1'y_1 + v_2'y_2$ aparece nos dois primeiros termos. Com isso, chegamos ao sistema de equações

$$\begin{aligned} v_1'y_1 + v_2'y_2 &= 0 , \\ v_1'y_1' + v_2'y_2' &= f , \end{aligned}$$

que são equações algébricas para v_1' e v_2', fornecendo

$$v_1' = -\frac{y_2 f}{y_1y_2' - y_1'y_2} , \qquad v_2' = +\frac{y_1 f}{y_1y_2' - y_1'y_2} ,$$

cujas soluções são

$$v_1(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(s)f(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_1'(s)y_2(s)}ds + c_1 , \qquad v_2(x) = +\int_{x_0}^{x} \frac{y_1(s)f(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_1'(s)y_2(s)}ds + c_2 ,$$

[4] Vide Seção 28.3, página 1394, ou qualquer bom livro de Cálculo de funções de várias variáveis, por exemplo, [72, 219, 220].

sendo $x_0 \in I$ e c_1, c_2 duas constantes de integração. A expressão $W_{y_1,\, y_2}(x) := y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$ é denominada *determinante Wronskiano*[5] e não se anula pois, por hipótese, y_1 e y_2 são independentes. Assim, a solução procurada $y_v(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$ tem a forma

$$\begin{aligned} y_v(x) &= \big[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\big] + \int_{x_0}^{x} \left(\frac{y_1(s)y_2(x) - y_1(x)y_2(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_1'(s)y_2(s)}\right) f(s)\, ds \\ &= \big[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\big] + \int_{x_0}^{x} \left(\frac{y_1(s)y_2(x) - y_1(x)y_2(s)}{W_{y_1,\, y_2}(s)}\right) f(s)\, ds\ , \end{aligned}$$

para um ponto $x_0 \in I$ arbitrário e constantes arbitrárias c_1 e c_2 a serem fixadas por condições iniciais em x_0. O estudante deve observar que o termo $[\cdots]$ da última expressão acima é uma solução da equação homogênea e o último é uma solução particular da equação não-homogênea.

Uma observação simples permite reescrever a última expressão de uma forma por vezes mais conveniente. Se a é contínua por partes, é fácil constatar que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\left(W_{y_1,\, y_2}(s) \exp\left(\int_{x_0}^{s} a(\tau)\, d\tau\right)\right) \\ &= \left[\Big[y_2''(s) + a(s)y_2'(s) + b(s)y_2(s)\Big]y_1(s) - \Big[y_1''(s) + a(s)y_1'(s) + b(s)y_1(s)\Big]y_2(s)\right] \exp\left(\int_{x_0}^{s} a(\tau)\, d\tau\right) = 0\ , \end{aligned}$$

pois y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea. Com isso, concluímos que

$$W_{y_1,\, y_2}(s) = W_{y_1,\, y_2}(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{s} a(\tau)\, d\tau\right)\ .$$

Sempre podemos escolher as funções y_1 e y_2 de forma que satisfaçam $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0$, $y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$. Nesse caso $W_{y_1,\, y_2}(x_0) = 1$ e concluímos que

$$y_v(x) = \big[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\big] + \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_{x_0}^{s} a(\tau)\, d\tau\right) \Big(y_1(s)y_2(x) - y_1(x)y_2(s)\Big) f(s)\, ds\ .$$

Com essas escolhas, é fácil ver que $y_v(x_0) = c_1$ e $y_v'(x_0) = c_2$.

No Capítulo 13, página 535, o método de variação de constantes será reencontrado por outros caminhos e será tratado com mais generalidade, de modo a também incluir equações de ordem n e não apenas de segunda ordem, como fizemos acima.

12.5 O Método de Substituição de Prüfer

Esse elegante método aplica-se à solução de certas equações diferenciais ordinárias e lineares e homogêneas de segunda ordem da forma

$$\Big(p(x)y'(x)\Big)' + q(x)y(x) = 0\ , \tag{12.12}$$

para $x \in [a,\ b] \subset \mathbb{R}$, sendo p contínua e diferenciável, $p(x) > 0$ e q contínua. O chamado *método de substituição de Prüfer*[6] consiste em definir duas novas funções ρ e θ por

$$y(x) = \rho(x)\,\mathrm{sen}\big(\theta(x)\big)\ , \qquad p(x)y'(x) = \rho(x)\cos\big(\theta(x)\big) \tag{12.13}$$

e transformar o problema de resolver a equação diferencial de segunda ordem para y no problema de resolver um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem para ρ e θ. Como o leitor pode perceber, a mudança acima pode ser

[5] Conde Josef Hoëné de Wronski (1778–1853).

[6] Ernst Paul Heinz Prüfer (1896–1934). A referência para trabalho de Prüfer é *H. Prüfer, "Neue Herleitung der Sturm-Liouvilleschen Reihenentwicklung stetiger Funktionen". Math. Ann.,* **95**, *499-518 (1926).*

interpretada como a passagem a coordenadas polares no espaço de fase bidimensional definido por $\big(y(x),\ p(x)y'(x)\big)$. Obtemos o sistema de equações para ρ e θ da seguinte forma. Em primeiro lugar, observamos que diferenciando a equação do lado esquerdo de (12.13), tem-se

$$y'(x) \;=\; \rho'(x)\,\mathrm{sen}\big(\theta(x)\big) + \rho(x)\cos\big(\theta(x)\big)\theta'(x)\;.$$

Multiplicando-se por p e usando a equação do lado direito de (12.13), obtemos

$$\rho'(x)p(x)\,\mathrm{sen}\big(\theta(x)\big) + \rho(x)p(x)\cos\big(\theta(x)\big)\theta'(x) \;=\; \rho(x)\cos\big(\theta(x)\big)\;.$$

Em segundo lugar, inserindo-se a equação do lado direito de (12.13) em (12.12), tem-se

$$\rho'(x)\cos\big(\theta(x)\big) - \rho(x)\,\mathrm{sen}\big(\theta(x)\big)\theta'(x) \;=\; -q(x)\rho(x)\,\mathrm{sen}\big(\theta(x)\big)\;.$$

Dessas duas últimas igualdades podemos facilmente obter ρ' e θ':

$$\theta'(x) \;=\; q(x)\Big(\mathrm{sen}\big(\theta(x)\big)\Big)^2 + \frac{1}{p(x)}\Big(\cos\big(\theta(x)\big)\Big)^2\;, \tag{12.14}$$

$$\rho'(x) \;=\; \frac{\rho(x)}{2}\left(\frac{1}{p(x)} - q(x)\right)\mathrm{sen}\big(2\theta(x)\big)\;. \tag{12.15}$$

E. 12.9 *Exercício*. Verifique! ✠

Esse é o sistema de equações procurado. Um aspecto notável do mesmo é que a primeira equação envolve apenas θ. Se for possível resolver essa equação, obtendo a função $\theta(x)$, a solução da segunda equação seria

$$\rho(x) \;=\; \rho(a)\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x\left(\frac{1}{p(y)} - q(y)\right)\mathrm{sen}(2\theta(y))\,dy\right)\;, \tag{12.16}$$

e, pela primeira equação de (12.13), teríamos a solução

$$y(x) \;=\; \rho(a)\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x\left(\frac{1}{p(y)} - q(y)\right)\mathrm{sen}\big(2\theta(y)\big)\,dy\right)\ \mathrm{sen}\big(\theta(x)\big)\;.$$

Uma feliz situação particular na qual a equação para θ pode ser resolvida facilmente é aquela na qual $\frac{1}{p(x)} = q(x)$, em cujo caso ficamos com $\theta'(x) = q(x)$, $\rho'(x) = 0$, ou seja,

$$\theta(x) \;=\; \theta(a) + \int_a^x q(y)\,dy\;, \qquad \rho(x) \;=\; \rho(a)\;.$$

Assim, teríamos pela primeira equação de (12.13) a solução geral

$$y(x) \;=\; c_1\,\mathrm{sen}\left(\int_a^x q(y)\,dy + c_2\right)\;,$$

para duas constantes c_1 e c_2 (aqui, $c_1 \equiv \rho(a)$ e $c_2 \equiv \theta(a)$).

E. 12.10 *Exercício*. Resolva a equação do oscilador harmônico simples $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ usando o método acima. Sugestão: reescreva a equação tomando $p(x) = \omega_0^{-1}$ e $q(x) = \omega_0$. ✠

E. 12.11 *Exercício*. Obtenha a solução da equação

$$\Big(x^{-\alpha}y'(x)\Big)' + x^{\alpha}y(x) \;=\; 0\;,$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, em um intervalo $(a,\ b)$. ✠

• **Zeros de soluções**

Outro aspecto interessante do método de substituição de Prüfer reside no fato de que com a representação de Prüfer $y(x) = \rho(x)\,\mathrm{sen}\big(\theta(x)\big)$, pode-se realizar um estudo mais detalhado do zeros de y. Algumas propriedades desses zeros são relevantes para o estudo de soluções de certas equações diferenciais de interesse.

Proposição 12.1 *Seja a equação diferencial*

$$\Big(p(x)y'(x)\Big)' + q(x)y(x) \;=\; 0 \;, \tag{12.17}$$

para $x \in [a,\ b] \subset \mathbb{R}$, sendo p e q reais, p contínua e diferenciável, $p(x) > 0$ e q contínua. Seja y uma solução não-identicamente nula dessa equação e $y(x) = \rho(x)\,\mathrm{sen}\big(\theta(x)\big)$ sua representação de Prüfer. Então, um ponto $\xi \in [a,\ b]$ é um zero de y se e somente se $\theta(\xi) = n\pi$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Além disso, se y tem um zero em $\xi \in [a,\ b]$ esse zero é simples. □

Prova. Claro é que se $\theta(\xi) = n\pi$, então $y(\xi) = \rho(\xi)\,\mathrm{sen}\big(\theta(\xi)\big) = 0$. Reciprocamente, se $y(\xi) = 0$ então, como $\rho(\xi) > 0$ (por (12.16)), segue que $\mathrm{sen}\big(\theta(\xi)\big) = 0$, o que só é possível se $\theta(\xi) = n\pi$ para algum $n \in \mathbb{Z}$.

Se ξ é um zero de y, segue por (12.13) que $y'(\xi) = \rho(\xi)\cos\big(\theta(\xi)\big)/p(\xi) = (-1)^n\rho(\xi)/p(\xi)$ provando que $y'(\xi) \neq 0$. Isso estabelece que ξ é um zero simples de y. ■

12.6 O Método de Inversão

Esse método pode ser aplicado quando a solução y de uma equação diferencial ordinária for uma função inversível em algum aberto do seu domínio de definição. A ideia é transformar a equação para y em uma equação para a inversa de y, que pode eventualmente ser de resolução mais simples.

Se f é inversível em um aberto A e f^{-1} é sua inversa, então $f\big(f^{-1}(z)\big) = z$. Supondo ambas diferenciáveis, a regra da cadeia diz-nos que $f'\big(f^{-1}(z)\big)\big(f^{-1}\big)'(z) = 1$ e, portanto, $f'\big(f^{-1}(z)\big) = 1/\big(f^{-1}\big)'(z)$. Diferenciando-se mais uma vez tem-se $f''\big(f^{-1}(z)\big) = -\big(f^{-1}\big)''(z)/\Big[\big(f^{-1}\big)'(z)\Big]^3$. Prosseguindo assim, é possível sucessivamente expressar todas as derivadas de f em função de derivadas de f^{-1}.

Com essas relações, vemos que uma equação diferencial de primeira ordem $F\big(x,\ y(x),\ y'(x)\big) = 0$ transforma-se na equação

$$F\left(y^{-1}(z),\ \ z,\ \ \frac{1}{\big(y^{-1}\big)'(z)}\right) \;=\; 0 \;.$$

e uma equação diferencial de segunda ordem $F\big(x,\ y(x),\ y'(x),\ y''(x)\big) = 0$ transforma-se na equação

$$F\left(y^{-1}(z),\ \ z,\ \ \frac{1}{\big(y^{-1}\big)'(z)},\ -\frac{\big(y^{-1}\big)''(z)}{\Big[\big(y^{-1}\big)'(z)\Big]^3}\right) \;=\; 0 \;,$$

e assim analogamente para equações de ordem superior. Em alguns casos tais equações transformadas podem ser mais fáceis de resolver que a original e a solução y pode ser obtida – ao menos localmente – invertendo a solução y^{-1}. Ilustraremos o método em dois exemplos.

Exemplo 12.1 Seja a equação diferencial de primeira ordem

$$y'(x) \;=\; \frac{1}{a\big(y(x)\big)\,x + b\big(y(x)\big)\,x^{\alpha}} \;,$$

onde a e b são duas funções contínuas e $\alpha \in \mathbb{R}$. Pela transformação acima, essa equação equivale a

$$\frac{1}{\big(y^{-1}\big)'(z)} \;=\; \frac{1}{a(z)\,y^{-1}(z) + b(z)\,\big(y^{-1}(z)\big)^{\alpha}} \;, \qquad \text{ou seja,} \qquad \big(y^{-1}\big)'(z) \;=\; a(z)\,y^{-1}(z) + b(z)\,\big(y^{-1}(z)\big)^{\alpha} \;,$$

que se trata de uma equação de Bernoulli generalizada para y^{-1}. A solução de equações de Bernoulli foi apresentada na Seção 12.2, página 520. ⌑

Exemplo 12.2 Considere a equação de segunda ordem $y''(x) + xy(x)\big(y'(x)\big)^3 = 0$. Pela transformação de acima, essa equação equivale a

$$-\frac{\big(y^{-1}\big)''(z)}{\Big[\big(y^{-1}\big)'(z)\Big]^3} + y^{-1}(z)\, z\left(\frac{1}{(y^{-1})'(z)}\right)^3 \;=\; 0 \quad \text{ou seja,} \quad \big(y^{-1}\big)''(z) - zy^{-1}(z) \;=\; 0\;,$$

que se trata da equação de Airy para y^{-1}. A solução da equação de Airy pode ser obtida pelo método de expansão em série de potências. Vide Seção 14.1.4, página 622. ⌑

12.7 Solução de Equações Exatas e o Método dos Fatores Integrantes

• Equações exatas de primeira ordem

Seja $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ um domínio aberto e simplesmente conexo e sejam definidas em $\mathcal{D}$ duas funções diferenciáveis $A_1(x_1,\ x_2)$ e $A_2(x_1,\ x_2)$. A equação diferencial

$$A_1\big(x,\ y(x)\big) + A_2\big(x,\ y(x)\big)y'(x) \;=\; 0 \tag{12.18}$$

é dita ser uma *equação exata* se

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_2}(x_1,\ x_2) - \frac{\partial A_2}{\partial x_1}(x_1,\ x_2) \;=\; 0 \tag{12.19}$$

para todo $(x_1,\ x_2) \in \mathcal{D}$. Uma equação exata pode ser resolvida em termos de uma equação implícita pelo método que segue.

A condição (12.19) diz-nos que o campo bidimensional $\vec{A} = (A_1,\ A_2)$ é irrotacional. Como $\mathcal{D}$ é simplesmente conexo, $\vec{A}$ pode ser escrito como o gradiente de uma função U. Essa situação é análoga ao que ocorre na Mecânica Clássica quando se lida com forças conservativas, as quais podem ser expressas como o gradiente de um potencial.

De fato, sejam $(a,\ b)$, $(x_1,\ x_2) \in \mathcal{D}$ e seja C uma curva diferenciável orientada de $(a,\ b)$ a $(x_1,\ x_2)$ inteiramente contida em $\mathcal{D}$: $C = \big\{\big(w_1(s),\ w_2(s)\big) \in \mathcal{D},\ s \in [0,\ 1]\big\}$, onde as funções $w_1(s)$ e $w_2(s)$ são contínuas e diferenciáveis e satisfazem $\big(w_1(0),\ w_2(0)\big) = (a,\ b)$, $\big(w_1(1),\ w_2(1)\big) = (x_1,\ x_2)$. Defina-se a função $U : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ como sendo a integral de linha do campo $\vec{A}$ ao longo de C do ponto $(a,\ b)$ ao ponto $(x_1,\ x_2)$:

$$\begin{aligned} U(x_1,\ x_2) \quad &:= \quad \int_{(a,\ b)\ C}^{(x_1,\ x_2)} \vec{A}(\vec{w})\cdot d\vec{w} \;=\; \int_{(a,\ b)\ C}^{(x_1,\ x_2)} \Big(A_1(w_1,\ w_2)\,dw_1 + A_2(w_1,\ w_2)\,dw_2\Big) \\ &= \quad \int_0^1 \left(A_1\big(w_1(s),\ w_2(s)\big)\frac{dw_1}{ds} + A_2\big(w_1(s),\ w_2(s)\big)\frac{dw_2}{ds}\right)\ ds\;. \end{aligned} \tag{12.20}$$

Como $\mathcal{D}$ é simplesmente conexa, o Teorema de Green e a condição (12.19) implicam que essa integral não depende da particular curva C adotada, mas apenas dos pontos extremos $(a,\ b)$ e $(x_1,\ x_2)$. Pela definição de U é imediato que

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1,\ x_2) \;=\; A_1(x_1,\ x_2) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1,\ x_2) \;=\; A_2(x_1,\ x_2) \tag{12.21}$$

em todo $\mathcal{D}$. Assim, a equação (12.18) pode ser escrita como

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}\big(x,\ y(x)\big) + \frac{\partial U}{\partial x_2}\big(x,\ y(x)\big)y'(x) \;=\; 0, \qquad \text{ou seja,} \qquad \frac{d}{dx}U\big(x,\ y(x)\big) \;=\; 0\;.$$

Dessa forma, concluímos que a solução da equação (12.18) é a solução da equação implícita

$$U\big(x,\ y(x)\big) \;=\; U_0\;,$$

caso essa exista. Aqui U_0 é uma constante. Se estivermos interessados na condição inicial $y(x_0) = y_0$, para $(x_0,\ y_0) \in \mathcal{D}$, teremos $U_0 = U(x_0,\ y_0)$. Pelo Teorema da Função Implícita[7], a equação $U(x,\ y(x)) = U(x_0,\ y_0)$ terá uma solução $y(x)$ em uma vizinhança de x_0 satisfazendo $y(x_0) = y_0$ se U for contínua e diferenciável em torno de $(x_0,\ y_0)$ e se $\frac{\partial U}{\partial x_2}(x_0,\ y_0) \neq 0$, ou seja, se $A_2(x_0,\ y_0) \neq 0$.

E. 12.12 *Exercício*. Mostre que a equação diferencial

$$\big(3x^2 - y(x)^2 - 7\big) - \big(e^{y(x)} + 2xy(x) + 1\big)y'(x) \ = \ 0$$

é exata e mostre que suas soluções são soluções da equação implícita $y(x) - y(x)^2 + e^{y(x)} + 7x - x^3 =$ constante. ✠

• Método dos fatores integrantes

Dada uma equação diferencial como

$$B_1\big(x,\ y(x)\big) + B_2\big(x,\ y(x)\big)y'(x) \ = \ 0 \ , \tag{12.22}$$

com $B_1(x_1,\ x_2)$ e $B_2(x_1,\ x_2)$ definidas em um domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, aberto e simplesmente conexo, nem sempre ocorre de a condição de exatidão $\frac{\partial B_1}{\partial x_2}(x_1,\ x_2) - \frac{\partial B_2}{\partial x_1}(x_1,\ x_2) = 0$ ser satisfeita. Em alguns casos, porém, ao multiplicarmos a equação (12.22) por uma fator $\omega(x,\ y(x))$ convenientemente escolhido, a equação pode transformar-se em uma equação exata, a qual pode, então, ser resolvida pelo método descrito acima. Um tal ω, se existir, será denominado *fator integrante* da equação (12.22).

Definindo $A_1(x_1,\ x_2) := \omega(x_1,\ x_2)B_1(x_1,\ x_2)$ e $A_2(x_1,\ x_2) := \omega(x_1,\ x_2)B_2(x_1,\ x_2)$, desejamos determinar quais funções ω tornam válida a condição (12.19), ou seja, desejamos determinar a solução ω da equação diferencial parcial linear de primeira ordem

$$B_1(x_1,\ x_2)\frac{\partial \omega}{\partial x_2}(x_1,\ x_2) - B_2(x_1,\ x_2)\frac{\partial \omega}{\partial x_1}(x_1,\ x_2) + \omega(x_1,\ x_2)\left(\frac{\partial B_1}{\partial x_2}(x_1,\ x_2) - \frac{\partial B_2}{\partial x_1}(x_1,\ x_2)\right) \ = \ 0 \ . \tag{12.23}$$

Resolver essa equação pode não ser possível, ou pode ser uma tarefa ainda mais difícil que resolver a equação original (12.22) por outros meios. Em certos casos ela pode ser resolvida pelo método das características, do qual falaremos adiante, mas há duas situações especiais que tornam a solução simples:

I. $\dfrac{1}{B_2(x_1,\ x_2)}\left(\dfrac{\partial B_1}{\partial x_2}(x_1,\ x_2) - \dfrac{\partial B_2}{\partial x_1}(x_1,\ x_2)\right) = \alpha(x_1)$, uma função apenas da variável x_1.

Nesse caso, (12.23) fica

$$\frac{B_1(x_1,\ x_2)}{B_2(x_1,\ x_2)}\frac{\partial \omega}{\partial x_2}(x_1,\ x_2) - \frac{\partial \omega}{\partial x_1}(x_1,\ x_2) + \omega(x_1,\ x_2)\alpha(x_1) \ = \ 0 \ .$$

Escolhendo $\omega(x_1,\ x_2) = \omega(x_1)$, uma função apenas da variável x_1, essa equação simplifica-se para

$$\omega'(x_1) - \omega(x_1)\alpha(x_1) \ = \ 0 \ ,$$

cuja solução é

$$\omega(x_1) \ = \ c\exp\left(+\int_a^{x_1} \alpha(\xi)d\xi\right)$$

sendo a e c arbitrários (sem perda, podemos escolher $c = 1$).

II. $\dfrac{1}{B_1(x_1,\ x_2)}\left(\dfrac{\partial B_1}{\partial x_2}(x_1,\ x_2) - \dfrac{\partial B_2}{\partial x_1}(x_1,\ x_2)\right) = \beta(x_2)$, uma função apenas da variável x_2.

Nesse caso, (12.23) fica

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_2}(x_1,\ x_2) - \frac{B_2(x_1,\ x_2)}{B_1(x_1,\ x_2)}\frac{\partial \omega}{\partial x_1}(x_1,\ x_2) + \omega(x_1,\ x_2)\beta(x_2) \ = \ 0 \ .$$

[7] Vide Seção 28.3, página 1394, ou qualquer bom livro de Cálculo de funções de várias variáveis, por exemplo, [72, 219, 220].

Escolhendo $\omega(x_1,\ x_2) = \omega(x_2)$, uma função apenas da variável x_2, essa equação simplifica-se para

$$\omega'(x_2) + \omega(x_2)\beta(x_2) \ = \ 0 \ ,$$

cuja solução é

$$\omega(x_2) \ = \ d \exp\left(-\int_b^{x_2} \beta(\xi) d\xi\right)$$

sendo b e d arbitrários (sem perda, podemos escolher $d = 1$).

Exemplo 12.3 *Revisitando a equação (12.1) e reencontrando sua solução (12.2).*

A equação $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ pode ser escrita na forma (12.22) com $B_1(x_1,\ x_2) = a(x_1)x_2 - b(x_1)$ e $B_2(x_1,\ x_2) = 1$. Tem-se aqui que $\frac{1}{B_2(x_1,\ x_2)}\left(\frac{\partial B_1}{\partial x_2}(x_1,\ x_2) - \frac{\partial B_2}{\partial x_1}(x_1,\ x_2)\right) = a(x_1)$ e vale, portanto, a condição do item I, acima, sendo o fator integrante dado por

$$\omega(x_1) = \exp\left(\int_{x_0}^{x_1} a(\xi) d\xi\right)$$

com x_0 arbitrário. Assim,

$$A_1(x_1,\ x_2) \ = \ \exp\left(\int_{x_0}^{x_1} a(\xi) d\xi\right)\big(a(x_1)x_2 - b(x_1)\big) \qquad \text{e} \qquad A_2(x_1,\ x_2) \ = \ \exp\left(\int_{x_0}^{x_1} a(\xi) d\xi\right) .$$

Com

$$U(x_1,\ x_2) \ = \ x_2 \exp\left(\int_{x_0}^{x_1} a(\xi) d\xi\right) - \int_{x_0}^{x_1} b(\chi) \exp\left(\int_{x_0}^{\chi} a(\xi) d\xi\right) \, d\chi$$

constata-se que

$$A_1(x_1,\ x_2) \ = \ \frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1,\ x_2) \qquad \text{e} \qquad A_2(x_1,\ x_2) \ = \ \frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1,\ x_2) \ .$$

E. 12.13 *Exercício*. Obtenha U calculando a integral em (12.20) para alguma curva C conveniente. ✤

Pelo que vimos, a solução da equação diferencial satisfaz a equação implícita $U(x,\ y(x)) = U_0$, sendo U_0 uma constante. Para uma condição inicial $y(x_0) = y_0$, tem-se $U_0 = U(x_0,\ y_0) = y_0$ e a equação implícita $U(x,\ y(x)) = y_0$ fica

$$y(x) \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi\right) - \int_{x_0}^{x} b(\chi) \exp\left(\int_{x_0}^{\chi} a(\xi) d\xi\right) \, d\chi \ = \ y_0 \ ,$$

cuja solução é

$$y(x) \ = \ \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi\right)\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} b(\chi) \exp\left(\int_{x_0}^{\chi} a(\xi) d\xi\right) \, d\chi\right] \ ,$$

que é precisamente a solução dada em (12.2), como facilmente se constata. ⌑

• Equações exatas de ordem n

Veremos agora como as ideias de acima podem ser generalizadas para equações de ordem n.

Seja $F(x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ uma função de $n + 2$ variáveis que define uma equação diferencial ordinária de ordem n:

$$F\Big(x,\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)\Big) \ = \ 0 \ . \tag{12.24}$$

Essa equação é dita ser uma *equação diferencial exata* se existir uma função diferenciável $U(x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})$ de $n + 1$ variáveis tal que

$$F(x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) \ =$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}) + x_1 \frac{\partial U}{\partial x_0}(x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}) + \cdots + x_n \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}}(x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}) \ , \tag{12.25}$$

então a equação (12.24) torna-se

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big(x,\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)\Big) + y'(x)\frac{\partial U}{\partial x_0}\Big(x,\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)\Big)$$
$$+\cdots+y^{(n)}(x)\frac{\partial U}{\partial x_{n-1}}\Big(x,\ y(x),\ y'(x),\ \ldots\ ,\ y^{(n-1)}(x)\Big) \ = \ 0\ ,$$

ou seja, $\frac{d}{dx}U\Big(x,\ y(x),\ y'(x),\ \ldots\ ,\ y^{(n-1)}(x)\Big)=0$ e, portanto, vale

$$U\Big(x,\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)\Big) \ = \ U_0\ , \tag{12.26}$$

onde U_0 é uma constante, fixada pelos n "valores iniciais" $y(x_0),\ y'(x_0),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)$, para algum ponto x_0: $U_0 = U\Big(x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)\Big)$.

A expressão (12.26) é uma nova equação diferencial para y, mas de ordem no máximo igual a $n-1$. Assim, toda equação exata de ordem n pode ser transformada em uma equação de ordem menor, a qual poderá eventualmente ser resolvida por algum dos métodos disponíveis.

Claro é por (12.25) que a equação (12.24) é da forma

$$A_1\Big(x,\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)\Big)+A_2\Big(x,\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)\Big)\,y^{(n)}(x) \ = \ 0\ , \tag{12.27}$$

onde

$$A_1(x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}) \ = \ \frac{\partial U}{\partial x}(x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})+x_1\frac{\partial U}{\partial x_0}(x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}) \tag{12.28}$$
$$+\cdots+x_{n-1}\frac{\partial U}{\partial x_{n-2}}(x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})\ ,$$

$$A_2(x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}) \ = \ \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}}(x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})\ . \tag{12.29}$$

As expressões (12.27)-(12.29) generalizam (12.18)-(12.21), do caso de equações exatas de ordem $n=1$. Naquele caso sabíamos que a relação (12.19) é necessária e suficiente (caso $\mathcal{D}$ seja simplesmente conexo) para garantir exatidão, ou seja, a existência de uma função U com as propriedades desejadas. No caso $n>1$, infelizmente não há modo simples de expressar as condições necessárias e suficientes para que A_1 e A_2 tenham a forma dada em (12.28) e (12.29), respectivamente.

Exemplo 12.4 Seja V diferenciável e $f=-V'$. A equação diferencial de segunda ordem $my''(x)-f\big(y(x)\big)=0$ não é exata, mas multiplicando-a por $y'(x)$, ficamos com $y'(x)\Big(my''(x)-f\big(y(x)\big)\Big)=0$, que pode ser escrita como $F\big(x,\ y(x),\ y'(x),\ y''(x)\big)=0$ para $F(x,\ x_0,\ x_1,\ x_2)=x_1\big(mx_2-f(x_0)\big)$ e para essa F, podemos encontrar uma função $U(x,\ x_0,\ x_1)$ tal que a condição de exatidão (12.25) é satisfeita. De fato, essa função é $U(x,\ x_0,\ x_1)=\frac{m}{2}x_1^2+V(x_0)$ (verifique!). A nova equação (12.26) fica nesse caso

$$\frac{m}{2}\big(y'(x)\big)^2+V\big(y(x)\big) \ = \ U_0 \ = \ \text{constante.}$$

O estudante pode reconhecer nisso a equação da conservação da energia em uma dimensão. Podemos então, localmente, escrever $y'(x)=\pm\sqrt{\frac{2}{m}(U_0-V(y(x)))}$, cuja solução, após integração, é obtida invertendo localmente

$$x \ = \ \pm\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}\big(U_0-V(y)\big)}}+\text{constante.}$$

¤

E. 12.14 *Exercício*. Use o procedimento descrito acima para resolver a equação do oscilador harmônico simples $my''(x)+ky(x)=0$, $m>0$, $k>0$ ✠

12.8 Soluções das Equações de D'Alembert-Lagrange e Clairaut

Uma equação diferencial de primeira ordem da forma

$$xA\big(y'(x)\big) + B\big(y'(x)\big) - y(x) \;=\; 0\;, \tag{12.30}$$

com A e B contínuas e diferenciáveis, é denominada *equação de D'Alembert*[8] ou *equação de Lagrange*[9]. No caso em que $A(z) \equiv z$, a equação é conhecida como *equação de Clairaut*[10]:

$$xy'(x) - y(x) + B\big(y'(x)\big) \;=\; 0\;. \tag{12.31}$$

Diferenciando a equação (12.30) em relação a x, obtem-se

$$A\big(y'(x)\big) + \Big(xA'\big(y'(x)\big) + B'\big(y'(x)\big)\Big)y''(x) - y'(x) \;=\; 0\;.$$

Definindo $v(x) = y'(x)$, isso diz que

$$A\big(v(x)\big) - v(x) + \Big(xA'\big(v(x)\big) + B'\big(v(x)\big)\Big)v'(x) \;=\; 0\;. \tag{12.32}$$

No que segue apresentaremos soluções das equações de acima, começando com a equação de Clairaut (12.31) e depois tratando da equação de D'Alembert-Lagrange (12.30).

- **Soluções da equação de Clairaut. A solução singular**

No caso em que $A(z) \equiv z$ (equação de Clairaut) a equação (12.32) reduz-se a

$$\Big(x + B'\big(v(x)\big)\Big)v'(x) \;=\; 0\;. \tag{12.33}$$

Há duas formas de satisfazer essa equação: a. impondo $v'(x) = 0$ ou, b. impondo $x + B'\big(v(x)\big) = 0$.

a. Impondo-se $v'(x) = 0$, tem-se $y(x) = c_0x + c_1$, com c_0 e c_1 constantes. Essas constantes, porém, não são independentes, pois (12.31) tem de ser satisfeita. Inserindo $y(x) = c_0x + c_1$ em (12.31) obtem-se $c_1 = B(c_0)$. Assim, uma solução de (12.31) é
$$y_1(x) \;\equiv\; y_1(x,\; c_0) \;=\; c_0x + B(c_0)\;,$$
que depende de um parâmetro livre c_0.

b. Aqui impomos $x + B'\big(v(x)\big) = 0$, obtendo localmente $v(x) = \big(B'\big)^{-1}(-x)$. Lembramos, porém, que (12.31) impõe uma relação entre y e v: $y(x) = xv(x) + B\big(v(x)\big)$. Assim, uma segunda solução de (12.31) é dada (localmente) por
$$y_2(x) \;=\; x\big(B'\big)^{-1}(-x) + B\Big(\big(B'\big)^{-1}(-x)\Big)\;.$$

O fato notável sobre a solução y_2 é que a mesma não depende de nenhum parâmetro livre (que poderia ser fixado, eventualmente, por uma condição inicial). Soluções desse tipo são denominadas *soluções singulares*[11] de equações diferenciais. Tecnicamente, a definição de *solução singular* é a seguinte. Uma solução y_s de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem é dita ser uma *solução singular* se for *tangente* a cada solução geral y_g dessa equação, ou seja, se para todo x no domínio de definição da equação houver uma solução geral y_g tal que $y_s(x) = y_g(x)$ e $y_s'(x) = y_g'(x)$.

E. 12.15 *Exercício*. Mostre que a solução $y_2(x) = x\big(B'\big)^{-1}(-x) + B\Big(\big(B'\big)^{-1}(-x)\Big)$ é tangente às soluções $y_1(x) = c_0x + B(c_0)$. Sugestão: use o fato (e prove-o!) que $x\big(B'\big)^{-1}(-x) + B\Big(\big(B'\big)^{-1}(-x)\Big)$ é uma primitiva de $\big(B'\big)^{-1}(-x)$. ✠

[8] Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783).
[9] Joseph-Louis Lagrange (1736–1813).
[10] Alexis Claude Clairaut (1713–1765).
[11] Trata-se de uma nomenclatura infeliz, pois o a expressão "singular" é usada com vários outros significados na literatura das equações diferenciais.

Geometricamente, uma solução singular pode ser visualizada da seguinte forma. Desenha-se no plano (x, y) a família de todas as curvas $(x, y_g(x))$, $x \in \mathbb{R}$, para todas as soluções gerais y_g. A solução singular corresponde à *curva envoltória* dessa família de curvas.

A equação de Clairaut, com sua solução singular, foi resolvida por esse autor em 1734.

Uma terceira solução de (12.32) poderia ser obtida procedendo de modo ligeiramente distinto do que foi feito na segunda solução. Resolvendo localmente em v a equação $x + B'\big(v(x)\big) = 0$, obtem-se $v(x) = \big(B'\big)^{-1}(-x)$. Como $v(x) = y'(x)$, obtem-se aparentemente uma terceira solução por integração: $y_3(x) = C(x) + c_2$, c_2 sendo uma constante e $C(x)$ sendo uma primitiva de $\big(B'\big)^{-1}(-x)$, ou seja, tal que $C'(x) = \big(B'\big)^{-1}(-x)$. Essa solução aparenta ter um parâmetro livre e aparenta ser distinta da solução y_2, mas isso não é verdade. É preciso ainda impor que y_3 satisfaça (12.31), ou seja, devemos impor que

$$x\big(B'\big)^{-1}(-x) - C(x) - c_2 + B\Big(\big(B'\big)^{-1}(-x)\Big) = 0 \ .$$

(O leitor deve observar que $x\big(B'\big)^{-1}(-x) + B\Big(\big(B'\big)^{-1}(-x)\Big)$ é também uma primitiva de $\big(B'\big)^{-1}(-x)$, pois

$$\frac{d}{dx}\left(x\big(B'\big)^{-1}(-x) + B\Big(\big(B'\big)^{-1}(-x)\Big)\right) \;=\; \big(B'\big)^{-1}(-x)$$

como facilmente se verifica). Daí, devemos ter $c_2 = -C(x) + \left(x\big(B'\big)^{-1}(-x) + B\Big(\big(B'\big)^{-1}(-x)\Big)\right)$ e, portanto, $y_3(x) = x\big(B'\big)^{-1}(-x) + B\Big(\big(B'\big)^{-1}(-x)\Big)$, que coincide com a solução y_2.

Exemplo 12.5 Considere a equação de Clairaut

$$xy'(x) - y(x) + \big(y'(x)\big)^2 \;=\; 0 \ . \tag{12.34}$$

Nesse caso, $B(z) = z^2$, $B'(z) = 2z$ e $\big(B'\big)^{-1}(w) = w/2$. Assim, as duas soluções encontradas acima são $y_1(x) \equiv y_1(x, c_0) = c_0 x + (c_0)^2$ e $y_2(x) = -x^2/4$, como facilmente se constata. ⌑

E. 12.16 *Exercício*. Verifique que as soluções $y_1(x, c_0)$ e $y_2(x)$ dadas no exemplo acima são de fato soluções de (12.34). Mostre explicitamente que $y_2(x) = -x^2/4$ é uma solução singular no sentido da definição dada acima, ou seja, para todo x existe c_0 tal que $y_2(x) = y_1(x, c_0)$ e $y_2'(x) = y_1'(x, c_0)$. Desenhe várias das curvas $\big(x, y_1(x, c_0)\big)$, $x \in \mathbb{R}$, para vários valores de $c_0 \in \mathbb{R}$ e visualize a curva envoltória dessa família de curvas, a qual corresponderá à curva $\big(x, y_2(x)\big)$, $x \in \mathbb{R}$, da solução singular. ✠

E. 12.17 *Exercício*. Determine as soluções y_1 e y_2 da equação de Clairaut

$$xy'(x) - y(x) + \big(y'(x)\big)^4 \;=\; 0 \ ,$$

e resolva as mesmas questões propostas no Exercício E. 12.16. ✠

• Soluções da equação de D'Alembert-Lagrange

Daqui por diante suporemos que $A(z) \not\equiv z$. Como veremos, a equação (12.32) pode ser resolvida com o uso do método dos fatores integrantes para obter uma equação exata e depois resolvê-la como tal. Assim como (12.30), a equação (12.32) é uma equação de primeira ordem, mas a dependência em v' é muito mais simples. Em verdade, identificando

$$B_1\big(x, v(x)\big) \;=\; A\big(v(x)\big) - v(x) \qquad \text{e} \qquad B_2\big(x, v(x)\big) \;=\; xA'\big(v(x)\big) + B'\big(v(x)\big) \ ,$$

ou seja, para,

$$B_1\big(x_1, x_2\big) \;=\; A(x_2) - x_2 \qquad \text{e} \qquad B_2\big(x_1, x_2\big) \;=\; x_1 A'(x_2) + B'(x_2) \ ,$$

a equação (12.32) tem a forma (12.22). A condição de exatidão (12.19) não é satisfeita (verifique!) e desejamos saber se um fator integrante pode ser encontrado. É fácil ver que nesse caso

$$\frac{1}{B_1\big(x_1, x_2\big)}\left(\frac{\partial B_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \frac{\partial B_2}{\partial x_1}(x_1, x_2)\right) \;=\; -\frac{1}{A(x_2) - x_2} \;=:\; \beta(x_2) \ ,$$

uma função apenas da variável x_2. Vale, assim, o caso II da página 528, e o fator integrante é

$$\omega(x_2) \;=\; \exp\left(\int_b^{x_2} \frac{1}{A(\xi)-\xi}d\xi\right) .$$

Assim, definindo

$$A_1(x_1,\, x_2) \;:=\; \omega(x_2)B_1(x_1,\, x_2) \;=\; \big(A(x_2)-x_2\big)\exp\left(\int_b^{x_2} \frac{1}{A(\xi)-\xi}d\xi\right) ,$$

$$A_2(x_1,\, x_2) \;:=\; \omega(x_2)B_2(x_1,\, x_2) \;=\; \big(x_1A'(x_2)+B'(x_2)\big)\exp\left(\int_b^{x_2} \frac{1}{A(\xi)-\xi}d\xi\right) ,$$

a equação $A_1\big(x,\ v(x)\big)+A_2\big(x,\ v(x)\big)v'(x)=0$, obtida multiplicando (12.32) por $\omega\big(v(x)\big)$, é exata. É fácil verificar que nesse caso

$$U(x_1,\, x_2) \;=\; x_1\big(A(x_2)-x_2\big)\exp\left(\int_b^{x_2} \frac{1}{A(\xi)-\xi}d\xi\right) + \int_b^{x_2} B'(\chi)\exp\left(\int_b^{\chi} \frac{1}{A(\xi)-\xi}d\xi\right) d\chi \, . \tag{12.35}$$

E. 12.18 *Exercício*. Prove isso! ✠

Assim, a solução para (12.32) é dada por $U\big(x,\ v(x)\big)=c_0$, c_0 sendo uma constante. Agora, para a obtenção das soluções desejadas de (12.30) há dois procedimentos:

a. Observa-se que a equação (12.30) pode ser lida como $xA\big(v(x)\big)+B\big(v(x)\big)=y(x)$, que relaciona v e y. Ao menos em princípio, podemos resolver essa equação para v e obter $v(x)=I\big(x,\ y(x)\big)$. Inserindo isso em $U\big(x,\ v(x)\big)=c_0$, obtemos $U\big(x,\ I(x,\ y(x))\big)=c_0$. Essa equação pode ser, ao menos em princípio, resolvida em y para fornecer uma solução $y_1(x)$, dependente de um parâmetro livre c_0.

b. Resolve-se localmente a equação $U\big(x,\ v(x)\big)=c_0$ para v, obtendo-se $v(x)=H(x,\ c_0)$ para alguma função H. Observa-se que a equação (12.30) pode ser lida como $y(x)=xA\big(v(x)\big)+B\big(v(x)\big)$, que fornece y se v é dado. Assim, $y_2(x)=xA\big(H(x,\ c_0)\big)+B\big(H(x,\ c_0)\big)$ é uma segunda solução de (12.30). É de se notar que a solução y_2 depende de um parâmetro livre c_0.

Um terceiro procedimento seria resolver localmente a equação $U\big(x,\ v(x)\big)=c_0$ para v, obtendo $v(x)=H(x,\ c_0)$ para alguma função H, donde se extrai $y_3(x)=\int H(x,\ c_0)dx+c_1$, c_1 sendo uma nova constante. Para que se tenha uma solução de (12.30) é preciso inserir essa solução naquela equação, o que implica $y_3(x)=xA\big(H(x,\ c_0)\big)+B\big(H(x,\ c_0)\big)$, mostrando que essa terceira solução é idêntica à y_2.

Exemplo 12.6 A equação diferencial $(2x+1)y'(x)-y(x)=0$ pode ser facilmente resolvida por integração, fornecendo a solução $y_0(x)=k\sqrt{2x+1}$, k sendo uma constante. Para ilustrar o método de solução desenvolvido acima, escrevemos essa equação diferencial na forma de uma equação de D'Alembert-Lagrange:

$$2xy'(x)-y(x)+y'(x) \;=\; 0 \, . \tag{12.36}$$

Aqui temos $A(z)=2z$, $B(z)=z$, $B'(z)=1$. Para a função U tem-se por (12.35) (tomamos aqui $b=1$, sem perda de generalidade) $U(x_1,\ x_2) \;=\; x_1x_2\exp\left(\int_1^{x_2}\frac{1}{\xi}d\xi\right)+\int_1^{x_2}\exp\left(\int_1^{\chi}\frac{1}{\xi}d\xi\right)d\chi \;=\; x_1x_2^2+\int_1^{x_2}\chi\,d\chi \;=\; \left(x_1+\frac{1}{2}\right)x_2^2-\frac{1}{2}$. A equação $U\big(x,\ v(x)\big)=c_0$ fica, então, $(2x+1)v(x)^2=c_0'$ (com $c_0'=2c_0+1$). Assim, $v(x)=\pm\sqrt{\frac{c_0'}{2x+1}}$. Assim, $H(x,\, c_0')=\pm\sqrt{\frac{c_0'}{2x+1}}$ e a solução y_2 fica $y_2(x)=\pm\sqrt{c_0'(2x+1)}$, que coincide em forma com a solução y_0.

Para a solução y_1 começamos por notar que (12.36) diz-nos que $y(x)=(2x+1)v(x)$ e, portanto, $v(x)=I\big(x,y(x)\big)=y(x)/(2x+1)$. A equação $U\Big(x,\ I\big(x,y(x)\big)\Big)=c_0$ fica $y(x)^2/(2x+1)-1=c_0$, cuja solução é $y_1(x)=\pm\sqrt{c_0'(2x+1)}$, também idêntica em forma à solução y_0. O fato de as soluções y_1 e y_2 coincidirem decorre de (12.36) ser uma equação linear, apresentando apenas uma solução, dependente de um parâmetro (vide Seção 12.1, página 519). ⌑

Exemplo 12.7 Considere a equação diferencial

$$2xy'(x) - y(x) - \frac{\alpha}{3}\big(y'(x)\big)^3 \;=\; 0 \;, \tag{12.37}$$

$\alpha \neq 0$ sendo uma constante. Essa é uma equação de D'Alembert-Lagrange com $A(z) = 2z$, $B(z) = -\frac{\alpha}{3}z^3$, $B'(z) = -\alpha z^2$. Para a função U tem-se, por (12.35) (tomamos aqui $b = 1$, sem perda de generalidade),

$$U(x_1,\ x_2) \;=\; x_1 x_2 \exp\left(\int_1^{x_2} \frac{1}{\xi} d\xi\right) - \alpha \int_1^{x_2} \chi^2 \exp\left(\int_1^{\chi} \frac{1}{\xi} d\xi\right) d\chi \;=\; x_1 x_2^2 - \alpha \int_1^{x_2} \chi^3 \, d\chi \;=\; x_1 x_2^2 - \frac{\alpha}{4}\big(x_2^4 - 1\big) \;.$$

A equação $U(x,\ v(x)) = c_0$ fica $v(x)^4 - \frac{4x}{\alpha}v(x)^2 - c_0' = 0$ (com $c_0' = -\frac{4c_0}{\alpha} - 1$) cujas quatro soluções são

$$v(x) \;=\; \pm\sqrt{\frac{2x}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{x^2}{\alpha^2} + (c_0')^2}} \;.$$

Por (12.37), $y(x) = v(x)\left(2x - \frac{\alpha}{3}v(x)^2\right)$ e, assim, obtem-se quatro soluções

$$y_2(x) \;=\; \pm\left(\frac{4x}{3} \pm \frac{(-\alpha)}{3}\sqrt{\frac{4x^2}{\alpha^2} + (c_0')^2}\right)\sqrt{\frac{2x}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{4x^2}{\alpha^2} + (c_0')^2}} \;, \tag{12.38}$$

sendo que os dois últimos sinais $\pm$ devem ser escolhidos iguais.

Para obter as soluções y_1 é preciso primeiro resolver em v a equação de terceiro grau $y(x) = 2xv(x) - \frac{\alpha}{3}v(x)^3$. Para soluções de equações de terceiro grau, vide, por exemplo, [309]. ⌑

E. 12.19 *Exercício*. Verifique que (12.38) é, de fato, uma solução de (12.37). ✠