Capítulo 14
Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares no Plano Complexo

Conteúdo

Trataremos no presente capítulo de apresentar soluções de equações diferenciais ordinárias lineares e homogêneas, regulares ou com pontos singulares regulares. Por simplicidade, e para atender ao interesse de problemas físicos, trataremos apenas de equações de segunda ordem mas, em essência, tudo o que faremos facilmente se generaliza para equações de ordem superior. Nossa abordagem estará centrada no chamado método de expansão em série de potências (para equações regulares) e no método de Frobenius (para equações com singularidades regulares). Estudaremos tanto casos gerais (com razoável detalhe) quanto equações particulares de interesse em Física.

Em um certo sentido, o presente capítulo dá continuidade ao Capítulo 13, mas dele só utilizaremos os Teoremas 13.3 e 13.4, das páginas 575 e 579, respectivamente. Esses teoremas fundamentais são as justificativas dos métodos de solução que empregaremos.

Comentamos ainda que trataremos as equações diferenciais como equações no plano complexo ainda que, na Física, o interesse tipicamente resida em equações na reta real pois, como discutimos no Capítulo 13, a natureza das soluções e a justificativa dos métodos de solução são melhor entendidas quando abandonamos as limitações da reta real de modo a explorar a estrutura analítica das equações e suas soluções.

Por vezes, omitiremos detalhes de cálculos e o estudante é convidado a completá-los como exercício. Apesar de alguns desses cálculos omitidos serem reconhecidamente entediantes (não só os omitidos, aliás), o estudante é recomendado fazê-los ao menos uma vez durante sua existência terrena, pois não é possível apoderar-se do conhecimento aqui desenvolvido apenas por meio de leitura passiva.

O tratamento que faremos de soluções de equações gerais é bastante detalhado, um tanto mais do que o por vezes encontrado na literatura. Os resultados gerais estão resumidos nos Teoremas 14.1 e 14.2, adiante. O tratamento de certas equações particulares de interesse em Física (como as de Legendre, Hermite, Airy, Tchebychev, Bessel e Laguerre) é razoavelmente completo e várias propriedades especiais das soluções, tais como relações de ortogonalidade, relações de recorrência, fórmulas do tipo de Rodrigues, representações integrais etc. (todas importantes na resolução de problemas de Física) são discutidas com detalhe no Capítulo 15, página 675. Uma omissão é um estudo detalhado do comportamento assintótico de certas soluções. Esperamos que futuramente essa lacuna possa ser completada.

Exemplos selecionados de problemas de Física onde algumas das equações particulares que discutimos se apresentam (e a consequente resolução desses problemas) poderão ser encontrados no Capítulo 21, página 901, ao qual remetemos os estudantes interessados em adquirir um pouco de motivação. A leitura daquele capítulo requer um conhecimento parcial das soluções das equações diferenciais e suas propriedades, de modo que o estudante deverá alternar sua leitura com a do material que a precede nos Capítulos 14 e 15.

Todas as equações particulares tratadas, suas soluções e propriedades dessas soluções, são amplamente discutidas na vasta literatura pertinente e a ela remetemos os estudantes interessados. Vide, por exemplo, [264], [335], [201], [13], [325], [66], [150], [151], [37], [71], [72], [100], [293], [145], [141]. Para uma abordagem da teoria das funções especiais sob o ponto de vista de teoria de grupos, vide [321].

14.1 Soluções em Séries de Potências para Equações Regulares

Vamos na presente seção ilustrar o Teorema 13.3 da página 575 estudando a solução por série de potências de algumas equações diferenciais ordinárias, homogêneas de segunda ordem e regulares de interesse (especialmente em Física). Boa parte dos métodos apresentados nos exemplos aplicam-se a equações de ordem maior que dois, mas não trataremos de tais generalizações aqui pois elas pouco apresentam de especial e seu interesse na Física é reduzido.

Na Seção 14.2, página 626, ilustraremos o Teorema 13.4, página 579, tratando de forma semelhante várias equações singulares regulares de interesse pelo método de Frobenius.

Conforme demonstramos em páginas anteriores (Teorema 13.3, página 575), se a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$y''(z) + a(z)y'(z) + b(z)y(z) \ = \ 0 \tag{14.1}$$

for tal que os coeficientes $a(z)$ e $b(z)$ são funções analíticas de z em torno de um ponto z_0, então suas soluções serão igualmente analíticas em torno desse ponto e poderemos procurar resolvê-la em termos de séries de potência centradas em z_0:

$$y(z) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \ . \tag{14.2}$$

O chamado *método de série de potências* consiste precisamente em inserir o Ansatz (14.2) na equação (14.1) e determinar recursivamente os coeficientes c_n. Pelas conclusões obtidas anteriormente, resumidas no Teorema 13.3 da página 575, a solução obtida deve ser convergente pelo menos no maior disco aberto centrado em z_0 no qual ambas as funções $a(z)$ e $b(z)$ sejam também analíticas.

Ilustraremos a aplicação desse método na resolução da equação do oscilador harmônico simples e nas equações de Legendre, Hermite, Airy e Tchebychev, todas equações de interesse em Física. Ao final discutiremos a solução do problema geral.

14.1.1 A Equação do Oscilador Harmônico Simples

Por razões pedagógicas, vamos começar discutindo uma equação diferencial bastante simples e familiar. Seja a bem-conhecida equação do oscilador harmônico simples

$$y''(z) + \omega_0^2 y(z) \;=\; 0 \,, \tag{14.3}$$

onde ω_0 é uma constante. Nesse caso $a(z) = 0$ e $b(z) = \omega_0^2$, ambas analíticas em toda parte. Procuremos então uma solução da forma $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (com $z_0 = 0$). É fácil ver que

$$y'(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \;\overset{n\to n+1}{=}\; \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} z^n \,,$$

ou seja,

$$y'(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} z^n \tag{14.4}$$

e que

$$y''(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)c_{n+1} z^{n-1} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_{n+1} z^{n-1} \;\overset{n\to n+1}{=}\; \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} z^n \,,$$

ou seja,

$$y''(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} z^n \,. \tag{14.5}$$

Inserindo-se (14.4) e (14.5) em (14.3), obtem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big[(n+1)(n+2)c_{n+2} + \omega_0^2 c_n \Big] z^n \;=\; 0 \,.$$

Como essa última relação supostamente vale para todo z, tem-se forçosamente que os fatores entre colchetes são todos nulos (por que?):

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + \omega_0^2 c_n \;=\; 0 \,, \qquad \text{ou seja,} \qquad c_{n+2} \;=\; \frac{-\omega_0^2}{(n+1)(n+2)} \, c_n \tag{14.6}$$

para todo $n \geq 0$. A solução dessa última equação recursiva é

$$c_{2k} \;=\; \frac{(-1)^k \omega_0^{2k}}{(2k)!} \, c_0 \,, \qquad c_{2k+1} \;=\; \frac{(-1)^k \omega_0^{2k}}{(2k+1)!} \, c_1 \,.$$

com $k \geq 0$. Essas expressões relacionam todos os coeficientes c_n com os dois primeiros coeficientes, c_0 e c_1.

Inserindo isso na expressão $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, tem-se

$$\begin{aligned} y(z) \;&=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^{2k+1} \;=\; c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega_0^{2k}}{(2k)!} z^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega_0^{2k}}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ &=\; c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\omega_0 z)^{2k} + \frac{c_1}{\omega_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\omega_0 z)^{2k+1} \\ &=\; c_0 \cos(\omega_0 z) + \frac{c_1}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 z) \,. \end{aligned}$$

Na última passagem pudemos identificar as duas séries de potências com as séries de Taylor (em torno de 0) das funções seno e cosseno. Notemos que em problemas menos simples, como os que encontraremos adiante, nem sempre será possível identificar as séries resultantes com as séries de Taylor de funções previamente conhecidas, o que nos conduzirá à definição de novas funções, as chamadas *funções especiais*.

É de se notar que a solução final, $y(z) = c_0 \cos(\omega_0 z) + \frac{c_1}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 z)$, é analítica em toda a parte como função de z, o que já era esperado do fato de as funções $a(z)$ e $b(z)$ serem funções analíticas em toda parte (duas constantes).

Obtivemos, assim, a bem-conhecida solução do oscilador harmônico simples em termos de uma combinação linear das funções seno e cosseno. Os coeficientes c_0 e c_1 podem ser determinados se mais condições forem impostas à solução. Por exemplo, se impusermos "condições iniciais" $y(0) = y_0$ e $y'(0) = v_0$, obtemos $c_0 = y_0$ e $c_1 = v_0$.

14.1.2 A Equação de Legendre

A equação diferencial

$$(1 - z^2)y''(z) - 2zy'(z) + \lambda(\lambda + 1)y(z) \ = \ 0 \tag{14.7}$$

é denominada *equação de Legendre*[1] de ordem[2] λ. Em princípio, adotamos $\lambda \in \mathbb{C}$, arbitrário, mas na maioria das aplicações em Física apenas valores especiais de λ são considerados, a saber, λ é tomado um inteiro não-negativo.

A equação de Legendre e uma parente próxima, a equação de Legendre associada, tratada na Seção 14.3.1, página 660, surgem em vários problemas de Física, do Eletromagnetismo à Mecânica Quântica. Tipicamente ambas surgem quando da resolução da equação de Helmholtz pelo método de separação de variáveis em coordenadas esféricas em três dimensões. Vide Capítulo 21, página 901.

A equação de Legendre acima pode ser posta na forma padrão (14.1) com

$$a(z) \ = \ \frac{-2z}{1 - z^2} \qquad \text{e} \qquad b(z) \ = \ \frac{\lambda(\lambda + 1)}{1 - z^2} \ .$$

Claramente, ambas as funções são analíticas em um disco de raio 1 centrado em $z_0 = 0$. É, portanto, legítimo procurarmos soluções na forma $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (com $z_0 = 0$). Tais soluções serão analíticas pelo menos no disco de raio 1 centrado em $z_0 = 0$.

Inserindo-se (14.4)-(14.5) em (14.7), obtem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}z^n - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}z^{n+2}}_{I} - 2\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}z^{n+1}}_{II} + \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \ = \ 0 \ . \tag{14.8}$$

É fácil ver que

$$I \ \equiv \ \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}z^{n+2} \ \stackrel{n \to n-2}{=} \ \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n \, c_n z^n \ = \ \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)n \, c_n z^n \ , \tag{14.9}$$

onde, na penúltima igualdade, fizemos a mudança de variáveis $n \to n - 2$ e, na última, acrescentamos os termos com $n = 0$ e $n = 1$ por estes serem nulos. Analogamente,

$$II \ \equiv \ \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}z^{n+1} \ \stackrel{n \to n-1}{=} \ \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^n \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^n \ , \tag{14.10}$$

onde, na penúltima igualdade, fizemos a mudança de variáveis $n \to n - 1$ e, na última, acrescentamos o termo com $n = 0$ por este ser nulo. Assim, (14.8) fica

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}z^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)n \, c_n z^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^n + \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \ = \ 0 \ ,$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+2} - \Big((n-1)n + 2n - \lambda(\lambda+1)\Big)c_n\right] z^n \ = \ 0 \ .$$

[1] Adrien-Marie Legendre (1752–1833).
[2] Aqui a palavra "ordem" não deve ser confundida com a ordem da equação diferencial, que é dois.

Como $(n-1)n + 2n = n(n+1)$, obtemos o seguinte conjunto de equações

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} - \Big(n(n+1) - \lambda(\lambda+1)\Big)c_n \;=\; 0 \;, \qquad \forall n \geq 0 \;.$$

Essas expressões fornecem as seguintes equações recursivas para os coeficientes c_n:

$$c_{n+2} \;=\; \frac{n(n+1) - \lambda(\lambda+1)}{(n+1)(n+2)}\, c_n \;, \qquad \forall n \geq 0 \;. \tag{14.11}$$

De maneira análoga ao que ocorre no caso do oscilador harmônico simples (vide eq. (14.6)), podemos expressar todos os coeficientes c_n com n par em termos de c_0 e todos os coeficientes c_n com n ímpar em termos de c_1. Mais precisamente, tem-se

$$c_{2k} \;=\; \frac{1}{(2k)!}\prod_{l=0}^{k-1}\Big[2l(2l+1) - \lambda(\lambda+1)\Big]\, c_0 \;=\; -\frac{\lambda(\lambda+1)}{2k}\prod_{l=1}^{k-1}\left[1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)}\right]\, c_0 \;,$$

$$c_{2k+1} \;=\; \frac{1}{(2k+1)!}\prod_{l=0}^{k-1}\Big[(2l+1)(2l+2) - \lambda(\lambda+1)\Big]\, c_1 \;=\; \frac{1}{2k+1}\prod_{l=0}^{k-1}\left[1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{(2l+1)(2l+2)}\right]\, c_1 \;.$$

Para $\lambda \in \mathbb{C}$ genérico concluímos que a solução geral da equação de Legendre é da forma

$$y(z) \;=\; c_0 y_\lambda^{(0)}(z) + c_1 y_\lambda^{(1)}(z) \;,$$

onde

$$y_\lambda^{(0)}(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\prod_{l=0}^{k-1}\Big(2l(2l+1) - \lambda(\lambda+1)\Big) \tag{14.12}$$

$$y_\lambda^{(1)}(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\prod_{l=0}^{k-1}\Big((2l+1)(2l+2) - \lambda(\lambda+1)\Big) \tag{14.13}$$

Conforme comentamos, sabemos *a priori* que ambas as séries acima convergem para $|z| < 1$. O que ocorre caso $|z| = 1$? Isso é respondido na seguinte proposição, cuja demonstração encontra-se no Apêndice 14.A, página 666 (vide também [264] para uma outra prova semelhante):

Proposição 14.1 *Caso $\lambda \in \mathbb{R}$ não seja um inteiro não-negativo par, a série em (14.12) diverge em $z = \pm 1$. Caso $\lambda \in \mathbb{R}$ não seja um inteiro positivo ímpar, a série em (14.13) diverge em $z = \pm 1$.*

Essa proposição ensina-nos que as soluções (14.12) e (14.13) da equação de Legendre serão divergentes em $z = \pm 1$ caso λ não seja um inteiro não-negativo e isso para qualquer escolha de c_0 e c_1 não-nulos. Em aplicações, porém, é muito importante ter-se soluções finitas no intervalo fechado real $[-1,\ 1]$ de valores de z. A única esperança que resta reside na situação na qual λ é um inteiro não-negativo e, de fato, podemos verificar que em tal caso $y_\lambda^{(0)}$ é finita se λ for par e que $y_\lambda^{(1)}$ é finita se λ for ímpar.

• Os polinômios de Legendre

Contemplando a expressão (14.12) facilmente constata-se que no caso em que $\lambda = 2n$, um inteiro não-negativo par, tem-se

$$y_{2n}^{(0)}(z) \;:=\; \sum_{k=0}^{n}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\prod_{l=0}^{k-1}\Big(2l(2l+1) - 2n(2n+1)\Big) \;,$$

que é um polinômio de grau $2n$ em z.

Analogamente, contemplando a expressão (14.13) facilmente se constata que no caso em que $\lambda = 2n+1$, um inteiro positivo ímpar, tem-se

$$y_{2n+1}^{(1)}(z) \;:=\; \sum_{k=0}^{n}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\prod_{l=0}^{k-1}\Big((2l+1)(2l+2) - (2n+1)(2n+2)\Big) \;,$$

que é um polinômio de grau $2n+1$ em z.

Assim, vemos que no caso de λ ser um inteiro não-negativo a equação de Legendre tem uma solução finita em toda a parte, a saber, o polinômio $c_0 y_{2n}^{(0)}(z)$, caso $\lambda = 2n$, par, ou o polinômio $c_1 y_{2n+1}^{(1)}(z)$, caso $\lambda = 2n+1$, ímpar. Definimos, então,

$$P_m(z) := \begin{cases} c_0 y_m^{(0)}(z) = c_0 \sum_{k=0}^{m/2} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \prod_{l=0}^{k-1} \Big(2l(2l+1) - m(m+1)\Big), & m \text{ par} \\ \\ c_1 y_m^{(1)}(z) = c_1 \sum_{k=0}^{(m-1)/2} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \prod_{l=0}^{k-1} \Big((2l+1)(2l+2) - m(m+1)\Big), & m \text{ ímpar} \end{cases} .$$

É claro pela definição acima que P_m é um polinômio de grau m e o coeficiente do monômio de maior grau, z^m, vale

$$c_0 \frac{1}{m!} \prod_{l=0}^{m/2-1} \Big(2l(2l+1) - m(m+1)\Big), \qquad \text{para } m \text{ par}$$

e

$$c_1 \frac{1}{m!} \prod_{l=0}^{(m-3)/2} \Big((2l+1)(2l+2) - m(m+1)\Big), \qquad \text{para } m \text{ ímpar.}$$

Por razões históricas, convenciona-se escolher c_0 e c_1 de modo que o coeficiente do monômio de maior grau de P_m seja igual a $\frac{(2m)!}{2^m (m!)^2}$. Como facilmente se constata após alguns cálculos entediantes, isso conduz à seguinte expressão para os polinômios $P_m(z)$:

$$P_m(z) := \sum_{a=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(-1)^a \, (2m-2a)!}{2^m \, (m-a)! \, (m-2a)! \, a!} \; z^{m-2a} , \tag{14.14}$$

onde $\lfloor m/2 \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a $m/2$, ou seja,

$$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor := \begin{cases} \frac{m}{2}, & m \text{ par,} \\ \\ \frac{m-1}{2}, & m \text{ ímpar.} \end{cases}$$

A prova de (14.14) pode ser encontrada no Apêndice 14.B, página 667.

E. 14.1 *Exercício*. Tente provar (14.14) sem ler o Apêndice 14.B. ✠

A expressão (14.14) define os assim denominados *polinômios de Legendre* de grau m, cada qual é solução da equação de Legendre de ordem m

$$(1-z^2)y''(z) - 2zy'(z) + m(m+1)y(z) = 0 ,$$

com m inteiro não-negativo. Como comentamos, essa equação possui, para cada m inteiro não-negativo, uma segunda solução que é, porém, divergente para $z \to \pm 1$.

Os quatro primeiros polinômios de Legendre são

$$P_0(z) = 1 , \qquad P_1(z) = z , \qquad P_2(z) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}z^2 , \qquad P_3(z) = -\frac{3}{2}z + \frac{5}{2}z^3 ,$$

como facilmente se vê pela definição acima.

Os polinômios de Legendre possuem várias propriedades importantes, tais como relações de ortogonalidade, fórmulas de recorrência etc., as quais serão discutidas na Seção 15.2.1, página 687. Também remetemos o estudante à literatura pertinente supracitada. A Figura 14.1, página 618, exibe o gráfico dos primeiros polinômios de Legendre no intervalo $[-1, 1]$.

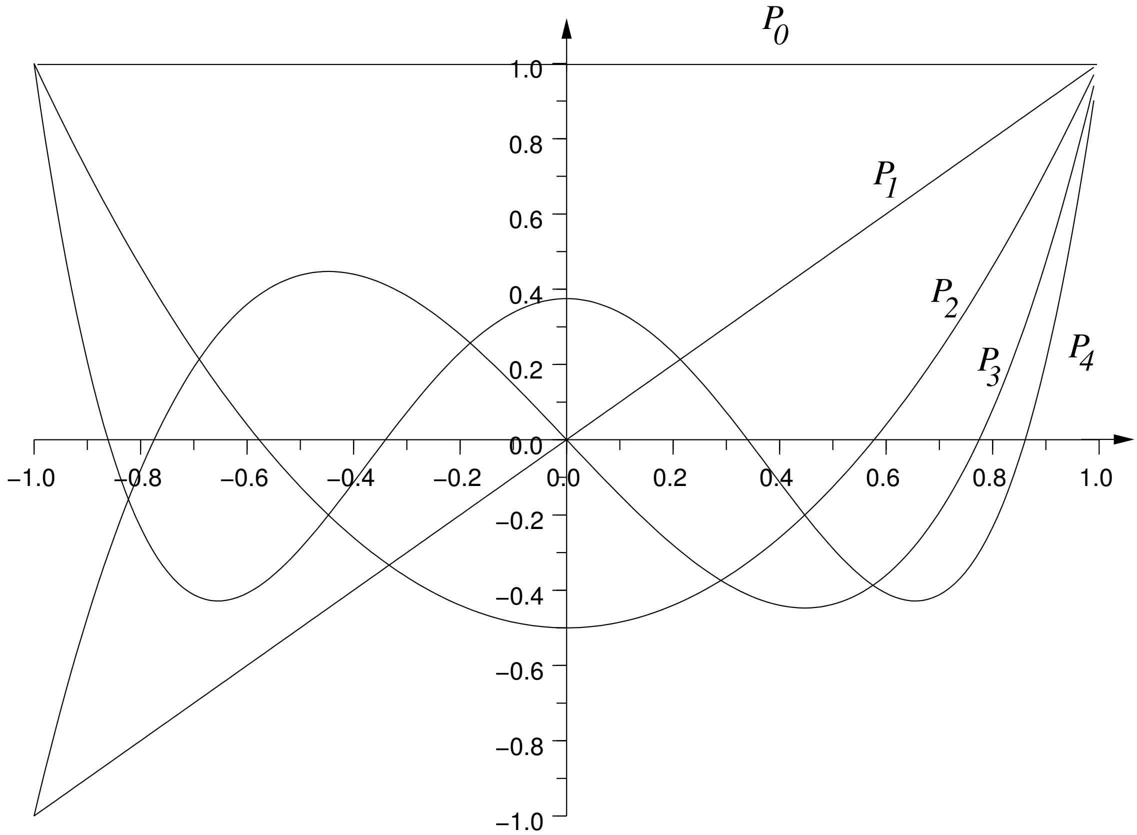

Figura 14.1: Os polinômios de Legendre P_0 a P_4 no intervalo $[-1,\ 1]$.

14.1.3 A Equação de Hermite

A equação diferencial

$$y''(z) - 2zy'(z) + \lambda y(z) \ = \ 0, \tag{14.15}$$

com $\lambda \in \mathbb{C}$ é denominada *equação de Hermite*[3]. Essa equação é famosa por surgir em um problema básico da Mecânica Quântica, a saber, o problema do oscilador harmônico unidimensional. Vide Seção 21.7, página 966. A relação de (14.15) com a equação hipergeométrica confluente é exibida na Seção 14.2.8, página 657.

Comparando à forma padrão (14.1), constatamos que aqui

$$a(z) \ = \ -2z \qquad \text{e} \qquad b(z) \ = \ \lambda \ .$$

Ambas essas funções são analíticas em todo o plano complexo e, pelo Teorema 13.3 da página 575, assim serão as soluções da equação de Hermite, sendo que podemos encontrá-las através de uma expansão em série de potências em torno de $z_0 = 0$: $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Inserindo-se (14.4)-(14.5) em (14.15), obtem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}z^n - 2\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}z^{n+1}}_{II} + \lambda\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \ = \ 0 \ . \tag{14.16}$$

A soma II pode ser escrita como em (14.10) e, assim, (14.16) fica

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}z^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}nc_n z^n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \ = \ 0 \ ,$$

[3] Charles Hermite (1822–1901).

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+1)(n+2)c_{n+2}+(\lambda-2n)\,c_n\Big]\,z^n \;=\; 0\;,$$

para todo $z\in\mathbb{C}$, o que implica $(n+1)(n+2)c_{n+2}+(\lambda-2n)\,c_n=0$, $\forall n\geq 0$. Disso concluímos que

$$c_{n+2} \;=\; \frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)}\,c_n\;,\quad \forall\, n\geq 0\;. \tag{14.17}$$

Assim como no caso do oscilador harmônico simples e no caso da equação de Legendre, os coeficientes c_n com n par são proporcionais a c_0 e os coeficientes c_n com n ímpar são proporcionais a c_1. Mais precisamente, tem-se

$$c_2 \;=\; -\frac{\lambda}{2}c_0\;,\qquad c_{2k} \;=\; -c_0\,\frac{\lambda}{(2k)!}\prod_{l=1}^{k-1}(4l-\lambda)\;,\qquad k\geq 2\;,$$

$$c_{2k+1} \;=\; c_1\,\frac{1}{(2k+1)!}\prod_{l=1}^{k}(4l-2-\lambda)\;,\qquad k\geq 1\;.$$

Desta forma, chegamos à seguinte solução geral da equação de Hermite:

$$y(z) \;=\; c_0y_\lambda^{(0)}(z)+c_1y_\lambda^{(1)}(z)\;,$$

onde

$$y_\lambda^{(0)}(z) \;:=\; 1-\frac{\lambda}{2}\,z^2-\lambda\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\prod_{l=1}^{k-1}(4l-\lambda)\;,\qquad y_\lambda^{(1)}(z) \;:=\; z+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\prod_{l=1}^{k}(4l-2-\lambda)\;.$$

Conforme comentamos, o Teorema 13.3 da página 575 garante-nos que ambas as séries acima convergem absolutamente para todo $z\in\mathbb{C}$, fazendo de $y_\lambda^{(0)}$ e $y_\lambda^{(1)}$ funções inteiras de z.

• Os polinômios de Hermite

Vamos agora passar à definição dos chamados *polinômios de Hermite*. Nestas notas usamos a chamada "definição física" dos polinômios de Hermite. Há uma outra convenção, usada especialmente na Teoria das Probabilidades, que difere da definição usada em Física por um reescalonamento. O leitor deve, por isso, ter cuidado ao comparar nossas expressões com outras usadas em textos da Teoria das Probabilidades.

No caso em que z é restrita a ser uma variável real, chamêmo-la x, é possível demonstrar que se λ for real e as séries acima forem infinitas, então ambas comportam-se, para $|x|$ grande, como funções que crescem mais rápido que $\exp(x^2/2)$. Isso é provado no Apêndice 14.C, página 669, e, por outros meios, em [201] ou em [194]. No contexto da Mecânica Quântica esse fato é indesejado, pois conduz a funções de onda que não são de quadrado integrável (vide Seção 21.7, página 966). Assim, interessa-nos investigar sob quais circunstâncias as séries acima podem ser reduzidas a polinômios.

Como vemos facilmente por (14.17), isso se dá apenas quando λ for um número inteiro não-negativo e par: $\lambda=2m$, com $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ etc. De fato, se $\lambda=2m$, com $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ etc., a expressão (14.17) diz-nos que $0=c_{m+2}=c_{m+4}=c_{m+6}=\cdots$ etc. Assim, caso m for par, $y_\lambda^{(0)}$ será um polinômio de ordem m e caso m for ímpar, $y_\lambda^{(1)}$ será um polinômio de ordem m.

Defina-se, assim,

$$H_m(z) \;:=\; \begin{cases}\Big[(-2)^{m/2}\;(m-1)!!\Big]\;y_{2m}^{(0)}(z), & \text{para } m \text{ par},\\[2ex] \Big[-(-2)^{(m+1)/2}\;(m!!)\Big]\;y_{2m}^{(1)}(z), & \text{para } m \text{ ímpar},\end{cases} \tag{14.18}$$

ou seja,

$$H_m(z) := \begin{cases} (-2)^{m/2}\,(m-1)!!\left[1-\frac{2m}{2}\,z^2-2m\sum_{k=2}^{\frac{m}{2}}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\prod_{l=1}^{k-1}(4l-2m)\right], & \text{para } m \text{ par,} \\ \\ -(-2)^{(m+1)/2}\,(m!!)\left[z+\sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\prod_{l=1}^{k}(4l-2(m+1))\right], & \text{para } m \text{ ímpar.} \end{cases} \tag{14.19}$$

De maneira compacta, podemos escrever isso da seguinte forma

$$H_m(z) := \sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor}\frac{(-1)^k\,m!}{k!\,(m-2k)!}\,(2z)^{m-2k}\,. \tag{14.20}$$

A demonstração pode ser encontrada no Apêndice 14.D, página 670.

E. 14.2 *Exercício*. Tente mostrar isso sem ler o Apêndice 14.D. ✠

As funções $H_m(z)$ são polinômios de grau m e são denominados *polinômios de Hermite*. Os fatores $(-2)^{m/2}\,(m-1)!!$ e $-(-2)^{(m+1)/2}\,(m!!)$ provêm de uma convenção histórica sobre a normalização dos polinômios de Hermite. Os quatro primeiros são

$$H_0(z) = 1\,, \qquad H_1(z) = 2z\,, \qquad H_2(z) = -2+4z^2\,, \qquad H_3(z) = -12z+8z^3\,,$$

como facilmente se vê pela definição acima.

Cada polinômio de Hermite H_m é solução da equação de Hermite

$$y''(z)-2zy'(z)+2my(z) = 0,$$

com m inteiro positivo. Como mencionamos, essa equação possui ainda uma segunda solução que, embora finita para todo $z\in\mathbb{C}$, cresce muito rapidamente quando z é real e $|z|\to\infty$, o que elimina seu interesse no contexto da Mecânica Quântica (especificamente, no problema do oscilador harmônico).

Os polinômios de Hermite possuem várias propriedades importantes, tais como relações de ortogonalidade, fórmulas de recorrência etc., que serão discutidas na Seção 15.2.3, página 703. Também remetemos o estudante à literatura pertinente supracitada.

14.1.4 A Equação de Airy

A equação diferencial

$$y''(z)-zy(z) = 0$$

é denominada *equação de Airy*[4]. Essa equação surge em vários contextos, como por exemplo no estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em meios com índice de refração variável, no estudo da reflexão de ondas de radio na atmosfera e, de especial importância, na Mecânica Quântica, mais especificamente, na equação de Schrödinger de uma partícula que se move em uma dimensão sob um potencial que cresce linearmente com a posição (i.e., sob uma força constante). Na Seção 21.5.3, página 960, tratamos com detalhe de um outro problema físico onde ocorre a equação de Airy, a saber, o problema de determinar os modos de vibração de uma corda não-homogênea cuja densidade varia linearmente com a posição.

Comparando à forma padrão (14.1), constatamos que aqui $a(z)=0$ e $b(z)=-z$. Ambas essas funções são analíticas em todo o plano complexo e, pelo Teorema 13.3 da página 575, assim serão as soluções da equação de Airy, sendo que podemos encontrá-las através de uma expansão em série de potências em torno de $z_0=0$: $y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$.

[4]George Biddell Airy (1801–1892). A equação de Airy surgiu originalmente em seus estudos sobre a Teoria do Arco-Íris. Vide também "On the diffraction of an object-glass with circular aperture", G. B. Airy, in Transactions of the Cambridge Philosophical Society (1835).

Inserindo-se (14.5) em (14.15), obtem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}z^n - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^{n+1}}_{III} \;=\; 0\;. \tag{14.21}$$

A expressão III pode ser escrita como

$$III \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}c_n z^{n+1} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}z^n$$

pela mudança $n \to n-1$. Assim, a equação de Airy diz-nos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}z^n - \sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}z^n \;=\; 0\;,$$

ou seja,

$$2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[(n+1)(n+2)c_{n+2} - c_{n-1}\Big]\,z^n \;=\; 0\;.$$

Com isso, devemos ter

$$c_2 \;=\; 0\;, \qquad (n+1)(n+2)c_{n+2} - c_{n-1} \;=\; 0, \quad \forall\, n \geq 1\;.$$

ou seja,

$$c_2 \;=\; 0\;, \qquad c_{n+3} \;=\; \frac{c_n}{(n+2)(n+3)}, \qquad \forall\, n \geq 0\;. \tag{14.22}$$

O conjunto de coeficientes $\{c_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ é a união dos seguintes três conjuntos disjuntos:

$$\begin{aligned}
\{c_{3k},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\} &\;=\; \{c_0,\ c_3,\ c_6,\ c_9,\ \ldots\}\\
\{c_{3k+1},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\} &\;=\; \{c_1,\ c_4,\ c_7,\ c_{10},\ \ldots\}\\
\{c_{3k+2},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\} &\;=\; \{c_2,\ c_5,\ c_8,\ c_{11},\ \ldots\}
\end{aligned}$$

As relações de recorrência de (14.22) implicam que os coeficientes do primeiro conjunto acima são proporcionais a c_0, que os coeficientes do segundo conjunto acima são proporcionais a c_1 e que os coeficientes do terceiro conjunto acima são proporcionais a c_2. Porém, como $c_2 = 0$, concluímos que os coeficientes do terceiro conjunto são todos nulos. Logo,

$$y(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}c_{3k}z^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty}c_{3k+1}z^{3k+1}\;.$$

As relações de recorrência de (14.22) dizem-nos que

$$c_{3k} \;=\; \frac{1}{3^k\,k!\,(3k-1)!!!}\,c_0\;, \qquad c_{3k+1} \;=\; \frac{1}{3^k\,k!\,(3k+1)!!!}\,c_1 \qquad \text{e} \qquad c_{3k+2} \;=\; 0\;,$$

para todo $k \geq 0$. Assim, a solução geral da equação de Airy é

$$y(z) \;=\; c_0\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{3k}}{3^k\,k!\,(3k-1)!!!}\right] \;+\; c_1\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{3k+1}}{3^k\,k!\,(3k+1)!!!}\right]\;. \tag{14.23}$$

Como $3^k k! = (3k)!!!$ (por que?), podemos reescrever isso como

$$y(z) \;=\; c_0\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{3k}}{(3k)!!!\,(3k-1)!!!}\right] \;+\; c_1\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{3k+1}}{(3k)!!!\,(3k+1)!!!}\right]\;.$$

• **As funções de Airy de primeiro e de segundo tipo**

Há ainda uma outra maneira de reescrever (14.23), a saber, usando as identidades

$$(3k-1)!!! \;=\; \frac{3^k\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\,, \qquad (3k+1)!!! \;=\; \frac{3^k\Gamma\left(k+\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\,, \tag{14.24}$$

sendo, para $x \geq 0$,

$$\Gamma(x) \;:=\; \int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt \tag{14.25}$$

a bem conhecida *Função Gama de Euler*, a qual satisfaz

$$\Gamma(x+1) \;=\; x\Gamma(x)\,. \tag{14.26}$$

assim como a assim denominada *fórmula de duplicação*

$$\Gamma(x)\Gamma(x+1/2) \;=\; 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\Gamma(2x)\,. \tag{14.27}$$

A Função Gama de Euler e suas propriedades são discutidas com mais detalhe no Capítulo 7, página 280.

E. 14.3 *Exercício*. Usando (14.26) prove (14.24). ✠

Com isso, podemos escrever a solução (14.23) da equação de Airy como

$$y(z) \;=\; c_0\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\left[\sum_{k=0}^\infty \frac{z^{3k}}{3^{2k}\,k!\,\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)}\right] \;+\; c_1\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\left[\sum_{k=0}^\infty \frac{z^{3k+1}}{3^{2k}\,k!\,\Gamma\left(k+\frac{4}{3}\right)}\right]\,. \tag{14.28}$$

Essa expressão pode ser escrita como combinação linear das seguintes funções:

$$\mathrm{Ai}(z) \;:=\; \sum_{k=0}^\infty \frac{z^{3k}}{3^{2k+2/3}\,k!\,\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)} \;-\; \sum_{k=0}^\infty \frac{z^{3k+1}}{3^{2k+4/3}\,k!\,\Gamma\left(k+\frac{4}{3}\right)}\,, \tag{14.29}$$

$$\mathrm{Bi}(z) \;:=\; 3^{1/2}\left[\sum_{k=0}^\infty \frac{z^{3k}}{3^{2k+2/3}\,k!\,\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)} \;+\; \sum_{k=0}^\infty \frac{z^{3k+1}}{3^{2k+4/3}\,k!\,\Gamma\left(k+\frac{4}{3}\right)}\right]\,, \tag{14.30}$$

as quais são denominadas *funções de Airy* de primeiro tipo e de segundo tipo, respectivamente. As funções $\mathrm{Ai}(z)$ e $\mathrm{Bi}(z)$ foram definidas como acima por convenção histórica. Ambas são analíticas para todo $z \in \mathbb{C}$ e representam soluções da equação de Airy. Propriedades dessas funções podem ser estudadas em [201].

Como veremos com um pouco mais de detalhe à página 650, a equação de Airy pode ser transformada em uma equação de Bessel de ordem $1/3$ e as funções de Airy $\mathrm{Ai}(z)$ e $\mathrm{Bi}(z)$ podem ser escritas em termos das funções de Bessel $J_{\pm 1/3}$. Vide expressões (14.127) e (14.128).

14.1.5 A Equação de Tchebychev

A equação diferencial

$$(1-z^2)y''(z) - z\,y'(z) + \lambda^2 y(z) \;=\; 0 \tag{14.31}$$

é denominada *equação de Tchebychev*[5]. Em princípio adotamos $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrário, mas o maior interesse estará no caso em que λ é um inteiro não-negativo.

A equação de Tchebychev acima pode ser posta na forma padrão (14.1) com

$$a(z) \;=\; \frac{-z}{1-z^2} \qquad \text{e} \qquad b(z) \;=\; \frac{\lambda^2}{1-z^2}\,.$$

[5] Pafnuty Lvovich Tchebychev (1821–1894).

Claramente, ambas as funções são analíticas em um disco de raio 1 centrado em $z_0 = 0$. É, portanto, legítimo procurarmos soluções na forma $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (com $z_0 = 0$). Tais soluções serão analíticas pelo menos no disco de raio 1 centrado em $z_0 = 0$.

Inserindo-se (14.4)-(14.5) em (14.31), obtem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}z^n - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}z^{n+2}}_{I} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}z^{n+1}}_{II} + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \; = \; 0 \; . \tag{14.32}$$

Novamente, I e II são dadas como em (14.9) e (14.10), respectivamente, e, portanto, (14.32) fica

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}z^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)n\, c_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^n + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \; = \; 0 \; ,$$

ou seja,

$$2c_2 + \lambda^2 c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+2} - \Big((n-1)n + n - \lambda^2\Big)c_n\right] z^n \; = \; 0 \; .$$

Como $(n-1)n + n = n^2$, obtemos o seguinte conjunto de equações

$$2c_2 + \lambda^2 c_0 \; = \; 0 \; ,$$

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} - \Big(n^2 - \lambda^2\Big)c_n \; = \; 0 \; , \qquad \forall n \geq 1 \; .$$

Essas expressões fornecem as seguintes equações recursivas para os coeficientes c_n:

$$c_{n+2} \; = \; \frac{n^2 - \lambda^2}{(n+1)(n+2)}\, c_n \; , \qquad \forall n \geq 0 \; . \tag{14.33}$$

De maneira análoga ao que fizemos em exemplos anteriores, podemos expressar todos os coeficientes c_n com n par em termos de c_0 e todos os coeficientes c_n com n ímpar em termos de c_1. Mais precisamente, tem-se

$$c_{2k} \; = \; \frac{1}{(2k)!} \prod_{l=0}^{k-1}\left[(2l)^2 - \lambda^2\right] c_0 \; ,$$

$$c_{2k+1} \; = \; \frac{1}{(2k+1)!} \prod_{l=0}^{k-1}\left[(2l+1)^2 - \lambda^2\right] c_1 \; .$$

Para $\lambda \in \mathbb{C}$ genérico concluímos que a solução geral da equação de Tchebychev é da forma

$$y(z) \; = \; c_0\, y_\lambda^{(0)}(z) + c_1\, y_\lambda^{(1)}(z) \; ,$$

onde

$$y_\lambda^{(0)}(z) \; = \; 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \prod_{l=0}^{k-1}\left[(2l)^2 - \lambda^2\right] , \tag{14.34}$$

$$y_\lambda^{(1)}(z) \; = \; z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \prod_{l=0}^{k-1}\left[(2l+1)^2 - \lambda^2\right] . \tag{14.35}$$

• Os polinômios de Tchebychev

Como mencionamos, o principal interesse reside no caso em que λ é um inteiro não-negativo: $\lambda = m$. Nesse caso é fácil ver que $y_m^{(0)}(z)$ será um polinômio de grau m, caso m seja par e $y_m^{(1)}(z)$ será um polinômio de grau m, caso m seja ímpar. Esses polinômios são

$$y_m^{(0)}(z) \;=\; 1+\sum_{k=1}^{m/2}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\prod_{l=0}^{k-1}\left[(2l)^2-m^2\right],\ m \text{ par}, \tag{14.36}$$

$$\tag{14.37}$$

$$y_m^{(1)}(z) \;=\; z+\sum_{k=1}^{(m-1)/2}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\prod_{l=0}^{k-1}\left[(2l+1)^2-m^2\right],\ m \text{ ímpar}. \tag{14.38}$$

Por uma convenção histórica, costuma-se redefinir esses polinômios multiplicando-os por uma constante dependente de m de modo a fazer o coeficiente do monômio de maior grau, z^m, igual a 2^{m-1}. Após alguns cálculos entediantes (indicados no Apêndice 14.F, página 673) o estudante poderá convencer-se que, com essa convenção, os polinômios acima podem ser escritos de uma forma compacta como

$$T_0(z) \;=\; 1\,, \qquad T_m(z) \;:=\; \frac{m}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor}\frac{(-1)^k\,(m-k-1)!}{k!\,(m-2k)!}\,(2z)^{m-2k}\,, \qquad m>0\,. \tag{14.39}$$

Os polinômios assim definidos são denominados *polinômios de Tchebychev*, os quais desempenham um papel central na *Teoria da Aproximação*[6]. Vide, por exemplo, [76], [315], [274] ou [224].

Os quatro primeiros polinômios de Tchebychev são

$$T_0(z) \;=\; 1\,, \qquad T_1(z) \;=\; z\,, \qquad T_2(z) \;=\; 2z^2-1\,, \qquad T_3(z) \;=\; 4z^3-3z\,.$$

É possível ainda demonstrar que os polinômios de Tchebychev podem ser escritos na forma

$$T_m(z) \;=\; \sum_{p=0}^{\lfloor m/2\rfloor}(-1)^p\binom{m}{2p}z^{m-2p}\left(1-z^2\right)^p\,, \tag{14.40}$$

válida para todo $m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$.

Uma das mais curiosas e importantes propriedades dos polinômios de Tchebychev T_m é a seguinte identidade:

$$T_m(x) \;=\; \cos\bigl(m\arccos(x)\bigr)\,. \tag{14.41}$$

válida para $-1\leq x\leq 1$. Essa relação pode ser demonstrada constatando-se que o lado direito é solução da equação de Tchebychev e constatando-se que o lado direito é um polinômio (o que é um tanto uma surpresa. Vide abaixo) de grau m e que o coeficiente de seu termo de maior grau em z é 2^{m-1}.

A relação (14.41) pode ser facilmente demonstrada a partir da expressão (14.40) (ou vice-versa). Vide Exercício E. 14.4, abaixo. Alguns autores adotam (14.41) como definição dos polinômios de Tchebychev.

[6] Para uma discussão sobre o interessante problema de Engenharia que conduziu Tchebychev aos polinômios que levam seu nome, vide [185].

E. 14.4 *Exercício resolvido.* Prove (14.41) para $-1 \leq x \leq 1$. Sugestão: definindo $y \equiv \arccos(x)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\cos\bigl(m \arccos(x)\bigr) &= \cos(my) \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{imy} + e^{-imy}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(\cos y + i\,\mathrm{sen} y)^m + (\cos y - i\,\mathrm{sen} y)^m\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^m + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^m\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{q=0}^{m}\binom{m}{q} x^{m-q}\left(i\sqrt{1-x^2}\right)^q + \sum_{q=0}^{m}\binom{m}{q} x^{m-q}\left(-i\sqrt{1-x^2}\right)^q\right] \\
&\stackrel{\star}{=} \sum_{p=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^p \binom{m}{2p} x^{m-2p}\left(1-x^2\right)^p \stackrel{(14.40)}{=} T_m(x) ,
\end{aligned}$$

que é o que queríamos. Na passagem indicada por $\star$ usamos o fato que os termos com q ímpar nas duas somas anteriores cancelam-se mutuamente, sobrando, portanto, apenas os termos com q par, ou seja, da forma $q = 2p$ com $p = 0, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor$. Para provar (14.41) a partir de (14.40), basta ler as linhas acima do fim para o começo. ✠

De (14.41) segue imediatamente a interessante propriedade de composição

$$T_n(T_m(x)) = T_{nm}(x) , \tag{14.42}$$

válida para todos n, m inteiros não-negativos. Como ambos os lados de (14.42) são polinômios, essa relação vale para todo x complexo.

14.1.6 O Caso de Equações Regulares Gerais

Nas páginas acima resolvemos em vários exemplos particulares a equação

$$y''(z) + a(z)y'(z) + b(z)y(z) = 0 \tag{14.43}$$

em casos em que os coeficientes $a(z)$ e $b(z)$ são funções analíticas de z em torno de um ponto z_0. Para tal, evocando o Teorema 13.3, página 575, procuramos soluções na forma de séries de potências:

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n . \tag{14.44}$$

Vamos agora mostrar como o método que descrevemos se aplica ao caso geral no qual as funções $a(z)$ e $b(z)$ são também dadas em termos de séries de potências:

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n , \qquad b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n .$$

Usando novamente (14.4) e (14.5) a equação (14.43) fica (adotamos daqui para frente $z_0 = 0$, sem perda de generalidade)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}z^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) . \tag{14.45}$$

Para o produto de duas séries de potência $\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_p z^p$ e $\sum_{q=0}^{\infty}\beta_q z^q$ vale

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_p z^p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty}\beta_q z^q\right) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\alpha_p\beta_q z^{p+q} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\alpha_{n-m}\beta_m\right) z^n . \tag{14.46}$$

E. 14.5 *Exercício*. Mostre isso. ✠

Assim, (14.45) fica

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}z^n \;+\; \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}(m+1)c_{m+1}\right) z^n \;+\; \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} b_{n-m}c_m\right) z^n \;=\; 0,$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{m=0}^{n}(m+1)a_{n-m}c_{m+1} + \sum_{m=0}^{n} b_{n-m}c_m\right] z^n \;=\; 0,$$

o que implica

$$c_{n+2} \;=\; -\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{m=0}^{n}\big((m+1)a_{n-m}c_{m+1} + b_{n-m}c_m\big) \tag{14.47}$$

para todo $n \geq 0$. Observe que essa expressão determina c_{n+2} em termos de $c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{n+1}$. Assim, apenas fixando c_0 e c_1 podemos determinar todos os demais coeficientes c_n através da expressão recursiva acima.

Como dissemos, os resultados que nos conduziram ao Teorema 13.3, página 575, garantem-nos que a série $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ assim obtida é convergente na mesma região em que convergem as séries de $a(z)$ e $b(z)$, de modo que não precisamos provar isso. Alguns autores (por exemplo, [264]) usam as expressões recursivas (14.47) para demonstrar a convergência da série $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Como dissemos, pelo nosso proceder isso não é mais necessário, mas o estudante interessado é convidado a estudar essa outra (elegante) demonstração no texto supracitado.

Para futura referência, resumimos nossas conclusões sobre equações regulares no seguinte teorema.

Teorema 14.1 (Solução de equações regulares por expansão em série de potências) *Considere-se a equação diferencial*

$$y''(z) + a(z)y'(z) + b(z)y(z) \;=\; 0\,, \tag{14.48}$$

$z \in \mathbb{C}$, com $a(z)$ e $b(z)$ analíticas em torno de z_0 e expressas em termos de suas séries de Taylor em torno de z_0 como

$$a(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\,, \qquad b(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n\,,$$

séries estas supostas absolutamente convergentes em $|z-z_0| < r$, para algum $r > 0$. Então a solução geral da equação (14.48) pode ser expressa em termos de uma expansão em série de potências em $z - z_0$:

$$y(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n\,,$$

onde os coeficientes c_n podem ser obtidos através das relações recursivas

$$c_{n+2} \;=\; -\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{m=0}^{n}\big((m+1)a_{n-m}c_{m+1} + b_{n-m}c_m\big)\,, \qquad \forall\, n \geq 0\,,$$

a partir dos dois primeiros coeficientes c_0 e c_1, arbitrários. A expansão em série de potências para $y(z)$ converge absolutamente pelo menos na região $|z-z_0| < r$, onde representa uma função analítica. □

14.2 Solução de Equações Singulares Regulares. O Método de Frobenius

Na presente seção ilustraremos o Teorema 13.4, página 579, estudando a solução, por um método devido a Frobenius[7], de algumas equações diferenciais ordinárias, homogêneas de segunda ordem e singulares regulares de interesse (especialmente

[7] Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917).

em Física). Boa parte dos métodos apresentados nos exemplos aplicam-se a equações de ordem maior que dois, mas não trataremos de tais generalizações aqui pois elas pouco apresentam de especial e seu interesse na Física é reduzido.

Vale aqui novamente a advertência sobre a omissão de alguns detalhes de cálculos, sendo o estudante novamente convidado a completá-los como exercício (todos merecem ser feitos ao menos uma vez na vida). Todas as equações particulares tratadas e suas soluções são amplamente discutidos na vasta literatura pertinente, por exemplo, aquela listada à página 613.

Conforme demonstramos em páginas anteriores (Teorema 13.3, página 575), se a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$y''(z) + \frac{a(z)}{(z-z_0)}y'(z) + \frac{b(z)}{(z-z_0)^2}y(z) \; = \; 0 \tag{14.49}$$

for tal que $a(z)$ e $b(z)$ são funções analíticas de z em torno de um ponto z_0, então o coeficiente $\frac{a(z)}{(z-z_0)}$ tem no máximo uma singularidade de tipo polo de ordem 1 em z_0 e o coeficiente $\frac{b(z)}{(z-z_0)^2}$ tem no máximo uma singularidade de tipo polo de ordem 2 em z_0. Assim, pelas nossas definições prévias, z_0 é um ponto singular regular da equação (14.49). Nesse caso, o Teorema 13.3, página 575, diz-nos que ou a equação (14.49) tem duas soluções independentes da forma

$$y(z) \; = \; (z-z_0)^\gamma \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \; . \tag{14.50}$$

onde $\gamma \in \mathbb{C}$ e a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ é absolutamente convergente para $|z-z_0| < r$ (e, portanto, representa uma função analítica em torno de z_0) ou então a equação (14.49) tem duas soluções independentes, uma da forma (14.50) e outra da forma

$$y(z) \; = \; (z-z_0)^\gamma \left(\ln(z-z_0)\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + (z-z_0)^{\gamma'} \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z-z_0)^n \; . \tag{14.51}$$

onde, novamente as séries $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(z-z_0)^n$ são absolutamente convergentes para $|z-z_0| < r$ (e, portanto, representam funções analíticas em torno de z_0). Em ambos os casos acima $r > 0$ é o raio do maior disco aberto centrado em z_0 dentro do qual $a(z)$ e $b(z)$ são analíticas.

O chamado *método de Frobenius* consiste precisamente em inserir-se o Ansatz (14.50) na equação (14.49) e determinar recursivamente os coeficientes c_n, assim como o expoente γ. Caso duas soluções distintas sejam encontradas dessa forma, o problema está resolvido. Caso se encontre apenas uma solução, então uma segunda solução da forma (14.51) deve ser procurada através da determinação recursiva dos coeficientes c_n e v_n, assim como dos expoentes γ e γ'.

Ao contrário do que fizemos no caso de equações regulares, quando primeiro exploramos exemplos particulares para depois tratarmos do caso geral, é mais conveniente no presente contexto que nos apoderemos primeiramente da análise geral para depois tratarmos de equações específicas, pois uma visão prévia das complicações envolvidas nos auxiliará a evitar certas armadilhas ocultas no tratamento de equações singulares regulares particulares[8]. Ilustraremos o método de Frobenius apresentando a resolução da equação de Euler, da equação de Bessel, da equação de Laguerre e das equações hipergeométrica e hipergeométrica confluente, todas de interesse em Física.

O principal teorema que demonstraremos, o qual resume os resultados do método de Frobenius e expressa a solução de uma equação singular regular homogênea de segunda ordem geral, é o seguinte:

Teorema 14.2 (Solução de equações singulares regulares pelo método de Frobenius) *Seja a equação diferencial*

$$(z-z_0)^2 y''(z) + (z-z_0)a(z)y'(z) + b(z)y(z) \; = \; 0 \; , \tag{14.52}$$

$z \in \mathbb{C}$, com $a(z)$ e $b(z)$ analíticas em torno de z_0 e expressas em termos de suas séries de Taylor em torno de z_0 como

$$a(z) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \; , \qquad b(z) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n \; ,$$

séries estas supostas absolutamente convergentes em $|z-z_0| < r$, para algum $r > 0$.

[8]O estudante é convidado a não entrar em pânico diante da aparente complexidade de algumas expressões que obteremos. Na maioria das equações diferenciais de interesse as funções $a(z)$ e $b(z)$ são apenas polinômios de grau 0, 1 ou 2 e as expressões obtidas no tratamento geral se simplificam um tanto.

Seja definido o polinômio de segundo grau

$$f(x) \;:=\; x(x-1)+a_0x+b_0 \;=\; x^2+(a_0-1)x+b_0 \;,$$

e considere-se a equação algébrica

$$f(x) \;=\; 0\;, \tag{14.53}$$

a qual é denominada equação indicial. *Sejam $\gamma_\pm$ as soluções dessa equação no plano complexo:*

$$\gamma_- \;=\; \frac{1-a_0-\sqrt{(a_0-1)^2-4b_0}}{2} \qquad e \qquad \gamma_+ \;=\; \frac{1-a_0+\sqrt{(a_0-1)^2-4b_0}}{2}\;.$$

Então a equação (14.52) possui duas soluções independentes $y_1(z)$ e $y_2(z)$, válidas pelo menos na região $0<|z-z_0|<r$. A forma dessas soluções varia conforme as seguintes condições complementares sobre γ_- e γ_+: **1.** $\gamma_- - \gamma_+ \notin \mathbb{Z}$, **2.** $\gamma_- - \gamma_+ = 0$ *ou* **3.** $\gamma_- - \gamma_+ \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, *como enumeramos a seguir:*

1. *Caso $\gamma_- - \gamma_+ \notin \mathbb{Z}$.*
   Nesse caso tem-se

$$y_1(z) \;=\; (z-z_0)^{\gamma_-}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\gamma_-)(z-z_0)^n \qquad e \qquad y_2(z) \;=\; (z-z_0)^{\gamma_+}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\gamma_+)(z-z_0)^n\;, \tag{14.54}$$

   onde

$$c_n(\gamma_\pm) \;=\; -\frac{1}{f(\gamma_\pm+n)}\sum_{m=0}^{n-1}\Big[(m+\gamma_\pm)a_{n-m}+b_{n-m}\Big]c_m(\gamma_\pm)\;, \tag{14.55}$$

   para todo $n\geq 1$. Essas expressões recursivas permitem-nos obter todos os $c_n(\gamma_-)$ a partir de um $c_0(\gamma_-)$ não-nulo arbitrário e, respectivamente, todos os $c_n(\gamma_+)$ a partir de um $c_0(\gamma_+)$ não-nulo arbitrário.

2. *Caso $\gamma_- - \gamma_+ = 0$.*
   Neste caso $\sqrt{(a_0-1)^2-4b_0}=0$ e $\gamma_-=\gamma_+=\gamma_0$ com

$$\gamma_0 := \frac{1-a_0}{2}$$

   e tem-se

$$y_1(z) \;=\; (z-z_0)^{\gamma_0}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\gamma_0)\,(z-z_0)^n \qquad e \qquad y_2(z) \;=\; y_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\gamma_0}\sum_{n=0}^{\infty}v_n(\gamma_0)\,(z-z_0)^n\;, \tag{14.56}$$

   onde

$$c_n(\gamma_0) \;=\; -\frac{1}{f(\gamma_0+n)}\sum_{m=0}^{n-1}\Big[(m+\gamma_0)a_{n-m}+b_{n-m}\Big]c_m(\gamma_0) \tag{14.57}$$

   para todo $n\geq 1$, e

$$v_n(\gamma_0) \;=\; -\frac{1}{f(\gamma_0+n)}\left[\big[2(n+\gamma_0)-1\big]\,c_n(\gamma_0)+\sum_{m=0}^{n}a_{n-m}c_m(\gamma_0)\right.$$
$$\left.+\sum_{m=0}^{n-1}\Big[(m+\gamma_0)a_{n-m}+b_{n-m}\Big]v_m(\gamma_0)\right]\;, \quad \forall\, n\geq 1\;, \tag{14.58}$$

   onde os coeficientes $c_n(\gamma_0)$ são obtidos recursivamente a partir de um $c_0(\gamma_0)$ não-nulo arbitrário e os coeficientes $v_n(\gamma_0)$ são obtidos recursivamente a partir dos coeficientes $c_m(\gamma_0)$ e a partir de um $v_0(\gamma_0)$ arbitrário (mas que pode ser escolhido igual a zero).

3. *Caso* $\gamma_- - \gamma_+ \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
Neste caso $\gamma_- - \gamma_+ = -\sqrt{(a_0-1)^2 - 4b_0}$ *é um inteiro não-nulo. Definamos então*

$$n_0 \; = \; \left|\sqrt{(a_0-1)^2 - 4b_0}\right| \; .$$

Claro está que $n_0 \in \{1, \ 2, \ 3, \ 4, \ \ldots\}$. *Definamos também*

$$\gamma_1 \; := \; \gamma_-, \quad \gamma_2 \; := \; \gamma_+, \quad \textit{caso } \gamma_- - \gamma_+ \; \geq \; 1, \quad \textit{ou}$$
$$(14.59)$$
$$\gamma_1 \; := \; \gamma_+, \quad \gamma_2 \; := \; \gamma_-, \quad \textit{caso } \gamma_+ - \gamma_- \; \geq \; 1.$$

Com essas definições tem-se

$$\gamma_1 \; = \; \gamma_2 + n_0 \; .$$

Então,

$$y_1(z) \; = \; (z-z_0)^{\gamma_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\gamma_1)(z-z_0)^n \qquad e \qquad y_2(z) \; = \; Ay_1(z)\ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\gamma_2} \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z-z_0)^n \; , \tag{14.60}$$

onde

$$c_n(\gamma_1) \; = \; -\frac{1}{f(\gamma_1+n)} \sum_{m=0}^{n-1} \Big[(m+\gamma_1)a_{n-m} + b_{n-m}\Big] c_m(\gamma_1) \; , \tag{14.61}$$

para $n \geq 1$ *e*

$$v_n \; = \; \begin{cases} -\dfrac{1}{f(\gamma_2+n)} \displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} \Big((m+\gamma_2)a_{n-m} + b_{n-m}\Big) v_m \; , & \textit{para } 1 \; \leq \; n \; \leq \; n_0 - 1 \; , \\[4ex] \text{arbitrário} \; , & \textit{para } n \; = n_0 \; , \\[4ex] -\dfrac{1}{f(\gamma_2+n)} \left[Ag_{n-n_0} + \displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} \Big((m+\gamma_2)a_{n-m} + b_{n-m}\Big)v_m\right] \; , & \textit{para } n \; > \; n_0, \end{cases} \tag{14.62}$$

onde,

$$A \; = \; -\frac{1}{c_0(\gamma_1)\, n_0} \sum_{m=0}^{n_0-1} \left[(m+\gamma_2)a_{n_0-m} + b_{n_0-m}\right] v_m \tag{14.63}$$

e

$$g_n \; = \; \left[2(n+\gamma_1) - 1\right] c_n(\gamma_1) + \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} c_m(\gamma_1) \; , \quad n \geq 0 \; . \tag{14.64}$$

As expressões recursivas para $c_n(\gamma_1)$ *dependem de um* $c_0(\gamma_1)$ *não-nulo e arbitrário e as expressões recursivas para* v_n *dependem também de um* v_0 *arbitrário.*

Todas as séries de potência em $z - z_0$ *apresentadas acima convergem absolutamente pelo menos na região* $|z - z_0| < r$ *e nela representam, portanto, funções analíticas.* □

Para a demonstração desse teorema devotaremos toda a Seção 14.2.1. Em uma primeira leitura o estudante poderá dispensar-se de um estudo detalhado da demonstração e passar mais rapidamente aos exemplos discutidos na Seção 14.2.2, página 637, e seguintes.

14.2.1 Equações Singulares Regulares. O Caso Geral

Daqui para frente, sem perda de generalidade, adotaremos $z_0 = 0$.

Seja, então, a equação (14.49) escrita agora na forma

$$z^2 y''(z) + z a(z) y'(z) + b(z) y(z) \;=\; 0 \tag{14.65}$$

com $a(z)$ e $b(z)$ analíticas em torno de $z_0 = 0$ e expressas em termos de suas séries de Taylor em torno de 0 como

$$a(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;, \qquad b(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \;.$$

Sob a luz do Teorema 13.4, página 579, procuraremos primeiramente uma solução na forma

$$y(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\gamma} \;. \tag{14.66}$$

Antes de iniciarmos nossa análise, comentemos que, sem perda de generalidade, podemos sempre adotar o primeiro coeficiente, c_0, como não-nulo: $c_0 \neq 0$. Isso se deve ao seguinte. Se c_m fosse o primeiro coeficiente não-nulo, teríamos

$$y(z) \;=\; \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^{n+\gamma} \;.$$

Agora, com a mudança de variável $n' = n - m$ ficaríamos com

$$y(z) \;=\; \sum_{n'=0}^{\infty} c_{n'+m} z^{n'+(\gamma+m)}$$

redefinindo $c'_{n'} := c_{n'+m}$ e $\gamma' = \gamma + m$, ficaríamos com

$$y(z) \;=\; \sum_{n'=0}^{\infty} c'_{n'} z^{n'+\gamma'} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c'_n z^{n+\gamma'} \;.$$

A última expressão possui a mesma estrutura de (14.66) mas, como se vê, o primeiro coeficiente é $c'_0 = c_m$, que é não-nulo, por hipótese.

Isto posto, passemos a analisar o que se passa inserindo a expressão (14.66) em (14.65). Para (14.66) valem

$$y'(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (n+\gamma) c_n z^{n+\gamma-1} \tag{14.67}$$

e

$$y''(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (n+\gamma)(n+\gamma-1) c_n z^{n+\gamma-2} \;, \tag{14.68}$$

a equação (14.65) fica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\gamma)(n+\gamma-1) c_n z^{n+\gamma} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \sum_{n=0}^{\infty} (n+\gamma) c_n z^{n+\gamma} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\gamma} \;=\; 0.$$

Usando novamente (14.46), isso fica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\gamma)(n+\gamma-1) c_n z^{n+\gamma} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}(m+\gamma) c_m\right) z^{n+\gamma} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} b_{n-m} c_m\right) z^{n+\gamma} \;=\; 0.$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\gamma)(n+\gamma-1) c_n + \left(\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}(m+\gamma) c_m\right) + \left(\sum_{m=0}^{n} b_{n-m} c_m\right) \right] z^{n+\gamma} \;=\; 0$$

que implica

$$\Big[\gamma(\gamma-1)+a_0\gamma+b_0\Big]\,c_0 \;=\; 0\;,$$

$$\Big[(n+\gamma)(n+\gamma-1)+a_0(n+\gamma)+b_0\Big]\,c_n \;=\; -\sum_{m=0}^{n-1}\Big[a_{n-m}(m+\gamma)+b_{n-m}\Big]c_m\;,\quad \forall\, n\geq 1\;.$$

para todo $n \geq 0$. Como $c_0 \neq 0$, temos que

$$\gamma(\gamma-1)+a_0\gamma+b_0 \;=\; 0\;, \tag{14.69}$$

$$\Big[(n+\gamma)(n+\gamma-1)+a_0(n+\gamma)+b_0\Big]\,c_n \;=\; -\sum_{m=0}^{n-1}\Big[a_{n-m}(m+\gamma)+b_{n-m}\Big]c_m\;,\quad \forall\, n\geq 1\;. \tag{14.70}$$

A equação (14.69) é denominada na literatura *equação indicial*, por ser uma equação algébrica (de segundo grau) para o índice γ. Antes de escrevermos a solução dessa equação, denotemos por f o polinômio de segundo grau

$$f(x) \;=\; x(x-1)+a_0x+b_0 \;=\; x^2+(a_0-1)x+b_0\;.$$

As equações (14.69) e (14.70) podem, claramente, ser reescritas como

$$f(\gamma) \;=\; 0\;, \tag{14.71}$$

$$f(\gamma+n)\,c_n \;=\; -\sum_{m=0}^{n-1}\Big[a_{n-m}(m+\gamma)+b_{n-m}\Big]c_m\;,\quad \forall\, n\geq 1\;. \tag{14.72}$$

A equação $f(\gamma)=0$ é uma equação algébrica de segundo grau, cujas soluções são

$$\gamma_- \;=\; \frac{1-a_0-\sqrt{(a_0-1)^2-4b_0}}{2} \qquad \text{e} \qquad \gamma_+ \;=\; \frac{1-a_0+\sqrt{(a_0-1)^2-4b_0}}{2}\;.$$

Assim, a equação indicial $f(\gamma)=0$ obriga o índice γ a ser γ_- ou γ_+. Há dois casos a considerar: o caso $\gamma_- - \gamma_+ \notin \mathbb{Z}$ e o caso $\gamma_- - \gamma_+ \in \mathbb{Z}$. Trataremos primeiramente do caso $\gamma_- - \gamma_+ \notin \mathbb{Z}$, que é o mais simples.

• **O caso $\gamma_- - \gamma_+ \notin \mathbb{Z}$**

Como a diferença $\gamma_- - \gamma_+$ não é um número inteiro, tem-se em particular que $\gamma_- \neq \gamma_+$. Fora isso, como γ_- e γ_+ são os dois únicos zeros (distintos) do polinômio $f(x)$, tem-se que $f(\gamma_\pm + n) \neq 0$ para todos $n \geq 1$ inteiros. Se assim não fosse e houvesse $n_0 \in \mathbb{Z}$ com, digamos, $f(\gamma_+ + n_0) = 0$ valeria $\gamma_- = \gamma_+ + n_0$, ou seja, $\gamma_- - \gamma_+ = n_0$, que é inteiro: uma contradição. Com isso, podemos de (14.72) obter

$$\begin{aligned} c_n(\gamma_\pm) \;&=\; -\frac{1}{f(\gamma_\pm+n)}\sum_{m=0}^{n-1}\Big[a_{n-m}(m+\gamma_\pm)+b_{n-m}\Big]c_m(\gamma_\pm) \\ &=\; -\frac{1}{(\gamma_\pm+n)^2+(a_0-1)(\gamma_\pm+n)+b_0}\sum_{m=0}^{n-1}\Big[a_{n-m}(m+\gamma_\pm)+b_{n-m}\Big]c_m(\gamma_\pm)\;, \end{aligned} \tag{14.73}$$

para todo $n \geq 1$. Essas expressões recursivas permitem-nos obter todos os $c_n(\gamma_-)$ a partir de um $c_0(\gamma_-)$ não-nulo arbitrário e, respectivamente, todos os $c_n(\gamma_+)$ a partir de um $c_0(\gamma_+)$ não-nulo arbitrário.

Concluímos assim, que no caso $\gamma_- - \gamma_+ \notin \mathbb{Z}$ a equação diferencial (14.65) (com $z_0 = 0$) possui duas soluções linearmente independentes $y_1(z)$ e $y_2(z)$, dadas por

$$y_1(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\gamma_-)z^{n+\gamma_-} \qquad \text{e} \qquad y_2(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\gamma_+)z^{n+\gamma_+}\;,$$

com $c_n(\gamma_\pm)$ dadas por (14.73), a solução geral sendo uma combinação linear de ambas. As constantes $c_0(\gamma_-)$ e $c_0(\gamma_+)$ são não-nulas e arbitrárias.

• **O caso $\gamma_- - \gamma_+ \in \mathbb{Z}$**

O caso $\gamma_- - \gamma_+ \in \mathbb{Z}$ subdivide-se em dois: o caso $\gamma_- - \gamma_+ = 0$ e o caso $\gamma_- - \gamma_+ \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Comecemos com o primeiro.

• **O caso $\gamma_- = \gamma_+$**

O caso $\gamma_- = \gamma_+$ ocorre se e somente se $(a_0 - 1)^2 - 4b_0 = 0$ e, portanto, tem-se $\gamma_- = \gamma_+ = \gamma_0$, com

$$\gamma_0 \ := \ \frac{1 - a_0}{2} \ . \tag{14.74}$$

Note-se que se $(a_0 - 1)^2 - 4b_0 = 0$ a equação $f(x) = 0$ tem apenas γ_0 por raiz e, portanto, $f(n + \gamma_0) \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Consequentemente, os coeficientes c_n com $n \geq 1$ serão dados recursivamente por (vide (14.72))

$$\begin{aligned} c_n(\gamma_0) \ &= \ -\frac{1}{f(\gamma_0 + n)} \sum_{m=0}^{n-1} \Big[a_{n-m}(m + \gamma_0) + b_{n-m} \Big] c_m(\gamma_0) \\ &= \ -\left(\frac{1}{(\gamma_0 + n)^2 + (a_0 - 1)(\gamma_0 + n) + b_0} \right) \sum_{m=0}^{n-1} \Big[a_{n-m}(m + \gamma_0) + b_{n-m} \Big] c_m(\gamma_0) \ , \end{aligned} \tag{14.75}$$

para todo $n \geq 1$. Como se constata, a última expressão relaciona c_n com os coeficientes anteriores $c_{n-1}, \ \ldots, \ c_0$. Assim, fixando apenas c_0 todos os demais estão determinados. Obtemos dessa forma, para o caso $(a_0 - 1)^2 - 4b_0 = 0$ a solução

$$y_1(z) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\gamma_0) \, z^{n+\gamma_0} \ , \tag{14.76}$$

onde os coeficientes $c_n(\gamma_0)$ são obtidos recursivamente de (14.75) a partir de um c_0 arbitrário. Pelo Teorema 13.4, página 579, a série acima será convergente (ao menos na região onde as séries de $a(z)$ e $b(z)$ convergem).

Com esse proceder obtivemos apenas uma solução da equação diferencial (14.65). Como a mesma é de segunda ordem, uma segunda solução deverá existir. Novamente, o Teorema 13.4, página 579, indica-nos que essa segunda solução pode ter uma singularidade logarítmica. Podemos procurar essa segunda solução seguindo um procedimento devido a D'Alembert[9], que consiste em procurar soluções da forma

$$y_2(z) \ = \ A y_1(z) \ln(z) + v(z) \ , \tag{14.77}$$

sendo $y_1(z)$ a solução já conhecida em (14.76) e onde A é uma constante a ser determinada, assim como a função $v(z)$. Note-se que o Ansatz (14.77) está de acordo com o Teorema 13.4, página 579, que prevê a ocorrência de soluções com uma singularidade logarítmica. A especialidade do Ansatz de D'Alembert está em espertamente[10] prever que o fator que multiplica $\ln(z)$ é a primeira solução $y_1(z)$.

Substituindo (14.77) na equação (14.65), obtem-se a seguinte equação para $v(z)$:

$$z^2 v''(z) + z a(z) v'(z) + b(z) v(z) \ = \ -A\Big(2z y_1'(z) + (a(z) - 1) y_1(z) \Big) \ . \tag{14.78}$$

E. 14.6 *Exercício*. Verifique! ✠

Como facilmente se verifica, o lado direito é dado pela expansão

$$-A \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{n+\gamma_0} \ , \tag{14.79}$$

[9] Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783).

[10] Na literatura matemática o truque é por vezes denominado *método de redução de D'Alembert* e pode ser usado em várias equações diferenciais de segunda ordem para se obter uma segunda solução da equação a partir de uma primeira solução conhecida.

onde

$$f_n = [2(n + \gamma_0) - 1] \, c_n(\gamma_0) + \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} c_m(\gamma_0) \, . \tag{14.80}$$

A equação (14.79) sugere que uma solução para $v(z)$ deve ser procurada na forma $v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^{n+\gamma_0}$. Inserindo isso em (14.78) tem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n + \gamma_0)(n + \gamma_0 - 1)v_n + \sum_{m=0}^{n} \Big[(m + \gamma_0)a_{n-m} + b_{n-m} \Big] v_m \right] z^{n+\gamma_0} = -A \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{n+\gamma_0} \, ,$$

que implica

$$(n + \gamma_0)(n + \gamma_0 - 1)v_n + \sum_{m=0}^{n} \Big[(m + \gamma_0)a_{n-m} + b_{n-m} \Big] v_m = -A f_n$$

para todo $n \geq 0$. Para $n = 0$ a relação acima é

$$\Big[\gamma_0(\gamma_0 - 1) + a_0\gamma_0 + b_0 \Big] v_0 = -A f_0 \, ,$$

que é uma identidade trivial, já que $\gamma_0(\gamma_0 - 1) + a_0\gamma_0 + b_0 = 0$ e que $f_0 = \gamma_0[2\gamma_0 - 1 + a_0] \, c_0(\gamma_0) = 0$, por (14.74). Para $n \geq 1$ tem-se, porém,

$$v_n = -\left(\frac{1}{(\gamma_0 + n)^2 + (\gamma_0 + n)(a_0 - 1) + b_0} \right) \left[A f_n + \sum_{m=0}^{n-1} \Big[(m + \gamma_0)a_{n-m} + b_{n-m} \Big] v_m \right] , \quad \forall \, n \geq 1 \, , \tag{14.81}$$

o que permite obter recursivamente todos os v_n a partir de v_0. Observemos agora que A deve, nesse caso, ser forçosamente não-nulo, pois se tomássemos $A = 0$ teríamos por (14.81) e (14.75) que os coeficientes v_n satisfazem as mesmas relações de recorrência dos $c_n(\gamma_0)$. Assim, $v(z)$ e $y_1(z)$ não seriam linearmente independentes. Podemos, portanto, adotar sem perda de generalidade, $A = 1$. Com essa escolha e expressando-se os f_n's como em (14.80), tem-se

$$\begin{aligned} v_n(\gamma_0) = -\left(\frac{1}{(\gamma_0 + n)^2 + (\gamma_0 + n)(a_0 - 1) + b_0} \right) & \left[[2(n + \gamma_0) - 1] \, c_n(\gamma_0) + \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} c_m(\gamma_0) \right. \\ & \left. + \sum_{m=0}^{n-1} \Big[(m + \gamma_0)a_{n-m} + b_{n-m} \Big] v_m \right] , \quad \forall \, n \geq 1 \, , \end{aligned} \tag{14.82}$$

que expressa os v_n's em termos dos coeficientes $c_n(\gamma_0)$ de $y_1(z)$, os quais, por sua vez, são dados pelas relações recursivas (14.75)[11], e de $v_0(\gamma_0)$ arbitrário.

Resumindo nossas conclusões, caso $(a_0 - 1)^2 - 4b_0 = 0$, a solução da equação diferencial (14.65) (com $z_0 = 0$) possui duas soluções linearmente independentes $y_1(z)$ e $y_2(z)$, dadas por

$$y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\gamma_0) z^{n+\gamma_0} \qquad \text{e} \qquad y_2(z) = y_1(z) \, \ln(z) + \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\gamma_0) z^{n+\gamma_0} \, ,$$

com $\gamma_0 = (1 - a_0)/2$, com os $c_n(\gamma_0)$'s dados em (14.75) e com os $v_n(\gamma_0)$'s dados em (14.82), tomando-se $A = 1$. As constantes $c_0(\gamma)$ e $v_0(\gamma)$ são não-nulas e arbitrárias.

É de se notar que, como A é não-nulo, uma das soluções possui uma singularidade logarítmica.

• **O caso $\gamma_- - \gamma_+ \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$**

Esse último caso, com a generalidade com que o abordamos aqui, é o mais complexo e o estudante poderá dispensar seu estudo detalhado em uma primeira leitura, atendo-se preferencialmente aos exemplos das equações de Bessel e Laguerre, das quais trataremos adiante.

[11] Vide nota de rodapé da página 627.

O caso $\gamma_- - \gamma_+ \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ é semelhante ao caso anterior onde $\gamma_- = \gamma_+$, a principal diferença sendo que aqui podem ocorrer situações onde $A = 0$, de modo que ambas as soluções podem ser livres de singularidades logarítmicas. De fato, sabe-se de equações particulares onde tem-se $A = 0$ (um exemplo sendo a equação de Bessel de ordem $1/2$) e de equações particulares onde tem-se $A \neq 0$ (um exemplo sendo a equação de Bessel de ordem 1).

Comecemos com algumas definições. O caso $\gamma_- - \gamma_+ \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ só pode ocorrer se $\sqrt{(a_0-1)^2 - 4b_0}$ for um inteiro não-nulo. Definamos então

$$n_0 \ = \ \left|\sqrt{(a_0-1)^2 - 4b_0}\right| \ .$$

Claro está que $n_0 \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$. Como $\gamma_- - \gamma_+$ é um inteiro não-nulo, definamos também

$$\begin{aligned} &\gamma_1 \ := \ \gamma_-, \quad \gamma_2 \ := \ \gamma_+, \quad \text{caso } \gamma_- - \gamma_+ \ \geq \ 1, \quad \text{ou} \\ &\gamma_1 \ := \ \gamma_+, \quad \gamma_2 \ := \ \gamma_-, \quad \text{caso } \gamma_+ - \gamma_- \ \geq \ 1. \end{aligned} \tag{14.83}$$

Com essas definições, está sempre garantido que

$$\gamma_1 \ = \ \gamma_2 + n_0 \ .$$

Isso diz-nos que para todo $n \geq 1$ a expressão $f(\gamma_1 + n)$ não pode se anular, pois se assim o fosse teríamos forçosamente $\gamma_1 + n = \gamma_2$, ou seja, $n = -n_0$, um absurdo, já que $n_0 \geq 1$. Por outro lado, existe um único valor de n para o qual $f(\gamma_2 + n)$ se anula, a saber $n = n_0$.

Com isso em mente, vemos que para a solução $\gamma = \gamma_1$ da equação indicial, a expressão (14.72) permite-nos obter todos os coeficientes c_n a partir de um c_0 não-nulo:

$$\begin{aligned} c_n(\gamma_1) \quad &= \quad -\frac{1}{f(\gamma_1+n)} \sum_{m=0}^{n-1} \Big[a_{n-m}(m+\gamma_1) + b_{n-m}\Big] c_m(\gamma_1) \\ &= \quad -\frac{1}{(\gamma_1+n)^2 + (a_0-1)(\gamma_1+n) + b_0} \sum_{m=0}^{n-1} \Big[a_{n-m}(m+\gamma_1) + b_{n-m}\Big] c_m(\gamma_1) \ , \end{aligned} \tag{14.84}$$

para todo $n \geq 1$. Isso fornece-nos a primeira solução da equação diferencial (14.65) (com $z_0 = 0$):

$$y_1(z) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\gamma_1) z^{n+\gamma_1} \ , \tag{14.85}$$

com os $c_n(\gamma_1)$ dados em (14.84) em termos de $c_0(\gamma_1)$, arbitrário mas não-nulo.

Passemos a procurar a segunda solução independente da equação diferencial (14.65).

O caso da solução $\gamma = \gamma_2$ da equação indicial requer cuidado pois, como comentamos, vale que $f(\gamma_2 + n_0) = 0$. Assim, para $n = n_0$ a equação (14.72) só faz sentido se o lado direito for igualmente nulo:

$$\sum_{m=0}^{n_0-1} \Big[a_{n_0-m}(m+\gamma_2) + b_{n_0-m}\Big] c_m(\gamma_2) \ = \ 0 \ . \tag{14.86}$$

Essa relação pode ou não ser satisfeita, dependendo da equação diferencial tratada. Por exemplo, no caso da equação de Bessel de ordem semi-inteira (ou seja, de ordem $1/2$, $3/2$, $5/2$ etc.) verifica-se que a relação (14.86) é satisfeita. Já no caso da equação de Bessel de ordem inteira verifica-se que a relação (14.86) **não** é satisfeita. Isso será discutido explicitamente na Seção 14.2.3, página 639.

Devemos, portanto, separar provisoriamente os dois casos: aquele no qual (14.86) é satisfeita e aquele no qual não é. Posteriormente veremos que essa separação é supérflua, mas por ora ela é logicamente necessária.

Na situação feliz em que (14.86) é satisfeita, o coeficiente $c_{n_0}(\gamma_2)$ fica indeterminado e pode ser escolhido livremente, já que as equações recursivas (14.72) não o fixam e nada mais há para fixá-los. Com isso, as equações recursivas (14.72) determinam todos os demais coeficientes $c_n(\gamma_2)$, $n \geq 1$, $n \neq n_0$, a partir de um $c_0(\gamma_2)$ não-nulo mas arbitrário. Assim, obtemos a solução

$$y_2(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\gamma_2) z^{n+\gamma_2} \;, \tag{14.87}$$

com

$$\begin{aligned} c_n(\gamma_2) \quad &= \quad -\frac{1}{f(\gamma_2+n)} \sum_{m=0}^{n-1} \Big[a_{n-m}(m+\gamma_2) + b_{n-m} \Big] c_m(\gamma_2) \\ &= \quad -\frac{1}{(\gamma_2+n)^2 + (a_0-1)(\gamma_2+n) + b_0} \sum_{m=0}^{n-1} \Big[a_{n-m}(m+\gamma_2) + b_{n-m} \Big] c_m(\gamma_2) \;, \end{aligned} \tag{14.88}$$

para todo $n \geq 1$, $n \neq n_0$ e $c_{n_0}(\gamma_2) =$ constante arbitrária[12].

Resta-nos ainda tratar do caso em que a relação (14.86) **não** é satisfeita. Aqui, devemos proceder como fizemos no caso $\gamma_- = \gamma_+$ e procurar uma solução na forma $y_2(z) = Ay_1(z)\ln(z) + v(z)$, com A sendo uma constante e y_1 sendo a solução já conhecida (14.85). Substituindo isso na equação (14.65), obtem-se novamente a equação (14.78) para $v(z)$.

Como facilmente se verifica, o lado direito de (14.78) é dado pela expansão

$$-A \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\gamma_1) z^{n+\gamma_1} \;=\; -A \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\gamma_1) z^{n+n_0+\gamma_2} \;, \tag{14.89}$$

onde, como antes,

$$g_n(\gamma_1) \;=\; [2(n+\gamma_1)-1]\, c_n(\gamma_1) + \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} c_m(\gamma_1) \;, \quad n \geq 0 \;, \tag{14.90}$$

os coeficientes $c_m(\gamma_1)$ sendo dados por (14.84).

A equação (14.89) sugere que uma solução para $v(z)$ deve ser procurada na forma

$$v(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^{n+\gamma_2} \;.$$

Inserindo isso em (14.78) tem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\gamma_2)(n+\gamma_2-1)v_n + \left(\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}(m+\gamma_2)v_m \right) + \left(\sum_{m=0}^{n} b_{n-m} v_m \right) \right] z^{n+\gamma_2} \;=\; -A \sum_{n=n_0}^{\infty} g_{n-n_0}(\gamma_1) z^{n+\gamma_2} \;,$$

o que implica

$$(n+\gamma_2)(n+\gamma_2-1)v_n + \sum_{m=0}^{n} \Big[(m+\gamma_2)a_{n-m} + b_{n-m} \Big] v_m \quad = \quad 0, \quad n \;=\; 0,\; \ldots,\; n_0 - 1 \;, \tag{14.91}$$

$$(n+\gamma_2)(n+\gamma_2-1)v_n + \sum_{m=0}^{n} \Big[(m+\gamma_2)a_{n-m} + b_{n-m} \Big] v_m \quad = \quad -Ag_{n-n_0}(\gamma_1), \quad \forall n \geq n_0 \;. \tag{14.92}$$

Para $n = 0$ a relação (14.91) tem a forma $\Big[\gamma_2(\gamma_2-1) + a_0\gamma_2 + b_0\Big] v_0 = 0$, mas como o fator entre colchetes é $f(\gamma_2) = 0$, concluímos que essa relação é trivialmente satisfeita e, assim, v_0 pode ser escolhido livremente. Para $1 \leq n \leq n_0 - 1$,

[12] O que ocorre se, por opção, escolhermos $c_{n_0}(\gamma_2)$ não-nulo? Nesse caso teríamos um termo a mais em $y_2(z)$ do tipo $c_{n_0} z^{n_0+\gamma_2} = c_{n_0} z^{\gamma_1}$. Esse termo se adicionaria na solução geral ao termo $c_0(\gamma_1)z^{\gamma_1}$ proveniente da solução $y_1(z)$, ou seja, corresponderia a uma nova escolha da constante arbitrária $c_0(\gamma_1)$, não representando, assim, nenhuma mudança na solução geral.

(14.91) implica que

$$v_n \;=\; -\frac{1}{f(\gamma_2+n)}\sum_{m=0}^{n-1}\Big[(m+\gamma_2)a_{n-m}+b_{n-m}\Big]v_m \tag{14.93}$$

$$\;=\; -\frac{1}{(\gamma_2+n)^2+(a_0-1)(\gamma_2+n)+b_0}\sum_{m=0}^{n-1}\Big[(m+\gamma_2)a_{n-m}+b_{n-m}\Big]v_m \tag{14.94}$$

Para $n = n_0$ a relação (14.92) é

$$\Big[(n_0+\gamma_2)(n_0+\gamma_2-1)+a_0(n_0+\gamma_2)+b_0\Big]\,v_{n_0}+\sum_{m=0}^{n_0-1}\Big[(m+\gamma_2)a_{n_0-m}+b_{n_0-m}\Big]v_m \;=\; -A[2\gamma_1-1+a_0]\,c_0(\gamma_1)\;.$$

Como $(n_0+\gamma_2)(n_0+\gamma_2-1)+a_0(n_0+\gamma_2)+b_0 = f(n_0+\gamma_2) = f(\gamma_1) = 0$, ficamos apenas com

$$\sum_{m=0}^{n_0-1}\left[(m+\gamma_2)a_{n_0-m}+b_{n_0-m}\right]v_m \;=\; -A[2\gamma_1-1+a_0]\,c_0(\gamma_1) \;=\; \mp A\sqrt{(a_1-1)^2-4b_0}\,c_0(\gamma_1)\;, \tag{14.95}$$

o sinal $\mp$ dependendo de se ter $\gamma_1 = \gamma_+$ ou $\gamma_1 = \gamma_-$, respectivamente. É fácil ver, porém, que em qualquer caso $\mp\sqrt{(a_1-1)^2-4b_0} = -n_0$. A relação (14.95) fixa A:

$$A \;=\; -\left(\frac{1}{c_0(\gamma_1)\,n_0}\right)\sum_{m=0}^{n_0-1}\left[(m+\gamma_2)a_{n_0-m}+b_{n_0-m}\right]v_m\;, \tag{14.96}$$

com os v_m fixados na expressão (14.94) em função de $v_0 \neq 0$ arbitrário.

O coeficiente v_{n_0} não é fixado por nenhuma das relações anteriores e pode ser escolhido livremente. Sua presença adiciona um termo do tipo $v_{n_0}z^{n_0+\gamma_2} = v_{n_0}z^{\gamma_1}$ à solução geral e aplica-se novamente o comentário de rodapé da página 635.

Para $n > n_0$, tem-se ainda por (14.92)

$$v_n \;=\; -\frac{1}{f(\gamma_2+n)}\left[Ag_{n-n_0}(\gamma_1)+\sum_{m=0}^{n-1}\Big[a_{n-m}(m+\gamma_2)+b_{n-m}\Big]v_m\right]$$

$$\;=\; -\left(\frac{1}{(\gamma_2+n)^2+(\gamma_2+n)(a_0-1)+b_0}\right)\left[Ag_{n-n_0}(\gamma_1)+\sum_{m=0}^{n-1}\Big[a_{n-m}(m+\gamma_2)+b_{n-m}\Big]v_m\right]\;. \tag{14.97}$$

com os $g_n(\gamma_1)$ fixados em (14.90) em termos dos coeficientes $c_m(\gamma_1)$ da solução $y_1(z)$.

As expressões (14.94), (14.96) e (14.97) permitem fixar todos os v_n's e a constante A em termos de $v_0 \neq 0$ e de v_{n_0}, arbitrários. Observemos, A não é forçosamente nulo, nem pode ser escolhido arbitrariamente.

Sobre a constante A vale ainda uma observação importante.

• A condição (14.86) e a constante A

Observe o leitor que as relações de recorrência (14.94), que fixam os v_m's com $m = 0, \ldots, n_0-1$, são idênticas às de (14.88), que fixam todos os $c_m(\gamma_2)$'s, em particular aqueles com $m = 0, \ldots, n_0-1$. Os v_m's são fixados por um v_0 inicial não-nulo e os $c_m(\gamma_2)$'s por um $c_0(\gamma_2)$ inicial não-nulo. Contemplando aquelas relações de recorrência, um minuto de meditação nos leva a perceber que todos os v_m são proporcionais a v_0 e que todos os $c_m(\gamma_2)$ são proporcionais a $c_0(\gamma_2)$. Como as relações de recorrência são idênticas, concluímos que

$$v_m \;=\; \frac{v_0}{c_0(\gamma_2)}\,c_m(\gamma_2) \quad \text{para todo } m \;=\; 0,\ \ldots,\ n_0-1\;.$$

Agora, pela expressão (14.96), A é proporcional a

$$\sum_{m=0}^{n_0-1} \left[(m+\gamma_2)a_{n_0-m} + b_{n_0-m}\right] v_m \; = \; \frac{v_0}{c_0(\gamma_2)} \sum_{m=0}^{n_0-1} \left[(m+\gamma_2)a_{n_0-m} + b_{n_0-m}\right] c_m(\gamma_2) \; .$$

A última soma, porém, é idêntica àquela de (14.86)! Assim, percebemos que, sob a hipótese que (14.86) não é satisfeita, tem-se que $A \neq 0$.

Por outro lado, se (14.86) é satisfeita, então $A = 0$. Mas se $A = 0$, as relações de recorrência (14.97) tornam-se também idênticas àquelas de (14.88), que fixam todos os $c_m(\gamma_2)$'s. Concluímos então, que nesse caso em que $A = 0$ (ou seja, sob (14.65)) vale também

$$v_m \; = \; \frac{v_0}{c_0(\gamma_2)} \, c_m(\gamma_2) \; ,$$

mas agora para <u>todo</u> $m \geq 0$. Assim, para $A = 0$ a solução $y_2(z) = A\ln(z)y_1(z) + v(z)$ reduz-se (a menos de uma constante multiplicativa trivial) à solução para $y_2(z)$ dada em (14.87), obtida sob a condição (14.86).

Nesse sentido, a condição (14.86) é supérflua e podemos unificar as soluções que obtivemos nos casos em que (14.86) é ou não é satisfeita e resumir nossas conclusões da seguinte forma:

Para $\gamma_- - \gamma_+ \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, a equação diferencial (14.65) (com $z_0 = 0$) tem duas soluções independentes $y_1(z)$ e $y_2(z)$, onde:

$$y_1(z) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\gamma_1) z^{n+\gamma_1} \qquad \text{e} \qquad y_2(z) \; = \; Ay_1(z)\ln(z) + \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^{n+\gamma_2} \; ,$$

onde os $c_n(\gamma_1)$, $n \geq 1$, também estão definidos em (14.84) a partir de um $c_0(\gamma_1)$ não-nulo arbitrário e onde os v_n's com $n \geq 1$, $n \neq n_0$, e a constante A são fixados em (14.94), (14.96) e (14.97) em termos de $v_0 \neq 0$ e de v_{n_0}, arbitrários.

Como mencionamos, há casos em que $A = 0$, exemplos sendo as equação de Bessel de ordem semi-inteira e a equação de Euler, para certos parâmetros.

Com tudo isso a demonstração do Teorema 14.2 está completa e podemos passar ao estudo de exemplos particulares.

14.2.2 A Equação de Euler Revisitada

A *equação de Euler*[13] (de segunda ordem) é a equação diferencial

$$z^2y''(z) + azy'(z) + by(z) \; = \; 0 \; ,$$

onde a e b são constantes. Comparando com a forma (14.52), vemos que $z_0 = 0$ é um ponto singular regular da equação, vemos que $a(z) = a$ e que $b(z) = b$. Assim, no presente caso tem-se

$$a_n \; = \; \begin{cases} a, & \text{para } n = 0 \\ 0, & \text{para } n \geq 1 \end{cases} \; , \qquad b_n \; = \; \begin{cases} b, & \text{para } n = 0 \\ 0, & \text{para } n \geq 1 \end{cases} \; .$$

A equação de Euler já foi resolvida à página 579, onde encontramos as soluções (13.83) e (13.84).

Vamos tratá-la aqui sob a luz do Teorema 14.2, página 627. Se procurarmos uma solução na forma

$$y(z) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\gamma} \; , \tag{14.98}$$

com

$$y'(z) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} (n+\gamma) c_n z^{n+\gamma-1} \tag{14.99}$$

[13]Leonhard Euler (1707–1783). Um dos matemáticos mais prolíficos e influentes de todos os tempos, Euler foi um dos fundadores da teoria das equações diferenciais e deixou contribuições seminais em inúmeros campos da Matemática e da Física. A equação de Euler apresentada abaixo é uma das várias que levam seu nome. Há uma outra equação de Euler na Mecânica dos Fluidos, assim como fórmulas de Euler, invariantes de Euler, métodos de Euler, Ansätze de Euler, multiplicadores de Euler, constantes de Euler, números de Euler, ângulos de Euler, problemas de Euler, conjecturas de Euler, teoremas de Euler etc. Boa parte da notação matemática usada atualmente é também sua invenção (por exemplo, o símbolo f' para denotar a derivada de uma função f ou o uso da letra e para designar o número $2,7182818\ldots$).

e

$$y''(z) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty}(n+\gamma)(n+\gamma-1)c_n z^{n+\gamma-2} \, , \tag{14.100}$$

a equação de Euler fica

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\gamma)(n+\gamma-1)c_n z^{n+\gamma} + \sum_{n=0}^{\infty} a(n+\gamma)c_n z^{n+\gamma} + \sum_{n=0}^{\infty} bc_n z^{n+\gamma} \; = \; 0$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+\gamma)(n+\gamma-1)c_n + a(n+\gamma)c_n + bc_n\Big] \, z^{n+\gamma} \; = \; 0,$$

o que implica

$$f(n+\gamma)\, c_n \; = \; 0 \qquad \forall \, n \geq 0.$$

onde f é o polinômio de segundo grau.

$$f(x) \; := \; x(x-1) + ax + b \; = \; x^2 + (a-1)x + b \, .$$

Sem perda de generalidade, podemos sempre adotar $c_0 \neq 0$, pois se c_m fosse o primeiro coeficiente não-nulo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\gamma}$ poderia ser reescrita como $\sum_{n=0}^{\infty} c_n' z^{n+\gamma'}$ com $c_n' := c_{n+m}$ e $\gamma' = \gamma + m$, que tem a mesma forma genérica mas com $c_0' \neq 0$.

Assim, devemos impor $f(\gamma) = 0$, o que possui duas soluções:

$$\gamma_- \; = \; \frac{1 - a - \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \qquad \text{e} \qquad \gamma_+ \; = \; \frac{1 - a + \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \, .$$

Se $\gamma_- - \gamma_+$ não for um inteiro, a equação $f(\gamma_\pm + n) = 0$ não é satisfeita para nenhum $n \geq 1$ inteiro. A razão é a seguinte: f é um polinômio de segundo grau e, portanto, possui apenas duas soluções. Assim, se $f(\gamma_\pm + n) = 0$ teríamos $\gamma_\pm + n = \gamma_\mp$, o que implica que $\gamma_- - \gamma_+$ é inteiro, uma contradição. Nesse caso, então, temos que adotar $c_n = 0$ para todo $n \geq 1$ e as soluções da equação de Euler ficam

$$y_1(z) \; = \; z^{\gamma_-} \qquad \text{e} \qquad y_2(z) \; = \; z^{\gamma_+} \, . \tag{14.101}$$

No caso de $\gamma_- = \gamma_+ = \gamma_0 = (1-a)/2$, tem-se por (14.56) uma solução na forma

$$y_1(z) \; = \; z^{\gamma_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\gamma_0) z^n \quad \text{e uma segunda na forma} \quad y_2(z) \; = \; y_1(z) \, \ln(z) \, + z^{\gamma_0} \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\gamma_0) z^n \, ,$$

com os c_n dados em (14.57) e os v_n dados em (14.58). Observando (14.57), constata-se que nesse caso $c_n(\gamma_0) = 0$ para todo n, exceto $n = 0$, pois apenas a_0 e b_0 podem ser não-nulos. Igualmente, observando (14.58) constata-se que $v_n(\gamma_0)$ é proporcional a $c_n(\gamma_0)$ para todo $n \geq 1$ e, com isso, apenas v_0 pode ser não-nulo. Assim, temos nesse caso, tomando $c_0 = v_0 = 1$,

$$y_1(z) \; = \; z^{\gamma_0} \qquad \text{e} \qquad y_2(z) \; = \; z^{\gamma_0} \, \ln(z) \, + z^{\gamma_0} \, .$$

O termo z^{γ_0} na expressão de $y_2(z)$ é o próprio $y_1(z)$, de modo que podemos tomar como soluções linearmente independentes as seguintes:

$$y_1(z) \; = \; z^{\gamma_0} \qquad \text{e} \qquad y_2(z) \; = \; z^{\gamma_0} \, \ln(z) \, . \tag{14.102}$$

Por fim, consideremos o caso em que $\gamma_- - \gamma_+$ é um inteiro não-nulo. Definamos γ_1 e γ_2 como em (14.59), com $n_0 = \big|\sqrt{(a-1)^2 - 4b}\big|$.

Então uma solução será $y_1(z) = z^{\gamma_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\gamma_1) z^n$ e a outra terá a forma $y_2(z) = Ay_1(z)\ln(z) + z^{\gamma_2} \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n$ onde aqui os c_n são dados em (14.61), os v_n são dados em (14.62) e A é dada em (14.63).

Contemplando (14.61) constata-se que $c_n(\gamma_1) = 0$ para todo $n \geq 1$, pois apenas a_0 e b_0 podem ser não-nulos, sendo que podemos escolher $c_0 = 1$, livremente. Disso concluímos que $y_1(z) = z^{\gamma_1}$. Por (14.63) tem-se que $A = 0$ pois, no caso da equação de Euler, $a_{n_0-m} = b_{n_0-m} = 0$ para $m = 0, \ldots, n_0 - 1$. Por (14.62), tem-se analogamente

$$v_n = \begin{cases} 0\,, & \text{para } 1 \leq n \leq n_0 - 1\,, \\ \text{arbitrário}\,, & \text{para } n = n_0\,, \\ 0\,, & \text{para } n > n_0, \end{cases}$$

Assim, apenas v_0 e v_{n_0} são arbitrários, sendo que v_0 deve ser não-nulo. Escolhendo $v_0 = 1$ e $v_{n_0} = 0$, segue que $y_2(z) = z^{\gamma_2}$. Concluindo, vale aqui que

$$y_1(z) = z^{\gamma_1} \qquad \text{e} \qquad y_2(z) = z^{\gamma_2}\,. \tag{14.103}$$

Todos esses resultados coincidem, como deveria ser, com aqueles obtidos em (13.83) e (13.84), página 579 e seguintes.

O estudo das soluções da equações de Euler é útil na resolução de equações com singularidades regulares mais gerais como

$$z^2 y''(z) + z a(z) y'(z) + b(z) y(z) = 0$$

pela seguinte razão. Próximo ao ponto singular $z_0 = 0$, podemos aproximar $a(z) \approx a_0$ e $b(z) \approx b_0$, já que esses são os primeiros termos das expansões de Taylor de $a(z)$ e $b(z)$. Assim, para $|z|$ pequeno o suficiente, a equação aproxima-se de

$$z^2 y''(z) + a_0 z\, y'(z) + b_0\, y(z) = 0$$

que é uma equação de Euler com $a = a_0$ e $b = b_0$. Com isso, vemos que as soluções da equação geral se aproximam para $|z|$ pequeno daquelas encontradas em (14.101), (14.102) ou (14.103), dependendo do caso. Esse proceder permite-nos, face a uma equação singular regular geral, estudar qual tipo de singularidade deve ocorrer próximo ao ponto singular e, com isso, perceber qual das soluções descritas no Teorema 14.2, página 627, se aplica. Em verdade, a resolução da equação indicial (14.53) fornece o mesmo tipo de informação.

14.2.3 A Equação de Bessel

Uma das equações diferenciais mais importantes dentro da classe que temos estudado é a equação de Bessel, a qual surge em vários problemas de Física e de Matemática aplicada. A mesma pode ser encontrada, por exemplo, quando da resolução da equação de Helmholtz em duas dimensões em coordenadas polares ou em três dimensões em coordenadas esféricas (levando às chamadas *funções de Bessel esféricas*). Vide para tal o Capítulo 21, página 901. Para alguns comentários históricos sobre a origem das equações de Bessel e das funções de Bessel, vide página 717.

A equação diferencial

$$z^2 y''(z) + z y'(z) + (z^2 - \nu^2) y(z) = 0\,, \tag{14.104}$$

com $z \in \mathbb{C}$, onde $\nu \in \mathbb{C}$ é uma constante, é denominada *equação de Bessel*[14] de ordem ν. Comparando com a forma (14.52), vemos que $z_0 = 0$ é um ponto singular regular da equação, vemos que $a(z) = 1$ e que $b(z) = z^2 - \nu^2$. Assim, no presente caso tem-se

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{para } n = 0 \\ 0, & \text{para } n \geq 1 \end{cases}\,, \qquad b_n = \begin{cases} -\nu^2, & \text{para } n = 0 \\ 1, & \text{para } n = 2 \\ 0, & \text{para } n = 1 \text{ ou } n \geq 3 \end{cases}\,.$$

A equação indicial (14.53) conduz às soluções

$$\gamma_- = -\nu \quad \text{e} \quad \gamma_+ = \nu\,.$$

[14] Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846).

Há, portanto, três casos a considerar: **1.** o caso em que $2\nu \notin \mathbb{Z}$, **2.** o caso em que $2\nu = 0$ e **3.** o caso em que $2\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Observe o leitor que as condições **2** e **3** correspondem a ν semi-inteiro ou inteiro. Os dois casos são os mais relevantes em Física. O caso de ν inteiro conduz às chamadas *funções de Bessel* e o caso de ν semi-inteiro conduz às chamadas *funções de Bessel esféricas* as quais surgem, por exemplo, em problemas de propagação de ondas em duas ou três dimensões, respectivamente. Vide Seção 14.2.4, página 649. Para a origem das funções de Bessel, vide nota histórica à página 717.

Caso 1. $2\nu \notin \mathbb{Z}$.

Nesse caso tem-se duas soluções

$$y_{\pm} \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\pm\nu) z^{n\pm\nu} \; ,$$

com $c_n(\pm\nu)$ dados por (14.55):

$$c_n(\pm\nu) \; = \; -\frac{1}{n(n+\pm 2\nu)} \sum_{m=0}^{n-1} \Big[(m\pm\nu)a_{n-m} + b_{n-m} \Big] c_m(\pm\nu) \; .$$

Podemos nos concentrar apenas nos coeficientes $c_n(+\nu)$, pois os coeficientes $c_n(-\nu)$ podem ser obtidos fazendo-se $\nu \to -\nu$. Vale

$$c_n(\nu) \; = \; -\frac{1}{n(n+2\nu)} \sum_{m=0}^{n-1} \Big[(m+\nu)a_{n-m} + b_{n-m} \Big] c_m(\nu) \; , \tag{14.105}$$

e tem-se

$$\begin{aligned} c_1(\nu) \; &= \; 0 \; , \\ c_2(\nu) \; &= \; -\frac{1}{2(2+2\nu)} c_0(\nu) \; , \\ c_n(\nu) \; &= \; -\frac{1}{n(n+2\nu)} \, c_{n-2}(\nu), \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Com isso, fica claro que

$$\begin{aligned} c_{2k}(\nu) \; &= \; \frac{(-1)^k}{(2k)!!\,(2+2\nu)(4+2\nu)\cdots(2k+2\nu)} \, c_0(\nu) \; , \quad k \geq 0 \; . \\ c_{2k+1}(\nu) \; &= \; 0 \; , \quad k \geq 0 \; . \end{aligned}$$

E. 14.7 *Exercício importante.* Mostre isso! ✠

A última expressão pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} c_{2k}(\nu) \; &= \; \frac{(-1)^k}{k!\,2^{2k}\,(1+\nu)(2+\nu)\cdots(k+\nu)} \, c_0(\nu) \; , \quad k \geq 0 \; . \\ c_{2k+1}(\nu) \; &= \; 0 \; , \quad k \geq 0 \; , \end{aligned}$$

onde usamos que $(2+2\nu)(4+2\nu)\cdots(2k+2\nu) = 2^k(1+\nu)(2+\nu)\cdots(k+\nu)$ e também que $(2k)!! = 2^k k!$. Como a função Γ definida em (14.25)-(14.26) satisfaz

$$\Gamma(k+1+\nu) \; = \; \Gamma(1+\nu)(1+\nu)(2+\nu)\cdots(k+\nu) \; ,$$

podemos ainda escrever

$$\begin{aligned} c_{2k}(\nu) \; &= \; \frac{(-1)^k\Gamma(1+\nu)}{k!\,2^{2k}\,\Gamma(k+1+\nu)} \, c_0(\nu) \; , \quad k \geq 0 \; . \\ c_{2k+1}(\nu) \; &= \; 0 \; , \quad k \geq 0 \; . \end{aligned}$$

Por convenção histórica adota-se

$$c_0(\nu) \;=\; \frac{1}{2^\nu\,\Gamma(1+\nu)}$$

e chega-se com isso à expressão

$$J_\nu(z) \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} . \tag{14.106}$$

Essa função representa uma das soluções da equação de Bessel de ordem ν para o caso considerado e é denominada *função de Bessel de primeiro tipo e ordem* ν. Como comentamos, uma segunda solução é obtida fazendo-se $\nu \to -\nu$:

$$J_{-\nu}(z) \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1-\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu} .$$

Concluímos, assim, com a constatação que a solução geral da equação de Bessel de ordem ν para o caso $2\nu \notin \mathbb{Z}$ é

$$\alpha_1 J_\nu(z) + \alpha_2 J_{-\nu}(z) ,$$

onde α_1 e α_2 são constantes arbitrárias.

Por convenção histórica, é costume considerar-se também uma combinação linear particular de $J_{\pm\nu}(z)$, a saber a seguinte:

$$N_\nu(z) \;:=\; \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)} . \tag{14.107}$$

Essa função $N_\nu(z)$ também representa uma das soluções da equação de Bessel de ordem ν (por ser uma combinação linear de duas outras) e é denominada *função de Bessel de segundo tipo e ordem* ν, ou ainda *função de Neumann*[15] de ordem ν.

Concluímos, assim, que a solução geral da equação de Bessel de ordem ν para o caso $2\nu \notin \mathbb{Z}$ também pode ser escrita em termos das funções J_ν e N_ν na forma

$$\beta_1 J_\nu(z) + \beta_2 N_\nu(z) ,$$

onde β_1 e β_2 são constantes arbitrárias.

O estudante deve notar que as funções $J_{\pm\nu}(z)$ e $N_\nu(z)$, para 2ν não-inteiro, são analíticas em toda a parte, exceto em $z = 0$, onde possuem um ponto de ramificação devido ao fator $z^{\pm\nu} = \exp(\pm\nu\ln(z))$.

<u>*Caso 2.* $2\nu = 0$</u>.

No caso em questão aplicam-se as soluções (14.56), (14.57) e (14.58). Aqui tem-se $\gamma_0 = (1 - a_0)/2 = 0$ e para y_1 tem-se $y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) z^n$, com (por (14.57))

$$c_n(0) \;=\; -\frac{1}{n^2} \sum_{m=0}^{n-1} \Big[m a_{n-m} + b_{n-m} \Big] c_m(0) .$$

Essas relações são idênticas àquelas de (14.105) (tomando-se aqui $\nu = 0$) e, assim, tem por solução

$$\begin{aligned} c_{2k}(0) \;&=\; \frac{(-1)^k\Gamma(1)}{k!\,2^{2k}\,\Gamma(k+1)}\, c_0(0) \,, = \frac{(-1)^k}{(k!)^2\,2^{2k}}\, c_0(0) \,, \quad k \geq 0 \,, \\ c_{2k+1}(0) \;&=\; 0 \,, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

onde usamos que $\Gamma(1) = 1$ e $\Gamma(k+1) = k!$. Por convenção histórica adota-se $c_0(0) = 1$ e chega-se com isso à expressão

$$J_0(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} . \tag{14.108}$$

Essa função representa uma das soluções da equação de Bessel de ordem 0 e é denominada *função de Bessel de primeiro tipo e ordem* 0.

---

[15] Carl Neumann (1832–1925).

Para a segunda solução y_2 teremos, por (14.56),

$$y_2(z) \;=\; J_0(z)\ln(z) + \sum_{n=0}^{\infty} v_n\, z^n \;,$$

com os v_n dados em (14.58). Como o estudante pode facilmente verificar, adotando-se $v_0 = 0$, obtem-se para esses coeficientes as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} v_{2k} &= \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2\, 2^{2k}}\, h_k \;, \quad k \geq 0 \;, \\ v_{2k+1} &= 0 \;, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

onde

$$h_0 \;:=\; 0 \;, \tag{14.109}$$

$$h_n \;:=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \;=\; \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l} \;, \qquad \forall\, n \geq 1 \;. \tag{14.110}$$

Note-se que $v_0 = 0$.

E. 14.8 *Exercício importante.* Verifique! ✠

Com isso, a segunda solução $y_2(z)$ será

$$y_2(z) \;=\; J_0(z)\ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2}\, h_k\, \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \;. \tag{14.111}$$

Por convenção histórica, costuma-se considerar também uma particular combinação das soluções $J_0(z)$ e $y_2(z)$:

$$N_0(z) \;:=\; \frac{2}{\pi}\Big(y_2(z) + (\gamma - \ln(2))J_0(z)\Big) \;=\; \frac{2}{\pi}\left(\left(\gamma + \ln\left(\frac{z}{2}\right)\right) J_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\, h_k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\right) \;, \tag{14.112}$$

onde γ é a chamada *constante de Euler-Mascheroni*[16], definida por[17]:

$$\gamma \;:=\; \lim_{n\to\infty}\big(h_n - \ln(n)\big) \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right) \;\approx\; 0,5772156649\ldots \;.$$

Essa função $N_0(z)$ também representa uma das soluções da equação de Bessel de ordem 0 (por ser uma combinação linear de duas outras) e é denominada *função de Bessel de segundo tipo e ordem* 0, ou ainda *função de Neumann de ordem* 0.

Concluímos, assim, com a constatação que a solução geral da equação de Bessel de ordem 0 é

$$\alpha_1 J_0(z) + \alpha_2 N_0(z) \;,$$

onde α_1 e α_2 são constantes arbitrárias.

O estudante deve notar que a primeira solução $J_0(z)$ é uma função analítica para todo $z \in \mathbb{C}$ (pois a série em (14.108) converge absolutamente para todo z (mostre isso!)). Já a solução $N_0(z)$ é também analítica em toda parte, exceto em $z = 0$, onde possui uma singularidade logarítmica.

Caso 3. $2\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

[16] Leonhard Euler (1707–1783). Lorenzo Mascheroni (1750–1800).

[17] Essa constante foi introduzida por Euler em 1735, o qual calculou seus 16 primeiros dígitos decimais. Em 1790, Mascheroni calculou seus 32 primeiros dígitos decimais, dos quais apenas os primeiros 19 estavam corretos.

Como a equação de Bessel é invariante por $\nu \to -\nu$, podemos sem perda de generalidade tomar aqui 2ν um inteiro positivo. Como veremos, há dois casos a considerar: **a.** ν é um inteiro positivo e **b.** ν é um semi-inteiro positivo, ou seja, no caso **a.** tem-se $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots$ enquanto que no caso **b.** tem-se $\nu = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$.

Caso a. $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Vamos aqui escrever $\nu = p$, com p sendo um inteiro positivo: $p = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Com essas convenções, tem-se que $\gamma_1 = p$, $\gamma_2 = -p$ e $n_0 = 2p$. As soluções y_1 e y_2 são aquelas dadas em (14.60), (14.61) e (14.62):

$$y_1(z) = z^p \sum_{n=0}^{\infty} c_n(p) z^n \quad \text{e} \quad y_2(z) = Ay_1(z)\ln(z) + z^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n ,$$

onde, segundo (14.61), as constantes $c_n(p)$ satisfazem

$$c_n(p) = -\frac{1}{f(p+n)} \sum_{m=0}^{n-1} \Big[(m+p)a_{n-m} + b_{n-m}\Big] c_m(p)$$

para $n \geq 1$. Novamente, essas relações são idênticas àquelas de (14.105) e, assim, suas soluções são

$$\begin{aligned} c_{2k}(p) &= \frac{(-1)^k \Gamma(1+p)}{k!\, 2^{2k}\, \Gamma(k+1+p)} c_0(p) = \frac{(-1)^k\, p!}{k!\, 2^{2k}\, (k+p)!} c_0(p) , \quad k \geq 0 . \\ c_{2k+1}(p) &= 0 , \quad k \geq 0 , \end{aligned}$$

onde usamos que $\Gamma(1+p) = p!$ e $\Gamma(k+1+p) = (k+p)!$. Por convenção histórica adota-se $c_0(p) = \frac{1}{2^p\, p!}$ e chega-se com isso à expressão

$$J_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+p)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+p} .$$

Essa função representa uma das soluções da equação de Bessel de ordem p (com $p = 1, 2, 3, 4, \ldots$) e é denominada *função de Bessel de primeiro tipo e ordem p*.

O leitor é convidado a constatar que a expressão (14.108) para $J_0(z)$ é idêntica a essa se tomarmos $p = 0$. Na Figura 14.2, página 644, exibimos o gráfico de algumas das primeiras funções de Bessel de ordem inteira.

Procuremos agora a segunda solução $y_2(z)$:

$$y_2(z) = AJ_p(z)\ln(z) + z^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} v_n(p) z^n .$$

Por (14.62),

$$v_n(p) = \begin{cases} -\dfrac{1}{f(n-p)} \displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} \Big((m-p)a_{n-m} + b_{n-m}\Big) v_m(p) , & \text{para } 1 \leq n \leq 2p-1 , \\[2ex] \text{arbitrário} , & \text{para } n = 2p , \\[2ex] -\dfrac{1}{f(n-p)} \left[Ag_{n-2p} + \displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} \big((m-p)a_{n-m} + b_{n-m}\big) v_m(p)\right] , & \text{para } n > 2p, \end{cases} \qquad (14.113)$$

A constante A é dada em (14.63) e, para o presente caso, tem-se

$$A = -\frac{1}{2p\, c_0(p)} \sum_{m=0}^{2p-1} \left[(m-p)a_{2p-m} + b_{2p-m}\right] v_m(p) = -\frac{2^p\, p!}{2p} v_{2p-2}(p) .$$

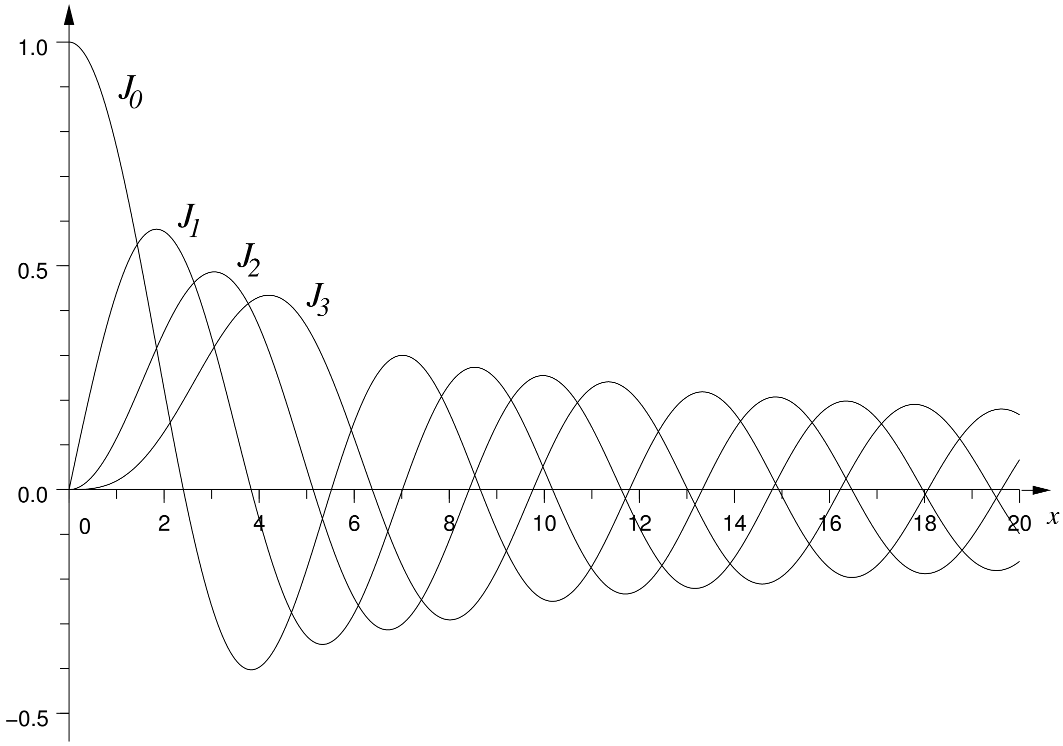

Figura 14.2: Gráficos das funções de Bessel $J_m(x)$, $m = 0, \ldots, 3$, para $x \in [0,\ 20]$.

Agora, por (14.62),

$$v_{2p-2}(p) \ = \ -\frac{1}{f(p-2)} \sum_{m=0}^{2p-3} \Big((m-p)a_{2p-2-m} + b_{2p-2-m} \Big)\, v_m(p) \ ,$$

de onde se vê imediatamente que

$$v_{2p-2}(p) \ = \ \frac{1}{2^2(p-1)}\, v_{2p-4}(p), \qquad p \geq 2 \ ,$$

e, portanto,

$$v_{2p-2}(p) \ = \ \frac{1}{2^{2(p-1)}(p-1)!}\, v_0(p), \qquad p \geq 2 \ .$$

Logo, $A = -4v_0(p)$. Adotando-se $v_0(p) = -1/4$ teremos $A = 1$ e

$$y_2(z) \ = \ J_p(z)\ln(z) + z^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} v_n(p) z^n \ .$$

com

$$v_n(p) \ = \ \begin{cases} -\dfrac{1}{f(n-p)} \displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} \Big((m-p)a_{n-m} + b_{n-m} \Big)\, v_m(p) \ , & \text{para } 1 \ \leq \ n \ \leq \ 2p-1 \ , \\[2em] \text{arbitrário} \ , & \text{para } n \ = 2p \ , \\[2em] -\dfrac{1}{f(n-p)} \left[g_{n-2p} + \displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} \big((m-p)a_{n-m} + b_{n-m} \big) v_m(p) \right] \ , & \text{para } n \ > \ 2p, \end{cases} \qquad (14.114)$$

com os g_n dados em (14.64) em termos de $c_n(p)$.

Um cálculo trabalhoso, que nos poupamos de apresentar em detalhe, conduz ao seguinte resultado:

$$y_2(z) \;=\; J_p(z)\ln(z) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-p} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(h_n+h_{n+p})}{n!\,(n+p)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p},$$

com $p = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$.

E. 14.9 *Exercício*. Tome uma hora livre e mostre isso. ✠

O leitor é convidado a constatar que a expressão (14.111) é idêntica a essa se tomarmos $p = 0$ (com a convenção que $\sum_{n=0}^{-1}(\cdots) = 0$).

Por convenção histórica, costuma-se considerar também uma particular combinação das soluções $J_p(z)$ e $y_2(z)$:

$$N_p(z) \;:=\; \frac{2}{\pi}\Big(y_2(z) + (\gamma - \ln(2))J_p(z)\Big) \;=$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\left(\gamma + \ln\left(\frac{z}{2}\right)\right)J_p(z) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-p} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(h_n+h_{n+p})}{n!\,(n+p)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p}\right), \quad (14.115)$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni mencionada acima. Essa função $N_p(z)$ também representa uma das soluções da equação de Bessel de ordem p (por ser uma combinação linear de duas outras) e é denominada *função de Bessel de segundo tipo e ordem* p, ou ainda *função de Neumann de ordem* p. Na Figura 14.3, página 645, são exibidos gráficos de algumas das primeiras funções de Neumann.

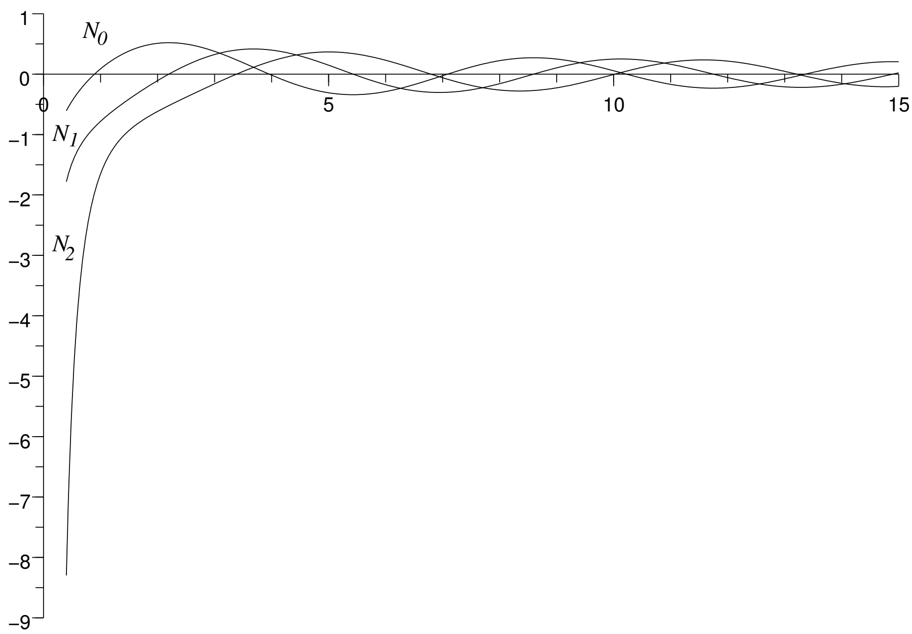

Figura 14.3: Gráficos das funções de Neumann $N_m(x)$, $m = 0, \ldots, 2$, para $x \in [1/2,\ 15]$. Todas divergem em $x = 0$, a divergência sendo tanto mais forte quanto maior m.

Concluímos, assim, com a constatação que a solução geral da equação de Bessel de ordem p, $p = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$, é

$$\alpha_1 J_p(z) + \alpha_2 N_p(z),$$

onde α_1 e α_2 são constantes arbitrárias.

O estudante deve notar que a primeira solução $J_p(z)$ é uma função analítica para todo $z \in \mathbb{C}$ (pois a série em (14.108) converge absolutamente para todo z (mostre isso!)). Já a solução $N_p(z)$ é também analítica em toda parte, exceto em $z = 0$, onde possui uma singularidade logarítmica assim como um polo de ordem p.

Advertência. As funções de Neumann são também por vezes denotadas por Y_ν.

Precisamos estudar ainda o caso em que ν é um número semi-inteiro onde, diferentemente do caso que acabamos de estudar, as soluções independentes são ambas livres de singularidades logarítmicas.

Caso b. $\nu = 1/2,\ 3/2,\ 5/2,\ \ldots$.

Vamos convencionar escrever $\nu = q + 1/2$, com $q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Teremos aqui $n_0 = (2q + 1)$, $\gamma_1 = \nu = q + 1/2$ e $\gamma_2 = -\nu = -q - 1/2$. As soluções y_1 e y_2 são aquelas dadas em (14.60), (14.61) e (14.62):

$$y_1(z) \;=\; z^{q+1/2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(q)z^n \qquad \text{e} \qquad y_2(z) \;=\; Ay_1(z)\ln(z) + z^{-q-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} v_n(q)z^n \;,$$

onde, segundo (14.61), as constantes $c_n(q)$ satisfazem

$$c_n(q) \;=\; -\frac{1}{f\left(n+q+\frac{1}{2}\right)}\sum_{m=0}^{n-1}\left[\left(m+q+\frac{1}{2}\right)a_{n-m} + b_{n-m}\right]c_m(q)\;, \tag{14.116}$$

para $n \geq 1$. Novamente, essas relações são idênticas àquelas de (14.105) com ν substituído por $q + 1/2$ e, assim, suas soluções são

$$c_{2k}(q) \;=\; \frac{(-1)^k\Gamma\left(1+q+\frac{1}{2}\right)}{k!\,2^{2k}\,\Gamma\left(k+1+q+\frac{1}{2}\right)}\,c_0(q)\;, \quad k \geq 0\;.$$

$$c_{2k+1}(q) \;=\; 0\;, \quad k \geq 0\;,$$

onde usamos $\Gamma(1 + q + 1/2) = q!\Gamma(1/2)$ e $\Gamma(k + 1 + q + 1/2) = (k + q)!\Gamma(1/2)$. Adotando

$$c_0(q) \;=\; \frac{1}{2^{q+1/2}\,\Gamma\left(1+q+\frac{1}{2}\right)}\;,$$

chegamos à expressão

$$J_{q+1/2}(z) \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+q+1/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+q+1/2}\;.$$

Essa função representa uma das soluções da equação de Bessel de ordem $q + 1/2$ com $q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ e é denominada *função de Bessel de primeiro tipo e ordem* $q + 1/2$.

Passemos agora à segunda solução

$$y_2(z) \;=\; AJ_{q+1/2}(z)\ln(z) + \sum_{n=0}^{\infty} v_n(q)z^{n-q-1/2}\;.$$

Por (14.62),

$$v_n(q) \;=\; \begin{cases} \dfrac{-1}{f\left(n-q-\frac{1}{2}\right)}\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1}\left[\left(m-q-\frac{1}{2}\right)a_{n-m}+b_{n-m}\right]v_m(q)\;, & 1 \leq n \leq 2q\;, \\[2em] \text{arbitrário}\;, & n = 2q+1\;, \\[2em] \dfrac{-1}{f\left(n-q-\frac{1}{2}\right)}\left\{Ag_{n-2q-1} + \displaystyle\sum_{m=0}^{n-1}\left[\left(m-q-\frac{1}{2}\right)a_{n-m}+b_{n-m}\right]v_m(q)\right\}\;, & n > 2q+1, \end{cases}$$

onde,

$$A \;=\; -\frac{1}{c_0(q)\,(2q+1)}\sum_{m=0}^{2q}\left[\left(m-q-\frac{1}{2}\right)a_{2q+1-m}+b_{2q+1-m}\right]v_m(q) \tag{14.117}$$

Para $1 \leq n \leq 2q$ tem-se

$$v_n(q) \;=\; \frac{-1}{f(n-q-\frac{1}{2})}v_{n-2}(q)\;. \tag{14.118}$$

Porém,

$$v_1(q) \;=\; \frac{-1}{f(\frac{1}{2}-q)}\left[\left(0-q-\frac{1}{2}\right)a_1+b_1\right]v_0(q) \;=\; 0\;,$$

pois $a_1 = b_1 = 0$. Conjuntamente com (14.118), isso diz-nos que $v_n(q) = 0$ para todo n ímpar com $1 \leq n \leq 2q$. A importância dessa observação reside no seguinte. Por (14.117) vê-se facilmente que

$$A \;=\; -\frac{1}{c_0(q)\,(2q+1)}\,v_{2q-1}(q)\;.$$

Portanto, tem-se no caso presente que $A = 0$ e, assim, a segunda solução é livre de singularidades logarítmicas. Além disso, com $A = 0$ as expressões recursivas para $v_n(q)$ simplificam-se para

$$v_n(q) \;=\; \begin{cases} \dfrac{-1}{f\left(n-q-\frac{1}{2}\right)}\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1}\left[\left(m-q-\frac{1}{2}\right)a_{n-m}+b_{n-m}\right]\,v_m(q)\;, & 1 \;\leq\; n \;\leq\; 2q\;, \\[4ex] \text{arbitrário}\;, & n \;=2q+1\;, \\[4ex] \dfrac{-1}{f\left(n-q-\frac{1}{2}\right)}\left\{\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1}\left[\left(m-q-\frac{1}{2}\right)a_{n-m}+b_{n-m}\right]v_m(q)\right\}\;, & n \;>\; 2q+1. \end{cases} \tag{14.119}$$

Como já vimos, para $1 \leq n \leq 2q$ os $v_n(q)$ com n ímpar são nulos. Como v_{2q+1} é arbitrário, é conveniente escolhê-lo igual a zero também. Com isso, as relações (14.119) ficam idênticas àquelas de (14.105) com ν substituído por $-(q+1/2)$ e, assim, suas soluções são

$$v_{2k}(q) \;=\; \frac{(-1)^k\Gamma\left(1-q-\frac{1}{2}\right)}{k!\,2^{2k}\,\Gamma\left(k+1-q-\frac{1}{2}\right)}\,v_0(q)\;,\quad k \geq 0\;.$$

$$v_{2k+1}(q) \;=\; 0\;,\quad k \geq 0\;,$$

Adotando

$$v_0(q) \;=\; \frac{1}{2^{-q-1/2}\,\Gamma\left(1-q-\frac{1}{2}\right)}\;,$$

chagamos à seguinte expressão:

$$J_{-q-1/2}(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(k+1-q-\frac{1}{2}\right)}\,\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-q-1/2}\;.$$

Essa função representa uma segunda solução da equação de Bessel de ordem $q+1/2$ com $q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ e é denominada *função de Bessel de primeiro tipo e ordem* $-(q+1/2)$.

Concluímos, assim, que a solução geral da equação de Bessel de ordem $q+1/2$ com $q = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, é

$$\alpha_1 J_{q+1/2}(z)+\alpha_2 J_{-q-1/2}(z)\;,$$

onde α_1 e α_2 são constantes arbitrárias.

Podemos definir também as *funções de Neumann de ordem* $q+1/2$ em analogia com (14.107), mas aqui, tem-se

$$N_{q+1/2}(z) \ := \ \frac{J_{q+1/2}(z)\cos((q+1/2)\pi) - J_{-q-1/2}(z)}{\operatorname{sen}((q+1/2)\pi)} \ = \ (-1)^{q+1}J_{-q-1/2}(z) \ . \tag{14.120}$$

De qualquer forma, a solução geral da equação de Bessel de ordem $q+1/2$ com $q = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, é

$$\beta_1 J_{q+1/2}(z) + \beta_2 N_{q+1/2}(z) \ ,$$

onde β_1 e β_2 são constantes arbitrárias.

O estudante é convidado a constatar que $J_{q+1/2}(z)$ é uma função analítica para todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, mas em $z = 0$ possui uma singularidade como $z^{q+1/2}$, que é uma singularidade do tipo ponto ramificação (de grau 2). Paralelamente, $J_{-q-1/2}(z)$ (e, portanto, $N_{q+1/2}(z)$) é analítica para todo $z \neq 0$, mas possui em $z = 0$ uma singularidade como $z^{-q-1/2}$, que é uma singularidade do tipo ponto ramificação (de grau -2). Essas afirmações são ilustradas no próximo exercício.

E. 14.10 *Exercício semi-resolvido*. Com $q = 0$ tem-se pelas nossas definições acima

$$J_{1/2}(z) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2} \qquad \text{e} \qquad J_{-1/2}(z) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-1/2} \ .$$

Usando as identidades

$$\Gamma(k+1+1/2) \ = \ \frac{\Gamma(3/2)\,(2k+1)!!}{2^k} \ = \ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{(2k+1)!!}{2^k} \ ,$$

$$2^k k! \ = \ (2k)!! \ , \quad (2k+1)!!(2k)!! \ = \ (2k+1)! \ , \quad (2k)!!(2k-1)!! \ = \ (2k)! \ ,$$

(prove-as!) teremos,

$$J_{1/2}(z) \ = \ z^{-1/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1} \ , \qquad \text{e} \qquad J_{-1/2}(z) \ = \ z^{-1/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k} \ ,$$

e reconhecemos que

$$J_{1/2}(z) \ = \ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{sen}(z)}{z^{1/2}} \qquad \text{e} \qquad J_{-1/2}(z) \ = \ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos(z)}{z^{1/2}} \ . \tag{14.121}$$

Observe ainda que

$$J_{1/2}(z) \ = \ z^{1/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \ ,$$

sendo que $\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}$ é uma função analítica para todo $z \in \mathbb{C}$, inclusive em $z = 0$ (por que?).

Complete os detalhes faltantes de todos os cálculos indicados acima. ✠

E. 14.11 *Exercício*. Verifique por cálculo explícito que as funções $\operatorname{sen}(z)/z^{1/2}$ e $\cos(z)/z^{1/2}$ são, de fato, soluções da equação de Bessel de ordem $\nu = 1/2$. ✠

Para futura referência, reunimos nossos resultados sobre as soluções da equação de Bessel no seguinte teorema:

Teorema 14.3 (Soluções da equação de Bessel) *Seja a equação de Bessel de ordem* $\nu \in \mathbb{C}$

$$z^2 y''(z) + z y'(z) + (z^2 - \nu^2) y(z) \ = \ 0,$$

com $z \in \mathbb{C}$.

1. *Caso* $\nu \notin \mathbb{Z}$ *duas soluções independentes são* $J_\nu(z)$ *e* $J_{-\nu}(z)$, *onde*

$$J_\nu(z) \ := \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} \ . \tag{14.122}$$

Definindo

$$N_\nu(z) \ := \ \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)} \ ,$$

as funções $J_\nu(z)$ *e* $N_\nu(z)$ *são também duas soluções independentes.*

2. *Caso $\nu \in \mathbb{Z}$ podemos, sem perda de generalidade, adotar $\nu \geq 0$, pois a equação de Bessel é invariante pela mudança $\nu \to -\nu$. Com essa convenção, duas soluções independentes são $J_\nu(z)$ e $N_\nu(z)$, onde*

$$J_\nu(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+\nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{14.123}$$

e

$$N_\nu(z) := \frac{2}{\pi}\left(\left(\gamma + \ln\left(\frac{z}{2}\right)\right) J_\nu(z) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-n-1)!}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-\nu} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(h_n + h_{n+\nu})}{n!\,(n+\nu)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}\right),$$

sendo que

$$h_0 := 0, \qquad h_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l}, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

e γ é a constante de Euler-Mascheroni: $\gamma := \lim_{n\to\infty} (h_n - \ln(n)) \approx 0,5772156649\ldots$.

As funções $J_\nu(z)$, $\nu \in \mathbb{C}$, são denominadas funções de Bessel de primeiro tipo e ordem ν, *ou simplesmente* funções de Bessel de ordem ν. *As funções $N_\nu(z)$, $\nu \in \mathbb{C}$, são denominadas* funções de Bessel de segundo tipo e ordem ν, *ou* funções de Neumann de ordem ν. □

Comentário. O caso em que ν é semi-inteiro está incluído no caso 1, acima: $\nu \notin \mathbb{Z}$.

- **Nota sobre as funções de Bessel de ordem inteira negativa**

Até o momento definimos as funções de Bessel J_ν através das expressões (14.122) e (14.123), mas apenas para ν's que não sejam inteiros negativos. A expressão (14.122) contém uma função $\Gamma(x)$ no denominador e $\Gamma(x)$ diverge se x for inteiro negativo. Por isso, em princípio (14.122) não está definida para ν's inteiros negativos.

A experiência mostrou, porém, que é conveniente definir J_ν para ν's que sejam inteiros negativos através da seguinte expressão:

$$J_{-m}(z) := (-1)^m J_m(z), \tag{14.124}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e todo $z \in \mathbb{C}$. Note que, como a equação de Bessel é invariante pela troca $\nu \to -\nu$, J_{-m} definida acima é solução da equação de Bessel de ordem $\pm m$. A conveniência dessa convenção não pode ser apreciada no momento, mas irá manifestar-se quando discutirmos algumas propriedades das funções de Bessel na Seção 15.2.7, que inicia-se na página 717, tais como as relações de recorrência e a função geratriz.

E. 14.12 *Exercício*. Mostre que com a convenção acima vale

$$J_{-m}(-z) = J_m(z), \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}_0,$$

Sugestão: $J_m(z)$ é uma soma de monômios da forma z^{2k+m} e vale $(-z)^{2k+m} = (-1)^m z^{2k+m}$. ✠

14.2.4 Equações Relacionadas à de Bessel. A Equação de Bessel Esférica

Diversas equações diferenciais podem ser transformadas na de Bessel e podem ter suas soluções expressas em termos de funções de Bessel e de Neumann. Uma classe bastante geral é composta pelas equações da forma

$$z^2 y''(z) + (1-2\alpha) z y'(z) + \left[\beta^2\gamma^2 z^{2\gamma} + \alpha^2 - \nu^2\gamma^2\right] y(z) = 0, \tag{14.125}$$

com α, β, γ e ν constantes (sendo $\beta\gamma \neq 0$). Essa equação é por vezes denominada *equação de Bessel generalizada* e sua solução mais geral é

$$a z^\alpha J_\nu(\beta z^\gamma) + b z^\alpha N_\nu(\beta z^\gamma), \tag{14.126}$$

onde a e b são constantes arbitrárias.

E. 14.13 *Exercício*. Prove as afirmações acima, ou seja, prove que (14.126) é asolução geral de (14.125). Sugestão: defina a função v por $y(z) =: z^\alpha v(\beta z^\gamma)$ e, substituindo em (14.125), mostre que v satisfaz a equação de Bessel de ordem ν. ✠

Dois casos particulares de interesse, dentro da classe definida em (14.125), são a equação de Airy (que corresponde a $\alpha = 1/2$, $\beta = 2/3$, $\gamma = 3/2$ e $\nu = 1/3$) e a equação de Bessel esférica (que corresponde a $\alpha = -1/2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ e $\nu = \sigma + 1/2$). Trataremos desses casos logo abaixo.

O estudante deve observar que, caso 2γ não seja um inteiro positivo ou zero, a equação (14.125) não é singular regular em $z_0 = 0$ (compare à (14.49)) e, portanto, a ela não se aplica o método de Frobenius. A solução dada em (14.126), de fato, não é como aquelas obtidas pelo método de Frobenius, que seriam da forma $z^\eta \phi(z)$ ou da forma $z^\eta \ln(z)\phi(z)$, para alguma constante η e com ϕ analítica em torno de $z_0 = 0$. Por exemplo, tem-se

$$z^\alpha J_\nu(\beta z^\gamma) \;=\; \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu\gamma+\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, \beta^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k\gamma} ,$$

que não é da forma $z^\eta\phi(z)$ com ϕ analítica em torno de $z_0 = 0$, pois a série do lado direito não é uma série de potências em z.

• A equação de Airy e a equação de Bessel

Como dissemos acima, várias equações diferenciais podem ser transformadas em equações de Bessel. Um exemplo é o da equação de Airy: $y''(z) - zy(z) = 0$, cujas soluções foram apresentadas na Seção 14.1.4, página 620. A maneira mais simples de ver isso é a seguinte[18]. Se y é uma solução da equação de Airy, então a função $v(z)$ definida por por $y(z) =: \sqrt{z}v\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)$ satisfaz a equação de Bessel de ordem $\nu = 1/3$, como facilmente se constata.

E. 14.14 *Exercício*. Verifique isso! ✠

Concluímos daí que as soluções $y(z)$ da equação de Airy podem ser escritas como combinações lineares das funções $\sqrt{z}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)$ e $\sqrt{z}J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)$. Com efeito, pelas definições (14.29)-(14.30) e (14.122) (para $\nu = 1/3$) pode-se facilmente constatar a validade das relações

$$\mathrm{Ai}(z) \;=\; \frac{z^{1/2}}{3}\left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) + J_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\right] , \tag{14.127}$$

$$\mathrm{Bi}(z) \;=\; \frac{z^{1/2}}{3}\left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) - J_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\right] . \tag{14.128}$$

que permitem expressar as funções de Airy Ai e Bi em termos das funções $J_{\pm 1/3}$.

E. 14.15 *Exercício*. Prove as relações (14.127)-(14.128) usando (14.29)-(14.30) e (14.122). ✠

Na Seção 21.5.3, página 960, veremos uma aplicação dessas considerações sobre as soluções da equação de Airy.

• A equação de Bessel esférica

A equação diferencial

$$z^2y''(z) + 2zy'(z) + (z^2 - \sigma(\sigma+1))y(z) \;=\; 0 ,$$

para $z \in \mathbb{C}$, com $\sigma \in \mathbb{C}$, constante, é denominada *equação de Bessel esférica* de ordem σ.

A equação de Bessel esférica surge, por exemplo, quando da resolução da equação de Helmholtz em três dimensões em coordenadas esféricas (vide Capítulo 21, página 901) e, portanto, é importante para o estudo da propagação de ondas ou de fenômenos de difusão em três dimensões.

Se definirmos $v(z) = z^{1/2}y(z)$, obtemos para v a equação diferencial

$$z^2v''(z) + zv'(z) + \left(z^2 - \left(\sigma + \frac{1}{2}\right)^2\right)v(z) \;=\; 0 ,$$

[18] Uma outra maneira usa propriedades de simetria da equação hipergeométrica confluente.

que nada mais é que a equação de Bessel usual de ordem $\sigma + \frac{1}{2}$. Consequentemente as soluções da equação de Bessel esférica são da forma

$$y(z) \; = \; A\frac{J_{\sigma+\frac{1}{2}}(z)}{\sqrt{z}} + B\frac{N_{\sigma+\frac{1}{2}}(z)}{\sqrt{z}} \; ,$$

onde A e B são constantes arbitrárias.

Em função disso, definem-se as chamadas *funções de Bessel esféricas* de ordem ν por

$$j_\nu(z) \; := \; \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, J_{\nu+\frac{1}{2}}(z) \; , \tag{14.129}$$

e as chamadas *funções de Neumann esféricas* de ordem ν por

$$n_\nu(z) \; := \; \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, N_{\nu+\frac{1}{2}}(z) \; . \tag{14.130}$$

É bastante claro que as funções $n_\nu(z)$ são singulares em $z = 0$, enquanto que as funções $j_\nu(z)$ não divergem em $z = 0$, sendo até mesmo funções inteiras (analíticas em toda parte) para ν inteiro não-negativo.

Um caso de particular interesse é aquele no qual $\sigma = l \in \mathbb{N}_0$. Nesse caso, podemos escrever a solução geral da equação de Bessel esférica na forma

$$y(z) \; = \; aj_l(z) + bn_l(z) \; ,$$

com a e b constantes arbitrárias, onde

$$j_l(z) \; := \; \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, J_{l+\frac{1}{2}}(z) \; , \qquad \text{e} \tag{14.131}$$

$$n_l(z) \; := \; \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, N_{l+\frac{1}{2}}(z) \; \stackrel{(14.120)}{=} \; (-1)^{l+1}\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, J_{-(l+\frac{1}{2})}(z) \; . \tag{14.132}$$

Note que, por (14.121), tem-se

$$j_0(z) \; = \; \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \qquad \text{e} \qquad n_0(z) \; = \; -\frac{\cos(z)}{z} \; . \tag{14.133}$$

Algumas propriedades das funções de Bessel esféricas serão estudadas na Seção 15.2.8, página 735. As primeiras funções de Bessel e de Neumann esféricas encontram-se listadas em (15.246) e (15.247).

14.2.5 Equações Relacionadas à de Bessel. A Equação de Bessel Modificada

Uma outra equação diferencial fortemente relacionada à de Bessel é a *equação de Bessel modificada* de ordem ν:

$$z^2y''(z) + zy'(z) - (z^2 + \nu^2)y(z) \; = \; 0 \; , \tag{14.134}$$

com $z \in \mathbb{C}$, onde $\nu \in \mathbb{C}$ é uma constante. Comparando-se a equação de Bessel (14.104), página 639, é fácil perceber que a equação modificada pode ser transformada na de Bessel se fizermos formalmente na primeira a substituição $z \to iz$. De forma direta, é imediato constatar que se $y(z)$ é uma solução da equação de Bessel, então $y(iz)$ é uma solução da equação de Bessel modificada. Concluímos que no caso de ν não-inteiro a solução geral de (14.134) é dada por uma combinação linear de $J_\nu(iz)$ e $J_{-\nu}(iz)$ (ou de $J_\nu(iz)$ e $N_\nu(iz)$) e para $\nu = n$, inteiro, por uma combinação linear de $J_n(iz)$ e $N_n(iz)$. Isso sugere e justifica as definições que seguem.

Definem-se as *funções de Bessel modificadas de primeira espécie* e de ordem ν, denotadas por $I_\nu(z)$, por

$$I_\nu(z) \; := \; i^{-\nu}J_\nu(iz) \; = \; e^{-i\pi\nu/2}J_\nu(iz) \; ,$$

sendo que para $\nu = n$, inteiro, tem-se

$$I_{-n}(x) \; = \; I_n(x) \; = \; i^{-n}J_n(iz) \; .$$

As *funções de Bessel modificadas de segunda espécie* e de ordem ν, denotadas por $K_\nu(z)$, são definidas por

$$K_\nu(z) \;:=\; \frac{i^{\nu+1}\pi}{2}\Big(J_\nu(iz) + iN_\nu(iz)\Big)\;.$$

As funções K_ν são denominadas por alguns autores *funções de Macdonald*[19].

Advertência. O estudante deve ser advertido do fato de não haver, infelizmente, uniformidade na literatura quanto à definição das funções K_ν apresentadas acima, pois alguns textos adotam para K_ν uma combinação linear das funções $J_\nu(iz)$ e $N_\nu(iz)$ com constantes ligeiramente diferentes daquelas de acima. A referência [335], por exemplo, multiplica a expressão por $\cos(\nu\pi)$ de modo a fazer com que as funções K_ν satisfaçam as mesmas relações de recorrência que as funções I_ν. Desastradamente, porém, isso faz com que a expressão se anule se $\nu = 1/2 + k$, com $k \in \mathbb{Z}$. A definição que adotamos é a mais comum atualmente e, curiosamente, coincide com a original de Basset[20] de 1886. Vide [335] para outros comentários sobre esse ponto.

Note-se que $I_\nu(z)$ e $K_\nu(z)$ são linearmente independentes, de modo que a solução geral da equação de Bessel modificada de ordem ν é uma combinação linear $aI_\nu(z) + bK_\nu(z)$, onde a e b são constantes.

E. 14.16 *Exercício*. Mostre que, com as definições acima,

$$K_\nu(z) \;=\; \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)} \qquad \text{e que} \qquad K_\nu(z) \;=\; K_{-\nu}(z)\;.$$

✠

Da representação em série (14.122) das funções de Bessel, e da definição de $I_\nu(z)$ obtem-se

$$I_\nu(z) \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}\;. \tag{14.135}$$

É de se notar que se $\nu > 0$ e se e $z > 0$ então todos os termos da série acima são positivos e, portanto, $I_\nu(z) > 0$. Assim, ao contrário das funçõs de Bessel, as funções de Bessel modificadas I_ν não se anulam no eixo real positivo. O mesmo pode ser facilmente provado sobre as funções K_ν, as quais divergem em $z = 0$.

Para o caso em que $\nu = m \in \mathbb{N}_0$, temos

$$I_m(z) \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,(m+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+m}\;. \tag{14.136}$$

14.2.6 A Equação de Laguerre

A *equação de Laguerre*[21] é a equação diferencial

$$zy''(z) + (1-z)y'(z) + \lambda y(z) \;=\; 0\;,$$

com $z \in \mathbb{C}$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$ é uma constante.

A equação de Laguerre, e uma parente próxima, a equação de Laguerre associada, apresentada na Seção 14.3.2, página 662, emergem em um dos problemas mais importantes da Física, a equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio em coordenadas esféricas. Vide Seção 21.8, página 969. A equação de Laguerre é também um caso particular da equação hipergeométrica confluente, a ser discutida na Seção 14.2.8, página 657.

Comparando com a forma (14.52), vemos que $z_0 = 0$ é um ponto singular regular da equação, vemos que $a(z) = 1 - z$ e que $b(z) = \lambda z$. Assim, no presente caso tem-se

$$a_n \;=\; \begin{cases} 1, & \text{para } n = 0 \\[2ex] -1, & \text{para } n = 1 \\[2ex] 0, & \text{para } n \geq 2 \end{cases}\;, \qquad b_n \;=\; \begin{cases} \lambda, & \text{para } n = 1 \\[2ex] 0, & \text{para } n = 0 \text{ ou } n \geq 2 \end{cases}\;.$$

[19] Hector Munro Macdonald (1865–1935).
[20] Alfred Barnard Basset (1854–1930).
[21] Edmond Nicolas Laguerre (1834–1886).

É elementar constatar-se que, para essa equação, $\gamma_- = \gamma_+ = 0$ e, portanto, estamos no caso 2 do Teorema 14.2 da página 627 com $f(x) = x^2$, $\gamma_0 = 0$,

$$y_1(z) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, z^n \quad \text{ e } \quad y_2(z) \ = \ y_1(z)\ln(z) + \sum_{n=0}^{\infty} v_n \, z^n \ , \tag{14.137}$$

onde

$$c_n \ = \ -\frac{1}{n^2} \sum_{m=0}^{n-1} \Big[m a_{n-m} + b_{n-m} \Big] c_m \ = \ -\frac{\lambda - n + 1}{n^2} \, c_{n-1}, \qquad n \geq 2 \ ,$$

e

$$\begin{aligned} v_n \ &= \ -\frac{1}{n^2} \left[\Big[2n-1\Big] \, c_n + \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} c_m + \sum_{m=0}^{n-1} \Big[m a_{n-m} + b_{n-m} \Big] v_m \right] \\ &= \ -\frac{1}{n^2} \left[2n \, c_n - c_{n-1} \right] - \frac{\lambda - n + 1}{n^2} \, v_{n-1} \ , \quad \forall \, n \geq 1 \ , \end{aligned} \tag{14.138}$$

Adotando-se $c_0 = 1$, obtem-se para $n \geq 1$

$$c_n \ = \ \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \prod_{l=0}^{n-1} (\lambda - l) \ = \ \frac{(-1)^n \, \Gamma(\lambda+1)}{(n!)^2 \, \Gamma(\lambda - n + 1)}$$

e $y_1(z)$ fica

$$y_1(z) \ = \ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\prod_{l=0}^{n-1} (\lambda - l) \right) z^n \ = \ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, \Gamma(\lambda+1)}{(n!)^2 \, \Gamma(\lambda - n + 1)} \ z^n \ . \tag{14.139}$$

A situação de maior interesse em Física é aquela na qual λ é um inteiro não-negativo: $\lambda = m \in \mathbb{N}_0$. A razão disso será explicada detalhadamente no Apêndice 14.E, página 671, mas adiantamos que nos casos em que λ não é um inteiro positivo a solução y_1 cresce muito rapidamente (exponencialmente) quando z é restrito ao semi-eixo real positivo. Esse comportamento é inadequado em várias aplicações, por exemplo no clássico problema do átomo de hidrogênio da Mecânica Quântica, o que leva ao descarte de tais soluções.

Já no caso em que λ é um inteiro não-negativo, $\lambda = m \in \mathbb{N}_0$, a solução dada em (14.139) reduz-se a um polinômio de grau m:

$$\begin{aligned} y_1(z) \ = \ 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\prod_{l=0}^{n-1} (m - l) \right) z^n \ &= \ 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \, \frac{m!}{(m-n)!} \, z^n \\ &= \ \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{n!} \binom{m}{n} z^n \ . \end{aligned}$$

Os chamados *polinômios de Laguerre*, denotados por $L_m(z)$, são definidos como $m!$ vezes o polinômio acima[22]:

$$L_m(z) \ := \ \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \, \frac{m!}{n!} \binom{m}{n} z^n \ . \tag{14.140}$$

Os quatro primeiros são

$$L_0(z) \ = \ 1, \quad L_1(z) \ = \ 1 - z, \quad L_2(z) \ = \ 2 - 4z + z^2, \quad L_3(z) \ = \ 6 - 18z + 9z^2 - z^3 \ .$$

É fácil provar, também, que a seguinte expressão é válida (vide página 711):

$$L_m(z) \ = \ e^z \, \frac{d^m}{dz^m} \Big(z^m \, e^{-z} \Big) \ . \tag{14.141}$$

[22]O fator de normalização $m!$ tem origem histórica. O leitor deve ser advertido do fato, já lamentado páginas acima, que em alguns textos outra normalização é empregada.

Os polinômios de Laguerre $L_m(z)$ são, portanto, uma das soluções da equação de Laguerre (com $\lambda = m$)

$$zy''(z) + (1-z)y'(z) + my(z) \;=\; 0 \;, \tag{14.142}$$

com $z \in \mathbb{C}$, onde $m \in \mathbb{N}_0$. De acordo com (14.137), uma segunda solução é dada na forma

$$y_2(z) \;=\; L_m(z)\ln(z) + \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n \;,$$

onde os coeficientes v_n são dados em (14.138) em termos dos coeficientes c_n dos polinômios de Laguerre. Após cálculos um tanto maçantes, chega-se à seguinte expressão:

$$y_2(z) \;=\; L_m(z)\ln(z) + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \frac{m!}{k!}\binom{m}{k}\left(h_{m-k} - h_m - 2h_k\right) z^k + (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(m+1)^2(m+2)^2\cdots(m+k)^2}\, z^{m+k} \;,$$

onde h_n está definido em (14.109)-(14.110).

E. 14.17 *Exercício*. Mostre isso. Sugestão: tire uma tarde livre. ✠

E. 14.18 *Exercício*. Caso o leitor não deseje fazer o exercício anterior, poderá contentar-se com a tarefa mais simples de verificar que a expressão acima é, de fato, uma solução de (14.142). ✠

Essa segunda solução é raramente empregada em problemas de Física, especialmente devido à singularidade logarítmica que apresenta.

Mais propriedades dos polinômios de Laguerre serão estudadas na Seção 15.2.5, página 710.

14.2.7 A Equação Hipergeométrica

A equação diferencial

$$z(1-z)y''(z) + [\gamma - (1+\alpha+\beta)z]y'(z) - \alpha\beta y(z) \;=\; 0 \;, \tag{14.143}$$

para $z \in \mathbb{C}$ e com α, β e $\gamma \in \mathbb{C}$ constantes, é denominada *equação hipergeométrica*, ou *equação de Gauß*[23], quem a primeiro estudou. A razão do interesse nessa equação reside em três fatos. Primeiro, a equação hipergeométrica é (a menos de multiplicação trivial por uma constante) a única equação linear homogênea de segunda ordem com apenas três pontos singulares regulares em 0, 1 e ∞ (vide discussão à página 585). Sabe-se, ademais, (vide discussão da Seção 13.8.3, página 598) que toda equação Fuchsiana com três pontos singulares pode ser transformada em uma equação hipergeométrica. Segundo, há várias equações diferenciais de interesse que podem ser transformadas em equações hipergeométricas e, com isso, pode-se estudar certas propriedades de várias funções especiais, tais como seu comportamento assintótico, a partir das propriedades correspondentes de funções hipergeométricas. Terceiro, suas soluções possuem muitas simetrias. A equação hipergeométrica é uma das equações diferenciais ordinárias mais estudadas, sendo suas soluções riquíssimas em propriedades. Sua abordagem completa está muito além das pretensões destas Notas e, para um tratamento detalhado, recomendamos as referências [150], [293], [335], [201], [145] e outras. Propriedades combinatórias envolvendo as séries hipergeométricas e suas generalizações podem ser encontradas em [120].

Vamos aqui apresentar as soluções da equação hipergeométrica (14.143) em termos de expansões em torno de seu ponto singular regular $z_0 = 0$. O leitor poderá encontrar em [293] soluções de (14.143) expressas como expansões em torno dos outros pontos singulares regulares $z_0 = 1$ e $z_0 = \infty$. O interesse nessas últimas expansões é um tanto menor, especialmente pois as mesmas podem ser expressas em termos das soluções obtidas em torno de $z_0 = 0$. Reescrevemos (14.143) na forma

$$y''(z) + \frac{a(z)}{z}y'(z) + \frac{b(z)}{z^2}y(z) \;=\; 0 \;, \tag{14.144}$$

[23] Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855). Um dos maiores e mais influentes matemáticos de todos os tempos, Gauß dedicou-se também intensamente a problemas de Física, Astronomia, Matemática Aplicada e mesmo Engenharia (é um dos co-inventores do telégrafo) e encontrou as equações hipergeométricas em estudos de Geodesia, assunto a que se dedicou quando da construção das primeiras linhas férreas da Alemanha. Seus trabalhos nessa área também inspiraram uma das suas muitas contribuições importantes à matemática pura: a formulação de geometrias não-Euclidianas.

sendo $a(z)$ e $b(z)$ analíticas em $|z| < 1$, a saber,

$$a(z) = \frac{\gamma - (1 + \alpha + \beta)z}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma - 1 - \alpha - \beta) z^n ,$$

$$b(z) = -\frac{\alpha\beta z}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha\beta) z^n .$$

A equação indicial, neste caso, é

$$f(x) = x(x - 1) + \gamma x = x(x + \gamma - 1) = 0$$

e temos, portanto, os índices $\gamma_\pm$ dados por

$$\gamma_- = 1 - \gamma \qquad \text{e} \qquad \gamma_+ = 0 .$$

Há, assim, três casos a considerar: **1.** $\gamma - 1 \notin \mathbb{Z}$, ou seja, $\gamma \notin \mathbb{Z}$. **2.** $\gamma = 1$. **3.** $\gamma - 1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ou seja, $\gamma \in \mathbb{Z}$ mas $\gamma \neq 1$.

Caso 1. $\gamma - 1 \notin \mathbb{Z}$, ou seja, $\gamma \notin \mathbb{Z}$.

Aqui, de acordo com (14.54) e (14.55), as soluções são

$$y_1(z) = z^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{e} \quad y_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n , \tag{14.145}$$

onde

$$c_n = -\frac{1}{f(1 - \gamma + n)} \sum_{m=0}^{n-1} \Big[(m + 1 - \gamma) a_{n-m} + b_{n-m}\Big] c_m , \qquad d_n = -\frac{1}{f(n)} \sum_{m=0}^{n-1} \Big[m a_{n-m} + b_{n-m}\Big] d_m ,$$

para todo $n \geq 1$. Nesse caso, porém, não é tão simples resolver recursivamente essas equações, pelo menos na maneira como estão expressas acima. É muito mais fácil obter as relações recursivas de outra forma: inserindo (14.145) na equação diferencial ainda na forma (14.143). Com esse procedimento, começando pela solução $y_2(z)$, obtem-se alegremente para os coeficientes d_n a seguinte relação recursiva:

$$d_{n+1} = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(n + 1)(\gamma + n)} d_n , \tag{14.146}$$

para todo $n \geq 0$.

E. 14.19 *Exercício importante*. Verifique! ✠

Convencionando-se tomar $d_0 = 1$, chegamos a

$$d_n = \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n}, \qquad n \geq 1 ,$$

onde, para $x \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$,

$$(x)_n := \begin{cases} x(x + 1) \cdots (x + n - 1) = \prod_{l=0}^{n-1} (x + l) , & n \geq 1 , \\ \\ 1 , & n = 0 , \end{cases} \tag{14.147}$$

são os denominados *símbolos de Pochhammer*[24]. Quando x não é um inteiro negativo ou zero, podemos escrever

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x + n)}{\Gamma(x)} .$$

[24]Leo August Pochhammer (1841–1920).

Com isso, obtemos para a solução y_2 a expressão

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)\ :=\ 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}\,z^n\ =\ \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\,\frac{z^n}{n!}\ . \tag{14.148}$$

Essa função, introduzida por Gauß em cerca de 1812, é denominada *função hipergeométrica*, denominação aparentemente criada por Kummer[25] em 1836. Contribuíram à teoria das funções hipergeométricas nomes como Euler, Gauß, Kummer e Riemann. Na literatura $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$ é muitas vezes denotada por ${}_2F_1(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$[26].

Repetindo considerações anteriores, $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$ é analítica como função de z pelo menos na região $|z|<1$. No caso em que α ou β são inteiros não-positivos, é fácil ver que $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$ reduz-se a um polinômio e é, portanto, analítica em toda parte. Exceto nesses casos, a série que define $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$ é divergente para $|z|>1$, como se vê pelo teste da razão, pois

$$\left|\frac{\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!(\gamma)_{n+1}}\,z^{n+1}}{\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}\,z^n}\right|\ =\ \frac{|\alpha+n|\,|\beta+n|}{(n+1)\,|\gamma+n|}\,|z|\ \ ,$$

que, para n grande, aproxima-se de $|z|>1$. Casualmente, o mesmo argumento prova convergência absoluta da série hipergeométrica (14.148) para $|z|<1$.

Fazemos ainda notar que a expressão acima para $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$ está definida mesmo para o caso em que γ é um inteiro positivo e, portanto, representa uma solução da equação hipergeométrica naquele caso. Para γ nulo ou um inteiro negativo, digamos $\gamma=-m$, o denominador $(\gamma)_n$ anula-se para $n>m$ e a expressão para $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$ deixa de fazer sentido.

Para obtermos a outra solução inserimos y_1 de (14.145) na equação diferencial ainda na forma (14.143) e obtemos alegremente para os coeficientes c_n a relação

$$c_{n+1}\ =\ \frac{(n+\alpha+1-\gamma)(n+\beta+1-\gamma)}{(n+1)(n+2-\gamma)}\,c_n\ ,$$

para todo $n\geq 0$.

E. 14.20 *Exercício importante*. Verifique! ✠

Alguns segundos de contemplação nos levam a concluir que essas relações são idênticas àquelas de (14.146), desde que lá façamos as seguintes modificações: $\alpha\to\alpha+1-\gamma$, $\beta\to\beta+1-\gamma$ e $\gamma\to 2-\gamma$. Por trás dessa aparente coincidência residem propriedades de simetria da equação hipergeométrica. O leitor poderá encontrar essa discussão nos textos supra-citados.

Assim, tomando-se também $c_0=1$, concluímos que a outra solução é

$$z^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ z)\ .$$

Fazemos ainda notar que $F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ z)$ está definida mesmo para o caso em que γ é um inteiro não-positivo e, portanto, $z^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ z)$ representa uma solução da equação hipergeométrica naquele caso.

Resumindo nossas conclusões, para o caso $\gamma\notin\mathbb{Z}$ a solução geral da equação hipergeométrica (14.143) expressa em termos de uma expansão em torno do ponto singular regular $z_0=0$ é

$$A_1z^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ z)+A_2F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)\ .$$

onde A_1 e A_2 são constantes arbitrárias.

Caso 2. $\gamma=1$.

[25] Ernst Eduard Kummer (1810–1893).

[26] A explicação da notação ${}_2F_1$ é a seguinte: o "2" à esquerda indica a presença de dois símbolos de Pochhammer no numerador dos termos da série hipergeométrica (14.148). O "1" à direita indica a presença de um símbolo de Pochhammer no denominador. Há generalizações da série (14.148) que definem as chamadas *funções hipergeométricas generalizadas*, denotadas por ${}_kF_l$, e que contêm k símbolos de Pochhammer no numerador e l no denominador (vide e.g. [120]). Mais abaixo encontraremos as funções hipergeométricas confluentes, que são do tipo ${}_1F_1$.

Aqui $\gamma_- = \gamma_+ = \gamma_0 = 0$. Nesse caso a primeira solução é da forma $y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n$ e, de modo análogo, obtemos

$$c_{n+1} \;=\; \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)^2}\, c_n \;, \tag{14.149}$$

para todo $n \geq 0$. Assim, a primeira solução é

$$F(\alpha,\ \beta,\ 1,\ z) \;=\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(n!)^2}\, z^n \;=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)\, \frac{z^n}{(n!)^2} \;.$$

Pelo mesmo argumento de acima, a expansão em série do lado direito converge para $|z| < 1$ e diverge para $|z| > 1$.

Pelo Teorema 14.2, página 627, a segunda solução tem a forma

$$F(\alpha,\ \beta,\ 1,\ z)\ln(z) + \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n \;,$$

com os v_n dados em (14.58) em termos dos c_n de acima. A expressão que se obtem é um tanto complexa e evitamos colocá-la aqui. O leitor poderá encontrá-la, por exemplo, em [293].

Caso 3. $\gamma - 1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ou seja, $\gamma \in \mathbb{Z}$ mas $\gamma \neq 1$.

Há dois casos a distinguir: **a.** $\gamma > 1$ e **b.** $\gamma \leq 0$.

No caso **a**, $\gamma = m$, com $m > 1$ inteiro. Aqui tem-se $n_0 = m-1$, $\gamma_1 = \gamma_+ = 0$ e $\gamma_2 = \gamma_- = 1-m$. Como já observamos acima, uma solução é dada por $F(\alpha,\ \beta,\ m,\ z)$. Uma segunda solução será da forma

$$AF(\alpha,\ \beta,\ m,\ z)\ \ln(z) + z^{1-m} \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n \;,$$

com os v_n e A dados como em (14.62) e (14.63) a partir dos coeficientes c_n de $F(\alpha,\ \beta,\ m,\ z)$. Novamente, a expressão que se obtem é complexa e remetemos o estudante a, e.g., [293].

No caso **b**, $\gamma = -m$, com $m \geq 0$ inteiro. Aqui tem-se $n_0 = m+1$, $\gamma_1 = \gamma_- = 1+m$ e $\gamma_2 = \gamma_+ = 0$. Como já observamos acima, uma solução é dada por $z^{1+m}F(\alpha+1+m,\ \beta+1+m,\ 2+m,\ z)$. Uma segunda solução será da forma

$$Az^{1+m}F(\alpha+1+m,\ \beta+1+m,\ 2+m,\ z)\ \ln(z) + \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n \;,$$

com os v_n e A dados como em (14.62) e (14.63) a partir dos coeficientes c_n de $z^{1+m}F(\alpha+1+m,\ \beta+1+m,\ 2+m,\ z)$. Novamente, a expressão que se obtem é complexa e remetemos o estudante a, e.g., [293].

Com isso encerramos nossa breve excursão às funções hipergeométricas e remetemos o estudante interessado em um maior aprofundamento à literatura supra-citada.

14.2.8 A Equação Hipergeométrica Confluente

A equação diferencial

$$zy''(z) + [\gamma - z]y'(z) - \alpha y(z) \;=\; 0 \;, \tag{14.150}$$

para $z \in \mathbb{C}$ e com α e $\gamma \in \mathbb{C}$ constantes, é denominada *equação hipergeométrica confluente* ou *equação de Kummer*. A mesma pode ser obtida da equação hipergeométrica por um procedimento de limite no qual a singularidade regular de $z_0 = 1$ daquela equação é feita imergir ("confluir", daí o nome) na singularidade regular de $z_0 = \infty$. Esse processo pode ser descrito da seguinte forma. Façamos na equação hipergeométrica

$$z(1-z)y''(z) + [\gamma - (1+\alpha+\beta)z]y'(z) - \alpha\beta y(z) \;=\; 0$$

a mudança de variáveis $\zeta = \beta z$. A mesma assume a forma (verifique!)

$$\zeta\left(1 - \frac{\zeta}{\beta}\right)\frac{d^2y}{d\zeta^2} + \left[\gamma - \left(\frac{\alpha+\beta+1}{\beta}\right)\zeta\right]\frac{dy}{d\zeta} - \alpha y \;=\; 0 \;.$$

Tomando-se agora o limite $|\beta| \to \infty$ obtemos a forma (14.150). Vide, e.g., [293] ou [150]. A equação hipergeométrica confluente possui uma singularidade regular em $z_0 = 0$ e uma irregular em $z_0 = \infty$ (vide discussão à página 586).

Assim como no caso da equação hipergeométrica, há várias equações diferenciais de interesse que podem ser transformadas em equações hipergeométricas confluentes. Os exemplos mais evidentes são a equação de Laguerre, Seção 14.2.6, página 652, que corresponde a $\gamma = 1$ e $\alpha = -\lambda$, e a equação de Laguerre associada, Seção 14.3.2, página 662, que corresponde a $\gamma = m + 1$ e $\alpha = -(n - m)$. Um outro exemplo é a equação de Hermite, equação (14.15), página 618, que pode ser transfomada em uma equação hipergeométrica confluente definindo-se $w = z^2$ e $v(w) = y(z)$. Com isso, (14.15) transforma-se em

$$wv''(w) + \left[\frac{1}{2} - w\right] v'(w) + \frac{\lambda}{4} v(w) \; = \; 0 \; , \tag{14.151}$$

(verifique!) que é uma equação hipergeométrica confluente com $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\alpha = -\frac{\lambda}{4}$.

Pode-se, portanto, estudar propriedades de várias funções especiais, tais como sua estrutura de singularidades ou seu comportamento assintótico, a partir das propriedades correspondentes de funções hipergeométricas confluentes.

Para a equação hipergeométrica confluente tem-se

$$y''(z) + \frac{[\gamma - z]}{z} y'(z) - \frac{\alpha z}{z^2} y(z) \; = \; 0$$

e assim, comparando com a forma padrão (14.49), temos

$$a(z) \; = \; \gamma - z, \qquad \text{e} \qquad b(z) \; = \; -\alpha z \; .$$

Logo,

$$a_n \; = \; \begin{cases} \gamma, & \text{para } n = 0 \\ -1, & \text{para } n = 1 \\ 0, & \text{para } n \geq 2 \end{cases} \; , \qquad b_n \; = \; \begin{cases} -\alpha, & \text{para } n = 1 \\ 0, & \text{para } n = 0 \text{ ou } n \geq 2 \end{cases} \; .$$

A equação indicial é, portanto,

$$f(x) \; = \; x(x + \gamma - 1) \; ,$$

cujas raízes são

$$\gamma_- \; = \; 1 - \gamma \qquad \text{e} \qquad \gamma_+ \; = \; 0 \; ,$$

tal como para a equação hipergeométrica. Há, assim, três casos a considerar: **1.** $\gamma - 1 \notin \mathbb{Z}$, ou seja, $\gamma \notin \mathbb{Z}$. **2.** $\gamma = 1$. **3.** $\gamma - 1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ou seja, $\gamma \in \mathbb{Z}$ mas $\gamma \neq 1$.

Caso 1. $\gamma - 1 \notin \mathbb{Z}$, ou seja, $\gamma \notin \mathbb{Z}$.

Aqui, de acordo com (14.54) e (14.55), as soluções são

$$y_1(z) \; = \; z^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad \text{e} \qquad y_2(z) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \; , \tag{14.152}$$

onde

$$c_n \; = \; -\frac{1}{f(1 - \gamma + n)} \sum_{m=0}^{n-1} \Big[(m + 1 - \gamma) a_{n-m} + b_{n-m}\Big] c_m \; , \qquad d_n \; = \; -\frac{1}{f(n)} \sum_{m=0}^{n-1} \Big[m a_{n-m} + b_{n-m}\Big] d_m \; ,$$

para todo $n \geq 1$. Assim,

$$c_n \; = \; \frac{n + \alpha - \gamma}{n(n + 1 - \gamma)} \, c_{n-1} \; , \qquad d_n \; = \; \frac{n + \alpha - 1}{n(n + \gamma - 1)} \, d_{n-1} \; ,$$

o que conduz a

$$c_n \; = \; \frac{(\alpha + 1 - \gamma)_n}{n!(2 - \gamma)_n} \, c_0 \; , \qquad d_n \; = \; \frac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n} \, d_0 \; , \tag{14.153}$$

Tomando $d_0 = 1$ a solução y_2 assume a forma

$$_1F_1(\alpha,\ \gamma,\ z) \ := \ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n}\, z^n \ = \ \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\, \frac{z^n}{n!} \ . \tag{14.154}$$

Esta função é denominada *função hipergeométrica confluente* ou, por vezes, *função de Kummer*.

E. 14.21 *Exercício*. Prove, usando diretamente as definições, a seguinte relação entre as funções hipergeométricas confluentes e as funções hipergeométricas:

$$_1F_1(\alpha,\ \gamma,\ z) \ = \ \lim_{|\beta|\to\infty} F\left(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \frac{z}{\beta}\right) \ .$$

✠

Aplicando o teste da razão à série de (14.154) temos

$$\left| \frac{\frac{(\alpha)_{n+1}}{(n+1)!(\gamma)_{n+1}}\, z^{n+1}}{\frac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n}\, z^n} \right| \ = \ \frac{|\alpha+n|}{(n+1)\,|\gamma+n|}\, |z|$$

e vemos que a mesma converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$, pois para cada z fixo o lado direito torna-se menor que 1 para n grande o suficiente. Assim, $_1F_1(\alpha,\ \gamma,\ z)$ é analítica para todo $z \in \mathbb{C}$.

Fazemos ainda notar que a expressão acima para $_1F_1(\alpha,\ \gamma,\ z)$ está definida mesmo para o caso em que γ é um inteiro positivo e, portanto, representa uma solução da equação hipergeométrica confluente naquele caso. Para γ nulo ou um inteiro negativo, digamos $\gamma = -m$, o denominador $(\gamma)_n$ anula-se para $n > m$ e a expressão para $F(\alpha,\ \gamma,\ z)$ deixa de fazer sentido.

Passemos agora à solução y_1. Alguns segundos de contemplação das expressões de (14.153) conduzem-nos à percepção que a relação entre c_n e c_0 equivale à relação entre d_n e d_0 com a troca $\alpha \to \alpha + 1 - \gamma$ e $\gamma \to 2 - \gamma$ (tal como se fez no caso da equação hipergeométrica, acima). Assim, convencionando-se também $c_0 = 1$, tem-se que a solução $y_1(z)$ é dada por

$$z^{1-\gamma}\ {}_1F_1(\alpha + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma,\ z) \ .$$

Fazemos ainda notar que $_1F_1(\alpha+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ z)$ está definida mesmo para o caso em que γ é um inteiro não-positivo e, portanto, $z^{1-\gamma}\ {}_1F_1(\alpha + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma,\ z)$ representa uma solução da equação hipergeométrica confluente naquele caso.

Resumindo, para o caso $\gamma \notin \mathbb{Z}$ a solução geral da equação hipergeométrica confluente (14.150) é

$$A_1\, z^{1-\gamma}\ {}_1F_1(\alpha + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma,\ z) + A_2\ {}_1F_1(\alpha,\ \gamma,\ z) \ ,$$

onde A_1 e A_2 são constantes arbitrárias.

Caso 2. $\gamma = 1$.

Esse é o caso da equação de Laguerre.

Aqui $\gamma_- = \gamma_+ = \gamma_0 = 0$. Nesse caso a primeira solução é da forma $y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n$ e, de modo análogo, obtemos

$$c_{n+1} \ = \ \frac{(\alpha+n)}{(n+1)^2}\, c_n \ , \tag{14.155}$$

para todo $n \geq 0$. Assim, a primeira solução é

$$_1F_1(\alpha,\ 1,\ z) \ = \ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(n!)^2}\, z^n \ = \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(\alpha+n)\, \frac{z^n}{(n!)^2} \ .$$

Pelo Teorema 14.2, página 627, a segunda solução tem a forma

$$_1F_1(\alpha,\ 1,\ z)\ln(z) + \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n \ ,$$

com os v_n dados em (14.58) em termos dos c_n de acima. A expressão que se obtem é um tanto complexa e evitamos colocá-la aqui.

Caso 3. $\gamma - 1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ou seja, $\gamma \in \mathbb{Z}$ mas $\gamma \neq 1$.

Esse é o caso da equação de Laguerre associada.

Há dois casos a distinguir: **a.** $\gamma > 1$ e **b.** $\gamma \leq 0$.

No caso **a**, $\gamma = m$, com $m > 1$ inteiro. Aqui tem-se $n_0 = m-1$, $\gamma_1 = \gamma_+ = 0$ e $\gamma_2 = \gamma_- = 1-m$. Como já observamos acima, uma solução é dada por ${}_1F_1(\alpha,\ m,\ z)$. Uma segunda solução será da forma

$$A\ {}_1F_1(\alpha,\ m,\ z)\ \ln(z) + z^{1-m}\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n\ ,$$

com os v_n e A dados como em (14.62) e (14.63) a partir dos coeficientes c_n de ${}_1F_1(\alpha,\ m,\ z)$. Novamente, a expressão que se obtem é complexa e a omitimos aqui.

No caso **b**, $\gamma = -m$, com $m \geq 0$ inteiro. Aqui tem-se $n_0 = m+1$, $\gamma_1 = \gamma_- = 1+m$ e $\gamma_2 = \gamma_+ = 0$. Como já observamos acima, uma solução é dada por $z^{1+m}\ {}_1F_1(\alpha+1+m,\ 2+m,\ z)$. Uma segunda solução será da forma

$$Az^{1+m}\ {}_1F_1(\alpha+1+m,\ 2+m,\ z)\ \ln(z) + \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n\ ,$$

com os v_n e A dados como em (14.62) e (14.63) a partir dos coeficientes c_n de $z^{1+m}\ {}_1F_1(\alpha+1+m,\ 2+m,\ z)$. Novamente, a expressão que se obtem é complexa e é omitida aqui.

Com isso encerramos nossa breve excursão às funções hipergeométricas confluentes. Para um tratamento extensivo da equação hipergeométrica confluente e propriedades de suas soluções, vide [285], [150] ou [335].

14.3 Algumas Equações Associadas

Algumas das equações tratadas acima possuem parentes próximos com os quais se relacionam amistosamente. Vamos estudar algumas delas.

14.3.1 A Equação de Legendre Associada

A *equação de Legendre associada* é equação diferencial

$$(1-z^2)y''(z) - 2zy'(z) + \lambda(\lambda+1)y(z) - \frac{\mu^2}{1-z^2}\,y(z) \ = \ 0\ . \tag{14.156}$$

Como é fácil de se constatar, os pontos ± 1 são pontos singulares regulares da equação de Legendre associada. Repare também que para $\mu = 0$ recupera-se a equação de Legendre usual

$$(1-z^2)y''(z) - 2zy'(z) + \lambda(\lambda+1)y(z) \ = \ 0\ . \tag{14.157}$$

O principal interesse na equação (14.156) se dá no caso em que μ é um número inteiro, $\mu = m \in \mathbb{Z}$, situação que corresponde à maioria das aplicações. Nesse caso, um truque feliz permite-nos encontrar as soluções sem termos de recorrer ao método de Frobenius.

Tudo começa com a observação que a equação de Legendre usual e a equação de Legendre associada podem ser transformadas em uma mesma equação. Se em (14.156) (já adotando $\mu = m \in \mathbb{Z}$) fizermos a substituição $y(z) = (1-z^2)^{m/2}v(z)$, obtemos para v a equação

$$(1-z^2)v''(z) - 2(m+1)z\,v'(z) + \Big(\lambda(\lambda+1) - m(m+1)\Big)\,v(z) \ = \ 0\ . \tag{14.158}$$

E. 14.22 *Exercício importante.* Mostre isso. Sugestão: um pouco de paciência. ✠

Se, por outro lado, tomarmos a equação (14.157) e a derivarmos m vezes, obtemos

$$(1-z^2)\left(y^{(m)}\right)''(z) - 2(m+1)z\left(y^{(m)}\right)'(z) + \Big(\lambda(\lambda+1) - m(m+1)\Big)\left(y^{(m)}\right)(z) \;=\; 0\,. \tag{14.159}$$

E. 14.23 *Exercício importante.* Mostre isso. Sugestão: use a regra de Leibniz para calcular as derivadas $\frac{d^m}{dz^m}\Big((1-z^2)y''(z)\Big)$ e $\frac{d^m}{dz^m}\Big(zy'(z)\Big)$. ✠

Comparando (14.158) com (14.159), constatamos que ambas são a mesma equação. Com isso, vemos que se y_L é a solução geral da equação de Legendre e y_{La} é a solução geral da equação de Legendre associada, então $(1-z^2)^{-m/2}\,y_{La}(z)$ e $y_L^{(m)}(z)$ devem ser proporcionais, já que obedecem à mesma equação (14.158). Com isso, obtemos que a solução geral da equação de Legendre associada pode ser obtida da solução geral da equação de Legendre por

$$y_{La}(z) \;=\; k_m\,(1-z^2)^{m/2}\,y_L^{(m)}(z)\,,$$

k_m sendo constantes de normalização a serem convencionadas.

Coloquemo-nos agora a questão: qual solução y_L da equação de Legendre devemos adotar? Isso certamente depende do tipo de problema considerado, mas na maioria das aplicações procuramos resolver a equação de Legendre associada no intervalo $[-1,\ 1]$ e procuramos soluções que sejam finitas em todo esse intervalo, incluindo as bordas ± 1. Ora, já vimos que as únicas soluções da equação de Legendre usual que permanecem limitadas nos extremos ± 1 (assim como suas derivadas) são os polinômios de Legendre $P_l(z)$, os quais ocorrem como solução apenas no caso $\lambda = l$, um inteiro não-negativo. Obtemos, assim, que as soluções de interesse da ação de Legendre associada que são limitadas em todo o intervalo fechado $[-1,\ 1]$ ocorrem para $\lambda = l$, um inteiro não-negativo, e são dadas por

$$P_l^m(z) \;:=\; (1-z^2)^{m/2}\,\frac{d^m}{dz^m}P_l(z)\,, \tag{14.160}$$

onde P_l é o polinômio de Legendre de grau l. É claro que $P_l^m(z)$ é nulo se $m > l$ (pois P_l é um polinômio de grau l).

As funções P_l^m definidas acima são denominadas *polinômios de Legendre associados*, ainda que não sejam realmente polinômios em z no caso em que m é ímpar (devido ao fator $(1-z^2)^{m/2}$)[27] e desempenham um papel importante na resolução de equações diferenciais parciais em 3 dimensões em coordenadas esféricas, tais como a equação de Laplace e de Helmholtz. A eles estão intimamente relacionados as chamadas funções *harmônicas esféricas*, das quais falaremos na Seção 15.2.2, página 691, e que desempenham um papel na Mecânica Quântica (orbitais atômicos), na Teoria de Grupos (representações do grupo SO(3)), no Eletromagnetismo (emissão de ondas eletromagnéticas por antenas) etc.

As funções P_l^m estão definidas acima para l inteiro não-negativo, ou seja $l = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, e m inteiro com $0 \leq m \leq l$ (pois para $m > l$ o lado direito de (14.160) anula-se). Cada P_l^m é solução da equação de Legendre associada

$$(1-z^2)y''(z) - 2zy'(z) + l(l+1)y(z) - \frac{m^2}{1-z^2}\,y(z) \;=\; 0\,. \tag{14.161}$$

Na Seção 15.2.1, que se inicia à página 687, mostraremos que os polinômios de Legendre podem ser escritos como

$$P_l(z) \;=\; \frac{1}{2^l\,l!}\,\frac{d^l}{dz^l}\Big((z^2-1)^l\Big)\,,$$

expressão essa conhecida como *fórmula de Rodrigues para os polinômios de Legendre*. Assim, obtemos

$$P_l^m(z) \;=\; \frac{1}{2^l\,l!}\,(1-z^2)^{m/2}\,\frac{d^{l+m}}{dz^{l+m}}\Big((z^2-1)^l\Big)\,, \tag{14.162}$$

expressão válida para $0 \leq m \leq l$, com l um inteiro não-negativo: $l = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. Caso $m > l$, o lado direito se anula.

[27] Se, no entanto, substituirmos z por $\cos\theta$, com $0 \leq \theta \leq \pi$, o que costumeiramente se faz em aplicações, $P_l^m(\cos\theta)$ torna-se um polinômio trigonométrico, ou seja, um polinômio em $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$, já que $(1-z^2)^{m/2}$ torna-se $\big(\operatorname{sen}(\theta)\big)^m$. Essa é a razão dessa nomenclatura. Vide expressão (15.63), página 694.

Um ponto interessante, porém, é que a expressão do lado direito de (14.162) está bem definida para quaisquer l e m com $l+m \geq 0$, ou seja, também para m's negativos tais que $m \geq -l$. Assim, (14.162) está definida para todo m inteiro com $-l \leq m \leq l$[28].

Da expressão (14.162), entendida para todo l inteiro não-negativo e $-l \leq m \leq l$, é possível mostrar que

$$P_l^{-m}(z) \; = \; (-1)^m \, \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \, P_l^m(z) \, .$$

Essa relação, que é relevante para as chamadas funções harmônicas esféricas, mostra que $P_l^{-m}(z)$ é também solução da equação de Legendre associada (14.161), por ser proporcional a $P_l^m(z)$. Trataremos disso na Seção 15.2.2, página 691, onde outras propriedades dos polinômios de Legendre associados serão apresentadas e sua relação com as harmônicas esféricas será discutida.

Os primeiros polinômios de Legendre associados são

$$P_0^0(z) \; = \; 1 \; ; \qquad P_1^{-1}(z) \; = \; -\frac{1}{2}(1-z^2)^{1/2} \, , \quad P_1^0(z) \; = \; z \, , \quad P_1^1(z) \; = \; (1-z^2)^{1/2} \; ;$$

$$P_2^{-2}(z) \; = \; \frac{1}{8}(1-z^2) \, , \quad P_2^{-1}(z) \; = \; \frac{1}{2}z(1-z^2)^{1/2} \, , \quad P_2^0(z) \; = \; \frac{1}{2}(3z^2-1) \, , \quad P_2^1(z) \; = \; 3z(1-z^2)^{1/2} \, , \quad P_2^2(z) \; = \; 3(1-z^2) \, .$$

E. 14.24 *Exercício*. Verifique! ✠

14.3.2 A Equação de Laguerre Associada

A *equação de Laguerre associada* é a equação diferencial

$$xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y \; = \; 0 \, . \tag{14.163}$$

O principal interesse nessa equação reside no caso onde m e n são inteiros satisfazendo $0 \leq m \leq n$. Como o leitor facilmente constata, trata-se de um caso particular da equação hipergeométrica confluente (14.150). A equação de Laguerre associada surge da equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio quando a mesma é resolvida pelo método de separação de variáveis em coordenadas esféricas.

A solução dessa equação pode ser obtida diretamente da solução da equação de Laguerre usual

$$xy'' + (1-x)y' + ny \; = \; 0 \tag{14.164}$$

pois esta, quando diferenciada m vezes em relação à x, transforma-se exatamente na equação (14.163).

E. 14.25 *Exercício*. Verifique! Sugestão: regra de Leibniz. ✠

Assim, se y é solução de (14.164) segue que $y^{(m)}$ é solução de (14.163). Concluímos que as únicas soluções de (14.163) que são regulares em $x=0$ são da forma

$$L_n^{(m)}(x) \; = \; \frac{d^m}{dx^m} L_n(x) \; = \; \frac{d^m}{dx^m}\left(e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \right) \, . \tag{14.165}$$

a última igualdade sendo proveniente de (14.141) ou de (15.134).

Os polinômios $L_n^{(m)}$ são denominados *polinômios de Laguerre associados*. Os polinômios de Laguerre associados surgem, como dissemos, na resolução da equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio em coordenadas esféricas. Vide Seção 21.8, página 969. Junto com as harmônicas esféricas, definidas na Seção 15.2.2.1, página 697, os polinômios de Laguerre associados definem a forma dos orbitais eletrônicos do átomo de hidrogênio e (de forma aproximada) de átomos hidrogenóides. A forma desses orbitais é de importância fundamental no estudo de átomos e moléculas e suas ligações químicas.

[28] De passagem, comentamos que a relação $-l \leq m \leq l$ desempenha um papel na teoria do momento angular na Mecânica Quântica, mas isso não é nosso assunto aqui.

Usando (14.140), é fácil constatar que

$$L_n^{(m)}(x) \;=\; (-1)^m \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \frac{n!}{k!} \binom{n}{m+k} x^k \;\; .$$

Mais propriedades dos polinômios de Laguerre associados serão estudadas na Seção 15.2.6, página 714.

14.4 Exercícios Adicionais

E. 14.26 *Exercício*. Considere as equações diferenciais $u'(x) - au(x) = 0$ e $u''(x) + \omega_0^2 u(x) = 0$, com $a \in \mathbb{C}$, $\omega_0 \in \mathbb{C}$, constantes e $x \in \mathbb{C}$. Usando o método de expansão em série mostre que suas soluções gerais são, respectivamente, $u(x) = Ae^{ax}$ e $u(x) = A\cos(\omega_0 x) + B\,\mathrm{sen}(\omega_0 x)$, onde A e B são constantes. ✠

E. 14.27 *Exercício*. Seja a bem conhecida *expansão binomial*

$$(1+x)^\alpha \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big(\alpha+1-k\big)_k}{k!}\, x^k \,, \tag{14.166}$$

válida para $x \in \mathbb{C}$ com $|x| < 1$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, onde, para $x \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$, $(x)_n$ são os símbolos de Pochhammer definidos em (14.147), página 655. Demonstre (14.166) resolvendo a equação diferencial

$$(1+x)y' - \alpha y \;=\; 0$$

com a condição $y(0) = 1$. *Sugestão*. Verifique que $(1+x)^\alpha$ é solução da equação diferencial acima e satisfaz $y(0) = 1$. Depois resolva a mesma equação, procurando soluções na forma de uma série de potências na região $|x| < 1$.

Mostre que quando $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, um inteiro não-negativo, a solução reduz-se a um polinômio, a saber, aquele definido pelo *binômio de Newton*:

$$(1+x)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \,.$$

✠

E. 14.28 *Exercício*. Mostre que os símbolos de Pochhammer satisfazem

$$\big(\alpha+1-k\big)_k \;=\; (-1)^n(-\alpha)_k \,, \tag{14.167}$$

e, com isso, reescreva a expansão binomial na forma

$$(1-x)^{-\alpha} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!}\, x^k \,, \tag{14.168}$$

válida para $x \in \mathbb{C}$ com $|x| < 1$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Comparando à definição das funções hipergeométricas ${}_2F_1(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) \equiv F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z)$ dada em (14.148), página 656, para $z \in \mathbb{C}$ na região $|z| < 1$, constate que

$$F(\alpha,\ \beta,\ \beta;\ x) \;=\; (1-x)^{-\alpha} \,, \tag{14.169}$$

para qualquer $\beta \in \mathbb{C}$, relação essa válida para $x \in \mathbb{C}$ com $|x| < 1$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. ✠

E. 14.29 *Exercício*. Usando o método de expansão em série de potências mostre que a solução da equação diferencial $y'(z)+zy(z) = 0$ é $y(z) = c\exp(-z^2/2)$, onde c é uma constante. ✠

E. 14.30 *Exercício*. Encontre, utilizando o método de expansão em série, a solução geral da seguinte equação diferencial

$$u''(x) - e^{-x^2}u'(x) + \mathrm{sen}(x)u(x) \;=\; 0 \,.$$

Em que região a série de potências obtida para $u(x)$ deve ser convergente? Justifique. ✠

E. 14.31 *Exercício*. Mostre que a função $u(x) = \big(\mathrm{arcsen}\,(x)\big)^2$ é a solução da equação diferencial

$$(1-x^2)u''(x) - xu'(x) \;=\; 2 \,,$$

com as condições iniciais $u(0) = u'(0) = 0$. Usando o método de expansão em série para resolver a equação, obtenha a expansão de $\big(\mathrm{arcsen}\,(x)\big)^2$ em uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k$. Essa série coincide com a série de Taylor de $\big(\mathrm{arcsen}\,(x)\big)^2$ em $x = 0$. Esse método de determinar a expansão em série de Taylor dessa função é muito mais simples que o método direto, envolvendo o cômputo das derivadas da função $\big(\mathrm{arcsen}\,(x)\big)^2$ em $x = 0$, e foi descoberto por Euler. Segundo [141], a série obtida já era conhecida do matemático Kowa Seki (1642–1708), contemporâneo de Newton. ✠

E. 14.32 *Exercício*. a) Pelo método de Frobenius determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$x^2 u''(x) - (1 + x)u(x) = 0 ,$$

b) Qual o raio de convergência das séries encontradas? Justifique.

c) Determine a solução da mesma equação que satisfaz a condição $u(0) = 0$. Há soluções para a condição inicial $u(0) = 1$? Justifique. ✠

Apêndices

14.A Prova da Proposição 14.1. Justificando os Polinômios de Legendre

Provaremos a Proposição 14.1 apenas para o caso da série $\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} z^{2k}$, pois a demonstração para a série $\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^{2k+1}$ é, *mutatis mutandis*, idêntica.

Caso $\lambda \in \mathbb{R}$ seja um inteiro não-negativo par, a série em (14.12) torna-se um polinômio e é, consequentemente, finita para todo $z \in \mathbb{C}$.

Consideremos, então, que $\lambda \in \mathbb{R}$ não é um inteiro não-negativo par. Tomemos a série em (14.12) somada, para simplificar, a partir de $k = 2$ e calculada em $z = \pm 1$ (tomamos $c_0 = 1$, sem perda de generalidade):

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_{2k} \;=\; -\lambda(\lambda+1) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k} \prod_{l=1}^{k-1} \left[1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)} \right] .$$

Consideremos, para $N > 2$,

$$\sum_{k=2}^{N} c_{2k} \;=\; \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{2k} \prod_{l=1}^{k-1} \left[1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)} \right] .$$

Se $\lambda(\lambda+1) \leq 0$ teremos que

$$\prod_{l=1}^{k-1} \left[1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)} \right] \;\geq\; 1 ,$$

pois os fatores são positivos e maiores que 1. Logo,

$$\sum_{k=2}^{N} c_{2k} \;=\; \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{2k} \prod_{l=1}^{k-1} \left[1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)} \right] \;\geq\; \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{2k} .$$

Portanto, como $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{2k}$ diverge, isso prova que $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=2}^{N} c_{2k}$ diverge, completando a prova.

Se $\lambda(\lambda+1) > 0$ devemos proceder de outra forma. É claro que existe $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 > 2$, tal que

$$0 \;<\; \frac{\lambda(\lambda+1)}{2k_0(2k_0+1)} \;<\; 1 , \tag{14.A.1}$$

o que implica $1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)} > 0$ para todo $l > k_0$. Escolhendo $N > k_0$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} c_{2k} \;&=\; \sum_{k=2}^{k_0} c_{2k} + \sum_{k=k_0+1}^{N} c_{2k} \\
&=\; \sum_{k=2}^{k_0} c_{2k} + \prod_{l=1}^{k_0-1} \left[1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)} \right] \sum_{k=k_0+1}^{N} \frac{1}{2k} \prod_{l=k_0}^{k-1} \left[1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)} \right] .
\end{aligned} \tag{14.A.2}$$

Podemos escrever

$$\prod_{l=k_0}^{k-1} \left[1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)} \right] \;=\; \exp\left(\sum_{l=k_0}^{k-1} \ln\left(1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)} \right) \right) ,$$

pois $1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)} > 0$ para todo $l \geq k_0$.

Agora, se $0 \leq x \leq M$ para algum $0 < M < 1$, então vale

$$\ln(1-x) \; \geq \; x\frac{\ln(1-M)}{M} \; . \tag{14.A.3}$$

Isso pode ser provado de diversas formas, por exemplo usando a concavidade da função logaritmo (vide Capítulo 5, página 244), que garante que

$$\ln\Big(\alpha a + (1-\alpha)b\Big) \; \geq \; \alpha \ln(a) + (1-\alpha)\ln(b) \; ,$$

para todo $0 \leq \alpha \leq 1$ e todo $0 < a < b$. Tomando $a = 1-M$, $b = 1$ e $\alpha = x/M$, estabelece-se (14.A.3).

Com isso, e como $0 < \frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)} \leq \frac{\lambda(\lambda+1)}{2k_0(2k_0+1)} =: M$, para todo $l \geq k_0$, temos que

$$\exp\left(\sum_{l=k_0}^{k-1} \ln\left(1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)}\right)\right) \; \geq \; \exp\left(\frac{\ln(1-M)}{M}\sum_{l=k_0}^{k-1}\frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)}\right) \; ,$$

Agora,

$$\sum_{l=k_0}^{k-1}\frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)} \; \leq \; \sum_{l=k_0}^{\infty}\frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)} \; < \; \infty \; ,$$

pois a série acima é convergente. Assim, definindo $K := \displaystyle\sum_{l=k_0}^{\infty}\frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)}$, teremos que

$$\exp\left(\sum_{l=k_0}^{k-1} \ln\left(1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)}\right)\right) \; \geq \; \exp\left(\frac{\ln(1-M)}{M}\sum_{l=k_0}^{k-1}\frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)}\right) \; \geq \; \exp\left(\frac{\ln(1-M)}{M}K\right)$$

já que, por (14.A.1), $\ln(1-M) < 0$.

Dessa forma, retornando a (14.A.2), temos que

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=2}^{N} c_{2k} - \sum_{k=2}^{k_0} c_{2k}\right| \; &= \; \left|\prod_{l=1}^{k_0-1}\left[1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)}\right]\right| \sum_{k=k_0+1}^{N}\frac{1}{2k}\exp\left(\sum_{l=k_0}^{k-1}\ln\left(1-\frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)}\right)\right) \\ &\geq \; \left|\prod_{l=1}^{k_0-1}\left[1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2l(2l+1)}\right]\right| \exp\left(\frac{\ln(1-M)}{M}K\right) \sum_{k=k_0+1}^{N}\frac{1}{2k} \; . \end{aligned}$$

Como o limite $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{k=k_0+1}^{N}\frac{1}{2k}$ diverge, concluímos que $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{k=2}^{N} c_{2k}$ também diverge, completando a prova. ■

14.B Polinômios de Legendre: Provando (14.14)

Vamos considerar apenas o caso em que m é par, pois o caso em que m é ímpar pode ser tratado de forma totalmente análoga. Temos que

$$P_m(z) \; = \; c_0 y_m^{(0)}(z) \; = \; c_0\sum_{k=0}^{m/2}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\prod_{l=0}^{k-1}\Big(2l(2l+1) - m(m+1)\Big),$$

Como dissemos, a convenção é escolher c_0 de modo que o coeficiente do monômio de maior grau do polinômio acima seja $\frac{(2m)!}{2^m(m!)^2}$. Assim, devemos ter

$$c_0\frac{1}{m!}\prod_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\Big(2l(2l+1) - m(m+1)\Big) \; = \; \frac{(2m)!}{2^m(m!)^2} \; ,$$

ou seja,

$$c_0 \;=\; \frac{(2m)!}{2^m m!}\prod_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\Big(2l(2l+1)-m(m+1)\Big)^{-1} .$$

Com isso

$$P_m(z) \;=\; \sum_{k=0}^{m/2}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\frac{(2m)!}{2^m m!}\prod_{l=k}^{\frac{m}{2}-1}\Big(2l(2l+1)-m(m+1)\Big)^{-1} .$$

Façamos agora a mudança de variável $k \to \frac{m}{2}-k$. Ficamos com

$$P_m(z) \;=\; \sum_{k=0}^{m/2}\frac{z^{m-2k}}{(m-2k)!}\frac{(2m)!}{2^m m!}\prod_{l=\frac{m}{2}-k}^{\frac{m}{2}-1}\Big(2l(2l+1)-m(m+1)\Big)^{-1} .$$

Façamos ainda a mudança de variável $l \to \frac{m}{2}-l$. Obtemos,

$$P_m(z) \;=\; \sum_{k=0}^{m/2}\frac{z^{m-2k}}{(m-2k)!}\frac{(2m)!}{2^m m!}\prod_{l=1}^{k}\Big((m-2l)(m-2l+1)-m(m+1)\Big)^{-1} .$$

Entretanto,

$$(m-2l)(m-2l+1)-m(m+1) \;=\; -2l(2m-2l+1) ,$$

como facilmente se vê. Agora, com isso,

$$\begin{aligned}
\prod_{l=1}^{k}\Big((m-2l)(m-2l+1)-m(m+1)\Big)^{-1} \quad &= \quad \prod_{l=1}^{k}\Big(-2l(2m-2l+1)\Big)^{-1} \\
&= \quad (-1)^k\left(\prod_{l=1}^{k}\frac{1}{2l}\right)\left(\prod_{l=1}^{k}\frac{1}{2m-2l+1}\right) \\
&= \quad \frac{(-1)^k}{(2k)!!}\;\frac{\displaystyle\prod_{l=k+1}^{m}(2m-2l+1)}{\displaystyle\prod_{l=1}^{m}(2m-2l+1)} \\
&= \quad \frac{(-1)^k}{(2k)!!\,(2m-1)!!}\prod_{l=k+1}^{m}(2m-2l+1) \\
&\overset{l\to l+k}{=} \quad \frac{(-1)^k}{(2k)!!\,(2m-1)!!}\prod_{l=1}^{m-k}(2(m-k)-2l+1) \\
&= \quad \frac{(-1)^k}{(2k)!!\,(2m-1)!!}\,(2(m-k)-1)!! .
\end{aligned}$$

Assim,

$$P_m(z) \;=\; \sum_{k=0}^{m/2}\frac{(-1)^k\,z^{m-2k}}{2^m(m-2k)!}\left(\frac{(2m)!\,(2(m-k)-1)!!}{m!\,(2k)!!\,(2m-1)!!}\right) .$$

Vale, porém,

$$
\begin{aligned}
\frac{(2m)!\,(2(m-k)-1)!!}{m!\,(2k)!!\,(2m-1)!!} &= \left(\frac{(2m)!\,(2(m-k)-1)!!}{m!\,(2k)!!\,(2m-1)!!}\right)\frac{(2(m-k))!!}{(2(m-k))!!} \\
&= \frac{(2m)!\,(2(m-k))!}{m!\,(2m-1)!!\,(2k)!!\,(2(m-k))!!} \\
&= \frac{(2m)!!\,(2m-2k)!}{m!\,(2k)!!\,(2(m-k))!!} \\
&= \frac{2^m m!\,(2m-2k)!}{m!\,2^k k!\,2^{m-k}(m-k)!} \\
&= \frac{(2m-2k)!}{k!\,(m-k)!}\,,
\end{aligned}
$$

onde, na penúltima passagem, usamos que $(2p)!! = 2^p p!$ para todo $p \in \mathbb{N}_0$. Com isso,

$$
P_m(z) \;=\; \sum_{k=0}^{m/2} \frac{(-1)^k\, z^{m-2k}}{2^m(m-2k)!}\,\frac{(2m-2k)!}{k!\,(m-k)!}\,,
$$

que é a expressão (14.14) para m par.

O caso em que m é ímpar é análogo e é deixado como exercício.

14.C Justificando os Polinômios de Hermite

Tomaremos aqui $z = x \in \mathbb{R}$ e consideraremos apenas a série

$$
y_\lambda^{(0)}(x) \;:=\; 1 - \frac{\lambda}{2}\,x^2 - \lambda\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\prod_{l=1}^{k-1}(4l-\lambda)\,,
$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$ mas $\lambda \neq 2m$ para m um inteiro positivo par (o que faz da série acima uma série infinita), pois o tratamento da série $y_\lambda^{(1)}$ é idêntico.

Seja $s > 1$, arbitrário mas fixo, e escolhamos $k_0 > 2$ tal que $\left(1 - \frac{\lambda}{4k_0}\right) > \frac{1}{s}$. Note que se $\lambda \leq 0$, isso é válido para todo $k_0 > 2$ enquanto que, se $\lambda > 0$, devemos tomar

$$
k_0 \;>\; \max\left\{\frac{\lambda s}{4(s-1)},\;\; 2\right\}\,. \tag{14.C.4}
$$

Escrevemos

$$
y_\lambda^{(0)}(x) \;:=\; 1 - \frac{\lambda}{2}\,x^2 - \lambda\sum_{k=2}^{k_0}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\prod_{l=1}^{k-1}(4l-\lambda) - \lambda\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\prod_{l=1}^{k-1}(4l-\lambda)\,.
$$

É fácil verificar que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\prod_{l=1}^{k-1}(4l-\lambda) &= \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 4^{k-1}x^{2k}\frac{(k-1)!}{(2k)!}\prod_{l=1}^{k-1}\left(1-\frac{\lambda}{4l}\right) \\
&= \left(\frac{1}{4}\prod_{l=1}^{k_0-1}\left(1-\frac{\lambda}{4l}\right)\right)\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 4^k x^{2k}\frac{(k-1)!}{(2k)!}\prod_{l=k_0}^{k-1}\left(1-\frac{\lambda}{4l}\right)\,.
\end{aligned}
$$

Vamos agora nos concentrar na série $\displaystyle\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 4^k x^{2k} \frac{(k-1)!}{(2k)!} \prod_{l=k_0}^{k-1} \left(1 - \frac{\lambda}{4l}\right)$. Pela escolha de k_0, sabemos que para $l \geq k_0$, vale

$$\left(1 - \frac{\lambda}{4l}\right) \geq \left(1 - \frac{\lambda}{4k_0}\right) > \frac{1}{s}$$

e, portanto,

$$\prod_{l=k_0}^{k-1} \left(1 - \frac{\lambda}{4l}\right) > \frac{1}{s^{k-k_0}} .$$

Além disso,

$$(2k)! = (2k)!!\,(2k-1)!! = 2^k k!\,(2k-1)!! < 2^{2k}(k!)^2 ,$$

pois

$$(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)(2k-5)\cdots 1 = 2^k \left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{3}{2}\right)\left(k - \frac{5}{2}\right)\cdots \frac{1}{2} < 2^k k(k-1)(k-2)\cdots 1 .$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 4^k x^{2k} \frac{(k-1)!}{(2k)!} \prod_{l=k_0}^{k-1} \left(1 - \frac{\lambda}{4l}\right) &> s^{k_0} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k(k!)} \left(\frac{x^2}{s}\right)^k \\
&> s^{k_0} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{x^2}{s}\right)^k \\
&= s^{k_0} \frac{s}{x^2} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{x^2}{s}\right)^{k+1} \\
&= \frac{s^{k_0+1}}{x^2} \left(e^{x^2/s} - \sum_{k=0}^{k=k_0+1} \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{s}\right)^k \right) .
\end{aligned}$$

Tudo isso mostra que $\left|y_\lambda^{(0)}(x)\right|$ é maior que $\dfrac{Ke^{x^2/s} - p(x)}{x^2}$, onde K é uma constante (que depende de λ, s e k_0) e $p(x)$ é um polinômio de grau $2k_0 + 2$ em x. Como s é arbitrário, vemos que o produto $y_\lambda^{(0)} e^{-x^2/2}$ diverge para $|x| \to \infty$, já que podemos escolher $1/s > 1/2$, tomando[29] $1 < s < 2$.

No contexto do problema do oscilador harmônico na Mecânica Quântica (vide Seção 21.7, página 966) esse comportamento é inaceitável, pois o produto $y_\lambda^{(0)} e^{-x^2/2}$ representa uma função de onda, que deve ser de quadrado integrável em $\mathbb{R}$. Isso força-nos a tomar $\lambda = 2m$ com m um inteiro positivo e par, de modo a reduzir $y_\lambda^{(0)}(x)$ a um polinômio.

Para $y_\lambda^{(1)}(x)$ as considerações são análogas e não iremos repeti-las aqui.

14.D Polinômios de Hermite: Provando (14.20)

Consideraremos apenas o caso em que m é par, pois o caso em que m é ímpar é tratado analogamente. Para m par, tem-se

$$H_m(z) = (-2)^{m/2}\,(m-1)!! \left[1 - m\,z^2 - 2m \sum_{k=2}^{\frac{m}{2}} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \prod_{l=1}^{k-1} (4l - 2m)\right] .$$

[29] Por (14.C.4), tomar s próximo de 1 aumenta o grau do polinômio $p(x)$, mas não altera o fato que $y_\lambda^{(0)}(x)e^{-x^2/2}$ diverge para $|x| \to \infty$

Fazendo a mudança de variáveis $k \to \frac{m}{2} - k$, teremos

$$H_m(z) \ = \ (-2)^{m/2}\,(m-1)!!\,\left[1 - m\,z^2 - 2m\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-2}\frac{z^{m-2k}}{(m-2k)!}\prod_{l=1}^{\frac{m}{2}-k-1}(4l-2m)\right] .$$

Tem-se que

$$\begin{aligned}
\prod_{l=1}^{\frac{m}{2}-k-1}(4l-2m) \quad &= \quad (-2)^{\frac{m}{2}-k-1}\prod_{l=1}^{\frac{m}{2}-k-1}(m-2l) \\
&= \quad (-2)^{\frac{m}{2}-k-1}\,\frac{\prod\limits_{l=1}^{\frac{m}{2}-1}(m-2l)}{\prod\limits_{l'=\frac{m}{2}-k}^{\frac{m}{2}-1}(m-2l')} \\
&\overset{l'\to\frac{m}{2}-l'}{=} \quad (-2)^{\frac{m}{2}-k-1}\,\frac{\prod\limits_{l=1}^{\frac{m}{2}-1}(m-2l)}{\prod\limits_{l'=1}^{k}2l'} \ = \ (-2)^{\frac{m}{2}-k-1}\frac{(m-2)!!}{(2k)!!} .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
H_m(z) \quad &= \quad (-2)^{m/2}\,(m-1)!!\,\left[1 - m\,z^2 - 2m\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-2}\frac{z^{m-2k}}{(m-2k)!}(-2)^{\frac{m}{2}-k-1}\frac{(m-2)!!}{(2k)!!}\right] \\
&= \quad (-2)^{\frac{m}{2}}\,(m-1)!!\,\big(1-m\,z^2\big) + \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-2}\frac{(-1)^k\,m!}{(m-2k)!\,k!}(2z)^{m-2k} \\
&= \quad \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^k\,m!}{(m-2k)!\,k!}(2z)^{m-2k} \, , \qquad\qquad (14.D.5)
\end{aligned}$$

já que

$$m\,(m-1)!!\,(m-2)!! \ = \ m!, \quad \text{que} \quad (2k)!! \ = \ 2^k k! \quad \text{e que} \quad \frac{(2p)!}{p!} \ = \ \frac{(2p)!!\,(2p-1)!!}{p!} \ = \ 2^p(2p-1)!! \, .$$

A expressão (14.D.5) coincide com (14.20) para m par. O caso em que m é ímpar é análogo e é deixado como exercício.

14.E Porque λ deve ser um Inteiro Positivo na Equação de Laguerre

Justificaremos aqui por que consideramos λ um inteiro positivo na equação de Laguerre. Temos dois casos a tratar: **a.** $\lambda < 0$ e **b.** $\lambda > 0$ mas λ não-inteiro. Em aplicações, especialmente na Mecânica Quântica, a variável z é um número real positivo (uma coordenada radial). Vamos então doravante tomar z real e positivo e escrever $z = r > 0$.

Se λ não for um inteiro positivo a série (14.139) acima é uma série infinita. Podemos escrever

$$(-1)^n\prod_{l=0}^{n-1}(\lambda-l) \ = \ -\lambda\prod_{l=1}^{n-1}(l-\lambda) \ = \ -\lambda(n-1)!\prod_{l=1}^{n-1}\left(1-\frac{\lambda}{l}\right) . \qquad (14.E.6)$$

Se $\lambda < 0$, a última expressão fica

$$|\lambda|(n-1)!\prod_{l=1}^{n-1}\left(1+\frac{|\lambda|}{l}\right)$$

e

$$y_1(r) \;=\; 1+|\lambda|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n!)}\left[\prod_{l=1}^{n-1}\left(1+\frac{|\lambda|}{l}\right)\right]r^n\;.$$

Agora, $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ e $\left(1+\frac{|\lambda|}{l}\right) > 1$. Assim,

$$y_1(r) \;>\; 1+|\lambda|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\,r^n \;=\; 1+\frac{|\lambda|}{r}\left(e^r-1-r\right)\;.$$

Disso concluímos que $y_1(r)$ cresce da ordem de e^r quando $r \to \infty$. O problema com isso é que em várias aplicações tal comportamento é indesejado. No problema do átomo de hidrogênio da Mecânica Quântica, por exemplo, o produto $e^{-r/2}y_1(r)$ representa a função de onda radial de um elétron de momento angular nulo sob um potencial coulombiano[30]. Pelo visto acima, se $\lambda < 0$ a função de onda cresceria para $r \to \infty$ pelo menos como $e^{+r/2}$, não podendo, assim, ser uma função de quadrado integrável em $\mathbb{R}^3$, uma condição fundamental ligada à interpretação probabilística da Mecânica Quântica. Assim, soluções com $\lambda < 0$ devem ser descartadas nesse contexto.

Tratemos agora do caso em que λ é positivo, mas não é um número inteiro. Por (14.E.6), podemos escrever, para $n-1 \geq 2\lceil\lambda\rceil$,

$$(-1)^n\prod_{l=0}^{n-1}(\lambda-l) \;=\; -\lambda(n-1)!\prod_{l=1}^{2\lceil\lambda\rceil-1}\left(1-\frac{\lambda}{l}\right)\prod_{l=2\lceil\lambda\rceil}^{n-1}\left(1-\frac{\lambda}{l}\right)\;,$$

onde $\lceil\lambda\rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a λ. Assim,

$$y_1(r) \;=\; 1+\sum_{n=1}^{2\lceil\lambda\rceil}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left[\prod_{l=0}^{n-1}(\lambda-l)\right]r^n + L\sum_{n=2\lceil\lambda\rceil+1}^{\infty}\frac{1}{n\,(n!)}\left[\prod_{l=2\lceil\lambda\rceil}^{n-1}\left(1-\frac{\lambda}{l}\right)\right]r^n\;,$$

com

$$L \;:=\; -\lambda\prod_{l=1}^{2\lceil\lambda\rceil-1}\left(1-\frac{\lambda}{l}\right)\;.$$

A razão de escrevermos essa expressão dessa forma reside no fato que, agora, $\displaystyle\prod_{l=2\lceil\lambda\rceil}^{n-1}\left(1-\frac{\lambda}{l}\right)$ é um produto de termos positivos, sendo que, para $l \geq 2\lceil\lambda\rceil$ tem-se

$$1-\frac{\lambda}{l} \;\geq\; \alpha$$

onde

$$\alpha \;:=\; 1-\frac{\lambda}{2\lceil\lambda\rceil} \;=\; \frac{2\lceil\lambda\rceil-\lambda}{2\lceil\lambda\rceil} \;=\; \frac{\lceil\lambda\rceil+(\lceil\lambda\rceil-\lambda)}{2\lceil\lambda\rceil} \;>\; \frac{\lceil\lambda\rceil}{2\lceil\lambda\rceil} \;=\; \frac{1}{2}\;.$$

[30] Vide Seção 21.8, página 969, ou qualquer bom livro de Mecânica Quântica.

Com isso, para a última soma do lado direito vale

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2\lceil\lambda\rceil+1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n!)} \left[\prod_{l=2\lceil\lambda\rceil}^{n-1}\left(1-\frac{\lambda}{l}\right)\right] r^n \quad &\geq \quad \sum_{n=2\lceil\lambda\rceil+1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n!)}\;(\alpha)^{n-2\lceil\lambda\rceil}\; r^n \\
&= \quad K \sum_{n=2\lceil\lambda\rceil+1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n!)}\;(\alpha r)^n \\
&> \quad K \sum_{n=2\lceil\lambda\rceil+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\;(\alpha r)^n \\
&= \quad \frac{K}{\alpha r}\Big(e^{\alpha r} - P(\alpha r)\Big)
\end{aligned}
$$

onde $K := \alpha^{-2\lceil\lambda\rceil}$, $P(\alpha r) := \sum_{n=0}^{2\lceil\lambda\rceil+1} \frac{1}{n!}\,(\alpha r)^n$ é um polinômio de grau $2\lceil\lambda\rceil + 1$ e $\alpha > 1/2$.

Disso concluímos que para $r \to \infty$, $|y_1(r)|$ cresce mais rápido que $e^{\alpha r}$ com $\alpha > 1/2$. Assim, um produto como $e^{-r/2}y_1(r)$, que como dissemos representa a função de onda radial de um elétron de momento angular nulo sob um potencial coulombiano, não é de quadrado integrável no espaço $\mathbb{R}^3$, uma condição fundamental ligada à interpretação probabilística da Mecânica Quântica. Assim, soluções com $\lambda > 0$, mas λ não-inteiro, devem também ser descartadas nesse contexto.

14.F Polinômios de Tchebychev: Obtendo (14.39) a Partir de (14.36)–(14.38)

Trataremos apenas o caso em que m é par e $m \geq 2$, o caso ímpar sendo análogo. O fator $\prod_{l=0}^{k-1}\Big[(2l)^2 - m^2\Big]$ que ocorre em (14.36) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\prod_{l=0}^{k-1}\Big[(2l)^2 - m^2\Big] \;&=\; \left(\prod_{l=0}^{k-1}\Big[2l+m\Big]\right)\left(\prod_{l=0}^{k-1}\Big[2l-m\Big]\right) \;=\; (-1)^k\left(\prod_{l=0}^{k-1}\Big[2l+m\Big]\right)\left(\prod_{l=0}^{k-1}\Big[m-2l\Big]\right) \\
&=\; (-1)^k\,\frac{(2k-2+m)!!}{(m-1)!!}\;\frac{m!!}{(m-2k)!!}\;.
\end{aligned}
$$

E. 14.33 *Exercício*. Justifique! ✠

Com isso e com a mudança de variável $k = m/2 - j$, escrevemos

$$
y_m^{(0)}(z) \;=\; \sum_{j=0}^{m/2} z^{m-2j}(-1)^{m/2-j}\,\frac{(2m-2j-2)!!\,m!!}{(m-2j)!\,(2j)!!\,(m-1)!!}\;.
$$

O coeficiente do termo de maior grau (que corresponde a $j = 0$) é $(-1)^{m/2}2^{m-1}\frac{m!!}{m\,(m-1)!!}$. Assim, multiplicando-se $y_m^{(0)}(z)$ por $(-1)^{-m/2}\frac{m\,(m-1)!!}{m!!}$ para que o coeficiente do termo de maior grau torne-se 2^{m-1}, obtemos

$$
T_m(z) \;=\; \sum_{j=0}^{m/2} z^{m-2j}(-1)^j m\,\frac{(2m-2j-2)!!}{(m-2j)!\,(2j)!!}\;.
$$

Usando agora o fato que $(2a)!! = 2^a a!$, $a \in \mathbb{N}$, obtemos finalmente

$$T_m(z) \;=\; \sum_{j=0}^{m/2} (2z)^{m-2j} \frac{m}{2} (-1)^j \frac{(m-j-1)!}{(m-2j)!\, j!} \;,$$

que é (14.39).