Capítulo 18
Rudimentos da Teoria das Equações a Derivadas Parciais

Sumário

18.1 Definições, Notações e Alguns Exemplos . . . 1069
18.2 Algumas Classificações de Equações a Derivadas Parciais . . . 1078
18.2.1 Equações Lineares, Não lineares, Semilineares e Quaselineares . . . 1078
18.2.2 Classificação de Equações de Segunda Ordem. Equações Parabólicas, Elípticas e Hiperbólicas 1080
18.3 O Método de Separação de Variáveis . . . 1083
18.3.1 O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Lineares . . . 1084
18.3.2 O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Não Lineares . . . 1087
18.4 Problemas de Cauchy e Superfícies Características. Definições e Exemplos Básicos . . . 1089
18.5 O Método das Características . . . 1095
18.5.1 Exemplos de Aplicação do Método das Características . . . 1100
18.5.2 Características. Comentários Adicionais . . . 1111
18.5.3 Sistemas de Equações Quaselineares de Primeira Ordem . . . 1112
18.5.3.1 Generalidades Sobre Problemas de Condição Inicial em Sistemas Quaselineares de Primeira Ordem . . . 1117
18.5.3.2 Sistemas Hiperbólicos Semilineares de Primeira Ordem em Duas Variáveis . . . 1120
18.5.3.3 Soluções Ditas Simples de Sistemas Quaselineares, Homogêneos, de Primeira Ordem em Duas Variáveis . . . 1123
18.6 Alguns Teoremas de Unicidade de Soluções de Equações a Derivadas Parciais . . . 1126
18.6.1 Casos Simples. Discussão Preliminar . . . 1126
18.6.2 Unicidade de Solução para as Equações de Laplace e Poisson . . . 1130
18.6.3 Unicidade de Soluções. Generalizações . . . 1132
18.7 Condições de Compatibilidade em Sistemas Sobredeterminados . . . 1139
18.8 Exercícios Adicionais . . . 1144

Neste capítulo apresentaremos uma breve introdução à teoria das equações a derivadas parciais. Serão apresentados alguns métodos de resolução mais comummente empregados e alguns teoremas de unicidade de solução de importância na justificativa daqueles métodos. Assim como as equações diferenciais ordinárias, introduzidas no Capítulo 12, página 792, equações a derivadas parciais são de grande importância nas Ciências Naturais por expressarem leis físicas. Ainda que tenham se desenvolvido em paralelo, a teoria das equações diferenciais ordinárias distingue-se um tanto da teoria das equações a derivadas parciais, pois na segunda menos resultados gerais são conhecidos e os métodos de resolução e de análise qualitativa são mais intrincados e limitados em escopo. Por exemplo, não existem na teoria das equações a derivadas parciais resultados sobre existência e unicidade de solução que sejam tão gerais quanto os Teoremas de Peano e de Picard-Lindelöf, válidos para equações diferenciais ordinárias (vide Teorema 12.1, página 810 e Teorema 12.2, página 811). Uma outra observação geral que deve ser feita sobre a teoria das equações a derivadas parciais é que nem sempre encontram-se resultados válidos para equações de ordem arbitrária com um número arbitrário de variáveis. Há mais resultados, e mais fortes, sobre equações envolvendo duas variáveis que mais de duas variáveis e, igualmente, há mais e mais fortes resultados sobre equações de ordem um ou dois que para equações de ordem três ou mais.

Alguns métodos de resolução de equações a derivadas parciais, como o método de separação de variáveis e o método das características, envolvem a resolução de equações diferenciais ordinárias e vamos nos dedicar a eles aqui. Nosso propósito neste capítulo é apresentar primordialmente ideias da teoria geral das equações a derivadas parciais. O capítulo 46, página 2722, é dedicado a exemplos de aplicações de métodos específicos de resolução e sua leitura complementa a deste capítulo de maneira essencial.

A Seção 18.6, página 1126, dedica-se a alguns teoremas de unicidade de solução, os quais são evocados nos exemplos do Capítulo 46. A leitura da Seção 18.6 dispensa a leitura das seções precedentes.

Há uma vasta literatura sobre equações a derivadas parciais e nossas pretensões no presente capítulo são infimamente modestas. Para um estudo mais completo recomendamos [133, 134], [308], [496], [223], [185], [590], [198], [320].

O emprego de equações diferenciais parciais na Física teve início com a obra de D'Alembert[1] sobre as causas dos ventos, sobre o movimento da corda vibrante e, em especial, sobre hidrodinâmica. Vide [487], cap. 5 e [139].

18.1 Definições, Notações e Alguns Exemplos

• **Notação de multi-índices e diversas outras notações**

Devido à frequente ocorrência de derivadas parciais mistas na teoria das equações a derivadas parciais é conveniente introduzir algumas notações simplificadoras. Um n-multi-índice, ou simplesmente *multi-índice*, é uma n-upla $\alpha = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ onde cada α_k é um número natural maior ou igual a zero. A coleção de todos os n-multi-índices é, portanto, $\mathbb{N}_0^n$. A *ordem de um multi-índice* α, denotada por $|\alpha|$, é definida por $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. O multi-índice $(0,\ \ldots,\ 0)$ é denominado multi-índice nulo e denotado por 0. Dados dois n-multi-índices $\alpha = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n)$ denotamos por $\alpha + \beta$ o n-multi-índice $(\alpha_1 + \beta_1,\ \ldots,\ \alpha_n + \beta_n)$.

Seja u um a função de n variáveis $x_1,\ \ldots,\ x_n$. Dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, denotamos por $D^\alpha u$ ou por $\partial^\alpha u$ a derivada parcial mista de u univocamente definida por

$$D^\alpha u \ \equiv\ \partial^\alpha u \ :=\ \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}\ ,$$

sendo que, se $0 = (0,\ \ldots,\ 0)$ for o multi-índice nulo, define-se $D^0 u := u$. Note-se também que $D^\alpha D^\beta u = D^{\alpha+\beta} u$.

Dado um operador diferencial D^α o valor de $|\alpha|$ é dito ser o *grau* de D^α.

Neste texto denotaremos por $\mathbf{M}_m^n$ o conjunto de todos os n-multi-índices de ordem menor ou igual a $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbf{M}_m^n \ :=\ \Big\{(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n,\ 0 \le |\alpha| \le m\Big\} \ =\ \Big\{(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n,\ 0 \le \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \le m\Big\} \tag{18.1}$$

e denotaremos por $\mathbf{N}_m^n$ o conjunto de todos os n-multi-índices de ordem igual a $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbf{N}_m^n \ :=\ \Big\{(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n,\ |\alpha| = m\Big\} \ =\ \Big\{(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n,\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m\Big\}\ . \tag{18.2}$$

O número de elementos do conjunto $\mathbf{N}_m^n$ é denotado por $|\mathbf{N}_m^n|$ e tem-se

$$|\mathbf{N}_m^n| \ =\ \binom{n+m-1}{m} \ =\ \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!} \tag{18.3}$$

(vide Exercício E. 6.15, página 431). Pelo Exercício E. 6.16, página 431, tem-se também que $|\mathbf{M}_m^n|$, o número de elementos do conjunto $\mathbf{M}_m^n$, é dado por

$$|\mathbf{M}_m^n| \ =\ \binom{n+m}{m} \ =\ \frac{(n+m)!}{n!m!}\ . \tag{18.4}$$

É de se notar a validade da relação

$$D^\alpha D^\beta \ =\ D^{\alpha+\beta} \ =\ D^\beta D^\alpha\ ,$$

onde, se $\alpha = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n)$, denotamos $\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1,\ \ldots,\ \alpha_n + \beta_n) = \beta + \alpha$.

Para um n-multi-índice $\alpha = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ definimos o símbolo $\alpha!$ como sendo o produto

$$\alpha! \ =\ \alpha_1! \cdots \alpha_n!\ .$$

Para $z \in \mathbb{C}^n$ (ou $\mathbb{R}^n$) da forma $z = (z_1,\ \ldots,\ z_n)$ e um n-multi-índice $\alpha = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ definimos o símbolo z^α como sendo o produto

$$z^\alpha \ =\ z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}\ .$$

[1] Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783). Um dos grandes nomes do Iluminismo, D'Alembert trouxe importantes contribuições à Análise (a noção de limite, por exemplo, é atribuída a ele), à Geometria Analítica, à Teoria das Equações Diferenciais. Foi também filósofo e político, tendo sido, juntamente a Diderot, editor e organizador da *Encyclopédie*.

Há uma relação de ordem parcial entre n-multiíndices. Se α e β são n-multiíndices, escrevemos $\alpha < \beta$ caso $\alpha_j < \beta_j$ para todo $j \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ e, analogamente, escrevemos $\alpha \leq \beta$ caso $\alpha_j \leq \beta_j$ para todo $j \in \{1,\ \ldots,\ n\}$. Dados dois n-multiíndices α e β definimos $\min\{\alpha,\, \beta\}$ como sendo o n-multiíndice cuja j-ésima componente é o mínimo entre a j-ésima de α e a de β:

$$\min\{\alpha,\, \beta\} \ := \ \Big(\, \min\{\alpha_1,\, \beta_1\},\ \ldots, \min\{\alpha_n,\, \beta_n\}\Big)\,.$$

O n-multiíndice $\max\{\alpha,\, \beta\}$ é definido analogamente.

Além da notação de multi-índices, empregaremos outras notações para as derivadas parciais de uma função u. Por exemplo,

$$\frac{\partial\, u}{\partial x} \ \equiv \ \partial_x u \ \equiv \ u_x$$

são três símbolos que representam a derivada parcial de u em relação a x. Analogamente,

$$\frac{\partial^2\, u}{\partial x^2} \ \equiv \ \partial_{xx} u \ \equiv \ u_{xx}\,, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \ \equiv \ \partial_{xy} u \ \equiv \ u_{xy} \quad \text{etc.}$$

• **A regra de Leibniz**

A notação de multi-índices permite expressar a *regra de Leibniz*, para derivadas parciais múltiplas de produtos de duas funções, de uma forma econômica. Se γ é um n-multi-índice e f e g são duas funções de n variáveis que sejam ao menos $|\gamma|$ vezes diferenciáveis, então vale

$$D^\gamma(fg) \ = \ \sum_{0 \leq \alpha \leq \gamma} \frac{\gamma!}{\alpha!(\gamma - \alpha)!}\, D^\alpha(f) D^{\gamma - \alpha}(g)\,. \tag{18.5}$$

onde γ e α, acima, são n-multiíndices.

E. 18.1 *Exercício.* Demonstre (18.5). Sugestão: prova por indução. ✠

• **Operadores diferenciais lineares**

Uma expressão como

$$L \ := \ \sum_{\alpha \in \mathbf{M}^n_m} a_\alpha(x_1,\ \ldots,\ x_n)\, D^\alpha\,, \tag{18.6}$$

onde a_α, $\alpha \in \mathbf{M}^n_m$, são funções em princípio arbitrárias das variáveis $x_1,\ \ldots,\ x_n$, é dita ser um *operador diferencial linear* de ordem m nas variáveis $x_1,\ \ldots,\ x_n$. Naturalmente só faz sentido, classicamente falando, aplicar operadores diferenciais lineares de ordem m em funções m vezes diferenciáveis. Um fato evidente é que se γ_1 γ_2 são constantes, vale $L\big(\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2\big) = \gamma_1 L u_1 + \gamma_2 L u_2$ para quaisquer funções m-vezes diferenciáveis u_1 e u_2.

• **Equações a derivadas parciais**

Em termos simples, uma equação a derivadas parciais (abreviadamente, uma EDP) é uma relação a ser satisfeita por uma função de várias variáveis e um conjunto finito de suas derivadas parciais (incluindo eventualmente derivadas parciais mistas). Passemos a formalizar essa ideia.

Uma função incógnita de n variáveis reais $u(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ é dita satisfazer uma *equação a derivadas parciais* em um certo domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definida por uma função de N variáveis G e por um conjunto de n-multi-índices $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_M$ (pelo menos um sendo não nulo) se valer

$$G\Big(x,\ u(x),\ D^{\alpha_1} u(x)\ \ldots,\ D^{\alpha_M} u(x)\Big) \ = \ 0$$

para todo $x \equiv (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \Omega$. O maior valor de $|\alpha_k|$, $k = 1,\ \ldots,\ M$ é dito ser a *ordem da equação a derivadas parciais*. Vide exemplos logo adiante. Com essa generalidade há, como também notamos quando apresentamos a definição de equações diferenciais ordinárias (Capítulo 12, página 792), equações impossíveis, como por exemplo no caso em que, para uma função de duas variáveis $u(x_1,\ x_2)$,

$$G\left(x_1,\ x_2,\ u(x_1,\ x_2),\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,\ x_2),\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\ x_2)\right) \ = \ |u| + \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right| + 1 \ = \ 0$$

que não pode ser satisfeita de forma alguma. Assim, devemos sempre supor a existência de um domínio (aberto) onde G anula-se, hipótese que assumiremos doravante sem maiores comentários.

• **Sistemas de equações a derivadas parciais**

Um conjunto de m funções incógnitas de n variáveis reais $u_k(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $k = 1,\ \ldots,\ m$, é dito satisfazer um *sistema de l equações a derivadas parciais* definidas por l funções de N variáveis G_j, $j = 1,\ \ldots,\ l$ e por um conjunto de n-multi-índices α_i^{jk} (pelo menos um sendo não nulo) se valer

$$\begin{aligned} G_1\Big(x,\ u_1(x),\ \ldots,\ u_m(x),\ D^{\alpha_1^{11}}u_1(x)\ \ldots,\ D^{\alpha_{M_{11}}^{1l}}u_1(x),\ \ \ldots,\ D^{\alpha_1^{1m}}u_m(x)\ \ldots,\ D^{\alpha_{M_{m1}}^{1m}}u_m(x)\Big) &= 0\,, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & \qquad (18.7) \\ G_l\Big(x,\ u_1(x),\ \ldots,\ u_m(x),\ D^{\alpha_1^{l1}}u_1(x)\ \ldots,\ D^{\alpha_{M_{1l}}^{l1}}u_1(x),\ \ \ldots,\ D^{\alpha_1^{lm}}u_m(x)\ \ldots,\ D^{\alpha_{M_{ml}}^{lm}}u_m(x)\Big) &= 0\,, \end{aligned}$$

para todo $x \equiv (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \Omega$. O maior valor de $|\alpha_i^{jk}|$ é dito ser a *ordem do sistema de equações a derivadas parciais.* Exemplos serão vistos logo adiante.

Naturalmente, temos que supor que as l equações acima sejam independentes, ou seja, que não possam ser obtidas umas das outras quer por operações algébricas quer por diferenciação.

Se $l < m$ (menos equações que funções incógnitas) o sistema é dito ser um *sistema subdeterminado.* Se $l > m$ (mais equações que funções incógnitas) o sistema é dito ser um *sistema sobredeterminado.* Se $l = m$ o sistema é dito ser um *sistema determinado* (isso não quer dizer que seja solúvel!). Alguns resultados sobre sistemas sobredeterminados são discutidos na Seção 18.7, página 1139.

Muito semelhantemente ao que ocorre com equações diferenciais ordinárias, é possível transformar uma equação a derivadas parciais em um sistema de equações a derivadas parciais de primeira ordem. Por exemplo, a equação

$$G\left(x,\ y,\ u(x,\ y),\ \frac{\partial\, u}{\partial x}(x,\ y),\ \frac{\partial\, u}{\partial y}(x,\ y),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ y),\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,\ y),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0 \tag{18.8}$$

pode ser transformada no sistema equivalente

$$\begin{aligned} G\left(x,\ y,\ u(x,\ y),\ p(x,\ y),\ q(x,\ y),\ \frac{\partial\, p}{\partial x}(x,\ y),\ \frac{\partial\, q}{\partial y}(x,\ y),\ \frac{\partial\, p}{\partial y}(x,\ y)\right) &= 0\,, \\ \frac{\partial\, u}{\partial x}(x,\ y) - p(x,\ y) &= 0\,, \qquad (18.9) \\ \frac{\partial\, u}{\partial y}(x,\ y) - q(x,\ y) &= 0\,, \end{aligned}$$

composto de três equações de primeira ordem com três funções incógnitas, u, p e q. Na primeira das três equações acima $\frac{\partial\, p}{\partial y}$ pode ser substituído por $\frac{\partial\, q}{\partial x}$.

O leitor deve ser advertido, porém, que a recíproca não é sempre verdadeira: nem todo sistema de equações de primeira ordem pode ser transformado em uma única equação a derivadas parciais. Em muitos casos uma tal equivalência só é possível sob restrições a condições iniciais ou de fronteira.

• **A noção de solução clássica de uma EDP**

Assim como no caso de equações diferenciais ordinárias, algumas palavras devem ser ditas sobre a noção de solução de uma equação a derivadas parciais. Uma *solução clássica* de uma equação a derivadas parciais de ordem m em n variáveis em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (suposto conexo e de interior não vazio) é uma função m-vezes diferenciável que satisfaz a equação em todos os pontos do interior de Ω. Existem também outras noções de solução, como a de solução fraca, de solução distribucional, de solução estocástica, de solução viscosa etc. Discutiremos por ora apenas as soluções clássicas e, por isso, abusando um pouco da linguagem, nos referiremos a elas simplesmente como "soluções", sem pender o qualificativo "clássicas".

• **Exemplos de equações a derivadas parciais de interesse**

Como ilustração e para futura referência apresentemos uma breve lista de equações a derivadas parciais de interesse. Abaixo, u é uma função de n variáveis reais $x_1,\ \ldots,\ x_n$, $n \geq 1$, ou de $n+1$ variáveis reais $t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$. Em muitas aplicações t representa o tempo e $x_1,\ \ldots,\ x_n$ representa coordenadas espaciais. Os símbolos Δ e ∇^2 denotam o operador Laplaciano para as coordenadas espaciais $x_1,\ \ldots,\ x_n$, que no caso de coordenadas Cartesianas se escreve:

$$\Delta \ \equiv \ \nabla^2 \ := \ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \ .$$

- *Equação de Laplace*[2]

$$\Delta u \ = \ 0 \ .$$

- *Equação de Poisson*[3]:

$$\Delta u \ = \ \rho \ ,$$

ρ sendo uma função não nula (doutra forma recaímos na equação de Laplace).

- *Equação de Helmholtz*[4]:

$$\Delta u + k^2 u \ = \ 0 \ ,$$

onde k^2 é um parâmetro fixo ou um autovalor a ser fixado pela imposição de condições de contorno.

- *Equação de difusão de calor* em um meio material não homogêneo, sólido (ou seja, na ausência de condução de calor por convecção) com uma fonte interna de calor:

$$c\rho \frac{\partial\, u}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\kappa \vec{\nabla} u \right) \ = \ \Phi \ ,$$

onde $u \equiv u(\vec{x},\ t)$ é a temperatura como função da posição $\vec{x}$ e do tempo t, $c \equiv c(\vec{x},\ t)$ é o calor específico do material, $\rho \equiv \rho(\vec{x},\ t)$ a densidade do material, $\kappa \equiv \kappa(\vec{x},\ t)$ a condutividade térmica do material e $\Phi \equiv \Phi(\vec{x},\ t)$ a quantidade de calor produzida por unidade de volume por unidade de tempo por uma fonte interna de calor dentro do material (*e.g.*, radioatividade, reações químicas etc). As funções $c(\vec{x},\ t)$, $\rho(\vec{x},\ t)$ e $\kappa(\vec{x},\ t)$ são positivas e, assim como $\Phi(\vec{x},\ t)$, podem também ser dependentes da temperatura $u(\vec{x},\ t)$.

- *Equação de difusão* homogênea ou *Equação do calor* (provavelmente proposta pela primeira vez por Fourier[5]):

$$\frac{\partial\, u}{\partial t} - D\Delta u \ = \ \Phi \ ,$$

onde D é uma constante positiva e Φ uma função, a qual pode ser identicamente nula.

- *Equação de ondas homogênea*:

$$\frac{\partial^2\, u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u \ = \ 0 \ ,$$

onde c é uma constante positiva.

- *Equação de ondas homogênea com amortecimento*:

$$\frac{\partial^2\, u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial\, u}{\partial t} - c^2 \Delta u \ = \ 0 \ ,$$

onde $c > 0$ e $\gamma > 0$ são constantes.

- *Equação de ondas homogênea com amortecimento interno*:

$$\frac{\partial^2\, u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial\, \Delta u}{\partial t} - c^2 \Delta u \ = \ 0 \ ,$$

onde $c > 0$ e $\gamma > 0$ são constantes.

[2] Pierre-Simon Laplace (1749–1827).
[3] Siméon Denis Poisson (1781–1840).
[4] Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894).
[5] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).

- *Equação do telégrafo*:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \eta u \;=\; 0 \,,$$
onde $c > 0,\ \gamma > 0$ e η são constantes.

- *Equação de Tricomi*[6], também conhecida como equação de *Euler-Tricomi*:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; 0 \,.$$

- *Equação de Schrödinger*[7] dependente do tempo:
$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + V u \,, \tag{18.10}$$
onde $u \equiv u(\vec{x},\, t)$ é uma função de $\vec{x}$ e t, $\hbar$ (a *constante de Planck*) e m são constantes positivas, e $V \equiv V(\vec{x},\, t)$ é uma função de $\vec{x}$ e t.

- *Equação de Schrödinger independente do tempo*:
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + V u \;=\; E u \,,$$
onde $u \equiv u(\vec{x})$ é uma função apenas de $\vec{x}$, assim como a função V, sendo E um autovalor a ser fixado por condições de contorno e pela condição $\int |u(\vec{x})|^2 d^n \vec{x} < \infty$.

- *Equação de Gross-Pitaevsky*:
$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + V(x) u + \alpha |u|^2 u \,,$$
α sendo uma constante real.

- *Equação de Schrödinger não linear*:
$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + \alpha |u|^2 u \,, \tag{18.11}$$
α sendo uma constante real.

  Na Seção 46.4.3.4, página 2765, estudamos algumas soluções especiais (18.11), a saber, os chamados sólitons claro e escuro da equação de Schrödinger não linear.

- *Equação de Klein-Gordon*[8]:
$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - m^2 u \;=\; 0 \,,$$
c e m constantes positivas.

- *Equação de Sine-Gordon*[9]:
$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \,\mathrm{sen}\big(u\big) \;=\; 0 \,, \tag{18.12}$$
com $c > 0$ e $\alpha > 0$, equação essa particularmente estudada no caso de uma dimensão espacial, onde assume a forma
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \,\mathrm{sen}\big(u\big) \;=\; 0 \,. \tag{18.13}$$

  Na Seção 46.4.3.2, página 2762, estudamos algumas soluções especiais (18.13), a saber, os chamados sólitons da equação de Sine-Gordon.

[6] Francesco Giacomo Tricomi (1897–1978).

[7] Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887–1961).

[8] Oskar Klein (1894–1977). Walter Gordon (1893–1939). A equação de Klein-Gordon foi, em verdade, originalmente proposta por Schrödinger como equação de ondas para uma partícula quântica relativística, antes mesmo de Schrödinger propor a equação (não relativística) que leva seu nome (e, portanto, antes de Klein e Gordon).

[9] O nome "Sine-Gordon" é um jogo de palavras com o nome da equação de Klein-Gordon.

- *Equação de Korteweg-de Vries*[10], também abreviada para *Equação KdV*:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \;=\; \sqrt{\frac{g}{l}}\left[\frac{3}{2}\eta\frac{\partial \eta}{\partial x}+2\sigma\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}\right]\;, \tag{18.14}$$

com $\sigma = \frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$. Essa equação descreve o movimento de um fluido de densidade ρ e tensão superficial T em um canal unidimensional de profundidade l (com l suposta "pequena"), a constante g sendo a aceleração da gravidade. Após algumas transformações simples a equação pode ser reescrita em uma forma na qual a equação de Korteweg-de Vries é usualmente apresentada na literatura moderna:

$$\frac{\partial\, u}{\partial t}+\frac{\partial^3\, u}{\partial x^3}+6u\frac{\partial\, u}{\partial x} \;=\; 0\;. \tag{18.15}$$

Na Seção 46.4.3.1, página 2760, estudamos uma solução especial de (18.15), o assim denominado *sóliton* da equação de Korteweg-de Vries.

- *Equação de Burgers*[11]:

$$\frac{\partial\, u}{\partial t}-\eta\frac{\partial^2\, u}{\partial x^2}+u\frac{\partial\, u}{\partial x} \;=\; 0\;, \tag{18.16}$$

η sendo uma constante positiva. A equação de Burgers é uma espécie de versão unidimensional da equação de Navier-Stokes da Mecânica dos Fluidos (sem gradiente de pressão e forças externas). Para $\eta = 0$ tem-se a *Equação de Burgers inviscível (*i.e.*, sem viscosidade)*:

$$\frac{\partial\, u}{\partial t}+u\frac{\partial\, u}{\partial x} \;=\; 0\;. \tag{18.17}$$

Essa equação também coincide com a versão unidimensional da *equação de Euler da Mecânica dos Fluidos* na ausência de gradiente de pressão e forças externas. Vide [379].

- *Equação da Óptica Geométrica*:

$$(\text{grad}\, u)^2 \;=\; 1\;,\quad \text{ou seja,}\quad \left(\frac{\partial\, u}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial\, u}{\partial x_n}\right)^2 \;=\; 1\;.$$

- *Equação de Euler-Bernoulli*[12]. Na teoria dos corpos deformáveis (vide, *e.g.*, [586], [380]) ocorre um dos raros exemplos em Física de equação a derivadas parciais de ordem superior a dois (outro exemplo é a equação de Equação de Korteweg-de Vries, acima), a saber, a equação que descreve vibrações transversais de placas sólidas finas e homogêneas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\kappa\Delta\Delta u \;=\; 0\;,$$

onde κ (denominada "*rigidez flexural*") é uma constante positiva característica do material considereado (κ depende da elasticidade no material da placa, de sua densidade e espessura) e, em coordenadas Cartesianas, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. No caso de vibrações de uma viga (ou fio sólido) homogênea a correspondente equação é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\kappa\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \;=\; 0\;.$$

- Equação de Black[13]-Scholes[14], usada em análise financeira:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\sigma^2x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+rx\frac{\partial u}{\partial x}-ru \;=\; 0\;.$$

[10] Diederik Johannes Korteweg (1848–1941). Gustav de Vries (1866–1934). A referência original ao trabalho de Korteweg e de de Vries é "On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves", Philosophical Magazine, 5th series, **36**, 422–443 (1895).

[11] Johannes Martinus Burgers (1895–1981).

[12] Leonhard Euler (1707–1783). Daniel Bernoulli (1700–1782). O nome de Jakob Bernoulli (1654-1705) deve ser também mencionado, por ter sido pioneiro no estudo da elasticidade de corpos materiais.

[13] Fischer Sheffey Black (1938–1995).

[14] Myron Samuel Scholes (1941–).

- **Exemplos de sistemas de equações a derivadas parciais de interesse**

  - *Equações de Maxwell*[15] *fora de meios materiais*, do Eletromagnetismo:

$$\nabla \cdot \vec{E} \;=\; \frac{\rho}{\epsilon_0}\,, \qquad \nabla \cdot \vec{B} \;=\; 0\,, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} \;=\; \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial\, \vec{E}}{\partial t}\,, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} \;=\; -\frac{\partial\, \vec{B}}{\partial t}\,, \tag{18.18}$$

  onde $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são o campo elétrico e magnético, respectivamente, ρ sendo a densidade de carga elétrica e $\vec{J}$ sendo a densidade de corrente elétrica. As equações acima estão escritas no chamado sistema internacional de unidades (SI). As constantes ϵ_0 e μ_0 são denominadas *permissividade do vácuo* e *permeabilidade do vácuo*, respectivamente. A constante $c := (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ é a *velocidade da luz*. Seus valores numéricos aproximados atualmente aceitos (no sistema SI) são

$$\epsilon_0 \;=\; 8,8541878188(14) \times 10^{-12}\; C^2 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-3} \cdot s^2\,, \quad \mu_0 \;=\; 1,25663706127(20) \times 10^{-6}\; C^{-2} \cdot kg \cdot m \quad \text{e} \quad c \;=\; 299.792.458\; m/s\,.$$

  Para a forma das equações de Maxwell em outros sistemas, vide *e.g.* [328]. Uma consequência imediata das equações acima é a lei de conservação de carga elétrica, expressa na forma $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$.

  Das equações (18.18) é possível obter (vide Exercício E. 46.29, página 2820 ou qualquer bom livro de Eletromagnetismo, *e.g.*, [328]) as *equações de onda não homogêneas* para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\, \vec{E}}{\partial t^2} \;\;=\;\; \frac{1}{\epsilon_0} \left(\vec{\nabla} \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\, \vec{J}}{\partial t} \right)\,, \tag{18.19}$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\, \vec{B}}{\partial t^2} \;\;=\;\; -\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J}\,, \tag{18.20}$$

  onde $c \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.

  - *Equações de Maxwell em meios materiais*:

$$\nabla \cdot \vec{D} \;=\; \rho\,, \qquad \nabla \cdot \vec{B} \;=\; 0\,, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} \;=\; \vec{J} + \frac{\partial\, \vec{D}}{\partial t}\,, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} \;=\; -\frac{\partial\, \vec{B}}{\partial t}\,, \tag{18.21}$$

  onde $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E},\; \vec{B})$ e $\vec{H} = \vec{H}(\vec{E},\; \vec{B})$ são funções de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ (essas relações são ditas *constitutivas*). Por exemplo, no caso de meios isotrópicos e lineares tem-se $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ e $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$, sendo ϵ e μ dependentes do meio.

  - *Equação de Dirac*[16] livre da Mecânica Quântica Relativística (em $3+1$ dimensões):

$$\left(i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \mathbb{1} \right) \psi \;=\; 0\,, \tag{18.22}$$

  onde $m > 0$ é a massa da partícula, $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$ e γ^μ são matrizes 4×4 satisfazendo $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \mathbb{1}$, onde g é a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Em (18.22) adotou-se a *convenção de Einstein*: índices repetidos são somados.

  - *Equação de Euler*[17] da Mecânica dos Fluidos:

$$\rho \left(\frac{\partial\, \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right) + \vec{\nabla} p \;=\; \vec{f}\,,$$

  onde ρ é a densidade do fluido, $\vec{v}$ o campo de velocidades, p a pressão e $\vec{f}$ um campo de forças externas (por exemplo, $\vec{f} = \rho \vec{g}$, para o caso do campo gravitacional). Essa equação deve ser complementada pela equação de continuidade $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$. Para a história dessa equação, bem como da Mecânica dos Fluidos, vide [139].

[15] James Clerk Maxwell (1831–1879).
[16] Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984).
[17] Leonhard Euler (1707–1783).

- *Equação de Navier-Stokes*[18][19] da Mecânica dos Fluidos:

$$\rho\left(\frac{\partial\,\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right)+\vec{\nabla}p-\eta\Delta\vec{v}-\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\vec{\nabla}\left(\nabla\cdot\vec{v}\right)\;=\;\vec{f}\,,$$

onde η e ζ são coeficientes de viscosidade do fluido. Essa equação difere da de Euler, acima, por incluir efeitos de viscosidade. No caso de fluidos incompressíveis o termo que contém $\nabla\cdot\vec{v}$ pode ser desconsiderado. Para a história dessa equação, bem como da Mecânica dos Fluidos, vide [139].

- **Condições de contorno, iniciais e subsidiárias**

Uma equação diferencial definida em um domínio $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ vem em muitos exemplos de interesse acompanhada de condições a serem satisfeitas pelas soluções e suas derivadas na fronteira de Ω (que eventualmente pode estar no infinito). Tais condições são genericamente denominadas *condições de contorno*, ou *condições de fronteira*, ou *condições iniciais*, dependendo da interpretação que possuam. Em aplicações, condições de contorno usualmente são ditadas ou por leis físicas[20] ou por restrições físicas ou geométricas que devem ser impostas à solução nos pontos da fronteira de Ω.

Há diversos tipos de condições de contorno e tradicionalmente desenvolveu-se uma nomenclatura para denominar certas condições de contorno, empregada especialmente no caso de equações de segunda ordem. Se $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado, condições que fixem o valor da solução u na fronteira de Ω são denominadas *condições de Dirichlet*[21]. Condições envolvendo apenas as primeiras derivadas da solução u são denominadas *condições de Neumann*[22]. Há também *condições mistas*, envolvendo tanto a função quanto suas primeiras derivadas na fronteira. Condições de contorno também podem ser lineares (se dependerem linearmente da solução e suas derivadas) ou não lineares e as lineares podem ser homogêneas ou não homogêneas.

O leitor poderá encontrar exemplos de condições de contorno nas aplicações do Capítulo 46, página 2722. Para a relevância de condições de contorno na questão da unicidade de soluções, vide Seção 18.6, página 1126.

Se uma das variáveis da equação diferencial tiver a interpretação de tempo, condições impostas à solução em uma superfície $t=$ constante são denominadas *condições iniciais*. De um ponto de vista teórico não há nenhuma diferença qualitativa entre condições iniciais e de contorno, mas é importante distingui-las em aplicações, pois ambas podem ter interpretações distintas enquanto imposições físicas às soluções.

Exemplifiquemos isso na seguinte situação. Se desejarmos descrever a evolução da temperatura em cada ponto de uma barra unidimensional de comprimento L, estendida no intervalo $0\leq x\leq L$, cujas bordas em $x=0$ e $x=L$ estão em contacto com banhos térmicos a temperaturas $a(t)$ e $b(t)$, respectivamente, devemos considerar a equação de difusão do calor $\partial_t u=D\partial_{xx}u$, definida na região $t\geq 0$ e $0\leq x\leq L$, onde $u(x,\,t)$ representa a temperatura da barra no ponto x no instante t e $D>0$ é a constante de difusão de calor da barra. A condição $u(x,\,t=0)=u_0(x)$ fixa a temperatura inicial da barra em cada ponto x do intervalo $[0,\,L]$ como sendo $u_0(x)$, onde u_0 é uma função dada. As condições $u(x=0,\,t)=a(t)$ e $u(x=L,\,t)=b(t)$ para $t\geq 0$ fixa a temperatura nos extremos da barra como sendo $a(t)$ e $b(t)$, respectivamente, para todos os tempos posteriores a $t=0$, a e b sendo funções dadas. A primeira condição é denominada condição inicial, pois fixa uma condição para a solução em $t=0$, o instante "inicial" a partir do qual a evolução da solução é estudada. Já as duas outras condições são de contorno (do tipo de Dirichlet), pois impõe uma condição à solução nos extremos espaciais do sistema considerado. Nesse caso, a região $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ onde a equação diferencial está definida é o retângulo semi-infinito $\Omega=\{(x,\,t),\,0\leq x\leq L,\,t\geq 0\}\subset\mathbb{R}^2$. As condições $u(x,\,0)=u_0(x)$ para $0\leq x\leq L$, $u(0,\,t)=a(t)$ e $u(L,\,t)=b(t)$ para $t\geq 0$ são condições impostas a u na fronteira $\partial\Omega$ de Ω, que consiste no conjunto formado pela união de três linhas descrita em $\partial\Omega=\{(x,\,0),\,0\leq x\leq L\}\cup\{(0,\,t),\,t\geq 0\}\cup\{(L,\,t),\,t\geq 0\}\subset\mathbb{R}^2$ e podem também, assim, ser entendidas como condições de contorno impostas à solução em $\partial\Omega$.

Outro exemplo é o da equação de ondas para descrever uma corda vibrante de densidade constante, fixa nos extremos estendida no intervalo $0\leq x\leq L$: $c^2\partial_{tt}u=\partial_{xx}u$, onde c é a velocidade de propagação da onda e $u(x,\,t)$ seu desvio da posição de equilíbrio. A região Ω é a mesma encontrada acima. As condições de contorno (para uma corda fixa nos extremos) são $u(0,\,t)=u(L,\,t)=0$ para todo t e a condição inicial fixa a posição e a velocidade de cada ponto da corda em $t=0$: $u(x,\,0)=u_0(x)$ e $\partial_t u(x,\,0)=v_0(x)$, para todo $0\leq x\leq L$, u_0 e v_0 sendo funções dadas.

[18] Claude Louis Marie Henri Navier (1785–1836).
[19] George Gabriel Stokes (1819–1903).
[20] No Eletromagnetismo, por exemplo, as condições de contorno impostas aos campos elétrico e magnético são consequência das próprias equações de Maxwell.
[21] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859).
[22] Carl Neumann (1832–1925).

De um ponto de vista matemático um certo cuidado deve ser tomado na definição de condições iniciais ou de contorno, pois estas podem ser incompatíveis com a continuidade e a diferenciabilidade das soluções. No exemplo acima, para que a equação da corda vibrante faça sentido sua solução deve ser contínua e duas vezes diferenciável em relação a t e a x. No entanto, há problemas nos quais as condições iniciais, definidas pelas condições u_0 e v_0, não têm essas propriedades de continuidade e diferenciabilidade. Tal se dá nos casos da chamada corda "pinçada" e da chamada corda "percutida" (ou "martelada"). No primeiro, impõe-se em $t = 0$

$$u_0(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{U_0}{h}\, x \;, & 0 \le x \le h \;, \\ \dfrac{U_0}{L-h}\,(L-x) \;, & h \le x \le L \;, \end{cases} \qquad\qquad v_0(x) \;\equiv\; 0 \;.$$

A corda é pinçada em $t = 0$ no ponto $x = h$ até um deslocamento $U_0 > 0$ e solta daí com velocidade nula. No segundo, o problema da corda "percutida", impõe-se

$$u_0 \;\equiv\; 0 \;, \qquad\qquad v_0(x) \;=\; \begin{cases} V_0 \;, & 0 < a \le x \le b < L \\ 0 \;, & \text{de outra forma} \end{cases} \;.$$

Vide Figura 18.1, página 1077. A corda está inicialmente em sua posição de repouso e é imprimida (por exemplo, por uma martelada) uma velocidade $V_0 > 0$ aos pontos situados no intervalo $[a,\, b]$, onde $0 < a < b < L$.

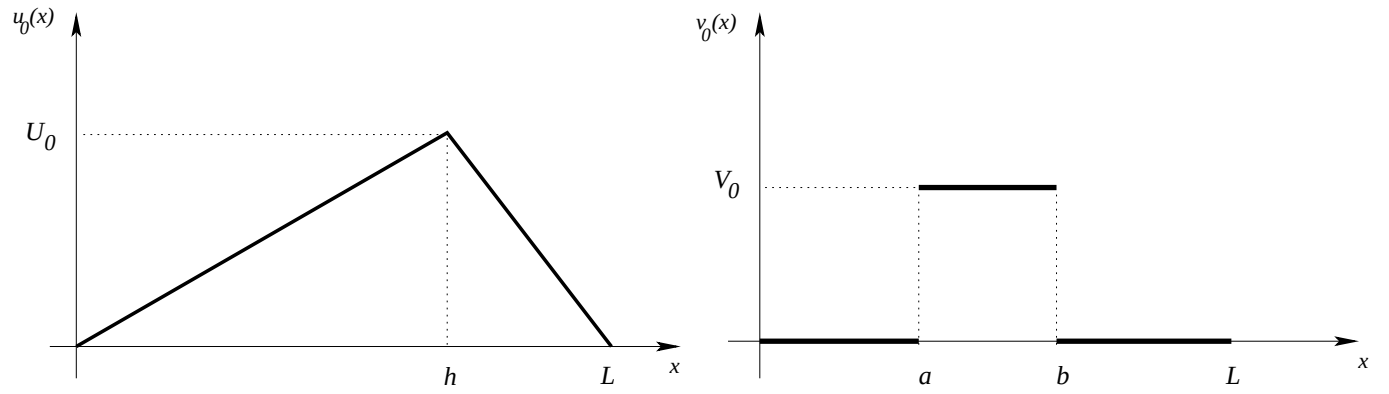

Figura 18.1: As funções u_0 e v_0 para a corda pinçada e percutida, respectivamente.

No primeiro caso (corda pinçada), a função u_0 é contínua mas não diferenciável em $x = 0$. No segundo caso (corda percutida), a função v_0 não é contínua em $x = a$ e $x = b$. Em tais casos, as condições iniciais devem ser entendidas como limites: $\lim\limits_{t\to 0_+} u(x,\, t) = u_0(x)$, $\lim\limits_{t\to 0_+} \partial_t u(x,\, t) = v_0(x)$.

Além de condições de contorno e iniciais, há problemas que envolvem condições ditas *condições subsidiárias*, que impõe outros tipos de restrições às soluções, por vezes de caráter global. Um caso muito importante é o da equação de Schrödinger da Mecânica Quântica, onde impõe-se a condição que a solução deve ser de quadrado integrável, ou seja, deve satisfazer $\int |u(\vec{x},\, t)|^2 d^n\vec{x} < \infty$ para todo t, onde a integração é feita na região espacial onde o sistema está definido.

O fato importante é que as soluções de equações a derivadas parciais dependem crucialmente das condições de contorno, iniciais ou subsidiárias impostas. Em verdade, a própria questão da existência e/ou unicidade da solução dessas equações depende crucialmente daquelas condições. Vide Seção 18.6, página 1126.

• **Problemas bem-postos**

Um problema envolvendo a resolução de uma equação a derivadas parciais é dito ser um *problema bem-posto* caso se possa garantir: 1º existência de solução, 2º unicidade de solução, 3º continuidade em relação a condições iniciais e de contorno (continuidade aqui entendida em relação a alguma topologia conveniente). Esta noção foi introduzida

por Hadamard[23] ao listar propriedades que modelos matemáticos de sistemas físicos deveriam idealmente possuir, uma colocação, aliás, ingênua, pois em Física pode haver também interesse por problemas mal-postos. É por vezes muito importante determinar *a priori* se um problema de interesse é bem-posto mas, particularmente na Física, não apenas problemas bem-postos atraem a atenção. A questão da *boa-postura* de certas equações a derivadas parciais é ainda assunto de pesquisa, especialmente no que concerne à questão da estabilidade de soluções (continuidade em relação a condições inicias, de contorno e a parâmetros).

18.2 Algumas Classificações de Equações a Derivadas Parciais

18.2.1 Equações Lineares, Não lineares, Semilineares e Quaselineares

Equações a derivadas parciais podem ser classificadas de diversas formas de acordo com certas especificidades. Métodos de resolução e propriedades das soluções dependem dos tipos aos quais as equações pertencem e listaremos aqui alguns de maior relevância. A nomenclatura que apresentaremos é importante para futuras discussões. A classificação mais básica divide as equações diferenciais em lineares e não lineares.

• **Equações lineares e não lineares**

Uma equação a derivadas parciais para uma função u é dita ser linear se depender linearmente de u e suas derivadas parciais. Por exemplo, a forma mais geral de uma equação linear de segunda ordem nas variáveis x e t é

$$a_1(x,\,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_2(x,\,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a_3(x,\,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+a_4(x,\,t)\frac{\partial u}{\partial x}+a_5(x,\,t)\frac{\partial u}{\partial t}+a_6(x,\,t)u \;=\; b(x,\,t)\,, \tag{18.23}$$

as funções a_k, $k=1,\,\ldots,\,6$, e b, acima, são em princípio arbitrárias, mas não contêm nenhuma dependência em u, apenas nas variáveis x e t.

De modo geral, uma equação diferencial linear de ordem m em n variáveis $x_1,\,\ldots,\,x_n$ é da forma

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{M}^n_m} a_\alpha(x_1,\,\ldots,\,x_n)\,D^\alpha u(x_1,\,\ldots,\,x_n) \;=\; b(x_1,\,\ldots,\,x_n)\,, \tag{18.24}$$

onde, usando a notação de multi-índices introduzida acima, a_α, $\alpha\in\mathbf{M}^n_m$, e b são funções em princípio arbitrárias das variáveis $x_1,\,\ldots,\,x_n$ (recordar a definição de $\mathbf{M}^n_m$ em (18.1)).

Muito frequentemente denotaremos uma equação diferencial linear por $Lu=b$, onde L é um operador diferencial linear como em (18.6) e b uma função apenas de $x_1,\,\ldots,\,x_n$.

• **Equações lineares homogêneas e não homogêneas. O princípio de sobreposição**

Analogamente ao que ocorre para equações diferenciais ordinárias lineares, uma equação a derivadas parciais linear $Lu=b$ é dita ser *homogênea* se a função b for identicamente nula e *não homogênea*, caso contrário.

Também como no caso de equações ordinárias, vale para equações a derivadas parciais lineares e homogêneas o importante *princípio de sobreposição* (ou de *superposição*): se u_1 e u_2 são duas soluções de uma equação homogênea (ou seja, se $Lu_1=0$ e $Lu_2=0$), então qualquer combinação linear $\gamma_1u_1+\gamma_2u_2$ é igualmente uma solução da mesma equação, pois $L\big(\gamma_1u_1+\gamma_2u_2\big)=\gamma_1Lu_1+\gamma_2Lu_2=0$. (Note-se que condições iniciais ou de contorno podem limitar as combinações lineares possíveis).

No caso de equações a derivadas parciais lineares não homogêneas vale uma forma mais fraca do princípio de sobreposição. Se u_1 e u_2 são duas soluções de uma equação linear não homogênea (ou seja, se $Lu_1=b$ e $Lu_2=b$), então uma combinação linear da forma $\gamma_1u_1+\gamma_2u_2$ será uma solução da mesma equação se e somente se $\gamma_1+\gamma_2=1$. De fato, $L\big(\gamma_1u_1+\gamma_2u_2\big)=\gamma_1Lu_1+\gamma_2Lu_2=(\gamma_1+\gamma_2)b$, que é igual a b se e somente se $\gamma_1+\gamma_2=1$.

Há ainda uma outra observação elementar, mas relevante, a se fazer sobre equações lineares não homogêneas. Seja u uma solução da equação linear não homogênea $Lu=b$ e seja v uma solução da equação homogênea $Lv=0$ (para o

[23] Jacques Salomon Hadamard (1865–1963). Vide J. Hadamard: "Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique". Princeton University Bulletin, 49–52 (1902).

mesmo operador diferencial linear L). Então $u+v$ é igualmente solução da equação linear não homogênea. De fato, $L(u+v) = Lu + Lv = b$.

Esse último fato é muito empregado na prática quando se deseja encontrar uma solução de uma equação não homogênea satisfazendo certas condições de contorno. Se uma solução u não satisfaz as condições de contorno, por vezes é possível encontrar uma solução satisfazendo as condições desejadas adicionando a u uma solução v conveniente da equação homogênea.

Listamos, por fim, mais uma propriedade elementar, porém relevante, de soluções de EDP's lineares não homogêneas. Se u_1 e u_2 são duas soluções da equação não homogênea $Lu = b$, então $u_1 - u_2$ é solução da equação homogênea $Lu = 0$. A prova é elementar. Com isso vemos que duas soluções de uma mesma EDP linear não homogênea sempre diferem por uma solução da correspondente EDP linear homogênea.

• **Equações explícitas. Parte principal de uma EDP**

Uma equação a derivadas parciais de ordem m (não necessariamente linear) é dita ser uma *equação explícita* (ou, mais raramente, *extrínseca*) se for da forma

$$G_1\Big(\mathbf{x},\, u,\, D^{\alpha_1}u\, \ldots,\, D^{\alpha_M}u\Big) \;=\; G_2\Big(\mathbf{x},\, u,\, D^{\beta_1}u\, \ldots,\, D^{\beta_N}u\Big)\,, \tag{18.25}$$

para certas funções G_1 e G_2, onde $\mathbf{x} \equiv (x_1,\, \ldots,\, x_n)$, com $|\alpha_j| \leq m$ para todo $j = 1,\, \ldots,\, M$ e $|\beta_k| < m$ para todo $k = 1,\, \ldots,\, N$, ou seja, se o lado esquerdo contiver todas as derivadas de ordem m (a ordem da equação) e o lado direito contiver derivadas de ordem menor que m. Essa definição é um tanto ambígua, pois o lado esquerdo pode conter também derivadas de ordem menor m que podem ou não ser passadas para o lado direito. Suporemos no que segue que na forma (18.25) não seja mais possível eliminar derivadas de ordem menor que m do lado esquerdo o que, admitidamente, nem sempre pode ser feito de modo único.

A parte de uma equação a derivadas parciais explícita que contém as derivadas de maior ordem (ou seja, o lado esquerdo de (18.25)) é denominada *parte principal* da equação. Por exemplo, a parte principal da equação linear de ordem m de (18.24)

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n_m} a_\alpha(x_1,\, \ldots,\, x_n)\, D^\alpha u(x_1,\, \ldots,\, x_n)$$

(recordar a definição de $\mathbf{N}^n_m$ em (18.2)).

Certas propriedades de equações diferenciais dependem de características de sua parte principal, de modo que é relevante classificá-las de acordo com propriedades da mesma.

• **Equações quaselineares**

Uma equação a derivadas parciais é dita ser uma *equação quaselinear* se sua parte principal depender linearmente das derivadas de maior ordem. Assim, a forma geral de uma equação quaselinear de ordem m em n variáveis $\mathbf{x} = (x_1,\, \ldots,\, x_n)$ é

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n_m} a_\alpha\big(\mathbf{x},\, u,\, D^{\beta_1}u,\, \ldots,\, D^{\beta_k}u\big)\, D^\alpha u(\mathbf{x}) \;=\; H\big(\mathbf{x},\, u,\, D^{\beta_1}u,\, \ldots,\, D^{\beta_k}u\big)\,,$$

onde H e as funções a_α dependem eventualmente de $\mathbf{x}$, de u e de k derivadas do tipo $D^{\beta_l}u$, $l = 1,\, \ldots,\, k$, com $|\beta_l| \leq m-1$. Novamente, $k \leq |\mathbf{M}^n_{m-1}| = \binom{n+m-1}{m-1}$.

Assim, a forma geral de uma equação quaselinear de primeira ordem é:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(u,\, \mathbf{x})\frac{\partial\, u}{\partial x_k} \;=\; b(u,\, \mathbf{x})\,,$$

onde $\mathbf{x} = (x_1,\, \ldots,\, x_n)$ são as n variáveis das quais a função u depende e onde as funções $b(u,\, \mathbf{x})$ e $a_k(u,\, \mathbf{x})$, $k = 1,\, \ldots,\, n$, são funções de $\mathbf{x}$ e de u, mas não de derivadas de u. A forma geral de uma equação quaselinear de segunda ordem é (por simplicidade, mas sem perder em generalidade, consideraremos apenas funções em duas variáveis: x e y):

$$a(x,\, y,\, u,\, \partial_x u,\, \partial_y u)\frac{\partial^2\, u}{\partial x^2} + b(x,\, y,\, u,\, \partial_x u,\, \partial_y u)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,\, y,\, u,\, \partial_x u,\, \partial_y u)\frac{\partial^2\, u}{\partial y^2} \;=\; d(x,\, y,\, u,\, \partial_x u,\, \partial_y u)\,,$$

onde as funções $a,\, b,\, c$ e d dependem de $x,\, y,\, u$, e das duas derivadas parciais de primeira ordem de u.

A equação da óptica geométrica $\left(\frac{\partial\, u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\, u}{\partial y}\right)^2 = 1$ não é uma equação quaselinear (nem pode ser reescrita como tal).

• **Equações semilineares**

Uma equação a derivadas parciais é dita ser uma *equação semilinear* se sua parte principal for um operador linear. Assim, a forma geral de uma equação semilinear de ordem m em n variáveis $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ é

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n_m} a_\alpha(\mathbf{x})\, D^\alpha u(\mathbf{x}) \;=\; H\big(\mathbf{x},\, u,\, D^{\beta_1}u,\, \ldots,\, D^{\beta_k}u\big)\;,$$

onde a_α são funções apenas de $\mathbf{x}$ e H depende eventualmente de $\mathbf{x}$, de u e de k derivadas do tipo $D^{\beta_l}u$, $l = 1, \ldots, k$, com $|\beta_l| \leq m-1$. Naturalmente, acima k é um número natural satisfazendo $k \leq |\mathbf{M}^n_{m-1}| = \binom{n+m-1}{m-1}$.

É de se notar que toda equação linear é semilinear e toda equação semilinear é quaselinear.

Um outro comentário é que diversas equações diferenciais quaselineares de primeira ordem podem ser resolvidas por um método denominado *método das características*, do qual falaremos na Seção 18.5, página 1095. Diversas equações diferenciais lineares e homogêneas podem ser resolvidas pelo método de separação de variáveis, sobre o qual falaremos na Seção 18.3, página 1083.

18.2.2 Classificação de Equações de Segunda Ordem. Equações Parabólicas, Elípticas e Hiperbólicas

• **Transformação da parte principal de uma EDP**

Dada uma equação a derivadas parciais de tipo semilinear, é importante, para diversos propósitos, saber como sua parte principal se transforma por uma mudança (local, eventualmente) de variáveis $(x_1, \ldots, x_n) \to (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (suposta diferenciável e de Jacobiano não nulo). No que segue, para não carregar em excesso a notação, consideraremos equações semilineares, mas o caso de equações quaselineares e idêntico, como o leitor pode facilmente perceber. Se considerarmos o operador $\frac{\partial^a}{\partial x_k^a}$, $a \in \mathbb{N}$, é muito fácil constatar, aplicando a regra da cadeia, que após a referida mudança de variáveis o mesmo transforma-se em

$$\sum_{\beta\in\mathbf{N}^n_a} \left[\prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial\,\xi_j}{\partial x_k}\right)^{\beta_j}\right] \frac{\partial^a}{\partial\xi_1^{\beta_1}\cdots\partial\xi_n^{\beta_n}} + \cdots\;, \tag{18.26}$$

sendo que os termos omitidos envolvem derivadas de ordem menor que a. Se α é um n-multi-índice, segue disso que o operador $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$ transforma-se segundo

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} \;\longrightarrow\; \sum_{\beta_1\in\mathbf{N}^n_{\alpha_1}} \cdots \sum_{\beta_n\in\mathbf{N}^n_{\alpha_n}} \left\{\prod_{k=1}^n \left[\prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial\,\xi_j}{\partial x_k}\right)^{(\beta_k)_j}\right]\right\} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi_1^{\gamma_1}\cdots\partial\xi_n^{\gamma_n}} + \cdots\;, \tag{18.27}$$

ou seja

$$D^\alpha_x \;\longrightarrow\; \sum_{\beta_1\in\mathbf{N}^n_{\alpha_1}} \cdots \sum_{\beta_n\in\mathbf{N}^n_{\alpha_n}} \left\{\prod_{k=1}^n \left[\prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial\,\xi_j}{\partial x_k}\right)^{(\beta_k)_j}\right]\right\} D^\gamma_\xi + \cdots\;, \tag{18.28}$$

onde γ é o n-multi-índice $\gamma = \beta_1 + \cdots + \beta_n$ e onde novamente omitimos derivadas de ordem menor que $|\alpha|$.

Se a parte principal da equação considerada for de ordem m e possuir a forma

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n_m} a_\alpha(x_1,\, \ldots,\, x_n)\, D^\alpha\, u(x_1,\, \ldots,\, x_n) \;=\; \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n_m} a_\alpha(x)\, \frac{\partial^m\, u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}(x)\;,$$

é muito fácil constatar, usando as expressões acima, que após a referida mudança de variáveis a mesma torna-se

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n_m} a_\alpha\big(x(\xi)\big) \sum_{\beta_1\in\mathbf{N}^n_{\alpha_1}} \cdots \sum_{\beta_n\in\mathbf{N}^n_{\alpha_n}} \left\{\prod_{k=1}^n \left[\prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial\,\xi_j}{\partial x_k}\right)^{(\beta_k)_j}\right]\right\} \frac{\partial^m\, u}{\partial\xi_1^{\gamma_1}\cdots\partial\xi_n^{\gamma_n}}\big(x(\xi)\big)\;,$$

onde γ é o n-multi-índice $\gamma = \beta_1 + \cdots + \beta_n$ e onde novamente omitimos derivadas de u de ordem menor que m, já que nosso interesse está apenas na transformação da parte principal. Essa última expressão é a parte principal da equação nas variáveis ξ e pode ser escrita na forma

$$\sum_{\gamma \in \mathbf{N}^n_m} \tilde{a}_\gamma(\xi_1,\, \ldots,\, \xi_n) \frac{\partial^m u}{\partial \xi_1^{\gamma_1} \cdots \partial \xi_n^{\gamma_n}}\big(x(\xi)\big) \,,$$

onde

$$\tilde{a}_\gamma(\xi_1,\, \ldots,\, \xi_n) \,:=\, \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n_m} \sum_{\beta_1 \in \mathbf{N}^n_{\alpha_1}} \cdots \sum_{\beta_n \in \mathbf{N}^n_{\alpha_n}} a_\alpha\big(x(\xi)\big) \left\{ \prod_{k=1}^n \left[\prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial\, \xi_j}{\partial x_k} \right)^{(\beta_k)_j} \right] \right\} \prod_{l=1}^n \delta_{\gamma_l,\, (\beta_1)_l + \cdots + (\beta_n)_l} \,.$$

• **Transformação da parte principal de uma EDP semilinear de segunda ordem**

O caso de equações a derivadas parciais semilineares de segunda ordem é de particular importância em aplicações e por essa razão vamos olhá-lo com mais detalhe. Consideremos uma equação a derivadas parciais de segunda ordem definida em $\mathbb{R}^n$ da forma

$$\sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n A_{ab}\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_a \partial x_b} \;=\; F\left(x,\, u,\, \frac{\partial\, u}{\partial x_1},\, \ldots, \frac{\partial\, u}{\partial x_n}\right) \,,$$

onde os coeficientes A_{ab} são reais, satisfazem a condição de simetria $A_{ab} = A_{ba}$, não são todos identicamente nulos e são eventualmente também funções de x, u, $\frac{\partial\, u}{\partial x_1}$, $\ldots$, $\frac{\partial\, u}{\partial x_n}$, não dependendo de derivadas de ordem maior que 1 de u. A função F é real. A parte principal da equação acima é

$$\sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n A_{ab}\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_a \partial x_b} \tag{18.29}$$

e sua versão no sistema de coordenadas ξ será

$$\sum_{c=1}^n \sum_{d=1}^n B_{cd}\, \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_c \partial \xi_b} + \cdots \,,$$

onde omitimos os operadores diferenciais de ordem menor que 2, onde $v(\xi) = u\big(x(\xi)\big)$ e onde

$$B_{cd} \,:=\, \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n A_{ab} \frac{\partial \xi_c}{\partial x_a} \frac{\partial \xi_d}{\partial x_b} \,.$$

Essa relação é melhor escrita em forma matricial:

$$B \;=\; JAJ^T \,, \tag{18.30}$$

onde B é a matriz real simétrica $n \times n$ cujos elementos de matriz são B_{jk}, A é a matriz real simétrica $n \times n$ cujos elementos de matriz são A_{jk}, e J é a chamada *matriz Jacobiana*[24], cujos elementos de matriz são $J_{kl} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l}$. A transformação (18.30) é uma *transformação de congruência* (vide página 680). O fato de os coeficientes da parte principal de um operador de segunda ordem se transformarem segundo uma transformação de congruência tem consequências interessantes a serem exploradas. Como discutimos na Seção 10.5.2, página 678, o número de autovalores positivos, o número de autovalores negativos e o número de autovalores nulos (incluindo multiplicidade) de uma matriz real simétrica (ou autoadjunta) é conservado por transformações de congruência. Esse é o conteúdo do Teorema 10.18, página 679, conhecido como *Lei de Inércia de Sylvester*. Esse fato permite classificar operadores de segunda ordem de modo análogo à classificação de matrizes simétricas reais apresentada à página 680. Essa classificação é de grande importância na teoria das equações a derivadas parciais.

• **Classificação de EDPs de segunda ordem**

Equações a derivadas parciais em $\mathbb{R}^n$, de segunda ordem, e cujas partes principais são quaselineares, ou seja, da forma (18.29), podem ser classificadas em cada ponto de acordo o número de autovalores positivos, negativos e nulos (incluindo a multiplicidade) que possui a matriz dos coeficientes A_{ab} de sua parte principal. Essa classificação é de grande importância na teoria das equações a derivadas parciais. Dizemos que a equação é

[24] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851).

- *Parabólica*, se ao menos um dos autovalores da matriz A for nulo (em cujo caso A é singular);
- *Elíptica*, se todos os autovalores da matriz A forem positivos ou se todos forem negativos;
- *Hiperbólica* (ou *Estritamente Hiperbólica*), se todos os autovalores da matriz A forem positivos, exceto um que é negativo, ou o oposto: se todos os autovalores da matriz A forem negativos, exceto um que é positivo;
- *Ultra-hiperbólica*, se pelo menos dois dos autovalores forem negativos e pelo menos dois forem negativos, nenhum sendo nulo. Esse caso só pode ocorrer em $n \geq 4$.

É importante notar que se A depender da posição, a classificação da equação pode mudar de um ponto a outro. Isso é o caso da equação de Tricomi, como veremos logo adiante. Se A também depender de u, então a classificação pode depender também da solução u da equação.

O leitor que desejar entender o porquê da nomenclatura geométrica observada na classificação acima é convidado à leitura da Seção 10.5.2, página 678, especialmente da parte referente às superfícies quadráticas.

A equação de Laplace e a equação de Poisson são do tipo elíptico, a equação das ondas é do tipo hiperbólico, a equação do calor e do tipo parabólico. Vide adiante.

A classificação acima é importante, pois os tipos de equações mencionados possuem diversas características comuns. A classificação é útil, por exemplo, por permitir guiar o tipo de condição de contorno apropriada a cada problema. Em regiões finitas, equações do tipo elíptico são melhor servidas por condições de Dirichlet e de Neumann. Equações hiperbólicas são mais convenientemente tratadas em problemas de Cauchy e equações parabólicas por condições de Dirichlet. Também quando ao comportamento de singularidades nas condições iniciais e/ou de contorno a classificação é útil. Equações elípticas e parabólicas tendem a suavizar singularidades nas condições de contorno. Equações hiperbólicas tendem a propagá-las.

A classificação das equações em elípticas ou hiperbólicas pode também ser feita em sistemas de equações de primeira ordem. Trataremos disso mais adiante. Antes daremos uma olhada mais detalhada nas equações de segunda ordem em duas variáveis.

• O caso de EDPs de segunda ordem em $\mathbb{R}^2$. Exemplos

Para o caso $n = 2$ as condições que classificam as equações de segunda ordem exibidas acima podem ser diretamente expressas em termos do determinante da matriz de coeficientes $A = \left(\begin{smallmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{smallmatrix}\right)$ pois seu determinante $A_{11}A_{22} - (A_{12})^2$ é também igual ao produto de seus autovalores. Assim, se ambos os autovalores tiverem o mesmo sinal o determinante de A será positivo, se tiverem sinais trocados será negativo. Com isso, dizemos que a equação é

- *Parabólica*, se $A_{11}A_{22} - (A_{12})^2 = 0$;
- *Elíptica*, se $A_{11}A_{22} - (A_{12})^2 > 0$;
- *Hiperbólica*, se $A_{11}A_{22} - (A_{12})^2 < 0$.

Fazemos notar que a classificação acima é local, pois os coeficientes A_{ab} podem ser funções da posição e da função u. Como veremos logo abaixo, há equações ditas mistas (como a equação de Euler-Tricomi) cujo tipo varia com a posição, podendo ser parabólica, elíptica e hiperbólica.

• Alguns exemplos

Para a equação de difusão $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ temos $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Trata-se portanto de uma equação parabólica.

Para a equação de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ temos $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Trata-se portanto de uma equação elíptica. A equação de Poisson é *ipso facto* elíptica.

Para a equação de ondas $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ temos $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Trata-se portanto de uma equação hiperbólica. Também é hiperbólica a equação $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ (verifique!) que é a equação de ondas em coordenadas características. Vide Seção 46.4.1, página 2754, em particular a equação (46.127).

A *equação de Tricomi* (também conhecida como equação de *Euler-Tricomi*), $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, é elíptica na região $y < 0$, é parabólica na região $y = 0$ e é hiperbólica na região $y > 0$. Uma equação dessas é dita ser mista, pois seu tipo pode mudar de uma região para outra.

A equação (18.23) será parabólica na região em que $a_1(x,\ t)a_2(x,\ t) - \big(a_3(x,\ t)\big)^2 = 0$, elíptica na região em que $a_1(x,\ t)a_2(x,\ t) - \big(a_3(x,\ t)\big)^2 > 0$ e hiperbólica na região em que $a_1(x,\ t)a_2(x,\ t) - \big(a_3(x,\ t)\big)^2 < 0$.

• **Classificação de sistemas de equações a derivadas parciais de segunda ordem**

Consideremos em $\mathbb{R}^n$ um sistema de equações a derivadas parciais de segunda ordem em m funções incógnitas reais $u_1,\ \ldots,\ u_m$, que possa ser escrito na forma

$$\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n} A_{ab}^{(k)}\ \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_a \partial x_b}\ =\ F_k\left(x,\ u_1,\ \ldots,\ u_m,\ \frac{\partial\, u_1}{\partial x_1},\ \ldots, \frac{\partial\, u_1}{\partial x_n},\ \ldots,\ \frac{\partial\, u_m}{\partial x_1},\ \ldots, \frac{\partial\, u_m}{\partial x_n}\right)\ , \tag{18.31}$$

com $k = 1,\ \ldots,\ m$. Para cada k, os coeficientes $A_{ab}^{(k)}$ são reais, satisfazem a condição de simetria $A_{ab}^{(k)} = A_{ba}^{(k)}$, não são todos identicamente nulos e são eventualmente também funções de x, das funções u_j e suas derivadas de no máximo primeira ordem. As funções F_k, acima, são reais. Cada uma das m equações acima pode ser classificada de acordo com as propriedades dos autovalores da matriz A^k de maneira análoga ao que se fez para o caso de apenas uma função incógnita.

Um exemplo de interesse é a equação de Schrödinger dependente do tempo (18.10), a qual, por ter coeficientes complexos, pode ser representada como um sistema de duas equações reais. Como tal, é um sistema de tipo puramente parabólico, por consistir num par de equações parabólicas. Para ver isso, transformemo-la em um sistema de equações reais, escrevendo $u = u_1 + iu_2$, com u_1 e u_2 reais. Separando parte real e imaginária de (18.10), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u_1 &= \hbar\frac{\partial\, u_2}{\partial t} + V(x)u_1\ ,\\
\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u_2 &= -\hbar\frac{\partial\, u_1}{\partial t} + V(x)u_2\ .
\end{aligned}$$

Trata-se de um sistema na forma (18.31). Disso reconhecemos facilmente tratar-se de um par de equações parabólicas.

• **Classificação de sistemas quaselineares de primeira ordem**

Sistemas quaselineares de primeira ordem podem ser classificados em elípticos e hiperbólicos. Tal é discutido na Seção 18.5.3, página 1112.

18.3 O Método de Separação de Variáveis

Dentre os diversos métodos de resolução de equações a derivadas parciais aquele que encontra emprego mais frequentemente em aplicações é o chamado *método de separação de variáveis*.

A ideia desse método consiste basicamente no seguinte. Suponhamos que procuramos resolver uma equação a derivadas parciais (linear ou não) para uma função incógnita $u(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ de n variáveis $x_1,\ \ldots,\ x_n$. O método de separação de variáveis consiste em identificar uma função $\mathcal{F}$ conveniente de n variáveis e procurar escrever u em termos de $\mathcal{F}$ e n funções desconhecidas de uma variável $X_1,\ \ldots,\ X_n$ na forma

$$u(x_1,\ \ldots,\ x_n)\ =\ \mathcal{F}\big(X_1(x_1),\ \ldots,\ X_n(x_n)\big)\ ,$$

de sorte a transformar a equação a derivadas parciais para u em um conjunto de n equações diferenciais ordinárias para as funções $X_1,\ \ldots,\ X_n$, as quais podem ser eventualmente resolvidas pelo vasto arsenal de métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias.

Identificar a função $\mathcal{F}$ conveniente para cada caso é parte da arte de resolver equações por esse método. Por exemplo, mostra a experiência que para muitas das equações diferenciais lineares homogêneas pode-se adotar $\mathcal{F}$ na forma de um produto:

$$u(x_1,\ \ldots,\ x_n)\ =\ \mathcal{F}\big(X_1(x_1),\ \ldots,\ X_n(x_n)\big)\ =\ X_1(x_1)\cdots X_n(x_n)\ .$$

Veremos também exemplos de equações não lineares onde pode-se adotar $\mathcal{F}$ na forma de uma soma:

$$u(x_1,\ \ldots,\ x_n)\ =\ \mathcal{F}\big(X_1(x_1),\ \ldots,\ X_n(x_n)\big)\ =\ X_1(x_1) + \cdots + X_n(x_n)\ .$$

Outras formas para a função $\mathcal{F}$ são possíveis. Vide exemplos da Seção 18.3.2.

É importante frisar que nem sempre o método de separação de variáveis permite encontrar a totalidade das soluções de uma dada equação. No caso de equações lineares e homogêneas, porém, o método de separação de variáveis, combinado com o princípio de sobreposição, permite em muitos casos uma resolução completa de certos problemas sob certas condições iniciais e de contorno. Discutimos isso no que segue e nos exemplos do Capítulo 46, página 2722.

18.3.1 O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Lineares

O chamado *método de separação de variáveis* é frequentemente empregado na solução de certas equações a derivadas parciais lineares e homogêneas. Quer a sorte que muitas equações de interesse em Física pertencem à classe de equações para as quais esse método é eficaz[25], uma das razões da sua popularidade. Uma segunda vantagem desse método reside no fato de o mesmo transformar um problema de equações a derivadas parciais em uma série de problemas de equações diferenciais ordinárias, sobre as quais muito mais é conhecido, especialmente no que concerne a métodos de solução. Uma terceira razão para o interesse no método de separação de variáveis reside no fato de o mesmo permitir explorar simetrias de determinados problemas (por exemplo, a simetria por rotações), o que é de particular utilidade em certas situações. O método de separação de variáveis foi originalmente descoberto (ou inventado) por Daniel Bernoulli[26] no estudo de diversas equações diferenciais lineares, como a equação da corda vibrante (vide Seção 46.5, página 2775).

Vamos ilustrar o emprego do método de separação de variáveis no tratamento de uma equação a derivadas parciais linear e homogênea de segunda ordem em duas variáveis reais, digamos x e y, definidas em um certo domínio de $\mathbb{R}^2$, mas é importante que se diga que o método é também eventualmente aplicável se mais variáveis estiverem envolvidas e/ou se a ordem da equação for diferente de dois.

Seja a equação a derivadas parciais linear e homogênea da forma

$$A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C(x)\frac{\partial u}{\partial x} + D(y)\frac{\partial u}{\partial y} + \big(E(x)+F(y)\big)u \;=\; 0\,, \tag{18.32}$$

sendo que ou A ou B não é identicamente nula (de modo que a equação seja de segunda ordem em pelo menos uma das variáveis, mas não necessariamente em ambas) a ser satisfeita por uma função incógnita de duas variáveis $u(x,\,y)$. Como claramente indicado acima, as funções A, C e E são funções de uma única variável, a saber x, enquanto que B, D e F são funções de uma única variável, a saber y. É preciso supor muito pouco sobre essas funções, por exemplo, que as mesmas são contínuas, mas mesmo essa hipótese pode ser enfraquecida, o que ocorre em muitos exemplos de interesse (vide as próximas seções). Por enquanto, deixemos de lado considerações sobre o domínio de validade $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ da equação acima e sobre condições de contorno e concentremo-nos em procurar soluções particulares de (18.32).

O método de separação de variáveis consiste em procurar soluções particulares para a equação (18.32) que sejam da forma $u(x,\,y) = \mathcal{F}(X(x),\,Y(y)) := X(x)Y(y)$. Antes de fazermos perguntas sobre a aplicabilidade dessa ideia, vejamos a que a mesma conduz. Inserindo o Ansatz $u(x,\,y) = X(x)Y(y)$ na equação (18.32), obtém-se

$$A(x)X''(x)Y(y) + B(y)X(x)Y''(y) + C(x)X'(x)Y(y) + D(y)X(x)Y'(y) + \big(E(x)+F(y)\big)X(x)Y(y) \;=\; 0\,. \tag{18.33}$$

Dividindo-se essa expressão por $X(x)Y(y)$, obtém-se

$$A(x)\frac{X''(x)}{X(x)} + B(y)\frac{Y''(y)}{Y(y)} + C(x)\frac{X'(x)}{X(x)} + D(y)\frac{Y'(y)}{Y(y)} + E(x) + F(y) \;=\; 0\,.$$

Aqui, é de se observar que cada termo da expressão acima é função de uma única variável. Separando os termos que dependem de cada variável em cada lado da igualdade, obtém-se da última expressão

$$\left(A(x)\frac{X''(x)}{X(x)} + C(x)\frac{X'(x)}{X(x)} + E(x)\right) \;=\; -\left(B(y)\frac{Y''(y)}{Y(y)} + D(y)\frac{Y'(y)}{Y(y)} + F(y)\right)\,.$$

Chegamos agora ao ponto crucial que justifica o que foi feito até aqui. Do lado esquerdo da igualdade acima encontra-se uma função que depende apenas de x e do lado direito uma função apenas de y. Ora, como ambas as variáveis são

[25] Por trás do fato de muitos sistemas de interesse serem solúveis pelo método de separação de variáveis residem propriedades profundas ligadas a simetrias das equações.

[26] Daniel Bernoulli (1700–1782).

independentes, uma tal igualdade só é possível se ambos os lados forem iguais a uma mesma constante, que denotaremos por λ, a qual é denominada *constante de separação*. Assim,

$$\left(A(x)\frac{X''(x)}{X(x)}+C(x)\frac{X'(x)}{X(x)}+E(x)\right) \;=\; -\left(B(y)\frac{Y''(y)}{Y(y)}+D(y)\frac{Y'(y)}{Y(y)}+F(y)\right) \;=\; \lambda\,,$$

o que implica o par de equações desacopladas

$$A(x)X''(x)+C(x)X'(x)+\big(E(x)-\lambda\big)X(x) \;=\; 0\,, \tag{18.34}$$

$$B(y)Y''(y)+D(y)Y'(y)+\big(F(y)+\lambda\big)Y(y) \;=\; 0\,, \tag{18.35}$$

cada qual sendo uma equação diferencial ordinária[27]. Ambas as equações podem agora, em princípio, ser tratadas separadamente com os métodos de solução disponíveis para equações diferenciais ordinárias lineares, como o método de expansão em série de potências, o método de Frobenius ou outros que se adéquem. É de se lembrar, porém, que ambas as equações não são totalmente independentes, pois têm em comum a presença da mesma constante de separação ainda indeterminada λ. Em muitos problemas de Física as constantes de separação desempenham o papel de autovalores de operadores diferenciais e são fixadas por condições de contorno que garantam que esses operadores sejam autoadjuntos em um espaço de Hilbert conveniente.

Uma pergunta que se coloca nesse momento é se a equação (18.32) é a forma mais geral de uma equação linear de segunda ordem em duas variáveis para a qual o Ansatz $u(x,\,y)=X(x)Y(y)$ conduz a equações separadas para X e para Y. Não é do conhecimento do autor que sejam conhecidas condições necessárias e suficientes para a separabilidade de equações a derivadas parciais lineares, de modo que a forma da (18.32) é apenas uma condição suficiente para separabilidade. Um pouco de experimentação (faça!) permite concluir que a separação dificilmente se dá caso haja na equação um termo com uma derivada mista $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, ou se as funções A, B etc. não forem funções de uma única variável especificamente como explicitado em (18.32), mas há exceções, como mostra o exemplo do Exercício E. 18.4, abaixo.

Outrossim, não é do conhecimento do autor que tenham sido determinadas classes gerais de equações a derivadas parciais não lineares para as quais o método é de separação de variáveis seja eficaz. A aplicabilidade desse método é, portanto, mais uma matéria de arte que de ciência, mas considerações sobre simetrias são por vezes de grande utilidade (vide [76] e [477]). Alguns exemplos de aplicações do método de separação de variáveis para equações a derivadas parciais não lineares são discutidos na Seção 18.3.2, adiante.

É de se notar, porém, que o método de separação de variáveis não se restringe a equações envolvendo apenas duas variáveis, nem a equações de segunda ordem. Nosso interesse pelas equações de segunda ordem provém do fato de que a grande maioria das equações a derivadas parciais encontrada na Física é de segunda ordem.

E. 18.2 *Exercício*. Encontre uma classe de equações a derivadas parciais de primeira ordem lineares e homogêneas em duas variáveis x e y para as quais o Ansatz $u(x,\,y)=X(x)Y(y)$ conduz a equações separadas para X e para Y. Obtenha essas equações. ✣

E. 18.3 *Exercício*. Encontre uma classe de equações a derivadas parciais de terceira ordem lineares e homogêneas em duas variáveis x e y para as quais o Ansatz $u(x,\,y)=X(x)Y(y)$ conduz a equações separadas para X e para Y. Obtenha essas equações. ✣

E. 18.4 *Exercício*. Mostre que uma equação diferencial da forma

$$A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\big(C(x)+D(y)\big)\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; 0 \tag{18.36}$$

[27] Alguns podem objetar a demonstração de acima das relações (18.34)-(18.35) com base no fato que a divisão por $X(x)Y(y)$ não é bem definida nos pontos onde X ou Y eventualmente se anulem. Uma outra forma de argumentar, que evita a divisão por $X(x)Y(y)$, é a seguinte. A relação (18.33) pode ser escrita como

$$X(x)\Big(-B(y)Y''(y)-D(y)Y'(y)-F(y)Y(y)\Big)-\Big(A(x)X''(x)+C(x)X'(x)+E(x)X(x)\Big)Y(y) \;=\; 0\,.$$

Denotando $V(y):=-B(y)Y''(y)-D(y)Y'(y)-F(y)Y(y)$ e $W(x):=A(x)X''(x)+C(x)X'(x)+E(x)X(x)$, temos $X(x)V(y)-W(x)Y(y)=0$, ou seja, $\det\left(\begin{smallmatrix}X(x) & W(x)\\ Y(y) & V(y)\end{smallmatrix}\right)=0$. Isso implica que para cada par $(x,\,y)$ as colunas da matriz são proporcionais, ou seja, existe $\lambda_{x,\,y}$ (eventualmente dependente de $(x,\,y)$) tal que $W(x)=\lambda_{x,\,y}X(x)$ e $V(y)=\lambda_{x,\,y}Y(y)$. Ambas a igualdades implicam, porém, que $\lambda_{x,\,y}$ independe de x e de y e, assim, obtemos disso a relações (18.34)-(18.35).

permite separação de variáveis na forma $u(x,\ y) = X(x)Y(y)$. Sugestão: substitua esse Ansatz na equação e divida-a por $X'(x)Y(y)$, obtendo, com uma constante de separação λ,

$$A(x)X''(x) + \big(E(x) - \lambda\big)X'(x) \quad = \quad 0\,,$$

$$B(y)Y'(y) + \big(D(y) + \lambda\big)Y(y) \quad = \quad 0\,.$$

Outra sugestão é observar que a equação (18.36) pode ser reduzida a uma equação linear de primeira ordem para $\frac{\partial u}{\partial x}$, a qual é separável. ✠

O que determina a constante de separação λ? Em situações típicas ela é determinada pela imposição de condições de contorno, ou de outras condições subsidiárias à solução, tais como que ela seja contínua, ou que ela seja periódica, ou que ela seja limitada, ou que ela seja de quadrado integrável (o que tipicamente ocorre na Mecânica Quântica) etc. Os exemplos que se seguirão ilustrarão essas diversas situações.

Um certo cuidado aqui é necessário. Para a imposição de condições de contorno ou subsidiárias às soluções particulares da forma de um produto $X(x)Y(y)$ é necessário que essas condições de contorno possam ser expressas separadamente como condições sobre a dependência em x e sobre a dependência em y. Geralmente[28], isso só é possível se o domínio $\mathcal{D}$ de validade da equação (entenda-se, a região onde o problema está definido) for um retângulo tal como $\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq L,\ 0 \leq y \leq M\}$, um disco $\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq L,\ 0 \leq y \leq 2\pi\}$ com uma dependência periódica de período 2π na variável y (que representaria um ângulo, em algum sistema de coordenadas) ou talvez um toro $\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi\}$ com uma dependência periódica de período 2π em ambas as variáveis. Os exemplos são os melhores mestres nessa discussão e vários deles são apresentados no Capítulo 46, página 2722.

Assim, mesmo que uma equação diferencial tenha a forma (18.32) o método de separação de variáveis será ineficaz se as condições de contorno e subsidiárias não forem compatíveis com soluções particulares na forma de um produto.

Um fato importante observado na prática (vide os exemplos tratados no Capítulo 46, página 2722) é que já a imposição de algumas das condições de contorno ou subsidiárias fixa todos os valores possíveis para a constante de separação λ e, em muitos casos, esse conjunto de valores possíveis é um conjunto contável: $\{\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Para cada uma dessas constantes λ_n haverá possivelmente duas soluções independentes para a equação (18.34) e duas soluções independentes para a equação (18.35) (pois são equações de segunda ordem[29]). Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ teremos associada uma constante de separação λ_n, duas soluções linearmente independentes, $X_n^{(1)}$ e $X_n^{(2)}$, para a equação (18.34) (a solução geral sendo uma combinação linear de ambas) e duas soluções linearmente independentes, $Y_n^{(1)}$ e $Y_n^{(2)}$, para a equação (18.35) (a solução geral sendo uma combinação linear de ambas). A solução particular fornecida pelo Ansatz $u(x,\ y) = X(x)Y(y)$ assume assim, para cada n, a forma $\Big(\alpha_n X_n^{(1)}(x) + \beta_n X_n^{(2)}(x)\Big)\Big(\gamma_n Y_n^{(1)}(y) + \delta_n Y_n^{(2)}(y)\Big)$, onde α_n, β_n, γ_n e δ_n são constantes.

Como a equação (18.32) é linear e homogênea, e as condições de contorno são homogêneas, o princípio de sobreposição se aplica e uma solução mais geral seria obtida somando-se as soluções obtidas para cada n, ou seja,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \Big(\alpha_n X_n^{(1)}(x) + \beta_n X_n^{(2)}(x)\Big)\Big(\gamma_n Y_n^{(1)}(y) + \delta_n Y_n^{(2)}(y)\Big)\,. \tag{18.37}$$

As constantes α_n, β_n, γ_n e δ_n devem ainda ser fixadas por meio das demais condições de contorno e subsidiárias (que não aquelas que já foram usadas para fixar os λ_n's) e, após isso, é preciso também demonstrar que a série (18.37) assim obtida converge.

Será, afinal, a expressão (18.37) a solução completa do problema, que resolve a equação diferencial e satisfaz todas as condições de contorno e subsidiárias? Em muitos casos, a resposta é sim, o que pode ser provado por teoremas que garantam a unicidade de soluções de certas equações diferenciais que satisfaçam certas condições de contorno. Vide Seção 18.6, página, 1126.

Como comentamos, e como ilustram os exemplos do Capítulo 46, página 2722, o método de separação de variáveis delineado acima é feliz em resolver vários problemas envolvendo equações a derivadas parciais lineares de interesse em Física. Todavia, o estudante não deve adquirir a falsa impressão de que o método de separação de variáveis é o único método de solução disponível para equações a derivadas parciais. Muitos outros métodos são oferecidos na gigantesca literatura sobre o assunto (vide para tal [133, 134] ou mesmo [690]), cada qual empregável em uma classe específica de

[28] Para um contraexemplo, vide Exercício E. 46.58, página 2838.

[29] Nada impede, porém, que se tenha $A \equiv 0$ ou $B \equiv 0$, em cujo caso uma das equações (18.34) ou (18.35) será de primeira ordem. Tal ocorre, por exemplo, na equação de difusão. Vide página 2733.

equações. Para nos limitarmos a um único exemplo, citamos o chamado *método das características* (vide Seção 18.5, página 1095), que também permite a resolução de certas equações a derivadas parciais em termos de equações diferenciais ordinárias. Boa parte do estudo de equações a derivadas parciais não é voltado à procura de soluções para as equações, mas sim a análises qualitativas de propriedades das soluções. Muitas vezes, advêm dessas análises informações úteis sobre o comportamento do sistema de interesse que não são facilmente obteníveis diretamente das soluções, mesmo caso estas sejam conhecidas (vide para tal [223], [185], [496], [133, 134]).

18.3.2 O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Não Lineares

O método de separação de variáveis pode ser também empregado na resolução de algumas equações a derivadas parciais não lineares. Vejamos alguns exemplos. Seja a equação da Óptica Geométrica em duas dimensões:

$$(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 \;=\; 1\;. \tag{18.38}$$

Se procurarmos soluções na forma $u(x,\,y) = \mathcal{F}(X(x),\,Y(y)) = X(x) + Y(y)$, obtemos

$$\big(X'(x)\big)^2 + \big(Y'(y)\big)^2 \;=\; 1 \quad \text{ou seja} \quad \big(X'(x)\big)^2 \;=\; 1 - \big(Y'(y)\big)^2\;.$$

Na última igualdade, vemos que o lado esquerdo depende apenas de x e o direito apenas de y, sendo ambos, portanto, iguais a uma mesma constante a^2. Obtemos, assim, o par de equações diferenciais ordinárias desacopladas

$$\big(X'(x)\big)^2 \;=\; a^2 \quad \text{e} \quad \big(Y'(y)\big)^2 \;=\; 1 - a^2\;,$$

cujas soluções são $X(x) = \pm ax + b_1$ e $Y(y) = \pm\sqrt{1-a^2}y + b_2$, onde b_1 e b_2 são constantes arbitrárias e onde as duas escolhas de sinal $\pm$ podem ser feitas independentemente. Portanto, temos para (18.38) uma solução na forma

$$u(x,\,y) \;=\; \pm ax \pm \sqrt{1-a^2}\;y + b\;,$$

com $b \equiv b_1 + b_2$ e com os dois sinais $\pm$ independentes.

O exemplo acima é interessante pois exibe uma situação na qual o método de separação de variáveis não esgota a totalidade de soluções. Como é fácil constatar, $u(x,\,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, para $(x,\,y) \neq (0,\,0)$, é também uma solução da mesma equação. Além dessa há ainda muitas outras soluções.

Os exercícios que seguem ilustram várias situações nas quais o método de separação de variáveis pode ser aplicado.

E. 18.5 *Exercício*. Aplique o método de separação de variáveis para encontrar uma solução para a equação da Óptica Geométrica em três dimensões:

$$(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 + (\partial_z u)^2 \;=\; 1\;,$$

com $u(x,\,y,\,z) = X(x) + Y(y) + Z(z)$ e obtenha a solução

$$u(x,\,y,\,z) \;=\; \pm ax \pm by \pm \sqrt{1-a^2+b^2}\,z + c\;,$$

os três sinais $\pm$ sendo independentes. Observe novamente que $u(x,\,y,\,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, para $(x,\,y,\,z) \neq (0,\,0,\,0)$, é também uma solução da mesma equação. ✠

E. 18.6 *Exercício*. De [134]. Aplique o método de separação de variáveis com a tentativa $u(x,\,y) = X(x) + Y(y)$ para a equação

$$f(x)(\partial_x u)^2 + g(y)(\partial_y u)^2 \;=\; a(x) + b(y)\;.$$

Obtém-se as soluções

$$u(x,\,y) \;=\; \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{a(\xi)+\alpha}{f(\xi)}}\,d\xi + \int_{y_0}^{y} \sqrt{\frac{b(\eta)-\alpha}{g(\eta)}}\,d\eta + \beta\;,$$

onde α e β são constantes arbitrárias. ✠

E. 18.7 *Exercício*. Aplique o método de separação de variáveis para encontrar uma solução para equação

$$(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 \;=\; u \;.$$

Sugestão: tente $u(x,\,y) = X(x) + Y(y)$. ✠

E. 18.8 *Exercício*. Aplique o método de separação de variáveis para encontrar uma solução para equação

$$(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 \;=\; u \;.$$

Sugestão: tente

$$u(x,\,y) \;=\; \mathcal{F}\big(X(x),\,Y(y)\big) \;=\; f\big(X(x)+Y(y)\big) \;=\; \frac{\big(X(x)+Y(y)+\gamma\big)^2}{4}\;,$$

onde $f(z) = (z+\gamma)^2/4$ é solução de $(f'(z))^2 = f(z)$. Acima, γ é uma constante arbitrária. ✠

E. 18.9 *Exercício*. Aplique o método de separação de variáveis para encontrar uma solução para a equação

$$(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 \;=\; u^2 \;.$$

Sugestão: tente $u(x,\,y) = X(x)Y(y)$. ✠

E. 18.10 *Exercício*. Aplique o método de separação de variáveis para encontrar uma solução para equação

$$(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 \;=\; u^2 \;.$$

Sugestão: tente

$$u(x,\,y) \;=\; \mathcal{F}\big(X(x),\,Y(y)\big) \;=\; f\big(X(x)+Y(y)\big) \;=\; \exp\Big(\pm\big(X(x)+Y(y)\big)+\gamma\Big)\;,$$

onde $f(z) = e^{\pm z+\gamma}$ é solução de $(f')^2 = (f)^2$. Acima, γ é uma constante arbitrária. ✠

E. 18.11 *Exercício*. Aplique o método de separação de variáveis para encontrar uma solução para equação

$$(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 \;=\; u^2 \;,$$

Sugestão: tente

$$u(x,\,y) \;=\; \mathcal{F}\big(X(x),\,Y(y)\big) \;=\; f\big(X(x)+Y(y)\big) \;=\; \exp\Big(\pm 2\sqrt{X(x)+Y(y)}+\gamma\Big)\;,$$

onde $f(z) = \exp(\pm 2\sqrt{z}+\gamma)$ é solução de $\big(f'(z)\big)^2 = z^{-1}(f(z))^2$. Acima, γ é uma constante arbitrária. ✠

E. 18.12 *Exercício*. Aplique o método de separação de variáveis para encontrar uma solução para equação

$$(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 \;=\; u^n \;,\quad n \neq 2 \;.$$

Sugestão: tente

$$u(x,\,y) \;=\; \mathcal{F}\big(X(x),\,Y(y)\big) \;=\; f\big(X(x)+Y(y)\big) \;=\; \Big[\pm(2-n)\sqrt{X(x)+Y(y)}+\gamma\Big]^{\frac{2}{2-n}}\;,$$

onde $f(z) = \Big[\pm(2-n)z^{1/2}+\gamma\Big]^{\frac{2}{2-n}}$ é solução de $(f'(z))^2 = z^{-1}(f(z))^n$. Acima, γ é uma constante arbitrária. ✠

E. 18.13 *Exercício*. Generalizando as ideias acima, aplique o método de separação de variáveis para encontrar soluções para equação

$$(\partial_x u)^m + (\partial_y u)^m \;=\; u^n \;.$$

✠

18.4 Problemas de Cauchy e Superfícies Características. Definições e Exemplos Básicos

Problema de Cauchy é o nome dado a uma classe de problemas envolvendo equações a derivadas parciais e que merece particular atenção devido à sua relevância em aplicações (especialmente em Física). Problemas de Cauchy são também conhecidos como problemas de condição inicial, mas no caso de EDPs essa nomenclatura pode ser enganosa e um certo cuidado é recomendado ao estudante.

• **Problemas de Cauchy**

Um problema de Cauchy envolve a resolução de um sistema de equações a derivadas parciais independentes, como o sistema (18.7), do seguinte tipo:

1. O número de equações é igual ao número $m \geq 1$ de funções incógnitas.
2. Para uma das variáveis, que sem perda de generalidade suporemos ser a variável x_n, tem-se o seguinte:
   (a) Para cada $i = 1, \ldots, m$, seja n_i o maior grau das derivadas parciais da função u_i que ocorre no sistema. Então, suporemos que cada derivada parcial de grau máximo $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial x_n^{n_i}}$ pode ser resolvida do sistema, de modo que o mesmo assume a forma

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial x_n^{n_i}} = F_i\left(x_1, \ldots, x_n, u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_{n-1}^{k_{n-1}} \partial x_n^{k_n}}, \ldots\right), \tag{18.39}$$

   $i = 1, \ldots, m$, sendo que para cada $j = 1, \ldots, m$ tem-se $k = k_1 + \ldots + k_{n-1} + k_n \leq n_j$ mas com $k_n < n_j$.
   (b) Para algum ζ são prescritas na superfície definida por $x_n = \zeta$, para cada $k = 0, 1, \ldots, n_i - 1$ e cada $i = 1, \ldots, m$, as condições

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial x_n^k}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \zeta) = \phi_{i,k}(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

   com certas funções dadas $\phi_{i,k}$.
   Assim, para cada $i = 1, \ldots, m$ são fixadas a função u_i na superfície $x_n = \zeta$ e as $n_i - 1$ primeiras derivadas normais à superfície $x_n = \zeta$ da função u_i.
   As funções $\phi_{i,k}$, com $k = 1, \ldots, n_i - 1$ e $i = 1, \ldots, m$, são denominadas *dados de Cauchy* do problema.

Alguns autores denominam (18.39) a *forma de Kovalevskaya*[30] do sistema de equações a derivadas parciais do problema de Cauchy em questão. Assim, na forma de Kovalevskaya temos no lado esquerdo da equação as derivadas de ordem maior das funções incógnitas u_i em relação à variável x_n (em relação à qual o problema de Cauchy é definido) e no lado direito temos funções envolvendo derivadas de ordem menor. Logo adiante, quando apresentarmos a noção de equação característica, discutiremos condições para que a forma de Kovalevskaya exista.

• **Alguns poucos problemas de Cauchy**

Problemas de Cauchy são muito comuns em problemas mecânicos, onde $x_n \equiv t$ é a variável "tempo", as equações são (tipicamente) de segunda ordem e os dados de Cauchy prescrevem posições e velocidades do sistema em um instante "inicial" $t = t_0$. Um problema prototípico é o problema da equação de ondas em uma dimensão espacial descrito e resolvido na Seção 46.4.1, página 2754.

O problema de resolver a equação de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ em $\mathbb{R}^2$ sob as condições $u(0, y) = \phi_0(y)$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \phi_1(y)$ é um problema da Cauchy (para a variável x) com os dados de Cauchy ϕ_0 e ϕ_1 fixados na superfície $x = 0$. O problema de resolver a equação de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ em $\mathbb{R}^2$ sob as condições $u(x, 0) = \tilde{\phi}_0(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \tilde{\phi}_1(x)$ é um problema da Cauchy (para a variável y) com os dados de Cauchy $\tilde{\phi}_0$ e $\tilde{\phi}_1$ fixados na superfície $y = 0$.

O problema de determinar a solução da equação $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ com a condição inicial que fixa u em $t = 0$: $u(x, 0) = u_0(x)$, sendo u_0 uma função dada, (problema esse típico de problemas de difusão) não é um problema da Cauchy, pois a derivada

[30] Sofia Vasilyevna Kovalevskaya (1850–1891).

de ordem maior é 2, e na variável x. Para essa equação, um problema de Cauchy seria o determinar a solução sob as condições $u(0,\ t) = T(t)$, $\frac{\partial\, u}{\partial x}(0,\ t) = Q(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, sendo T e Q funções dadas.

• **A equação característica**

Para que o sistema (18.7) possa ser resolvido nas derivadas $\frac{\partial^{n_j}\, u_j}{\partial x_n^{n_j}}$, $j = 1,\ \ldots,\ m$, e, portanto, para que se possa ter a forma de Kovalevskaya (18.39), é suficiente pelo Teorema da Função Implícita[31] que seja não nulo em $x_n = \zeta$ o determinante da matriz $m \times m$ cujos elementos são definidos pelas derivadas

$$H_{ij} \;=\; \frac{\partial\, G_i\Big(x,\ u_1(x),\ \ldots,\ u_m(x),\ D^{\alpha_1^{j1}} u_1(x)\ \ldots,\ D^{\alpha_{M_{1j}}^{j1}} u_1(x),\ \ \ldots,\ D^{\alpha_1^{jm}} u_m(x)\ \ldots,\ D^{\alpha_{M_{mj}}^{jm}} u_m(x)\Big)}{\partial\ \left(\dfrac{\partial^{n_j}\, u_j}{\partial x_n^{n_j}}\right)} \tag{18.40}$$

$i,\ j = 1,\ \ldots,\ m$. Implicitamente, assumimos aqui que as funções G_i sejam contínuas e diferenciáveis em suas variáveis. A continuidade garantirá que esse determinante é não nulo em uma vizinhança da superfície $\mathcal{C}$ definida por $x_n = \zeta$.

Note que $\det H$ depende (especialmente em sistemas não lineares) da solução u e dos dados de Cauchy. Se para uma dada u e determinados dados de Cauchy tivermos $\det H = 0$ em algum ponto de $\mathcal{C}$, então $\mathcal{C}$ é dita ser uma *superfície característica*, ou simplesmente *característica*, para o problema de Cauchy em questão. A equação $\det H = 0$ é denominada *equação característica* do problema em questão. Se $\mathcal{C}$ for característica e não for possível resolver as derivadas $\frac{\partial^{n_i}\, u_i}{\partial x_n^{n_i}}$ para que se possa ter (18.39), então o sistema de equações a derivadas parciais (18.7) representa restrições aos dados de Cauchy em $\mathcal{C}$, sendo por isso denominado *interno*.

A noção de superfície característica será estendida quando tratarmos de problemas de Cauchy generalizados logo adiante.

É também importante notar que no caso de sistemas não lineares, mais precisamente, no caso de sistemas que apresentam dependência não linear nas derivadas de ordem maior em relação a x_n, as equações (18.39) podem não ser únicas, conduzindo a várias possíveis soluções.

Exemplo 18.1 Considere a equação $a(x,\ y,\ u)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ y) + b(x,\ y,\ u)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x,\ y,\ u)\dfrac{\partial\, u}{\partial x} = 0$ definida em $\mathbb{R}^2$ sob as condições $u(x,\ 0) = f(x)$, $\frac{\partial\, u}{\partial y}(x,\ 0) = g(x)$, f e g sendo funções dadas. Esse é um problema de Cauchy (na variável y) com os dados de Cauchy fornecidos na superfície $\mathcal{C}$ definida por $y = 0$. A equação característica é $b(x,\ y,\ u) = 0$ (verifique!). Se b e f forem tais que $b(x,\ 0,\ f(x)) = 0$ para algum $x \in \mathbb{R}$, então a superfície $\mathcal{C}$ é uma superfície característica. Naturalmente, se $\mathcal{C}$ não é característica a equação pode ser escrita na forma de Kovalevskaya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \;=\; -\frac{a(x,\ y,\ u)}{b(x,\ y,\ u)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ y) - \frac{c(x,\ y,\ u)}{b(x,\ y,\ u)}\frac{\partial\, u}{\partial x}\ .$$

♦

Exemplo 18.2 Considere o sistema de equações de segunda ordem em $\mathbb{R}^3$

$$A_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + A_{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + J_1 \;=\; 0\ ,$$

$$A_{21}\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + A_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + J_2 \;=\; 0\ ,$$

sob as condições

$$\begin{array}{rclcrcl} u_1(x,\ y,\ 0) & = & f_1(x,\ y) & , & u_2(x,\ y,\ 0) & = & f_2(x,\ y) \quad , \\ \frac{\partial\, u_1}{\partial z}(x,\ y,\ 0) & = & g_1(x,\ y) & , & \frac{\partial\, u_2}{\partial z}(x,\ y,\ 0) & = & g_2(x,\ y) \quad , \end{array} \tag{18.41}$$

na superfície $z = 0$, com f_a e g_a, $a = 1,\ 2$, sendo funções dadas.

[31] Vide, *e.g.*, [132] ou qualquer outro bom livro de Cálculo de funções de várias variáveis. Para uma versão geral do Teorema da Função Implícita, vide Teorema 26.8, página 1611.

Acima u é uma função de $x,\ y,\ z$ e A_{ij} e J_i são funções de $x,\ y,\ z,\ u_i,\ \frac{\partial\, u_i}{\partial x},\ \frac{\partial\, u_i}{\partial y},\ \frac{\partial\, u_i}{\partial z},\ \frac{\partial^2\, u_i}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2\, u_i}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2\, u_i}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2\, u_i}{\partial x \partial z},\ \frac{\partial^2\, u_i}{\partial y \partial z}$ com $i = 1,\ 2$. Trata-se de um problema de Cauchy e a equação característica é

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \ = \ A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} \ = 0 \, .$$

Note que nesse caso o lado esquerdo da equação característica é inteiramente determinado pelos dados de Cauchy (18.41) (observar que, além de u_i e $\frac{\partial\, u_i}{\partial z}$, $i = 1,\ 2$, também as derivadas $\frac{\partial\, u_i}{\partial x}$, $\frac{\partial\, u_i}{\partial y}$, $\frac{\partial^2\, u_i}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\, u_i}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\, u_i}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2\, u_i}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2\, u_i}{\partial y \partial z}$, com $i = 1,\ 2$, são determinadas em $z = 0$ pelos dados de Cauchy (18.41). Por exemplo, $\frac{\partial^2\, u_1}{\partial x \partial y}(x,\ y,\ 0) = \frac{\partial^2\, f_1}{\partial x \partial y}(x,\ y,\ 0)$).

A forma de Kovalevskaya do sistema acima é

$$\frac{\partial^2\, u_1}{\partial z^2} \ = \ \frac{-A_{22}J_1 + A_{12}J_2}{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}} \, ,$$

$$\frac{\partial^2\, u_2}{\partial z^2} \ = \ \frac{A_{21}J_1 - A_{11}J_2}{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}} \, ,$$

o lado direito sendo uma função de $x,\ y,\ z,\ u_i,\ \frac{\partial\, u_i}{\partial x},\ \frac{\partial\, u_i}{\partial y},\ \frac{\partial\, u_i}{\partial z},\ \frac{\partial^2\, u_i}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2\, u_i}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2\, u_i}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2\, u_i}{\partial x \partial z},\ \frac{\partial^2\, u_i}{\partial y \partial z}$ com $i = 1,\ 2$. ♦

E. 18.14 *Exercício*. Verifique as afirmações do Exemplo 18.2. ✠

• **Problemas de Cauchy generalizados**

Em muitas aplicações, que se estendem do Mecânica de Corpos Deformáveis, da Teoria da Difusão e da Mecânica dos Fluidos à Teoria das Relatividade Geral, é importante considerarmos problemas de Cauchy mais gerais do que aqueles tratados acima. Nas situações descritas acima os dados de Cauchy eram oferecidos em uma superfície plana $x_n = \zeta$, constante. Desejamos tratar da situação mais geral no qual procuramos a solução de um sistema como (18.7), definido em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, que aqui escrevemos de forma simplificada como

$$G_i \left(x,\ u_j,\ \cdots,\ D_x^{\alpha^{jl}} u_j \ , \ \cdots \right) \ = \ 0 \, , \tag{18.42}$$

para $i = 1,\ \ldots,\ m$, com $m \geq 1$ equações independentes e igual número de funções incógnitas u_i, sendo fornecidos dados de Cauchy sobre uma superfície $n-1$-dimensional $\mathcal{C}$ não necessariamente plana.

Para sermos mais específicos, seja, como acima, definido por n_i o maior grau das derivadas da função u_i que ocorre no sistema (18.42). Seja uma superfície $n-1$ dimensional $\mathcal{C}$, orientável, suposta suficientemente suave, e para cada $i = 1,\ \ldots,\ m$, sejam fornecidos em cada ponto de $\mathcal{C}$ o valor da função u_i e de suas $n_i - 1$ primeiras derivadas normais (à $\mathcal{C}$):

$$\frac{\partial^k\, u_i}{\partial n^k}(x) \ = \ \phi_{i,\,k}(x)$$

para todo $x \in \mathcal{C}$ e para todos $k = 0,\ \ldots,\ n_i - 1$ e $i = 1,\ \ldots,\ m$, sendo $\phi_{i,\,k}$ funções dadas. Acima, $\frac{\partial^k}{\partial n^k} := \left(\hat{n}(x) \cdot \vec{\nabla} \right)^k$, onde $\hat{n}(x)$ é um vetor unitário normal a $\mathcal{C}$ em $x \in \mathcal{C}$. Suporemos que o campo $\mathcal{C} \ni x \mapsto \hat{n}(x)$ seja contínuo e suficientemente diferenciável[32]. A orientação do campo $\hat{n}$ é decidida pelo problema.

Suporemos que seja possível construir um sistema de coordenadas (ao menos em uma vizinhança de $\mathcal{C}$), que denotaremos por $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$ tais que $\mathcal{C}$ corresponda à superfície de nível $\xi_n = \zeta$, para alguma constante ζ e tal que, em $\mathcal{C}$ $\frac{\partial^k}{\partial n^k} = \frac{\partial^j}{\partial \xi_n^j}$ para todo $j \geq 1$. Geometricamente, isso significa dizer que as curvas $(-\epsilon,\ \epsilon) \ni s \mapsto \left(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n-1},\ \zeta + s \right)$ (definidas para algum $\epsilon > 0$, pequeno o suficiente) são normais a $\mathcal{C}$ nos pontos $\left(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n-1},\ \zeta \right) \in \mathcal{C}$. Suporemos também que em $\mathcal{C}$ (e, devido à continuidade, em uma vizinhança de $\mathcal{C}$, portanto) o Jacobiano da transformação de coordenadas $x \mapsto \xi$ seja não nulo.

No sistema de coordenadas ξ os dados de Cauchy ficam

$$\frac{\partial^k\, v_i}{\partial \xi_i^k}(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n-1},\ \zeta) \ = \ \tilde{\phi}_{i,\,k}(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n-1})$$

[32] Pelo menos tantas vezes quando $\max n_i - 1$.

$k = 0,\ \ldots,\ n_i - 1$ e $i = 1,\ \ldots,\ m$, onde $v_i(\xi) \equiv u_i\big(x(\xi)\big)$ e $\tilde{\phi}_{i,\,k} = \phi_{i,\,k}\big(x(\xi)\big)$, a última valida, naturalmente, em $\mathcal{C}$.

Uma ponto importante é expressar o próprio sistema (18.42) nas novas variáveis ξ. Para tal podemos fazer uso das transformações (18.27)-(18.28) e com isso obtemos

$$G_i\left(\xi,\ v_j,\ \cdots,\ \sum_{\beta_1\in\mathbf{N}^n_{(\alpha^{jl})_1}}\ \cdots\ \sum_{\beta_n\in\mathbf{N}^n_{(\alpha^{jl})_n}}\left\{\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\,\xi_j}{\partial x_k}\right)^{(\beta_k)_j}\right]\right\}D^\gamma_\xi v_j + \cdots\ ,\ \cdots\right)\ =\ 0\,, \tag{18.43}$$

$i = 1,\ \ldots,\ m$, onde, como em (18.27)-(18.28), omitidos as derivadas de ordem inferior na transformação. Também como em (18.27)-(18.28), γ é o n-multi-índice $\gamma = \beta_1 + \cdots + \beta_n$. Em (18.43), a expressão

$$\sum_{\beta_1\in\mathbf{N}^n_{(\alpha^{jl})_1}}\ \cdots\ \sum_{\beta_n\in\mathbf{N}^n_{(\alpha^{jl})_n}}\left\{\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\,\xi_j}{\partial x_k}\right)^{(\beta_k)_j}\right]\right\}D^\gamma_\xi v_j + \cdots \tag{18.44}$$

entrou em substituição a $D_x^{\alpha^{jl}}u_j$.

É importante notarmos que em (18.44) somente teremos um termo proporcional às derivadas de grau máximo em relação a ξ_n, ou seja, a $\frac{\partial^{n_j}\,v_j}{\partial\xi_n^{n_j}}$, se houver nos somatórios n-multi-índices γ na forma $\gamma = (0,\ \ldots,\ 0,\ n_j)$. Como γ é dada pela soma de n-multi-índices $\gamma = \beta_1 + \cdots + \beta_n$, concluímos que cada β_a, $a = 1,\ \ldots,\ n$, deve ser da forma $\beta_a = (0,\ \ldots,\ 0,\ b_a)$ com $b_1 + \cdots + b_n = n_j$. Como cada β_a pertence a $\mathbf{N}^n_{(\alpha^{jl})_a}$, ou seja, satisfaz $|\beta_a| = (\alpha^{jl})_a$, concluímos que $(\alpha^{jl})_a = b_a$. Assim, só surgirão termos com $\frac{\partial^{n_j}\,v_j}{\partial\xi_j^{n_j}}$ no argumento que substitui $\frac{\partial^{n_j}\,u_j}{\partial x_1^{b_1}\cdots\partial x_n^{b_n}}$ com $b_1 + \cdots + b_n = n_j$ e esses termos são do tipo

$$\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_k}\right)^{b_k}\right\}\frac{\partial^{n_j}\,v_j}{\partial\xi_n^{n_j}}\,,$$

e vale

$$\frac{\left(\frac{\partial^{n_j}\,u_j}{\partial x_1^{b_1}\cdots\partial x_n^{b_n}}\right)}{\left(\frac{\partial^{n_j}\,v_j}{\partial\xi_n^{n_j}}\right)}\ =\ \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_k}\right)^{b_k}\,.$$

Desse fato, concluímos, evocando novamente o Teorema da Função Implícita e usando a regra da cadeia, que o sistema (18.43) só pode ser resolvido nas variáveis $\frac{\partial^{n_j}\,v_j}{\partial\xi_n^{n_j}}$, $j = 1,\ \ldots,\ m$, se for não nulo o determinante da matriz $m \times m$ cujos elementos de matriz H_{ij} são definidos por

$$H_{ij}\ :=\ \frac{\partial G_i}{\left(\frac{\partial^{n_j}\,v_j}{\partial\xi_n^{n_j}}\right)}\ =\ \sum_{\substack{b_1,\ \ldots,\ b_n\,=\,0\\ b_1+\cdots+b_n\,=\,n_j}}^{n_j}\left[\frac{\partial G_i}{\left(\frac{\partial^{n_j}\,u_j}{\partial x_1^{b_1}\cdots\partial x_n^{b_n}}\right)}\right]\left(\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_1}\right)^{b_1}\cdots\left(\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_n}\right)^{b_n}\,. \tag{18.45}$$

$i,\ j = 1,\ \ldots,\ m$. Compare com (18.40). Como em (18.40) assumimos aqui implicitamente que as funções G_i sejam contínuas e diferenciáveis em suas variáveis. A continuidade garantirá que esse determinante é não nulo em uma vizinhança da superfície $\mathcal{C}$ definida por $\xi_n = \zeta$.

Note que $\det H$ depende (especialmente em sistemas não lineares) da solução u e dos dados de Cauchy. Se para uma dada u e determinados dados de Cauchy tivermos $\det H = 0$ em algum ponto P de $\mathcal{C}$, então $\mathcal{C}$ é dita ser uma *superfície característica em P*. Uma superfície $\mathcal{C}$ que seja característica em algum de seus pontos é dita ser uma *superfície característica*, ou simplesmente *característica*, para o problema de Cauchy em questão. A equação $\det H = 0$ é denominada *equação característica* do problema em questão.

Em valendo $\det H \neq 0$ em toda superfície $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ é dita ser uma *superfície não característica* e podemos em uma vizinhança de $\mathcal{C}$ escrever o sistema (18.43) na forma de Kovalevskaya, explicitando as derivadas de maior ordem em ξ_n, a saber, $\frac{\partial^{n_j}\,v_j}{\partial\xi_n^{n_j}}$, $j = 1,\ \ldots,\ m$, obtendo o sistema

$$\frac{\partial^{n_i}\,v_i}{\partial\xi_n^{n_i}}\ =\ F_i\left(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n,\ v_1\big(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\big),\ \ldots,\ v_m\big(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\big),\ \ldots,\ \frac{\partial^k\,v_j}{\partial\xi_1^{k_1}\cdots\partial\xi_{n-1}^{k_{n-1}}\partial\xi_n^{k_n}}\ ,\ \ldots\right)\,, \tag{18.46}$$

$i = 1,\ \ldots,\ m$, sendo que para cada $j = 1,\ \ldots,\ m$ tem-se $k = k_1 + \ldots + k_{n-1} + k_n \leq n_j$ mas com $k_n < n_j$. Isso generaliza (18.39).

Se $\mathcal{C}$ for característica e não for possível resolver as derivadas $\frac{\partial^{n_i} v_i}{\partial \xi_n^{n_i}}$ para que se possa ter (18.46), então o sistema de equações a derivadas parciais (18.42) representa restrições aos dados de Cauchy em $\mathcal{C}$, sendo por isso denominado *interno*.

• **Planos característicos**

Consideremos ainda o sistema (18.42)-(18.43). Muito útil saber se uma superfície é característica ou não para um sistema de equações como as acima (vide exemplos mais adiante) é a noção de *plano característico*. Seja $P \in \mathbb{R}^n$ um ponto com coordenadas $(p_1,\ \ldots,\ p_n)$, seja $\vec{a} = (a_1,\ \ldots,\ a_n)$ um vetor não nulo e seja o hiperplano $(n-1)$-dimensional $\mathcal{H}_{\vec{a},\,P}$, que passa por P, definido por

$$\mathcal{H}_{\vec{a},\,P} \ := \ \left\{ (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} a_k (x_n - p_n) \ = \ 0 \right\} .$$

Como é bem sabido, o vetor $\vec{a} = (a_1,\ \ldots,\ a_n)$ é normal ao hiperplano $\mathcal{H}_{\vec{a},\,P}$.

Dizemos que $\mathcal{H}_{\vec{a},\,P}$ é um *plano característico* do sistema (18.42)-(18.43) se for nulo no ponto P o determinante da matriz $m \times m$ cujos elementos de matriz J_{ij} são definidos por

$$J_{ij} \ := \ = \sum_{\substack{b_1,\ \ldots,\ b_n = 0 \\ b_1 + \cdots + b_n = n_j}}^{n_j} \left[\frac{\partial G_i}{\left(\frac{\partial^{n_j} u_j}{\partial x_1^{b_1} \cdots \partial x_n^{b_n}} \right)} \right] (a_1)^{b_1} \cdots (a_n)^{b_n} \ . \tag{18.47}$$

$i,\ j = 1,\ \ldots,\ m$. Compare com (18.45). Repare que como (18.47) é homogênea nas componentes de $\vec{a}$ (pois $b_1 + \cdots + b_n = n_j$), podemos sem perda de generalidade considerar sempre vetores $\vec{a}$ unitários, ou seja, com $\|\vec{a}\|^2 = (a_1)^2 + \cdots + (a_n)^2 = 1$. Outra normalização tem apenas o efeito de multiplicar as colunas da matriz J por constantes não nulas, o que não altera a equação $\det J = 0$.

Percebemos dessa definição e de (18.45) que se a superfície $\mathcal{C}$ definida por $\xi_n = \zeta$ passa pelo ponto P, então ela é uma superfície característica em P do sistema (18.42)-(18.43) se e somente se o plano tangente a $\mathcal{C}$ em P for um plano característico do sistema (18.42)-(18.43).

Isso é útil, pois geralmente é muito mais fácil lidar com a equação $\det J = 0$ que com a equação $\det H = 0$. Determinando os planos característicos de um sistema de equações diferenciais parciais saberemos que todas as superfícies que lhes tangenciam são características. Os exemplos adiante tornarão isso mais claro.

• **Alguns exemplos**

Equações de segunda ordem do tipo

$$\sum_{\substack{a,\ b=1 \\ a \geq b}}^{n} A_{ab} \frac{\partial^2 u}{\partial x_a \partial x_b} + B \ = \ 0 \tag{18.48}$$

ocorrem com muita frequência em problemas físicos. No que segue podemos considerar os coeficientes A_{ab} e B como sendo funções de x, de u e das derivadas de primeira ordem de u. Como é fácil constatar, a equação característica de (18.48) é

$$\sum_{\substack{a,\ b=1 \\ a \geq b}}^{n} A_{ab} \frac{\partial\, \xi_n}{\partial x_a} \frac{\partial\, \xi_n}{\partial x_b} \ = \ 0 \, . \tag{18.49}$$

e a equação dos planos característicos é

$$\sum_{\substack{a,\ b=1 \\ a \geq b}}^{n} A_{ab}\, a_a a_b \ = \ 0 \, . \tag{18.50}$$

Analisemos com mais detalhe alguns casos específicos, onde tomaremos B da forma $\displaystyle\sum_{c=1}^{n} B_c \frac{\partial\, u}{\partial x_c} + C$, onde os coeficientes B_c e C podem ser funções de x, de u e das derivadas de primeira ordem de u.

1. Para a equação
$$\sum_{a=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_a^2} + \sum_{c=1}^{n} B_c \frac{\partial u}{\partial x_c} + C \ = \ 0 \tag{18.51}$$
a superfície $\xi_n =$ constante será característica em um ponto P se a a equação característica (18.49) for satisfeita em P. Em nosso caso (18.49) fica $\displaystyle\sum_{a=1}^{n} \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial x_a} \right)^2 = 0$. Se essa equação é satisfeita em P então nesse ponto todas as derivadas $\frac{\partial \xi_n}{\partial x_a}$ anulam-se. Mas isso implica que o Jacobiano da transformação $x \mapsto \xi$ anula-se em P, o que não é aceitável para o novo sistema de coordenadas ξ. Assim, a equação (18.51) não possui características (reais).

   Observe-se que as equações de Laplace e de Poisson em $\mathbb{R}^3$, importantes em diversos problemas de Física, são do tipo (18.51) e, portanto, não têm características (reais).

   A equação (18.51) faz parte de uma classe de equações denominadas *equações elípticas*.

2. Para a equação
$$\sum_{a=1}^{n} A_a \frac{\partial^2 u}{\partial x_a^2} + \sum_{c=1}^{n} B_c \frac{\partial u}{\partial x_c} + C \ = \ 0 \tag{18.52}$$
com $A_a > 0$ para todo a, a equação característica (18.49) fica $\displaystyle\sum_{a=1}^{n} A_a \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial x_a} \right)^2 = 0$. Como no caso anterior concluímos que a equação (18.52) não possui características (reais).

   A equação (18.52) faz parte de uma classe de equações denominadas *equações elípticas*.

3. Seja a equação
$$\left[\left(\sum_{a=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_a^2} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right] + \sum_{c=1}^{n} B_c \frac{\partial u}{\partial x_c} + C \ = \ 0 \tag{18.53}$$
que cuja parte principal (entre parênteses, acima) coincide com a da equação de ondas, identificando $x_n \equiv ct$. A equação dos planos característicos (18.50) fica $(a_1)^2 + \cdots + (a_{n-1})^2 = (a_n)^2$. Como temos também a normalização $(a_1)^2 + \cdots + (a_n)^2 = 1$, concluímos que $a_n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Geometricamente isso significa que os planos característicos de (18.53) têm uma normal que forma um ângulo de 45º com o eixo x_n. Assim, uma superfície é característica para a equação (18.53) em um determinado ponto se nesse ponto a normal a seu plano tangente formar um ângulo de 45º com o eixo x_n.

   A equação (18.53) faz parte de uma classe de equações denominadas *equações hiperbólicas*.

   Para um ponto $\vec{y} = (y_1, \ \ldots, \ y_n) \in \mathbb{R}^n$ define-se o cone de luz com vértice em $\vec{y}$, denotado por $V_{\vec{y}}$, como sendo a superfície $(n-1)$-dimensional definida por
$$V_{\vec{y}} \ := \ \left\{ \vec{x} = (x_1, \ \ldots, \ x_n) \in \mathbb{R}^n \middle| \ (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 \ = \ (x_n - y_n)^2 \right\} .$$
   Os cones de luz passado e futuro com vértice em $\vec{y}$, denotados por e $V_{\vec{y}}^-$ e $V_{\vec{y}}^+$, respectivamente, são definidos por
$$V_{\vec{y}}^- \ := \ \left\{ \vec{x} = (x_1, \ \ldots, \ x_n) \in \mathbb{R}^n \middle| \ (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 \ = \ (x_n - y_n)^2 \ , \ \ x_n < y_n \right\}$$
   e
$$V_{\vec{y}}^+ \ := \ \left\{ \vec{x} = (x_1, \ \ldots, \ x_n) \in \mathbb{R}^n \middle| \ (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 \ = \ (x_n - y_n)^2 \ , \ \ x_n > y_n \right\} .$$
   Naturalmente, $V_{\vec{y}} = V_{\vec{y}}^- \cup V_{\vec{y}}^+ \cup \{\vec{y}\}$. Todo plano tangente a $V_{\vec{y}}^-$ ou a $V_{\vec{y}}^+$ (e, portanto, a $V_{\vec{y}}$) é um plano característico. Assim, $V_{\vec{y}}^-$ e $V_{\vec{y}}^+$ são superfícies características em todos os seus pontos.

4. Seja a equação
$$\sum_{a=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_a^2} + \sum_{c=1}^{n} B_c \frac{\partial u}{\partial x_c} + C \ = \ 0 \tag{18.54}$$
que difere de (18.53) pela omissão do termo com $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$. A equação dos planos característicos (18.50) fica $(a_1)^2 + \cdots + (a_{n-1})^2 = 0$. Como temos também a normalização $(a_1)^2 + \cdots + (a_n)^2 = 1$, concluímos que $a_n = \pm 1$.

Geometricamente isso significa que os planos característicos são os planos x_n = constante. Assim, uma superfície é característica para a equação (18.54) em um determinado ponto se nesse ponto a normal a seu plano tangente apontar na direção do eixo x_n, ou seja, se esse plano for paralelo a um plano x_n = constante.

A equação (18.54) faz parte de uma classe de equações denominadas *equações parabólicas*. Note que a equação de difusão é do tipo (18.54).

5. Seja a equação definida em $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 4$, dada por

$$\left[\left(\sum_{a=1}^{n-2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_a^2}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right] + \sum_{c=1}^{n} B_c \frac{\partial u}{\partial x_c} + C \;=\; 0\,. \tag{18.55}$$

Essa equação faz parte de uma classe de equações denominadas *equações ultra-hiperbólicas*.

A equação dos planos característicos (18.50) fica $(a_1)^2 + \cdots + (a_{n-2})^2 = (a_{n-1})^2 + (a_n)^2$. Como temos também a normalização $(a_1)^2 + \cdots + (a_n)^2 = 1$, concluímos que $(a_{n-1})^2 + (a_n)^2 = \frac{1}{2}$. Geometricamente isso significa que os planos característicos de (18.55) têm uma normal que forma um ângulo de 45^{o} com o plano x_{n-1}–x_n. Assim, uma superfície é característica para a equação (18.53) em um determinado ponto se nesse ponto a normal a seu plano tangente formar um ângulo de 45^{o} com o plano x_{n-1}–x_n.

E. 18.15 *Exercício-exemplo. A equação de Dirac.* Determinemos os planos característicos da equação de Dirac (18.22). Como facilmente se vê, a equação dos planos característicos é

$$\det\left(\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^\mu a_\mu\right) \;=\; 0\,.$$

A maneira mais elegante de resolver essa equação é a seguinte. Tomando o quadrado de ambos os lados e usando o fato que $(\det A)^2 = \det(A^2)$, temos

$$0 \;=\; \det\left(\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}\gamma^\mu\gamma^\nu a_\mu a_\nu\right)\,.$$

Agora,

$$\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}\gamma^\mu\gamma^\nu a_\mu a_\nu \;=\; \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}\Big(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\Big)a_\mu a_\nu \;=\; \left(\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g^{\mu\nu}a_\mu a_\nu\right)\mathbb{1} \;=\; \Big((a_0)^2 - (a_1)^2 - (a_2)^2 - (a_3)^2\Big)\mathbb{1}\,,$$

onde usamos o fato de que as matrizes γ^μ satisfazem $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$, sendo g a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Logo, concluímos que $0 = \Big((a_0)^2 - (a_1)^2 - (a_2)^2 - (a_3)^2\Big)^4 \det\mathbb{1}$ e, portanto, os planos característicos são definidos por $(a_0)^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2$. Essa é precisamente a mesma situação que obtivemos no caso da equação (18.53). Como naquele caso, temos também a normalização $(a_0)^2 + \cdots + (a_3)^2 = 1$ e concluímos que $a_0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Geometricamente isso significa que os planos característicos da equação de Dirac têm uma normal que forma um ângulo de 45^{o} com o eixo $x_0 \equiv ct$ (a direção temporal). Assim, uma superfície é característica para a equação de Dirac em um determinado ponto se nesse ponto a normal a seu plano tangente formar um ângulo de 45^{o} com o eixo x_0. Como naquele caso, os cones de luz $V_y^{\pm}$ são característicos em todos os seus pontos para a equação de Dirac. Tais fatos não são inesperados pois, como é bem conhecido, as soluções de equação de Dirac são também soluções da equação de Klein-Gordon, que é do tipo (18.53). ✠

18.5 O Método das Características

O chamado *método das características* é um importante método de resolução de equações a derivadas parciais quaselineares de primeira ordem (para a definição, vide página 1079). Sua relevância não é apenas prática, no sentido de fornecer soluções: com ele é também possível alcançar uma visão em profundidade de diversas propriedades de certas equações a derivadas parciais quaselineares e de suas soluções. Descreveremos as ideias por trás do método das características, coletando as hipóteses necessárias à sua implementabilidade, hipóteses estas que serão brevemente discutidas em seguida. Após essa descrição, alguns exemplos ilustrativos serão apresentados de modo a facilitar o entendimento.

Uma referência clássica e abrangente sobre o método das características é [134]. Para tratamentos e resultados mais recentes e para outras referências à literatura, vide [624], [626] e [309] Vide também [223], [185] e [247] e [670].

• Equações quaselineares de primeira ordem. Problema de Cauchy

Sejam $b(x_1,\,\ldots,\,x_n,\,u)$ e $a_k(x_1,\,\ldots,\,x_n,\,u)$, com $k=1,\,\ldots,\,n$, funções de $n+1$ variáveis reais $(x_1,\,\ldots,\,x_n,\,u)$. Denotaremos por $\mathcal{E}$ o espaço n-dimensional das variáveis $(x_1,\,\ldots,\,x_n)$ e por $\mathcal{T}$ o espaço $n+1$-dimensional das variáveis $(x_1,\,\ldots,\,x_n,\,u)$. Também denotaremos $\mathbf{x}\equiv(x_1,\,\ldots,\,x_n)\in\mathcal{E}$.

Seja com essas funções definida a equação a derivadas parciais quaselinear de primeira ordem

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\big(\mathbf{x},\,u(\mathbf{x})\big)\,u_{x_k}(\mathbf{x}) \;=\; b\big(\mathbf{x},\,u(\mathbf{x})\big)\,, \tag{18.56}$$

para uma função incógnita $u(\mathbf{x})\equiv u(x_1,\,\ldots,\,x_n)\in\mathbb{R}$. Note-se que as funções $b(\mathbf{x},\,u(\mathbf{x}))$ e $a_k(\mathbf{x},\,u(\mathbf{x}))$, $k=1,\,\ldots,\,n$, são funções de $\mathbf{x}$ e de u, mas não de derivadas de u.

Se $u(\mathbf{x})$ é uma solução de (18.56) a aplicação $\mathcal{E}\ni\mathbf{x}\mapsto(\mathbf{x},\,u(\mathbf{x}))\in\mathcal{T}$ define uma superfície n-dimensional em $\mathcal{T}$. Essa superfície será denominada *superfície-solução* (de (18.56)).

Como é bem conhecido, o vetor $n+1$-dimensional dado por $\big(u_{x_1}(\mathbf{x}),\,\ldots,\,u_{x_n}(\mathbf{x}),\,-1\big)$ é um vetor normal à superfície-solução no ponto $(\mathbf{x},\,u(\mathbf{x}))$[33]. Com isso em mente, podemos interpretar (18.56) como sendo a afirmação que o vetor $n+1$-dimensional definido por

$$\Big(a_1\big(\mathbf{x},\,u(\mathbf{x})\big),\,\ldots,\,a_n\big(\mathbf{x},\,u(\mathbf{x})\big),\,b\big(\mathbf{x},\,u(\mathbf{x})\big)\Big)$$

é tangente à superfície-solução no ponto $(\mathbf{x},\,u(\mathbf{x}))$. Essa interpretação geométrica terá significado no que segue.

Vamos supor que a função $u(\mathbf{x})$ satisfaça condições iniciais que fixam seu valor em alguma superfície $n-1$ dimensional $\mathfrak{C}$ de $\mathcal{E}$. Assumiremos que na superfície $\mathfrak{C}$ tenha-se a *condição inicial* $u(\mathbf{x})=u_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\mathfrak{C}$, onde u_0 é uma função dada definida em $\mathfrak{C}$. A superfície $\mathfrak{C}$ é denominada *superfície de Cauchy*. O problema de resolver (18.56) com u fixada em $\mathfrak{C}$, como acima, é dito ser um *problema de Cauchy*.

Suporemos que $\mathfrak{C}$ seja uma variedade, ou seja, que os pontos da superfície $\mathfrak{C}$ possam ser localmente descritos por um conjunto de $n-1$ parâmetros reais, que denotaremos por $s_2,\,\ldots,\,s_n$. Assim, os pontos $\mathbf{x}=(x_1,\,\ldots,\,x_n)$ de $\mathfrak{C}$ são (localmente) descritos por n funções contínuas ψ_i, $i=1,\,\ldots,\,n$ de $n-1$ variáveis:

$$x_1 \;=\; \psi_1(s_2,\,\ldots,\,s_n)\,,\qquad\ldots,\qquad x_n \;=\; \psi_n(s_2,\,\ldots,\,s_n)\,.$$

Denotando $\Psi=(\psi_1,\,\ldots,\,\psi_n)$, escrevemos as relações acima como $\mathbf{x}=\Psi(s_2,\,\ldots,\,s_n)$ para $\mathbf{x}\in\mathfrak{C}$.

Em termos dos parâmetros $s_2,\,\ldots,\,s_n$ que descrevem a superfície de Cauchy $\mathfrak{C}$, a condição inicial escreve-se $u(\Psi(s_2,\,\ldots,\,s_n))=u_0(\Psi(s_2,\,\ldots,\,s_n))$. Com um certo abuso de linguagem, escreveremos $u_0(\Psi(s_2,\,\ldots,\,s_n))\equiv u_0(s_2,\,\ldots,\,s_n)$.

• Curvas características e curvas características planares

Seja I um certo intervalo da reta real (compacto ou não). Uma curva $\mathfrak{L}$ no espaço $\mathcal{T}$ definida por $I\ni s_1\mapsto\big(x_1(s_1),\,\ldots,\,x_n(s_1),\,U(s_1)\big)\in\mathcal{T}$ é dita ser uma *curva característica* da equação quaselinear (18.56) se as funções $x_1(s_1),\,\ldots,\,x_n(s_1)$ e $U(s_1)$ forem contínuas, diferenciáveis e satisfizerem o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(s_1) &= a_1\big(\mathbf{x}(s_1),\,U(s_1)\big)\,,\\
&\vdots\\
\dot{x}_n(s_1) &= a_n\big(\mathbf{x}(s_1),\,U(s_1)\big)\,,\\
\dot{U}(s_1) &= b\big(\mathbf{x}(s_1),\,U(s_1)\big)\,.
\end{aligned} \tag{18.57}$$

[33] Recordando, para variações "infinitesimais" $(dx_1,\,\ldots,\,dx_n)$ tem-se $du = u_{x_1}(\mathbf{x})dx_1+\cdots+u_{x_n}(\mathbf{x})dx_n$ e, portanto, o vetor $\big(u_{x_1}(\mathbf{x}),\,\ldots,\,u_{x_n}(\mathbf{x}),\,-1\big)$ é ortogonal aos vetores $(dx_1,\,\ldots,\,dx_n,\,du)$, que são tangentes à superfície-solução.

As curvas em $\mathcal{E}$ dadas por $I \ni s_1 \mapsto (x_1(s_1),\ \ldots,\ x_n(s_1)) \in \mathcal{E}$ são denominadas *curvas características planares* ou *curvas características base*.

Como estudamos nos capítulos dedicados a equações diferenciais ordinárias, sob condições de continuidade para as funções b e a_k pode-se garantir a existência ao menos local de soluções de (18.57). Sob condições de diferenciabilidade, é possível garantir também unicidade de soluções (18.57) para problemas de valor inicial.

• **O método das características**

Seja $u(\mathbf{x})$ uma solução dada de (18.56). Suponha que haja uma curva contínua e diferenciável, definida no espaço $\mathcal{E}$, parametrizada por $s_1 \in I$ e definida por n funções $(x_1(s_1),\ \ldots,\ x_n(s_1)) \equiv \mathbf{x}(s_1)$ com a propriedade que as que as funções $x_k(s_1)$, $k = 1, \ldots, n$, satisfaçam o sistema de n equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(s_1) &= a_1\big(\mathbf{x}(s_1),\ u(\mathbf{x}(s_1))\big)\ , \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(s_1) &= a_n\big(\mathbf{x}(s_1),\ u(\mathbf{x}(s_1))\big)\ . \end{aligned} \tag{18.58}$$

Como estudamos nos capítulos dedicados a equações diferenciais ordinárias, sob condições de continuidade para as funções b e a_k pode-se garantir a existência ao menos local de soluções de (18.58). Sob condições de diferenciabilidade, é possível garantir também unicidade de soluções de (18.58) para problemas de valor inicial.

Pela regra da cadeia temos, naturalmente,

$$\frac{d}{ds}u(\mathbf{x}(s_1)) \ =\ \sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k(s_1)\ u_{x_k}(\mathbf{x}(s_1)) \ =\ \sum_{k=1}^{n} a_k\big(\mathbf{x}(s_1),\ u(\mathbf{x}(s_1))\big)\ u_{x_k}(\mathbf{x}(s_1)) \ \overset{(18.56)}{=}\ b\big(\mathbf{x}(s_1),\ u(\mathbf{x}(s_1))\big)\ , \tag{18.59}$$

e concluímos que a curva em $\mathcal{T}$ definida por $I \ni s_1 \mapsto \big(\mathbf{x}(s_1),\ u(\mathbf{x}(s_1))\big) \in \mathcal{T}$ é uma curva característica da equação (18.56). De (18.58) e (18.59) vê-se que os vetores tangentes a essa curva característica são paralelos em cada ponto ao campo definido pelos vetores $(a_1,\ \ldots,\ a_n,\ b)$ e, portanto, essas curvas características encontram-se inteiramente sobre a superfície-solução da equação (18.56) definida pela solução u. Esse fato deve ser retido em mente para o que segue.

Vemos, portanto, que dada uma função u, solução de (18.56), obtém-se curvas características procurando soluções do sistema de n equações diferenciais ordinárias (18.58). A questão que se põe é se é possível inverter esse procedimento: será possível recuperar a solução $u(\mathbf{x})$ de (18.56) se for dada a família de curvas características de (18.56), ou seja, as soluções de (18.57)? Como veremos, sob hipóteses convenientes a resposta é sim e esse método de determinar a solução de (18.57) a partir da determinação das curvas características de (18.56), ou seja, as soluções de (18.57), é denominado *método das características*.

A ideia do método das características é interpretar as diversas soluções $U(s_1)$ de (18.57) como $U(s_1) = u(\mathbf{x}(s_1))$ para alguma solução u de (18.56) e procurar determinar essa u a partir da função U. Geometricamente, o que se faz é aproveitar a observação feita acima de que, as curvas características definidas por uma solução dada u de (18.56) encontram-se inteiramente dentro da superfície-solução definida por u e tentar recuperar essa superfície-solução (e portanto a solução u) a partir do conjunto de todas as curvas características associadas à equação (18.56).

No que segue descreveremos como essas ideias podem ser implementadas, discutiremos as virtudes e limitações desse método e estudaremos exemplos.

• **Obtendo soluções com uso das curvas características**

O sistema (18.57) é um sistema de $n+1$ equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e iremos supor que um tal sistema possua solução única para um dado conjunto de condições iniciais. A resolução de (18.57) geralmente requer a fixação de $n+1$ condições iniciais $x_1(0),\ \ldots,\ x_n(0)$ e $U(0)$. Vamos supor que as curvas características planares $s_1 \mapsto (x_1(s_1),\ \ldots,\ x_n(s_1))$ cruzem $\mathfrak{C}$ em exatamente um ponto e que tal se de para $s_1 = 0$. Portanto, escolhemos o ponto $(x_1(0),\ \ldots,\ x_n(0)) \in \mathcal{E}$ sobre a superfície $\mathfrak{C}$ onde as condições iniciais para (18.56) foram definidas. Assim, $\mathbf{x}(0) = (x_1(0),\ \ldots,\ x_n(0)) \in \mathcal{E}$ é tal que $\mathbf{x}(0) = \Psi(s_2,\ \ldots,\ s_n)$ para algum conjunto de parâmetros $s_2,\ \ldots,\ s_n$. Como desejamos interpretar $U(0) = u(\mathbf{x}(0))$ para uma solução u de (18.56), é natural impormos

$$U(0) \ =\ u_0(s_2,\ \ldots,\ s_n)\ . \tag{18.60}$$

As relações $\mathbf{x}(0) = \Psi(s_2,\, \ldots,\, s_n)$ e $U(0) = u_0(s_2,\, \ldots,\, s_n)$, ou seja,

$$\Big(\mathbf{x}(0),\;\; U(0)\Big) \;=\; \Big(\Psi(s_2,\, \ldots,\, s_n),\;\; u_0(s_2,\, \ldots,\, s_n)\Big)\,, \tag{18.61}$$

fazem cada curva característica $s_1 \mapsto (\mathbf{x}(s_1),\; U(s_1)) \in \mathcal{T}$ depender também dos $n-1$ parâmetros $s_2,\, \ldots,\, s_n$ que fixam a condição inicial (18.61). Introduzindo a notação $\mathbf{s} \equiv (s_1,\, \ldots,\, s_n) \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever as funções $x_k(s_1)$, $k = 1,\, \ldots,\, n$, e $U(s_1)$ como funções de s_1 e desses parâmetros:

$$x_1(s_1,\, \ldots,\, s_n) \;=\; x_1(\mathbf{s})\,, \quad \ldots, \quad x_n(s_1,\, \ldots,\, s_n) \;=\; x_n(\mathbf{s}) \tag{18.62}$$

e

$$U(s_1,\, \ldots,\, s_n) \;=\; U(\mathbf{s})\,.$$

Para $s_1 = 0$ o ponto $\mathbf{x}(s_1 = 0,\; s_2,\; \ldots,\; s_n)$ encontra-se sobre $\mathfrak{C}$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} \;\ni\; \Big(\mathbf{x}(s_1 = 0,\; s_2,\; \ldots,\; s_n),\, U(s_1 = 0,\; s_2,\; \ldots,\; s_n)\Big) \\
= \; \Big(x_1(s_1 = 0,\; s_2,\; \ldots,\; s_n),\; \ldots,\; x_n(s_1 = 0,\; s_2,\; \ldots,\; s_n),\, U(s_1 = 0,\; s_2,\; \ldots,\; s_n)\Big) \\
= \; \Big(\mathbf{x}(s_1 = 0,\; s_2,\; \ldots,\; s_n),\, u_0(s_2,\; \ldots,\; s_n)\Big)\,.
\end{aligned} \tag{18.63}$$

Se o Jacobiano $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial(x_1,\, \ldots,\, x_n)}{\partial(s_1,\, \ldots,\, s_n)}$ não se anular, podemos inverter as n funções de (18.62) e escrever os parâmetros $s_1,\; \ldots\,, s_n$ em termos de $x_1,\; \ldots,\; x_n$:

$$s_1(x_1,\, \ldots,\, x_n) \;=\; s_1(\mathbf{x})\,, \quad \ldots, \quad s_n(x_1,\, \ldots,\, x_n) \;=\; s_n(\mathbf{x})\,.$$

Sob essa hipótese estamos supondo que as funções $\mathbf{s} \to \mathbf{x}(\mathbf{s})$ e $\mathbf{x} \to \mathbf{s}(\mathbf{x})$, definidas entre certos abertos de $\mathbb{R}^n$, são bijetoras, uma sendo a inversa da outra.

Com as escolhas descritas acima, cada curva característica é fixada pelos parâmetros $s_2,\; \ldots,\; s_n$ e parametrizada pelo parâmetro s_1 quando a curva é percorrida. Para $s_1 = 0$ a curva inicia-se no ponto de $\mathcal{T}$ dado em (18.63).

Com a introdução dos parâmetros $\mathbf{s}$ podemos reescrever as equações para as curvas características dadas em (18.57) trocando a derivada total em relação a s_1 por uma derivada parcial (levando em consideração, assim, a presença das outras variáveis $s_2,\, \ldots,\, s_n$):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, x_1}{\partial s_1}(\mathbf{s}) \;&=\; a_1\big(\mathbf{x}(\mathbf{s}),\, U(\mathbf{s})\big)\,, \\
&\;\;\vdots \\
\frac{\partial\, x_n}{\partial s_1}(\mathbf{s}) \;&=\; a_n\big(\mathbf{x}(\mathbf{s}),\, U(\mathbf{s})\big)\,, \\
\\
\frac{\partial\, U}{\partial s_1}(\mathbf{s}) \;&=\; b\big(\mathbf{x}(\mathbf{s}),\, U(\mathbf{s})\big)\,.
\end{aligned} \tag{18.64}$$

Vamos agora descrever de que forma o exposto acima pode ser empregado na resolução da equação (18.56). Defina-se

$$u(\mathbf{x}) \;:=\; U(\mathbf{s}(\mathbf{x}))\,,$$

ou seja,

$$u(x_1,\, \ldots,\, x_n) \;:=\; U\big(s_1(x_1,\, \ldots,\, x_n),\; \ldots,\; s_n(x_1,\, \ldots,\, x_n)\big)\,.$$

Vamos provar que u assim definida é uma solução de (18.56) e satisfaz as condições iniciais desejadas. De fato, calculando-se explicitamente,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k\big(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x})\big)\frac{\partial\, u}{\partial x_{k}}(\mathbf{x}) \quad &= \quad \sum_{k=1}^{n} a_k\big(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x})\big)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\, U}{\partial s_{j}}(\mathbf{s}(\mathbf{x}))\frac{\partial s_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \\
&= \quad \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\, U}{\partial s_{j}}(\mathbf{s}(\mathbf{x}))\sum_{k=1}^{n} a_k\big(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x})\big)\frac{\partial s_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \\
&= \quad \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\, U}{\partial s_{j}}(\mathbf{s}(\mathbf{x}))\sum_{k=1}^{n} a_k\big(\mathbf{x},\ U(\mathbf{s}(\mathbf{x}))\big)\frac{\partial s_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \\
&\overset{(18.64)}{=} \quad \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\, U}{\partial s_{j}}(\mathbf{s}(\mathbf{x}))\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial s_1}(\mathbf{s}(\mathbf{x}))\frac{\partial s_j}{\partial x_k}(\mathbf{x})}_{=\frac{\partial s_j}{\partial s_1}=\delta_{j,\,1}} \\
&= \quad \frac{\partial\, U}{\partial s_{1}}(\mathbf{s}(\mathbf{x})) \\
&\overset{(18.64)}{=} \quad b\big(\,\mathbf{x}(\mathbf{s}(\mathbf{x})),\ U(\mathbf{s}(\mathbf{x}))\,\big) \ = \ b\big(\,\mathbf{x},\ U(\mathbf{s}(\mathbf{x}))\,\big) \\
&= \quad b\big(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x})\big)\ ,
\end{aligned}$$

provando que u satisfaz (18.56), como queríamos. É também claro que, na superfície $\mathfrak{C}$,

$$\begin{aligned}
u(\Psi(s_2,\ \ldots,\ s_n)) \ = \ u\big(\mathbf{x}(s_1=0,\ s_2,\ \ldots,\ s_n)\big) \ &= \ U\Big(\mathbf{s}\big(\mathbf{x}(s_1=0,\ s_2,\ \ldots,\ s_n)\big)\Big) \\
&= \ U\big((s_1=0,\ s_2,\ \ldots,\ s_n)\big) \overset{(18.63)}{=} u_0(s_2,\ \ldots,\ s_n)\ , \quad (18.65)
\end{aligned}$$

mostrando que u satisfaz as condições iniciais desejadas.

• **O método das características em sistemas de EDPs**

O método das características também pode ser empregado em certos sistemas de equações diferenciais quaselineares específicos. O caso mais destacado, a saber, o de sistemas quaselineares de primeira ordem, é tratado detalhadamente na Seção 18.5.3, página 1112.

• **Método das características. Resumo e comentários gerais**

Recapitulando e resumindo, os passos para a resolução da equação quaselinear de primeira ordem (18.56) pelo método das características são:

1. Determinação das curvas características $s_1 \mapsto (\mathbf{x}(s_1),\ U(s_1))$ por meio da resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias (18.57).
2. Parametrização das curvas características em termos de coordenadas locais $s_2,\ \ldots,\ s_n$ da superfície de Cauchy $\mathfrak{C}$ onde está definida a condição inicial, fornecendo assim as funções $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ e $U(\mathbf{s})$.
3. Obtenção das funções inversas $\mathbf{s}(\mathbf{x})$.
4. Determinação da solução u por $u(\mathbf{x}) = U(\mathbf{s}(\mathbf{x}))$, com U obtida nos passos 1 e 2.

A aplicação do método das características tem diversos pressupostos que vagamente delineamos na discussão acima e algum comentário deve ser feito a respeito de certas patologias ou especialidades que podem ocorrer quando de sua implementação.

Uma primeira observação é que a parametrização das curvas características pelas coordenadas locais da superfície de Cauchy tem em muitos casos um significado apenas local. É bem conhecido que nem sempre é possível parametrizar globalmente uma superfície com um único conjunto de coordenadas (tal ocorre, por exemplo, no caso da esfera bidimensional S^2). Em tais casos, a parametrização deve ser feita localmente, conduzindo a soluções definidas apenas localmente (as quais podem, eventualmente, ter extensões globais, parametrizadas por outras coordenadas). Analogamente, a existência de uma aplicação inversa de $\mathbf{s} \mapsto \mathbf{x}$ pode ser, muitas vezes, garantida apenas localmente.

Pode também ocorrer de a aplicação $\mathbf{s} \mapsto \mathbf{x}$ não possuir inversa, local ou globalmente. Nesse contexto, um fenômeno observado em certas equações não lineares é o *cruzamento de curvas características*, conduzindo a uma ambiguidade de solução ou a soluções singulares (o fenômeno de *ondas de choque*, observado em equações não lineares como a equação de Burgers sem viscosidade, sendo um exemplo. Vide o tratamento da equação de Burgers inviscível feito no Exemplo 18.6, página 1105). Outro fenômeno patológico se dá em situações nas quais existem regiões no espaço das variáveis $\mathbf{x}$ que não são visitadas por curvas características planares, levando a ambiguidades de solução nessas regiões (*ondas de rarefação*. Vide novamente o Exemplo 18.6, página 1105). Tais situações requerem um tratamento especial para o qual remetemos o leitor à literatura especializada.

Outras anomalias podem ocorrer no que concerne à relação entre as curvas características planares e a superfície de Cauchy e a condição inicial. Pode, por exemplo, ocorrer de algumas curvas características planares não cruzarem a superfície de Cauchy ou fazerem-no mais de uma vez. Ou pode ocorrer de haver curvas características planares contidas dentro de superfícies de Cauchy ou de serem tangentes à mesma em alguns pontos. Ou ainda pode ocorrer de haver pontos da superfície de Cauchy pelos quais não passam curvas características planares. Essas situações exigem cuidados especiais e, para seu tratamento, pressupostos adicionais podem ter de ser feitos, mas a unicidade e mesmo a existência de soluções podem ser perdidas.

Sob essas ressalvas, é pedagogicamente mais útil, no momento, estudar alguns exemplos de aplicação do método das características. Nos exemplos que apresentamos mais adiante, veremos situações em que o método funciona sem máculas e situações em que diversas das patologias acima descritas manifestam-se.

18.5.1 Exemplos de Aplicação do Método das Características

Para ilustrar a exposição acima, exemplifiquemos o uso do método das características na resolução alguns problemas de Cauchy de equações quaselineares. No primeiro exemplo temos uma situação não trivial na qual o método das características funciona a contento.

Exemplo 18.3 De [690]. Seja a equação quaselinear de primeira ordem

$$\frac{\partial\, u}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + (x_1)^2 \frac{\partial\, u}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \;=\; -x_2 u(\mathbf{x})\;. \tag{18.66}$$

A superfície $\mathfrak{C}$ onde a condição inicial é dada é definida por $x_1 \equiv 0$, ou seja, tem-se $x_1 = \psi_1(s_2) \equiv 0$, $x_2 = \psi_2(s_2) = s_2$ com $s_2 \in \mathbb{R}$. A condição inicial para u nessa superfície é $u(x_1 = 0,\ x_2) = u_0(x_2)$ para alguma função u_0 dada, que suporemos diferenciável.

Temos aqui $n = 2$, $a_1(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x})) = 1$, $a_2(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x})) = (x_1)^2$ e $b(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x})) = -x_2 u(\mathbf{x})$.

As equações (18.57) para as curvas características são

$$\begin{aligned}
\dot{x_1}(s_1) &= 1\;,\\
\dot{x_2}(s_1) &= (x_1(s_1))^2\;,\\
\dot{U}(s_1) &= -x_2(s_1)U(s_1)\;.
\end{aligned}$$

A solução da primeira é $x_1(s_1) = s_1 + \alpha$, para α constante. A segunda equação fica, então, $\dot{x_2}(s_1) = (s_1+\alpha)^2$, cuja solução é $x_2(s_1) = \frac{(s_1+\alpha)^3}{3} + \beta$, com β constante. A terceira equação, portanto, é $\dot{U}(s_1) = -\left(\frac{(s_1+\alpha)^3}{3} + \beta\right) U(s_1)$, cuja solução é

$$U(s_1) \;=\; \exp\left(-\frac{(s_1+\alpha)^4}{12} - \beta s_1 + \gamma\right)$$

com γ constante. Para $s_1 = 0$ desejamos estar na linha reta $\mathfrak{C}$ definida por $x_1 \equiv 0$. Isso implica $\alpha \equiv 0$. Como em $\mathfrak{C}$ temos a parametrização $x_2 = s_2$ com $s_2 \in \mathbb{R}$ e, como $x_2(0) = \beta$, podemos identificar $\beta \equiv s_2$. Com isso escrevemos

$$\begin{aligned} x_1(s_1,\, s_2) &= s_1 \,, \\ x_2(s_1,\, s_2) &= \frac{(s_1)^3}{3} + s_2 \,, \\ U(s_1,\, s_2) &= \exp\left(-\frac{(s_1)^4}{12} - s_1 s_2 + \gamma\right) . \end{aligned}$$

A imposição $U(0,\, s_2) = u_0(x_2(0,\, s_2)) = u_0(s_2)$ significa $\exp(\gamma) = u_0(s_2)$. Portanto, temos

$$x_1(s_1,\, s_2) = s_1 \,, \tag{18.67}$$

$$x_2(s_1,\, s_2) = \frac{(s_1)^3}{3} + s_2 \,, \tag{18.68}$$

$$U(s_1,\, s_2) = \exp\left(-\frac{(s_1)^4}{12} - s_1 s_2\right) u_0(s_2) \,. \tag{18.69}$$

Isso determina a expressão das curvas características em termos dos parâmetros s_1 e s_2. Fixar o parâmetro s_2 fixa uma curva característica, a qual é percorrida fazendo-se variar o parâmetro s_1. Como se vê, para cada curva característica planar vale $x_2 = (x_1)^3/3 + s_2$. As curvas características planares de (18.66) encontram-se desenhadas, para diversos valores de s_2, na Figura 18.2, página 1102.

O próximo passo é inverter as relações (18.67)-(18.68), acima, e expressar s_1 e s_2 em termos de x_1 e x_2. Para o Jacobiano dessa transformação temos

$$\frac{\partial(x_1,\, x_2)}{\partial(s_1,\, s_2)} = 1 \,,$$

(verifique!) e a inversão é possível para todos $(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Como é fácil constatar, obtém-se

$$s_1(x_1,\, x_2) = x_1 \,, \qquad s_2(x_1,\, x_2) = x_2 - \frac{(x_1)^3}{3} \,.$$

A solução de (18.66) é, portanto, $u(x_1,\, x_2) = U\big(s_1(x_1,\, x_2),\, s_2(x_1,\, x_2)\big)$, ou seja,

$$u(x_1,\, x_2) = \exp\left(\frac{(x_1)^4}{4} - x_1 x_2\right)\, u_0\left(x_2 - \frac{(x_1)^3}{3}\right) \,, \tag{18.70}$$

como facilmente se calcula.

E. 18.16 *Exercício.* Verifique explicitamente que (18.70) é de fato solução de (18.66) e satisfaz a condição $u(0,\, x_2) = u_0(x_2)$. ✠

Como cada curva característica é definida por $x_2 - \frac{(x_1)^3}{3} = s_2$, vemos de (18.70) (e também de (18.69)) que o valor $u_0(s_2)$ fixado para u na superfície $\mathfrak{C}$ propaga-se ao longo da característica sendo "corrigido" pelo fator $\exp\left(\frac{(x_1)^4}{4} - x_1 x_2\right)$. Isso fornece uma certa intuição sobre o método, ao menos no caso de equações lineares, como (18.66): em equações como as acima, as curvas características planares são as curvas ao longo das quais a "influência" da condição inicial se propaga a partir de cada ponto da superfície de Cauchy.

A solução (18.70) é uma solução clássica da equação diferencial (18.66) sob o pressuposto que u_0 seja contínua e diferenciável. Se não o for, (18.70) representa uma solução fraca de (18.66). Se u_0 for descontínua em um ponto s_2, então vemos por (18.70) (e também de (18.69)) que essa descontinuidade propaga-se no espaço ao longo da curva característica fixada por s_2, ou seja ao longo da curva $x_2 - \frac{(x_1)^3}{3} = s_2$. O mesmo se dá se a derivada u_0' for descontínua em s_2. Isso ilustra um fenômeno válido para equações lineares como (18.66): a propagação de singularidades a partir de uma condição inicial se dá ao longo de curvas características. No caso de equações não lineares, ensinam-nos inúmeros exemplos e alguns teoremas gerais que a propagação de singularidades a partir de uma condição inicial pode ser bem mais complexa. ♦

Vamos tratar agora de um exemplo bem mais simples, mas com o qual podemos identificar e discutir alguns problemas do método das características.

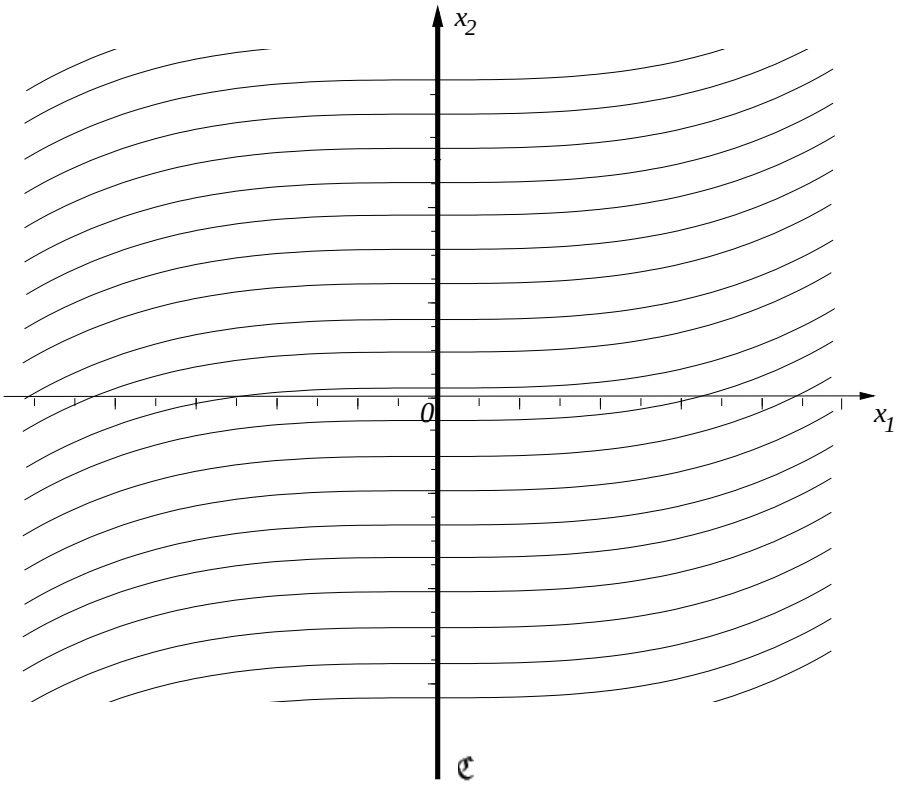

Figura 18.2: Curvas características planares da equação (18.66) no plano x_1–x_2. A superfície de Cauchy $\mathfrak{C}$ é eixo vertical x_2.

Exemplo 18.4 Consideremos u como uma função de duas variáveis $(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo a equação diferencial

$$u_{x_1}(x_1,\ x_2) \ = \ 0 \ . \tag{18.71}$$

Naturalmente, a solução dessa equação é $u(x_1,\ x_2) = h(x_2)$, para uma função h em princípio arbitrária, a qual deve ser fixada por condições iniciais (vide abaixo). Como nesse caso $a_1(\mathbf{x},\ u) = 1$ e $a_2(\mathbf{x},\ u) = b(\mathbf{x},\ u) = 0$, as equações (18.57) da curva característica são

$$\dot{x}_1(s_1) \ = \ 1 \ , \qquad \dot{x}_2(s_1) \ = \ 0 \ , \qquad \dot{U}(s_1) \ = \ 0 \ . \tag{18.72}$$

A solução desse sistema é

$$x_1(s_1) \ = \ s_1 + \alpha \ , \qquad x_2(s_1) \ = \ \beta \ , \qquad U(s_1) \ = \ \gamma \ , \tag{18.73}$$

onde α, β e γ são constantes. Dessas expressões inferimos que as curvas características planares é a família de todas as retas paralelas ao eixo x_1.

De (18.73) observamos que, para a equação aqui discutida, $U(s_1,\ s_2)$ é constante ao longo das curvas características planares (pois $U(s_1,\ s_2)$ não depende de s_1).

Vamos agora discutir a solução sob alguns tipos de condições iniciais.

1. A superfície de Cauchy $\mathfrak{C}$ é a reta $x_1 \equiv 0$, a qual podemos parametrizar como

$$\mathfrak{C} \ = \ \Big\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \ x_1 \ = \ \psi_1(s_2) \ = \ 0 \ , \ \ x_2 \ = \ \psi_2(s_2) \ = \ s_2, \ \ s_2 \in \mathbb{R}\Big\} \ .$$

   Para a condição inicial em $\mathfrak{C}$ fixamos, na parametrização acima, $u(\psi_1(s_2),\ \psi_2(s_2)) = u_0(s_2)$, u_0 sendo uma função dada. Por (18.73) podemos adotar $\alpha = 0$, $\beta = s_2$ e $\gamma = u_0(s_2)$. Assim,

$$x_1(s_1,\ s_2) \ = \ s_1 \ , \qquad x_2(s_1,\ s_2) \ = \ s_2 \ , \qquad U(s_1,\ s_2) \ = \ u_0(s_2) \ , \tag{18.74}$$

Claramente, para o Jacobiano da transformação $(s_1,\ s_2) \mapsto (x_1,\ x_2)$ tem-se $\frac{\partial(x_1,\ x_2)}{\partial(s_1,\ s_2)} = 1$ e a transformação inversa existe em toda parte, sendo dada por $s_1(x_1,\ x_2) = x_1$, $s_2(x_1,\ x_2) = x_2$. Logo, a solução u é dada por

$$u(x_1,\ x_2) \ = \ U(s_1(x_1,\ x_2),\ s_2(x_1,\ x_2)) \ = \ u_0(x_2)\ .$$

Assim, para esse tipo de condição inicial tem-se $h(x_2) = u_0(x_2)$.

2. A superfície de Cauchy $\mathfrak{C}$ é a reta $x_2 \equiv 0$, a qual podemos parametrizar como

$$\mathfrak{C} \ = \ \Big\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \ x_1 \ = \ \psi_1(s_2) \ = \ s_2\ ,\ \ x_2 \ = \ \psi_2(s_2) \ = \ 0,\ \ s_2 \in \mathbb{R}\Big\}\ .$$

Para a condição inicial em $\mathfrak{C}$ fixamos, na parametrização acima, $u(\psi_1(s_2),\ \psi_2(s_2)) = u_0(s_2)$, u_0 sendo uma função dada.

A especialidade desse problema é que a superfície de Cauchy $\mathfrak{C}$ é paralela ao eixo x_1 e, portanto, é uma das curvas características planares do problema. O problema em questão é, portanto, um problema de Cauchy característico.

Por (18.73) podemos adotar $\alpha = s_2$, $\beta = 0$ e $\gamma = u_0(s_2)$. Assim,

$$x_1(s_1,\ s_2) \ = \ s_1 + s_2\ \ , \qquad x_2(s_1,\ s_2) \ = \ 0\ , \qquad U(s_1,\ s_2) \ = \ u_0(s_2)\ , \tag{18.75}$$

Claramente, para o Jacobiano da transformação $(s_1,\ s_2) \mapsto (x_1,\ x_2)$ tem-se $\frac{\partial(x_1,\ x_2)}{\partial(s_1,\ s_2)} = 0$ e não existe a transformação inversa $(x_1,\ x_2) \mapsto (s_1,\ s_2)$ em nenhum ponto de $\mathbb{R}^2$.

Já observamos que, para a equação aqui tratada, a função $U(s_1,\ s_2)$ é constante ao longo das características planares (pois independe de s_1, como se vê em (18.75)). Como nesse caso a própria superfície de Cauchy é uma curva característica planar, concluímos que u_0 deve ser constante. Nesse caso, então, uma solução pode ser obtida para u, a saber, $u(x_1,\ x_2) = u_0$, constante.

Percebe-se que nesse caso, no qual a superfície de Cauchy é uma curva característica planar, nem sempre é possível encontrar uma solução para o problema de valor inicial, somente em casos especiais, a saber quando u_0 for constante.

3. A superfície de Cauchy $\mathfrak{C}$ é a parábola $(x_2)^2 - x_1 = 0$, a qual podemos parametrizar como

$$\mathfrak{C} \ = \ \Big\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \ x_1 \ = \ \psi_1(s_2) \ = \ (s_2)^2\ ,\ \ x_2 \ = \ \psi_2(s_2) \ = \ s_2,\ \ s_2 \in \mathbb{R}\Big\}\ .$$

Para a condição inicial em $\mathfrak{C}$ fixamos, na parametrização acima, $u(\psi_1(s_2),\ \psi_2(s_2)) = u_0(s_2)$, u_0 sendo uma função dada.

Por (18.73) podemos adotar $\alpha = (s_2)^2$, $\beta = s_2$ e $\gamma = u_0(s_2)$. Assim,

$$x_1(s_1,\ s_2) \ = \ s_1 + (s_2)^2\ \ , \qquad x_2(s_1,\ s_2) \ = \ s_2\ , \qquad U(s_1,\ s_2) \ = \ u_0(s_2)\ , \tag{18.76}$$

Claramente, para o Jacobiano da transformação $(s_1,\ s_2) \mapsto (x_1,\ x_2)$ tem-se $\frac{\partial(x_1,\ x_2)}{\partial(s_1,\ s_2)} = 1$ e a transformação inversa existe em toda parte, sendo dada por $s_1(x_1,\ x_2) = x_1 - (x_2)^2$, $s_2(x_1,\ x_2) = x_2$. Logo, a solução u é dada por

$$u(x_1,\ x_2) \ = \ U(s_1(x_1,\ x_2),\ s_2(x_1,\ x_2)) \ = \ u_0(x_2)\ .$$

Assim, para esse tipo de condição inicial tem-se $h(x_2) = u_0(x_2)$.

4. A superfície de Cauchy $\mathfrak{C}$ é a parábola $(x_1)^2 - x_2 = 0$, a qual podemos parametrizar como

$$\mathfrak{C} \ = \ \Big\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \ x_1 \ = \ \psi_1(s_2) \ = \ s_2\ ,\ \ x_2 \ = \ \psi_2(s_2) \ = \ (s_2)^2,\ \ s_2 \in \mathbb{R}\Big\}\ .$$

Para a condição inicial em $\mathfrak{C}$ fixamos, na parametrização acima, $u(\psi_1(s_2),\ \psi_2(s_2)) = u_0(s_2)$, u_0 sendo uma função dada.

A especialidade desse problema é que as curvas características planares cruzam a superfície de Cauchy duas vezes ou nenhuma vez, exceto a curva característica planar $x_2 \equiv 0$, que é tangente à superfície de Cauchy no ponto $(0,\ 0)$. De fato, a reta $x_2 \equiv \beta$ (usando a notação de (18.73)) cruza a parábola $\mathfrak{C}$ nos pontos $\pm\sqrt{\beta}$ caso $\beta > 0$ e em nenhum ponto se $\beta < 0$. Se $\beta = 0$ as duas curvas se tangenciam no ponto $(0,\ 0)$.

Por (18.73) podemos adotar $\alpha = s_2$, $\beta = (s_2)^2$ e $\gamma = u_0(s_2)$. Assim,

$$x_1(s_1,\ s_2) \ = \ s_1 + s_2\ \ , \qquad x_2(s_1,\ s_2) \ = \ (s_2)^2\ . \tag{18.77}$$

Note-se que ao parametrizarmos as curvas características da forma feita acima, com o parâmetro s_2 da superfície de Cauchy $\mathfrak{C}$, estamos excluindo as curvas características com $x_2 < 0$, pois, claramente $x_2(s_1,\ s_2) \geq 0$. Note-se também que, para cada s_2 a curva característica planar $s_1 \mapsto (x_1(s_1,\ s_2),\ x_2(s_1,\ s_2))$ coincide com a curva característica planar $s_1 \mapsto (x_1(s_1,\ -s_2),\ x_2(s_1,\ -s_2))$, pois ambas são linhas retas paralelas ao eixo x_1 com $x_2 = (s_2)^2$.

De acordo com as ideias gerais do método das características, descritas acima, o valor de U deve ser fixado pelo valor da função u_0 no ponto em que cada curva característica planar cruza a superfície de Cauchy. Para $s_2 \neq 0$ há dois desses pontos. Qual adotar? Como, para a equação estudada, U é constante ao longo de cada curva característica planar, concluímos que

para $s_2 \neq 0$ a função $U(s_1,\ s_2)$ assume o mesmo valor nos dois pontos onde estas cruzam $\mathfrak{C}$. Ora, isso só é possível se $u_0(s_2) = u_0(-s_2)$ para todo $s_2 \in \mathbb{R}$, ou seja, se u_0 for uma função par. Caso contrário, não existe solução para o problema. Assumindo então que u_0 é uma função par, podemos adotar $U(s_1,\ s_2) = u_0(s_2)$, dando sentido à última relação de (18.73). Podemos então passar à questão de determinar a solução u. Notemos que a aplicação $(s_1,\ s_2) \mapsto (x_1,\ x_2)$ definida em (18.77) tem por imagem o semiplano $x_2 \geq 0$. Para o Jacobiano dessa transformação tem-se $\frac{\partial(x_1,\ x_2)}{\partial(s_1,\ s_2)} = 2s_2$ e ao menos uma transformação inversa existe, portanto, se $s_2 \neq 0$. De fato, tem-se

$$s_1(x_1,\ x_2) \ = \ x_1 - \sqrt{x_2}\,, \qquad s_2(x_1,\ x_2) \ = \ \sqrt{x_2}\,, \quad \forall\, x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \geq 0\,, \tag{18.78}$$

ou

$$s_1(x_1,\ x_2) \ = \ x_1 + \sqrt{x_2}\,, \qquad s_2(x_1,\ x_2) \ = \ -\sqrt{x_2}\,, \quad \forall\, x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \geq 0\,. \tag{18.79}$$

Logo, no semiplano $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \geq 0$, a solução u é dada por $u(x_1,\ x_2) = U(s_1(x_1,\ x_2),\ s_2(x_1,\ x_2)) = u_0(\sqrt{x_2})$ se adotarmos (18.78) ou $u(x_1,\ x_2) = U(s_1(x_1,\ x_2),\ s_2(x_1,\ x_2)) = u_0(-\sqrt{x_2})$ se adotarmos (18.79). Como u_0 foi suposta par, não há distinção entre essas soluções.

No semiplano $x_2 < 0$ a solução não é fixada pelas condições de contorno (pois essa região não é visitada pelas curvas características). Nessa região podemos adotar para $u(x_1,\ x_2)$ qualquer função que seja constante ao longo das curvas características planares, ou seja, que seja função apenas de x_2. Naturalmente, se desejarmos soluções clássicas, essa função deve ser contínua e diferenciável e, por exemplo, deve-se impor que a solução seja igual a $u_0(0)$ em $x_2 = 0$.

Resumindo, caso u_0 não seja par não há solução para o problema e se o for a solução é

$$u(x_1,\ x_2) \ = \ \begin{cases} u_0(\sqrt{x_2})\,, & x_2 \geq 0\,, \\ \\ g(x_2)\,, & x_2 < 0\,, \end{cases}$$

onde g é uma função, em princípio, arbitrária.

♦

Exemplo 18.5 Considere-se a equação diferencial linear e homogênea

$$x_1(1-x_1)\frac{\partial u}{\partial x_1} - (1-2x_1)x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} \ = \ 0\,, \tag{18.80}$$

para $x \in [0,\ 1]$, $t \geq 0$, com as condições de contorno $u(x,\ 0) = 0$ e $u(0,\ t) = u(1,\ t) = 0$. Nesse caso a superfície de Cauchy é $\mathfrak{C} = V_0 \cup V_2 \cup H$ onde

$$\begin{aligned} V_0 \ &= \ \Big\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 \ = \ 0,\ x_2 \ \geq \ 0\Big\}\,, \\ \\ V_1 \ &= \ \Big\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 \ = \ 1,\ x_2 \ \geq \ 0\Big\}\,, \\ \\ H \ &= \ \Big\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \ \leq \ x_1 \ \leq \ 1,\ x_2 \ = \ 0\Big\}\,, \end{aligned}$$

ou seja, $\mathfrak{C}$ é formada pela união das semirretas que compõem a fronteira do retângulo semi-infinito $R = \{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 \in [0,\ 1]\,,\ x_2 \geq 0\}$ onde a equação (18.80) está sendo considerada. Nesse caso a função u_0 é identicamente nula em $\mathfrak{C}$.

As equações que definem as curvas características são

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(s_1) \ &= \ x_1(s_1)\Big(1 - x_1(s_1)\Big)\,, \\ \\ \dot{x_2}(s_1) \ &= \ -(1-2x_1(s_1))x_2(s_1)\,, \\ \\ \dot{U}(s_1) \ &= \ 0\,. \end{aligned}$$

A primeira equação pode ser facilmente resolvida por integração (faça!), fornecendo

$$x_1(s_1) \ = \ \frac{\alpha e^{s_1}}{1 + \alpha e^{s_1}}\,,$$

onde α é uma constante arbitrária. Inserindo isso na segunda equação, obtemos por integração (faça!) a solução

$$x_2(s_1) \ = \ \beta\frac{(1+\alpha e^{s_1})^2}{\alpha e^{s_1}}\,,$$

onde β é uma constante arbitrária. Das expressões para $x_1(s_1)$ e $x_2(s_1)$ obtemos

$$x_2(s_1)x_1(s_1)\big(1-x_1(s_1)\big) \;=\; \beta\,.$$

Assim, as curvas características planares são o lugar geométrico dos pontos $(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x_2x_1(1-x_1) = \beta$ para todo $\beta \in \mathbb{R}$. A equação $\dot{U}(s_1) = 0$ informa-nos que U é constante ao longo das curvas características planares e disso concluímos que $u(x_1,\ x_2) = f\big(x_2x_1(1-x_1)\big)$ é a solução geral de (18.80) para qualquer função contínua e diferenciável f. Para fixar as condições de contorno precisamos estudar como as curvas características planares cruzam a superfície de Cauchy $\mathfrak{C}$ e aqui se revela o interesse especial desse exemplo.

O fato interessante é que para $\beta \neq 0$ as curvas características planares não cruzam $\mathfrak{C}$ em nenhum ponto. De fato, em $\mathfrak{C}$ ou tem-se $x_1 = 0$ ou $x_1 = 1$ ou $x_2 = 0$ e teríamos $x_2x_1(1-x_1) = 0$, contradizendo a condição $\beta \neq 0$. A Figura 18.3, página 1105, mostra diversas curvas características planares para $0 < x_1 < 1$ e para diversos valores de $\beta > 0$. Essas curvas são disjuntas duas a duas e sua união coincide com o interior do retângulo R, tendo como envoltória a fronteira $\mathfrak{C}$. Porém, como dissemos, essas curvas não cruzam a fronteira $\mathfrak{C}$ e, portanto, nelas não é possível fixar as condições de contorno. Para $\beta = 0$ as curvas características planares são três: uma sendo a linha reta $x_1 \equiv 0$, a segunda sendo a linha reta $x_1 \equiv 1$ e a terceira sendo a linha reta $x_2 \equiv 0$. Cada uma delas passa ao longo de uma dos subconjuntos V_0, V_1 ou H de $\mathfrak{C}$. Como U é constante ao longo das curvas características planares, deve anular-se ao longo dessas três linhas. Disso concluímos que para a solução $u(x_1,\ x_2) = f\big(x_2x_1(1-x_1)\big)$ a função f deve anular-se em zero, ou seja, $f(0) = 0$. Note-se que essa é a única restrição imposta à função f pelas condições de contorno.

Concluímos que o problema considerado possui infinitas soluções, todas da forma $u(x_1,\ x_2) = f\big(x_2x_1(1-x_1)\big)$, onde f é uma função contínua e diferenciável em $[0,\ \infty)$ satisfazendo $f(0) = 0$.

Se tivéssemos imposto condições de contorno não homogêneas na superfície de Cauchy $\mathfrak{C}$ o problema só possuirá soluções (infinitas delas) se essas condições forem constantes em $\mathfrak{C}$, de outra forma não é possível satisfazer a condição que U seja constante ao longo das três curvas características planares que passam por V_0, V_1 ou H. Assim, para condições de contorno gerais, ou há infinitas soluções ou não há nenhuma.

A Figura 18.4, página 1106, mostra diversas curvas características planares em todo o plano x_1-x_2 para diversos valores de α e β, positivos e negativos. ♦

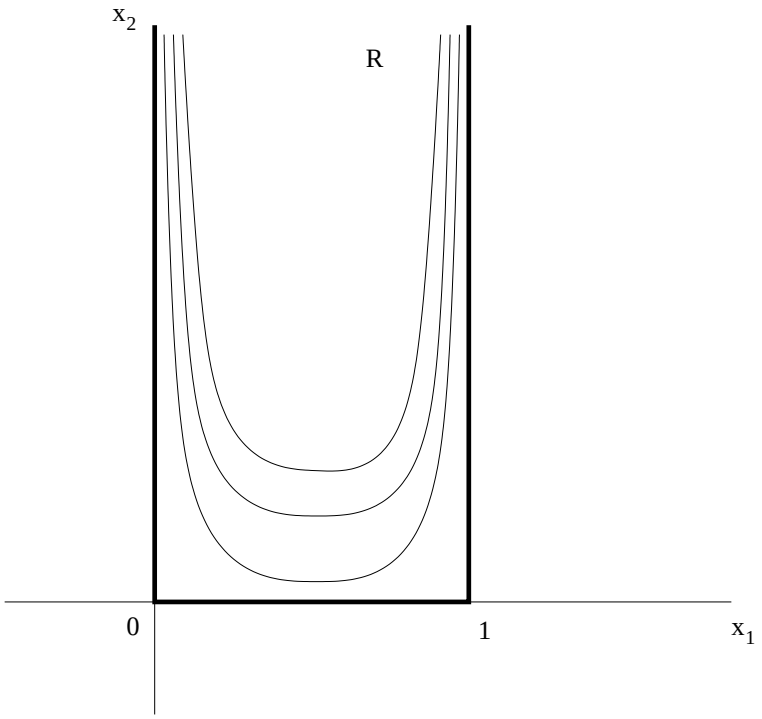

Figura 18.3: As curvas características no interior de R para diversos valores de $\beta > 0$. A superfície de Cauchy $\mathfrak{C}$ é a fronteira de R, indicada por linhas grossas.

Exemplo 18.6 [A equação de Burgers inviscível e ondas de choque]. Vamos agora considerar um exemplo de uma

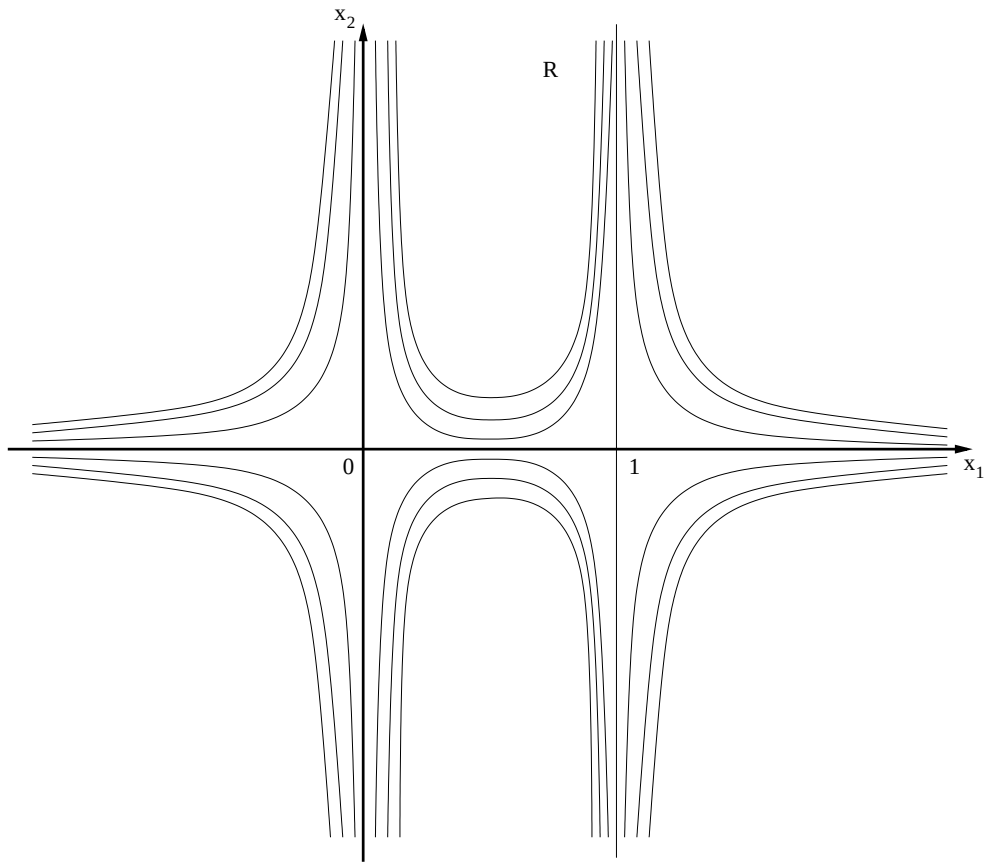

Figura 18.4: As curvas características em todo plano x_1-x_2 para diversos valores de α e β, positivos e negativos.

equação não linear, a saber a equação de Burgers inviscível[34] (*i.e.*, sem viscosidade) (18.17): $u\frac{\partial\, u}{\partial x} + \frac{\partial\, u}{\partial t} = 0$, com uma condição inicial $u(x,\, 0) = u_0(x)$.

Comummente a função $u(x,\, t)$ é interpretada como representando a velocidade no ponto x e no instante de tempo t de um fluido unidimensional. Vamos nos ater a essa interpretação no que segue. Cada ponto do fluido se move com velocidade u e suporemos que nele não ajam quaisquer forças, quer externas quer das outras partículas do fluido. A ausência de aceleração $\frac{du}{dt} = 0$ implica, pela regra da cadeia, $\frac{\partial\, u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial\, u}{\partial x} = 0$, ou seja, $\frac{\partial\, u}{\partial t} + u\frac{\partial\, u}{\partial x} = 0$. Essa é a forma mais simples de deduzir a equação de Burgers inviscível. Com essa interpretação em mente as curvas características representam, como veremos, a trajetória de cada partícula do fluido a partir de uma posição e velocidade inicial. Como partículas situadas em pontos diferentes em $t = 0$ podem ter velocidades iniciais diferentes e movem-se sem interagir umas com as outras, as mesmas podem se sobrepor em uma mesma posição em instantes futuros. Essa é a origem das chamadas *ondas de choque* que veremos surgir formalmente no que segue.

A equação de Burgers inviscível (18.17) é uma equação quaselinear (mas não linear) com $a_1(x,\, t,\, u) = u$, $a_2(x,\, t,\, u) = 1$ e $b(x,\, t,\, u) = 0$. A superfície de Cauchy nesse caso é $\mathfrak{C} := \{(x,\, t) \in \mathbb{R}^2 :\, t \equiv 0\}$ e podemos parametrizá-la por

$$\mathfrak{C} := \Big\{(x,\, t) \in \mathbb{R}^2 :\, x = \psi_1(s_2) = s_2\ ,\ \ t = \psi_2(s_2) \equiv 0\Big\}\ .$$

O sistema de equações para as curvas características é

$$\dot{x}(s_1)\ =\ U(s_1)\ ,\qquad \dot{t}(s_1)\ =\ 1\ ,\qquad \dot{U}(s_1)\ =\ 0\ , \tag{18.81}$$

cujas soluções são,

$$x(s_1)\ =\ \gamma s_1 + \alpha\ ,\qquad t(s_1)\ =\ s_1 + \beta\ ,\qquad U(s_1)\ =\ \gamma\ ,$$

com α, β e γ constantes. Impondo que para $s_1 = 0$ estejamos sobre $\mathfrak{C}$, temos $\alpha = s_2$ e $\beta = 0$. Impondo $U(0) = u_0(s_2)$, teremos $\gamma = u_0(s_2)$. Com isso,

$$x(s_1,\, s_2)\ =\ u_0(s_2)s_1 + s_2\ ,\qquad t(s_1,\, s_2)\ =\ s_1\ ,\qquad U(s_1,\, s_2)\ =\ u_0(s_2)\ . \tag{18.82}$$

[34] Essa equação coincide com a equação de Euler da Mecânica dos Fluidos, sem gradiente de pressão e forças externas.

Como se vê, as curvas características planares dependem da escolha da condição inicial u_0.

A título de exemplo, tomemos u_0 da forma

$$u_0(x) \;=\; \begin{cases} 1\,, & x \leq 0\,, \\ (1-x^2)^2\,, & 0 < x < 1\,, \\ 0\,, & x \geq 1\,. \end{cases} \tag{18.83}$$

Essa função é contínua e tem derivada contínua em toda reta $\mathbb{R}$. Seu gráfico é exibido na Figura 18.5, página 1107.

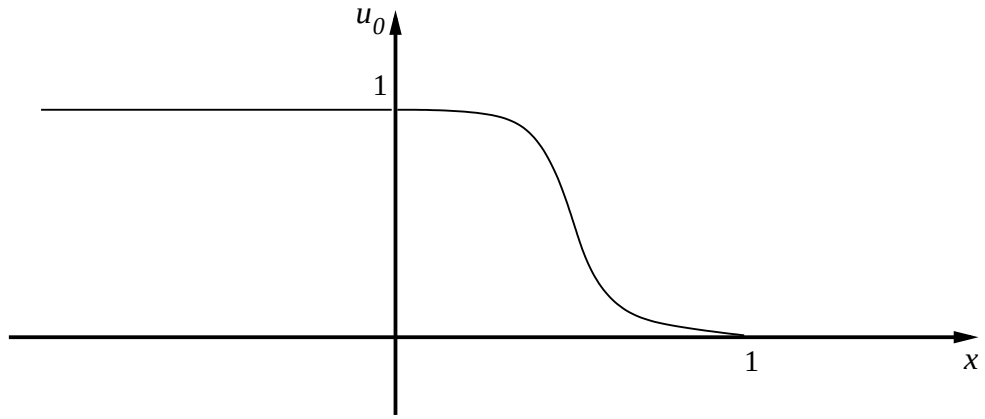

Figura 18.5: A condição inicial u_0 dada em (18.83) representa um perfil inicial de velocidades no qual todo ponto do fluido situado em $x < 0$ move-se com velocidade 1. A velocidade decai a zero continuamente (e diferenciavelmente) no intervalo $0 \leq x \leq 1$ e é nula para $x > 1$. Dessa forma, todo o ponto do fluido situado em $x < 1$ tem uma velocidade inicial positiva. Como vemos na solução da equação de Burgers inviscível, essa condição conduz ao aparecimento de uma onda de choque no fluido.

Para essa escolha de u_0 as famílias de curvas características planares são descritas por

$$\Big(x(s_1,\,s_2),\,t(s_1,\,s_2)\Big) \;=\; \begin{cases} \big(s_1+s_2,\,s_1\big)\,, & s_1 \in \mathbb{R}\,,\; s_2 \leq 0\,, \\ \big((1-(s_2)^2)^2 s_1 + s_2,\,s_1\big)\,, & s_1 \in \mathbb{R}\,,\; 0 < s_2 < 1\,, \\ \big(s_2,\,s_1\big)\,, & s_1 \in \mathbb{R}\,,\; s_2 \geq 1\,. \end{cases}$$

Essas relações implicam que, para cada s_2, vale $x = u_0(s_2)t + s_2$ que, como dissemos descreve a trajetória de uma partícula partindo da posição s_2 movendo-se com velocidade constante $u_0(s_2)$. No plano x–t essas curvas correspondem à família de linhas retas

$$t \;=\; x - s_2\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \quad s_2 \leq 0\,,$$

$$t \;=\; \frac{x-s_2}{(1-(s_2)^2)^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad 0 < s_2 < 1\,,$$

$$x \;=\; s_2\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \quad s_2 \geq 1\,,$$

tal como desenhadas na Figura 18.6, página 1108. Nessa figura exibimos apenas o semiplano $t \geq 0$. É importante recordar que, pela última equação de (18.81), U é constante ao longo de cada curva característica planar.

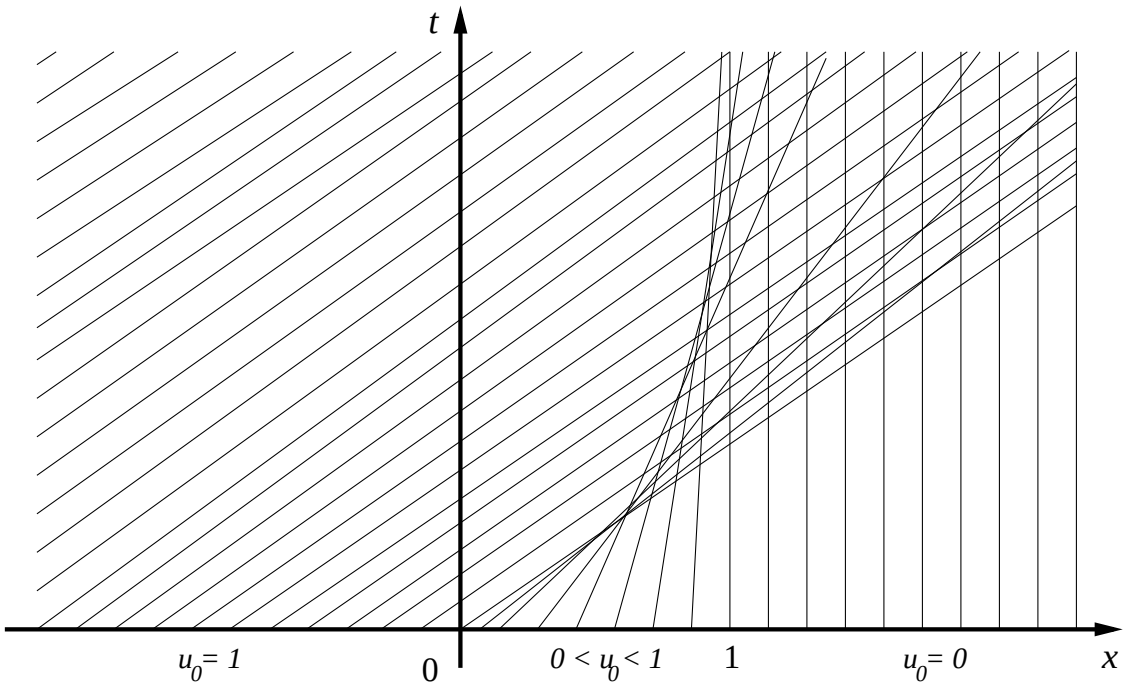

Figura 18.6: As curvas características planares no semiplano $t \geq 0$ associadas à condição inicial u_0 de (18.83). As retas que partem do eixo x na região $x \leq 0$ correspondem a $s_2 < 0$ e têm inclinação 1. As retas que partem do eixo x na região $0 < x < 1$ correspondem a $0 < s_2 < 1$ e têm inclinação variando de 1 a infinito. As retas que partem do eixo x na região $x \geq 1$ correspondem a $s_2 \geq 1$ e têm inclinação infinita, ou seja, são verticais. A função u é constante ao longo de cada curva característica planar, assumindo em cada uma o valor fixado pela função u_0 no ponto onde mesma atinge o eixo horizontal x (*i.e.*, em $t = 0$). Porém, em pontos em que ocorrem cruzamentos de curvas características planares, há uma indefinição. Observe na figura acima a existência de zonas de cruzamento das curvas características planares. Essas zonas são regiões singulares onde ocorrem as chamadas *ondas de choque*.

O fato mais notável observado na Figura 18.6 é a existência de regiões no plano x–t onde se dá cruzamento das curvas características planares[35]. Nas regiões em que não ocorre cruzamento, u é constante ao longo das características planares e, portanto, é univocamente determinado pelo valor de u_0 no ponto em que cada característica planar cruza o eixo x em $t = 0$. Nas regiões em que ocorre cruzamento de curvas características planares a aplicação $(s_1,\ s_2) \mapsto (x,\ t)$ não é bijetora (pois a inversão não é unívoca) e, não havendo inversa, é de se esperar a existência de singularidades na solução. Na Figura 18.7, página 1109, é exibida a evolução temporal do perfil de velocidades $u(x,\ t)$ para diversos instantes de tempo após o instante inicial $t = 0$, quando foi fixada a condição inicial $u_0(x)$ dada em (18.83) e exibida na Figura 18.5. O surgimento de singularidades é notado na formação de uma descontinuidade na função u como função de x. Esse fenômeno é denominado *choque*, em referência ao fenômeno fisicamente conhecido das chamadas *ondas de choque*, e é sempre, matematicamente falando, associado à ocorrência de cruzamento de curvas características planares.

E. 18.17 *Exercício*. Estudando a Figura 18.6, convença-se da validade do quadro exibido na Figura 18.5, que descreve a evolução temporal do sistema considerado. ✠

O fenômeno de ondas de choque é observado em outras equações diferenciais não lineares, um exemplo sendo a equação de Korteweg-de Vries (18.15), página 1074. Para uma discussão mais extensa do fenômeno de ondas de choque em Mecânica dos Fluidos e sua relação com a teoria das equações a derivadas parciais, vide [223] ou [379]. ⧫

Exemplo 18.7 [A equação de Burgers inviscível e ondas de rarefação]. Vamos agora considerar novamente a equação de Burgers inviscível $u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$, com uma condição inicial $u(x,\ 0) = u_0(x)$ tratada no Exemplo 18.6, página 1105, mas agora

[35] É de se observar, também, que as curvas características no espaço x–t–u não se cruzam.

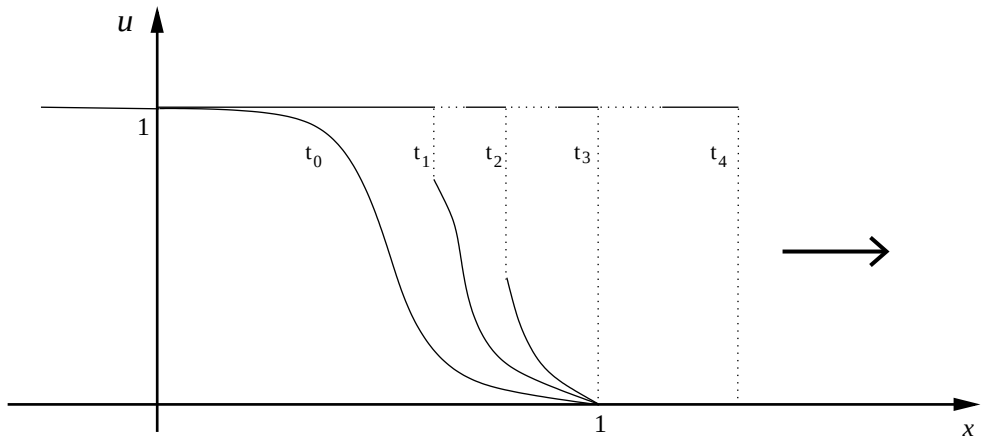

Figura 18.7: Visão esquemática da evolução temporal do perfil de velocidades $u(x,\, t)$ a partir da condição inicial $u_0(x)$. O perfil é mostrado acima em instantes de tempo $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, movendo-se da esquerda para a direita. A presença de choque manifesta-se com a formação de uma descontinuidade na função u como função de x. Acima, nas unidades consideradas, $t_3 = 1$ (pois é 1 é o tempo necessário para se percorrer uma distância de uma unidade com velocidade 1). Nesse instante a descontinuidade assume o valor máximo.

com uma outra condição inicial com a qual podemos exemplificar outro fenômeno. Adotamos, a saber,

$$u_0(x) \;=\; \begin{cases} 0\,, & x \leq 0\,, \\ \\ 1\,, & x > 0\,. \end{cases}$$

Como (18.82) permanece válida, concluímos que

$$\Big(x(s_1,\, s_2),\, t(s_1,\, s_2)\Big) \;=\; \begin{cases} \big(s_2,\, s_1\big)\,, & s_1 \in \mathbb{R}\,,\; s_2 \leq 0\,, \\ \\ \big(s_1 + s_2,\, s_1\big)\,, & s_1 \in \mathbb{R}\,,\; s_2 > 0\,. \end{cases}$$

No plano x–t essas curvas correspondem à família de linhas retas

$$x \;=\; s_2\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \quad s_2 \leq 0\,,$$

$$t \;=\; x - s_2\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad s_2 > 0\,,$$

tal como desenhadas na Figura 18.8, página 1110. Nessa figura exibimos apenas o semiplano $t \geq 0$. É importante recordar que, pela última equação de (18.81), U é constante ao longo de cada curva característica planar.

O fato notável observado na Figura 18.8 é a ausência de curvas características planares na região $t \geq x$ com $x > 0$. Como U é constante ao longo de cada curva característica planar concluímos que a solução da equação diferencial que satisfaz a condição de Cauchy dada é

$$u(x,\, t) \;=\; \begin{cases} 0\,, & x \leq 0\,, \quad t \geq 0\,, \\ \\ 1\,, & x > 0\,, \quad t < x\,, \end{cases}$$

sendo que a solução está indeterminada na região $t \geq x$ com $x > 0$ onde as curvas características planares estão ausentes e, portanto, não determinam a solução nessa região. Esse fenômeno da ausência de curvas características planares em uma região do espaço onde a solução é procurada é denominado *rarefação* ou *onda de rarefação*. Nesse exemplo, a presença desse fenômeno é parcialmente devida à descontinuidade da condição inicial (e ao fato de u_0 ser não decrescente).

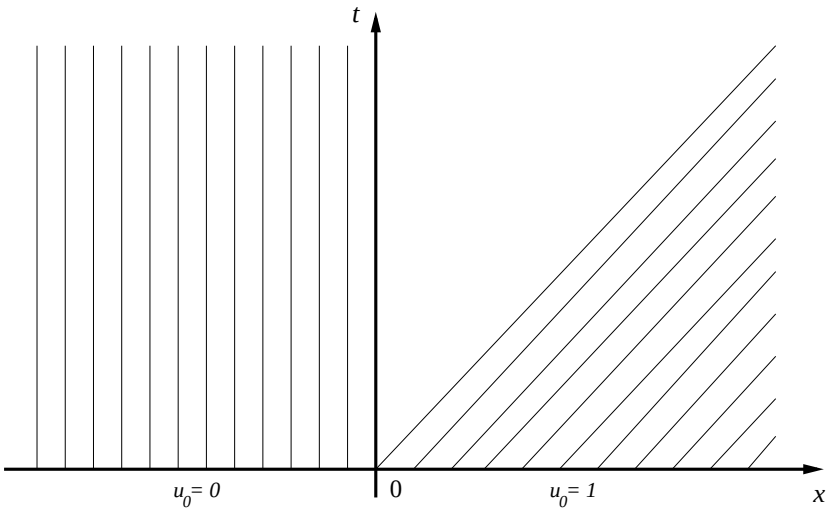

Figura 18.8: Curvas características planares para a equação de Burgers inviscível com a condição inicial $u_0 = 0$ para $x \leq 0$ e $u_0 = 1$ para $x > 0$. Acima, exibimos apenas o semiplano $t \geq 0$. As retas do lado esquerdo são verticais e as do lado direito têm inclinação 1. Observe que as curvas características planares não visitam a região $t \geq x$ com $x > 0$. Esse fenômeno é relacionado às chamadas ondas de rarefação da Mecânica dos Fluidos.

Na região $t \geq x$ com $x > 0$ podemos adotar $u(x,\ t) = 0$, obtendo uma solução contínua exceto ao longo da linha $x = t$. Podemos também adotar $u(x,\ t) = 1$, obtendo uma solução contínua exceto ao longo da linha $x = 0$. Na mesma região é também possível adotar a solução $u(x,\ t) = x/t$. É fácil verificar que a função

$$u(x,\ t) \ = \ \begin{cases} 0\,, & x \leq 0\,, \quad t \geq 0\,, \\ x/t\,, & x > 0\,, \quad t \geq x\,, \\ 1\,, & x > 0\,, \quad 0 \leq t < x\,, \end{cases}$$

assim obtida é solução fraca da equação de Burgers inviscível e é contínua em todo semiplano $t > 0$. As diversas soluções mencionadas acima não são ditadas pelas condições iniciais e para justificá-las é preciso acrescentar mais condições ao problema. Vide [583] ou [670] para uma discussão mais detalhada. Para uma discussão física de fenômenos de rarefação, vide [379]. ♦

E. 18.18 *Exercício*. Resolva a equação de Burgers inviscível $u\frac{\partial\, u}{\partial x} + \frac{\partial\, u}{\partial t} = 0$, com uma condição inicial $u(x,\ 0) = u_0(x)$, sendo

$$u_0(x) \ = \ \begin{cases} 0\,, & x \leq 0\,, \\ x\,, & 0 < x \leq 1\,, \\ 1\,, & x > 1\,. \end{cases}$$

✠

E. 18.19 *Exercício*. Resolva a equação de Burgers inviscível $u\frac{\partial\, u}{\partial x} + \frac{\partial\, u}{\partial t} = 0$, com uma condição inicial $u(x,\ 0) = u_0(x)$, sendo

$$u_0(x) \ = \ \begin{cases} 1\,, & x \leq 0\,, \\ 1 - x\,, & 0 < x \leq 1\,, \\ 0\,, & x > 1\,. \end{cases}$$

Aqui também ocorrem ondas de choque. ✠

E. 18.20 *Exercício*. Resolva a equação de Burgers inviscível $u\frac{\partial\, u}{\partial x} + \frac{\partial\, u}{\partial t} = 0$, com uma condição inicial $u(x,\, 0) = u_0(x)$, sendo

$$u_0(x) \;=\; \begin{cases} 0\,, & x \le 0\,, \\ \big(1-(1-x)^2\big)^2\,, & 0 < x \le 1\,, \\ 1\,, & x > 1\,. \end{cases} \tag{18.84}$$

Vide Figura 18.9, página 1111. ✠

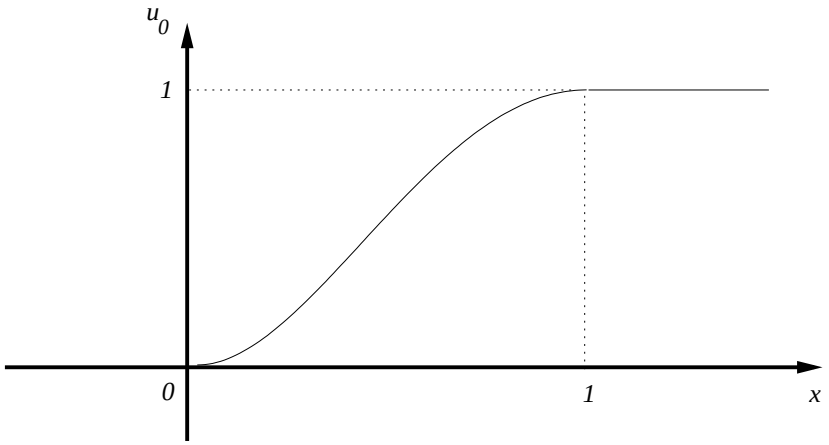

Figura 18.9: A condição inicial u_0 de (18.84).

18.5.2 Características. Comentários Adicionais

• **Curvas características e mudanças de coordenadas**

Se for realizada uma mudança de variáveis $(x_1,\, \ldots,\, x_n) \mapsto (y_1,\, \ldots,\, y_n)$ na equação (18.56) a mesma transforma-se em

$$\sum_{j=1}^{n} A_j\big(\mathbf{y},\, v(\mathbf{y})\big)\, v_{y_j}(\mathbf{y}) \;=\; B\big(\mathbf{y},\, v(\mathbf{y})\big)\,, \tag{18.85}$$

onde $\mathbf{y} := (y_1,\, \ldots,\, y_n)$, $v(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$,

$$A_j(\mathbf{y},\, v(\mathbf{y})) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} a_k\big(\mathbf{x}(\mathbf{y}),\, v(\mathbf{y})\big)\frac{\partial\, y_j}{\partial x_k}(\mathbf{y})\,, \qquad B(\mathbf{y},\, v(\mathbf{y})) \;:=\; b\big(\mathbf{x}(\mathbf{y}),\, v(\mathbf{y})\big)\,. \tag{18.86}$$

Para a nova equação (18.85) as curvas características seriam dadas pelo sistema (vide (18.64))

$$\begin{aligned} \frac{\partial\, y_1}{\partial s_1}(\mathbf{s}) &= A_1\big(\mathbf{y}(\mathbf{s}),\, U(\mathbf{s})\big)\,, \\ &\vdots \\ \frac{\partial\, y_n}{\partial s_1}(\mathbf{s}) &= A_n\big(\mathbf{y}(\mathbf{s}),\, U(\mathbf{s})\big)\,, \\ \\ \frac{\partial\, V}{\partial s_1}(\mathbf{s}) &= B\big(\mathbf{y}(\mathbf{s}),\, U(\mathbf{s})\big)\,. \end{aligned} \tag{18.87}$$

Expressando essas curvas em termos das coordenadas $\mathbf{x}$ teremos

$$\frac{\partial\, x_l}{\partial s_1}(\mathbf{s}) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\, x_l}{\partial y_j}\frac{\partial\, y_j}{\partial s_1}(\mathbf{s}) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\, x_l}{\partial y_j} A_j\big(\mathbf{y}(\mathbf{s}),\, U(\mathbf{s})\big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k\big(\mathbf{x}(\mathbf{y}(\mathbf{s})),\, v(\mathbf{y}(\mathbf{s}))\big) \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\, x_l}{\partial y_j}\frac{\partial\, y_j}{\partial x_k}(\mathbf{s})}_{=\frac{\partial\, x_l}{\partial x_k}=\delta_{l,\,k}} \;=\; a_l\big(\mathbf{x}(\mathbf{y}(\mathbf{s})),\, v(\mathbf{y}(\mathbf{s}))\big)$$

e

$$\frac{\partial\, V}{\partial s_1}(\mathbf{s}) \;=\; b\big(\mathbf{x}(\mathbf{y}(\mathbf{s})),\, U(\mathbf{s})\big)\,.$$

Percebemos tratar-se do mesmo sistema de (18.64). A conclusão disso é que as curvas características de uma equação quaselinear de primeira ordem não dependem do particular sistema de coordenadas usado para escrevê-la tendo, portanto, um carácter intrínseco.

Esse comentário justifica, aliás, o adjetivo "características" para designar tais curvas. Em Matemática esse qualificativo é utilizado para designar objetos que independem das coordenadas ou sistemas de referência usados para sua descrição (mais ou menos como, no jargão da Física, se emprega a palavra "invariante"). Por exemplo, se M é uma matriz quadrada, o polinômio $P_M(x) := \det(x\mathbb{1} - M)$ é denominado *polinômio característico* de M pois independe da base usada para descrever M. De fato, $P_M(x) := \det(x\mathbb{1} - M) = \det(T^{-1}(x\mathbb{1} - M)T) = \det(x\mathbb{1} - (T^{-1}MT)) =: P_{T^{-1}MT}(x)$ para qualquer matriz inversível T (lembrar que $T^{-1}MT$ representa a transformação de M pela mudança de base descrita por T).

Retornando a (18.85), suponhamos que as novas coordenadas $\mathbf{y}$ coincidam com as coordenadas $\mathbf{s}$ usadas para parametrizar as curvas características de (18.56). Para (18.86) teremos, usando (18.64),

$$A_j(\mathbf{s},\, v(\mathbf{s})) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} a_k\big(\mathbf{x}(\mathbf{s}),\, v(\mathbf{s})\big)\frac{\partial\, y_j}{\partial x_k}(\mathbf{s}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\, x_k}{\partial s_1}(\mathbf{s})\frac{\partial\, s_j}{\partial x_k}(\mathbf{s}) \;=\; \frac{\partial\, s_j}{\partial s_1} \;=\; \delta_{j,\,1}$$

e, assim, (18.85) reduz-se a

$$v_{s_1}(\mathbf{s}) \;=\; B\big(\mathbf{s},\, v(\mathbf{s})\big)\,, \tag{18.88}$$

que trata-se, em essência, de uma equação diferencial ordinária para v. Essa equação não é distinta da última equação de (18.64) ou de (18.57), mas permite um novo entendimento das curvas características: a família das curvas características representa um sistema de coordenadas no qual alguns termos são eliminados da parte principal da equação quaselinear de primeira ordem (18.56), de modo a torná-lo o mais simples possível. Essa ideia é importante, pois pode ser reproduzida em equações de ordem superior a 1, levando à noção de superfícies características.

18.5.3 Sistemas de Equações Quaselineares de Primeira Ordem

Vamos aqui estender o método das características para a resolução de certos sistemas de equações a derivadas parciais quaselineares de primeira ordem. Consideremos um sistema de equações diferenciais a derivadas parciais quaselineares de primeira ordem da forma

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(u,\, x)\frac{\partial\, u}{\partial x_k} + a(u,\, x) \;=\; 0\,, \tag{18.89}$$

onde $u(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $u = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_m(x) \end{pmatrix}$, é um vetor coluna composto por m funções incógnitas u_l em $\mathbb{R}^n$ e onde cada $A_k(x,\, u)$ é uma matriz $m \times m$ dependendo eventualmente de $x \in \mathbb{R}^n$ e de $u \in \mathbb{R}^m$ de forma contínua e a é um vetor coluna de m componentes $a(u,\, x) = \begin{pmatrix} a_1(u,\, x) \\ \vdots \\ a_m(u,\, x) \end{pmatrix}$, sendo cada $a_k : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ eventualmente dependente de $x \in \mathbb{R}^n$ e de $u \in \mathbb{R}^m$. Acima, como no que segue, usamos a abreviação $(u,\, x) \equiv (u_1,\, \ldots,\, u_m,\, x_1,\, \ldots,\, x_n)$.

Para manter o tratamento simples, vamos supor que os elementos de matriz das matrizes A_k e de a sejam infinitamente diferenciáveis em suas variáveis, mas condições muito mais fracas podem ser consideradas em muito do que segue.

No que segue, apresentaremos algumas considerações gerais sobre sistemas como (18.89) e discutiremos em alguns casos métodos de solução. Observamos de antemão que, especialmente no caso não linear, as soluções que obteremos podem existir apenas em certas regiões limitadas, em função de fenômenos como cruzamento de características, *"blow-up"* de soluções (*i.e.*, divergências de soluções em tempo finito) ou "choque", *i.e.*, divergência de alguma derivada espacial de alguma das componentes de u. Uma extensa literatura foi desenvolvida em torno desse tema (inclusive com estimativas precisas da região de validade das soluções), mas na corrente versão deste texto não discutiremos esse assunto, limitando-nos a remeter o leitor à literatura especializada, por exemplo a [309], [134], [223], [626] ou [247].

Tomando emprestada uma nomenclatura de sistemas de equações lineares, o sistema (18.89) é dito ser um *sistema quaselinear homogêneo* se $a(u,\ x)$ for identicamente nula e é dito ser um *sistema quaselinear não homogêneo* de outra forma.

Vamos supor que, ao menos localmente, façamos uma mudança de variáveis $x \to \xi$ em $\mathbb{R}^n$ em (18.89), as novas variáveis sendo diferenciáveis ao menos uma vez em relação à antigas (e vice-versa) e com o determinante Jacobiano supostamente não nulo. A equação (18.89) tornar-se-ia

$$\sum_{l=1}^{n} \tilde{A}_l(v,\ \xi)\frac{\partial\, v}{\partial \xi_l} + \tilde{a}(v,\ \xi) \ =\ 0\ , \tag{18.90}$$

onde $v(\xi) \equiv u(x(\xi))$,

$$\tilde{A}_l\big(v(\xi),\ \xi\big) \ \equiv\ \sum_{k=1}^{n} A_k\Big(v(\xi),\ x(\xi)\Big)\frac{\partial\, \xi_l}{\partial x_k}(x(\xi))$$

e $\tilde{a}(v,\ \xi) \equiv a\big(v(\xi),\ x(\xi)\big)$.

Consideremos agora a superfície $\mathcal{C}$ definida por $\xi_n(x) = k$, constante, e suponhamos que sejam fornecidos os valores de u (e, portanto, de v) nessa superfície. Esses valores compõem os dados de Cauchy do problema. Note que em se conhecendo os dados de Cauchy, conhece-se automaticamente as derivadas de u (e, portanto, de v) na direções dos plano tangente a $\mathcal{C}$ em cada ponto. A questão que estão se coloca é se as equações que definem o sistema permitem também determinar a derivada normal a $\mathcal{C}$ em cada ponto.

A derivada normal de v (e, portanto, de u) em relação a essa superfície é $\dfrac{\partial\, v}{\partial \xi_n} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\, u}{\partial x_j}\frac{\partial\, x_j}{\partial \xi_n}$. De acordo com (18.90), temos

$$\tilde{A}_n(v,\ \xi)\frac{\partial\, v}{\partial \xi_n} \ =\ -\sum_{l=1}^{n-1} \tilde{A}_l(v,\ \xi)\frac{\partial\, v}{\partial \xi_l} - \tilde{a}(v,\ \xi)\ , \tag{18.91}$$

e, portanto, a equação (18.90) determina a derivada normal $\frac{\partial\, v}{\partial \xi_n}$ em termos dos dados de Cauchy e suas derivadas primeiras ao longo de $\mathcal{C}$ se e somente se a matriz inversa $\tilde{A}_n(\xi,\ v)^{-1}$ existir em toda $\mathcal{C}$, em cujo caso

$$\frac{\partial\, v}{\partial \xi_n} \ =\ -\sum_{l=1}^{n-1} \tilde{A}_n(v,\ \xi)^{-1}\tilde{A}_l(v,\ \xi)\frac{\partial\, v}{\partial \xi_l} - \tilde{A}_n(v,\ \xi)^{-1}\tilde{a}(v,\ \xi)\ . \tag{18.92}$$

Segundo nossas definições acima, a superfície $\mathcal{C}$ definida por $\xi_n = k$, constante, é dita ser uma *superfície não característica* da equação (18.89) se para todo $x \in \mathcal{C}$ e qualquer u a matriz inversa $\tilde{A}_n(v,\ \xi)^{-1}$ existir, ou seja, se valer

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\big(u(x),\ x\big)\frac{\partial\, \xi_n}{\partial x_k}(x)\right) \ \neq\ 0\ , \tag{18.93}$$

caso contrário, ou seja, se para algum $x \in \mathcal{C}$ valer

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\big(u(x),\ x\big)\frac{\partial\, \xi_n}{\partial x_k}(x)\right) \ =\ 0\ , \tag{18.94}$$

$\mathcal{C}$ é dita ser uma *superfície característica*, ou simplesmente uma *característica* para u no ponto x em questão. A equação (18.94) é denominada *equação característica*. Note-se que, pela hipótese de continuidade das matrizes $A_k\big(u(x),\ x\big)$ e das derivadas $\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_k}(x)$, se $\mathcal{C}$ não é característica, então (18.93) vale em uma vizinhança de $\mathcal{C}$.

Dessa forma, a derivada normal $\frac{\partial\,v}{\partial \xi_n}$ só é determinada pelos dados de Cauchy em $\mathcal{C}$ e suas derivadas primeiras ao longo de $\mathcal{C}$ se $\mathcal{C}$ for não característica.

A equação dos planos característicos é

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\big(u(x),\ x\big)\,\alpha_k\right) \;=\; 0\,, \tag{18.95}$$

onde o vetor $\vec{\alpha}$ é suposto ser normalizado: $(\alpha_1)^2+\cdots+(\alpha_n)^2=1$.

• **As superfícies características**

Vamos supor que ao menos uma das matrizes $A_j\big(u(x),\ x\big)$, $j=1,\,\ldots,\,n$ seja inversível. Sem perda de generalidade, vamos supor que essa matriz seja a matriz $A_n\big(u(x),\ x\big)$. Se as superfícies de nível $\xi_n=$ constante forem características, ou seja, se (18.93) for identicamente satisfeita, a relação (18.93) é válida. Se $A_n\big(u(x),\ x\big)$ for inversível, podemos escrever (18.93) como

$$\det\left(\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_n}(x)\mathbb{1}-\mathcal{A}\big(u(x),\ x\big)\right) \;=\; 0\,,\quad \text{com}\quad \mathcal{A}\big(u(x),\ x\big)\;:=\;-\sum_{k=1}^{n-1} A_n\big(u(x),\ x\big)^{-1}A_k\big(u(x),\ x\big)\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_k}(x)\,, \tag{18.96}$$

que se trata de uma equação polinomial para $\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_n}(x)$, a saber, a equação para os zeros do polinômio característico (vide Seção 10.2.1, página 634) da matriz $\mathcal{A}\big(u(x),\ x\big)$ e as soluções em $\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_n}(x)$ seriam os autovalores dessa matriz. Para $\left(\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_{n-1}}\right)$ nulo, a equação (18.96) exibe apenas a solução nula $\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_n}=0$. Para $\left(\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_{n-1}}\right)\in\mathbb{R}^{n-1}$ não nulo a equação (18.96) exibe, em princípio, m soluções para $\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_n}(x)$. Cada solução é, ao menos localmente nas variáveis $\left(\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_{n-1}}\right)$, do tipo

$$\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_n}(x) \;=\; f_a\left(\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_{n-1}}\right)\,,\qquad a=1,\,\ldots,\,m\,, \tag{18.97}$$

onde f_a são funções definidas em algum aberto de $\mathbb{R}^{n-1}$. Observe-se que essas funções não são necessariamente reais e que somente soluções reais tem interesse no sentido de descreverem coordenadas reais. Observe-se também que as funções f_a não são necessariamente distintas, pois os autovalores de uma matriz podem ser degenerados. Cada equação em (18.97) é uma equação a derivadas parciais para a função ξ_2. Assim, da solução de (18.97) podemos obter m funções $\xi_2^{(1)}(x),\ \ldots,\ \xi_2^{(m)}(x)$, não necessariamente distintas, que corresponderão a famílias de curvas características dadas por $\xi_2^{(j)}(x)=$ constante.

O seguinte exemplo simples é ilustrativo (tendo a ver diretamente com a equação de ondas em $1+1$-dimensão. Vide Exercício E. 18.21, página 1116, adiante). Considere-se o sistema

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}+\mathbb{1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right]\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \;=\; 0\,, \tag{18.98}$$

onde $c>0$, constante. Nesse caso, $\mathcal{A}=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ c^2 & 0 \end{smallmatrix}\right)\frac{\partial\,\xi_2}{\partial x_1}$ e a equação (18.96) fica

$$\left(\frac{\partial\,\xi_2}{\partial x_2}\right)^2-c^2\left(\frac{\partial\,\xi_2}{\partial x_1}\right)^2 \;=\; 0\,,$$

cujas soluções para $\frac{\partial\,\xi_2}{\partial x_2}$ fornecem as equações a derivadas parciais

$$\frac{\partial\,\xi_2}{\partial x_2} \;=\; -c\frac{\partial\,\xi_2}{\partial x_1}\qquad\text{e}\qquad \frac{\partial\,\xi_2}{\partial x_2} \;=\; c\frac{\partial\,\xi_2}{\partial x_1}\,. \tag{18.99}$$

A primeira apresenta a solução $\xi_2^{(1)}(x,\ t) = h_1(x - ct)$ e a segunda apresenta a solução $\xi_2^{(2)}(x,\ t) = h_2(x + ct)$, com h_1 e h_2 sendo funções, em princípio arbitrárias e uma vez diferenciáveis[36]. Assim, as curvas características associadas à solução $\xi_2^{(1)}$ são do tipo $\xi_2^{(1)}(x,\ t) = h_1(x - ct) =$ constante, ou seja, são as curvas do tipo $x - ct =$ constante, enquanto que as curvas características associadas a solução $\xi_2^{(2)}$ são do tipo $\xi_2^{(2)}(x,\ t) = h_2(x + ct) =$ constante, ou seja, são as curvas do tipo $x + ct =$ constante.

• **Sistemas elípticos**

Se todas as soluções de (18.96) forem complexas (exceto a solução nula) o sistema quaselinear de primeira ordem considerado é dito ser um *sistema elíptico*. Sistemas elípticos não exibem superfícies características (reais).

• **Sistemas hiperbólicos**

Se (18.96) possui uma solução não trivial real (para $\left(\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_{n-1}}\right) \in \mathbb{R}^{n-1}$), existirá um vetor $\beta \in \mathbb{R}^m$ não nulo tal que $\left(\mathcal{A}(x,\ u) - \frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_n}(x)\mathbb{1}\right)\beta = 0$, ou seja,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_n\big(u(x),\ x\big)^{-1} A_k\big(u(x),\ x\big)\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_k}(x)\right)\beta \ =\ 0\ . \tag{18.100}$$

O sistema quaselinear de primeira ordem considerado é dito ser um *sistema hiperbólico* se para cada $\left(\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_{n-1}}\right) \in \mathbb{R}^{n-1}$ não nulo as m soluções de (18.96) forem reais e não nulas e se os correspondentes m vetores $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_m$ (cada um associado a cada autovalor $\frac{\partial\,\xi_n^{(a)}}{\partial x_n}$) satisfazendo (18.100) forem linearmente independentes.

Observe-se, *en passant* que, segundo essa classificação, toda equação diferencial ordinária (caso $n = 1$) é hiperbólica, assim como toda equação diferencial parcial (caso $m = 1$) quaselinear de primeira ordem com coeficientes reais. Justifique!

No caso do sistema (18.98) é fácil constatar que podemos escolher $\beta_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\ c\end{smallmatrix}\right)$ e $\beta_2 = \left(\begin{smallmatrix}1\\ -c\end{smallmatrix}\right)$. Verifique! Assim, o sistema (18.98) é de tipo hiperbólico.

• **Sistemas totalmente hiperbólicos, ou essencialmente hiperbólicos**

Se para cada $\left(\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_{n-1}}\right) \in \mathbb{R}^{n-1}$ não nulo as m soluções de (18.96) forem reais, não nulas e forem todas distintas entre si, então os m vetores $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_m$ (cada um associado a cada autovalor $\frac{\partial\,\xi_n^{(a)}}{\partial x_n}$) serão automaticamente linearmente independentes. Nesse caso o sistema é dito ser *totalmente hiperbólico*, *estritamente hiperbólico* ou ainda *essencialmente hiperbólico*.

O sistema (18.98) é essencialmente hiperbólico, devido ao fato de as soluções (18.99) serem distintas.

• **Sistemas hiperbólicos simétricos**

Antes de prosseguirmos, apresentemos uma outra condição suficiente para garantir que um sistema quaselinear de primeira ordem seja hiperbólico. Afirmamos que se A_n for simétrica e positiva (para a definição e propriedades, vide Seção 10.5.1, página 675) e se as matrizes A_k, $k = 1,\ \ldots,\ n-1$ forem simétricas, então o sistema (18.89) é hiperbólico. Um tal sistema é dito ser um *sistema hiperbólico simétrico*.

Para provar a afirmação, notemos que se A_n for simétrica e positiva, então, pelo Corolário 10.5, página 675, podemos escrevê-la na forma $A_n = S^2$, com S sendo simétrica e inversível (pois A_n o é). Assim, (18.94) equivale a $\det\left(\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_n}(x)\mathbb{1} + \sum_{k=1}^{n-1} S^{-1}A_k\big(u(x),\ x\big)S^{-1}\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_k}(x)\right) = 0$. Como as matrizes $S^{-1}A_k\big(u(x),\ x\big)S^{-1}$ são simétricas e $\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_k}(x)$ são reais, as soluções para $\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_n}(x)$ são reais, por serem autovalores da matriz simétrica $\sum_{k=1}^{n-1} S^{-1}A_k\big(u(x),\ x\big)S^{-1}\frac{\partial\,\xi_n}{\partial x_k}(x)$. Como essa matriz é simétrica, possui um sistema de m autovetores $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_m$ linearmente independentes, completando a prova da afirmação.

Observe-se que o sistema (18.98) é um sistema hiperbólico, mas não é um sistema hiperbólico simétrico, pois a matriz $A_1 = \left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ -c^2 & 0\end{smallmatrix}\right)$ não é simétrica (se $c \neq 1$).

[36] Naturalmente, para que os Jacobianos das transformações $x \to \xi^{(1)}$ e $x \to \xi^{(2)}$ sejam não nulos as funções h_1 e h_2 não podem ser escolhidas constantes.

E. 18.21 *Exercício-exemplo.* Esse exercício ilustra três situações básicas.

I. Já vimos acima que as superfícies características do sistema linear de primeira ordem

$$\left[\mathbb{1} \frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \right] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \; = \; 0 \, , \tag{18.101}$$

onde $c > 0$, constante, são dadas por $x \pm ct =$ constante e vimos também que se trata de um sistema hiperbólico (adote-se $(x_1,\, x_2) = (x,\, t)$).

Em um domínio simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$ esse sistema equivale à equação de ondas $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. Para ver isso, suponha que u satisfaça a equação de ondas e defina $u_1 := \frac{\partial u}{\partial x}$ e $u_2 := \frac{\partial u}{\partial t}$. Então, é fácil checar que $\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial u_2}{\partial t} - c^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$, ou seja, $\left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix} \right)$ satisfaz o sistema acima. Reciprocamente, se $\left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix} \right)$ satisfaz o sistema acima defina-se $u(x,\, t) = \displaystyle\int_{(x_0,\, t_0)}^{(x,\, t)} \big(u_1 dx + u_2 dt \big)$, onde a integral é tomada em uma curva suave orientada entre entre um ponto fixo $(x_0,\, t_0) \in \mathbb{R}^2$ e $(x,\, t) \in \mathbb{R}^2$. Devido à equação $\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$ a integral independe do caminho de integração. Com essa definição é fácil verificar que $u_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $u_2 = \frac{\partial u}{\partial t}$. Logo, a equação $\frac{\partial u_2}{\partial t} - c^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$ implica $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

A solução de (18.101) em termos de condições iniciais é apresentada no Exercício E. 18.23, página 1122.

II. Mostre que o sistema linear

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \right] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \; = \; 0$$

(equações de Cauchy-Riemann) não possui superfícies características (reais) e, portanto, trata-se de um sistema elíptico.

Em um domínio simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$ esse sistema equivale à equação de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Para ver isso, suponha que u satisfaça a equação de Laplace e defina $u_1 := \frac{\partial u}{\partial y}$ e $u_2 := \frac{\partial u}{\partial x}$. Então, é fácil checar que $\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$, ou seja, $\left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix} \right)$ satisfaz o sistema acima. Reciprocamente, se $\left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix} \right)$ satisfaz o sistema acima defina-se $u(x,\, y) = \displaystyle\int_{(x_0,\, y_0)}^{(x,\, y)} \big(u_2 dx + u_1 dy \big)$, onde a integral é tomada em uma curva suave orientada entre entre um ponto fixo $(x_0,\, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$. Devido à equação $\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$ a integral independe do caminho de integração. Com essa definição é fácil verificar que $u_1 = \frac{\partial u}{\partial y}$ e $u_2 = \frac{\partial u}{\partial x}$. Logo, a equação $\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0$ implica $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

III. Mostre que as superfícies características do sistema

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \right] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix} \; = \; 0$$

são dadas por $t =$ constante. Mostre que não se trata de um sistema hiperbólico ou elíptico.

Sob condições adequadas esse sistema equivale à equação de difusão $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ com $u_1 = u$ e $u_2 = \frac{\partial u}{\partial x}$. As condições a que nos referimos, são a imposição que $u_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x}$ na superfície de Cauchy $\mathcal{C}$ considerada, um caso particular da condição mais geral onde u_1 e u_2 são escolhidos independentemente em $\mathcal{C}$.

Para entendermos esse exemplo melhor, notemos que o sistema acima é composto pelas equações (a) $\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial x}$ e (b) $\frac{\partial u_1}{\partial x} = u_2$. Se tomarmos a superfície característica $t = 0$, os dados de Cauchy seriam $u_1(x,\, 0)$ e $u_2(x,\, 0)$. A equação (b) mostra que esses dados não são independentes, pois $\frac{\partial u_1}{\partial x}(x,\, 0)$ deve ser igual a $u_2(x,\, 0)$. Assim, uma das equações do sistema força a existência de uma relação entre os dados de Cauchy ao longo da superfície característica.

A equação (a) permite determinar a derivada de u_1 normal à superfície característica (ou seja, $\frac{\partial u_1}{\partial t}$) a partir de $\frac{\partial u_2}{\partial x}(x,\, 0)$ (que pode ser obtida dos dados de Cauchy), mas não há nenhuma outra relação no sistema de equações que forneça a derivada de u_2 normal à superfície característica (ou seja, $\frac{\partial u_2}{\partial t}$) em termos dos dados de Cauchy ou suas derivadas primeiras em relação à variável x.

✠

18.5.3.1 Generalidades Sobre Problemas de Condição Inicial em Sistemas Quaselineares de Primeira Ordem

No sistema (18.89) vamos supor que as superfícies $x_n =$ constante não sejam características e que u esteja submetida à condição inicial em $x_n = 0$ expressa em

$$u\big(x_1,\,\ldots,\,x_{n-1},\,0\big) \;=\; \begin{pmatrix} u_1^0\big(x_1,\,\ldots,\,x_{n-1}\big) \\ \vdots \\ u_m^0\big(x_1,\,\ldots,\,x_{n-1}\big) \end{pmatrix}\,, \tag{18.102}$$

as funções $u_j^0\big(x_1,\,\ldots,\,x_{n-1}\big)$, $j = 1,\,\ldots,\,m$, sendo dadas e pertencentes a certas classes adequadas de funções (por exemplo, infinitamente diferenciáveis) a serem especificadas conforme a necessidade. A hipótese de as superfícies $x_n =$ constante não serem características implica que A_n é inversível e podemos escrever (18.89) na forma

$$\sum_{k=1}^{n-1} B_k(u,\,x)\frac{\partial\, u}{\partial x_k} + \frac{\partial\, u}{\partial x_n} + b(u,\,x) \;=\; 0\,, \tag{18.103}$$

onde $B_k(u,\,x) := A_n(u,\,x)^{-1}B_k(u,\,x)$, $k = 1,\,\ldots,\,n-1$, e $b(u,\,x) \;\equiv\; \begin{pmatrix} b_1(u,\,x) \\ \vdots \\ b_m(u,\,x) \end{pmatrix} := A_n(u,\,x)^{-1}a(u,\,x)$. Aqui, abreviamos $(u,\,x) \equiv (u_1,\,\ldots,\,u_m,\,x_1,\,\ldots,\,x_n)$.

É um fato de utilidade prática (resolução das equações) e teórica (obtenção de estimativas sobre as soluções) que o sistema (18.103) sob as condições (18.102) pode ser transformado em outros problemas de condição inicial quaselineares de primeira ordem que apresentam as mesmas soluções. No que segue exibiremos duas dessas transformações.

• **Transformação em um sistema homogêneo**

Afirmamos que o problema (18.103), em m funções incógnitas $u_1,\,\ldots,\,u_m$ e n variáveis $x_1,\,\ldots,\,x_n$, sob as condições iniciais (18.102) pode ser transformado no sistema homogêneo em $m+1$ funções incógnitas $u_1,\,\ldots,\,u_m,\,u_{m+1}$ e n variáveis $x_1,\,\ldots,\,x_n$ definido por

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_k(u,\,x)\frac{\partial\, \underset{\sim}{u}}{\partial x_k} + \frac{\partial\, \underset{\sim}{u}}{\partial x_n} \;=\; 0\,, \tag{18.104}$$

onde C_k, $k = 1,\,\ldots,\,n-1$, são as matrizes $(m+1)\times(m+1)$ definidas por

$$C_1(u,\,x) \;:=\; \begin{pmatrix} \ulcorner & & \urcorner & b_1(u,\,x) \\ & B_1(u,\,x) & & \vdots \\ \llcorner & & \lrcorner & b_m(u,\,x) \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \qquad C_k(u,\,x) \;:=\; \begin{pmatrix} \ulcorner & & \urcorner & 0 \\ & B_k(u,\,x) & & \vdots \\ \llcorner & & \lrcorner & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{para } \; k = 2,\,\ldots,\,n-1\,,$$

e $\underset{\sim}{u}(x) \;\equiv\; \begin{pmatrix} u(x) \\ u_{m+1}(x) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_m(x) \\ u_{m+1}(x) \end{pmatrix}$, com as condições iniciais

$$\underset{\sim}{u}\big(x_1,\,\ldots,\,x_{n-1},\,0\big) \;=\; \begin{pmatrix} u_1\big(x_1,\,\ldots,\,x_{n-1},\,0\big) \\ \vdots \\ u_m\big(x_1,\,\ldots,\,x_{n-1},\,0\big) \\ u_{m+1}\big(x_1,\,\ldots,\,x_{n-1},\,0\big) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} u_1^0\big(x_1,\,\ldots,\,x_{n-1}\big) \\ \vdots \\ u_m^0\big(x_1,\,\ldots,\,x_{n-1}\big) \\ x_1 \end{pmatrix}\,, \tag{18.105}$$

sendo as funções u_j^0, $j = 1, \ldots, m$, sendo as mesmas dadas em (18.102). De fato, escrevendo-se (18.104) explicitamente, teremos as equações

$$\sum_{k=1}^{n-1} B_k(u,\ x)\frac{\partial\, u}{\partial x_k} + \frac{\partial\, u_{m+1}}{\partial x_1} b(u,\ x) + \frac{\partial\, u}{\partial x_n} \ = \ 0\,, \tag{18.106}$$

$$\frac{\partial\, u_{m+1}}{\partial x_1} + \frac{\partial\, u_{m+1}}{\partial x_n} \ = \ 0\,. \tag{18.107}$$

Verifique! Agora, (18.107) tem por solução $u_{m+1}(x_1, \ldots,\ x_{n-1},\ x_n) = f(x_1 - x_n,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})$, com f diferenciável. A condição inicial $u_{m+1}(x_1, \ldots,\ x_{n-1},\ 0) = x_1$ (vide última componente de (18.105)) implica $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}) = x_1$. Assim, $u_{m+1}(x_1, \ldots,\ x_{n-1},\ x_n) = x_1 - x_n$. Isso, por sua vez, implica $\frac{\partial\, u_{m+1}}{\partial x_1} = 1$ e, com isso, (18.106) reduz-se a (18.103) com a mesma condição inicial (18.102).

• **Transformação em um sistema independente das coordenadas x**

Afirmamos que o problema (18.103), em m funções incógnitas $u_1, \ldots, u_m$ e n variáveis $x_1, \ldots, x_n$, sob as condições iniciais (18.102) pode ser transformado em um problema de valor inicial com um sistema quaselinear de primeira ordem em $m + n$ funções incógnitas $u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{m+n}$ e independente das variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

Para simplificar a exposição vamos considerar o caso em que $n = 2$. O caso geral pode ser tratado semelhantemente. Afirmamos que o sistema

$$B_1(u,\ x)\frac{\partial\, u}{\partial x_1} + \frac{\partial\, u}{\partial x_2} + b(u,\ x) \ = \ 0\,, \tag{18.108}$$

com as condições iniciais

$$u\big(x_1,\ 0\big) \ = \ \begin{pmatrix} u_1\big(x_1,\ 0\big) \\ \vdots \\ u_m\big(x_1,\ 0\big) \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} u_1^0\big(x_1\big) \\ \vdots \\ u_m^0\big(x_1\big) \end{pmatrix}\,, \tag{18.109}$$

onde $x = (x_1,\ x_2)$ e $u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}$, $u(u,\ x) = \begin{pmatrix} b_1(u,\ x) \\ b_2(u,\ x) \end{pmatrix}$, onde $(u,\ x) = (u_1,\ u_2,\ x_1,\ x_2)$, equivale ao sistema

$$D_1\big(\underset{\wedge}{u}\big)\frac{\partial\, \underset{\wedge}{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial\, \underset{\wedge}{u}}{\partial x_2} + d\big(\underset{\wedge}{u}\big) \ = \ 0\,, \tag{18.110}$$

onde $\underset{\wedge}{u}(x) \ \equiv \ \begin{pmatrix} u(x) \\ u_{m+1}(x) \\ u_{m+2}(x) \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_m(x) \\ u_{m+1}(x) \\ u_{m+2}(x) \end{pmatrix}$ com as condições iniciais

$$\underset{\wedge}{u}\big(x_1,\ 0\big) \ = \ \begin{pmatrix} u_1\big(x_1,\ 0\big) \\ \vdots \\ u_m\big(x_1,\ 0\big) \\ u_{m+1}\big(x_1,\ 0\big) \\ u_{m+2}\big(x_1,\ 0\big) \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} u_1^0\big(x_1\big) \\ \vdots \\ u_m^0\big(x_1\big) \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \tag{18.111}$$

sendo as funções u_j^0, $j = 1, \ldots, m$, sendo as mesmas dadas em (18.109) e onde $D_1\big(\underset{\wedge}{u}\big)$ é a matriz $(m+2) \times (m+2)$ dada

em

$$D_1\big(\underset{\wedge}{u}\big) := \begin{pmatrix} \ulcorner & & \urcorner & 0 & 0 \\ & B_1\big(\underset{\wedge}{u}\big) & & \vdots & \vdots \\ \llcorner & & \lrcorner & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad d\big(\underset{\wedge}{u}\big) := \begin{pmatrix} b\big(\underset{\wedge}{u}\big) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1\big(\underset{\wedge}{u}\big) \\ \vdots \\ b_m\big(\underset{\wedge}{u}\big) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

De fato, escrevendo-se (18.110) explicitamente, teremos as equações

$$B_1\big(\underset{\wedge}{u}\big)\frac{\partial\, u}{\partial x_1} + \frac{\partial\, u}{\partial x_2} + b\big(\underset{\wedge}{u}\big) \;=\; 0\,, \tag{18.112}$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{pmatrix} u_{m+1} \\ u_{m+2} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{pmatrix} u_{m+1} \\ u_{m+2} \end{pmatrix} \;=\; 0\,. \tag{18.113}$$

Verifique! A solução de (18.113) é $u_{m+1}(x_1,\, x_2) = f(x_1 - x_2) + g(x_1 + x_2)$ e $u_{m+2}(x_1,\, x_2) = -f(x_1 - x_2) + g(x_1 + x_2)$ (prove isso!), para f e g arbitrárias (mas diferenciáveis). As condições iniciais $u_{m+1}(x_1,\, 0) = x_1$ e $u_{m+2}(x_1,\, 0) = 0$ (vide as duas últimas linhas de (18.111)) implicam $f(x_1) = g(x_1) = x_1/2$ para todo x_1 e disso obtemos

$$u_{m+1}(x_1,\, x_2) = x_1 \qquad \text{e} \qquad u_{m+2}(x_1,\, x_2) = x_2\,.$$

Vemos que $\underset{\wedge}{u} = \begin{pmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e que, portanto, (18.112) coincide com (18.108).

E. 18.22 *Exercício*. Generalize o tratamento acima para o caso de n variáveis $x_1, \ldots, x_n$. ✣

* * *** * *

Reunindo os dois resultados acima, podemos facilmente concluir que todo problema de condições iniciais envolvendo um sistema de m equações a derivadas parciais quaselinear de primeira ordem em n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ com m funções incógnitas $u_1, \ldots, u_m$, como (18.103), pode ser transformado em um novo problema de condições iniciais envolvendo um sistema de $m+n+1$ equações a derivadas parciais quaselinear homogêneo de primeira ordem em n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ com $m+n+1$ funções incógnitas $u_1, \ldots, u_{m+n+1}$, sistema esse independente das n variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

Ao menos no caso $n = 2$ é possível sermos ainda mais econômicos e reduzirmos o número de funções incógnitas do novo problema a $m+2$. Mais precisamente, tem-se a seguinte

Proposição 18.1 *Considere-se o problema de condições iniciais envolvendo o sistema de m equações a derivadas parciais quaselinear de primeira ordem em duas variáveis $x \equiv (x_1,\, x_2)$,*

$$B_1(u,\, x)\frac{\partial\, u}{\partial x_1} + \frac{\partial\, u}{\partial x_2} + b(u,\, x) \;=\; 0\,, \tag{18.114}$$

onde $u(x) \equiv \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_m(x) \end{pmatrix}$ são as incógnitas, onde $b(u,\, x) \equiv \begin{pmatrix} b_1(u,\, x) \\ \vdots \\ b_m(u,\, x) \end{pmatrix}$ e onde $B_k(u,\, x)$ são matrizes $m \times m$, as funções incógnitas u_j sendo sujeitas a condições iniciais em $x_2 = 0$ expressas em

$$u\big(x_1,\, 0\big) \;=\; \begin{pmatrix} u_1^0\big(x_1\big) \\ \vdots \\ u_m^0\big(x_1\big) \end{pmatrix}\,, \tag{18.115}$$

com as funções $u_j^0\big(x_1\big)$, $j = 1, \ldots, m$, sendo dadas. Então, esse problema pode ser transformado em um problema envolvendo um sistema de $m+2$ equações quaselineares, homogêneo, de primeira ordem em duas variáveis $x \equiv (x_1,\, x_2)$,

$$E_1\big(\underline{u}\big)\frac{\partial\, \underline{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial\, \underline{u}}{\partial x_2} \;=\; 0\,, \tag{18.116}$$

onde $\underline{u}(x) \equiv \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_m(x) \\ u_{m+1}(x) \\ u_{m+2}(x) \end{pmatrix}$ *são as funções incógnitas e* $E_1\big(\underline{u}\big)$*, é a matriz* $(m+2)\times(m+2)$*,*

$$E_1\big(\underline{u}\big) := \begin{pmatrix} \ulcorner & & \urcorner & \widehat{b_1}\big(\underline{u}\big) & 0 \\ & \widehat{B_1}\big(\underline{u}\big) & & \vdots & \vdots \\ \llcorner & & \lrcorner & \widehat{b_m}\big(\underline{u}\big) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18.117}$$

onde

$$\widehat{B_1}\big(\underline{u}\big) \equiv \widehat{B_1}\big(u_1,\,\ldots,\,u_{m+2}\big) := B_1\big(u_1,\,\ldots,\,u_m,\,u_{m+1},\,u_{m+2}\big)\,,$$

$$\widehat{b_j}\big(\underline{u}\big) \equiv \widehat{b_j}\big(u_1,\,\ldots,\,u_{m+2}\big) := b_j\big(u_1,\,\ldots,\,u_m,\,u_{m+1},\,u_{m+2}\big)\,, \qquad j=1,\,\ldots,\,m\,,$$

sendo as novas condições iniciais em $x_2 = 0$ *expressas em*

$$\underline{u}(x_1,\,0) = \begin{pmatrix} u_1^0(x_1) \\ \vdots \\ u_m^0(x_1) \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{18.118}$$

□

Prova. Se escrevermos (18.116) mais explicitamente, teremos

$$\widehat{B_1}(\underline{u})\frac{\partial\, u}{\partial x_1} + \frac{\partial\, u_{m+1}}{\partial x_1}\widehat{b}(\underline{u}) + \frac{\partial\, u}{\partial x_2} = 0\,, \tag{18.119}$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{pmatrix} u_{m+1} \\ u_{m+2} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{pmatrix} u_{m+1} \\ u_{m+2} \end{pmatrix} = 0\,, \tag{18.120}$$

(comparar com (18.106)–(18.107) e com (18.113)). Como já observamos acima, a solução de (18.120) com as condições iniciais $u_{m+1}(x_1,\,0) = x_1$ e $u_{m+2}(x_1,\,0) = 0$ é $u_{m+1}(x_1,\,x_2) = x_1$ e $u_{m+2}(x_1,\,x_2) = x_2$. Assim, $\frac{\partial\, u_{m+1}}{\partial x_1} = 1$ e (18.119) transforma-se em (18.114). ■

Mais adiante (Seção 18.5.3.3, página 1123) apresentaremos um método de obter certas soluções (ditas *soluções simples*) de sistemas quaselineares homogêneos em duas variáveis e dependentes apenas das funções incógnitas u, como (18.116) (soluções essas que não necessariamente satisfazem as condições iniciais (18.118) e, portanto, não necessariamente representam soluções de (18.114)). Antes disso, na Seção 18.5.3.2, trataremos de sistemas semilineares, para os quais a transformação em (18.116) não é necessária para a obtenção de uma solução. A questão da obtenção de soluções de (18.118) sob condições iniciais adequadas é muito mais complexa. Em [247] é discutido um método iterativo de solução que faz uso dos resultados da Seção 18.5.3.2, adiante, e sobre o qual falaremos brevemente ao final daquela seção.

18.5.3.2 Sistemas Hiperbólicos Semilineares de Primeira Ordem em Duas Variáveis

Há um particular interesse em sistemas hiperbólicos de equações a derivadas parciais semilineares de primeira ordem em duas variáveis pois, como veremos, os mesmos podem, em princípio, ser tratados pelo método das características, que

discutimos na Seção 18.5, página 1095. Nesse caso a função incógnita é $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$, enquanto que (18.89) fica

$$A_1(x)\frac{\partial\, u}{\partial x_1} + A_2(x)\frac{\partial\, u}{\partial x_2} + a(u,\, x) \;=\; 0\;,$$

podendo as matrizes A_1 e A_2 ser dependentes de x mas não de u. Supondo $A_2(x)$ inversível para todo x, escrevemos essa equação na forma

$$B_1(x)\frac{\partial\, u}{\partial x_1} + \frac{\partial\, u}{\partial x_2} + b(u,\, x) \;=\; 0\;, \tag{18.121}$$

com $B_1(x) := A_2(x)^{-1}A_1(x)$ e $b(u,\, x) := A_2(x)^{-1}a(u,\, x)$. A equação (18.92) fica

$$\tilde{B}_2(\xi)\frac{\partial\, v}{\partial \xi_2} \;=\; -\tilde{B}_1(\xi)\frac{\partial\, v}{\partial \xi_1} - \tilde{b}(v,\, \xi)\;, \tag{18.122}$$

onde $\tilde{b}(v,\, \xi) \equiv b\big(v(\xi),\, x(\xi)\big)$ e

$$\tilde{B}_j(\xi) \;=\; \frac{\partial\, \xi_j}{\partial x_1}B_1(x) + \frac{\partial\, \xi_j}{\partial x_2}\mathbb{1}\;, \qquad j = 1,\, 2\;.$$

Vamos considerar que o sistema da coordenadas $(\xi_1,\, \xi_2)$ seja característico (*i.e.*, as curvas de nível $\xi_2 =$ constante são características). A condição $\det \tilde{B}_2(\xi) = 0$ e as demais hipóteses de hiperbolicidade implicam a existência de m vetores-coluna $\beta_1,\, \ldots,\, \beta_m$ linearmente independentes tais que $\tilde{B}_2(\xi^{(a)})\beta_a = 0$, $a = 1,\, \ldots,\, m$ (um para cada característica). Ou seja,

$$\frac{\partial\, \xi_2^{(a)}}{\partial x_1}B_1(x)\beta_a \;=\; -\frac{\partial\, \xi_2^{(a)}}{\partial x_2}\beta_a\;, \qquad a = 1,\, \ldots,\, m\;. \tag{18.123}$$

Note-se que os vetores β_a são eventualmente funções de x Seja $P \equiv P(x)$ a matriz $m \times m$ dada por $P := \Big[\!\!\Big[\beta_1,\, \ldots,\, \beta_m\Big]\!\!\Big]$ (para a notação, vide (10.9), página 625), de sorte que, para cada $a = 1,\, \ldots,\, m$, sua a-ésima coluna é o vetor β_a. Como os vetores $\beta_1,\, \ldots,\, \beta_m$ são linearmente independentes, a matriz P é inversível. Com a matriz P, (18.123) pode ser escrita em forma matricial como

$$B_1(x)P \;=\; P\Lambda\;, \tag{18.124}$$

onde

$$\Lambda \;:=\; \mathrm{diag}\left(-\frac{\partial\, \xi_2^{(1)}}{\partial x_2}\Big/\frac{\partial\, \xi_2^{(1)}}{\partial x_1}\;,\quad \ldots\;,\quad -\frac{\partial\, \xi_2^{(m)}}{\partial x_2}\Big/\frac{\partial\, \xi_2^{(m)}}{\partial x_1}\right)$$

é a matriz diagonal cujo a-ésimo elemento diagonal é $\Lambda_a := -\frac{\partial\, \xi_2^{(a)}}{\partial x_2}\Big/\frac{\partial\, \xi_2^{(a)}}{\partial x_1}$. Verifique (para tal, use (10.15), página 626)!

Defina-se $w := P^{-1}u$, ou seja, escrevamos $u = Pw$. Supondo P diferenciável[37]) fica

$$B_1(x)P\frac{\partial\, w}{\partial x_1} + P\frac{\partial\, w}{\partial x_2} \;=\; -\left(B_1(x)\frac{\partial\, P}{\partial x_1} + \frac{\partial\, P}{\partial x_2}\right)w - b(x,\, Pw)\;. \tag{18.125}$$

Usando (18.124) isso fica

$$\Lambda\frac{\partial\, w}{\partial x_1} + \frac{\partial\, w}{\partial x_2} \;=\; -\left(\Lambda P^{-1}\frac{\partial\, P}{\partial x_1} + P^{-1}\frac{\partial\, P}{\partial x_2}\right)w - P^{-1}b(Pw,\, x)\;. \tag{18.126}$$

Cada componente da equação (18.126) é da forma

$$\Lambda_a\frac{\partial\, w_a}{\partial x_1} + \frac{\partial\, w_a}{\partial x_2} \;=\; \sum_{b=1}^{m} M_{ab}\, w_b + \ell_a\;, \qquad a = 1,\, \ldots,\, m\;, \tag{18.127}$$

[37] Essa é praticamente a única hipótese técnica a ser introduzida, mas note o leitor que a mesma não é sempre satisfeita, especialmente no caso de haver pontos nos quais ocorre degenerescência de autovalores. Note também o leitor que no caso de sistemas quaselineares em que A_1 e A_2 (e, portanto B_1) dependem de u, as derivadas $\frac{\partial\, P}{\partial x_j}$ que surgem em (18.125) conterão também termos com as derivadas $\frac{\partial\, w}{\partial x_j}$. Isso dificulta o tratamento dessas equações pelo método acima e é a razão de termos nos limitado a sistemas semilineares. Para um tratamento de sistemas com A_1 ou A_2 dependentes de u, vide Seção 18.5.3.3, página 1123.

com M sendo a matriz $m \times m$ dada em $M \equiv -\Big(\Lambda P^{-1}\frac{\partial\, P}{\partial x_1} + P^{-1}\frac{\partial\, P}{\partial x_2}\Big)$ e ℓ sendo o vetor coluna $\ell \equiv \ell(w,\ x) := -P^{-1}b(Pw,\ x)$. A expressão (18.126) ou (18.127) é por vezes denominada *forma canônica* do sistema de equações semilineares hiperbólico em duas variáveis considerado.

O ponto importante na equação (18.127) é que a equação para cada componente w_a depende apenas da a-ésima característica, no sentido de que as derivadas que lá comparecem poder ser entendidas como derivadas ao longo da a-ésima curva característica (vide abaixo). Para a resolução de cada uma das equações em (18.127) aplica-se, portanto, o método das características que discutimos na Seção 18.5, página 1095. De fato, para a a-ésima equação teremos para a curva característica as equações

$$\frac{dx_1^{(a)}}{ds} \;=\; \Lambda_a \;=\; -\frac{\partial\,\xi_2^{(a)}}{\partial x_2}\Bigg/\frac{\partial\,\xi_2^{(a)}}{\partial x_1} \qquad \text{e} \qquad \frac{dx_2^{(a)}}{ds} \;=\; 1\,,$$

que facilmente se escrevem como $\frac{d\xi_2^{(a)}}{ds} = 0$. Portanto, como esperado, as curvas características são as curvas $\xi_2^{(a)}(s) =$ constante, sendo que podemos adotar $s = x_2$. Note-se que também as derivadas em $M \equiv -\Big(P^{-1}\frac{\partial\, P}{\partial x_1} + \Lambda P^{-1}\frac{\partial\, P}{\partial x_2}\Big)$ podem ser escritas como derivadas ao longo da a-ésima característica. Adotando-se a mesma parametrização $s = x_2$ para todas as curvas, as equações (18.127) assumem a forma

$$\frac{d\omega_a}{ds} \;=\; \sum_{b=1}^{m} M_{ab}(s)\, w_b(s) + \ell_a\big(w(s),\ s\big)\,, \qquad a = 1,\,\ldots,\,m\,. \tag{18.128}$$

O sistema (18.128) é um sistema de equações diferenciais ordinárias e deve entendido como um problema de valor inicial com dados de Cauchy ao longo da reta $x_2 =$ constante. Ao menos em princípio, esse sistema ser resolvido pelos procedimentos usuais de tratamento de sistemas de EDOs.

E. 18.23 *Exercício.* Usando o método das características, mostre que sua solução de (18.101) em termos dos dados de Cauchy para $(u_1,\, u_2)$ em $t = 0$ (ou seja, $u_1(y,\ 0)$ e $u_2(y,\ 0)$, $y \in \mathbb{R}$) é

$$u_1(x,\ t) \;=\; \frac{1}{2}\Big(u_1(x+ct,\ 0) + u_1(x-ct,\ 0)\Big) + \frac{1}{2c}\Big(u_2(x+ct,\ 0) - u_2(x-ct,\ 0)\Big)\,, \tag{18.129}$$

$$u_2(x,\ t) \;=\; \frac{c}{2}\Big(u_1(x+ct,\ 0) - u_1(x-ct,\ 0)\Big) + \frac{1}{2}\Big(u_2(x+ct,\ 0) + u_2(x-ct,\ 0)\Big)\,. \tag{18.130}$$

Com a interpretação $u_1 := \frac{\partial\, u}{\partial x}$ e $u_2 := \frac{\partial\, u}{\partial t}$ (re)obtenha de (18.129)–(18.130) a *solução de D'Alembert*[38] da equação de ondas em $1+1$-dimensões:

$$u(x,\ t) \;=\; \frac{u_0(x-ct) + u_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)\; ds\,, \tag{18.131}$$

(vide (46.129), página 2754), onde $u_0(x) := u(x,\ 0)$ e $v_0(x) := \frac{\partial\, u}{\partial t}(x,\ 0)$ são dados de Cauchy para u na superfície $t = 0$. ✠

• **Soluções iterativas de sistemas quaselineares de primeira ordem gerais em duas variáveis**

Os métodos de resolução de sistemas semilineares de primeira ordem apresentados acima, conjugados a um procedimento iterativo, permitem a obtenção de soluções aproximativas de sistemas quaselineares de primeira ordem gerais em duas variáveis, como (18.114):

$$B_1(u,\ x)\frac{\partial\, u}{\partial x_1} + \frac{\partial\, u}{\partial x_2} + b(u,\ x) \;=\; 0\,. \tag{18.132}$$

A ideia consiste em partir-se de uma aproximação inicial adequada $u^{(0)}$ à solução do sistema (18.132) e considerar-se a partir daí os sistemas iterados

$$B_1\big(u^{(n)}(x),\ x\big)\frac{\partial\, u^{(n+1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial\, u^{(n+1)}}{\partial x_2} + b\big(u^{(n)}(x),\ x\big) \;=\; 0\,, \qquad n \;=\; 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\,. \tag{18.133}$$

Como cada função $u^{(n)}(x)$ é determinada no passo anterior, cada sistema (18.133) é um sistema semilinear, ao qual aplicam-se os métodos de resolução acima apresentados. Sob hipóteses adequadas (vide, *e.g.*, [247]) é possível provar que a sequência de soluções assim obtida $u^{(n)}(x)$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, converge a uma solução de (18.132). Essa técnica permite não apenas a demonstração de existência de soluções de (18.132), como também oferece um método eficaz de determinação numérica das mesmas.

[38] Jean Le Rond D'Alembert (1717–1783).

18.5.3.3 Soluções Ditas Simples de Sistemas Quaselineares, Homogêneos, de Primeira Ordem em Duas Variáveis

Para algum $m \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{O}$ um conjunto aberto conexo de $\mathbb{R}^m$ contendo a origem e seja E_1 uma função $\mathcal{O} \ni z \equiv (z_1, \ldots, z_m) \mapsto E_1(z) \equiv E_1(z_1, \ldots, z_m) \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{R}, m)$. Para simplificar as coisas, suporemos (como acima) que os elementos de matriz da matriz real $m \times m$ definida por $E_1(z)$ sejam funções infinitamente diferenciáveis das componentes de z. Para certos propósitos é também suficiente considerar $E_1(z)$ definida, não apenas em um aberto $\mathcal{O}$, mas em todo $\mathbb{R}^m$. Trataremos aqui de encontrar soluções certas soluções especiais para o sistema quaselinear e homogêneo de equações a derivadas parciais de primeira ordem em duas variáveis do tipo

$$E_1\big(u\big)\frac{\partial\, u}{\partial x_1} + \frac{\partial\, u}{\partial x_2} \;=\; 0\,, \tag{18.134}$$

onde o vetor-coluna $u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_m(x) \end{pmatrix}$ (com $x \equiv (x_1, x_2)$) representa as funções incógnitas. Note-se que $E_1\big(u\big)$ em (18.134) é uma matriz real $m \times m$ que depende apenas do vetor u, mas não de x. De acordo com a Proposição 18.1, página 1119, todo problema de valor inicial (em $x_2 = 0$) envolvendo um sistema quaselinear de equações a derivadas parciais de primeira ordem em duas variáveis pode ser transformado em um problema envolvendo uma equação do tipo (18.134) para algum m. Como veremos, podemos encontrar soluções para (18.134) por uma variante do método das características.

Sejam $\beta_j(z) \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, \ldots, N$, autovetores linearmente independentes de $E_1(z)$ com autovalores reais $\lambda_j(z)$:

$$E_1(z)\beta_j(z) \;=\; \lambda_j(z)\beta_j(z)\,. \tag{18.135}$$

Pelas hipóteses β_j e λ_j são funções infinitamente diferenciáveis em $\mathcal{O}$.

Comentários. Acima $1 \leq N \leq m$. No caso hiperbólico temos $N = m$, mas não iremos necessariamente supor isso. Se E_1 possuir autovalores complexos os mesmos não são considerados. Supomos no que segue que $E_1(z)$ possua ao menos um autovalor real. Também não é preciso supor que $E_1(z)$ seja diagonalizável. ♣

Para um j específico, considere-se a equação diferencial ordinária

$$\frac{d}{ds}U^{(j)}(s) \;=\; \beta_j\Big(U^{(j)}(s)\Big)\,, \tag{18.136}$$

com $I \ni s \mapsto U^{(j)}(s) \in \mathbb{R}^m$, sendo I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ contendo o ponto $s = 0$. Pela continuidade e diferenciabilidade de β_j, pode-se garantir a existência e unicidade da solução de (18.136) em algum intervalo I conveniente para uma condição inicial $U^{(j)}(0) \in \mathcal{O}$.

A questão que agora colocamos é a seguinte: que condição uma função $\eta_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deve satisfazer para que a função

$$u^{(j)}(x_1,\, x_2) \;=\; U^{(j)}\big(\eta_j(x_1,\, x_2)\big) \tag{18.137}$$

seja solução de (18.134)? Tal solução, se existir, é denominada *solução simples*[39] ou, mais especificamente, *solução j-simples*[40] de (18.134). É elementar constatar-se que (abaixo, $U^{(j)\prime}(s) \equiv \frac{d}{ds}U^{(j)}(s)$)

$$\begin{aligned}
E_1\Big(u^{(j)}\Big)\frac{\partial\, u^{(j)}}{\partial x_1} + \frac{\partial\, u^{(j)}}{\partial x_2} \quad &= \quad E_1\left(U^{(j)}\big(\eta_j(x_1,\, x_2)\big)\right)\frac{\partial}{\partial x_1}U^{(j)}\big(\eta_j(x_1,\, x_2)\big) + \frac{\partial}{\partial x_2}U^{(j)}\big(\eta_j(x_1,\, x_2)\big) \\
&= \quad E_1\left(U^{(j)}\big(\eta_j(x_1,\, x_2)\big)\right)U^{(j)\prime}\big(\eta_j(x_1,\, x_2)\big)\frac{\partial \eta_j}{\partial x_1} + U^{(j)\prime}\big(\eta_j(x_1,\, x_2)\big)\frac{\partial \eta_j}{\partial x_2} \\
&\overset{(18.136)}{=} \quad E_1\left(U^{(j)}\big(\eta_j(x_1,\, x_2)\big)\right)\beta_j\left(U^{(j)}\big(\eta_j(x_1,\, x_2)\big)\right)\frac{\partial \eta_j}{\partial x_1} + \beta_j\left(U^{(j)}\big(\eta_j(x_1,\, x_2)\big)\right)\frac{\partial \eta_j}{\partial x_2} \\
&\overset{(18.135)}{=} \quad \left[\lambda_j\left(U^{(j)}\big(\eta_j(x_1,\, x_2)\big)\right)\frac{\partial \eta_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta_j}{\partial x_2}\right]\beta_j\left(U^{(j)}\big(\eta_j(x_1,\, x_2)\big)\right)\,.
\end{aligned}$$

[39] Essa nomenclatura provém de F. John, "Formation of Singularities in the One-Dimensional Nonlinear Wave Propagation", Comm. Pure and App. Math., **27**, 377–405 (1974).

[40] Essa nomenclatura provém de [309].

Logo, uma condição suficiente para que $u^{(j)}$ seja solução de (18.134) é que η_j seja solução da equação a derivadas parciais

$$\lambda_j \Big(U^{(j)}\big(\eta_j(x_1,\, x_2)\big)\Big) \frac{\partial \eta_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta_j}{\partial x_2} \;=\; 0 \,. \tag{18.138}$$

Observe-se que se trata de uma equação a derivadas parciais quaselinear (não um sistema de EDP's!) que pode, ao menos em princípio, ser resolvida, por exemplo, pelo método das características. Vide adiante. Uma função η_j satisfazendo (18.138) é dita ser uma *fase* da solução j-simples (18.137).

* * *** * *

É importante fazer algumas observações sobre as limitações das soluções exibidas acima. Em primeiro lugar, o autovalor considerado pode deixar de ser real em certos pontos ou regiões de $\mathbb{R}^m$. Em segundo lugar, o caráter não linear de (18.136) pode restringir o intervalo de valores de s para o qual soluções finitas existem. Adicionalmente, o fenômeno do cruzamento de características em (18.138) pode adicionar limitações à solução a intervalos finitos de valores de x_2. A existência de tais limitações é ligada a diversos fenômenos, inclusive de natureza física, e uma extensa literatura foi desenvolvida em torno desse tema (inclusive com estimativas precisas da região de validade das soluções), ao qual contribuíram nomes como Riemann[41], John[42], Glimm[43] e diversos outros. A esse respeito limitamo-nos a remeter o leitor à literatura especializada, por exemplo a [309], [134], [223], [626] ou [247].

• **O caso de sistemas lineares com coeficientes constantes**

Um caso instrutivo e de particular interesse é aquele em que E_1 é uma matriz constante. A equação (18.134) fica

$$E_1 \frac{\partial\, u}{\partial x_1} + \frac{\partial\, u}{\partial x_2} \;=\; 0 \,. \tag{18.139}$$

Se β_j, $j = 1, \ldots, N$, são autovetores (constantes!) de E_1 linearmente independentes com autovalores respectivos λ_j (constantes!), todos reais, a equação (18.136) tem por solução

$$U^{(j)}(s) \;=\; s\beta_j + \gamma_j \,,$$

com $\gamma_j \in \mathbb{R}^m$, constante. A equação (18.138) fica $\lambda_j \frac{\partial \eta_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta_j}{\partial x_2} = 0$, cuja solução é

$$\eta_j(x_1,\, x_2) \;=\; \phi_j\big(x_1 - \lambda_j x_2\big) \,,$$

onde $\phi_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função, em princípio arbitrária, uma vez diferenciável. Com isso, a solução procurada (18.137) é

$$u^{(j)}(x_1,\, x_2) \;=\; \phi_j\big(x_1 - \lambda_j x_2\big)\beta_j + \gamma_j \,.$$

Como nesse caso (18.139) é uma equação <u>linear</u>, o princípio de sobreposição permite-nos obter uma solução mais geral na forma

$$u(x_1,\, x_2) \;=\; \sum_{j=1}^{N} \phi_j\big(x_1 - \lambda_j x_2\big)\beta_j + \gamma \,. \tag{18.140}$$

para $\gamma \in \mathbb{R}^m$ constante e funções $\phi_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, arbitrárias mas uma vez diferenciáveis.

No caso hiperbólico temos $N = m$ e os β_j's formam uma base de vetores linearmente independentes. Podemos escrever $\gamma = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \beta_j$. Absorvendo cada constante γ_j em ϕ_j, teremos para a solução (18.140) a expressão $u(x_1,\, x_2) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j\big(x_1 - \lambda_j x_2\big)\beta_j$. Para uma dada condição inicial $u(x_1,\, 0) = u_0(x_1)$ vemos que se decompormos $u_0(x_1)$ na base dos β_j's, ou seja, escrevendo $u_0(x_1) = \sum_{j=1}^{m} u_{0j}(x_1)\beta_j$, concluímos que $\phi_j(x_1) = u_{0j}(x_1)$ para cada j. Assim, nossa solução, expressa diretamente em termos das condições iniciais, será

$$u(x_1,\, x_2) \;=\; \sum_{j=1}^{m} u_{0j}\big(x_1 - \lambda_j x_2\big)\beta_j \,.$$

No caso não hiperbólico uma solução da forma $u(x_1,\, x_2) = \sum_{j=1}^{N} u_{0j}\big(x_1 - \lambda_j x_2\big)\beta_j$ é também possível se para todo x_1 o vetor das condições iniciais $u_0(x_1)$ estiver no subespaço linear gerado por $\beta_1, \ldots, \beta_N$.

[41] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866).
[42] Fritz John (1910–1994). Vide [451].
[43] James Gilbert Glimm (1934–).

• **Resolução de (18.138) pelo método das características**

No que segue, $\omega_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $\omega_j := \lambda_j \circ U^{(j)}$. A função ω_j será suposta conhecida. A equação (18.138) fica $\omega_j\big(\eta_j(x_1,\ x_2)\big)\frac{\partial \eta_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta_j}{\partial x_2} = 0$. Desejamos resolver essa equação impondo para η_j uma condição inicial na superfície $x_2 \equiv 0$:

$$\eta_j(x_1,\ 0) \ = \ l_j(x_1)\ , \tag{18.141}$$

l_j sendo uma função dada. Aplicando-se o método das características (aqui, $\mathbf{s} \equiv (s_1,\ s_2)$ e $\mathbf{x}(\mathbf{s}) \equiv \big(x_1(s_1,\ s_2),\ x_1(s_1,\ s_2)\big)$), somos conduzidos ao sistema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial s_1} &= \omega_j\Big(\eta_j\big(\mathbf{x}(\mathbf{s})\big)\Big)\ , \\
\frac{\partial x_2}{\partial s_1} &= 1\ , \\
\frac{\partial}{\partial s_1}\eta_j\big(\mathbf{x}(\mathbf{s})\big) &= 0\ .
\end{aligned}$$

A resolução dessas equações fornece

$$\begin{aligned}
x_1(s_1,\ s_2) &= \omega_j\big(g_j(s_2)\big)s_1 + h_j(s_2)\ , \\
x_2(s_1,\ s_2) &= s_1 + f_j(s_2)\ , \\
\eta_j\big(\mathbf{x}(\mathbf{s})\big) &= g_j(s_2)\ ,
\end{aligned}$$

com f_j, g_j e h_j arbitrárias. Verifique! Queremos que a superfície $s_1 \equiv 0$ coincida com a superfície $x_2 \equiv 0$. Disso e das relações acima tiramos que f_j é identicamente nula e obtemos também $x_1(0,\ s_2) = h_j(s_2)$. Podemos escolher a parametrização da superfície $x_2 \equiv 0$ tomando $x_1(0,\ s_2) = s_2$ e, assim, obtemos $h_j(s_2) = s_2$. Com isso, a condição inicial para η_j fica $\eta_j(s_2,\ 0) = l_j(s_2)$, e concluímos que g_j e l_j coincidem. Obtemos, portanto,

$$x_1(s_1,\ s_2) \ = \ \omega_j\big(l_j(s_2)\big)s_1 + s_2\ , \tag{18.142}$$

$$x_2(s_1,\ s_2) \ = \ s_1\ , \tag{18.143}$$

$$\eta_j\big(\mathbf{x}(\mathbf{s})\big) \ = \ l_j(s_2)\ . \tag{18.144}$$

Para cada j as expressões (18.142)–(18.144) fornecem uma família de curvas características que denotamos por $\mathcal{F}_j$.

Cada curva característica planar de $\mathcal{F}_j$ cruza a superfície de Cauchy $x_2 \equiv 0$ em $x_1 = s_2$. Vemos das relações acima que ao longo de cada curva característica planar de $\mathcal{F}_j$ a fase η_j é constante e dada por seu valor inicial $l_j(s_2)$. Vemos também que as curvas características planares de $\mathcal{F}_j$ são linhas retas, sendo que a inclinação da curva característica que parte do ponto $(s_2,\ 0)$ da superfície de Cauchy $x_2 \equiv 0$ é $1/\omega_j\big(l_j(s_2)\big) = 1/\lambda_j\big(u_0^{(j)}(s_2)\big)$, onde $u_0^{(j)}(s_2) = U^{(j)}\big(l_j(s_2)\big)$ é a condição inicial para a solução simples $u^{(j)}$ implicada pela condição inicial (18.141) para η_j.

Concluímos ainda que para que não haja cruzamento de características da família $\mathcal{F}_j$ na região $x_2 \geq 0$ é preciso que $\omega_j \circ l_j$ seja uma função crescente. Para que não haja rarefação é preciso que $\omega_j \circ l_j$ seja uma função crescente e contínua.

Em não havendo nem cruzamento nem rarefação das características planares de $\mathcal{F}_j$ na região $x_2 \geq 0$ podemos associar univocamente a cada ponto $(x_1,\ x_2)$ dessa região a uma curva característica planar que passa pelo mesmo, a saber a curva com inclinação $1/\omega_j\big(l_j\big(s_2(x_1,\ x_2)\big)\big) = 1/\lambda_j\Big(u_0^{(j)}\big(s_2(x_1,\ x_2)\big)\Big)$ que parte da superfície de Cauchy $x_2 \equiv 0$ do ponto $s_2(x_1,\ x_2)$, com $s_2(x_1,\ x_2)$ sendo a solução de

$$x_1 \ = \ \omega_j\big(l_j(s_2)\big)x_2 + s_2\ . \tag{18.145}$$

Em não havendo nem cruzamento nem rarefação das características planares de $\mathcal{F}_j$ na região $x_2 \geq 0$ concluímos do fato de η_j ser constante ao longo de cada característica planar que a solução j-simples $u^{(j)}$ tem a peculiaridade de ser

também constante ao longo de cada característica planar e, portanto, dada pelo seu valor inicial na superfície de Cauchy $x_2 = 0$. A saber, temos

$$u^{(j)}(x_1,\, x_2) \;=\; U^{(j)}\Big(l_j\big(s_2(x_1,\, x_2)\big)\Big) \;=\; u_0^{(j)}\big(s_2(x_1,\, x_2)\big)\;,$$

com $s_2(x_1,\, x_2)$ dado implicitamente em (18.145).

* * *** * *

Devemos ainda comentar que as soluções j-simples (exceto, como discutimos, no caso hiperbólico com E_1 constante) não podem por si só abarcar a totalidade das soluções de problemas de valor inicial para (18.134) com

$$u(x_1,\, 0) \;=\; \begin{pmatrix} u_1(x_1,\, 0) \\ \vdots \\ u_m(x_1,\, 0) \end{pmatrix} \;=\; u_0(x_1) \;:=\; \begin{pmatrix} u_{01}(x_1) \\ \vdots \\ u_{0m}(x_1) \end{pmatrix}$$

pois, evidentemente, não podemos ter a igualdade

$$\begin{pmatrix} u_{01}(x_1) \\ \vdots \\ u_{0m}(x_1) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} U_1^{(j)}\big(l_j(x_1)\big) \\ \vdots \\ U_m^{(j)}\big(l_j(x_1)\big) \end{pmatrix}$$

satisfeita por todas as componentes por uma única função l_j, exceto para algum u_0 especialmente escolhido. Assim, retomando a afirmação da Proposição 18.1, página 1119, caso o sistema considerado seja do tipo do sistema (18.116)–(18.117), suas correspondentes soluções simples não necessariamente fornecerão soluções do sistema (18.114) por não satisfazerem as condições iniciais (18.118). Uma exceção é, conforme já discutido, o caso de sistemas homogêneos de coeficientes constantes, onde podemos evocar o princípio de sobreposição.

A importância das soluções reside em outro aspecto. Conforme discutido no trabalho listado na nota-de-rodapé 39, página 1123, no caso estritamente hiperbólico toda solução com dados de Cauchy de suporte compacto e "pequenos" em relação a uma norma adequada converge após um certo tempo relativamente curto a alguma solução j-simples.

18.6 Alguns Teoremas de Unicidade de Soluções de Equações a Derivadas Parciais

Como já comentamos, teoremas de unicidade de soluções de equações a derivadas parciais submetidas a condições iniciais e de contorno são de importância crucial para justificar certos métodos de resolução, como por exemplo o método de separação de variáveis e de expansão em modos (como os modos de vibração de cordas ou membranas vibrantes, por exemplo), tal como discutido em diversos dos problemas tratados no Capítulo 46, página 2722. No que segue, apresentaremos alguns desses teoremas, concentrando-nos em casos de maior interesse em problemas físicos. Alguns desses teoremas são evocados na discussão do Capítulo 46, página 2722.

18.6.1 Casos Simples. Discussão Preliminar

Primeiramente, exporemos o leitor aos teoremas de unicidade de solução mais simples e seus métodos de demonstração. A intenção é pedagógica e por isso escolhemos dois tipos de equações de interesse físico, as equações de difusão e de ondas com coeficientes constantes em uma dimensão espacial. Generalizações serão apresentadas adiante na Seção 18.6.3, página 1132. O caso das equações de Laplace e Poisson é discutido na Seção 18.6.2, página 1130.

• **Unicidade de soluções para a equação de difusão em um intervalo finito**

A proposição que segue apresenta condições que garantem unicidade para as soluções da equação de difusão a coeficientes constantes definida em um intervalo finito da reta sob certas condições iniciais e de contorno.

Proposição 18.2 *Considere a equação diferencial*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - K\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; F(x,\, t)\;, \tag{18.146}$$

com $K > 0$ constante, e F é uma função dada (em princípio arbitrária). Acima, $x \in [0,\ L]$ para algum $L > 0$ e $t \geq 0$. As condições iniciais são

$$u(x,\ 0)\ =\ u_0(x), \tag{18.147}$$

onde $u_0 : [0,\ L] \to \mathbb{R}$ é uma função arbitrária. Considere os seguintes tipos de condições de contorno.

I. Condições de Dirichlet*:*

$$u(0,\ t)\ = f_1(t), \quad u(L,\ t)\ = f_2(t)\ \ .$$

II. Condições de Neumann*:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t)\ = f_3(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,\ t)\ = f_4(t)\ \ .$$

Acima, f_i são funções arbitrárias.

Então, caso exista, a solução de (18.146) sob as condições iniciais (18.147) é única tanto sob condições de contorno do tipo de Dirichlet quanto sob condições de contorno do tipo de Neumann. □

A proposição acima garante unicidade da solução para qualquer função $F(x,\ t)$ e quaisquer funções f_i, mas não garante a existência de soluções. Para garantir existência e exibir uma solução (por exemplo em termos de séries de Fourier) é preciso ser mais restritivo quanto à função F e às funções f_i. A demonstração da Proposição 18.2 é apresentada na forma do exercício dirigido que segue. Generalizações encontram-se na Proposição 18.7, página 1133, e a Proposição 18.8, página 1135.

E. 18.24 *Exercício. Prova da Proposição 18.2.* Para demonstrar a unicidade de solução da equação diferencial (18.146) sob as condições acima procede-se da seguinte forma. Suponha que haja duas soluções u e v da equação acima, ambas satisfazendo as mesmas condições de contorno e as mesmas condições iniciais. Defina $w(x,\ t) := u(x,\ t) - v(x,\ t)$. Desejamos mostrar que $w = 0$, implicando que as duas soluções u e v são em verdade iguais.

a. Mostre que w satisfaz a equação diferencial homogênea

$$\frac{\partial w}{\partial t} - K\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ =\ 0\ . \tag{18.148}$$

b. Mostre que w satisfaz a condição inicial $w(x,\ 0) = 0$.

c. Mostre que w satisfaz as condições de contorno

$$w(0,\ t)\ =\ 0, \quad w(L,\ t)\ =\ 0\ \ , \tag{18.149}$$

no caso de condições de Dirichlet ou

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0,\ t)\ =\ 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(L,\ t)\ =\ 0\ \ , \tag{18.150}$$

no caso de condições de Neumann.

d. Defina

$$E(t)\ =\ \int_0^L\ (w(x,\ t))^2\,dx\ .$$

Mostre que $E(t) \geq 0$ para todo t. (Trivial).

e. Mostre que $E(0) = 0$. (Use as condições iniciais de w).

f. Mostre, diferenciando dentro da integral, usando integração por partes e usando a equação diferencial (18.148), que

$$E'(t)\ =\ -2K\int_0^L\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx + 2K\left(w(L,t)\frac{\partial w}{\partial x}(L,t) - w(0,t)\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)\right)\ .$$

g. Conclua que

$$E'(t)\ =\ -2K\int_0^L\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx$$

supondo as condições de contorno (18.149) ou (18.150) para w. Conclua que, sob essas condições, $E'(t) \leq 0$ para todo t.

h. Conclua de g, d e e que $E(t) = 0$ para todo t.

i. Conclua daí que $w(x,\ t)$ é identicamente nula. ■

✣

Uma das razões de expormos os passos acima de forma tão detalhada é pedagógica: esses passos são seguidos, nem sempre com a mesma trivialidade, em outras demonstrações de teoremas de unicidade de soluções de equações a derivadas parciais. Para teoremas de unicidade válidos em generalizações da equação de difusão vide, por exemplo, a Proposição 18.7, página 1133, e a Proposição 18.8, página 1135.

Podemos generalizar um pouco a proposição acima, mas apenas para condições de Dirichlet. Isso é o conteúdo da proposição que segue.

Proposição 18.3 *Considere a equação diferencial*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - K\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; F(x,\ t)\ , \tag{18.151}$$

com $K > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, constantes, e F é uma função dada (em princípio arbitrária). Acima, $x \in [0,\ L]$ para algum $L > 0$ e $t \geq 0$. As condições iniciais são

$$u(x,\ 0) \;=\; u_0(x), \tag{18.152}$$

onde $u_0 : [0,\ L] \to \mathbb{R}$ é uma função arbitrária. Então, para condições de Dirichlet:

$$u(0,\ t) \;=\; f_1(t), \quad u(L,\ t) \;=\; f_2(t) \quad ,$$

onde f_i são funções arbitrárias, a solução de (18.151) é única, caso exista. □

Prova. A prova segue os mesmos passos descritos no Exercício E. 18.24, mas agora

$$E'(t) \;=\; -2K\int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx + 2K\left(w(L,t)\frac{\partial w}{\partial x}(L,t) - w(0,t)\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)\right) + \alpha\left(w(L,t)^2 - w(0,\ t)^2\right)\ .$$

Porém, os dois últimos termos são nulos, em função das condições de Dirichlet, e obtemos a mesma expressão para $E'(t)$ que no caso do Exercício E. 18.24. ■

• **Unicidade de soluções para a equação de ondas em um intervalo finito**

Vamos agora considerar outra equação importante em Física, a equação de ondas. A proposição que segue apresenta condições que garantem unicidade para as soluções da equação de ondas a coeficientes constantes definida em um intervalo finito da reta sob certas condições iniciais e de contorno.

Proposição 18.4 *Considere a equação diferencial*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; F(x,\ t) \tag{18.153}$$

com $c > 0$, $\gamma \geq 0$, constantes, sendo F uma função dada (em princípio arbitrária). Acima, $x \in [0,\ L]$ para algum $L > 0$ e $t \geq 0$. As condições iniciais são

$$u(x,\ 0) \;=\; u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) \;=\; v_0(x)\ , \tag{18.154}$$

onde $u_0,\ v_0 : [0,\ L] \to \mathbb{R}$ são igualmente funções arbitrárias. Para as condições de contorno, consideramos

I. Condições de Dirichlet*:*

$$u(0,\ t) \;=\; f_1(t), \quad u(L,\ t) \;=\; f_2(t) \quad \cdot$$

II. Condições de Neumann*:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\,t) \;=\; f_3(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,\,t) \;=\; f_4(t) \;\cdot$$

Acima, f_i são funções arbitrárias.

Então, caso exista, a solução de (18.153) com as condições iniciais (18.154) é única tanto no caso de condições de contorno do tipo de Dirichlet quando do tipo de Neumann. □

A proposição acima garante unicidade da solução para qualquer função $F(x,\,t)$ e quaisquer funções f_i, mas não garante a existência de soluções. Para garantir existência e exibir uma solução (por exemplo em termos de séries de Fourier) é preciso ser mais restritivo quanto à função F e às funções f_i. A proposição acima pode ser bastante generalizada. Isso é apresentado na Proposição 18.9, página 1136.

E. 18.25 *Exercício. Prova da Proposição 18.4.* Para demonstrar a unicidade de solução da equação diferencial sob as condições acima proceda da seguinte forma: suponha que haja duas soluções u e v da equação acima, ambas satisfazendo as mesmas condições de contorno e as mesmas condições iniciais. Defina $w(x,\,t) = u(x,\,t) - v(x,\,t)$. Desejamos mostrar que $w = 0$, implicando que as duas soluções u e v são, em verdade, iguais.

a. Mostre que w satisfaz a equação diferencial homogênea

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial w}{\partial t} \;=\; 0\,.$$

b. Mostre que w satisfaz as condições iniciais

$$w(x,\,0) = 0\,, \qquad \frac{\partial w}{\partial t}(x,\,0) \;=\; 0\,.$$

c. Mostre que w satisfaz as condições de contorno

$$w(0,\,t) \;=\; 0\,, \quad w(L,\,t) \;=\; 0 \quad , \tag{18.155}$$

no caso de condições de Dirichlet ou

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0,\,t) \;=\; 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(L,\,t) \;=\; 0 \quad , \tag{18.156}$$

no caso de condições de Neumann.

d. Defina

$$E(t) \;=\; \int_0^L \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] dx\,.$$

Mostre que $E(t) \geq 0$ para todo t. (Trivial).

e. Mostre que $E(0) = 0$. (Use as condições iniciais de w).

f. Mostre, diferenciando dentro da integral e usando integração por partes, que

$$E'(t) \;=\; 2\int_0^L \frac{\partial w}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] dx\,.$$

Para a integração por partes é preciso usar as condições de contorno (18.155) ou (18.156) para w.

g. Usando a equação diferencial de w conclua que

$$E'(t) \;=\; -2\gamma \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx$$

e, portanto, $E'(t) \leq 0$ para todo t.

h. Conclua de g, d e e que $E(t) = 0$ para todo t.

i. Conclua daí que $w(x,\,t)$ é uma constante, ou seja, não depende de x e t. Disso, conclua pela condição inicial $w(x,\,0) = 0$ que w é identicamente nula. ■

✠

• **Unicidade de solução de EDPs. Um contraexemplo**

Sob a luz das Proposições 18.2, 18.3, 18.4, 18.5, 18.7 e 18.8 (páginas 1126, 1128, 1128, 1130, 1133, e 1135, respectivamente), o estudante não deve ser levado a pensar que a unicidade seja uma propriedade comum a todas as equações a derivadas parciais lineares com as condições iniciais e de contorno como as que tratamos. Vejamos um **contraexemplo**.

E. 18.26 *Exercício*. Seja a equação diferencial linear e homogênea

$$(1-2x)t\frac{\partial u}{\partial t} - x(1-x)\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; 0\;,$$

para $x \in [0,\,1]$, $t \geq 0$, com a condição inicial $u(x,\,0) = 0$ e as condições de contorno $u(0,\,t) = u(1,\,t) = 0$.

Esse problema tem infinitas soluções. Mostre que todas as funções da forma $u(x,\,t) = f\big(tx(1-x)\big)$, onde f é uma função contínua e diferenciável em $[0,\,\infty)$, satisfazendo $f(0) = 0$, satisfazem a equação diferencial, a condição inicial e as condições de contorno acima. Por exemplo, para qualquer $\alpha > 0$ a função $v_\alpha(x,\,t) := \big(tx(1-x)\big)^\alpha$ satisfaz a equação diferencial, a condição inicial e as condições de contorno. O problema acima é estudado sob a luz do *método das características* no Exemplo 18.5 da página 1104. ✠

18.6.2 Unicidade de Solução para as Equações de Laplace e Poisson

• **Unicidade de solução para as equações de Laplace e Poisson em regiões finitas**

De grande importância em problemas de Eletrostática, Magnetostática, Mecânica dos Fluidos ou em problemas de transporte de calor é a questão da unicidade de solução da equação de Laplace $\Delta\phi(\vec{x}) = 0$ ou da de Poisson[44] $\Delta\phi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$ sob certas condições de contorno. Para o caso de regiões limitadas essa questão é respondida na seguinte proposição.

Proposição 18.5 *Considere-se o problema de determinar a solução da equação de Poisson $\Delta\phi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$ (a equação de Laplace é o caso particular em que $\rho(\vec{x}) \equiv 0$) em três dimensões em um volume $\mathcal{R}$, compacto, conexo, limitado por uma superfície fechada, retificável e orientável $\partial\mathcal{R}$, de forma que ϕ seja contínua e diferenciável em $\partial\mathcal{R}$ satisfazendo em $\partial\mathcal{R}$ uma das seguintes condições de contorno:*

1. Condição de Dirichlet. *Para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{R}$ vale $\phi(\vec{x}) = f(\vec{x})$, para uma função f dada.*
2. Condição de Neumann. *Para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{R}$ vale $\frac{\partial\phi}{\partial n}(\vec{x}) = g(\vec{x})$, para uma função g dada, onde $\frac{\partial\phi}{\partial n}(\vec{x}) := \Big(\vec{\nabla}\phi(\vec{x})\Big)\cdot \vec{n}(\vec{x})$ é a chamada* derivada normal *de ϕ em $\vec{x} \in \partial\mathcal{R}$, $\vec{n}(\vec{x})$ sendo um versor normal a $\partial\mathcal{R}$ em $\vec{x} \in \partial\mathcal{R}$, apontando para fora de $\mathcal{R}$.*
3. Condição mista. *Para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{R}$ vale $\phi(\vec{x}) + a(\vec{x})\frac{\partial\phi}{\partial n}(\vec{x}) = h(\vec{x})$, onde h é uma função dada e a é contínua por partes, não identicamente nula e não negativa, ou seja, $a(\vec{x}) \geq 0$ para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{R}$.*

Então, no caso de uma condição de Dirichlet ou mista a solução, se existir, é única e no caso de uma condição de Neumann a solução, se existir, é única a menos de uma constante aditiva. No caso de uma condição de Neumann, uma condição necessária à existência de solução é que valha

$$\int_{\mathcal{R}} \rho(\vec{x})\; d^3\vec{x} \;=\; \int_{\partial\mathcal{R}} g(\vec{x})\; d\sigma(\vec{x})\;. \tag{18.157}$$

Mutatis mutandis*, as afirmações acima são também válidas em duas dimensões, ou mesmo em quatro ou mais dimensões.* □

Prova. Vamos supor que haja duas soluções u e v da equação $\Delta\phi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$ em $\mathcal{R}$, ambas satisfazendo a mesma condição de contorno, de Dirichlet, de Neumann ou mista, em $\partial\mathcal{R}$. Então, a função $w := u - v$ obviamente satisfaz $\Delta w = 0$ em $\mathcal{R}$ e uma das seguintes condições de contorno homogêneas:

[44] Siméon Denis Poisson (1781–1840).

1) $w(\vec{x}) = 0$ para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{R}$ (no caso de uma condição de Dirichlet),

2) $\frac{\partial w}{\partial n}(\vec{x}) = 0$ para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{R}$ (no caso de uma condição de Neumann) ou

3) $w(\vec{x}) + a(\vec{x})\frac{\partial w}{\partial n}(\vec{x}) = 0$ para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{R}$ (no caso de uma condição mista).

Considere-se a quantidade

$$U \;:=\; \int_{\mathcal{R}} \left(\vec{\nabla} w(\vec{x})\right)^2 \, d^3\vec{x} \; .$$

É evidente pela definição que $U \geq 0$. Como $\nabla \cdot \left(w\vec{\nabla} w\right) = \left(\vec{\nabla} w\right)^2 + w\Delta w = \left(\vec{\nabla} w\right)^2$ (pois $\Delta w = 0$), temos, pelo Teorema de Gauss, Teorema 4.11, página 353,

$$U \;=\; \int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \left(w\vec{\nabla} w\right)(\vec{x}) \; d^3\vec{x} \;\stackrel{\text{Gauss}}{=}\; \oiint_{\partial\mathcal{R}} w(\vec{x}) \frac{\partial w}{\partial n}(\vec{x}) \; d\sigma(\vec{x}) \; , \tag{18.158}$$

$d\sigma(\vec{x})$ sendo a medida de integração de superfície em $\partial\mathcal{R}$.

No caso de uma condição de Neumann ou de Dirichlet o lado direito de (18.158) anula-se, pois ou $w(\vec{x}) = 0$ para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{R}$ (Dirichlet) ou $\frac{\partial w}{\partial n}(\vec{x}) = 0$ para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{R}$ (Neumann).

No caso de uma condição mista o lado direito de (18.158) fica $-\oiint_{\partial\mathcal{R}} a(\vec{x}) \left(\frac{\partial w}{\partial n}(\vec{x})\right)^2 d\sigma(\vec{x}) \leq 0$, pois a foi suposta não negativa. Como, de acordo com a definição, $U \geq 0$, concluímos novamente que U é nulo.

Assim, para cada uma das três condições concluímos que $U = 0$, o que implica que $\vec{\nabla} w = 0$ em todo $\mathcal{R}$. Logo, $u(\vec{x}) = v(\vec{x}) + c$, onde c é uma constante. No caso de uma condição de Dirichlet essa constante deve anular-se, pois u e v satisfazem as mesmas condições em $\partial\mathcal{R}$. O mesmo se dá para uma condição mista. No caso de uma condição de Neumann essa constante pode ser arbitrária.

Ainda no caso de Neumann, vê-se que a condição (18.157) é necessária aplicando a ϕ a terceira identidade de Green, relação (4.48) do Teorema 4.13, página 353.

Mutatis mutandis, a demonstração das afirmações acima não se altera em duas ou mais dimensões. ■

• **Unicidade de solução para as equações de Laplace e Poisson em $\mathbb{R}^3$**

A Proposição 18.5, página 1130, estabelece condições que garantem a unicidade de solução das equações de Poisson e Laplace em regiões finitas. Uma generalização para equações de Poisson e Laplace definidas em todo $\mathbb{R}^3$ pode ser obtida, mas certos cuidados com as hipóteses são necessários.

Contemplando a demonstração da Proposição 18.5, vemos que a mesma pode ser estendida para equações definidas em todo $\mathbb{R}^3$ desde que se possa garantir que a expressão

$$\oiint_{\partial\mathcal{R}} w(\vec{x}) \frac{\partial w}{\partial n}(\vec{x}) \, d\sigma(\vec{x}) \; , \tag{18.159}$$

do lado direito de (18.158), convirja a zero no limite quando $\mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$, pois isso garantirá que $U := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \left(\vec{\nabla} w(\vec{x})\right)^2 d^3\vec{x}$ é nula e, portanto, que w é constante em todo $\mathbb{R}^3$. Agora, a condição que $\lim\limits_{\|\vec{x}\|\to\infty} \|\vec{x}\|^2 w(\vec{x}) \left\|\vec{\nabla} w(\vec{x})\right\| = 0$ é suficiente para garantir que a expressão de (18.159) anule-se quando $\mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ e, portanto, é suficiente para garantir a unicidade de solução das equações de Laplace e Poisson em $\mathbb{R}^3$. Como veremos abaixo, porém, essa condição pode ser modificada. Ainda assim, podemos provisoriamente apresentar a seguinte extensão da Proposição 18.5:

Proposição 18.6 *Considere-se o problema de determinar a solução da equação de Poisson $\Delta u(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$ (a equação de Laplace é o caso particular em que $\rho(\vec{x}) \equiv 0$) em $\mathbb{R}^3$ de forma que u satisfaça*

$$\lim_{\|\vec{x}\|\to\infty} \|\vec{x}\|^2 \; |u(\vec{x})| \; \left\|\vec{\nabla} u(\vec{x})\right\| \;=\; 0 \; .$$

Então, se existir, a solução é única a menos de uma constante aditiva. □

Para certas aplicações esse resultado é um tanto restritivo. Para irmos além dele, necessitamos um estudo mais detalhado de propriedades de soluções da equação de Laplace. De fundamental importância é o chamado *Teorema do Valor Médio* para funções harmônicas, que apresentamos na Seção 47.3, página 2858.

Teorema 18.1 *Considere-se o problema de determinar a solução da equação de Poisson $\Delta u(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$ (a equação de Laplace é o caso particular em que $\rho(\vec{x}) \equiv 0$) em $\mathbb{R}^3$ de forma que u satisfaça $\lim_{\|\vec{x}\|\to\infty} |u(\vec{x})| = 0$. Então, se existir, a solução é única.* □

Prova. Se houver duas soluções u e v do problema, a diferença $w = u - v$ satisfaz $\lim_{\|\vec{x}\|\to\infty} |w(\vec{x})| = 0$ e é uma função harmônica, ou seja, satisfaz a equação de Laplace $\Delta w = 0$. Para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ vale, portanto, o Teorema do Valor Médio, Teorema 47.4, página 2858, que afirma que, para qualquer $R > 0$,

$$w(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{4\pi R^2} \oiint_{\partial B_R} w(\vec{y})\, d\sigma(\vec{y}) \;. \tag{18.160}$$

onde B_R é uma esfera de raio R centrada em $\vec{x}$. Definindo $K(R) = \max\{|w(\vec{y})|,\ \vec{y} \in \partial B_R\}$, extraímos facilmente de (18.160) que $|w(\vec{x})| \le K(R)$. Tomando $R \to \infty$ e lembrando que $\lim_{\|\vec{x}\|\to\infty} |w(\vec{x})| = 0$ (o que implica $\lim_{R\to\infty} K(R) = 0$), segue que $|w(\vec{x})| = 0$. Como isso vale para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, segue que $u = v$ em toda parte, provando a unicidade. ■

O Teorema a seguir generaliza o Teorema 18.1 e sua demonstração é idêntica.

Teorema 18.2 *Considere-se o problema de determinar a solução da equação de Poisson $\Delta u(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$ (a equação de Laplace é o caso particular em que $\rho(\vec{x}) \equiv 0$) em $\mathbb{R}^3$ de forma que u satisfaça, para cada versor $\hat{x}$,*

$$\lim_{R\to\infty} |u(R\hat{x})| \;=\; \Phi(\hat{x}) \;,$$

onde Φ é uma função dada definida na esfera unitária. Então, se existir, a solução é única. □

Prova. Se houver duas soluções u e v do problema, a diferença $w = u - v$ satisfaz $\lim_{\|\vec{x}\|\to\infty} |w(\vec{x})| = 0$ e é uma função harmônica, ou seja, satisfaz a equação de Laplace $\Delta w = 0$. Os demais passos são idênticos aos da demonstração do Teorema 18.1. ■

O Teorema 18.1 tem também o seguinte corolário evidente, o qual será evocado adiante:

Corolário 18.1 *A única função harmônica em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz $\lim_{\|\vec{x}\|\to\infty} |u(\vec{x})| = 0$ é a função identicamente nula.* □

Prova. A função identicamente nula é harmônica e trivialmente satisfaz $\lim_{\|\vec{x}\|\to\infty} |u(\vec{x})| = 0$. Portanto, pelo Teorema 18.1 é a única função com essas propriedades. ■

18.6.3 Unicidade de Soluções. Generalizações

Nesta seção continuaremos a discussão sobre teoremas de unicidade de soluções de equações a derivadas parciais de interesse, particularmente para versões mais gerais das equações de ondas e de difusão, em uma ou mais dimensões espaciais.

O problema de determinar soluções de equações diferenciais submetidas a condições iniciais é frequentemente denominado *problema de Cauchy*.

• **Unicidade de solução para a equação de difusão em regiões finitas**

A proposição que segue estabelece unicidade de solução para uma forma bastante geral da equação de difusão definida em um conjunto limitado e conexo $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, para todo $n \ge 1$, sob certas condições iniciais e certas condições de contorno, que podem ser do tipo de Dirichlet[45], de Neumann[46] ou mistas (vide abaixo), generalizando assim a Proposição 18.2, da

[45] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859).
[46] Carl Neumann (1832–1925).

página 1126.

Proposição 18.7 *Consideremos para uma função real u a equação diferencial linear, denominada equação de difusão, dada por*

$$\gamma(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},\ t) - \vec{\nabla}\cdot\Big(\kappa(\vec{x},\ t)\vec{\nabla}u(\vec{x},\ t)\Big) + \eta(\vec{x})u(\vec{x},\ t) \ =\ \varphi(\vec{x},\ t)\ , \tag{18.161}$$

definida para $\vec{x}$ em um conjunto não vazio, aberto, conexo e limitado $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$.

Suporemos que γ e η são contínuas por partes com $\gamma(\vec{x})\geq 0$ e $\eta(\vec{x})\geq 0$, ambas podendo se anular apenas em um conjunto de medida nula. Suporemos também que κ é contínua e diferenciável e que $\kappa(\vec{x},\ t)\geq 0$.

Denotaremos por $\overline{\mathcal{D}}$ o fecho de $\mathcal{D}$ (que é compacto, pois $\mathcal{D}$ é limitado) e denotaremos por $\partial\mathcal{D}=\overline{\mathcal{D}}\setminus\mathcal{D}$ a fronteira de $\mathcal{D}$. Acima, $\varphi(\vec{x},\ t)$ é uma função real dada de $\vec{x}$ e t que, se não nula, faz de (18.161) uma equação não homogênea. Sobre a região $\mathcal{D}$, suporemos ainda que $\partial\mathcal{D}$ seja diferenciável e orientável, de modo que em qualquer ponto $\vec{x}$ de $\partial\mathcal{D}$ possamos definir o versor (vetor de comprimento 1) $\vec{n}(\vec{x})$ normal à $\partial\mathcal{D}$ no ponto $\vec{x}$ e apontando para fora de $\mathcal{D}$.

Iremos supor que a função u esteja submetida a condições iniciais que fixam seu valor em $t=0$:

$$u(\vec{x},\ 0) \ =\ u_0(\vec{x})\ , \qquad \forall\vec{x}\in\mathcal{D}\ , \tag{18.162}$$

onde a função real u_0 é um dado do problema (denominado dado de Cauchy). Além disso, iremos supor que $u(\vec{x},\ t)$ esteja submetida a condições na fronteira $\partial\mathcal{D}$, as chamadas condições de contorno. Trataremos dos seguintes tipos de condições de contorno:

I. Condições de Dirichlet*:*

$$u(\vec{x},\ t) \ =\ \phi(\vec{x},\ t)$$

para todo $\vec{x}\in\partial\mathcal{D}$ e todo $t\geq 0$, $\phi(\vec{x},\ t)$ sendo uma função real dada.

II. Condições de Neumann*:*

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x},\ t) \ =\ -\psi(\vec{x},\ t)$$

para todo $\vec{x}\in\partial\mathcal{D}$ e todo $t\geq 0$, $\psi(\vec{x},\ t)$ sendo uma função real dada. Acima, $\frac{\partial u}{\partial n}$ representa a derivada normal de u à superfície $\partial\mathcal{D}$, ou seja, $\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x},\ t)=\vec{n}(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}u(\vec{x},\ t)$, $\vec{x}\in\partial\mathcal{D}$.

III. Condições mistas*: para uma função contínua $\alpha(\vec{x},\ t)\geq 0$, definida em $\partial\mathcal{D}$ para todo $t\geq 0$, tem-se*

$$u(\vec{x},\ t)+\alpha(\vec{x},\ t)\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x},\ t) \ =\ \chi(\vec{x},\ t)$$

para todo $\vec{x}\in\partial\mathcal{D}$ e todo $t\geq 0$, $\chi(\vec{x},\ t)$ sendo uma função real dada.

Então, para cada uma das condições de contorno descritas acima, a solução do problema de Cauchy de determinar a solução (18.161) para as condições iniciais (18.162) é única, caso exista. □

Vide também a Proposição 18.8 para uma generalização. Antes de passarmos à demonstração da Proposição 18.7, façamos alguns comentários.

O leitor deve ter notado que no enunciado da Proposição 18.7 não são feitas restrições às funções φ, ϕ, ψ e χ, acima, pois, de fato, restrições não são necessárias para garantir-se unicidade. Para uma prova de existência de solução, porém, certamente são necessárias restrições a essas funções, tais como continuidade por partes etc. Não trataremos de condições gerais de existência aqui.

Na Proposição 18.7, acima, a região $\mathcal{D}$ é limitada e conexa. O estudante pode perguntar-se o que ocorre com a questão da unicidade se considerarmos a equação de difusão, equação (18.161), em regiões abertas, conexas, mas não limitadas, como $\mathbb{R}^n$, por exemplo. Nesse caso, tem-se que considerar outras condições de contorno no infinito e os métodos de demonstração abaixo não funcionam. Sob condições convenientes, é possível demonstrar unicidade de solução, mas algumas surpresas interessantíssimas ocorrem. Vide para tal a fascinante discussão de [364], especialmente seus capítulos 67 e 68.

A equação (18.161) pode ser interpretada como a equação de difusão de calor sem convecção em um meio homogêneo de constante de difusão $\kappa(\vec{x},\ t)$, a função $u(\vec{x},\ t)$ representando a temperatura do meio no ponto $\vec{x}$ no instante t. Nessa interpretação, para o caso em que para η e φ são identicamente nulas, a equação (18.161) é uma representação matemática de uma lei física denominada Lei de Fourier[47] do transporte de calor. Vide [198]. A Lei de Fourier foi originalmente obtida experimentalmente e é até hoje um problema de pesquisa demonstrá-la teoricamente a partir de primeiros princípios usando os métodos da Mecânica Estatística, especialmente no caso quântico. O termo $\varphi(\vec{x},\ t)$ tem a interpretação de uma fonte de calor externa e o termo $\eta(\vec{x},\ t)u(\vec{x},\ t)$ com $\eta \geq 0$ representa uma dissipação de calor, por exemplo, por emissão de radiação.

As três condições de contorno listadas acima manifestam condições físicas às quais o sistema definido em $\mathcal{D}$ se submete em seu contorno $\partial\mathcal{D}$. Consideremos a interpretação de (18.161) como a equação de difusão de calor sem convecção em um meio homogêneo. Fisicamente mais precisas são as condições mistas, que afirmam que para o fluxo de calor (para fora de $\mathcal{D}$) por unidade de área, $-\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x},\ t)$, vale $-\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x},\ t) = \frac{1}{\alpha(\vec{x},\ t)}\left(u(\vec{x},\ t) - \chi(\vec{x},\ t)\right)$. De acordo com a Lei de Fourier do transporte de calor (vide [198]), isso diz-nos que em cada ponto $\vec{x} \in \partial\mathcal{D}$ o calor flui do sistema à temperatura $u(\vec{x},\ t)$ para um banho térmico externo à temperatura $\chi(\vec{x},\ t)$, através da superfície de contacto cuja constante de difusão é $\alpha(\vec{x},\ t)$, a qual dependente do contacto entre o sistema e o meio, do material que os compõe etc., e por isso pode depender de $\vec{x}$ e t. As condições de Dirichlet significam que cada ponto de $\vec{x}$ de $\partial\mathcal{D}$ está em contacto com um banho térmico à temperatura $\phi(\vec{x},\ t)$ que difunde calor perfeitamente ao sistema nos pontos de contacto, ou seja, vale a aproximar por zero a constante de difusão de contacto α (o que é uma boa aproximação no caso de contactos metálicos). As condições de Neumann significam que, cada ponto de $\vec{x}$ de $\partial\mathcal{D}$, o fluxo de calor (para fora de $\mathcal{D}$) por unidade de área, $-\frac{\partial u}{\partial n}$, é fixado em $\psi(\vec{x},\ t)$. Tal se dá, por exemplo, se u for desprezível face à temperatura do meio externo, em cujo caso teríamos, comparando com o caso das condições mistas, $-\psi = \chi/\alpha$. Um caso comum é aquele em que ψ é nula, o que corresponde a colocar o sistema em contacto com um isolante térmico perfeito, ou seja, para o qual α é próximo ao infinito.

Prova da Proposição 18.7. Afirmamos que sob as condições descritas na proposição, a solução de (18.161) é única, caso exista. Para tal, vamos supor que u e v sejam duas soluções reais de (18.161), ambas satisfazendo as mesmas condições iniciais e as mesmas condições de contorno, quer sejam de Dirichlet, de Neumann ou mistas, descritas acima. Consideremos a função w definida por $w(\vec{x},\ t) := u(\vec{x},\ t) - v(\vec{x},\ t)$. Como (18.161) é linear, é fácil constatar que w satisfaz a equação homogênea

$$\gamma(\vec{x})\frac{\partial w}{\partial t}(\vec{x},\ t) - \vec{\nabla}\cdot\Big(\kappa(\vec{x},\ t)\vec{\nabla}w(\vec{x},\ t)\Big) + \eta(\vec{x})w(\vec{x},\ t) \ = \ 0\ , \tag{18.163}$$

para todo $\vec{x} \in \mathcal{D}$ e todo $t \geq 0$, assim como a condição inicial $w(\vec{x},\ 0) = 0$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{D}$. Quanto às condições de contorno teremos, para o caso de condições de Dirichlet, $w(\vec{x},\ t) = 0$ para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{D}$ e todo $t \geq 0$. Para o caso de condições de Neumann, $\frac{\partial w}{\partial n}(\vec{x},\ t) = 0$ para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{D}$ e todo $t \geq 0$. Para o caso de condições mistas, $w(\vec{x},\ t) + \alpha(\vec{x},\ t)\frac{\partial w}{\partial n}(\vec{x},\ t) = 0$ para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{D}$ e todo $t \geq 0$.

Desejamos mostrar que w é identicamente nula, o que prova que u e v são idênticas, estabelecendo unicidade de solução sob as condições mencionadas. Para tal, consideremos a expressão

$$A(t) \ = \ \int_{\mathcal{D}} \gamma(\vec{x})\big(w(\vec{x},\ t)\big)^2\ d^n\vec{x} + 2\int_0^t \left(\int_{\mathcal{D}} \eta(\vec{x})\big(w(\vec{x},\ t')\big)^2\ d^n\vec{x}\right)\ dt'\ . \tag{18.164}$$

É evidente que $A(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Tem-se, porém, $A(0) = 0$, pois em $t = 0$ a função w anula-se (pela condição

[47] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830). Os trabalhos de Fourier na resolução da equação de difusão de calor em uma dimensão o conduziram às chamadas *séries de Fourier*.

inicial para w). Como w é diferenciável em relação a t, podemos calcular a derivada $\frac{d}{dt}A(t)$ por

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dt}(t) &= \int_{\mathcal{D}} \gamma(\vec{x})\frac{\partial}{\partial t}\big(w(\vec{x},\ t)\big)^2\ d^n\vec{x} + 2\int_{\mathcal{D}} \eta(\vec{x})\big(w(\vec{x},\ t)\big)^2\ d^n\vec{x} \\
&= 2\int_{\mathcal{D}} w(\vec{x},\ t)\gamma(\vec{x})\frac{\partial w}{\partial t}(\vec{x},\ t)\ d^n\vec{x} + 2\int_{\mathcal{D}} \eta(\vec{x})\big(w(\vec{x},\ t)\big)^2\ d^n\vec{x} \\
&\overset{(18.163)}{=} 2\int_{\mathcal{D}} w(\vec{x},\ t)\ \left[\vec{\nabla}\cdot\Big(\kappa(\vec{x},\ t)\vec{\nabla}w(\vec{x},\ t)\Big) - \eta(\vec{x})w(\vec{x},\ t)\right]\ d^n\vec{x} + 2\int_{\mathcal{D}} \eta(\vec{x})\big(w(\vec{x},\ t)\big)^2\ d^n\vec{x} \\
&= 2\int_{\mathcal{D}} w(\vec{x},\ t)\,\vec{\nabla}\cdot\Big(\kappa(\vec{x},\ t)\vec{\nabla}w(\vec{x},\ t)\Big)\ d^n\vec{x} \\
&= 2\left[\int_{\mathcal{D}} \vec{\nabla}\cdot\Big(\kappa(\vec{x},\ t)\,w\vec{\nabla}w\Big)\ d^n\vec{x} - \int_{\mathcal{D}} \kappa(\vec{x},\ t)\left(\vec{\nabla}w\right)^2\ d^n\vec{x}\right] \\
&\overset{\text{Gauss}}{=} 2\left[\int_{\partial\mathcal{D}} \kappa(\vec{x},\ t)w\frac{\partial w}{\partial n}\ ds(\vec{x}) - \int_{\mathcal{D}} \kappa(\vec{x},\ t)\left(\vec{\nabla}w\right)^2\ d^n\vec{x}\right]\ ,
\end{aligned}$$

onde $ds(\vec{x})$ é a medida de integração $n-1$ dimensional em $\partial\mathcal{D}$. Agora, no caso de condições de Dirichlet, a integral $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{D}} \kappa(\vec{x},\ t)\,w\frac{\partial w}{\partial n}\,ds(\vec{x})$ anula-se pois w anula-se em $\partial\mathcal{D}$, o mesmo se sucedendo no caso de condições de Neumann, quando $\frac{\partial w}{\partial n}$ anula-se em $\partial\mathcal{D}$. Concluímos que em ambos os casos

$$\frac{dA}{dt}(t) \ =\ -2\int_{\mathcal{D}} \kappa(\vec{x},\ t)\left(\vec{\nabla}w\right)^2\ d^n\vec{x}\,. \tag{18.165}$$

No caso de condições mistas, tem-se

$$\frac{dA}{dt}(t) \ =\ -2\left[\int_{\partial\mathcal{D}} \alpha(\vec{x},\ t)\,\kappa(\vec{x},\ t)\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2\ ds(\vec{x}) + \int_{\mathcal{D}} \kappa(\vec{x},\ t)\left(\vec{\nabla}w\right)^2\ d^n\vec{x}\right]\ . \tag{18.166}$$

Ora, como $\kappa(\vec{x},\ t)\geq 0$ e $\alpha(\vec{x},\ t)\geq 0$, o lado direito de (18.165) e de (18.166) são ambos claramente menores ou iguais a zero. Porém, como $A(0)=0$, se a derivada $\frac{dA}{dt}(t)$ fosse negativa para algum $t\geq 0$, a função A assumiria valores negativos, o que é impossível pois, como observamos, $A(t)\geq 0$ para todo $t\geq 0$. Logo, devemos ter $\frac{dA}{dt}(t)=0$ para todo t, ou seja, A é constante. Mas como $A(0)=0$, vale $A(t)=0$ para todo $t\geq 0$. Sendo $A(t)$ dada em (18.164) como a soma de duas integrais maiores ou iguais a zero, isso implica que ambas se anulam, ou seja, em particular, $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} \gamma(\vec{x})\big(w(\vec{x},\ t)\big)^2\,d^n\vec{x}=0$ para todo $t\geq 0$. Como w é contínua e $\gamma(\vec{x})$ se anula apenas em um conjunto de medida nula, isso implica que w é identicamente nula em todo $\overline{\mathcal{D}}$, para todo $t\geq 0$, para a condição inicial e para cada uma das condições de contorno consideradas, que é o que queríamos mostrar. ■

Uma ideia semelhante à da demonstração acima será seguida quando tratarmos da equação que descreve vibrações em meios elásticos na Proposição 18.9, página 1136. A Proposição 18.7 pode ser estendida, sob certas condições, como mostra a seguinte proposição, que generaliza a Proposição 18.3 da página 1128.

Proposição 18.8 *Consideremos para uma função real u a equação diferencial linear dada por*

$$\gamma(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},\ t) - \vec{\nabla}\cdot\Big(\kappa(\vec{x},\ t)\vec{\nabla}u(\vec{x},\ t)\Big) - \vec{\theta}(\vec{x},\ t)\cdot\vec{\nabla}u(\vec{x},\ t) + \eta(\vec{x})u(\vec{x},\ t) \ =\ \varphi(\vec{x},\ t)\ , \tag{18.167}$$

definida sob as mesmas hipóteses da Proposição 18.7, mas assumindo ainda que $\vec{\theta}$ é continuamente diferenciável e $\vec{\nabla}\cdot\vec{\theta}(\vec{x},\ t)\geq 0$ para todo $\vec{x}\in\mathcal{D}$ e $t\geq 0$. Seja u submetida a condições iniciais que fixam seu valor em $t=0$:

$$u(\vec{x},\ 0) \ =\ u_0(\vec{x})\ , \tag{18.168}$$

$\forall \vec{x} \in \mathcal{D}$, *onde a função real* u_0 *é um dado do problema (denominado dado de Cauchy) e a condições de contorno do tipo de Dirichlet na fronteira* $\partial\mathcal{D}$*:*

$$u(\vec{x},\ t)\ =\ \phi(\vec{x},\ t)$$

para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{D}$ *e todo* $t \geq 0$*,* $\phi(\vec{x},\ t)$ *sendo uma função real dada.*

Então, a solução do problema de Cauchy de determinar a solução (18.167) para as condições iniciais (18.168) é única, caso exista. □

O leitor deve notar que a equação diferencial (18.167) difere de (18.161) pela introdução do termo contendo o campo $\vec{\theta}$, sendo que supomos que o divergente desse campo seja maior ou igual a zero em $\mathcal{D}$. É de se notar também o fato de a proposição limitar-se a condições de contorno do tipo de Dirichlet.

Prova. A prova segue os mesmos passos do caso da Proposição 18.7, mas obtém-se agora

$$\frac{dA}{dt}(t)\ =\ -2\int_{\mathcal{D}} \kappa(\vec{x},\ t)\left(\vec{\nabla}w\right)^2\ d^n\vec{x} - \int_{\mathcal{D}}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\theta}\right)w^2\ d^n\vec{x} + \int_{\partial\mathcal{D}} w^2\left(\vec{\theta}\cdot\vec{n}(\vec{x})\right)\ ds(\vec{x})\ , \tag{18.169}$$

em lugar de (18.165). A integral sobre $\partial\mathcal{D}$ é nula sob condições de Dirichlet, pois para elas w anula-se na fronteira. Assim, se $\vec{\nabla}\cdot\vec{\theta} \geq 0$, obtém-se novamente $\frac{dA}{dt}(t) \leq 0$ sob condições de Dirichlet[48], conduzindo às mesmas conclusões que no caso da Proposição 18.7. ■

• **Unicidade de solução para a equação de vibrações elásticas em regiões finitas**

A proposição que segue estende os resultados de unicidade que obtivemos para a equação de difusão na Proposição 18.7, acima, para uma forma bastante geral da equação que descreve vibrações em meios elásticos, definida em um conjunto limitado e conexo $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, para todo $n \geq 1$, sob certas condições iniciais e certas condições de contorno, que podem ser do tipo de Dirichlet, de Neumann ou mistas. Um caso particular importante é a equação de ondas, de grande relevância em Física, tratado na Proposição 18.4 da página 1128 no caso unidimensional.

Proposição 18.9 *Consideremos para uma função real* u *a equação diferencial linear, dada por*

$$\rho(\vec{x})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x},\ t) + \gamma(\vec{x},\ t)\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},\ t) - \vec{\nabla}\cdot\left(\tau(\vec{x})\vec{\nabla}u(\vec{x},\ t)\right) + \eta(\vec{x})u(\vec{x},\ t)\ =\ \varphi(\vec{x},\ t)\ , \tag{18.170}$$

definida para $\vec{x}$ *em um conjunto não vazio, aberto, conexo e limitado* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$*,* $n \geq 1$*.* $\mathcal{D}$ *é, assim, limitado e conexo. Assumiremos que* τ *é contínua e diferenciável e que* ρ*,* γ *e* η *sejam contínuas por partes. Suporemos também que* $\rho(\vec{x}) > 0$ *e* $\tau(\vec{x}) > 0$*, exceto em conjuntos de medida nula, onde podem anular-se. Assumiremos também que* $\eta(\vec{x}) \geq 0$ *e que* $\gamma(\vec{x},\ t) \geq 0$ *para todo* $\vec{x} \in \mathcal{D}$ *e todo* $t \geq 0$*.*

Denotaremos por $\overline{\mathcal{D}}$ *o fecho de* $\mathcal{D}$ *(que é compacto, pois* $\mathcal{D}$ *é limitado) e denotaremos por* $\partial\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$ *a fronteira de* $\mathcal{D}$*. Sobre a região* $\mathcal{D}$*, suporemos ainda que* $\partial\mathcal{D}$ *seja diferenciável e orientável, de modo que em qualquer ponto* $\vec{x}$ *de* $\partial\mathcal{D}$ *possamos definir o versor (vetor de comprimento* 1*)* $\vec{n}(\vec{x})$ *normal à* $\partial\mathcal{D}$ *no ponto* $\vec{x}$ *e apontando para fora de* $\mathcal{D}$*.*

Iremos supor que a função u *esteja submetida a condições iniciais que fixam seu valor em* $t = 0$ *assim como o de sua derivada temporal:*

$$u(\vec{x},\ 0)\ =\ u_0(\vec{x})\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},\ 0)\ =\ v_0(\vec{x})\ . \tag{18.171}$$

$\forall \vec{x} \in \mathcal{D}$*, onde as funções reais* u_0 *e* v_0 *são dados do problema (denominados dados de Cauchy). Além disso, iremos supor que* $u(\vec{x},\ t)$ *esteja submetida a condições na fronteira* $\partial\mathcal{D}$*, as chamadas condições de contorno. Trataremos dos seguintes tipos de condições de contorno:*

I. Condições de Dirichlet*:*

$$u(\vec{x},\ t)\ =\ \phi(\vec{x},\ t)$$

para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{D}$ *e todo* $t \geq 0$*,* $\phi(\vec{x},\ t)$ *sendo uma função real dada.*

[48] O leitor poderia pensar que poderíamos incluir condições mistas de contorno e ainda obter $\frac{dA}{dt}(t) \leq 0$ em (18.169) se adicionalmente supuséssemos que $\vec{\theta}\cdot\vec{n}(\vec{x}) \leq 0$ em todo $\partial\mathcal{D}$, mas isso é incompatível com $\vec{\nabla}\cdot\vec{\theta} \geq 0$, pelo Teorema de Gauss, Teorema 4.11, página 353.

II. Condições de Neumann*:*

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x},\ t)\ =\ -\psi(\vec{x},\ t)$$

para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{D}$ *e todo* $t \geq 0$*,* $\psi(\vec{x},\ t)$ *sendo uma função real dada. Acima,* $\frac{\partial u}{\partial n}$ *representa a derivada normal de* u *à superfície* $\partial\mathcal{D}$*, ou seja,* $\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x},\ t) = \vec{n}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} u(\vec{x},\ t)$*,* $\vec{x} \in \partial\mathcal{D}$*.*

III. Condições mistas*: para uma função contínua* $\zeta(\vec{x},\ t) \geq 0$*, definida em* $\partial\mathcal{D}$ *para todo* $t \geq 0$*, tem-se*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},\ t) + \zeta(\vec{x},\ t)\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x},\ t)\ =\ \chi(\vec{x},\ t)$$

para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{D}$ *e todo* $t \geq 0$*,* $\chi(\vec{x},\ t)$ *sendo uma função real dada.*

IV. *A expressão* $\tau(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}$ *anula-se identicamente na fronteira* $\partial\mathcal{D}$*.*

Então, para cada uma das condições de contorno descritas acima, a solução do problema de Cauchy de determinar a solução (18.170) para as condições iniciais (18.171) é única, caso exista. □

A equação (18.170) descreve vibrações elásticas em um meio material de densidade $\rho(\vec{x})$ localizado em $\mathcal{D}$. O termo $\gamma(\vec{x},\ t)\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},\ t)$ descreve uma dissipação (por exemplo, por atrito viscoso com um meio externo) e $\tau(\vec{x})$ deve ser interpretado como a tensão do meio no ponto $\vec{x}$. O termo $\eta(\vec{x})u(\vec{x},\ t)$ provém de uma força harmônica restauradora (caso η positivo) agindo sobre cada ponto do meio. Por fim, $\varphi(\vec{x},\ t)$ representa uma força externa (por unidade de volume) agindo sobre o sistema no ponto $\vec{x}$ no instante t. Para uma dedução parcial dessa expressão no caso unidimensional vide, por exemplo, [198].

Um caso particular importante é aquele em que γ, η e φ são nulas e ρ e τ são constantes positivas, caso esse em que (18.170) assume a forma da *equação de ondas livres*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x},\ t) - c^2\Delta u(\vec{x},\ t)\ =\ 0\,, \qquad c\ =\ \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}\,.$$

A constante c tem a interpretação de velocidade de propagação das ondas.

Prova da Proposição 18.9. Afirmamos que sob as condições descritas na proposição, a solução de (18.170) é única, caso exista. Para tal, vamos supor que u e v sejam duas soluções reais de (18.170), ambas satisfazendo as mesmas condições iniciais e as mesmas condições de contorno, quer sejam de Dirichlet, de Neumann ou mistas, descritas acima. Consideremos a função w definida por $w(\vec{x},\ t) := u(\vec{x},\ t) - v(\vec{x},\ t)$. Como (18.170) é linear, é fácil constatar que w satisfaz a equação homogênea

$$\rho(\vec{x})\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\vec{x},\ t) + \gamma(\vec{x},\ t)\frac{\partial w}{\partial t}(\vec{x},\ t) - \vec{\nabla}\cdot\Big(\tau(\vec{x})\vec{\nabla} w(\vec{x},\ t)\Big) + \eta(\vec{x})w(\vec{x},\ t)\ =\ 0\,, \tag{18.172}$$

para todo $\vec{x} \in \mathcal{D}$ e todo $t \geq 0$, assim como as condições iniciais $w(\vec{x},\ 0) = 0$, e $\frac{\partial w}{\partial t}(\vec{x},\ 0) = 0$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{D}$. Quanto às condições de contorno teremos, para o caso de condições de Dirichlet, $w(\vec{x},\ t) = 0$ para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{D}$ e todo $t \geq 0$. Para o caso de condições de Neumann, $\frac{\partial w}{\partial n}(\vec{x},\ t) = 0$ para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{D}$ e todo $t \geq 0$. Para o caso de condições mistas, $\frac{\partial w}{\partial t}(\vec{x},\ t) + \zeta(\vec{x},\ t)\frac{\partial w}{\partial n}(\vec{x},\ t) = 0$ para todo $\vec{x} \in \partial\mathcal{D}$ e todo $t \geq 0$.

Desejamos mostrar que w é identicamente nula, o que prova que u e v são idênticas, estabelecendo unicidade de solução sob as condições mencionadas. Para tal, consideramos a expressão

$$E(t)\ =\ \int_{\mathcal{D}}\left[\frac{\rho(\vec{x})}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}(\vec{x},\ t)\right)^2 + \frac{\tau(\vec{x})}{2}\Big(\vec{\nabla} w(\vec{x},\ t)\Big)^2 + \frac{\eta(\vec{x})}{2}\Big(w(\vec{x},\ t)\Big)^2\right] d^n\vec{x}\,. \tag{18.173}$$

É evidente pelas hipóteses de positividade sobre ρ, τ e η que $E(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Tem-se, porém, $E(0) = 0$, pois em $t = 0$ a função w anula-se, assim como sua derivada temporal (pela condição inicial para w). Como w é diferenciável

em relação a t, podemos calcular a derivada $\frac{d}{dt}E(t)$ por

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt}(t) &= \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial w}{\partial t}\rho(\vec{x})\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \tau(\vec{x})\left(\vec{\nabla}w\cdot\vec{\nabla}\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \eta(\vec{x})w\frac{\partial w}{\partial t}\right] d^n\vec{x} \\
&\overset{(18.172)}{=} \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial w}{\partial t}\left(-\gamma(\vec{x},\,t)\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\Big(\tau(\vec{x})\vec{\nabla}w\Big) - \eta(\vec{x})\,w\right) + \tau(\vec{x})\left(\vec{\nabla}w\cdot\vec{\nabla}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right] d^n\vec{x} \\
&\quad + \int_{\mathcal{D}} \eta(\vec{x})\,w\frac{\partial w}{\partial t}\,d^n\vec{x} \\
&= -\int_{\mathcal{D}} \gamma(\vec{x},\,t)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 d^n\vec{x} + \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial w}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\Big(\tau(\vec{x})\vec{\nabla}w\Big) + \tau(\vec{x})\left(\vec{\nabla}w\cdot\vec{\nabla}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right] d^n\vec{x} \\
&= -\int_{\mathcal{D}} \gamma(\vec{x},\,t)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 d^n\vec{x} + \int_{\mathcal{D}} \vec{\nabla}\cdot\left(\tau(\vec{x})\frac{\partial w}{\partial t}\vec{\nabla}w\right) d^n\vec{x} \\
&\overset{\text{Gauss}}{=} -\int_{\mathcal{D}} \gamma(\vec{x},\,t)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 d^n\vec{x} + \int_{\partial\mathcal{D}} \tau(\vec{x})\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial n}\,ds(\vec{x})\,, \qquad (18.174)
\end{aligned}$$

onde $\frac{\partial w}{\partial n}$ é a derivada normal introduzida à página 1137.

No caso de condições de Dirichlet, w anula-se na fronteira $\partial\mathcal{D}$ para todo t e, portanto, também sua derivada temporal se anula. Com isso, a segunda integral em (18.174) vale zero, o que também ocorre para condições de Neumann pois, aí, $\frac{\partial w}{\partial n}$ é nula, assim como para as condições de contorno do tipo **IV**, descritas na página 1137. Nesses casos tem-se, assim,

$$\frac{dE}{dt}(t) \;=\; -\int_{\mathcal{D}} \gamma(\vec{x},\,t)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 d^n\vec{x}\,,$$

que é menor ou igual a zero, pois supomos $\gamma(\vec{x},\,t)\geq 0$. Para condições de contorno mistas, tem-se

$$\frac{dE}{dt}(t) \;=\; -\int_{\mathcal{D}} \gamma(\vec{x},\,t)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 d^n\vec{x} - \int_{\partial\mathcal{D}} \tau(\vec{x})\zeta(\vec{x},\,t)\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2 ds(\vec{x})\,,$$

que é igualmente menor ou igual a zero, pois supusemos que $\tau(\vec{x})>0$, $\gamma(\vec{x},\,t)\geq 0$ e $\zeta(\vec{x},\,t)\geq 0$.

Para os vários tipos de condições de contorno tratados, chegamos ao mesmo tipo de situação encontrada na prova da Proposição 18.7: temos que $E(t)\geq 0$ e que $\frac{dE}{dt}(t)\leq 0$ para todo $t\geq 0$, mas $E(0)=0$. Isso só é possível se $E(t)=0$ para todo $t\geq 0$. Lembrando a definição de $E(t)$ em (18.173) e da hipótese que ρ e τ são positivos (exceto, talvez, em conjuntos de medida nula), concluímos que para todo $\vec{x}\in\mathcal{D}$ e todo $t\geq 0$ tem-se $\frac{\partial w}{\partial t}(\vec{x},\,t)=0$ e $\vec{\nabla}w(\vec{x},\,t)=0$, o que implica que $w(\vec{x},\,t)$ é uma constante para todo $\vec{x}\in\mathcal{D}$ e todo $t\geq 0$. Lembrando que $w(\vec{x},\,0)=0$ pela condição inicial, concluímos que $w(\vec{x},\,t)$ é nula para todo $\vec{x}\in\overline{\mathcal{D}}$ e todo $t\geq 0$. Isso implica que as soluções u e v são idênticas, que é o que queríamos provar. ■

E. 18.27 *Exercício.* Se u é uma solução da equação (18.170), que descreve vibrações elásticas em um meio material, então a expressão que define $E(t)$ em (18.173), ou seja,

$$E(t) \;=\; \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{\rho(\vec{x})}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},\,t)\right)^2 + \frac{\tau(\vec{x})}{2}\left(\vec{\nabla}u(\vec{x},\,t)\right)^2 + \frac{\eta(\vec{x})}{2}\Big(u(\vec{x},\,t)\Big)^2\right] d^n\vec{x}\,,$$

representa a energia mecânica dessas vibrações. Justifique essa afirmação. Determine, como fizemos acima, mas para φ não nula e para condições de contorno não homogêneas, a expressão de $\frac{dE}{dt}(t)$. Discuta sob quais circunstâncias a energia é conservada. ✠

18.7 Condições de Compatibilidade em Sistemas Sobredeterminados

Na lide com problemas envolvendo equações a derivadas parciais ocorre, por vezes, de encontrarmos sistemas nos quais o número de equações supera o número de funções incógnitas. Em tais situações é necessário que haja condições de compatibilidade (também ditas *condições de integrabilidade*) que garantam que uma mesma solução satisfaça as diversas equações e que estas equações, portanto, não possuam soluções incompatíveis entre si.

No que segue, apresentaremos uma classe de sistemas onde condições necessárias e suficientes para a compatibilidade são encontradas[49]. Nestas *Notas* encontraremos tais sistemas quando tratarmos das equações de Gauss e Weingarten, que ocorrem no estudo de superfícies bidimensionais em $\mathbb{R}^3$, assunto tratado no Capítulo 37, página 2118 (vide, em especial, a Seção 37.2.4, página 2145).

Os casos aqui tratados não esgotam as situações onde requerimentos de compatibilidade são exigidos em equações a derivadas parciais e o tema tem diversas extensões, como à teoria das transformações de Bäcklund[50], que não trataremos aqui.

Consideremos o caso específico do sistema de equações de primeira ordem

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x^1,\,\ldots,\,x^n) \;=\; F^i_j\Big(y^1\big(x^1,\,\ldots,\,x^n\big),\,\ldots,\,y^m\big(x^1,\,\ldots,\,x^n\big);\,x^1,\,\ldots,\,x^n\Big)\,, \tag{18.175}$$

$i \in \{1,\,\ldots,\,m\}$ e $j \in \{1,\,\ldots,\,n\}$, com $m \geq 1$ e $n > 1$. Suporemos que as funções F^i_j sejam duas vezes continuamente diferenciáveis em todas as suas variáveis. Trata-se de um sistema com m funções incógnitas de $n > 1$ variáveis $y^i(x^1,\,\ldots,\,x^n)$ e $m \times n > m$ equações.

Caso esse sistema possua soluções $y^i(x^1,\,\ldots,\,x^n)$, $i \in \{1,\,\ldots,\,m\}$, valerá, sob as hipóteses,

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^j} \;=\; \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k} \tag{18.176}$$

para todos $i \in \{1,\,\ldots,\,m\}$ e todos $j,\,k \in \{1,\,\ldots,\,n\}$ com $j \neq k$. Assim, se o sistema (18.175) for satisfeito, valerá também

$$\sum_{p=1}^{m} \frac{\partial F^i_j}{\partial y^p}\Big(\underset{\sim}{y}(\underline{x});\,\underline{x}\Big)\frac{\partial y^p}{\partial x^k}(\underline{x}) + \frac{\partial F^i_j}{\partial x^k}\Big(\underset{\sim}{y}(\underline{x});\,\underline{x}\Big) \;=\; \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial F^i_k}{\partial y^p}\Big(\underset{\sim}{y}(\underline{x});\,\underline{x}\Big)\frac{\partial y^p}{\partial x^j}(\underline{x}) + \frac{\partial F^i_k}{\partial x^j}\Big(\underset{\sim}{y}(\underline{x});\,\underline{x}\Big)\,, \tag{18.177}$$

onde introduzimos as notações simplificadoras $\underset{\sim}{y} \equiv (y^1,\,\ldots,\,y^m)$ e $\underline{x} \equiv (x^1,\,\ldots,\,x^n)$. Aplicando nisso (18.175) para eliminar as derivadas parciais das funções y em relação às coordenadas x, obtemos

$$\sum_{p=1}^{m}\left[\frac{\partial F^i_j}{\partial y^p}\Big(\underset{\sim}{y}(\underline{x});\,\underline{x}\Big)F^p_k\Big(\underset{\sim}{y}(\underline{x});\,\underline{x}\Big) - \frac{\partial F^i_k}{\partial y^p}\Big(\underset{\sim}{y}(\underline{x});\,\underline{x}\Big)F^p_j\Big(\underset{\sim}{y}(\underline{x});\,\underline{x}\Big)\right] \;=\; \frac{\partial F^i_k}{\partial x^j}\Big(\underset{\sim}{y}(\underline{x});\,\underline{x}\Big) - \frac{\partial F^i_j}{\partial x^k}\Big(\underset{\sim}{y}(\underline{x});\,\underline{x}\Big)\,, \tag{18.178}$$

para todos $i \in \{1,\,\ldots,\,m\}$ e todos $j,\,k \in \{1,\,\ldots,\,n\}$ com $j \neq k$.

As condições (18.176), (18.177) ou (18.178) são por vezes denominadas *condições de integrabilidade* para o sistema (18.175).

E. 18.28 *Exercício.* As relações (18.177) ou (18.178) são em número de $m \times \frac{n(n-1)}{2}$. Assim, o número de equações menos o número de condições de compatibilidade é $\frac{m}{2}n(3-n)$ e esse número é menor ou igual a m, o número de funções incógnitas, para todo $n \geq 2$ (e também no caso trivial $n = 1$). Verifique essas afirmações! ✠

Vemos assim que as condições (18.177) ou, equivalentemente, (18.178), são *necessárias* para a consistência do sistema sobredeterminado (18.175). O teorema a seguir, o resultado principal desta seção, informa, um tanto surpreendentemente, que essas condições são também *suficientes*.

[49] Seguimos proximamente a exposição de [606], com uma notação mais precisa, melhorias em diversos esclarecimentos e uma correção.
[50] Albert Victor Bäcklund (1845-1922).

Teorema 18.3 *Sejam $m \geq 1$ e $n > 1$, inteiros. Assumindo que para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ e todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ as funções F^i_j sejam duas vezes continuamente diferenciáveis em suas $m+n$ variáveis, então as relações (18.177) ou, equivalentemente, (18.178), são necessárias e suficientes para a consistência do sistema (18.175). Especificando-se o valor das funções $y^k\big(x^1,\, \ldots,\, x^n\big)$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, em um ponto $\big(x^1_0,\, \ldots,\, x^n_0\big)$ ("condição inicial") uma solução para esse sistema existe em uma vizinhança da condição inicial.* □

Prova. Resta apenas demonstrar a suficiência, ou seja, que as condições (18.177) conduzem a soluções de (18.175). No que segue, portanto, estaremos assumindo (18.177). A prova é feita por indução em n, começando-se por $n = 2$.

Caso $n = 2$. Nesse caso, o sistema (18.175) fica

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^1}(x^1,\, x^2) \;=\; F^i_1\Big(y^1\big(x^1,\, x^2\big),\, \ldots,\, y^m\big(x^1,\, x^2\big);\, x^1,\, x^2\Big)\,, \tag{18.179}$$

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^2}(x^1,\, x^2) \;=\; F^i_2\Big(y^1\big(x^1,\, x^2\big),\, \ldots,\, y^m\big(x^1,\, x^2\big);\, x^1,\, x^2\Big)\,, \tag{18.180}$$

para todo $i \in \{1,\, \ldots,\, m\}$. As condições (18.177) assumem a forma[51]

$$\sum_{p=1}^{m}\left[\frac{\partial F^i_2}{\partial y^p}\Big(\underset{\sim}{y}\big(x^1,\, x^2\big);\, x^1,\, x^2\Big)\frac{\partial y^p}{\partial x^1}(x^1,\, x^2) - \frac{\partial F^i_1}{\partial y^p}\Big(\underset{\sim}{y}\big(x^1,\, x^2\big);\, x^1,\, x^2\Big)\frac{\partial y^p}{\partial x^2}(x^1,\, x^2)\right]$$

$$+\,\frac{\partial F^i_2}{\partial x^1}\Big(\underset{\sim}{y}\big(x^1,\, x^2\big);\, x^1,\, x^2\Big) - \frac{\partial F^i_1}{\partial x^2}\Big(\underset{\sim}{y}\big(x^1,\, x^2\big);\, x^1,\, x^2\Big) \;=\; 0\,, \tag{18.181}$$

$i \in \{1,\, \ldots,\, m\}$. Verifique!

Fixemos a variável x^2 em um valor x^2_0 e consideremos primeiramente o problema de valor inicial para o sistema de equações diferenciais ordinárias na variável x^1 e funções $v^i\big(x^1,\, x^2_0\big)$, $i \in \{1,\, \ldots,\, m\}$,

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^1}\big(x^1,\, x^2_0\big) \;=\; F^i_1\Big(\underset{\sim}{v}\big(x^1,\, x^2_0\big);\, x^1,\, x^2_0\Big)\,, \qquad i \in \{1,\, \ldots,\, m\}\,, \tag{18.182}$$

onde $\underset{\sim}{v} \equiv (v^1,\, \ldots,\, v^m)$, com a condição inicial[52]

$$v^i\big(x^1_0,\, x^2_0\big) \;=\; y^i_0\,, \qquad i \in \{1,\, \ldots,\, m\}\,. \tag{18.183}$$

Pelas hipóteses e pelo Teorema de Picard-Lindelöf, Teorema 26.4, página 1602, esse sistema possui solução única em uma vizinhança da condição inicial.

Na próxima etapa tratamos do problema de valor inicial na variável x^2, expresso pela equação diferencial

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^2}\big(x^1,\, x^2\big) \;=\; F^i_2\Big(\underset{\sim}{u}\big(x^1,\, x^2\big);\, x^1,\, x^2\Big)\,, \qquad i \in \{1,\, \ldots,\, m\}\,, \tag{18.184}$$

onde, novamente, $\underset{\sim}{u} \equiv (u^1,\, \ldots,\, u^m)$, com a condição inicial

$$u^i\big(x^1,\, x^2_0\big) \;=\; v^i\big(x^1,\, x^2_0\big)\,, \qquad i \in \{1,\, \ldots,\, m\}\,, \tag{18.185}$$

sendo os v^i's do lado direito as soluções do problemas de valor inicial (18.182)-(18.183). Evocando novamente o Teorema de Picard-Lindelöf, sabemos que também esse problema possui solução única.

Afirmamos que a solução procurada para (18.179)-(18.180) é

$$y^i(x^1,\, x^2) \;=\; u^i\big(x^1,\, x^2\big)\,, \qquad i \in \{1,\, \ldots,\, m\}\,.$$

[51] Há neste caso apenas um par $j,\, k$ de elementos distintos no conjunto $\{1,\, 2\}$ e tomamos $j = 2$, $k = 1$ em (18.177).

[52] Para todo efeito, podemos considerar (18.182) (respectivamente, (18.184)) como um sistema de equações diferenciais ordinárias, já que nelas comparece apenas a derivada em relação a x^1 (respec. x^2).

Verifiquemos essa afirmação. Temos para cada $i \in \{1,\, \ldots,\, m\}$ que

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^2}(x^1,\, x^2) \stackrel{(18.184)}{=} F_2^i\Big(\underset{\sim}{u}(x^1,\, x^2);\, x^1,\, x^2\Big)\,, \tag{18.186}$$

o que verifica (18.180) para as funções $\underset{\sim}{u}(x^1,\, x^2)$. Para verificar (18.179), observemos primeiramente que, para $i \in \{1,\, \ldots,\, m\}$,

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^1}(x^1,\, x_0^2) \stackrel{(18.185)}{=} \frac{\partial v^i}{\partial x^1}(x^1,\, x_0^2) \stackrel{(18.182)}{=} F_1^i\Big(\underset{\sim}{v}(x^1,\, x_0^2);\, x^1,\, x_0^2\Big) \stackrel{(18.185)}{=} F_1^i\Big(\underset{\sim}{u}(x^1,\, x_0^2);\, x^1,\, x_0^2\Big)\,, \tag{18.187}$$

o que verifica (18.179) para $\underset{\sim}{u}(x^1,\, x^2)$, mas apenas quando $x^2 = x_0^2$. Para estender a afirmação para outros valores de x^2, consideremos, para cada $i \in \{1,\, \ldots,\, m\}$, a diferença

$$G^i(x^1,\, x^2) \,:=\, \frac{\partial u^i}{\partial x^1}(x^1,\, x^2) - F_1^i\Big(\underset{\sim}{u}(x^1,\, x^2);\, x^1,\, x^2\Big)\,. \tag{18.188}$$

Já vimos logo acima, em (18.187), que $G^i(x^1,\, x_0^2) = 0$ para todo $i \in \{1,\, \ldots,\, m\}$. Diferenciando (18.188) em relação a x^2, temos

$$\frac{\partial G^i}{\partial x^2}(x^1,\, x^2) \,=\, \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2 \partial x^1}(x^1,\, x^2) - \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial F_1^i}{\partial u^p}\big(\underset{\sim}{u}(x^1,\, x^2);\, x^1,\, x^2\big)\frac{\partial u^p}{\partial x^2}(x^1,\, x^2) - \frac{\partial F_1^i}{\partial x^2}\big(\underset{\sim}{u}(x^1,\, x^2);\, x^1,\, x^2\big)\,. \tag{18.189}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2 \partial x^1}(x^1,\, x^2) \;&=\; \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^1 \partial x^2}(x^1,\, x^2) \stackrel{(18.186)}{=} \frac{\partial}{\partial x^1}\Big[F_2^i\big(\underset{\sim}{u}(x^1,\, x^2);\, x^1,\, x^2\big)\Big] \\ &=\; \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial F_2^i}{\partial u^p}\Big(\underset{\sim}{u}(x^1,\, x^2);\, x^1,\, x^2\Big)\frac{\partial u^p}{\partial x^1}(x^1,\, x^2) + \frac{\partial F_2^i}{\partial x_1}\Big(\underset{\sim}{u}(x^1,\, x^2);\, x^1,\, x^2\Big)\,.\end{aligned}$$

Retornando com isso a (18.189), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial G^i}{\partial x^2}(x^1,\, x^2) \;&=\; \sum_{p=1}^{m}\left[\frac{\partial F_2^i}{\partial u^p}\Big(\underset{\sim}{u}(x^1,\, x^2);\, x^1,\, x^2\Big)\frac{\partial u^p}{\partial x^1}(x^1,\, x^2) - \frac{\partial F_1^i}{\partial u^p}\Big(\underset{\sim}{u}(x^1,\, x^2);\, x^1,\, x^2\Big)\frac{\partial u^p}{\partial x^2}(x^1,\, x^2)\right] \\ &\quad + \left[\frac{\partial F_2^i}{\partial x_1}\Big(\underset{\sim}{u}(x^1,\, x^2);\, x^1,\, x^2\Big) - \frac{\partial F_1^i}{\partial x^2}\Big(\underset{\sim}{u}(x^1,\, x^2);\, x^1,\, x^2\Big)\right]\,.\end{aligned}$$

Evocando agora a suposta condição de compatibilidade (18.181) no lado direito, obtemos

$$\frac{\partial G^i}{\partial x^2}(x^1,\, x^2) \,=\, 0\,, \qquad \forall\, i \in \{1,\, \ldots,\, m\}\,.$$

Verifique! Como $G^i(x^1,\, x_0^2) = 0$ isso estabelece que $G^i(x^1,\, x^2) = 0$ para todo $i \in \{1,\, \ldots,\, m\}$ e, portanto, que (18.179), é válida para $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{u}$. Isso completa a demonstração no caso $n = 2$.

Caso $n > 2$. Procedendo indutivamente, vamos assumir que, a hipótese valha para um dado valor de $n \geq 2$ e provemos que ela também vale para $n+1$. *Mutatis mutandis*, o caminho é, em parte, similar ao do caso $n = 2$. Consideraremos agora a questão de saber se o sistema

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(\underline{x},\, x^{n+1}) \,=\, F_j^i\Big(y^1(\underline{x},\, x^{n+1}),\, \ldots,\, y^m(\underline{x},\, x^{n+1});\, \underline{x},\, x^{n+1}\Big)\,, \qquad i \in \{1,\, \ldots,\, m\} \quad \text{e} \quad j \in \{1,\, \ldots,\, n,\, n+1\}\,, \tag{18.190}$$

(acima, $\underline{x} \equiv (\, x^1,\, \ldots,\, x^n)$) possui uma solução sob as correspondentes equações de compatibilidade já anteriormente listadas, com a adição da condição de compatibilidade

$$\begin{aligned}&\sum_{p=1}^{m}\left[\frac{\partial F_{n+1}^i}{\partial u^p}\Big(\underset{\sim}{u}(\underline{x},\, x^{n+1});\, \underline{x},\, x^{n+1}\Big)\frac{\partial u^p}{\partial x^j}(\underline{x},\, x^{n+1}) - \frac{\partial F_j^i}{\partial u^p}\Big(\underset{\sim}{u}(\underline{x},\, x^{n+1});\, \underline{x},\, x^{n+1}\Big)\frac{\partial u^p}{\partial x^{n+1}}(\underline{x},\, x^{n+1})\right] \\ &\qquad + \frac{\partial F_{n+1}^i}{\partial x_j}\Big(\underset{\sim}{u}(\underline{x},\, x^{n+1});\, \underline{x},\, x^{n+1}\Big) - \frac{\partial F_j^i}{\partial x^{n+1}}\Big(\underset{\sim}{u}(\underline{x},\, x^{n+1});\, \underline{x},\, x^{n+1}\Big) \,=\, 0\,,\end{aligned} \tag{18.191}$$

$j \in \{1,\, \ldots,\, n\}$.

Fixemos a variável x^{n+1} em um valor x_0^{n+1} e consideramos primeiramente o problema de valor inicial para o sistema de equações diferenciais nas variáveis $\underline{x}$ e funções $v^i\big(\underline{x},\, x_0^{n+1}\big)$:

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\big(\underline{x},\, x_0^{n+1}\big) \;=\; F_j^i\Big(\underline{\underset{\sim}{v}}\big(\underline{x},\, x_0^{n+1}\big);\, \underline{x},\, x_0^{n+1}\Big)\,, \qquad i \in \{1,\, \ldots,\, m\}\,, \tag{18.192}$$

para cada $j \in \{1,\, \ldots,\, n\}$, onde $\underline{\underset{\sim}{v}} \equiv (v^1,\, \ldots,\, v^m)$, com a condição

$$v^i\big(x_0^1,\, \ldots,\, x_0^n,\, x_0^{n+1}\big) \;=\; y_0^i\,, \qquad i \in \{1,\, \ldots,\, m\}\,. \tag{18.193}$$

Pela hipótese indutiva, tal solução existe.

Na próxima etapa tratamos do problema de valor inicial na variável x^{n+1}, expresso pela equação diferencial ordinária

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^{n+1}}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big) \;=\; F_{n+1}^i\Big(\underline{\underset{\sim}{u}}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big);\, \underline{x},\, x^{n+1}\Big)\,, \qquad i \in \{1,\, \ldots,\, m\}\,, \tag{18.194}$$

onde, novamente, $\underline{\underset{\sim}{u}} \equiv \big(u^1,\, \ldots,\, u^m\big)$, com a condição inicial

$$u^i\big(\underline{x},\, x_0^{n+1}\big) \;=\; v^i\big(\underline{x},\, x_0^{n+1}\big)\,, \qquad i \in \{1,\, \ldots,\, m\}\,, \tag{18.195}$$

sendo os v^i's do lado direito as soluções do problemas de valor inicial (18.192)-(18.193). Evocando novamente o Teorema de Picard-Lindelöf, sabemos que também esse problema possui solução única em uma vizinhança da condição inicial.

Afirmamos que a solução procurada para (18.190) é

$$y^i\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big) \;=\; u^i\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big)\,, \qquad i \in \{1,\, \ldots,\, m\}\,.$$

Verifiquemos essa afirmação. Temos para cada $i \in \{1,\, \ldots,\, m\}$ que

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^{n+1}}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big) \;\overset{(18.194)}{=}\; F_{n+1}^i\Big(\underline{\underset{\sim}{u}}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big);\, \underline{x},\, x^{n+1}\Big)\,, \tag{18.196}$$

o que verifica (18.190) no caso $j = n+1$ para as funções $\underline{\underset{\sim}{u}}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big)$. Para verificar (18.190) para $j \in \{1,\, \ldots,\, n\}$, observemos primeiramente que, para $i \in \{1,\, \ldots,\, m\}$ e $j \in \{1,\, \ldots,\, n\}$,

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\big(\underline{x},\, x_0^{n+1}\big) \;\overset{(18.195)}{=}\; \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\big(\underline{x},\, x_0^{n+1}\big) \;\overset{(18.192)}{=}\; F_j^i\Big(\underline{\underset{\sim}{v}}\big(\underline{x},\, x_0^{n+1}\big);\, \underline{x},\, x_0^{n+1}\Big) \;\overset{(18.195)}{=}\; F_j^i\Big(\underline{\underset{\sim}{u}}\big(\underline{x},\, x_0^{n+1}\big);\, \underline{x},\, x_0^{n+1}\Big)\,, \tag{18.197}$$

o que verifica (18.190) para $\underline{\underset{\sim}{u}}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big)$ para $j \in \{1,\, \ldots,\, n\}$, mas apenas quando $x^{n+1} = x_0^{n+1}$. Para estender a afirmação para outros valores de x^{n+1}, consideremos, para cada $i \in \{1,\, \ldots,\, m\}$ e cada $j \in \{1,\, \ldots,\, n\}$, a diferença

$$G_j^i\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big) \;:=\; \frac{\partial u^i}{\partial x^j}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big) - F_j^i\Big(u^1\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big),\, \ldots,\, u^m\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big);\, \underline{x},\, x^{n+1}\Big)\,, \qquad i \in \{1,\, \ldots,\, m\} \;\text{ e }\; j \in \{1,\, \ldots,\, n\}\,. \tag{18.198}$$

Desejamos provar que as funções G_j^i são identicamente nulas. Já vimos logo acima, em (18.197), que $G_j^i\big(\underline{x},\, x_0^{n+1}\big) = 0$ para todo $i \in \{1,\, \ldots,\, m\}$ e para cada $j \in \{1,\, \ldots,\, n\}$. Diferenciando (18.198) em relação a x^{n+1}, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_j^i}{\partial x^{n+1}}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big) \;&=\; \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^{n+1}\partial x^j}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big) \\ &\quad - \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial F_j^i}{\partial u^p}\Big(\underline{\underset{\sim}{u}}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big);\, \underline{x},\, x^{n+1}\Big)\frac{\partial u^p}{\partial x^{n+1}}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big) - \frac{\partial F_j^i}{\partial x^{n+1}}\Big(\underline{\underset{\sim}{u}}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big);\, \underline{x},\, x^{n+1}\Big)\,.\end{aligned} \tag{18.199}$$

Agora, para $j \in \{1,\, \ldots,\, n\}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^{n+1}\partial x^j}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big) \;&=\; \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^j \partial x^{n+1}}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big) \;\overset{(18.196)}{=}\; \frac{\partial}{\partial x^j}\Big[F_{n+1}^i\big(\underline{\underset{\sim}{u}}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big);\, \underline{x},\, x^{n+1}\big)\Big] \\ &=\; \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial F_{n+1}^i}{\partial u^p}\Big(\underline{\underset{\sim}{u}}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big);\, \underline{x},\, x^{n+1}\Big)\frac{\partial u^p}{\partial x^j}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big) + \frac{\partial F_{n+1}^i}{\partial x_j}\Big(\underline{\underset{\sim}{u}}\big(\underline{x},\, x^{n+1}\big);\, \underline{x},\, x^{n+1}\Big)\,.\end{aligned}$$

Retornando com isso a (18.199), obtemos

$$\frac{\partial G^i_j}{\partial x^{n+1}}(\underline{x},\, x^{n+1}) \;=\; \sum_{p=1}^{m}\left[\frac{\partial F^i_{n+1}}{\partial u^p}\Big(\underset{\sim}{u}(\underline{x},\, x^{n+1});\, \underline{x},\, x^{n+1}\Big)\frac{\partial u^p}{\partial x^j}(\underline{x},\, x^{n+1}) - \frac{\partial F^i_j}{\partial u^p}\Big(\underset{\sim}{u}(\underline{x},\, x^{n+1});\, \underline{x},\, x^{n+1}\Big)\frac{\partial u^p}{\partial x^{n+1}}(\underline{x},\, x^{n+1})\right]$$

$$+\frac{\partial F^i_{n+1}}{\partial x_j}\Big(\underset{\sim}{u}(\underline{x},\, x^{n+1});\, \underline{x},\, x^{n+1}\Big) - \frac{\partial F^i_j}{\partial x^{n+1}}\Big(\underset{\sim}{u}(\underline{x},\, x^{n+1});\, \underline{x},\, x^{n+1}\Big)\,.$$

Evocando agora a suposta condição de compatibilidade (18.191) no lado direito, obtemos

$$\frac{\partial G^i_j}{\partial x^{n+1}}(\underline{x},\, x^{n+1}) \;=\; 0\,, \qquad \forall\, i \in \{1,\, \ldots,\, m\} \;\text{ e }\; \forall\, j \in \{1,\, \ldots,\, n\}\,.$$

Verifique! Como $G^i_j(\underline{x},\, x^{n+1}_0) = 0$ isso estabelece que $G^i_j(\underline{x},\, x^{n+1}) = 0$ para todo $i \in \{1,\, \ldots,\, m\}$ e todo $j \in \{1,\, \ldots,\, n\}$ e, portanto, que (18.190) é válida para $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{u}$. Isso completa a demonstração indutiva, estabelecendo o resultado desejado para todo $n \geq 2$. ■

18.8 Exercícios Adicionais

E. 18.29 *Exercício*. Determine a solução da equação (18.71) para o caso em que a superfície de Cauchy $\mathfrak{C}$ é a curva $\mathfrak{C} = \big\{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2,\, x_2 = (x_1)^3\big\}$. Parametrizando $\mathfrak{C} = \Big\{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2,\, x_1 = \psi_1(s_2) = s_2\,,\, x_2 = \psi_2(s_2) = (s_2)^3\,,\, s_2 \in \mathbb{R}\Big\}$ a condição inicial é $u\big(\psi_1(s_2),\, \psi_2(s_2)\big) = u_0(s_2)$, u_0 sendo uma função dada. ✠

E. 18.30 *Exercício*. Determine a solução da equação (18.71) para o caso em que a superfície de Cauchy $\mathfrak{C}$ é a curva $\mathfrak{C} = \big\{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2,\, x_1 = (x_2)^3\big\}$. Parametrizando $\mathfrak{C} = \Big\{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2,\, x_1 = \psi_1(s_2) = (s_2)^3\,,\, x_2 = \psi_2(s_2) = s_2\,,\, s_2 \in \mathbb{R}\Big\}$ a condição inicial é $u\big(\psi_1(s_2),\, \psi_2(s_2)\big) = u_0(s_2)$, u_0 sendo uma função dada. ✠

E. 18.31 *Exercício*. Determine a solução da equação (18.71) para o caso em que a superfície de Cauchy $\mathfrak{C}$ é a curva $\mathfrak{C} = \big\{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2,\, x_1 = \tanh(x_2)\big\}$. Parametrizando $\mathfrak{C} = \Big\{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2,\, x_1 = \psi_1(s_2) = \tanh(s_2)\,,\, x_2 = \psi_2(s_2) = s_2\,,\, s_2 \in \mathbb{R}\Big\}$ a condição inicial é $u\big(\psi_1(s_2),\, \psi_2(s_2)\big) = u_0(s_2)$, u_0 sendo uma função dada. ✠

E. 18.32 *Exercício*. Determine a solução da equação (18.71) para o caso em que a superfície de Cauchy $\mathfrak{C}$ é a curva $\mathfrak{C} = \big\{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2,\, x_2 = \tanh(x_1)\big\}$. Parametrizando $\mathfrak{C} = \Big\{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2,\, x_1 = \psi_1(s_2) = s_2\,,\, x_2 = \psi_2(s_2) = \tanh(s_2)\,,\, s_2 \in \mathbb{R}\Big\}$ a condição inicial é $u\big(\psi_1(s_2),\, \psi_2(s_2)\big) = u_0(s_2)$, u_0 sendo uma função dada. Note que nas regiões $x_2 > 1$ e $x_2 < -1$ a solução não é determinada pelas condições iniciais acima. ✠

E. 18.33 *Exercício*. Determine a solução da equação (18.66), mas considere agora a superfície de Cauchy $\mathfrak{C}$ definida por $x_2 \equiv 0$, ou seja, tem-se $x_1 = \psi_1(s_2) = s_2$, $x_2 = \psi_2(s_2) \equiv 0$ com $s_2 \in \mathbb{R}$. A condição inicial para u nessa superfície é $u(x_1,\, 0) = u_0(x_1)$ para alguma função u_0 dada.

Para sua conferência, o resultado é

$$u(x_1,\, x_2) \;=\; \exp\left(\frac{(x_1)^4 - 4x_1x_2 - (x_1^3 - 3x_2)^{4/3}}{4}\right) u_0\Big((x_1^3 - 3x_2)^{1/3}\Big)\,.$$

Verifique também explicitamente que esta função é, de fato, solução de (18.66) e satisfaz a condição de contorno desejada. ✠