Capítulo 16
Completeza de Algumas Famílias de Funções

Conteúdo

A propriedade de completeza de certas famílias de funções que surgem na solução de equações diferenciais ordinárias sujeitas a certas condições de contorno, como no problema de Sturm-Liouville, é uma propriedade de importância essencial na resolução de tais problemas. Ela surge também de maneira relevante na teoria da aproximação de funções, como na teoria das séries de Fourier. Neste capítulo o leitor será apresentado a demonstrações da propriedade de completeza (em espaços de Hilbert adequados) de algumas famílias de funções de interesse. O principal método de demonstração da propriedade de completeza envolve resultados da teoria dos operadores compactos autoadjuntos em espaços de Hilbert, assunto desenvolvido no Capítulo 41 e, especialmente, nas Seções 41.8 e 41.10, páginas 2165 e 2204, respectivamente. No entanto, sempre que possível, especialmente nas primeiras seções, apresentaremos demonstrações de completeza que fazem uso de métodos “elementares”, ou seja, dispensando a teoria dos operadores compactos, mas fazendo uso de alguns resultados da teoria de aproximações de funções (Capítulo, 38, página 1829) ou eventualmente da teoria das transformadas de Fourier (Capítulo 39, página 1899).

Devido à natureza do problema, serão utilizados também resultados da teoria de integração, demonstrados e discutidos em outros capítulos deste texto. Naturalmente, de particular relevância são as noções de espaço de Hilbert e de conjunto ortogonal completo em espaços de Hilbert, discutidas no Capítulo 40, página 2009, cuja leitura é imprescindível para a compreensão do que segue.

É também relevante comentar que a propriedade de completeza aqui discutida é importante para a Mecânica Quântica, permitindo justificar algumas das operações matemáticas lá realizadas.

Por tratar de uma propriedade específica de certas famílias de funções, este capítulo deve ser naturalmente encarado como uma continuação do Capítulo 15, página 677, ainda que faça uso de instrumentos matemáticos mais avançados. Em um certo sentido histórico, a transição do Capítulo 15 ao presente capítulo reproduz a transição da Matemática do final do Século XIX ao início do Século XX, quando várias das questões aqui tratadas foram colocadas e resolvidas pela primeira vez.

16.1 Completeza de Polinômios Ortogonais em Intervalos Compactos

Para o tratamento de polinômios ortogonais em intervalos compactos o teorema a seguir, o qual é uma consequência do Teorema de Weierstrass (Teorema 38.3, página 1842), é de importância fundamental:

Proposição 16.1 *Seja $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado, com $b > a$, e seja r uma função positiva e integrável no intervalo*

$[a,\ b]$, ou seja, tal que $\int_a^b r(x)dx$ seja finita. Seja f uma função contínua definida em $[a,\ b]$. Então,

$$\int_a^b \overline{f(x)}\, x^n\, r(x)\, dx \ = \ 0 \tag{16.1}$$

é válida para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se e somente se $f \equiv 0$ em $[a,\ b]$. $\square$

Prova. Precisamos provar que se $\int_a^b \overline{f(x)} x^n\, r(x)\, dx = 0$ para todo n e f é contínua, então f é identicamente nula. Como $|f|$ é contínua em um intervalo compacto, $|f|$ assume um máximo M nesse intervalo, com $M = \max_{x\in[a,\, b]} |f(x)|$ (Teorema 34.16, página 1597). Pelo Teorema de Weierstrass, Teorema 38.3, página 1842, existe para todo $\epsilon > 0$ um polinômio p tal que $|f(x) - p(x)| \leq \epsilon$ para todo $x \in [a,\ b]$. Com esse polinômio p, podemos escrever

$$\int_a^b |f(x)|^2\, r(x)\, dx \ = \ \int_a^b \overline{f(x)} p(x)\, r(x)\, dx + \int_a^b \overline{f(x)} \big(f(x) - p(x)\big)\, r(x)\, dx \ .$$

Agora, pela hipótese (16.1), $\displaystyle\int_a^b \overline{f(x)} p(x)\, r(x)\, dx = 0$, pois p, como todo polinômio, pode ser escrito como uma combinação linear finita dos monômios x^n. Fora isso,

$$\left| \int_a^b \overline{f(x)} \big(f(x) - p(x)\big)\, r(x)\, dx \right| \ \leq \ \int_a^b |f(x)|\, |f(x) - p(x)|\, r(x)\, dx \ \leq \ M\epsilon R \ ,$$

onde $R := \int_a^b r(x)dx$. Concluímos que $\int_a^b |f(x)|^2\, r(x)\, dx \leq M\epsilon R$ e como ϵ é arbitrário, isso implica $\int_a^b |f(x)|^2\, r(x)\, dx = 0$. Como f é contínua isso implica que f é identicamente nula, como queríamos provar. ■

A Proposição 16.1 afirma que a única função contínua que é ortogonal a todos os polinômios em $[a,\ b]$ é a função nula. Ortogonalidade aqui é entendida em relação ao produto escalar $\langle f,\ g\rangle_r := \int_a^b \overline{f(x)} g(x)\, r(x)dx$ definido no espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável em relação à medida $r(x)dx$, ou seja, que satisfazem $\int_a^b |f(x)|^2\, r(x)dx < \infty$. Denotaremos esse espaço de Hilbert por $L^2\big([a,\ b],\ r(x)dx\big)$, como de praxe. É claro que as funções contínuas definidas no intervalo $[a,\ b]$ são todas de quadrado integrável e, portanto, são elementos do espaço de Hilbert $L^2\big([a,\ b],\ r(x)dx\big)$. Mas nem todas as funções de quadrado integrável são contínuas. A afirmação da Proposição 16.1 pode, porém, ser estendida ao espaço $L^2\big([a,\ b],\ r(x)dx\big)$. Esse é o conteúdo da proposição que segue.

Proposição 16.2 *Seja $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado, com $b > a$, e seja r uma função positiva e integrável no intervalo $[a,\ b]$, ou seja, tal que $\int_a^b r(x)dx$ seja finita. Seja $\langle k,\ l\rangle_r := \int_a^b \overline{k(x)} l(x) r(x) dx$ o produto escalar definido por r e $L^2\big([a,\ b],\ r(x)dx\big)$ o correspondente espaço de Hilbert de funções de quadrado integrável. Então, para $g \in L^2\big([a,\ b],\ r(x)dx\big)$ a relação*

$$\int_a^b \overline{g(x)}\, x^n\, r(x)\, dx \ = \ 0 \tag{16.2}$$

é válida para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se e somente se $g = 0$ quase em toda parte em $[a,\ b]$. $\square$

Prova. Defina-se $G(x) := \displaystyle\int_a^x \overline{g(y)} r(y) dy$. G é contínua e diferenciável com $G'(x) = \overline{g(x)} r(x)$ quase em toda parte. É claro que $G(a) = 0$ e que $G(b) = \int_a^b \overline{g(y)} r(y) dy = 0$ por (16.2) (para o caso particular $n = 0$). Assim, integração por partes diz-nos que

$$0 \ \stackrel{(16.2)}{=} \ \int_a^b \overline{g(x)}\, x^n\, r(x)\, dx \ = \ \int_a^b G'(x)\, x^n\, dx \ = \ \underbrace{G(b)b^n - G(a)a^n}_{=0} - n \int_a^b G(x)\, x^{n-1}\, dx \ .$$

Portanto, concluímos que $\int_a^b G(x)\, x^{n-1}\, dx = 0$ para todo $n \geq 1$. Como $\overline{G}$ é contínua, podemos aplicar a Proposição 16.1, agora para o caso $r \equiv 1$, para concluir que $\overline{G}$ é identicamente nula. Como $G'(x) = \overline{g(x)} r(x)$ quase em toda parte, isso implica que g é nula quase em toda parte. ■

Seja agora uma família de polinômios $p_n(x)$ em $[a,\ b]$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, sendo que cada polinômio p_n tem grau n e sendo que os polinômios $p_n(x)$ sejam ortonormais em relação ao produto escalar definido por r, ou seja, satisfazem $\langle p_m,\ p_n\rangle_r = \delta_{m,\,n}$ para todos m, n (uma tal família sempre pode ser obtida a partir de $p_0(x) := R^{-1/2}$ pelo procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt. Vide Seção 3.3, página 214). Como cada polinômios $p_m(x)$ tem grau m, cada monômio x^n pode ser escrito como uma combinação linear finita de polinômios $p_m(x)$ com $m \leq n$. É daí evidente que a Proposição 16.2 equivale à

Proposição 16.3 *Seja $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado, com $b > a$, e seja r uma função positiva e integrável no intervalo $[a,\ b]$, ou seja, tal que $\int_a^b r(x)dx$ seja finita. Seja $\langle k,\ l\rangle_r := \int_a^b \overline{k(x)}l(x)r(x)dx$ o produto escalar definido por r e $L^2\big([a,\ b],\ r(x)dx\big)$ o correspondente espaço de Hilbert de funções de quadrado integrável. Seja $p_n(x)$, com $n \in \mathbb{N}_0$, uma família de polinômios, cada p_n sendo de grau n, que sejam ortonormais em relação ao produto escalar $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_r$, ou seja, os polinômios p_n satisfazem $\langle p_m,\ p_n\rangle_r = \delta_{m,\,n}$ para todos m, n. Então, para $g \in L^2\big([a,\ b],\ r(x)dx\big)$ a relação*

$$\int_a^b \overline{g(x)}\, p_n(x)\, r(x)\, dx \;=\; 0 \tag{16.3}$$

é válida para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se e somente se $g = 0$ quase em toda parte em $[a,\ b]$. □

De acordo com as definições do Capítulo 40, página 2009, a Proposição 16.3 diz-nos que $L^2\big([a,\ b],\ r(x)dx\big)$ é um espaço de Hilbert separável e que a família de polinômios ortonormais p_n forma um conjunto ortonormal completo em $L^2\big([a,\ b],\ r(x)dx\big)$ (vide página 2024). Pelos Teoremas 40.6 e 40.7, páginas 2025 e 2027, respectivamente, vale para todo $g \in L^2\big([a,\ b],\ r(x)dx\big)$

$$g \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \langle p_n,\ g\rangle_r\, p_n \qquad \text{e} \qquad \|g\|_r^2 \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \big|\langle p_n,\ g\rangle_r\big|^2 \,, \tag{16.4}$$

sendo $\|g\|_r := \sqrt{\langle g,\ g\rangle_r}$ a norma de g em $L^2\big([a,\ b],\ r(x)dx\big)$. A convergência da primeira série em (16.4) se dá em relação à norma $\|\cdot\|_r$ de $L^2\big([a,\ b],\ r(x)dx\big)$, ou seja, tem-se

$$\lim_{N\to\infty} \left\| g - \sum_{n=0}^{N} \langle p_n,\ g\rangle_r\, p_n \right\|_r \;=\; 0 \,.$$

• **Completeza dos polinômios de Legendre**

Aplicando os fatos acima aos polinômios de Legendre P_n, estudados na Seção 15.2.1, página 689, concluímos que os polinômios normalizados $Q_n(x) := \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)$, $n \geq 0$, formam um conjunto ortonormal completo em $L^2\big([-1,\ 1],\ dx\big)$ (para as relações de ortogonalidade dos polinômios de Legendre, vide (15.37)). Assim, em particular, concluímos que toda $g \in L^2\big([-1,\ 1],\ dx\big)$ pode ser expandida em uma série de polinômios de Legendre como

$$g \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \langle Q_n,\ g\rangle_r\, Q_n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \left[\int_{-1}^{1} P_n(y)\, g(y)\, dy\right] P_n \,,$$

série essa que converge na norma de $L^2\big([-1,\ 1],\ dx\big)$. Para uma aplicação não-trivial dessa expressão, faça o Exercício E. 15.29, página 741.

• **Completeza dos polinômios de Tchebychev**

Os chamados *polinômios de Tchebychev* $T_m(x) := \cos\big(m \arccos(x)\big)$, $x \in [-1,\ 1]$ e $m \in \mathbb{N}_0$, foram introduzidos na Seção 14.1.5, página 624 (vide, em especial, página 625) e satisfazem as relações de ortogonalidade dadas em (15.127), página 712. Sabemos que a função $r(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ é positiva e integrável no intervalo $(-1,\ 1)$. Sabemos que cada T_m é um polinômio de grau m. Devido a (15.127), página 712, sabemos que os polinômios de Tchebychev normalizados $Q_n(x) := T_n(x)/\sqrt{K_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, com $K_0 = \pi/2$ e $K_n = \pi$ para $n \geq 0$, compõe um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert $L^2\left((-1,\ 1),\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right)$. Assim, aplica-se a Proposição 16.3, página 746, e concluímos que os polinômios de Tchebychev normalizados compõe um conjunto ortonormal completo no espaço de Hilbert $L^2\left((-1,\ 1),\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right)$.

Assim, em particular, concluímos que toda $g \in L^2\Big((-1,\, 1),\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\Big)$ pode ser expandida em uma série de polinômios de Tchebychev como

$$g \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \langle Q_n,\ g\rangle_r\, Q_n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{K_n}\left[\int_{-1}^{1} T_n(y)\, g(y)\, \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy\right] T_n\ ,$$

série essa que converge na norma de $L^2\Big((-1,\, 1),\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\Big)$.

16.2 Completeza dos Polinômios de Hermite

O tratamento que fizemos acima da propriedade de completeza de polinômios ortogonais em intervalos fechados faz uso crucial do Teorema de Weierstrass, Teorema 38.3, página 1842. Infelizmente esse teorema é válido apenas em intervalos compactos, e para o tratamento de relações de ortogonalidade de polinômios ortogonais definidos em regiões não-compactas, como os polinômios de Hermite, outras ideias têm de ser seguidas. Nesse sentido, o seguinte resultado é essencial:

Proposição 16.4 *Seja $f \in L^2\big(\mathbb{R},\ e^{-x^2}dx\big)$. Então, as integrais $\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) e^{-x^2}\, dx$ são nulas para todo n inteiro, $n \geq 0$, se e somente se f for nula.* □

Prova. (De [154], com adaptações). Para todo $z \in \mathbb{C}$ e todo n inteiro, $n \geq 0$, tem-se que a função $h(x) := x^n e^{izx}$ pertence a $L^2\big(\mathbb{R},\ e^{-x^2}dx\big)$, pois $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\big|e^{2izx-x^2}\big|dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{\mathrm{Im}\,(z)x-x^2}\, dx < \infty$, como é fácil provar. Dessa forma, se $f \in L^2\big(\mathbb{R},\ e^{-x^2}dx\big)$, então o produto $h(x)f(x)$ pertence a $L^1\big(\mathbb{R},\ e^{-x^2}dx\big)$, ou seja, é integrável em $\mathbb{R}$ em relação à medida $d\mu(x) := e^{-x^2}dx$ para todo $z \in \mathbb{C}$ e todo n inteiro, $n \geq 0$. Isso pode ser visto pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, que garante que $\int_{\mathbb{R}} |hf|\, d\mu \leq (\int_{\mathbb{R}} |h|^2\, d\mu)^{1/2}(\int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\mu)^{1/2} < \infty$. Assim, para todo n inteiro, $n \geq 0$, a função de variável complexa

$$F_n(z) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-izx} f(x) e^{-x^2}\, dx$$

está definida para todo $z \in \mathbb{C}$.

De particular interesse é a função $F_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} f(x) e^{-x^2}\, dx$, que é a transformada de Fourier de $f(x)e^{-x^2}$ quando $z \in \mathbb{R}$. Observe que essa função é de quadrado integrável pois $e^{-2x^2} \leq e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, o que implica $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-2x^2}\, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2}\, dx < \infty$, pois $f \in L^2\big(\mathbb{R},\ e^{-x^2}dx\big)$. Isso significa que a transformada de Fourier de $f(x)e^{-x^2}$ existe e é única[1] em $L^2\big(\mathbb{R},\ dx\big)$, fato que usaremos logo adiante.

Como o integrando de F_0, ou seja, $e^{-izx} f(x) e^{-x^2}$, é uma função inteira de z e a integral que define F_0 converge absolutamente e uniformemente em qualquer região compacta (mostre isso usando o fato que $|e^{-izx-x^2}| = e^{\mathrm{Im}\,(z)x-x^2}$), segue que $F_0(z)$ é uma função inteira de z (analogamente mostra-se que todas as funções $F_n(z)$ são inteiras, mas isso não será usado). É agora fácil ver que para todo n

$$\frac{d^n F_0}{dz^n}(z) \;=\; (-i)^n F_n(z)\ .$$

Isso pode ser justificado diferenciando $F_0(z)$ sob o signo de integração, ou usando a fórmula integral de Cauchy, ambas justificadas pela convergência uniforme da integral que define F_0. Agora, como F_0 é inteira, F_0 possui uma série de Taylor centrada em 0 que converge para todo $z \in \mathbb{C}$, a qual é dada por

$$F_0(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n F_0}{dz^n}(0)\; z^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} F_n(0)\; z^n\ .$$

Dessa relação concluímos que se $F_n(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) e^{-x^2}\, dx = 0$ para todo n, então F_0 é identicamente nula. Pela invertibilidade da transformada de Fourier em $L^2\big(\mathbb{R},\ dx\big)$, isso significa que f é nula. ■

[1] A transformada de Fourier é inversível em $L^2\big(\mathbb{R},\ dx\big)$. Vide Seção 39.2.2, página 1929.

• **Completeza dos polinômios de Hermite**

As propriedades elementares dos chamados polinômios de Hermite foram estudadas na Seção 15.2.3, página 705, sendo as relações de ortogonalidade apresentadas em (15.100), página 706. Os polinômios de Hermite são ortogonais no espaço de Hilbert $L^2\big(\mathbb{R},\ e^{-x^2}dx\big)$ e mostraremos aqui que, devidamente normalizados, os mesmos formam um conjunto ortonormal completo nesse espaço de Hilbert.

Como cada polinômio de Hermite H_n é de grau n, concluímos que podemos escrever cada monômio x^m como combinação linear finita de polinômios H_n com $n \leq m$. Segue diretamente disso que a Proposição 16.4 é equivalente à

Proposição 16.5 *Seja $f \in L^2\big(\mathbb{R},\ e^{-x^2}dx\big)$. Então, as integrais $\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)f(x)e^{-x^2}\,dx$ são nulas para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se e somente se f for nula.* $\square$

A proposição (16.5) afirma que $L^2\big(\mathbb{R},\ e^{-x^2}dx\big)$ é um espaço de Hilbert separável e que as funções normalizadas $\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(x)$, para $n \in \mathbb{N}_0$ (vide (15.100)), formam um conjunto ortonormal completo em $L^2\big(\mathbb{R},\ e^{-x^2}dx\big)$.

Como no caso dos polinômios de Legendre, concluímos que se $f \in L^2\big(\mathbb{R},\ e^{-x^2}dx\big)$, então podemos escrever

$$f \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \langle H_n,\ f\rangle\, H_n \;, \tag{16.5}$$

onde

$$\langle H_n,\ f\rangle \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} H_n(y)f(y)e^{-y^2}\,dy$$

é o produto escalar de H_n e f em $L^2\big(\mathbb{R},\ e^{-x^2}dx\big)$. A convergência da série em (16.5) se dá no sentido da norma de $L^2\big(\mathbb{R},\ e^{-x^2}dx\big)$.

• **Completeza dos polinômios de Laguerre**

Uma prova de completeza dos polinômios de Laguerre pode ser encontrada em [72].

16.3 Completeza dos Polinômios Trigonométricos

De acordo com o Teorema 38.9, página 1864, toda função definida em $\mathbb{R}$ que seja contínua e periódica de período 2π pode ser uniformemente aproximada por polinômios trigonométricos de período 2π. De maneira semelhante ao que fizemos no caso de aproximações de funções contínuas por polinômios, podemos concluir desse fato que certas famílias de polinômios trigonométricos formam um conjunto ortonormal completo em espaços de Hilbert como $L^2\big([a,\ a],\ r(x)dx\big)$, r sendo uma função positiva e integrável em $[a,\ b] \subset [-\pi,\ \pi]$. A série de resultados que veremos adiante segue muito de perto os resultados correspondentes da Seção 16.1.

Proposição 16.6 *Seja r uma função integrável no intervalo $[a,\ b] \subset [-\pi,\ \pi]$ (com $a \leq b$) e positiva em $(a,\ b)$, ou seja, tal que $r(x) > 0$ para todo $x \in (a,\ b)$ e que $\int_a^b r(x)dx$ seja finita. Seja f a restrição ao intervalo $[-\pi,\ \pi]$ de uma função contínua e periódica de período 2π. Então,*

$$\int_a^b \overline{f(x)}\, e^{inx}\, r(x)\, dx \;=\; 0 \tag{16.6}$$

é válida para todo $n \in \mathbb{Z}$ se e somente se $f \equiv 0$ em $[a,\ b]$. $\square$

Prova. Como $|f|$ é contínua em um intervalo compacto, $|f|$ assume um máximo M nesse intervalo, com $M = \max\limits_{x\in[-\pi,\ \pi]} |f(x)|$. Pelo Teorema 38.9, página 1864, existe para todo $\epsilon > 0$ um polinômio trigonométrico p de período 2π tal que $|f(x) - p(x)| \leq \epsilon$ para todo $x \in [-\pi,\ \pi]$. Com esse polinômio trigonométrico p, podemos escrever

$$\int_a^b |f(x)|^2\, r(x)\, dx \;=\; \int_a^b \overline{f(x)}p(x)\, r(x)\, dx + \int_a^b \overline{f(x)}\big(f(x) - p(x)\big)\, r(x)\, dx\;.$$

Agora, pela hipótese (16.6), $\int_a^b \overline{f(x)}p(x)\,r(x)\,dx = 0$, pois p, como todo polinômio trigonométrico, pode ser escrito como uma combinação linear finita dos monômios e^{inx}. Fora isso,

$$\left|\int_a^b \overline{f(x)}\big(f(x)-p(x)\big)\,r(x)\,dx\right| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|\,|f(x)-p(x)|\,r(x)\,dx \;\leq\; M\epsilon R\,,$$

onde $R := \int_a^b r(x)dx$. Concluímos que $\int_a^b |f(x)|^2\,r(x)\,dx \leq M\epsilon R$ e como ϵ é arbitrário, isso implica $\int_a^b |f(x)|^2\,r(x)\,dx = 0$. Como f é contínua e $r(x) > 0$ em $(a,\ b)$, isso implica que f é identicamente nula em $[a,\ b]$, como queríamos provar. ■

A Proposição 16.6 afirma que uma função contínua e periódica de período 2π que é ortogonal a todos os polinômios trigonométricos em um intervalo $[a,\ b] \subset [-\pi,\ \pi]$ é identicamente nula em $[a,\ b]$. A ortogonalidade aqui é entendida em relação ao produto escalar $\langle f,\ g\rangle_r := \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\,r(x)dx$ definido no espaço de Hilbert $L^2\big([a,\ b],\ r(x)dx\big)$ das funções de quadrado integrável em $[a,\ b]$ em relação à medida $r(x)dx$, ou seja, que satisfazem $\int_a^b |f(x)|^2\,r(x)dx < \infty$. Denotaremos esse espaço de Hilbert por $\mathcal{H}_r$. A afirmação da Proposição 16.6 pode ser estendida ao espaço $\mathcal{H}_r$. Esse é o conteúdo da proposição que segue.

Proposição 16.7 *Seja r uma função integrável no intervalo $[a,\ b] \subset [-\pi,\ \pi]$ (com $a \leq b$) e positiva em $(a,\ b)$, ou seja, tal que $r(x) > 0$ para todo $x \in (a,\ b)$ e que $\int_a^b r(x)dx$ seja finita. Seja $\langle k,\ l\rangle_r := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{k(x)}l(x)r(x)dx$ o produto escalar definido por r e $\mathcal{H}_r \equiv L^2([a,\ b],\ r(x)dx)$ o correspondente espaço de Hilbert de funções de quadrado integrável em relação à medida $r(x)dx$. Então, para $g \in \mathcal{H}_r$, a relação*

$$\int_a^b \overline{g(x)}\,e^{inx}\,r(x)\,dx \;=\; 0 \tag{16.7}$$

é válida para todo $n \in \mathbb{Z}$ se e somente se $g = 0$ quase em toda parte em $[a,\ b]$. □

<u>*Nota*</u>. A integral em (16.7) está bem definida pois, por Cauchy-Schwarz, $\int_a^b |g(x)|r(x)\,dx \leq \left(\int_a^b |g(x)|^2 r(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b 1\cdot r(x)\,dx\right)^{1/2} < \infty$, já que g e 1 pertencem a $\mathcal{H}_r$. ♣

Prova da Proposição 16.7. Defina-se $G(x) := \int_a^x \overline{g(y)}r(y)dy$. G é contínua e diferenciável com $G'(x) = \overline{g(x)}r(x)$ quase em toda parte. É claro que $G(a) = 0$ e que $G(b) = \int_a^b \overline{g(y)}r(y)dy = 0$, por (16.7) (para o caso particular $n = 0$). Integração por partes diz-nos que

$$0 \stackrel{(16.7)}{=} \int_a^b \overline{g(x)}\,e^{inx}\,r(x)\,dx \;=\; \int_a^b G'(x)\,e^{inx}\,dx \;=\; \Big(G(b)e^{inb} - G(a)e^{ina}\Big) - in\int_a^b G(x)\,e^{inx}\,dx\,.$$

Como $G(a) = G(b) = 0$, concluímos que

$$\int_a^b G(x)\,e^{inx}\,dx \;=\; 0 \qquad \text{para todo } n \neq 0\,. \tag{16.8}$$

Seja agora a extensão 2π-periódica de G a todo $\mathbb{R}$, definida no intervalo $[-\pi,\ \pi]$ por

$$\widetilde{G}(x) \;:=\; \begin{cases} G(x)\,, & \text{se } x \in [a,\ b] \\ 0\,, & \text{se } x \in [-\pi,\ \pi]\setminus[a,\ b] \end{cases}\,.$$

Como G anula-se em a e em b, $\widetilde{G}$ é contínua e 2π-periódica, mesmo se $[a,\ b] = [-\pi,\ \pi]$. Pela definição e por (16.8), vale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{G}(x)\,e^{inx}\,dx \;=\; 0 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\,. \tag{16.9}$$

Denotando $G_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{G}(y)\,dy$, e definindo $H(x) := \widetilde{G}(x) - G_0$, concluímos de (16.9) que

$$\int_{-\pi}^{\pi} H(x)\, e^{inx}\, dx \;=\; 0 \;,$$

agora para <u>todo</u> $n \in \mathbb{Z}$ (lembrar que para $n \neq 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} G_0\, e^{inx}\, dx = G_0 \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, dx = 0$).

Como $\overline{H}$ é contínua e 2π-periódica, podemos aplicar a Proposição 16.6 (adotando, naquela Proposição, o caso $r \equiv 1$ e $[a,\ b] = [-\pi,\ \pi]$), para concluir que $\overline{H}$ é identicamente nula. Como $0 = H'(x) = G'(x) = \overline{g(x)}r(x)$ quase em toda parte em $[a,\ b]$, isso implica que g é nula quase em toda parte em $[a,\ b]$. ■

Uma família de polinômios trigonométricos de período 2π, $p_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, é dita ser *normal* se todo monômio trigonométrico e^{imx}, $m \in \mathbb{Z}$, puder ser escrito como uma combinação linear finita de polinômios p_n. Suponhamos que os polinômios trigonométricos de um conjunto de polinômios normais $p_n(x)$ seja também ortonormais em relação ao produto escalar definido por r, ou seja, satisfazem $\langle p_m,\ p_n\rangle_r = \delta_{m,\,n}$ para todos m, n (uma tal família sempre pode ser obtida a partir de $p_0(x) := R^{-1/2}$ (com $R := \int_a^b r(x)dx$) pelo procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt. Vide Seção 3.3, página 214). Como cada monômio e^{inx} pode ser escrito como uma combinação linear finita de polinômios $p_m(x)$, é evidente que a Proposição 16.7 equivale à

Proposição 16.8 *Seja r uma função integrável no intervalo $[a,\ b] \subset [-\pi,\ \pi]$ (com $a \leq b$) e positiva em $(a,\ b)$, ou seja, tal que $r(x) > 0$ para todo $x \in (a,\ b)$ e que $\int_a^b r(x)dx$ seja finita. Seja $\langle k,\ l\rangle_r := \int_a^b \overline{k(x)}l(x)r(x)dx$ o produto escalar definido por r e $\mathcal{H}_r \equiv L^2\big([a,\ b],\ r(x)dx\big)$ o correspondente espaço de Hilbert de funções de quadrado integrável em relação à medida $r(x)dx$. Seja $p_n(x)$, com $n \in \mathbb{Z}$, uma família normal de polinômios ortonormais em relação ao produto escalar $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_r$, ou seja, todo monômio e^{imx} pode ser escrito como uma combinação linear finita de polinômios p_n os polinômios p_n satisfazem $\langle p_m,\ p_n\rangle_r = \delta_{m,\,n}$ para todos $m,\ n \in \mathbb{Z}$. Então, para $g \in \mathcal{H}_r$, a relação*

$$\int_a^b \overline{g(x)}\, p_n(x)\, r(x)\, dx \;=\; 0 \tag{16.10}$$

é válida para todo $n \in \mathbb{Z}$ se e somente se $g = 0$ quase em toda parte em $[a,\ b]$. □

De acordo com as definições do Capítulo 40, página 2009, a Proposição 16.8 diz-nos que $\mathcal{H}_r \equiv L^2\big([a,\ b],\ r(x)dx\big)$ é um espaço de Hilbert separável e que a família normal de polinômios trigonométricos ortonormais p_n forma um *conjunto ortonormal completo* em $\mathcal{H}_r$ (vide página 2024). Pelos Teoremas 40.6 e 40.7, páginas 2025 e 2027, respectivamente, vale para todo $g \in \mathcal{H}_r$

$$g \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle p_n,\ g\rangle_r\, p_n \tag{16.11}$$

e

$$\|g\|_r^2 \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\langle p_n,\ g\rangle_r\right|^2 \;, \tag{16.12}$$

sendo $\|g\|_r := \sqrt{\langle g,\ g\rangle_r}$ a norma de g em $\mathcal{H}_r$. A convergência da série em (16.11) se dá em relação à norma $\|\cdot\|_r$ de $\mathcal{H}_r$, ou seja, tem-se

$$\lim_{N\to\infty} \left\| g - \sum_{n=-N}^{N} \langle p_n,\ g\rangle_r\, p_n \right\|_r \;=\; 0 \,.$$

Naturalmente, o caso mais importante se dá com $[a,\ b] = [-\pi,\ \pi]$ e $r \equiv 1$, onde a família $e_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, $n \in \mathbb{Z}$, compõe, de acordo com nossos resultados de acima, um conjunto ortonormal completo em $L^2\big([-\pi,\ \pi],\ dx\big)$. Tal resultado é de fundamental importância para a teoria das séries de Fourier e o enunciado preciso é apresentado na forma do Teorema 38.14, página 1879.

16.4 Completeza das Funções de Bessel e Propriedades de seus Zeros

Trataremos na presente seção de estabelecer propriedades de completeza no espaço de Hilbert $L^2\big([0,\ 1],\ x\,dx\big)$ das funções de Bessel J_ν, sob diversas condições de contorno, e para $\nu \geq 0$. Vários dos resultados que apresentamos são também válidos para $-1 < \nu < 0$, mas os métodos são mais elaborados, particularmente no caso $-1 < \nu < -1/2$, e não fazem uso de resultados do problema de Sturm-Liouville e da teoria dos operadores compactos, nosso principal instrumento aqui. Vide referências em [337] (que trata apenas do caso $\nu > -1/2$). Para $\nu \leq -1$ as funções J_ν sequer são elementos desse espaço de Hilbert, exceto no caso trivial em que ν é um inteiro negativo, pois convenciona-se que $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$, $m \in \mathbb{Z}$. Obteremos também, no processo, certas propriedades dos zeros das funções $\beta_1 J_\nu(x) + \beta_2 x J'_\nu(x)$ para $x \in (0,\ \infty)$, onde β_1 e β_2 são constantes reais.

Usaremos a notação e os métodos empregados no capítulo sobre o problema de Sturm-Liouville regular, Capítulo 18, página 831, assim como diversos fatos sobre operadores compactos e de Hilbert-Schmidt, discutidos nas Seções 41.8 e 41.10, às páginas 2165 e 2204, respectivamente. Propriedades gerais das funções de Bessel, como relações de ortogonalidade, recorrência etc., foram tratadas na Seção 15.2.7, página 719.

O Teorema 16.1, página 757, reunirá os resultados que obteremos.

• **Notação para zeros de funções de Bessel**

Recordemos a notação que empregamos a respeito de zeros de funçõs de Bessel. Seja

$$\mathcal{Z}_\nu \ := \ \Big\{y > 0 \;\Big|\; J_\nu(y) = 0\Big\} \tag{16.13}$$

a coleção dos zeros reais e positivos da função J_ν. Como veremos, trata-se de um conjunto enumerável, de modo que escreveremos

$$\mathcal{Z}_\nu \ := \ \big\{\gamma_{\nu,\,k} > 0,\ k \in \mathbb{N}\big\} \ ,$$

que consideraremos como um conjunto ordenado em ordem crescente, ou seja, $\gamma_{\nu,\,k} < \gamma_{\nu,\,l}$ para $k < l$.

Para constantes reais β_1 e β_2, não simultaneamente nulas, definimos a função

$$J_\nu^{\beta_1, \beta_2}(y) \ := \ \beta_1 J_\nu(y) + \beta_2 y J'_\nu(y)$$

e denotamos o conjunto dos zeros reais positivos de $J_\nu^{\beta_1,\beta_2}(y)$ por $\mathcal{Z}_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}$:

$$\mathcal{Z}_\nu^{\beta_1,\,\beta_2} \ := \ \big\{y > 0,\ \beta_1 J_\nu(y) + \beta_2 y J'_\nu(y) \ = \ 0\big\} \ .$$

Como veremos que trata-se de um conjunto enumerável e, assim, vamos escrevê-lo também na forma

$$\mathcal{Z}_\nu^{\beta_1,\,\beta_2} \ := \ \Big\{\big(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\big)_k \ > \ 0 \ ,\ k \in \mathbb{N}\Big\}$$

e consideraremos esse conjunto como sendo ordenado em ordem crescente: $\big(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\big)_k < \big(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\big)_l$ para $k < l$.

Evidentemente, $\mathcal{Z}_\nu^{\beta_1,\,0} = \mathcal{Z}_\nu$ para qualquer β_1 real não-nulo e $\big(\gamma_\nu^{\beta_1,\,0}\big)_k = \gamma_{\nu,\,k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, também para qualquer β_1 real não-nulo. O conjunto $\mathcal{Z}_\nu^{0,\,\beta_2}$, com β_2 não nulo, coincide com o dos zeros da função $J'_\nu(y)$ na região $y \in (0,\ \infty)$. Comentamos também que caso $\beta_1 \neq 0$ tem-se evidentemente $\mathcal{Z}_\nu^{\beta_1,\,\beta_2} = \mathcal{Z}_\nu^{1,\,\beta_2/\beta_1}$ e se $\beta_2 \neq 0$ tem-se evidentemente $\mathcal{Z}_\nu^{\beta_1,\,\beta_2} = \mathcal{Z}_\nu^{\beta_1/\beta_2,\,1}$.

16.4.1 A Equação de Bessel como Problema de Sturm-Liouville

Vamos agora considerar a equação de Bessel sob condições de contorno que a transformem em um problema de Sturm-Liouville não-regular com o qual poderemos tratar do problema da completeza das autofunções usando resultados da teoria dos opradores de Hilbert-Schmidt. Trataremos aqui dos casos $\nu > 0$ e $\nu = 0$. Em cada um problema de Sturm-Liouville considerado é diferente e há, em cada um deles, subcasos especiais a se estudar separadamente, notadamente aqueles onde ocorrem autovalores nulos.

16.4.1.1 O Caso $\nu > 0$

Considere-se a equação de Bessel

$$x^2u''(x) + xu'(x) + \big(\alpha^2x^2 - \nu^2\big)u(x) \; = \; 0 \; , \tag{16.14}$$

onde tomamos $\nu > 0$ (o caso $\nu = 0$ será tratado posteriormente) $\alpha \in \mathbb{C}$ e x é restrito ao intervalo $[0, \ 1]$. No intervalo $(0, \ 1]$ essa equação pode ser escrita na forma de uma equação de Sturm-Liouville

$$Lu + \lambda ru \; = \; 0 \; , \tag{16.15}$$

sendo L o operador diferencial

$$L \; = \; \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$$

com as identificações

$$p(x) \; = \; x \; , \qquad q(x) \; = \; -\frac{\nu^2}{x} \; , \qquad r(x) \; = \; x \; , \qquad \lambda \; = \; \alpha^2 \; .$$

Consideremos o problema de determinar a solução de (16.14) no intervalo $[0, \ 1]$ sujeita às condições de contorno

$$u(0) \; = \; 0 \qquad \text{e} \qquad \beta_1 u(1) + \beta_2 u'(1) \; = \; 0 \; ,$$

com β_1 e β_2 sendo constantes reais não simultaneamente nulas. Pelo dito acima, trata-se claramente de um problema de Sturm-Liouville não-regular (pois p e r não são estritamente positivas em $[0, \ 1]$). Apesar de não-regular esse problema pode ser tratado de forma muito similar a problemas regulares (discutidos no Capítulo 18, página 831). Aqui, será particularmente relevante obter sua equação integral de Fredholm correspondente.

Como bem sabemos, para $\nu > 0$ a solução desse problema é dada por

$$u(x) \; = \; J_\nu(\alpha x) \; ,$$

sendo α um zero da função $J_\nu^{\beta_1, \beta_2}(y) = \beta_1 J_\nu(y) + \beta_2 y J'_\nu(y)$ na região $y \in (0, \ \infty)$, ou seja, $\alpha \in \mathcal{Z}_\nu^{\beta_1, \, \beta_2}$.

Vamos determinar a função de Green associada ao operador L sob as condições de contormo de acima. Segundo o que sabemos do Capítulo 18, página 831, essa função de Green é determinada pelas soluções v_1 e v_2 dos problemas (definidos em $(0, \ 1]$), respectivamente,

$$Lv_1 \; = \; 0 \qquad \text{com} \qquad v_1(0) \; = \; 0$$

e

$$Lv_2 \; = \; 0 \qquad \text{com} \qquad \beta_1 v_2(1) + \beta_2 v_2'(1) \; = \; 0 \; .$$

A equação $Lv = 0$ é a equação de Euler

$$x^2v''(x) + xv'(x) - \nu^2 v(x) \; = \; 0 \; . \tag{16.16}$$

Trataremos primeiramente do caso $\nu > 0$, deixando o caso $\nu = 0$ para a Seção 16.4.1.3.

No caso $\nu > 0$ a solução da equação de Euler (16.16) é obtida tomando-se o Ansatz $v(x) = x^\gamma$ e constatando-se que $\gamma = \pm\nu$ (verifique!), o que fornece duas soluções independentes, sendo a solução geral em $(0, \ 1]$ dada por

$$v(x) \; = \; Cx^\nu + Dx^{-\nu} \; ,$$

com C e D constantes arbitrárias. Obtemos disso que

$$v_1(x) \; = \; C_1 x^\nu$$

e

$$v_2(x) \; = \; \begin{cases} C_2\Big(x^\nu - \tau x^{-\nu}\Big) \; , & \text{caso} \quad \beta_1 + \nu\beta_2 \; \neq \; 0 \;\text{ e }\; \beta_1 - \nu\beta_2 \; \neq \; 0 \; , \\[2ex] D_2 x^{-\nu} \; , & \text{caso} \quad \beta_1 + \nu\beta_2 \; \neq \; 0 \quad\text{e}\quad \beta_1 - \nu\beta_2 \; = \; 0 \; , \text{ ou seja, } \beta_1 \; = \; \nu\beta_2 \; \neq \; 0 \; , \\[2ex] C_2 x^\nu \; , & \text{caso} \quad \beta_1 + \nu\beta_2 \; = \; 0 \quad\text{e}\quad \beta_1 - \nu\beta_2 \; \neq \; 0 \; , \text{ ou seja, } \beta_1 \; = \; -\nu\beta_2 \; \neq \; 0 \; , \end{cases}$$

sendo $\tau := (\beta_1 + \nu\beta_2)/(\beta_1 - \nu\beta_2)$ e C_2 e D_2 sendo constantes arbitrárias.

Nota. O caso em que $\beta_1 + \nu\beta_2 = 0$ e $\beta_1 - \nu\beta_2 = 0$ não foi incluido pela seguinte razão: para $\nu > 0$ essas duas condições implicam $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 0$, situação trivial que já excluimos de início. ♣

Com isso, o Wronskiano $W(x) := v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x)$ é dado por

$$W(x) = \begin{cases} 2C_1C_2\nu\tau\, x^{-1} , & \text{caso} \quad \beta_1 + \nu\beta_2 \neq 0 \ \text{ e } \ \beta_1 - \nu\beta_2 \neq 0 , \\ -2C_1D_2\nu\, x^{-1} , & \text{caso} \quad \beta_1 = \nu\beta_2 \neq 0 , \\ 0 , & \text{caso} \quad \beta_1 = -\nu\beta_2 \neq 0 . \end{cases}$$

Note-se que, para $\beta_1+\nu\beta_2 \neq 0$ e $\beta_1-\nu\beta_2 \neq 0$, o Wronskiano é não-nulo e, portanto, as soluções v_1 e v_2 são linearmente independentes.

Como se vê o caso $\beta_1 = -\nu\beta_2 \neq 0$ é problemático e será tratado em separado na Seção 16.4.1.2, página 754.

Nos demais casos temos $\beta_1 + \nu\beta_2 \neq 0$ e podemos expressar a função de Green de L sob as condições de contorno em questão. Ela será dada, segundo (18.38), página 839, por (verifique!)

$$G(x, y) = \frac{1}{2\nu\tau} \times \begin{cases} (xy)^\nu - \tau\left(\frac{x}{y}\right)^\nu , & \text{para } 0 < x \leq y \leq 1 , \\ (xy)^\nu - \tau\left(\frac{y}{x}\right)^\nu , & \text{para } 0 < y \leq x \leq 1 , \end{cases} \qquad (\text{caso } \beta_1 - \nu\beta_2 \neq 0) \tag{16.17}$$

e

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\nu} \times \begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^\nu , & \text{para } 0 < x \leq y \leq 1 , \\ \left(\frac{y}{x}\right)^\nu , & \text{para } 0 < y \leq x \leq 1 , \end{cases} \qquad (\text{caso } \beta_1 = \nu\beta_2 \neq 0) . \tag{16.18}$$

Note que (16.18) pode ser obtida formalmente de (16.17) tomando-se o limite $|\tau| \to \infty$. Isso é consistente com o fato que τ diverge para $\beta_1 - \nu\beta_2 \to 0$.

• Positividade dos autovalores

Sob a luz da Proposição 18.5, página 850, e levando em conta que no caso aqui considerado $q(x) = -\nu^2/x < 0$ no intervalo $(0,\ 1]$ e $\alpha_2 = 0$ (que implica $\alpha_1\alpha_2 \leq 0$), podemos afirmar que nas situações em que $\beta_1 = 0$, ou $\beta_2 = 0$, ou $\beta_1 - \nu\beta_2 = 0$ (que implica $\beta_1\beta_2 = \nu\beta_2^2 \geq 0$), os autovalores do problema de Sturm-Liouville associado à equação de Bessel são todos positivos. No caso em que $\beta_1 - \nu\beta_2 \neq 0$ a positividade estará assegurada se $\beta_1\beta_2 \geq 0$.

• Compacidade do operador de Fredholm

A equação integral de Fredholm equivalente ao problema de Sturm-Liouville que estamos considerando será, portanto (vide Seção 18.3.2, página 852),

$$Ku = \frac{1}{\lambda}u ,$$

com K sendo o operador integral

$$\big(Ku\big)(x) := \int_0^1 k(x,\ y)\, u(y)\, dy \qquad \text{para } k(x,\ y) := -G(x,\ y)r(y) .$$

Por (18.94), página 853, sabemos que K é simétrico no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_r := L^2\big([0,\ 1],\ xdx\big)$.

Como $0 < \frac{x}{y} \leq 1$ na região $0 < x \leq y \leq 1$ e também $0 < \frac{y}{x} \leq 1$ na região $0 < y \leq x \leq 1$, concluimos facilmente que G é limitada e contínua no quadrado semiaberto $(0,\ 1] \times (0,\ 1]$. É fácil ver que G é igualmente limitada e contínua no quadrado fechado $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$. Segue disso que k é limitada e contínua no quadrado fechado $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$. Logo, k satisfaz a condição de Hilbert-Schmidt

$$\int_0^1 \int_0^1 \big|k(x,\ y)\big|^2 xydxdy \leq \infty . \tag{16.19}$$

Pelo Teorema 41.48, página 2222, isso estabelece que K é um operador de Hilbert-Schmidt no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_r := L^2\big([0,\ 1],\ xdx\big)$ e, portanto (pelo Teorema 41.98, página 2222), K é compacto no mesmo espaço de Hilbert. Como K é simétrico, vemos que é também autoadjunto.

As implicações desses fatos foram apresentadas quando de nossa discussão sobre operadores compactos autoadjuntos: os autovelores λ são reais, enumeráveis, finitamente degenerados e o conjunto $\{1/\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ possui apenas 0 como ponto de acumulação. Em verdade, por se tratar de um problema de Sturm-Liouville, cada autovalor é simplesmente degenerado (vide Seção 18.3.1.1, página 845). Apenas um subconjunto finito de autovalores pode ser negativo. Se u_k denota a autofunção associada ao autovalor λ_k, $k \in \mathbb{N}$, então $\{u_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortogonal em $\mathcal{H}_r = L^2\big([0,\ 1],\ x\,dx\big)$. Essas autofunções são dadas por $u_k(x) := J_\nu\big(\gamma_{\nu,\,k}x\big)$, com $k \in \mathbb{N}$, onde $\gamma_{\nu,\,k}$ é o k-ésimo positivo de $\beta_1 J_\nu(y) + \beta_2 y J'_\nu(y)$, ou seja, $\gamma_{\nu,\,k} \in \mathcal{Z}_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}$. Os autovalores λ_k são dados por $\lambda_k = \big(\gamma_{\nu,\,k}\big)^2$. O conjunto $\Big\{u_k/\|u_k\|_{\mathcal{H}_r},\ k \in \mathbb{N}\Big\}$ é um conjunto ortonormal completo em $L^2\big([0,\ 1],\ x\,dx\big)$. Comentaremos sobre os fatores de normalização $\|u_k\|_{\mathcal{H}_r}$ mais adiante.

16.4.1.2 O Caso $\nu > 0$ com $\beta_1 = -\nu\beta_2 \neq 0$

No caso $\nu > 0$ com $\beta_1 = -\nu\beta_2 \neq 0$, o problema de Sturm-Liouville consiste em encontrar soluções de (16.14) sob as codições de contorno

$$u(0) \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad \nu u(1) - u'(1) \;=\; 0\;.$$

Este é um problema degenerado pois, como vimos, o Wronskiano das funções v_1 e v_2 é nulo. A razão por trás dessa degenerescência é o fato de que aqui o problema de Sturm-Liouville admite autovalor nulo, com a correspondente autofunção sendo a função x^ν (verifique essa afirmação!).

A solução com autovalores não-nulos é $u(x) = J_\nu(\alpha x)$, com α pertencente a $\mathcal{Z}_{\nu+1}^{1,\,0}$, o conjunto dos zeros positivos de $J_{\nu+1}$. De fato, sabemos que $J_\nu(\alpha x)$ satisfaz (16.14) e, como $\frac{d}{dx}\big(x^{-\nu}J_\nu(x)\big) = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$ (vide (15.164), página 722), temos $\nu J_\nu(x) - xJ'_\nu(x) = xJ_{\nu+1}(x)$. Assim, vale também $u(0) = J_\nu(0) = 0$ e

$$\nu u(1) - u'(1) = \nu J_\nu(\alpha) - \alpha J'_\nu(\alpha) \;=\; \alpha J_{\nu+1}(\alpha) \;=\; 0$$

se $\alpha \in \mathcal{Z}_{\nu+1}^{1,\,0}$. Já sabemos que $\mathcal{Z}_{\nu+1}^{1,\,0}$ é um conjunto enumerável, que escrevemos como $\mathcal{Z}_{\nu+1}^{1,\,0} = \Big\{\big(\gamma_{\nu+1}^{1,\,0}\big)_k \equiv \gamma_{\nu+1,\,k},\ k \in \mathbb{N}\Big\}$, e sabemos que o conjunto das inversas $\{1/\gamma_{\nu+1,\,k},\ k \in \mathbb{N}\}$ possui apenas o zero como ponto de acumulação. Denotemos $u_k(x) := J_0(\gamma_{\nu+1,\,k}x)$, $k \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que o complemento ortogonal do conjunto $\{u_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ em $\mathcal{H}_r = L^2\big([0,\ 1],\ xdx\big)$ é o subespaço unidimensional das funções x^ν. De fato, seja f contínua com derivada contínua. Usando o fato que $y^{\nu+1}J_\nu(y) = \frac{d}{dy}\big(y^{\nu+1}J_{\nu+1}(y)\big)$ (vide (15.163), página 722)), temos,

$$\big\langle f,\ u_k\big\rangle_{\mathcal{H}_r} \;=\; \int_0^1 f(x)\,J_\nu(\gamma_{\nu+1,\,k}x)\,x\,dx \;\stackrel{y=\gamma_{\nu+1,\,k}x}{=}\; \frac{1}{\big(\gamma_{\nu+1,\,k}\big)^2}\int_0^{\gamma_{\nu+1,\,k}} y^{-\nu}f\big(y/\gamma_{\nu+1,\,k}\big)\,\big(y^{\nu+1}J_\nu(y)\big)\,dy$$

$$\stackrel{(15.163)}{=}\; \frac{1}{\big(\gamma_{\nu+1,\,k}\big)^2}\int_0^{\gamma_{\nu+1,\,k}} y^{-\nu}f\big(y/\gamma_{\nu+1,\,k}\big)\,\big(y^{\nu+1}J_{\nu+1}(y)\big)'\,dy$$

$$=\; \frac{1}{\big(\gamma_{\nu+1,\,k}\big)^2}\left[\underbrace{f\big(y/\gamma_{\nu+1,\,k}\big)\,\big(yJ_{\nu+1}(y)\big)\Big|_0^{\gamma_{\nu+1,\,k}}}_{=0} - \int_0^{\gamma_{\nu+1,\,k}} y^\nu\frac{d}{dy}\Big(y^{-\nu}f\big(y/\gamma_{\nu+1,\,k}\big)\Big)\,J_{\nu+1}(y)\,y\,dy\right]$$

$$\stackrel{x=y/\gamma_{\nu+1,\,k}}{=}\; -\frac{1}{\gamma_{\nu+1,\,k}}\int_0^1 x^\nu\frac{d}{dx}\Big(x^{-\nu}f\big(x\big)\Big)\,J_{\nu+1}\big(\gamma_{\nu+1,\,k}x\big)\,x\,dx \;=\; -\frac{1}{\gamma_{\nu+1,\,k}}\big\langle h,\ v_k\big\rangle_{\mathcal{H}_r}\,,$$

com $h(x) := x^\nu\frac{d}{dx}\Big(x^{-\nu}f\big(x\big)\Big)$ com $v_k(x) := J_{\nu+1}\big(\gamma_{\nu+1,\,k}x\big)$. Logo, a condição $\big\langle f,\ u_k\big\rangle_{\mathcal{H}_r} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ é válida se e somente se $\big\langle h,\ v_k\big\rangle_{\mathcal{H}_r} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sabemos (pelos resultados anteriores do $\nu > 0$ para as condições de contorno $u(0) = 0$ e $u(1) = 0$) que $\big\{v_k/\|v_k\|_{\mathcal{H}_r},\ k \in \mathbb{N}\big\}$ é um conjunto ortogonal completo. Logo, a condição

$\langle f, \; u_k \rangle_{\mathcal{H}_r} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ implica que $h = 0$, que por sua vez implica $f(x) = \kappa x^\nu$, onde κ é constante. Denotando $u_0(x) := x^\nu$, que tem norma $\|u_0\|_{\mathcal{H}_r} = 1/\sqrt{2(\nu + 1)}$ em $\mathcal{H}_r$ (verifique!), segue que

$$\Big\{ u_0/\|u_0\|_{\mathcal{H}_r} \Big\} \bigcup \Big\{ u_k/\|u_k\|_{\mathcal{H}_r}, \; k \in \mathbb{N} \Big\}$$

é um conjunto ortonormal completo em $L^2\big([0, \; 1], \; xdx\big)$. Essas funções formam um conjunto ortonormal, pois são autofunções associadas a autovalores distintos problema de Sturm-Liouville.

16.4.1.3 O Caso $\nu = 0$

A relação (15.159), página 721, diz-nos que $xJ_0(x) = J_1(x) + xJ_1'(x) = J_\nu^{1,1}(x)$, que nos ensina que $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z}_1^{1,\,1}$.

Para obtermos mais informações sobre a função de Bessel J_0 e suas relações de completeza seguirmos uma estratégia similar à do caso $\nu > 0$. Consideremos o problema de Sturm-Liouville que consiste em encontrar soluções da equação de Bessel de ordem 0: $x^2 u''(x) + xu'(x) + \alpha^2 x^2 u(x) = 0$, ou seja,

$$xu''(x) + u'(x) + \alpha^2 xu(x) \; = \; 0 \; , \tag{16.20}$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}$ e x é restrito ao intervalo $[0, \; 1]$. No intervalo $(0, \; 1]$ essa equação pode ser escrita na forma de uma equação de Sturm-Liouville

$$Lu + \lambda ru \; = \; 0 \; , \tag{16.21}$$

sendo L o operador diferencial $L = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$ com as identificações

$$p(x) \; = \; x \; , \qquad q(x) \; = \; 0 \; , \qquad r(x) \; = \; x \; , \qquad \lambda \; = \; \alpha^2 \; .$$

Aqui, as condições de contorno a serem consideradas para as soluções de (16.20) no intervalo $[0, \; 1]$ são

$$u'(0) \; = \; 0 \qquad \text{e} \qquad \beta_1 u(1) + \beta_2 u'(1) \; = \; 0 \; ,$$

com β_1 e β_2 sendo constantes reais não simultaneamente nulas.

Como antes, trata-se claramente de um problema de Sturm-Liouville não-regular (pois p e r não são estritamente positivas em $[0, \; 1]$). Há três casos a se considerar: 1º caso $\beta_1 \neq 0$ e $\beta_2 = 0$; 2º caso $\beta_1 \neq 0$ e $\beta_2 \neq 0$; 3º caso $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 \neq 0$.

1. Caso $\beta_1 \neq 0$ e $\beta_2 = 0$. Nesse caso o problema envolve encontrar soluções de (16.20) sob as codições de contorno

$$u'(0) \; = \; 0 \qquad \text{e} \qquad u(1) \; = \; 0 \; .$$

A solução é dada pelas funções $J_0(\gamma_{0,\,k}x)$, $k \in \mathbb{N}$, com $\gamma_{0,\,k} \in \mathcal{Z}_0$, ou seja, com $\gamma_{0,\,k}$ sendo o k-ésimo zero (em ordem crescente) de J_0 em $(0, \; \infty)$. (Lembrar que $J_0'(0) = 0$, pois $J_0'(x) = -J_1(x)$).

Como no caso $\nu > 0$, podemos determinar a função de Green associada ao operador L sob as condições de contorno acima se determinarmos as funções v_1 e v_2 soluções de

$$Lv_1 \; = \; 0 \qquad \text{com} \qquad v_1'(0) \; = \; 0 \qquad \text{e} \qquad Lv_2 \; = \; 0 \qquad \text{com} \qquad v_2(1) \; = \; 0 \; .$$

É um exercício elementar obter que a solução geral de $Lv = 0$ é agora $v(x) = C\ln(x) + D$, onde C e D são constantes. Com isso, é elementar obter-se

$$v_1(x) \; = \; D_1 \qquad \text{e} \qquad v_2(x) \; = \; C_2 \ln(x) \; ,$$

com D_1 e C_2 sendo constantes arbitrárias. O determinante Wronskiano dessas duas funções é $W(x) = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x) = D_1/x$. Com isso, e novamente com uso de (18.38), página 839, obtemos a seguinte expressão para a função de Green:

$$G(x, \; y) \; := \; \begin{cases} \ln(y) \; , & \text{para} \;\; 0 < x \leq y \leq 1 \; , \\ \\ \ln(x) \; , & \text{para} \;\; 0 < y \leq x \leq 1 \; . \end{cases} \tag{16.22}$$

A equação integral de Fredholm equivalente ao problema de Sturm-Liouville que estamos considerando será, portanto (vide Seção 18.3.2, página 852), $Ku = \frac{1}{\lambda}u$, com K sendo o operador integral

$$\big(Ku\big)(x) := \int_0^1 k(x,\ y)\, u(y)\, dy \qquad \text{para} \ \ k(x,\ y) := -G(x,\ y)r(y) .$$

Como a função $s\ln(s)$ contínua e limitada no intervalo $(0,\ 1]$, segue facilmente que k satisfaz a condição de Hilbert-Schmidt (16.19). Pelo Teorema 41.48, página 2222, isso estabelece que K é um operador de Hilbert-Schmidt no espaço de Hilbert $L^2\big([0,\ 1],\ xdx\big)$, portanto (Teorema 41.98, página 2222), é compacto no mesmo espaço de Hilbert.

2. Caso $\beta_1 \neq 0$ **e** $\beta_2 \neq 0$**.** Nesse caso o problema envolve encontrar soluções de (16.20) sob as codições de contorno

$$u'(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \beta_1 u(1) + \beta_2 u'(1) = 0 .$$

A solução é dada pelas funções $J_0(\gamma x)$, com γ sendo um zero de $\beta_1 J_0(x) + \beta_2 x J_0'(x)$.

Como antes, a função de Green associada ao operador L sob as condições de contorno acima é determinada pelas funções v_1 e v_2, soluções de

$$Lv_1 = 0 \qquad \text{com} \qquad v_1'(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad Lv_2 = 0 \qquad \text{com} \qquad \beta_1 v_2(1) + \beta_2 v_2'(1) = 0 ,$$

respectivamente. É elementar constatar que

$$v_1(x) = C_1 \qquad \text{e} \qquad v_2(x) = C_2\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\ln(x)\right) ,$$

com C_1 e C_2 sendo constantes. O determinante Wronskiano dessas duas funções é $W(x) = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x) = -C_1C_2\frac{\beta_1}{\beta_2}\frac{1}{x}$. Com isso, e novamente com uso de (18.38), página 839, obtemos a seguinte expressão para a função e Green:

$$G(x,\ y) := \begin{cases} \ln(y) - \dfrac{\beta_2}{\beta_1} , & \text{para } \ 0 < x \leq y \leq 1 , \\[2mm] \ln(x) - \dfrac{\beta_2}{\beta_1} , & \text{para } \ 0 < y \leq x \leq 1 . \end{cases} \tag{16.23}$$

A equação integral de Fredholm equivalente ao problema de Sturm-Liouville que estamos considerando será, portanto (vide Seção 18.3.2, página 852), $Ku = \frac{1}{\lambda}u$, com K sendo o operador integral

$$\big(Ku\big)(x) := \int_0^1 k(x,\ y)\, u(y)\, dy \qquad \text{para} \ \ k(x,\ y) := -G(x,\ y)r(y) .$$

Novamente, nossa conclusão é a mesma: como a função $s\ln(s)$ contínua e limitada no intervalo $(0,\ 1]$, segue facilmente que k satisfaz a condição de Hilbert-Schmidt (16.19). Portanto, pelos mesmos teoremas evocados anteriormente, segue que K é um operador de Hilbert-Schmidt no espaço de Hilbert $L^2\big([0,\ 1],\ xdx\big)$ e, portanto, é compacto no mesmo espaço de Hilbert.

3. Caso $\beta_1 = 0$ **e** $\beta_2 \neq 0$**.** Nesse caso o problema de Sturm-Liouville envolve encontrar soluções de (16.20) sob as codições de contorno

$$u'(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad u'(1) = 0 .$$

Este é um caso degenerado, pois ambas as funções v_1 e v_2 são constantes e, portanto, seu Wronskiano é nulo. A razão por trás dessa degenerescência é o fato de que o problema de Sturm-Liouville correspondente admite autovalor nulo, com a correspondente autofunção sendo uma constante arbitrária (verifique essa afirmação!).

A solução com autovalores não-nulos é $u(x) = J_0(\alpha x)$, com α pertencente a $\mathcal{Z}_1$, o conjunto dos zeros positivos de J_1. De fato, sabemos que J_0 satisfaz (16.20) e, como $J_0'(x) = -J_1(x)$ (vide (15.158), página 721), vale também $u'(0) = -\alpha J_1(0) = 0$ e $u'(1) = -\alpha J_1(\alpha) = 0$, caso $\alpha \in \mathcal{Z}_1$. Já sabemos que $\mathcal{Z}_1$ é um conjunto enumerável, que escrevemos como $\mathcal{Z}_1 = \{\gamma_{1,\,k},\ k \in \mathbb{N}\}$ e sabemos que o conjunto das inversas $\{1/\gamma_{1,\,k},\ k \in \mathbb{N}\}$ possui apenas o zero como ponto de acumulação. Denotemos $u_k(x) := J_0(\gamma_{1,\,k}x)$, $k \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que o complemento ortogonal do conjunto $\{u_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ em $\mathcal{H}_r = L^2\big([0,\ 1],\ xdx\big)$ é o subespaço unidimensional das funções constantes. De fato, seja f contínua com derivada contínua. Temos,

$$\big\langle f,\ u_k\big\rangle_{\mathcal{H}_r} \;=\; \int_0^1 f(x)\,J_0(\gamma_{1,\,k}x)\,x\,dx \overset{y=\gamma_{1,\,k}x}{=} \frac{1}{\big(\gamma_{1,\,k}\big)^2}\int_0^{\gamma_{1,\,k}} f\big(y/\gamma_{1,\,k}\big)\,\big(yJ_0(y)\big)\,dy$$

$$\overset{(15.159)}{=} \frac{1}{\big(\gamma_{1,\,k}\big)^2}\int_0^{\gamma_{1,\,k}} f\big(y/\gamma_{1,\,k}\big)\,\big(yJ_1(y)\big)'\,dy \;=\; \underbrace{f\big(y/\gamma_{1,\,k}\big)\,\big(yJ_1(y)\big)\Big|_0^{\gamma_{1,\,k}}}_{=0} - \frac{1}{\big(\gamma_{1,\,k}\big)^3}\int_0^{\gamma_{1,\,k}} f'\big(y/\gamma_{1,\,k}\big)\,J_1(y)\,y\,dy$$

$$\overset{x=y/\gamma_{1,\,k}}{=} -\frac{1}{\gamma_{1,\,k}}\int_0^1 f'(x)\,J_1\big(\gamma_{1,\,k}x\big)\,x\,dx \;=\; -\frac{1}{\gamma_{1,\,k}}\big\langle f',\ v_k\big\rangle_{\mathcal{H}_r}\,,$$

com $v_k(x) := J_1\big(\gamma_{1,\,k}x\big)$. Logo, a condição $\big\langle f,\ u_k\big\rangle_{\mathcal{H}_r} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ é válida se e somente se $\big\langle f',\ v_k\big\rangle_{\mathcal{H}_r} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sabemos (da análise do caso $\nu > 0$ para as condições de contorno $u(0) = 0$ e $u(1) = 0$) que $\big\{v_k/\|v_k\|_{\mathcal{H}_r},\ k \in \mathbb{N}\big\}$ é um conjunto ortogonal completo em $\mathcal{H}_r$. Logo, a condição $\big\langle f,\ u_k\big\rangle_{\mathcal{H}_r} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ implica que $f' = 0$, ou seja, implica que f é constante. Denotando por u_0 a função constante igual a 1, a qual tem norma $1/sqrt2$ em $\mathcal{H}_r$, segue que

$$\Big\{u_0/\|u_0\|_{\mathcal{H}_r}\Big\}\bigcup\Big\{u_k/\|u_k\|_{\mathcal{H}_r},\ k \in \mathbb{N}\Big\}$$

é um conjunto ortonormal completo em $L^2\big([0,\ 1],\ xdx\big)$. Essas funções formam um conjunto ortonormal, pois são autofunções associadas a autovalores distintos de um problema de Sturm-Liouville.

16.4.2 Conclusões Sobre a Completeza das Funções de Bessel e Propriedades de seus Zeros

Vamos agora reunir todos os resultados desta seção em um único teorema, incluindo também resultados já demonstrados no Teorema 15.7, página 732.

Para $(\beta_1,\ \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ com $(\beta_1,\ \beta_2) \neq (0,\ 0)$ seja $J_\nu^{\beta_1,\beta_2}(x) := \beta_1 J_\nu(xy) + \beta_2 x J_\nu'(x)$ e seja $\mathcal{Z}_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}$ o conjunto de seus zeros reais positivos: $\mathcal{Z}_\nu^{\beta_1,\,\beta_2} := \Big\{y > 0 | \beta_1 J_\nu(y) + \beta_2 y J_\nu'(y) = 0\Big\}$.

Teorema 16.1 *Então, para todo $\nu \geq 0$ e todo $(\beta_1,\ \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ com $(\beta_1,\ \beta_2) \neq (0,\ 0)$ o conjunto $\mathcal{Z}_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}$ é enumerável e, portanto, pode ser escrito na forma $\mathcal{Z}_\nu^{\beta_1,\,\beta_2} = \Big\{\big(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\big)_k,\ k \in \mathbb{N}\Big\}$ com os zeros $\big(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\big)_k$, que são todos simples, ordenados de forma crescente: $\big(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\big)_k < \big(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\big)_l$ para todos $k < l$.*

O conjunto das inversas $\Big\{1/\big(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\big)_k,\ k \in \mathbb{N}\Big\}$ possui apenas 0 como ponto de acumulação e os números $1/\big(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\big)_k^2$, $k \in \mathbb{N}$, são autovalores simples de um operador integral de Fredholm, que vem a ser um operador de Hilbert-Schmidt. Portanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\big(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\big)_k^4} \;<\; 0\,. \tag{16.24}$$

Essa relação é um indicativo de como os zeros $\big(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\big)_k$ crescem quando $k \to \infty$.

Para cada $\nu \geq 0$ e cada par $(\beta_1,\ \beta_2)$ como acima, defina-se

$$U_{\nu,\,k}^{\beta_1,\,\beta_2}(x) \;:=\; \frac{J_\nu\Big(\big(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\big)_k\,x\Big)}{N_{\nu,\,k}^{\beta_1,\,\beta_2}}\,,$$

para $k \in \mathbb{N}$*, onde,*

$$N_{\nu,\,k}^{\beta_1,\,\beta_2} := \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(J_\nu'\left(\left(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\right)_k\right)\right)^2 + \left(1-\frac{\nu^2}{\left(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\right)_k^2}\right)\left(J_\nu\left(\left(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\right)_k\right)\right)^2\right]} \tag{16.25}$$

$$\overset{(15.165),\,(15.168)}{=} \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(J_\nu\left(\left(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\right)_k\right)\right)^2 - J_{\nu-1}\left(\left(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\right)_k\right)J_{\nu+1}\left(\left(\gamma_\nu^{\beta_1,\,\beta_2}\right)_k\right)\right]}\,. \tag{16.26}$$

De acordo com (15.211), página 732, são vetores unitários no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_r := L^2\big([0,\,1],\ x\,dx\big)$*:* $\left\|U_{\nu,\,k}^{\beta_1,\,\beta_2}\right\|_{\mathcal{H}_r} = 1$*. Então, valem ainda as seguintes afirmações sobre a completeza das autofunções* $U_{\nu,\,k}^{\beta_1,\,\beta_2}$*.*

1. *Para* $\nu > 0$ *e* $\beta_1 + \nu\beta_2 \neq 0$*, o conjunto* $\left\{U_{\nu,\,k}^{\beta_1,\,\beta_2},\ k \in \mathbb{N}\right\}$*, é um conjunto ortonormal completo em* $L^2\big([0,\,1],\ xdx\big)$*.*
2. *Para* $\nu > 0$ *e* $\beta_1 = -\nu\beta_2 \neq 0$ *(em cujo caso podemos adotar, sem perda de generalidade,* $\beta_2 = 1$*), o conjunto* $\left\{U_{\nu,\,0}^{-\nu,\,1}\right\} \bigcup \left\{U_{\nu,\,k}^{-\nu,\,1},\ k \in \mathbb{N}\right\}$*, onde* $U_{\nu,\,0}^{-\nu,\,1}(x) := \sqrt{2(\nu+1)}x^\nu$*, é um conjunto ortonormal completo em* $L^2\big([0,\,1],\ xdx\big)$*.*
3. *Para* $\nu = 0$ *e* $\beta_1 \neq 0$*, o conjunto* $\left\{U_{0,\,k}^{\beta_1,\,\beta_2},\ k \in \mathbb{N}\right\}$*, é um conjunto ortonormal completo em* $L^2\big([0,\,1],\ xdx\big)$*.*
4. *Para* $\nu = 0$ *e* $\beta_1 = 0$ *e* $\beta_2 \neq 0$ *(em cujo caso podemos adotar, sem perda de generalidade,* $\beta_2 = 1$*), o conjunto* $\left\{U_{0,\,0}^{0,\,1}\right\} \bigcup \left\{U_{0,\,k}^{0,\,1},\ k \in \mathbb{N}\right\}$*, onde* $U_{0,\,0}^{0,\,1}(x) := \sqrt{2}$*, é um conjunto ortonormal completo em* $L^2\big([0,\,1],\ xdx\big)$*.*

□