Capítulo 18
Introdução ao Problema de Sturm-Liouville

Conteúdo

O presente capítulo é dedicado ao problema de Sturm[1]-Liouville[2], um clássico problema da teoria das equações diferenciais, com diversas aplicações em Física. Historicamente o problema de Sturm-Liouville engendrou uma série de desenvolvimentos que conduziram, no começo do século XX, ao nascimento de uma nova e importante área da Matemática, a Análise Funcional, área essa que é de importância fundamental para a Física Quântica. Há uma vasta literatura sobre o problema de Sturm-Liouville, sendo seus rudimentos tratados na grande maioria dos livros dedicados à teoria das equações diferenciais ordinárias. Para uma referência geral sobre o problema de Sturm-Liouville regular, centrada em aspectos analítico-funcionais, vide [160]. Para uma referência recente, vide [364]. No presente capítulo trataremos apenas de problemas de Sturm-Liouville de segunda ordem, i.e., envolvendo equações diferenciais lineares de segunda ordem, e nos restringiremos também a uma classe de problemas ditos regulares. Para problemas de Sturm-Liouville de ordem superior, vide [167]. Na Seção 18.4.1, página 860, na Seção 15.1, página 677, assim como na Seção 16.4, página 751, são feitas algumas generalizações a problemas não-regulares.

18.1 Comentários Iniciais

Inúmeros problemas em Física envolvem a resolução de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem e o estudo de propriedades gerais de suas soluções. De modo geral, uma equação diferencial desse tipo é da forma

$$u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u \;=\; g(x) \;, \tag{18.1}$$

[1] Jacques Charles François Sturm (1803–1855).
[2] Joseph Liouville (1809–1882).

onde g, a_0 e a_1 são certas funções conhecidas de números reais em (na maioria dos casos) números reais, das quais eventualmente exige-se certas condições (como continuidade, diferenciabilidade etc.). A função u representa alguma grandeza física e a equação (18.1) é a expressão matemática de uma lei física que essa grandeza deve obedecer.

Em muitos casos a função u é definida em um intervalo fechado finito $[a, b]$ da reta real, $b > a$, e é obrigada a satisfazer certas condições nos extremos desse intervalo. Tais condições são chamadas de *condições de contorno*.

Condições de contorno são ditadas ou por leis físicas ou por restrições físicas ou geométricas que devem ser impostas nos pontos a e b à grandeza representada por u. O caso mais típico é aquele no qual impõe-se que a função u ou sua primeira derivada (ou combinações lineares de ambas) assumem certos valores fixos nos pontos a e b.

Há também muitas situações nas quais a função u é definida em intervalos semi-infinitos, como $[0, \infty)$ ou infinitos, como $(-\infty, \infty)$, e as condições impostas podem exigir, por exemplo, que u se anule no infinito, que seja limitada ou que seja de quadrado integrável. No presente capítulo não trataremos de tais casos.

• Condições de contorno lineares e homogêneas

Há muitos tipos distintos de condições de contorno. De particular importância são as condições de contorno *lineares* que, no caso de equações de segunda ordem, têm a seguinte estrutura. A função u está definida em um intervalo finito $[a, b]$ e para certas constantes reais dadas α_1, α_2, β_1, β_2, φ_1 e φ_2 tais que $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$, $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$ a função u deve satisfazer o par de condições

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \varphi_1, \tag{18.2}$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \varphi_2 . \tag{18.3}$$

Condições de contorno desse tipo são ditas *lineares* devido à dependência linear em u do lado esquerdo de (18.2) e (18.3).

Estaremos interessados particularmente em condições do seguinte tipo: suporemos que u está definida em um intervalo finito $[a, b]$ e que para certas constantes reais α_1, α_2, β_1 e β_2 tais que $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$, $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$ a função u satisfaça o par de condições

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 , \tag{18.4}$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 . \tag{18.5}$$

Condições de contorno lineares desse tipo são ditas *homogêneas* devido ao lado direito de (18.4) e (18.5) ser zero.

Condições de contorno são restrições de crucial importância na resolução de equações diferenciais. Para verificar essa importância, faça os seguintes exercícios simples:

E. 18.1 *Exercício*. Verifique que o problema de determinar uma função u tal que $u'' = 0$ tal que $u'(0) = 0$ e $u'(1) = 1$ não tem soluções. ✠

E. 18.2 *Exercício*. Verifique que o problema de determinar uma função u tal que $u'' = 0$ tal que $u'(0) = 0$ e $u'(1) = 0$ tem infinitas soluções. ✠

E. 18.3 *Exercício*. Verifique que o problema de determinar uma função u tal que $u'' + u = 0$ com $u(0) = \varphi_1$ e $u(\pi) = \varphi_2$ tem infinitas soluções se $\varphi_1 = -\varphi_2$ e não tem solução se $\varphi_1 \neq -\varphi_2$. ✠

• Um teorema sobre existência e unicidade de soluções

Os exemplos dos exercícios acima mostram que a questão da existência e unicidade de soluções em problemas que envolvem condições de contorno não é uma questão trivial. É importante nesse contexto mencionar um teorema, o Teorema 18.1, abaixo, o qual expressa certas condições necessárias e suficientes para garantir a existência e a unicidade de soluções. Antes de enunciá-lo precisamos do seguinte fato.

Lema 18.1 *Seja a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem $u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0$, onde a_0 e a_1 são funções reais e contínuas definidas num intervalo finito e fechado $[a, b]$. Sejam u_1, u_2 duas soluções linearmente independentes dessa equação definidas em $[a, b]$ e sejam v_1 e v_2 duas outras soluções linearmente independentes da* *mesma equação no mesmo intervalo. Sejam α_1, α_2, β_1, β_2 constantes tais que $(\alpha_1,\ \alpha_2) \neq (0,\ 0)$, $(\beta_1,\ \beta_2) \neq (0,\ 0)$. Então,*

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_1 v_1(a) + \alpha_2 v_1'(a) & \alpha_1 v_2(a) + \alpha_2 v_2'(a) \\ \beta_1 v_1(b) + \beta_2 v_1'(b) & \beta_1 v_2(b) + \beta_2 v_2'(b) \end{pmatrix} \neq 0 \text{ se e somente se } \det\begin{pmatrix} \alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) & \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u_2'(a) \\ \beta_1 u_1(b) + \beta_2 u_1'(b) & \beta_1 u_2(b) + \beta_2 u_2'(b) \end{pmatrix} \neq 0\,. \tag{18.6}$$

□

Prova. O espaço de soluções linearmente independentes de uma equação homogênea de segunda ordem é bidimensional[3]. Assim, se u_1 e u_2 são duas soluções linearmente independentes e v_1 e v_2 também, então para todo $x \in [a,\ b]$ vale

$$\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix},$$

onde γ_{ij} são constantes com $\det\left(\begin{smallmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{smallmatrix}\right) \neq 0$. Agora, como facilmente se constata,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 v_1(a) + \alpha_2 v_1'(a) & \beta_1 v_1(b) + \beta_2 v_1'(b) \\ \alpha_1 v_2(a) + \alpha_2 v_2'(a) & \beta_1 v_2(b) + \beta_2 v_2'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) & \beta_1 u_1(b) + \beta_2 u_1'(b) \\ \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u_2'(a) & \beta_1 u_2(b) + \beta_2 u_2'(b) \end{pmatrix}$$

e, portanto, (18.6) segue do fato bem conhecido[4] que o determinante de uma matriz é igual ao da sua transposta. ■

Teorema 18.1 *Seja a equação diferencial linear de segunda ordem*

$$u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u \;=\; g(x)\,, \tag{18.7}$$

onde g, a_0 e a_1 são funções reais e contínuas definidas num intervalo finito e fechado $[a,\ b]$. O problema de encontrar soluções dessa equação que satisfaçam condições de contorno do tipo

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) \;=\; \varphi_1 \tag{18.8}$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) \;=\; \varphi_2 \tag{18.9}$$

para certas constantes reais α_1, α_2, β_1, β_2, φ_1 e φ_2 tais que $(\alpha_1,\ \alpha_2) \neq (0,\ 0)$, $(\beta_1,\ \beta_2) \neq (0,\ 0)$ tem solução única se e somente se existir ao menos um par de soluções independentes u_1 e u_2 da equação homogênea

$$u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u \;=\; 0 \tag{18.10}$$

tais que

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) & \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u_2'(a) \\ \beta_1 u_1(b) + \beta_2 u_1'(b) & \beta_1 u_2(b) + \beta_2 u_2'(b) \end{pmatrix} \neq 0\,. \tag{18.11}$$

□

Pela Lema 18.1, basta que (18.11) seja satisfeita por um par de soluções independentes de (18.10), que será satisfeita por todo outro par de soluções independentes da mesma equação.

A demonstração do Teorema 18.1 é apresentada no Apêndice 18.A, página 866.

[3]Para estudante para o qual isso não é obvio, o enunciado preciso é feito na Proposição 13.1, página 545.
[4]Vide Teorema 9.1, página 360.

Exemplo 18.1 No Exercício E. 18.3, página 832, verificamos que o problema de determinar uma função u tal que $u'' + u = 0$ com $u(0) = \varphi_1$ e $u(\pi) = \varphi_2$ ou tem infinitas soluções (caso $\varphi_1 = -\varphi_2$) ou não tem nenhuma solução (caso $\varphi_1 \neq -\varphi_2$). Vamos analisar isso sob a luz do Teorema 18.1. Aqui temos $[a, b] = [0, \pi]$. Com as condições $u(0) = \varphi_1$ e $u(\pi) = \varphi_2$ tem-se $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ e $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. Duas soluções independentes da equação homogênea $u'' + u = 0$ são $u_1(x) = \cos(x)$ e $u_2(x) = \operatorname{sen}(x)$. Assim,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) & \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u_2'(a) \\ \beta_1 u_1(b) + \beta_2 u_1'(b) & \beta_1 u_2(b) + \beta_2 u_2'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(0) & \operatorname{sen}(0) \\ \cos(\pi) & \operatorname{sen}(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

cujo determinante é nulo. Logo, a condição (18.11) (necessária e suficiente para a existência e para a unicidade de solução) é violada e, portanto, ou a solução não existe ou não é única, como constatado no referido Exercício. ⌑

• Relacionando problemas com condições de contorno não-homogêneas e homogêneas

Adiante, consideraremos apenas problemas com condições de contorno lineares e homogêneas. Por que não consideraremos também as condições de contorno não-homogêneas? A razão é que, como veremos, podemos sempre obter soluções de problemas com condições de contorno não-homogêneas a partir das soluções de problemas com condições de contorno homogêneas. A argumentação é bem simples. Seja w uma função em princípio arbitrária (duas vezes diferenciável) mas que satisfaça

$$\alpha_1 w(a) + \alpha_2 w'(a) = \varphi_1 , \tag{18.12}$$

$$\beta_1 w(b) + \beta_2 w'(b) = \varphi_2 . \tag{18.13}$$

Determinar uma função tal w satisfazendo essas condições sempre é possível (supondo $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ e $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$). Isso pode ser feito, por exemplo, procurando w na forma de um polinômio de grau suficientemente alto (pelo menos 3, no caso geral) e procurando ajustar os coeficientes desse polinômio de modo que (18.12)-(18.13) sejam satisfeitas.

Para uma tal função w, vamos definir uma função $h(x)$ da seguinte forma:

$$h(x) := w''(x) + a_1(x)w'(x) + a_0(x)w(x) .$$

Seja v solução da equação

$$v'' + a_1(x)v' + a_0(x)v = g(x) - h(x) , \tag{18.14}$$

com as condições de contorno homogêneas

$$\alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) = 0 , \tag{18.15}$$

$$\beta_1 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0 . \tag{18.16}$$

Então, é fácil verificar que a função $u(x) = v(x) + w(x)$ satisfaz

$$u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = g(x)$$

e

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \varphi_1 , \tag{18.17}$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \varphi_2 . \tag{18.18}$$

Isso diz-nos, em resumo, que para resolver problemas com condições de contorno não-homogêneas é suficiente saber determinar uma função como w acima e saber determinar a solução de uma equação diferencial linear com condições de contorno homogêneas. Por essa razão, daqui por diante só consideraremos problemas com condições de contorno homogêneas.

• Reescrevendo a equação diferencial na forma de Liouville

Uma observação importante que devemos fazer sobre equações como (18.1) é que, para muitos casos, as mesmas sempre podem ser reescritas da seguinte forma equivalente, conhecida como *forma de Liouville*:

$$\big(p(x)u'\big)' + q(x)u = f(x) , \tag{18.19}$$

onde $p(x) := \exp\left(\int_a^x a_1(x')\,dx'\right)$, $q(x) := p(x)a_0(x)$ e $f(x) := p(x)g(x)$. Doravante estaremos usando esta forma da equação mais frequentemente que a forma anterior.

E. 18.4 *Exercício*. Verifique a equivalência das duas formas da equação multiplicando (18.1) por $p(x)$ e usando o fato que, pela definição, $p'(x) = a_1(x)p(x)$. ✠

• Condições de contorno homogêneas caracterizam um espaço vetorial

Um fato importante sobre problemas com condições de contorno homogêneas e que será implicitamente utilizado no que seguirá é o seguinte:

Sejam fixadas as constantes $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1$ e β_2. Se g_1 e g_2 são duas funções duas vezes diferenciáveis definidas no intervalo $[a,\ b]$ tais que ambas satisfazem as condições de contorno homogêneas (18.4)-(18.5) então qualquer combinação linear de ambas $\gamma_1 g_1(x) + \gamma_2 g_2(x)$ é também uma função duas vezes diferenciável no intervalo $[a,\ b]$ que satisfaz as mesmas condições de contorno homogêneas (18.4)-(18.5).

E. 18.5 *Exercício*. Verifique essa afirmação. ✠

Em outras palavras, o conjunto de todas as funções duas vezes diferenciáveis definidas no intervalo $[a,\ b]$ que satisfazem as condições de contorno homogêneas (18.4)-(18.5) é um espaço vetorial (real ou complexo, dependente do caso). Esse espaço será denotado aqui por $\mathcal{V}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2)$, ou simplesmente por $\mathcal{V}$, quando não houver confusão.

A seguinte proposição, válida para funções do espaço vetorial $\mathcal{V}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2)$, será frequentemente usada no que segue.

Proposição 18.1 *Se f e g são duas funções quaisquer de $\mathcal{V}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2)$, então valem as relações*

$$f(a)g'(a) - f'(a)g(a) \;=\; 0 \qquad e \qquad f(b)g'(b) - f'(b)g(b) \;=\; 0\,. \tag{18.20}$$

□

Prova. Como f e g são elementos de $\mathcal{V}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2)$, valem

$$\begin{pmatrix} f(a) & f'(a) \\ g(a) & g'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} f(b) & f'(b) \\ g(b) & g'(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Como $\left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, as matrizes $\left(\begin{smallmatrix} f(a) & f'(a) \\ g(a) & g'(a) \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} f(b) & f'(b) \\ g(b) & g'(b) \end{smallmatrix}\right)$ não podem ser inversíveis e, portanto, têm determinante nulo, ou seja, valem as relações (18.20). ■

• Condições de contorno não-homogêneas caracterizam um espaço convexo

Sejam fixadas as constantes $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \varphi_1$ e φ_2. Se g_1 e g_2 são duas funções duas vezes diferenciáveis definidas no intervalo $[a,\ b]$ tais que ambas satisfazem as condições de contorno não-homogêneas (18.2)-(18.3) então qualquer combinação linear convexa de ambas $\gamma g_1(x) + (1-\gamma)g_2(x)$, $0 \leq \gamma \leq 1$, é também uma função duas vezes diferenciável no intervalo $[a,\ b]$ que satisfaz as mesmas condições de contorno não-homogêneas (18.2)-(18.3).

E. 18.6 *Exercício*. Verifique essa afirmação. ✠

Em outras palavras, o conjunto de todas as funções duas vezes diferenciáveis definidas no intervalo $[a,\ b]$ que satisfazem as condições de contorno não-homogêneas (18.2)-(18.3) é um espaço convexo.

• Operadores de Liouville

Como iremos daqui por diante tratar de equações diferenciais da forma $(p(x)u')' + q(x)u = f(x)$, convém introduzir uma notação simplificadora:

$$Lu \;:=\; \big(p(x)u'\big)' + q(x)u\,.$$

L pode ser entendido como o *operador diferencial linear*

$$L := \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x) .$$

L é linear pois claramente tem-se $L(\alpha u + \beta v) = \alpha L u + \beta L v$ para quaisquer constantes α e β e quaisquer funções (duas vezes diferenciáveis) u e v.

Adiante, usaremos também o operador diferencial parcial

$$\mathcal{L}_x := \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + q(x) .$$

Os operadores L e $\mathcal{L}_x$ são por vezes denominados *operadores de Liouville*.

Para uso futuro, observemos que se $F(x,\ y)$ é uma função duas vezes diferenciável, então vale

$$L\left(\int_a^b F(x,\ y)\, dy\right) = \int_a^b \mathcal{L}_x F(x,\ y)\, dy . \tag{18.21}$$

*

Após estas observações podemos passar a tratar nosso problema de forma mais sistemática.

18.2 O Problema de Sturm

• **Definição do problema**

Entende-se como o *Problema de Sturm* o problema de determinar as soluções da equação diferencial

$$(p(x)u')' + q(x)u = f(x) , \qquad \text{ou seja} \qquad Lu = f , \tag{18.22}$$

para u definida no intervalo fechado finito $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, com as condições de contorno lineares e homogêneas

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 , \tag{18.23}$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 , \tag{18.24}$$

onde o seguinte estará sendo suposto:

- As funções p, q e f são reais e contínuas em $[a,\ b]$.
- A função p é diferenciável em $[a,\ b]$ e estritamente positiva: $p(x) > 0$, $x \in [a,\ b]$.
- As constantes α_1, α_2, β_1 e β_2 são reais e tais que $(\alpha_1,\ \alpha_2) \neq (0,\ 0)$ e $(\beta_1,\ \beta_2) \neq (0,\ 0)$.

As condições acima são essenciais mas não delimitam ainda totalmente o Problema de Sturm, pois é preciso impor restrições que garantam a existência e unicidade de soluções do mesmo. Como aprendemos do Teorema 18.1, devemos impor ainda que

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) & \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u_2'(a) \\ \beta_1 u_1(b) + \beta_2 u_1'(b) & \beta_1 u_2(b) + \beta_2 u_2'(b) \end{pmatrix} \neq 0 , \tag{18.25}$$

onde u_1 e u_2 são duas soluções independentes quaisquer da equação homogênea $Lu = 0$.

*

Uma vez delineado o quadro onde iremos trabalhar, passemos ao importante conceito da função de Green que nos levará à solução do problema de Sturm.

18.2.1 Soluções Fundamentais e Funções de Green

Comecemos com algumas definições geométricas que usaremos. Denotaremos por Q o quadrado fechado do plano $\mathbb{R}^2$ definido por

$$Q := [a,\ b] \times [a,\ b] = \Big\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \leq x \leq b \text{ e } a \leq y \leq b\Big\} .$$

O quadrado aberto Q^0 é definido por

$$Q^0 := (a,\ b) \times (a,\ b) = \Big\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ a < x < b \text{ e } a < y < b\Big\} .$$

O conjunto dos pontos de Q (de Q^0) para os quais $x = y$ é dito ser a diagonal principal de Q (de Q^0). Denotaremos por R o conjunto formado por Q^0 sem a sua diagonal principal. Como é fácil ver

$$R := \Big\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ a < x < y < b \text{ ou } a < y < x < b\Big\} .$$

• **Soluções fundamentais e funções de Green**

Uma função de duas variáveis $H(x,\ y)$ com $x,\ y \in [a,\ b]$ é dita ser uma *solução fundamental* do problema de Sturm delineado acima se satisfizer as seguintes condições:

1. H é contínua em Q e duas vezes diferenciável em R, mas suas derivadas parciais não são necessariemente contínuas na diagonal principal de Q^0.
2. $\mathcal{L}_x H(x,\ y) = 0$ para todos $(x,\ y) \in R$.
3. Para toda função $g : [a,\ b] \to \mathbb{R}$, contínua, a função $\int_a^b H(x,\ y)g(y)\, dy$ satisfaz
$$L\left(\int_a^b H(x,\ y)g(y)\, dy\right) = g(x) \tag{18.26}$$
para $x \in [a,\ b]$.

O item 2, acima, diz-nos que uma solução fundamental é o que se denomina uma *solução fraca* da equação $\mathcal{L}_x H = 0$ em Q, ou seja, uma solução dessa equação, não em todo Q mas em um conjunto cujo fecho é Q.

Uma função de duas variáveis $G(x,\ y)$ com $x,\ y \in [a,\ b]$ é dita ser uma *função de Green*[5] do problema de Sturm que delineamos acima se G for uma solução fundamental do problema de Sturm e se a função

$$u(x) := \int_a^b G(x,\ y)f(y)\, dy \tag{18.27}$$

satisfizer as condições de contorno (18.23)-(18.24).

As definições acima dizem que se G for uma função de Green do problema de Sturm em questão, então (18.27) é a solução desse problema, pois satisfaz a equação $(Lu)(x) = f(x)$ para $x \in [a,\ b]$ e satisfaz as condições de contorno (18.23)-(18.24).

Logo adiante mostraremos como construir a função de Green de um problema de Sturm e, consequentemente, como obter sua solução por (18.27). Antes, façamos alguns comentários sobre a noção de solução fundamental.

• **Soluções fundamentais e a distribuição delta de Dirac. O significado da função de Green**

Uma solução fundamental H de um problema de Sturm deve ser tal que $L\left(\int_a^b H(x,\ y)g(y)\, dy\right) = g(x)$ para toda g contínua. Isso parece paradoxal, pois se fosse verdade que

$$L\left(\int_a^b H(x,\ y)g(y)\, dy\right) = \int_a^b \mathcal{L}_x H(x,\ y)g(y)\, dy , \tag{18.28}$$

[5] George Green (1793–1841).

como (18.21) sugere, o lado direito deveria ser nulo, pois supomos também que $\mathcal{L}_x H(x,\ y) = 0$ para $x \neq y$. O ponto é que a igualdade (18.28) não é verdadeira como está apresentada, pois dissemos que as derivadas parciais de H não são contínuas na diagonal $x = y$ e, portanto, $\mathcal{L}_x H$ não está definida nessa diagonal, pois envolve derivadas parciais segundas de H.

O que a definição de solução fundamental subentende, porém, é que vale

$$\mathcal{L}_x H(x,\ y) \ = \ \delta(x-y) \tag{18.29}$$

em todo Q^0, onde δ é a distribuição delta de Dirac[6]. Com esse entendimento, teremos então que

$$L\left(\int_a^b H(x,\ y)g(y)\,dy\right) \ = \ \int_a^b \mathcal{L}_x H(x,\ y)g(y)\,dy \ = \ \int_a^b \delta(x-y)g(y)\,dy \ = \ g(x)\ , \tag{18.30}$$

em concordância, portanto, com (18.26).

Assim, podemos resumir nossas definições dizendo que uma solução fundamental do problema de Sturm é uma função que satisfaz (18.29) e que uma função de Green do problema de Sturm é uma função $G(x,\ y)$ que satisfaz (18.29) e as condições de contorno (18.23)-(18.24) na variável x.

A relevância da função de Green de um problema de Sturm é que a mesma depende do operador $\mathcal{L}_x$ (e, portanto, das funções p e q) e das condições de contorno escolhidas, mas não depende da função f. Como se percebe contemplando (18.27), $G(x,\ y)$ define o quão grande é a influência que o valor de f no ponto y exerce sobre a solução u no ponto x. Dessa forma, G conteria em si informações fundamentais sobre como um sistema físico descrito por uma função u, e regido pela equação $Lu = f$, sob as condições de contorno prescritas, reage à influência de um estímulo externo definido por uma função f.

Um desenvolvimento mais amplo das noções de solução fundamental e função de Green em um contexto mais geral que o presente e tendo como ponto de partida a relação (18.29) é apresentada na Seção 39.4, página 1984. Vide também Seção 21.11, página 988, para um tratamento mais prático e informal. Para nosso interesse presente a questão que agora se impõe é: possuem problemas de Sturm funções de Green? A resposta é positiva, como veremos no que segue.

18.2.2 A Função de Green. Resolvendo o Problema de Sturm

Para construirmos a função de Green de um problema de Sturm faremos uso do seguinte resultado importante, o qual é uma consequência direta da condição (18.25):

Proposição 18.2 *Com as definições e hipóteses acima, existem funções v_1 e v_2, independentes, definidas no intervalo $[a,\ b]$, tais que*

$$Lv_1 \ = \ 0, \qquad Lv_2 \ = \ 0$$

e tais que

$$\alpha_1 v_1(a) + \alpha_2 v_1'(a) \ = \ 0 \tag{18.31}$$

e

$$\beta_1 v_2(b) + \beta_2 v_2'(b) \ = \ 0\ . \tag{18.32}$$

Essas funções satisfazem

$$\det\begin{pmatrix} v_1(x) & v_1'(x) \\ v_2(x) & v_2'(x)\end{pmatrix} \neq \ 0\ , \qquad \textit{ou seja} \qquad v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x) \ \neq \ 0\ , \tag{18.33}$$

para todo $x \in [a,\ b]$. Além disso, vale também que $\alpha_1 v_2(a) + \alpha_2 v_2'(a) \neq 0$ e que $\beta_1 v_1(b) + \beta_2 v_1'(b) \neq 0$. □

[6]Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984).

A demonstração dessa proposição encontra-se no Apêndice 18.B, página 867.

• **Construção da função de Green**

Além da equação

$$(p(x)u')' + q(x)u \ = \ f(x) \ , \tag{18.34}$$

consideremos também a equação diferencial homogênea

$$(p(x)u')' + q(x)u \ = \ 0 \ . \tag{18.35}$$

Pela Proposição 18.2, existem soluções independentes v_1 e v_2 da equação homogênea, tais que v_1 e v_2 satisfazem as seguintes condições de contorno:

$$\alpha_1 v_1(a) + \alpha_2 v_1'(a) \ = \ 0 \ , \tag{18.36}$$

$$\beta_1 v_2(b) + \beta_2 v_2'(b) \ = \ 0 \ . \tag{18.37}$$

Note-se que a (18.36) é uma restrição à função v_1 no ponto a enquanto que a (18.37) é uma restrição à função v_2 no ponto b. Com o uso dessas funções vamos construir uma solução do problema de Sturm.

Afirmamos que a função de Green do problema de Sturm considerado é a função de duas variáveis $G(x,\, y)$, com $x \in [a,\, b]$ e $y \in [a,\, b]$, definida da seguinte forma:

$$G(x,\, y) \ := \ \begin{cases} \dfrac{v_1(x)v_2(y)}{p(a)W(a)}, & \text{para } a \leq x \leq y \leq b \ , \\[2ex] \dfrac{v_1(y)v_2(x)}{p(a)W(a)}, & \text{para } a \leq y \leq x \leq b \ , \end{cases} \tag{18.38}$$

onde $W(x)$ é o chamado *determinante Wronskiano*[7], ou *função Wronskiana*, definido[8], neste caso, por

$$W(x) \ := \ \det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_1'(x) \\ v_2(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \ = \ v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x) \ . \tag{18.39}$$

Note-se que, por (18.33), $W(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,\, b]$.

Que (18.38) de fato satisfaz as condições definidoras da função de Green será provado no que segue. Antes de prosseguirmos, porém, vamos demonstrar um fato simples sobre a função Wronskiana, a saber vamos mostrar que a função $p(x)W(x)$ é constante no intervalo $[a,\, b]$. Isso significa provar que $(p(x)W(x))' = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} (pW)' = p'W + pW' \ &= \ p'\left(v_1v_2' - v_1'v_2\right) + p\left(v_1v_2' - v_1'v_2\right)' \\ &= \ p'\left(v_1v_2' - v_1'v_2\right) + p\left(v_1'v_2' + v_1v_2'' - v_1''v_2 - v_1'v_2'\right) \\ &= \ p'\left(v_1v_2' - v_1'v_2\right) + p\left(v_1v_2'' - v_1''v_2\right) \\ &= \ v_1(p'v_2' + pv_2'') - v_2(p'v_1' + pv_1'') \\ &= \ v_1(pv_2')' - v_2(pv_1')' \\ &= \ -v_1qv_2 + v_2qv_1 \\ &= \ 0 \ , \end{aligned} \tag{18.40}$$

[7] Conde Josef Hoëné de Wronski (1778–1853).

[8] No Apêndice 18.C, página 868, mostramos a relação entre essa definição de determinante Wronskiano e aquela introduzida no Capítulo 13, página 535 (vide página 544).

onde, na penúltima igualdade, usamos o fato que v_1 e v_2 satisfazem a equação homogênea. Assim, provamos que, para todo $x \in [a, b]$, tem-se $p(x)W(x) = p(a)W(a) = p(b)W(b)$.

Dado que as funções v_1 e v_2 são contínuas, é fácil ver que G é igualmente contínua no quadrado Q onde está definida. Entretanto, as derivadas parciais G_x e G_y de G não são contínuas em Q, apresentando uma descontinuidade ao longo da diagonal principal de Q (os pontos $(x, y) \in Q$ com $x = y$). Como esse fato terá consequências adiante, vamos nos dedicar a estudar essa descontinuidade com mais detalhe.

Dado que v_1 e v_2 são diferenciáveis, é claro que

$$G_x(x, y) := \begin{cases} \dfrac{v_1'(x)v_2(y)}{p(a)W(a)}, & \text{para } a \leq x < y \leq b\,, \\[2ex] \dfrac{v_1(y)v_2'(x)}{p(a)W(a)}, & \text{para } a \leq y < x \leq b\,. \end{cases} \tag{18.41}$$

Note que, nesta última expressão, excluímos os pontos para os quais $x = y$, onde G_x não está definida. Entretanto, apesar de G_x não estar definida nesses pontos, os limites $\lim\limits_{\epsilon\to 0} G_x(x+\epsilon, x)$ e $\lim\limits_{\epsilon\to 0} G_x(x-\epsilon, x)$ existem mas são, porém, distintos, o mesmo se dando com os limites $\lim\limits_{\epsilon\to 0} G_x(x, x+\epsilon)$ e $\lim\limits_{\epsilon\to 0} G_x(x, x-\epsilon)$ (aqui $\epsilon > 0$). Dado que, para qualquer $\epsilon > 0$, tem-se $x+\epsilon > x$ e $x - \epsilon < x$, segue que (abaixo, todos os limites são tomados com $\epsilon > 0$)

$$\lim_{\epsilon\to 0} G_x(x+\epsilon, x) = \frac{v_1(x)v_2'(x)}{p(a)W(a)} \tag{18.42}$$

e que

$$\lim_{\epsilon\to 0} G_x(x-\epsilon, x) = \frac{v_1'(x)v_2(x)}{p(a)W(a)}\,. \tag{18.43}$$

Analogamente segue que

$$\lim_{\epsilon\to 0} G_x(x, x-\epsilon) = \frac{v_1(x)v_2'(x)}{p(a)W(a)} \tag{18.44}$$

e que

$$\lim_{\epsilon\to 0} G_x(x, x+\epsilon) = \frac{v_1'(x)v_2(x)}{p(a)W(a)}\,. \tag{18.45}$$

Portanto, segue que

$$\lim_{\epsilon\to 0} G_x(x+\epsilon, x) - \lim_{\epsilon\to 0} G_x(x-\epsilon, x) = \frac{v_1(x)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(x)}{p(a)W(a)} = \frac{W(x)}{p(a)W(a)} = \frac{1}{p(x)}\,, \tag{18.46}$$

pois, como vimos, para qualquer $x \in [a, b]$ tem-se $p(a)W(a) = p(x)W(x)$. De maneira idêntica, segue que

$$\lim_{\epsilon\to 0} G_x(x, x-\epsilon) - \lim_{\epsilon\to 0} G_x(x, x+\epsilon) = \frac{1}{p(x)}\,. \tag{18.47}$$

As relações (18.46) e (18.47) mostram-nos que, de fato, G_x é descontínua na diagonal de Q e nos dizem também quão grande é o salto dado pela função G_x quando se cruza a diagonal de Q no ponto (x, x).

Na região $a < x < y < b$ teremos, segundo a definição de G,

$$\mathfrak{L}_x G(x, y) = \mathfrak{L}_x \left(\frac{v_1(x)\, v_2(y)}{p(a)W(a)} \right) = \frac{(Lv_1)(x)\, v_2(y)}{p(a)W(a)} = 0\,,$$

pois $Lv_1 = 0$ e na região $a < y < x < b$ teremos

$$\mathfrak{L}_x G(x, y) = \mathfrak{L}_x \left(\frac{v_1(y)\, v_2(x)}{p(a)W(a)} \right) = \frac{v_1(y)\, (Lv_2)(x)}{p(a)W(a)} = 0\,,$$

também pois $Lv_2 = 0$. Para provar que G é uma solução fundamental resta estudarmos o que ocorre quando $x = y$ e estabelecermos que $\mathfrak{L}_x G(x, y) = \delta(x - y)$. Isso será obtido provando que a função $u(x)$ definida por

$$u(x) = \int_a^b G(x, y)\, f(y)\, dy \tag{18.48}$$

satisfaz a equação não-homogênea (18.22). Posteriormente mostraremos que (18.48) satisfaz as condições de contorno (18.23)-(18.24). Isso diz-nos que G definida em (18.38) é a função de Green do problema de Sturm e que (18.48) é a solução procurada do mesmo. Essas afirmações são conhecidas como *Teorema de Green* e serão provadas na Seção 18.2.3.

Observe-se que (18.48) pode ser escrita como

$$u(x) \;=\; \frac{v_2(x)}{p(a)W(a)} \int_a^x v_1(y)\, f(y)\, dy + \frac{v_1(x)}{p(a)W(a)} \int_x^b v_2(y)\, f(y)\, dy \;.$$

Finalizamos comentando que a função de Green de um problema de Sturm também pode ser escrita em termos de uma expansão envolvendo auto-valores e auto-funções de um problema de Sturm-Liouville. Isso será a apresentado na expressão (18.102), página 855. Esse última expressão é ainda mais relavante que (18.38), pois é válida em situações mais gerais, por exemplo, em problemas em mais de uma dimensão.

Um tratamento mais detalhado das funções de Green é apresentado no Capítulo 39, página 1900, e na Seção 21.11, página 988.

18.2.3 O Teorema de Green

Vamos aqui demonstrar o Teorema de Green mencionado acima. Precisamos para tal calcular

$$(pu')' + qu \;=\; pu'' + p'u' + qu$$

para $u(x)$ dada por (18.48) e demonstrar que isso é igual a $f(x)$. Dado que G tem derivadas parciais descontínuas, é conveniente escrever

$$u(x) \;=\; \int_a^x G(x,\ y)\, f(y)\, dy + \int_x^b G(x,\ y)\, f(y)\, dy \;. \tag{18.49}$$

Em cada um dos pedaços em que quebramos a integral acima tem-se que G_x é contínua. Daí, segue que

$$\begin{aligned} u'(x) \;&=\; G(x,\ x)f(x) + \int_a^x G_x(x,\ y)\, f(y)\, dy - G(x,\ x)f(x) + \int_x^b G_x(x,\ y)\, f(y)\, dy \\ &=\; \int_a^x G_x(x,\ y)\, f(y)\, dy + \int_x^b G_x(x,\ y)\, f(y)\, dy \;. \end{aligned} \tag{18.50}$$

E. 18.7 *Exercício*. Justifique as expressões acima. ✠

De forma inteiramente análoga tem-se que

$$\begin{aligned} u''(x) \;&=\; \lim_{\epsilon\to 0} G_x(x,\ x-\epsilon)f(x) + \int_a^x G_{xx}(x,\ y)\, f(y)\, dy - \lim_{\epsilon\to 0} G_x(x,\ x+\epsilon)f(x) + \int_x^b G_{xx}(x,\ y)\, f(y)\, dy \\ &=\; \frac{f(x)}{p(x)} + \int_a^x G_{xx}(x,\ y)\, f(y)\, dy + \int_x^b G_{xx}(x,\ y)\, f(y)\, dy \;, \end{aligned} \tag{18.51}$$

onde, na última igualdade, usamos (18.47).

E. 18.8 *Exercício*. Justifique as expressões acima. ✠

Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} p(x)u'' + p'(x)u' + q(x)u \;&=\; \frac{p(x)}{p(x)} f(x) + \int_a^x \Big[p(x)G_{xx}(x,\ y) + p'(x)G_x(x,\ y) + q(x)G(x,\ y)\Big]\, f(y)\, dy \\ &\quad + \int_x^b \Big[p(x)G_{xx}(x,\ y) + p'(x)G_x(x,\ y) + q(x)G(x,\ y)\Big]\, f(y)\, dy \;. \end{aligned} \tag{18.52}$$

Entretanto, temos que

$$p(x)G_{xx}(x,\ y) + p'(x)G_x(x,\ y) + q(x)G(x,\ y) \ = \ 0 \ , \tag{18.53}$$

e isto vale tanto para $y = [a,\ x)$ quanto para $y = (x,\ b]$. Para ver isso basta notar, por exemplo, que para $y = [a,\ x)$ tem-se que

$$p(x)G_{xx}(x,\ y) + p'(x)G_x(x,\ y) + q(x)G(x,\ y) \ = \ \frac{v_1(y)}{p(a)W(a)} \left[p(x)v_2''(x) + p'(x)v_2'(x) + q(x)v_2(x)\right] \ = \ 0 \ ,$$

pois, por hipótese, v_2 é solução da equação homogênea $p(x)v_2''(x) + p'(x)v_2'(x) + q(x)v_2(x) = 0$. O caso $y = (x,\ b]$ é análogo.

E. 18.9 *Exercício*. Verifique! ✠

Assim, retomando a equação (18.52), vemos que

$$p(x)u'' + p'(x)u' + q(x)u \ = \ f(x) \ . \tag{18.54}$$

Está, portanto, demonstrado que a função u dada por (18.48) é solução da equação diferencial não-homogênea. Resta provar que essa função u satisfaz as condições de contorno (18.4)-(18.5). Deixamos a importante verificação desse último fato como exercício.

E. 18.10 *Exercício*. Mostre que (18.48) satisfaz as condições de contorno (18.4)–(18.5). ✠

E. 18.11 *Exercício*. Considere o problema de Sturm definido pela equação diferencial $u''(x) = f(x)$ no intervalo $[0,\ 1]$ com as condições de contorno $u(0) = 0$ e $u(1) = 0$. Mostre, usando (18.38), página 839, que a função de Green é dada por

$$G(x,\ y) \ = \ \begin{cases} x(y-1) \ , & \text{para } 0 \leq x \leq y \leq 1 \ , \\ (x-1)y \ , & \text{para } 0 \leq y \leq x \leq 1 \ , \end{cases} \qquad \text{ou seja,} \qquad G(x,\ y) \ = \ \frac{1}{2}\Big(|x-y| + 2xy - x - y\Big) \ . \tag{18.55}$$

Constate que a função G, acima, satisfaz as condições de contorno requeridas (como função de x). De (18.55) obtém-se

$$G_x(x,\ y) \ \equiv \ \partial_x G(x,\ y) \ = \ \begin{cases} y-1 \ , & \text{para } 0 \leq x < y \leq 1 \ , \\ y \ , & \text{para } 0 \leq y < x \leq 1 \ . \end{cases} \tag{18.56}$$

Constate de (18.56) que $\lim\limits_{\epsilon \to 0} G_x(x+\epsilon,\ x) - \lim\limits_{\epsilon \to 0} G_x(x-\epsilon,\ x) = 1$ (e lembre-se que no problema tratado $p(x) \equiv 1$). Constate de (18.56) que $G_x(x,\ y) = y - 1 + H(x-y)$ e obtenha disso que $\partial_x^2 G(x,\ y) = \delta(x-y)$. Aqui, H é a função de Heaviside, definida em (13.36), página 555, ou em (39.170), página 1954.

Obtenha explicitamente a solução no caso em que $f(x) = e^x$ calculando explicitamente

$$u(x) \ = \ \int_0^1 G(x,\ y)f(y)\, dy \ = \ (x-1)\int_0^x y\, e^y\, dy + x\int_x^1 (y-1)e^y\, dy \ .$$

Constate que expressão assim obtida realmente satisfaz a equação $u''(x) = f(x)$ e as condições $u(0) = 0$ e $u(1) = 0$. ✠

• O problema de Sturm com condições de contorno não-homogêneas

Com as observações da página 834 podemos encontrar também soluções de problemas de Sturm $(Lu)(x) = f(x)$ com u satisfazendo condições de contorno não-homogêneas como (18.2)–(18.3).

Seja w uma função duas vezes diferenciável satisfazendo também (18.12)–(18.13). Defina-se

$$h(x) \ := \ (Lw)(x) \ .$$

e seja v a solução da equação

$$(Lv)(x) \ = \ f(x) - h(x) \ , \tag{18.57}$$

com as condições de contorno homogêneas

$$\alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) \;=\; 0\,, \tag{18.58}$$

$$\beta_1 v(b) + \beta_2 v'(b) \;=\; 0\,. \tag{18.59}$$

Então, $u = v + w$ satisfaz $Lu = f$ e as condições não-homogêneas (18.2)-(18.3). Agora, pela solução do problema de Sturm homogêneo, sabemos que

$$v(x) \;=\; \int_a^b G(x,\ y)(f(y) - h(y))\,dy\,,$$

onde G é montada como antes (vide (18.38)) a partir de soluções v_1 e v_2 da equação homogênea $Lv_{1,\,2} = 0$, com v_1 e v_2 satisfazendo (18.36) e (18.37), respectivamente. Logo, a solução procurada é

$$\begin{aligned} u(x) \;=\; \int_a^b G(x,\ y)(f(y) - h(y))\,dy + w(x) \;&=\; \int_a^b G(x,\ y)f(y)\,dy + \left[w(x) - \int_a^b G(x,\ y)h(y)\,dy\right] \\ &=\; \int_a^b G(x,\ y)f(y)\,dy + \left[w(x) - \int_a^b G(x,\ y)(Lw)(y)\,dy\right]\,. \end{aligned}$$

18.3 O Problema de Sturm-Liouville

Seja o intervalo $J := [a,\ b] \subset \mathbb{R}$ e sejam p, q e r funções reais definidas em J, tais que

- p é contínua, diferenciável e estritamente positiva em J, ou seja, $p(x) > 0$ para todo $x \in [a,\ b]$.
- q é contínua em J.
- r é contínua e estritamente positiva em J, ou seja, $r(x) > 0$ para todo $x \in [a,\ b]$.

Para uma função u definida em J que seja pelo menos duas vezes diferenciável, vamos como anteriormente definir o operador diferencial L por $(Lu)(x) = (p(x)u')' + q(x)u$.

Entende-se por *Problema de Sturm-Liouville regular*[9][10], ou simplesmente *Problema de Sturm-Liouville*, o problema de se determinar a função u definida em J e os números λ tais que a seguinte equação diferencial seja satisfeita:

$$(Lu)(x) + \lambda\, r(x)u(x) \;=\; 0\,, \tag{18.60}$$

com o seguinte tipo de condição de contorno: vamos supor que existam constantes reais α_1, α_2, β_1 e β_2 tais que $(\alpha_1,\ \alpha_2) \neq (0,\ 0)$, $(\beta_1,\ \beta_2) \neq (0,\ 0)$ e tais que o seguinte par de relações deve ser válido

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) \;=\; 0\,, \tag{18.61}$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) \;=\; 0\,. \tag{18.62}$$

Se λ for um número tal que a equação (18.60) seja satisfeita para alguma função u_λ (que em geral dependerá de λ) então diz-se que λ é um *auto-valor do Problema de Sturm-Liouville* e u_λ é dito ser a *auto-função* associada ao auto-valor λ do Problema de Sturm-Liouville. Essa nomenclatura surge por analogia com os conceitos de auto-valor e autovetor de matrizes na álgebra linear. Tal se justifica pois, definindo-se o operador $M := -\frac{1}{r}L$, a equação $Lu_\lambda + \lambda\, ru_\lambda = 0$ escreve-se na forma $Mu_\lambda = \lambda u_\lambda$, que é precisamente uma equação de autovalores para o operador M.

Muitos problemas de Física envolvem a solução de problemas de Sturm-Liouville. Fora isso, a solução de problemas de Sturm-Liouville é útil para a resolução de equações não-homogêneas como

$$(Lu)(x) \;=\; f(x) \tag{18.63}$$

[9]Os trabalhos de Sturm e Liouville sobre o problema que é hoje conhecido como Problema de Sturm-Liouville foram desenvolvidos entre 1829 e 1837.

[10]Um problema de Sturm-Liouville singular será tratado brevemente à página 860.

para uma função f dada, com condições de contorno como (18.61)-(18.62). A razão para isso reside no fato que, como veremos, a função de Green associada ao problema de Sturm $Lu = f$ com condições de contorno como (18.61)-(18.62) pode ser escrita em termos das auto-funções e dos auto-valores de um problema de Sturm-Liouville.

Exemplo 18.2 No bem-conhecido problema da corda vibrante (vide Seção 21.5, página 956), descrevendo o movimento transversal de uma corda homogênea de densidade $\rho > 0$ e de comprimento $L > 0$, estendida entre os pontos a e $b = a + L$ e submetida a uma tensão $T > 0$, temos que resolver a equação de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 , \qquad c := \sqrt{\frac{T}{\rho}} ,$$

com $x \in [a, b]$, $t \in \mathbb{R}$. Pelo método de separação de variáveis (vide Seção 17.3, página 774), procuramos soluções da forma $u(x, t) = y(x)\theta(t)$ e obtemos para θ a equação $\ddot{\theta}(t) + \lambda c^2 \theta(t) = 0$ e para y a equação

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 , \tag{18.64}$$

λ sendo uma constante de separação. Se a corda estiver fixa em a e em b, devemos impor as condições de contorno $y(a) = 0$ e $y(b) = 0$. Esse problema de determinar a função y satisfazendo a equação (18.64) e as condições de contorno acima é um problema de Sturm-Liouville com $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1$, $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 0)$ e $(\beta_1, \beta_2) = (1, 0)$.

No caso $a = 0$ e $b = L$, obtem-se como soluções desse problema de Sturm-Liouville as funções $y_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ com $\lambda_n = (n\pi/L)^2$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$. ⌑

Exemplo 18.3 Na Mecânica Quântica, considere o problema de determinar a função de onda de uma partícula de massa m movendo-se em uma dimensão e constrita a um intervalo finito $[a, b] \subset \mathbb{R}$ por barreiras infinitas de potencial em $x \leq a$ e $x \geq b$ e sujeita, no intervalo $[a, b]$, a um potencial $V(x)$. A equação de Schrödinger independente do tempo é

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2}(x) - V(x)\psi(x) + E\psi(x) = 0 ,$$

com $x \in [a, b]$, sendo que, devido às barreiras infinitas de potencial, devemos impor as condições de contorno $\psi(a) = 0$ e $\psi(b) = 0$. Trata-se de um problema de Sturm-Liouville com $p(x) = \frac{\hbar^2}{2m}$, $q(x) = -V(x)$, $r(x) = 1$, $\lambda = E$, $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 0)$ e $(\beta_1, \beta_2) = (1, 0)$. ⌑

Exemplo 18.4 No problema descrito no Exercício E. 21.57, página 1018, e no problema descrito no Exercício E. 21.58, página 1018, devemos aplicar o método de separação de variáveis para as equações de onda e de difusão em duas dimensões espaciais em coordenadas polares. Naqueles problemas, para o tratamento da parte radial devemos resolver a equação de Bessel

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + \left(\alpha^2 x^2 - \nu^2\right) y(x) = 0$$

no intervalo $[R_1, R_2]$, com $0 < R_1 < R_2 < \infty$, equação essa que na forma de Liouville fica

$$(p(x)y')' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0 , \quad \text{com} \quad p(x) = x , \quad q(x) = -\frac{\nu^2}{x} , \quad r(x) = x , \quad \lambda = \alpha^2 .$$

As condições de contorno são de Dirichlet: $y(R_1) = y(R_2) = 0$. Trata-se claramente de um problema de Sturm-Liouville regular pois p e r são estritamente positivos no intervalo $[R_1, R_2]$ com $R_1 > 0$.

No problema descrito no Exercício E. 21.62, página 1020, tem-se também um problema de Sturm-Liouville regular como os acima, mas com condições de contorno mistas. ⌑

18.3.1 Propriedades Básicas dos Auto-Valores e Auto-Funções de Problemas de Sturm-Liouville

Na presente seção apresentaremos alguns resultados fundamentais sobre problemas de Sturm-Liouville regulares, como descritos acima. Provaremos que os auto-valores são simples (não-degenerados), que são reais, que as auto-funções podem ser escolhidas reais e que as mesmas satisfazem importantes relações denominadas *relações de ortogonalidade*. Por fim, estabeleceremos alguns resultados sobre a positividade dos autovalores. Como consequência, demonstraremos na Seção 18.3.2, página 852, uma relação, denominada *fórmula de Mercer* (eq. (18.102)), entre as funções de Green de problemas de Sturm e os autovalores e auto-funções de um problema de Sturm-Liouville. Tanto as relações de ortogonalidade quando a fórmula de Mercer são de grande relevância em aplicações. Comentamos, ainda, que alguns dos resultados que seguem serão alcançados com mais generalidade na Seção 15.1, página 677, do Capítulo 15.

18.3.1.1 A Simplicidade dos Auto-Valores

Se $u_1, u_2 \in \mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ são duas auto-funções de um problema de Sturm-Liouville regular com o mesmo auto-valor λ, ou seja, $Lu_1 + \lambda r u_1 = 0$ e $Lu_2 + \lambda r u_2 = 0$, então é fácil verificar que qualquer combinação linear $a_1 u_1 + a_2 u_2$ é também um elemento de $\mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ e é também uma auto-função com auto-valor λ: $L(a_1 u_1 + a_2 u_2) + \lambda r(a_1 u_1 + a_2 u_2) = 0$. Em outras palavras, o conjunto das auto-funções de um problema de Sturm-Liouville com um mesmo auto-valor é um espaço vetorial.

Uma questão importante sobre problemas de auto-valores, como o de Sturm-Liouville, é a questão da multiplicidade dos auto-valores, ou seja, a questão de saber, dado um auto-valor λ, qual a dimensão do espaço vetorial de todas as suas auto-funções.

No problema de Sturm-Liouville regular a dimensão é sempre igual a 1, ou seja, os auto-valores são *simples*, ou *não-degenerados*. A demonstração é a seguinte. Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ não-nulas e tais que $Lu_1 + \lambda r u_1 = 0$ e $Lu_2 + \lambda r u_2 = 0$ para um dado λ. Considere-se a função

$$\mathcal{W}_{12}(x) \;=\; \det\begin{pmatrix} u_1(x) & u_1'(x) \\ \\ u_2(x) & u_2'(x)\end{pmatrix} \;=\; u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x) \; .$$

Vamos em primeiro lugar mostrar que $p(x)\mathcal{W}_{12}(x)$ é constante no intervalo $[a, b]$, ou seja, que $(p\mathcal{W}_{12})' = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
(p\mathcal{W}_{12})' = p'\mathcal{W}_{12} + p\mathcal{W}_{12}' \quad &= \quad p'\left(u_1u_2' - u_1'u_2\right) + p\left(u_1u_2' - u_1'u_2\right)' \\
&= \quad p'\left(u_1u_2' - u_1'u_2\right) + p\left(u_1'u_2' + u_1u_2'' - u_1''u_2 - u_1'u_2'\right) \\
&= \quad p'\left(u_1u_2' - u_1'u_2\right) + p\left(u_1u_2'' - u_1''u_2\right) \\
&= \quad u_1(p'u_2' + pu_2'') - u_2(p'u_1' + pu_1'') \\
&= \quad u_1(pu_2')' - u_2(pu_1')' \\
&= \quad -u_1(qu_2 + \lambda r u_2) + u_2(qu_1 + \lambda r u_1) \\
&= \quad 0 \; .
\end{aligned} \tag{18.65}$$

Vamos agora mostrar que $\mathcal{W}_{12}(b) = 0$. Como acabamos de ver que $p(x)\mathcal{W}_{12}(x)$ é constante, isso implica $p(x)\mathcal{W}_{12}(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Como as funções u_1 e u_2 são elementos de $\mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, temos em $x = b$[11]

$$\begin{pmatrix} u_1(b) & u_1'(b) \\ \\ u_2(b) & u_2'(b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1 \\ \\ \beta_2\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0\end{pmatrix} \; .$$

Agora, como $\left(\begin{smallmatrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0 \\ 0\end{smallmatrix}\right)$, segue que $\det\left(\begin{smallmatrix}u_1(b) & u_1'(b) \\ u_2(b) & u_2'(b)\end{smallmatrix}\right) = 0$, ou seja, $\mathcal{W}_{12}(b) = 0$.

Pelo que acabamos de provar, $p(x)\mathcal{W}_{12}(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Como p é estritamente positiva, segue que $\mathcal{W}_{12}(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$, ou seja, $\det\left(\begin{smallmatrix}u_1(x) & u_1'(x) \\ u_2(x) & u_2'(x)\end{smallmatrix}\right) = 0$, para todo $x \in [a, b]$. Isso diz que as duas linhas que formam a matriz acima são, para cada $x \in [a, b]$, proporcionais uma a outra, ou seja, existe $\gamma(x)$ tal que, por exemplo, $u_1(x) = \gamma(x)u_2(x)$ e $u_1'(x) = \gamma(x)u_2'(x)$ para cada $x \in [a, b]$. Derivando a primeira e comparando à segunda, conclui-se que $\gamma(x)$ é constante, ou seja, não depende de x.

Assim, verificamos que as funções u_1 e u_2 são múltiplas entre si. Com isso, mostramos que se tivermos duas auto-funções com o mesmo auto-valor as auto-funções são múltiplas uma da outra e o subespaço que ambas geram tem dimensão 1. Em resumo, auto-valores de problemas de Sturm-Liouville regular são sempre simples, ou não-degenerados.

[11]Um argumento análogo funciona também em $x = a$.

18.3.1.2 O Lema de Green

• **Produtos escalares**

Seja $C([a,\ b])$ o conjunto das funções complexas contínuas definidas no intervalo $[a,\ b]$. É bem sabido que $C([a,\ b])$ é um espaço vetorial. Para cada $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1$ e β_2 o espaço $\mathcal{V}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2)$, definido à página 835, é um subespaço de $C([a,\ b])$. Podemos dotar o espaço vetorial $C([a,\ b])$ de vários produtos escalares[12]. Dois deles nos interessarão aqui. Para $f,\ g \in C([a,\ b])$ definimos o produto escalar

$$\langle f,\ g\rangle \ = \ \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, dx\ , \tag{18.66}$$

e também o produto escalar

$$\langle f,\ g\rangle_r \ = \ \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, r(x)\, dx\ , \tag{18.67}$$

onde a função r é a função estritamente positiva caracterizada acima no problema de Sturm-Liouville. Para o espaço linear real das funções contínuas reais definidas no intervalo $[a,\ b]$ podemos também definir os produtos escalares reais

$$\langle f,\ g\rangle \ = \ \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\ , \tag{18.68}$$

e

$$\langle f,\ g\rangle_r \ = \ \int_a^b f(x)\, g(x)\, r(x)\, dx \tag{18.69}$$

(por simplicidade usamos a mesmas notações $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ e $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_r$ que para o caso complexo).

• **O Lema de Green**

O seguinte resultado será fundamental para o que segue:

Lema 18.2 (Lema de Green) *Sejam u e v duas funções definidas em $J = [a,\ b]$, que sejam pelo menos duas vezes diferenciáveis e tais que ambas satisfaçam condições de contorno como (18.61)-(18.62), ou seja, ambas são elementos do espaço vetorial de funções $\mathcal{V}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2)$ (página 835). Então, tem-se*

$$\langle v,\ Lu\rangle \ = \ \langle Lv,\ u\rangle\ ,$$

ou seja,

$$\int_a^b \overline{v(x)}\ (Lu)(x)\, dx \ = \ \int_a^b \overline{(Lv)(x)}\ u(x)\, dx\ . \tag{18.70}$$

□

Prova do Lema 18.2. Usando-se integração por partes, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_a^b \overline{v(x)}\ (Lu)(x)\, dx \ &= \ \int_a^b \overline{v(x)}(p(x)u')'\, dx + \int_a^b \overline{v(x)}q(x)u(x)\, dx \\
&= \ -\int_a^b \overline{v'(x)}(p(x)u')\, dx + \overline{v}pu'\Big|_a^b + \int_a^b \overline{v(x)}q(x)u(x)\, dx \\
&= \ \int_a^b u(p\overline{v'})'\, dx + \overline{v}pu'\Big|_a^b - \overline{v'}pu\Big|_a^b + \int_a^b \overline{v(x)}q(x)u(x)\, dx \\
&= \ \int_a^b u(x)\ \overline{(Lv)(x)}\, dx + \overline{v}pu'\Big|_a^b - \overline{v'}pu\Big|_a^b\ .
\end{aligned} \tag{18.71}$$

[12] A noção de produto escalar em um espaço vetorial foi introduzida na Seção 3.1.3, página 204.

Agora, escrevendo-se explicitamente tem-se que

$$\begin{aligned}\overline{v}pu'\Big|_a^b - \overline{v'}pu\Big|_a^b &= p(b)\overline{v(b)}u'(b) - p(a)\overline{v(a)}u'(a) - p(b)\overline{v'(b)}u(b) + p(a)\overline{v'(a)}u(a) \\ &= p(b)\left(\overline{v(b)}u'(b) - \overline{v'(b)}u(b)\right) - p(a)\left(\overline{v(a)}u'(a) - \overline{v'(a)}u(a)\right) . \end{aligned} \tag{18.72}$$

Vamos agora provar que os fatores entre parênteses em (18.72) são nulos. Como u e v satisfazem (18.61)-(18.62), tem-se

$$\begin{pmatrix}\overline{v(a)} & \overline{v'(a)} \\ u(a) & u'(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix}\overline{v(b)} & \overline{v'(b)} \\ u(b) & u'(b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix} .$$

Como $\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0 \\ 0\end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0 \\ 0\end{smallmatrix}\right)$ devemos ter

$$\det\begin{pmatrix}\overline{v(a)} & \overline{v'(a)} \\ u(a) & u'(a)\end{pmatrix} = 0 \qquad \text{e} \qquad \det\begin{pmatrix}\overline{v(b)} & \overline{v'(b)} \\ u(b) & u'(b)\end{pmatrix} = 0 ,$$

ou seja,

$$\overline{v(a)}u'(a) - \overline{v'(a)}u(a) = 0 \qquad \text{e} \qquad \overline{v(b)}u'(b) - \overline{v'(b)}u(b) = 0 .$$

O lado esquerdo de ambas as expressões são os termos entre parênteses de (18.72). Logo, $\overline{v}pu'\big|_a^b - \overline{v'}pu\big|_a^b = 0$. Voltando à (18.71), isso completa a demonstração do Lema de Green. ■

O Lema de Green afirma que L é um operador simétrico em relação ao produto escalar definido em (18.66) quando age em vetores do subespaço $\mathcal{V}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2)$.

18.3.1.3 Realidade dos Auto-Valores e Auto-funções. Ortogonalidade de Auto-funções

Como consequência do Lema de Green, Lema 18.2, vamos aqui demonstrar algumas propriedades básicas comuns a todos os problemas de Sturm-Liouville regulares, tais como definidos acima. A saber, vamos provar que os autovalores são reais, que as auto-funções podem ser escolhidas reais e que as mesmas satisfazem uma série de relações importantes, denominadas *relações de ortogonalidade*.

• **Realidade dos autovalores**

Proposição 18.3 *Os auto-valores de um problema de Sturm-Liouville, como descrito acima, são números reais.* □

Prova. Para provar que os auto-valores de um problema de Sturm-Liouville são reais, seja λ um auto-valor e u uma correspondente auto-função não-nula. Vamos mostrar que

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b |u(x)|^2\, r(x)\, dx = 0 . \tag{18.73}$$

Como $u \neq 0$ e $r > 0$ (por hipótese), temos que $\int_a^b |u(x)|^2\, r(x)\, dx \neq 0$. Portanto, (18.73) diz-nos que $\lambda - \overline{\lambda} = 0$, ou seja, que λ é um número real. Para provar (18.73), notemos que

$$\begin{aligned}(\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b \overline{u(x)}\, u(x)\, r(x)\, dx &= \int_a^b \overline{u(x)}\,(\lambda u(x) r(x))\, dx - \int_a^b \overline{(\lambda u(x) r(x))}\, u(x)\, dx \\ &= -\int_a^b \overline{u(x)}(Lu(x))\, dx + \int_a^b \overline{(Lu(x))}u(x)\, dx = 0 ,\end{aligned}$$

pelo Lema de Green, Lema 18.2. Isso completa a prova. ■

• **Realidade das auto-funções**

Proposição 18.4 *As auto-funções de um problema de Sturm-Liouville regular, como descrito acima, podem ser escolhidas como funções reais.* □

Prova. Seja u uma auto-função de um problema de Sturm-Liouville regular. Como o auto valor λ é real (Proposição 18.3), a equação $Lu + \lambda ur = 0$ é real. Assim, tanto a parte real de u quanto sua parte imaginária são soluções da mesma. Como as constantes α_1, α_2, β_1 e β_2 são reais, tanto a parte real de u quanto sua parte imaginária satisfazem as condições de contorno nos pontos a e b. Acima, provamos que os autovalores não são degenerados e, portanto, a parte real de u e sua parte imaginária não são linearmente independentes. Portanto, podemos tomar uma ou outra como auto-função de um problema de Sturm-Liouville, completando a prova. ■

Observação importante. Em função do fato descrito na proposição acima, consideraremos doravante as auto-funções de problemas de Sturm-Liouville regulares como sendo funções reais. ♣

• **Relações de ortogonalidade**

O teorema a seguir descreve uma propriedade fundamental de auto-funções de problemas de Sturm-Liouville regulares.

Teorema 18.2 *Sejam u_{λ_1} e u_{λ_2} duas auto-funções reais associadas a dois auto-valores distintos λ_1 e λ_2, então vale que*

$$\int_a^b u_{\lambda_1}(x)\, u_{\lambda_2}(x)\, r(x)\, dx \;=\; 0\,. \tag{18.74}$$

Esta relação é chamada de relação de ortogonalidade. □

Prova. Vamos provar que

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b u_{\lambda_1}(x)\, u_{\lambda_2}(x)\, r(x)\, dx \;=\; 0\,. \tag{18.75}$$

Como estamos supondo que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, essa relação diz então que (18.74) deve ser verdadeira. Como λ_1 e λ_2 são reais, o lado esquerdo de (18.75) pode ser escrito como

$$\int_a^b \big(\lambda_1 r(x) u_{\lambda_1}(x)\big)\, u_{\lambda_2}(x)\, dx - \int_a^b u_{\lambda_1}(x)\, \big(\lambda_2 r(x) u_{\lambda_2}(x)\big)\, dx$$

$$= -\int_a^b \big(Lu_{\lambda_1}(x)\big)\, u_{\lambda_2}(x)\, dx + \int_a^b u_{\lambda_1}(x)\, \big(Lu_{\lambda_2}(x)\big)\, dx \;=\; 0\,, \tag{18.76}$$

pelo Lema de Green (que se aplica aqui sem as conjugações complexas, pois todos os elementos envolvidos são reais). ■

O que vimos no Teorema 18.2 é que auto-funções associadas a auto-valores distintos de um problema de Sturm-Liouville são ortogonais entre si em relação ao produto escalar real $\langle f,\ g\rangle_r := \int_a^b f(x) g(x)\, r(x)\, dx$.

18.3.1.4 Propriedades dos Autovalores

Esta seção é dedicada ao estudo de algumas propriedades gerais dos autovalores de problemas de Sturm-Liouville regulares. Algumas das demonstrações serão deslocadas a apêndices para não desviar precocemente a atenção do leitor para certos detalhes. O estudo posterior dessas demonstrações, porém, é recomendado. Apresentaremos um método para determinação aproximada de autovalores e algumas condições suficientes para que um problema de Sturm-Liouville regular tenha apenas autovalores positivos. Alguns exemplos ilustrativos de diversas instâncias serão discutidos.

• O quociente de Rayleigh. Determinação aproximada de autovalores

Seja u_λ uma auto-função (tomada doravante real) com auto-valor $\lambda \in \mathbb{R}$, ou seja, tal que $(pu'_\lambda)' + qu_\lambda + \lambda r u_\lambda = 0$. Multiplicando-se essa igualdade por u_λ e integrando-se entre a e b, tem-se

$$\lambda \int_a^b u_\lambda(x)^2\, r(x)\, dx \;=\; -\int_a^b u_\lambda(x)\,(pu'_\lambda)'(x)\, dx - \int_a^b u_\lambda(x)^2 q(x)\, dx\,. \tag{18.77}$$

Vamos agora integrar por partes a primeira integral do lado direito. Temos,

$$\int_a^b u_\lambda(x)\,(pu'_\lambda)'(x)\, dx \;=\; \big(pu_\lambda u'_\lambda\big)(x)\Big|_a^b - \int_a^b \big(u'_\lambda(x)\big)^2 p(x)\, dx\,.$$

Substituindo em (18.77), tem-se

$$\lambda \int_a^b u_\lambda(x)^2\, r(x)\, dx \;=\; \int_a^b \Big(\big(u'_\lambda(x)\big)^2 p(x) - u_\lambda(x)^2 q(x)\Big)\, dx + \Big[p(a)u_\lambda(a)u'_\lambda(a) - p(b)u_\lambda(b)u'_\lambda(b)\Big]\,, \tag{18.78}$$

o que permite escrever

$$\lambda \;=\; \frac{\displaystyle\int_a^b \Big(\big(u'_\lambda(x)\big)^2 p(x) - u_\lambda(x)^2 q(x)\Big)\, dx + \Big[p(a)u_\lambda(a)u'_\lambda(a) - p(b)u_\lambda(b)u'_\lambda(b)\Big]}{\displaystyle\int_a^b u_\lambda(x)^2\, r(x)\, dx}\,, \tag{18.79}$$

O lado direito de (18.79) é denominado *quociente de Rayleigh*[13] e desempenha um papel importante na análise de propriedades dos autovalores de problemas de Sturm-Liouville regulares. Na Proposição 18.5, por exemplo, usaremos (18.78) para identificar condições suficientes para que todos os autovalores de um problema de Sturm-Liouville regular sejam positivos. O quociente de Rayleigh (18.79) é também usado para a determinação aproximada de autovalores a partir de aproximantes para as auto-funções, de particular utilidade quando as soluções de problemas de Sturm-Liouville não puderem ser obtidas de forma explícita. No Exercício E. 18.12, página 850, ilustramos em uma situação simples como esse cálculo aproximado de autovalores pode ser feito.

A expressão (18.79) será o ponto de partida para o estudo de métodos variacionais de determinação de auto-valores que desenvolveremos na Seção 18.3.4, página 858.

Retornemos a (18.78). Afirmamos que existem constantes γ_1 e γ_2, independentes de u_λ, tais que

$$p(a)\, u_\lambda(a)u'_\lambda(a) \;=\; \gamma_1 u_\lambda(a)^2 \tag{18.80}$$

e

$$p(b)\, u_\lambda(b)u'_\lambda(b) \;=\; -\gamma_2 u_\lambda(b)^2\,. \tag{18.81}$$

A demonstração é a seguinte. No ponto a u_λ satisfaz $\alpha_1 u_\lambda(a) + \alpha_2 u'_\lambda(a) = 0$. Vamos primeiro supor que $\alpha_2 \neq 0$. Multiplicando-se a expressão por $u_\lambda(a)$ obtem-se

$$u'_\lambda(a)u_\lambda(a) \;=\; -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} u_\lambda(a)^2\,.$$

Nesse caso, então, tomamos $\gamma_1 = -p(a)\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Caso $\alpha_2 = 0$, a relação $\alpha_1 u_\lambda(a) + \alpha_2 u'_\lambda(a) = 0$ diz-nos que $u_\lambda(a) = 0$. Daí, é evidente que

$$p(a)\, u_\lambda(a)u'_\lambda(a) \;=\; \gamma_1 u_\lambda(a)^2\,,$$

para qualquer constante γ_1, pois ambos os lados são nulos. Isso provou (18.80). A demonstração de (18.81) é análoga, escolhendo-se $\gamma_2 = +p(b)\frac{\beta_1}{\beta_2}$, caso $\beta_2 \neq 0$.

Inserindo (18.80) e (18.81) em (18.78) tem-se

$$\lambda \int_a^b u_\lambda(x)^2 r(x)\, dx \;=\; \int_a^b \Big(\big(u'_\lambda(x)\big)^2 p(x) - u_\lambda(x)^2 q(x)\Big)\, dx + \gamma_1 u_\lambda(a)^2 + \gamma_2 u_\lambda(b)^2\,, \tag{18.82}$$

[13] John William Strutt (Lord Rayleigh), terceiro Barão de Rayleigh (1842–1919). Entre outros feitos científicos, Lord Rayleigh foi o primeiro a apresentar uma explicação de por que o céu é azul (“espalhamento Rayleigh”) e foi o descobridor do elemento químico Argônio.

o que permite expressar o quociente de Rayleigh na forma

$$\lambda = \frac{\displaystyle\int_a^b \Big(\big(u_\lambda'(x)\big)^2 p(x) - u_\lambda(x)^2 q(x)\Big)\, dx + \gamma_1 u_\lambda(a)^2 + \gamma_2 u_\lambda(b)^2}{\displaystyle\int_a^b u_\lambda(x)^2 r(x)\, dx} . \tag{18.83}$$

Para futura referência lembremos que nas duas últimas expressões temos

$$\gamma_1 = \begin{cases} -p(a)\frac{\alpha_1}{\alpha_2} , & \text{caso } \alpha_2 \neq 0 , \\ \text{arbitrário} , & \text{caso } \alpha_2 = 0 , \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \gamma_2 = \begin{cases} +p(b)\frac{\beta_1}{\beta_2} , & \text{caso } \beta_2 \neq 0 , \\ \text{arbitrário} , & \text{caso } \beta_2 = 0 . \end{cases}$$

O exercício que segue ilustra o uso do quociente de Rayleigh (18.79) ou (18.83) no cálculo aproximado de autovalores.

E. 18.12 *Exercício-Exemplo*. Considere-se o problema de determinar a solução da equação $u''(x) + \lambda u(x) = 0$ no intervalo $[0, 1]$ sujeita às condições de contorno $u(0) = 0$ e $u(1) = 0$. Trata-se de um problema de Sturm-Liouville regular definido no intervalo $[a, b] = [0, 1]$ com $p(x) = 1$, $q(x) = 0$ e $r(x) = 1$ para todo $x \in [0, 1]$, sendo ainda $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 0)$ e $(\beta_1, \beta_2) = (1, 0)$. Como é bem conhecido, os autovalores são $\lambda_n = n^2\pi^2$ com $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, e as correspondentes auto-funções (não-normalizadas) são da forma $u_{\lambda_n}(x) = \mathrm{sen}(n\pi x)$.

Tomemos o caso $n = 1$. A auto-função exata (não-normalizada) é $u_{\lambda_1}(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$. Essa função anula-se em $x = 0$, em $x = 1$, é positiva no restante do intervalo $[0, 1]$ e seu máximo igual a 1 nesse intervalo. A função $u_{(1)} = 4x(1-x)$ possui as mesmas propriedades e pode ser usada como aproximante de u_{λ_1} (para convencer-se, desenhe um gráfico conjunto das duas funções em $[0, 1]$). Inserindo $u_{(1)}$ em lugar de u_{λ_1} em (18.79) ou (18.83), teremos uma aproximação para o autovalor $\lambda_1 = \pi^2$ que pode ser calculada muito facilmente:

$$\pi^2 \approxeq \frac{\displaystyle\int_0^1 \big(1-2x\big)^2\, dx}{\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)^2\, dx} = \frac{1/3}{1/30} = 10 ,$$

o que fornece a aproximação $\pi \approxeq \sqrt{10} \approxeq 3,162$, que possui um erro relativo de apenas $0,66\%$!

Complete os detalhes dos cálculos acima e procure aperfeiçoar a aproximação para π, substituindo $u_{(1)} = 4x(1-x)$ por um outro aproximante polinomial melhor. ✠

O método ilustrado no Exercício E. 18.12, acima, foi desenvolvido por Rayleigh em 1870, que sistematizou-o, agregando-lhe ideias do cálculo variacional. Vide Seção 18.3.4, página 858, ou vide as referências [73] ou [277] para um tratamento sistemático do chamado *método de Rayleigh*, ou de *Rayleigh-Ritz*[14], de determinação de autovalores. Esses métodos são abundantemente empregados na Mecânica Quântica.

• Condições suficientes para a positividade dos auto-valores

Em muitas aplicações de interesse físico ocorre que os auto-valores de problemas de Sturm-Liouville regulares são (ou precisam ser) números positivos. Vamos apresentar agora um conjunto de condições que são suficientes para garantir isso.

Proposição 18.5 *Se forem simultaneamente válidas as condições*

1. $q(x) < 0$ *para todo* $x \in [a, b]$,
2. $\alpha_1\alpha_2 \leq 0$,
3. $\beta_1\beta_2 \geq 0$,

então todos os auto-valores λ *do problema de Sturm-Liouville correspondente são estritamente positivos:* $\lambda > 0$. □

[14] Walther Ritz (1878–1909).

Prova. A demonstração é um tanto indireta. Seja u uma auto-função (tomada doravante real) com auto-valor $\lambda \in \mathbb{R}$, ou seja, $(pu')' + qu + \lambda ru = 0$. Podemos provar que $\lambda > 0$ se pudermos garantir que a expressão do lado direito de (18.78) é positiva, que é o que passamos a fazer.

No ponto a, u satisfaz $\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0$. Tomando-se o quadrado dessa expressão, tem-se

$$\alpha_1^2 u(a)^2 + \alpha_2^2 u'(a)^2 + 2\alpha_1\alpha_2 u(a)u'(a) \;=\; 0 \;,$$

ou seja,

$$2\alpha_1\alpha_2\, u(a)u'(a) \;=\; -\left(\alpha_1^2 u(a)^2 + \alpha_2^2 u'(a)^2\right) \;. \tag{18.84}$$

Analogamente, para o ponto b,

$$2\beta_1\beta_2\, u(b)u'(b) \;=\; -\left(\beta_1^2 u(b)^2 + \beta_2^2 u'(b)^2\right) \;. \tag{18.85}$$

Consideremos agora que $\alpha_1\alpha_2 < 0$ e $\beta_1\beta_2 > 0$.

A expressão (18.84) ensina-nos que $\alpha_1\alpha_2$ e $u(a)u'(a)$ têm sinais opostos e (18.85) que $\beta_1\beta_2$ e $u(b)u'(b)$ têm sinais opostos. Portanto, se tivermos $q(x) < 0$ para todo $x \in [a,\ b]$, $\alpha_1\alpha_2 < 0$ e $\beta_1\beta_2 > 0$ a soma do lado direito de (18.78) será estritamente positiva. Como $\int_a^b u(x)^2 r(x)\ dx > 0$, já que r é também por hipótese estritamente positiva, segue de (18.78) que $\lambda > 0$.

Se $\alpha_1\alpha_2 = 0$, então $u(a)u'(a) = 0$ (por (18.84)). Portanto, se adicionalmente tivermos $q(x) < 0$ para todo $x \in [a,\ b]$ e $\beta_1\beta_2 > 0$, então a soma do lado direito de (18.78) será estritamente positiva, o que implica $\lambda > 0$.

Analogamente, se $\beta_1\beta_2 = 0$, então $u(b)u'(b) = 0$ (por (18.85)). Assim, se adicionalmente tivermos $q(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,\ b]$ e $\alpha_1\alpha_2 < 0$, então teremos novamente $\lambda > 0$. Por fim, se $\alpha_1\alpha_2 = 0$ e $\beta_1\beta_2 = 0$, então $u(a)u'(a) = 0$ e $u(b)u'(b) = 0$. Assim, com $q(x) < 0$ para todo $x \in [a,\ b]$ teremos novamente $\lambda > 0$. ■

• Comentário sobre auto-valores negativos

É importante dizer aqui que existem problemas de Sturm-Liouville regulares onde ocorrem auto-valores negativos (vide Exercício E. 18.13, abaixo). No Teorema 18.3, página 852, mostraremos que apesar de ser possível a existência de auto-valores negativos, os mesmos não podem ser arbitrariamente negativos, ou seja, negativos mas com módulo $|\lambda|$ arbitrariamente grande. Provaremos que existe uma constante M tal que $\lambda \geq M$. A constante M pode ser positiva, negativa ou nula. Em verdade, em um problema de Sturm-Liouville regular pode ocorrer no máximo um número finito de auto-valores negativos.

• Um exemplo

O exemplo a seguir reúne situações que ilustram alguns dos resultados mencionados acima sobre propriedades de autovalores de problemas de Sturm-Liouville.

E. 18.13 *Exercício-exemplo.* Seja o problema de Sturm-Liouville $u'' + \lambda u = 0$, no intervalo $[0,\ 1]$, com as condições de contorno $u(0) = 0$ e $\beta_1 u(1) + \beta_2 u'(1) = 0$.

Aqui $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1$, $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 0$. A identidade (18.78) fica

$$\lambda \int_0^1 u(x)^2\ dx \;=\; \int_0^1 \big(u'(x)\big)^2\ dx - u(1)u'(1) \;. \tag{18.86}$$

Caso $\beta_1 = 0$, teremos $u'(1) = 0$. Caso $\beta_2 = 0$, teremos $u(1) = 0$. Nesses dois casos, (18.86) fica

$$\lambda \int_0^1 u(x)^2\ dx \;=\; \int_0^1 \big(u'(x)\big)^2\ dx \;,$$

que garante que $\lambda > 0$.

No caso em que β_1 e β_2 são não-nulos, (18.85) diz-nos que

$$\lambda \int_0^1 u(x)^2\ dx \;=\; \int_0^1 \big(u'(x)\big)^2\ dx + \frac{1}{2\beta_1\beta_2}\Big(\big(\beta_1 u(1)\big)^2 + \big(\beta_2 u'(1)\big)^2\Big) \;. \tag{18.87}$$

Como se vê, se $\beta_1\beta_2 > 0$ tem-se $\lambda > 0$, mas se $\beta_1\beta_2 < 0$ poderemos ter auto-valores negativos. Abaixo (item **f**), veremos que isso de fato ocorre caso $-\beta_1^2 < \beta_2\beta_1 < 0$.

a. No caso $\beta_1 = 0$ mostre que os auto-valores são $\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

b. No caso $\beta_2 = 0$ mostre que os auto-valores são $\lambda_n = n^2\pi^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

c. Determine as auto-funções normalizadas nessas duas situações.

d. No caso em que β_1 e β_2 são não-nulos mostre que os auto-valores positivos são as (infinitas!) soluções positivas de

$$\sqrt{\lambda} = -\frac{\beta_1}{\beta_2} \tan\left(\sqrt{\lambda}\right) .$$

Mostre graficamente que essa equação tem infinitas soluções positivas quer $\frac{\beta_1}{\beta_2} > 0$ ou quer $\frac{\beta_1}{\beta_2} < 0$.

e. Para o caso $\beta_1 = -\beta_2$ mostre que também ocorre o auto-valor $\lambda = 0$, cuja auto-função é $u(x) = \alpha x$, α sendo uma constante arbitrária não-nula.

f. Mostre que se $0 < -\frac{\beta_2}{\beta_1} < 1$, ou seja, se $-\beta_1^2 < \beta_2\beta_1 < 0$, ocorre também um (único!) auto-valor negativo, o qual é solução de

$$\sqrt{-\lambda} = -\frac{\beta_1}{\beta_2} \tanh\left(\sqrt{-\lambda}\right) .$$

Mostre graficamente que essa equação não tem solução não-nula caso $0 > -\frac{\beta_2}{\beta_1}$ ou caso $-\frac{\beta_2}{\beta_1} > 1$.

Reunindo os resultados obtidos, indique no plano Cartesiano (β_1, β_2) a região onde os auto-valores são estritamente positivos, a região onde ocorre o auto-valor zero e a região onde, além dos positivos, ocorrem também auto-valores negativos. ✠

• **Um limite inferior para os auto-valores**

Ainda sobre os auto-valores de problemas de Sturm-Liouville regulares, o seguinte teorema pode ser demonstrado.

Teorema 18.3 *Seja o problema de Sturm-Liouville (regular) definido pela equação*

$$Lu + \lambda\, r(x) u \;=\; 0 ,$$

onde p, q e r são funções reais definidas em $[a, b]$, tais que p é contínua, diferenciável e estritamente positiva em $[a, b]$, ou seja, $p(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$; q é contínua em $[a, b]$; r é contínua e estritamente positiva em $[a, b]$, ou seja, $r(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$; com as condições de contorno

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) \;=\; 0 , \qquad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) \;=\; 0$$

para $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$, $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$.

Então existe uma constante M, que depende (em geral de forma muito complicada) das funções p, q e r e das constante $\alpha_{1,\,2}$ e $\beta_{1,\,2}$, tal que todos os auto-valores λ satisfazem $\lambda \geq M$. □

A constante M pode ser positiva, negativa ou nula. O que esse teorema diz é que existe um limitante inferior para os auto-valores de um problema de Sturm-Liouville, ou seja, os mesmos podem até ser eventualmente negativos, mas não arbitrariamente negativos. A demonstração desse teorema é apresentada no Apêndice 18.D, página 869.

18.3.2 A Equação Integral de Fredholm

Um dos passos mais úteis para se estudar um problema de Sturm-Liouville consiste em transformá-lo em uma equação integral. Como veremos, isso pode ser feito caso 0 não seja um possível auto-valor.

Considere o problema de Sturm-Liouville de determinar as soluções de

$$Lu \;=\; -\lambda\, r(x)\, u , \tag{18.88}$$

que satisfaçam as condições de contorno (18.61)-(18.62). Se $\lambda = 0$ não for um auto-valor desse problema, ou seja, se $Lu = 0$ com as condições de contorno (18.61)-(18.62) possuir apenas a solução trivial $u = 0$, então o problema de Sturm $Lu = f$ com as condições de contorno (18.61)-(18.62) possui solução única. Isso é elementar de se ver, pois se u_1 e u_2 são duas soluções, então $L(u_1 - u_2) = 0$, sendo que $u_1 - u_2$ obviamente satisfaz (18.61)-(18.62). Pelo pressuposto, $u_1 - u_2 = 0$.

Agora, pelo Teorema de Green, $u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y)dy$ é solução de $Lu = f$ com as condições de contorno (18.61)-(18.62) e, portanto, essa é a única solução. Assim, sob a hipótese que $\lambda = 0$ não é um auto-valor do problema de Sturm-Liouville, toda função u que satisfaz $Lu = f$ com as condições de contorno (18.61)-(18.62) satisfaz também $u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y)dy$ para *qualquer que seja a função contínua f.*

Disso concluímos que a função u que satisfaz a equação diferencial (18.88) satisfaz também

$$u(x) \ = \ -\lambda \int_a^b G(x, \ y) \, r(y) \, u(y) \, dy \ , \tag{18.89}$$

isto é, definindo-se

$$k(x, \ y) \ := \ -G(x, \ y) \, r(y) \tag{18.90}$$

para $x, \ y \in [a, \ b]$, vale

$$u(x) \ = \ \lambda \int_a^b k(x, \ y) \, u(y) \, dy \ . \tag{18.91}$$

Uma equação como esta, onde a função $k(x, \ y)$ é contínua em um intervalo fechado, é conhecida como *Equação Integral de Fredholm linear homogênea de segundo tipo*[15], ou simplesmente *Equação Integral de Fredholm*[16].

O estudo da equação integral de Fredholm é um dos capítulos importantes da Análise Funcional e da Teoria das Equações Integrais. Iremos agora tratar apenas de aspectos básicos da mesma que mais diretamente nos interessam. O método dos determinantes de Fredholm para a solução de equações integrais de Fredholm homogêneas e não-homogêneas é apresentado com certo detalhe na Seção 19.2, página 876. O leitor poderá encontrar mais material sobre a equação integral de Fredholm não-linear na Seção 28.2.3, página 1380, assim como na Seção 41.8, página 2173, para o caso linear. Alguns poucos comentários históricos podem ser encontrados à página 881.

Seja o espaço vetorial $C(J)$ introduzido acima, de todas as funções contínuas definidas no intervalo $J = [a, \ b]$. Podemos então, com o auxílio da função $k(x, \ y)$ dada em (18.90), definir em $C(J)$ um operador linear K dado por

$$(Kf)(x) \ := \ \int_a^b k(x, \ y) \, f(y) \, dy \ . \tag{18.92}$$

$x \in J$. O operador K é denominado *operador de Fredholm.* A equação (18.91) diz-nos então que

$$K \, u \ = \ \frac{1}{\lambda} \, u \ . \tag{18.93}$$

A respeito desse operador K podemos provar o seguinte resultado. Tomando-se em $C(J)$ o produto escalar real $\langle \cdot, \ \cdot \rangle_r$ definido acima, temos

$$\langle f, \ Kg \rangle_r \ = \ \langle Kf, \ g \rangle_r \tag{18.94}$$

para todo $f, \ g \in C(J)$.

E. 18.14 *Exercício*. Mostre esse fato. Para isso use que a função de Green satisfaz $G(x, \ y) = G(y, \ x)$. ✠

Um operador linear que satisfaz uma relação como (18.94) é dito ser um operador *simétrico* ou *Hermiteano*, um conceito de grande importância em Física e Matemática. O operador K é então um operador simétrico em relação ao produto escalar $\langle \cdot, \ \cdot \rangle_r$.

Se A é um operador linear agindo em um espaço vetorial complexo V, dizemos que um vetor não-nulo $\underline{x}$ é um *autovetor* de A se houver um número (real ou complexo) α tal que

$$A\underline{x} \ = \ \alpha \, \underline{x}. \tag{18.95}$$

O número α é dito ser um *auto-valor* de A e $\underline{x}$ o autovetor associado a α. O conjunto de todos os auto-valores de um operador linear A é chamado de *espectro pontual*[17] de A.

[15]Para generalidades sobre equações integrais, vide Capítulo 19, página 874.
[16]Erik Ivar Fredholm (1866–1927).
[17]O conceito geral de espectro de operadores definidos em espaços de Banach é detalhadamente discutido na Seção 41.6, página 2156.

Um fato importante sobre operadores simétricos é o seguinte: se α é um auto-valor de um operador simétrico A que age em um espaço vetorial complexo V, então α é um número real. Para ver isso note que se $\underline{x}$ é o autovetor associado a α então temos que, como A é simétrico

$$0 \ = \ \langle \underline{x}, \ A\underline{x} \rangle - \langle A\underline{x}, \ \underline{x} \rangle \ = \ \lambda \langle \underline{x}, \ \underline{x} \rangle - \overline{\lambda} \langle \underline{x}, \ \underline{x} \rangle \ = \ (\lambda - \overline{\lambda}) \langle \underline{x}, \ \underline{x} \rangle \ .$$

Como $\underline{x} \neq 0$, isso implica $\lambda = \overline{\lambda}$, ou seja, λ é real.

O fato de o operador de Fredholm K ser simétrico significa que seus auto-valores são números reais. Note-se que a equação de Fredholm (18.93) é precisamente uma equação de auto-valores, o auto-valor sendo, nesse caso, o número $1/\lambda$. O que provamos acima diz-nos então que λ dever ser um número real, uma outra demonstração de um fato que já sabíamos.

O seguinte teorema pode ser demonstrado sobre o operador de Fredholm associado a um problema de Sturm-Liouville:

Teorema 18.4 *Seja K o operador de Fredholm associado a um problema de Sturm-Liouville regular, que supomos não admitir auto-valor nulo. Então K é um operador contínuo. Seus auto-valores formam um conjunto discreto (ou seja, contável) $\{\alpha_n \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}\}$. Os valores da sequência dos α_n são limitados (não divergem para $\pm\infty$), apenas um número finito deles pode ser negativo e eles se acumulam apenas no ponto 0. Assim, tem-se que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\alpha_n} = +\infty$. Além disso, os auto-valores α_n são simples: existe para cada auto-valor α_n apenas uma auto-função u_n tal que*

$$K\, u_n \ = \ \alpha_n \, u_n \ . \tag{18.96}$$

Denotemos por $\mathcal{H}_r$ o espaço de Hilbert real de todas as funções reais em $J = [a, \ b]$ tais que $\int_a^b f(x)^2\, r(x)\, dx < \infty$. Nesse espaço de Hilbert o produto escalar considerado é o produto escalar real $\langle \cdot, \ \cdot \rangle_r$, definido em (18.69). Vamos supor que as auto-funções u_n são normalizadas, ou seja, satisfazem $\langle u_n, \ u_n \rangle_r = 1$. Então o conjunto das auto-funções normalizadas u_n de K forma uma base ortonormal completa em $\mathcal{H}_r$, ou seja, todo vetor $f \in \mathcal{H}_r$ pode ser escrito como

$$f \ = \ \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n \, u_n \ =: \ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, u_n \ , \tag{18.97}$$

onde

$$c_n \ := \ \langle u_n, \ f \rangle_r \ = \ \int_a^b u_n(x)\ f(x)\ r(x)\ dx \ . \tag{18.98}$$

Mais precisamente, vale

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \left(f - \sum_{n=1}^{N} c_n \, u_n \right) \ , \ \left(f - \sum_{n=1}^{N} c_n \, u_n \right) \right\rangle_r \ = \ \lim_{N\to\infty} \int_a^b \left(f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n \, u_n(x) \right)^2 r(x)\, dx \ = \ 0 \ . \tag{18.99}$$

$\square$

A demonstração deste teorema é elaborada e será apresentada ao longo da Seção 41.8, página 2173, do Capítulo 41, fazendo uso da teoria dos operadores compactos. O que faremos naquela seção é mostrar que o operador de Fredholm K é um operador compacto e autoadjunto e para tais operadores valem as propriedades espectrais mencionadas acima. A afirmação (18.97)-(18.99), por exemplo, é parte do chamado *Teorema Espectral*, o qual vale para operadores compactos e autoadjuntos, como mostrado no Teorema 41.37 da página 2193.

Notemos algumas consequências do teorema acima. Como os auto-valores de um problema de Sturm-Liouville regular λ_n são da forma $\lambda_n = 1/\alpha_n$, onde α_n é um auto-valor de K, o teorema acima diz-nos que podemos ordenar os λ_n's em ordem crescente:

$$-\infty \ < \ \lambda_1 \ < \ \lambda_2 \ < \ \lambda_3 \ < \ \cdots \tag{18.100}$$

com $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. Uma segunda consequência de importância relaciona o problema de Sturm-Liouville com a função de Green. Seja u um vetor arbitrário de $\mathcal{H}_r$. Como dissemos, podemos escrever $u = \lim\limits_{N\to\infty} u^N$, onde $u^N = \sum\limits_{n=1}^{N} c_n u_n$, onde os c_n's são dados por (18.98). Como K é contínuo, temos que

$$
\begin{aligned}
(Ku)(x) \;=\; \lim_{N\to\infty}(Ku^N)(x) \;=\; \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} c_n\,(Ku_n)(x) \;&=\; \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda_n}\,c_n\,u_n(x)\\
&=\; \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda_n}\left(\int_a^b u_n(y)u(y)r(y)\,dy\right)u_n(x)\\
&=\; \int_a^b r(y)\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{u_n(x)u_n(y)}{\lambda_n}\right)u(y)\,dy\;. \qquad (18.101)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, sabemos que, pela definição, $(Ku)(x) = -\int_a^b G(x,\ y)r(y)\ u(y)$. Como ambas relações valem para qualquer $u \in \mathcal{H}_r$, concluímos que

$$
G(x,\ y) \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)u_n(y)}{\lambda_n}\;. \qquad (18.102)
$$

É possível demonstrar, o que não faremos aqui, que a soma do lado direito da última expressão é absoluta e uniformemente convergente (vide e.g. [270]). A relação (18.102), que é por vezes chamada *fórmula de Mercer*[18], mostra que a função de Green de um problema de Sturm pode ser escrita como uma expansão envolvendo auto-valores e auto-funções de um problema de Sturm-Liouville. Esse fato é relevante tanto na prática da resolução de equações diferenciais quanto na obtenção de resultados qualitativos sobre a natureza das soluções. Estudaremos adiante algumas dessas aplicações. A expressão (18.102) é ainda mais relavante que a expressão (18.38), página 839, pois é válida em situações mais gerais, por exemplo, em problemas em mais de uma dimensão, onde (18.38) não mais se aplica. Um tratamento mais detalhado das funções de Green é apresentado no Capítulo 39, página 1900, e na Seção 21.11, página 988.

18.3.3 Uma Aplicação do Problema de Sturm-Liouville

Vamos aqui tratar do problema de encontrar as soluções da equação diferencial não-homogênea

$$
Lu + \gamma r(x)u \;=\; f(x)\;, \qquad (18.103)
$$

onde a solução u está ainda sujeita às condições de contorno homogêneas (18.61)-(18.62). Acima, o operador L é definido como anteriormente e assumimos para as funções p, q e r as mesmas condições mencionadas no início do presente capítulo. A função f será assumida uma função real e contínua e γ um número real dado.

Como veremos, a solução pode ser obtida com uso das auto-funções e auto-valores do problema de Sturm-Liouville

$$
Lu + \lambda r(x)u \;=\; 0
$$

com condições de contorno homogêneas do tipo (18.4)-(18.5). Chamaremos esse problema de *problema de Sturm-Liouville associado* (ao problema (18.103)). Novamente suporemos que o problema de Sturm-Liouville associado não tem solução com auto-valor $\lambda = 0$.

Com o uso da representação da função de Green em termos dos auto-valores e auto-funções do problema de Sturm-Liouville associado (fórmula de Mercer, (18.102)), vamos mostrar como podemos encontrar uma expressão para a solução desse problema.

A equação diferencial (18.103) pode ser escrita como

$$
Lu \;=\; -\gamma r(x)u + f\;. \qquad (18.104)
$$

Usando, como fizemos anteriormente, o Teorema de Green, podemos dizer que a função $u(x)$ que satisfaz esta equação diferencial satisfaz também a equação integral

$$
u(x) \;=\; -\gamma\int_a^b G(x,\ y)r(y)u(y)\,dy + \int_a^b G(x,\ y)f(y)\,dy\;. \qquad (18.105)
$$

[18]James Mercer (1883–1932). O trabalho original é: J. Mercer. "Functions of positive type and their connection with the theory of integral equations". Transactions London Phil. Soc. (A) **209**, 415–446 (1909).

Definamos

$$g(x) := \int_a^b G(x, y)f(y)\, dy . \tag{18.106}$$

Usando a fórmula de Mercer para a função de Green, podemos escrever (18.105) como

$$u(x) = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u_n, u\rangle_r}{\lambda_n} u_n(x) + g(x) . \tag{18.107}$$

E. 18.15 *Exercício*. Mostre isso. ✠

Tomando-se o produto escalar de ambos os lados da igualdade com o vetor u_m, tiramos que

$$\left(1 - \frac{\gamma}{\lambda_m}\right)\langle u_m, u\rangle_r = \langle u_m, g\rangle_r . \tag{18.108}$$

Aplicando agora a fórmula de Mercer à definição de g em (18.106), tiramos que

$$g(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\left(\int_a^b u_n(y)\, f(y)\, dy\right) u_n(x) , \tag{18.109}$$

e, portanto, que

$$\langle u_m, g\rangle_r = -\frac{1}{\lambda_m}\int_a^b u_m(y)\, f(y)\, dy , \tag{18.110}$$

ou seja,

$$\langle u_m, g\rangle_r = -\frac{1}{\lambda_m}\langle u_m, f\rangle . \tag{18.111}$$

E. 18.16 *Exercício*. Mostre esses dois últimos resultados. ✠

Até agora não fizemos quaisquer restrições a respeito da constante γ que aparece na equação diferencial não-homogênea (18.103). Há dois casos a supor. Aquele em que γ não é igual a nenhum auto-valor λ_m do problema de Sturm-Liouville associado e aquele caso em que $\gamma = \lambda_s$, para algum auto-valor λ_s do problema de Sturm-Liouville associado.

Caso I. γ não é um auto-valor.

Nesse caso as relações (18.108) e (18.110) dizem-nos que

$$\langle u_m, u\rangle_r = \frac{1}{\gamma - \lambda_m}\int_a^b u_m(y)\, f(y)\, dy \tag{18.112}$$

e, portanto, temos que

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma - \lambda_m}\int_a^b u_m(y)\, f(y)\, dy\right) u_m(x) . \tag{18.113}$$

Esta fórmula dá-nos a solução do problema em termos das auto-funções e auto-valores do problema do Sturm-Liouville associado e mostra-nos uma das razões que tornam importante a solução do mesmo problema de Sturm-Liouville. A série do lado direito converge absoluta e uniformemente em J. É interessante observar que a solução (18.113) pode ser reescrita na forma

$$u(x) = \int_a^b G_\gamma(x, y)\, f(y)\, dy , \qquad \text{onde} \qquad G_\gamma(x, y) := -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{u_m(x)u_m(y)}{\lambda_m - \gamma} . \tag{18.114}$$

A função G_γ é, portanto, uma função de Green para o problema em questão.

Caso II. $\gamma = \lambda_s$ para algum s.

Neste caso o problema tratado nem sempre tem soluções. Para ver isso, note que, supondo-se a existência de uma solução, a relação (18.108) diz-nos neste caso que $\langle u_s, \, g\rangle_r = 0$, ou seja, por (18.111)

$$\langle u_s, \, f\rangle \;=\; \int_a^b u_s(y)\, f(y)\, dy \;=\; 0 \, . \tag{18.115}$$

Caso a função f seja tal que (18.115) não é satisfeita, então nenhuma solução é possível para o problema tratado. Se f, porém, for tal que (18.115) seja válida, teremos que a função $\hat{u}$ dada por

$$\hat{u}(x) \;=\; \sum_{\substack{m=1\\ m\neq s}}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma - \lambda_m} \int_a^b u_m(y)\, f(y)\, dy \right) u_m(x) \tag{18.116}$$

é uma solução do problema tratado. A solução mais geral, porém, é dada por

$$u(x) \;=\; c u_s(x) + \hat{u}(x) \, , \tag{18.117}$$

onde c é uma constante, a ser determinada por alguma imposição adicional a ser feita ao problema. É novamente interessante observar que (18.116) pode ser reescrita na forma

$$\hat{u}(x) \;=\; \int_a^b \widehat{G}_\gamma(x, \, y)\, f(y)\, dy \, , \qquad \text{onde} \qquad \widehat{G}_\gamma(x, \, y) \;:=\; -\sum_{\substack{m=1\\ m\neq s}}^{\infty} \frac{u_m(x) u_m(y)}{\lambda_m - \gamma} \, . \tag{18.118}$$

E. 18.17 *Exercício*. Prove as várias afirmativas acima seguindo passos semelhantes aos do caso **I**. ✠

E. 18.18 *Exercício*. Mostre que esta função u é de fato uma solução (substitua na equação (18.103) e verifique também se as condições de contorno são satisfeitas). Mostre que não pode haver solução mais geral que esta. Para isso use o fato que o auto-valor λ_s é simples. ✠

• O caso de condições de contorno não-homogêneas

Vamos aqui discutir brevemente uma generalização do problema anterior. Procuramos uma solução da equação diferencial não-homogênea

$$Lu + \gamma r(x) u \;=\; f(x) \, , \tag{18.119}$$

onde a solução u está ainda sujeita às condições de contorno não-homogêneas (18.2)-(18.3). Acima, o operador L é definido como anteriormente e assumimos para as funções p, q e r as mesmas condições mencionadas no início destas notas. A função f será assumida ser uma função real e contínua e γ será assumido ser um número real dado.

Esse problema pode ser resolvido combinando métodos que já discutimos. Em primeiro lugar constrói-se uma função w que seja duas vezes diferenciável e satisfaça as condições não-homogêneas (18.2)-(18.3).

Procura-se então uma supostamente existente solução v da equação

$$Lv + \gamma r(x) v \;=\; h(x) \, , \tag{18.120}$$

com

$$h(x) \;=\; f(x) - (L + \gamma r(x)) w(x) \, ,$$

que satisfaça as condições de contorno homogêneas (18.4)-(18.5). Uma tal solução pode ser obtida pelos métodos da Seção 18.3.3, página 855.

É claro, então, que $u = v + w$ satisfará

$$Lu + \gamma r(x) u \;=\; f(x) \tag{18.121}$$

e as condições de contorno não-homogêneas (18.2)-(18.3).

Como vimos, para que a solução v exista é necessário que γ não seja um auto-valor do problema de Sturm-Liouville associado. Caso γ seja um auto-valor, só teremos solução se $\langle u_\gamma, \, h\rangle = 0$, ou seja,

$$\langle u_\gamma, \, f\rangle \;=\; \langle u_\gamma, \, (L + \gamma r) w\rangle \, . \tag{18.122}$$

Vale observar que

$$\langle u_\gamma,\ (L+\gamma r)w\rangle \;=\; \langle u_\gamma,\ Lw\rangle + \langle \gamma r u_\gamma,\ w\rangle \;=\; \langle u_\gamma,\ Lw\rangle - \langle Lu_\gamma,\ w\rangle \ .$$

Note que o lado direito não é forçosamente zero, pois aqui o Lema de Green não se aplica, já que w não é elemento do espaço vetorial $\mathcal{V}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2)$ das funções que satisfazem as condições de contorno homogêneas (18.4)-(18.5). A condição (18.122) fica, então,

$$\langle u_\gamma,\ f\rangle \;=\; \langle u_\gamma,\ Lw\rangle - \langle Lu_\gamma,\ w\rangle \ .$$

Nesse caso de γ ser um auto-valor podemos, como já observamos, acrescentar à solução $\hat{u}$ um múltiplo da auto-função u_γ, obtendo a solução mais geral na forma $cu_\gamma(x)+\hat{u}(x)$.

18.3.4 Métodos Variacionais de Determinação de Autovalores

Inspirados no quociente de Rayleigh (18.79), definamos para uma função v não-nula duas vezes diferenciável definida em $[a,\ b]$ os funcionais

$$\begin{aligned} N[v] \;&:=\; \int_a^b \Big(\big(v'(x)\big)^2 p(x) - v(x)^2 q(x)\Big)\,dx + \Big[p(a)v(a)v'(a) - p(b)v(b)v'(b)\Big] \ , \\ D[v] \;&:=\; \int_a^b v(x)^2\, r(x)\, dx \quad \text{ e} \\ \Lambda[v] \;&:=\; \frac{N[v]}{D[v]} \ . \end{aligned}$$

A expressão (18.79) ensina-nos que se u_λ é auto-função de um problema de Sturm-Liouville com autovalor λ então $\Lambda[u_\lambda]=\lambda$. Podemos colocar-nos a seguinte questão: o que ocorre com o funcional $\Lambda[v]$ se o calcularmos não sobre uma uma auto-função u_λ mas sobre uma função próxima a esssa? Essa pergunta revelou-se de grande importância por permitir uma visão em profundidade dos problemas de Sturm-Liouville e por permitir desenvolver um método muito eficiente de cálculo aproximado dos autovalores de problemas de Sturm-Liouville. No que segue vamos tentar fornecer uma resposta a ela.

Sejam v e h duas função duas vezes diferenciáveis definidas em $[a,\ b]$, com v não-nula, e definamos uma função de $\epsilon\in\mathbb{R}$ por

$$\Lambda[v+\epsilon h] \;=\; \frac{N[v+\epsilon h]}{D[v+\epsilon h]} \ .$$

É claro pela definição que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon}\Lambda[v+\epsilon h] \;&=\; \frac{\left(\frac{d}{d\epsilon}N[v+\epsilon h]\right)D[v+\epsilon h] - \left(\frac{d}{d\epsilon}D[v+\epsilon h]\right)N[v+\epsilon h]}{D[v+\epsilon h]^2} \\ &=\; \frac{1}{D[v+\epsilon h]}\left[\left(\frac{d}{d\epsilon}N[v+\epsilon h]\right) - \Lambda[v+\epsilon h]\left(\frac{d}{d\epsilon}D[v+\epsilon h]\right)\right] \ . \end{aligned} \tag{18.123}$$

Estamos interessados em saber que condições a função v deve satisfazer para que a derivada $\frac{d}{d\epsilon}\Lambda[v+\epsilon h]$ seja nula no ponto $\epsilon=0$ para todo e qualquer $h\in\mathcal{V}(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$. Essa questão é importante em função de sua resposta, a qual é apresentada no importante teorema que segue.

Teorema 18.5 *Considere-se o problema de Sturm-Liouville regular definido (como usual) por*

$$\begin{cases} (p(x)v'(x))' + q(x)v(x) + \lambda r(x)v(x) \;=\; 0\ , \quad \forall x\in[a,\ b]\ , \\ \alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) \;=\; 0\ , \\ \beta_1 v(b) + \beta_2 v'(b) \;=\; 0\ , \end{cases} \tag{18.124}$$

com $(\alpha_1,\ \alpha_2) \neq (0,\ 0)$ e $(\beta_1,\ \beta_2) \neq (0,\ 0)$ e com p, q e r satisfazendo as condições usuais já listadas na Seção 18.3, página 843: 1. p é contínua, diferenciável e $p(x) > 0$ para todo $x \in [a,\ b]$; 2. q é contínua em $[a,\ b]$; 3. r é contínua e $r(x) > 0$ para todo $x \in [a,\ b]$.

Então a derivada $\frac{d}{d\epsilon}\Lambda[v + \epsilon h]$ anula-se no ponto $\epsilon = 0$ para todo e qualquer $h \in \mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ se e somente se v for uma auto-função do problema (18.124), em cujo caso $\lambda = \Lambda[v]$. □

Prova. Desejamos provar que $\frac{d}{d\epsilon}\Lambda[v + \epsilon h]$ anula-se em $\epsilon = 0$ para todo $h \in \mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ se e somente se $v \in \mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ e satisfaz a equação diferencial $(p(x)v'(x))' + q(x)v(x) + \lambda r(x)v(x) = 0$ para algum λ para todo $x \in [a,\ b]$.

Como indica a expressão (18.123), $\frac{d}{d\epsilon}\Lambda[v + \epsilon h]$ anula-se em $\epsilon = 0$ se e somente se

$$\left(\frac{d}{d\epsilon}N[v + \epsilon h]\right)\bigg|_{\epsilon=0} - \Lambda[v]\left(\frac{d}{d\epsilon}D[v + \epsilon h]\right)\bigg|_{\epsilon=0} = 0 . \tag{18.125}$$

Um cálculo explícito mostra que

$$\begin{aligned} N[v + \epsilon h] &= N[v] + \epsilon^2 N[h] \\ &+ \epsilon\left\{2\int_a^b \Big(v'(x)h'(x)p(x) - v(x)h(x)q(x)\Big)\,dx + \Big[p(a)\Big(v(a)h'(a) + v'(a)h(a)\Big) - p(b)\Big(v(b)h'(b) + v'(b)h(b)\Big)\Big]\right\} . \end{aligned}$$

e que

$$D[v + \epsilon h] = D[v] + \epsilon^2 D[h] + 2\epsilon\int_a^b v(x)h(x)\,r(x)\,dx ,$$

e disso obtemos que

$$\frac{d}{d\epsilon}N[v + \epsilon h]\bigg|_{\epsilon=0} = 2\int_a^b \Big(v'(x)h'(x)p(x) - v(x)h(x)q(x)\Big)\,dx + \Big[p(a)\Big(v(a)h'(a) + v'(a)h(a)\Big) - p(b)\Big(v(b)h'(b) + v'(b)h(b)\Big)\Big]$$

e

$$\frac{d}{d\epsilon}D[v + \epsilon h]\bigg|_{\epsilon=0} = 2\int_a^b v(x)h(x)\,r(x)\,dx .$$

Para prosseguirmos, vamos desenvolver mais a expressão para $\frac{d}{d\epsilon}N[v + \epsilon h]\big|_{\epsilon=0}$. Para tal, vamos tratar a integral sobre $v'(x)h'(x)p(x)$ usando integração por partes. Teremos

$$\int_a^b v'(x)h'(x)p(x)\,dx = p(b)v'(b)h(b) - p(a)v'(a)h(a) - \int_a^b \Big(p(x)v'(x)\Big)'h(x)\,dx$$

e, com isso,

$$\frac{d}{d\epsilon}N[v + \epsilon h]\bigg|_{\epsilon=0} = -2\int_a^b \left[\Big(p(x)v'(x)\Big)' + q(x)v(x)\right]h(x)\,dx + \Big[p(a)\Big(v(a)h'(a) - v'(a)h(a)\Big) - p(b)\Big(v(b)h'(b) - v'(b)h(b)\Big)\Big] .$$

Concluímos que a condição (18.125) é válida se e somente se

$$-2\int_a^b \left[\Big(p(x)v'(x)\Big)' + q(x)v(x) + \Lambda[v]r(x)v(x)\right]h(x)\,dx + \Big[p(a)\Big(v(a)h'(a) - v'(a)h(a)\Big) - p(b)\Big(v(b)h'(b) - v'(b)h(b)\Big)\Big] = 0 . \tag{18.126}$$

A relação (18.126) é o ponto central da análise que segue.

Observemos, em primeiro lugar, que se $v = u_\lambda$, uma solução do problema de Sturm-Liouville (18.124) com autovalor λ, então, como vimos, $\Lambda[u_\lambda] = \lambda$ e o fator multiplicando $h(x)$ na integral em (18.126) é nulo. Além disso, pela Proposição 18.1, página 835, as expressões $u_\lambda(a)h'(a) - u_\lambda'(a)h(a)$ e $u_\lambda(b)h'(b) - u_\lambda'(b)h(b)$ também se anulam, já que u_λ e h são elementos de $\mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$. Assim, concluímos que (18.126) (e, portanto, (18.125)) é satisfeita para as autofunções do problema de Sturm-Liouville (18.124).

A recíproca dessa afirmação também pode ser provada. Comecemos considerando o caso em que $h \in \mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ tem suporte compacto contido no intervalo aberto (a, b). Isso significa que h e h' anulam-se nos extremos a e b e, portanto, (18.126) reduz-se a

$$\int_a^b \left[\Big(p(x)v'(x)\Big)' + q(x)v(x) + \Lambda[v]r(x)v(x)\right] h(x)\, dx \;=\; 0\;.$$

Ora, a suposição de que essa igualdade é válida para todo h com suporte compacto no intervalo aberto (a, b) implica que

$$\Big(p(x)v'(x)\Big)' + q(x)v(x) + \Lambda[v]\, r(x)v(x) \;=\; 0 \tag{18.127}$$

para todo $x \in (a, b)$. Como $\Lambda[v]$ é uma constante, isso mostra que v é uma autofunção com autovalor $\Lambda[v]$.

E quanto às condições de contorno? Tomemos $h \in \mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ mas agora com suporte no invervalo semiaberto $[a, b)$. Então, h e h' anulam-se em b. Como já estabelecemos que v satisfaz (18.127) e temos $h(b) = h'(b) = 0$, a condição (18.126) afirma-nos que $p(a)\Big(v(a)h'(a) - v'(a)h(a)\Big) = 0$. Como $p(a) \neq 0$, concluímos que $0 = v(a)h'(a) - v'(a)h(a) = \det\begin{pmatrix} v(a) & v'(a) \\ h(a) & h'(a)\end{pmatrix}$. Isso significa que as linhas da matriz $\begin{pmatrix} v(a) & v'(a) \\ h(a) & h'(a)\end{pmatrix}$ não são linearmente independentes. Escolhendo h de forma que $(h(a), h'(a)) \neq (0, 0)$, Isso significa que existe γ tal que $v(a) = \gamma h(a)$ e $v'(a) = \gamma h'(a)$. Mas isso implica que $\alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) = \gamma(\alpha_1 h(a) + \alpha_2 h'(a)) = 0$, pois $h \in \mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$. *Mutatis mutandis*, trocando os papéis dos pontos a e b na argumentação acima, provamos também que $\beta_1 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0$. Isso estabeleceu que $v \in \mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$.

Provamos, portanto, que uma função duas vezes diferenciável v definida em $[a, b]$ satisfaz a condição (18.125) para toda $h \in \mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ se e somente se for uma auto-função do problema de Sturm-Liouville (18.124). ■

• **Significado e relevância do Teorema 18.5**

O Teorema 18.5 afirma que se considerarmos o funcional $\Lambda[v]$ calculado em funções duas vezes diferenciáveis v definidas em $[a, b]$ e considerarmos perturbações de v por funções de $\mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ essas perturbações terão um extremo (máximo ou mínimo) se e somente se v for uma auto-função de um problema do Sturm-Liouville (18.124). Essa afirmação permite compreender o problema de Sturm-Liouville como um problema variacional, compreensão essa conhecida como *princípio de Rayleigh*, que o descobriu em 1870[19]. Reconhecemos também que os possíveis auto-valores do problema do Sturm-Liouville (18.124) são os valores de $\Lambda[v]$ calculado nos extremos (máximos ou mínimos) desse funcional quando consideradas perturbações por funções de $\mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$. Esse fato permite delinear um método de determinação aproximada de autovalores, tal como ilustrativamente apresentado no Exercício E. 18.12, página 850, no qual se procura perturbar aproximações de autofunções por elementos de um certo subespaço de $\mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ (tipicamente composto por polinômios) e se determina qual dessas perturbações extremiza $\Lambda[v]$. Um método sistemático de efetuar tal procedimento, devido a Ritz[20], poder ser encontrado em diversos textos, e.g. [277] ou [73]-[74].

Métodos variacionais de determinação de auto-valores são muito utilizados na prática, especialmente em cômputos numéricos, tanto por sua simplicidade de implementação quanto por sua eficiência. Originalmente esses métodos foram desenvolvidos no estudo de problemas de Sturm-Liouville, mas os mesmos podem ser empregados em outros problemas envolvendo a determinação de autovalores isolados, problemas esses que ocorrem em diversas aplicações da Mecânica Quântica, tal como na Física Atômica, na Física Nuclear e na Física de Estado Sólido.

18.4 Comentários Finais

18.4.1 Um Problema de Sturm-Liouville Singular

Em diversas situações deparamos com problemas do tipo de Sturm-Liouville, mas que não se enquadram exatamente na definição de Problema de Sturm-Liouville Singular que desenvolvemos neste capítulo. Um exemplo importante é

[19]Phylosophical Transactions of the Royal Society, London, A, **161**, 77 (1870).

[20]Walther Ritz (1878–1909). Trabalho original: W. Ritz "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der Mathematischen Physik", Journal für die reine und angewandete Mathematik (Jounal de Crelle), Vol. 135, 1–61 (1909).

o tratamento da equação de Bessel, dos seus auto-valores e da propriedade de completeza de suas autofunções. Esse problema é discutido em detalhe na Seção 16.4, página 751.

Vamos aqui discutir brevemente uma variante do problema de Sturm-Liouville regular que consiste no problema de determinar as soluções da equação diferencial

$$(pu')' + qu + \lambda ru \;=\; 0 \tag{18.128}$$

para u definida no intervalo fechado finito $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$, $b > a$, com as seguintes condições de contorno

$$u(a) \text{ e } u'(a) \text{ são finitas,} \tag{18.129}$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) \;=\; 0\ , \tag{18.130}$$

onde o seguinte estará sendo suposto:

- As funções p, q e r são reais e contínuas em $[a,\ b]$.
- A função p é diferenciável em $[a,\ b]$ e positiva: $p(x) > 0$ para $x \in (a,\ b]$ mas se anula em $x = a$: $p(a) = 0$
- r é contínua e estritamente positiva em J, ou seja, $r(x) > 0$ para todo $x \in [a,\ b]$.
- As constantes $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1$ e β_2 são reais e tais que $(\alpha_1,\ \alpha_2) \neq (0,\ 0)$ e $(\beta_1,\ \beta_2) \neq (0,\ 0)$.

Como se percebe, a distinção básica entre este problema e o anteriormente tratado reside no fato de que agora $p(x)$ se anula no ponto a. O fato de p anular-se em a implica que a solução pode ser singular nesse ponto. Daí, nenhuma condição de contorno pode ser fixada para o ponto $x = a$, exceto que a solução e sua derivada não sejam divergentes naquele ponto (se isso for desejado).

Um exemplo físico que conduz a esse tipo de situação é o problema das oscilações de uma corda de densidade constante ρ e comprimento L, suspensa verticalmente em um campo gravitacional constante (a aceleração da gravidade sendo g) e presa em uma das suas extremidades, a outra ficando livre. Esse problema é resolvido na Seção 21.5.2, página 959. Se x representa a altura e o ponto onde uma das extremidades fica presa é $x = L$, então a equação que descreve o problema é

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(gx\frac{\partial u}{\partial x}\right) \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

com as condições de contorno $u(0,\ t)$ e $u'(0,\ t)$ finitas e $u(L,\ t) = 0$. Usando o método de separação de variáveis e adotando-se $u(x,\ t) = v(x)w(t)$, obtem-se para w a equação

$$\ddot{w}(t) + \lambda w(t) \;=\; 0$$

e para v

$$(gxv')' + \lambda v \;=\; 0\ ,$$

com $v(L) = 0$ e com $v(0)$ e $v'(0)$ finitos. Aqui λ é uma constante arbitrária a ser determinada pelas condições de contorno. A solução é $v_n(x) = c_n J_0(2\sqrt{\lambda_n x})$, onde J_0 é a função de Bessel de ordem zero, c_n é uma constante e λ_n é o n-ésimo auto-valor, dado por $\lambda_n = \frac{(\alpha_n^0)^2}{4L}$, onde α_n^0 é o n-ésimo zero de J_0 no semi-eixo real positivo. Para um tratamento detalhado desse problema, vide Seção 21.5.2, página 959. O problema para v é claramente um problema de Sturm-Liouville do tipo mencionado acima, já que $p(x) = gx$ se anula em $x = 0$.

Esse tipo de problema de Sturm-Liouville é, por vezes, denominado *Problema de Sturm-Liouville singular*, e para ele nem sempre valem os mesmos resultados que no caso anteriormente tratado, o dos problemas de Sturm-Liouville *regulares*. Por exemplo, nem sempre pode ser garantida a existência de auto-valores e autovetores (ou seja, de soluções para o problema). Isso pode ser visto explicitamente no ilustrativo Exemplo 18.5, página 862.

Mesmo assim, os problemas de Sturm-Liouville singulares, quando solúveis, compartilham algumas propriedades com os problemas regulares, tais como a realidade dos auto-valores e a ortogonalidade das auto-funções.

De fato, é fácil ver que o Lema de Green também vale nesse caso. Seja $\mathcal{V}(\beta_1,\ \beta_2)$ o espaço vetorial de todas as funções f duas vezes diferenciáveis definidas no intervalo $[a,\ b]$ tais que $\beta_1 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0$ e que sejam finitas em $x = a$. Então, se u e v são elementos de $\mathcal{V}(\beta_1,\ \beta_2)$ tem-se

$$\langle v,\ Lu\rangle \;=\; \langle Lv,\ u\rangle\ ,$$

ou seja,

$$\int_a^b \overline{v(x)}\,(Lu)(x)\,dx \;=\; \int_a^b \overline{(Lv)(x)}\,u(x)\,dx\,. \tag{18.131}$$

De fato, como em (18.71) e (18.72), página 846, tem-se

$$\int_a^b \overline{v(x)}\,(Lu)(x)\,dx \;=\; \int_a^b u(x)\,\overline{(Lv)(x)}\,dx + p(b)\left(\overline{v(b)}u'(b) - \overline{v'(b)}u(b)\right) - p(a)\left(\overline{v(a)}u'(a) - \overline{v'(a)}u(a)\right)\,. \tag{18.132}$$

O último termo é zero, pois $p(a) = 0$ e $\overline{v(a)}u'(a) - \overline{v'(a)}u(a)$ é finito. O termo $\overline{v(b)}u'(b) - \overline{v'(b)}u(b)$ é nulo pelo mesmo argumento apresentado quando da primeira demonstração do Lema de Green, para o caso regular (vide página 846 e seguintes).

Uma vez demonstrado o Lema de Green para o problema singular, segue de maneira totalmente análoga ao que demonstramos no caso regular que os auto-valores são reais e que auto-funções de auto-valores distintos são ortogonais entre si em relação ao produto escalar real $\langle\cdot,\cdot\rangle_r$:

$$\langle u_\lambda,\; u_{\lambda'}\rangle_r \;=\; \int_a^b u_\lambda(x)\,u_{\lambda'}(x)\,r(x)\,dx \;=\; 0$$

se $\lambda \neq \lambda'$. Não repetiremos a demonstração aqui e remetemos o leitor ao que foi feito no caso regular.

E. 18.19 *Exercício*. Mostre que, assim como no caso regular, os auto-valores, se existirem, são simples. Para isso estude a demonstração para o caso regular da Seção 18.3.1.1, página 845, e verifique que a mesma se generaliza. ✠

Exemplo 18.5 **[Ausência de Auto-Valores em um Problema Singular]** Considere o seguinte problema de Sturm-Liouville singular definido no intervalo $[0,\ 1]$:

$$(x^2u')' + \lambda u \;=\; 0\,,$$

com $u(1) = 0$ e u finita em $x = 0$. A equação diferencial é

$$x^2u'' + 2xu' + \lambda u \;=\; 0\,,$$

que é uma equação do tipo de Euler, de segunda ordem. A solução pode ser procurada na forma $u(x) = x^\gamma$ e obtem-se

$$\gamma \;=\; \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{2}\,.$$

Assim, para $\lambda \neq 1/4$, tem-se

$$u(x) \;=\; Ax^{\frac{-1+\sqrt{1-4\lambda}}{2}} + Bx^{\frac{-1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}}\,.$$

Como deseja-se $u(1) = 0$ tem-se $A = -B$ e, assim,

$$u(x) \;=\; A\left(x^{\frac{-1+\sqrt{1-4\lambda}}{2}} - x^{\frac{-1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}}\right)\,.$$

Essa solução só será finita em $x = 0$ se[21]

$$-1 + \mathrm{Re}\,\sqrt{1-4\lambda} \;\geq\; 0 \qquad \text{e} \qquad -1 - \mathrm{Re}\,\sqrt{1-4\lambda} \;\geq\; 0\,.$$

Ambas as condições não podem ser satisfeitas simultaneamente para nenhum λ (pois somando-se ambas as desigualdades, teríamos $-2 \geq 0$, o que é obviamente falso). Para $\lambda = 1/4$ a solução é $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(A\ln x + B)$ e a condição $u(1) = 0$ implica $B = 0$ e, portanto, $u(x) = A\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x$, que não é finita em $x = 0$, exceto no caso trivial em que $A = 0$. Logo, o problema tratado não tem solução para nenhum auto-valor. ⌑

[21] Outra possibilidade seria escolher $A = 0$, ou seja, $u(x) = 0$, solução trivial que não interessa como auto-função.

18.5 Exercícios Adicionais

E. 18.20 *Exercício*. Determine a função de Green para o seguinte problema de Sturm: $u'' = f(x)$, com $\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0$, $\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$, com $x \in [a, b]$, $a < b$.

Mostre que esse problema só tem solução única se $(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$. ✠

E. 18.21 *Exercício*. **a)** Determine a função de Green do seguinte problema de Sturm $u'' = f(x)$, onde u é definida no intervalo $x \in [0, 1]$ e satisfaz as seguintes condições de contorno:

$$u'(0) = 0 , \qquad u(1) = 0 . \tag{18.133}$$

b) Determine os auto-valores e auto-funções *normalizadas* do problema de Sturm-Liouville

$$u'' + \lambda u = 0 ,$$

onde u é também definida no intervalo $x \in [0, 1]$ e satisfaz as mesmas condições de contorno (18.133).

c) Expresse a função de Green do problema de Sturm do item a) em termos dos auto-valores e auto-funções normalizadas obtidas em b) e, usando a expressão assim obtida, prove a seguinte identidade

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} .$$

d) Determine a solução do problema de Sturm do caso a) para $f(x) = (3-x)e^x$. Use para tal a função de Green.

e) Mostre explicitamente que a solução obtida no item d) satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno desejadas.

✠

E. 18.22 *Exercício*. Determine explicitamente a função de Green para os seguintes problemas de Sturm:

a) $u'' = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u(1) = 0$.

b) $u'' = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$.

c) $u'' = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u(1) + u'(1) = 0$.

d) $u'' + u = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$.

e) $(xu')' = f(x)$, com $u(1) = 0$, $u(e) = 0$.

✠

E. 18.23 *Exercício*. Determine explicitamente a solução dos cinco problemas de Sturm acima para o caso em que $f(x) = x$. ✠

E. 18.24 *Exercício*. Determine explicitamente a função de Green para o seguinte problema de Sturm:

$$(xu')' - \frac{\mu^2}{x} u = f(x) ,$$

onde $\mu > 0$, com as condições de contorno com $u(a) = 0$ e $u(b) = 0$, onde $0 < a < b < \infty$.

Verifique que funções do tipo

$$v(x) = c_1 x^{\mu} + c_2 x^{-\mu} ,$$

são soluções da equação homogênea e, com as mesmas, monte a função de Green.

A solução obtida vale também caso $a = 0$? Note que, nesse caso, a função $p(x) = x$ não é estritamente positiva no intervalo $[a, b]$.
✠

E. 18.25 *Exercício*. Uma partícula de massa $m > 0$ se move em uma dimensão sob um potencial $U(x) = \dfrac{kx^2}{2}$ com $k > 0$ (potencial do oscilador harmônico). Além disso, a partícula está submetida a uma força externa $f(t)$ que, como a notação indica, pode variar com o tempo.

Suponha que se saiba que no instante de tempo $t_0 = 0$ a partícula encontra-se na posição $x(t_0) = 0$ e que no instante de tempo $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$, onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, a partícula encontra-se novamente na posição $x(t_1) = 0$.

Determine a função de Green para o problema de Sturm associado ao problema mecânico acima e determine a trajetória $x(t)$ da partícula para $t \in [t_0, t_1]$ para os seguintes tipos de força:

a) $f(t) = At$, para $A > 0$, constante e

b) $f(t) = B\,\mathrm{sen}(\omega t)$, para $B > 0$, constante. ✠

E. 18.26 *Exercício*. Resolva os seguintes problemas de Sturm-Liouville, determinando os auto-valores e as auto-funções normalizadas:

a) $u'' + \lambda u = 0$, com $u(0) = 0$, $u(1) = 0$.

b) $u'' + \lambda u = 0$, com $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$.

c) $u'' + \lambda u = 0$, com $u(0) = 0$, $u(1) + u'(1) = 0$.

d) $u'' + u' + \lambda u = 0$, com $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$. Neste caso, mostre graficamente que há infinitos auto-valores e que, à medida em que eles crescem, a distância entre eles tende a uma constante. Ocorrem auto-valores negativos? Zero é um possível auto-valor?

✠

E. 18.27 *Exercício*. Para cada um dos casos do Exercício E. 18.26, expresse a função de Green do problema de Sturm correspondente usando a fórmula de Mercer (18.102). *Importante:* não esqueça de normalizar as auto-funções. ✠

E. 18.28 *Exercício*. Resolva o seguinte problema de Sturm-Liouville, determinando os auto-valores e as auto-funções normalizadas:

$$(xu')' + \frac{\lambda}{x}u = 0 ,$$

com $u(1) = 0$ e $u(e) = 0$.

Determine as relações de ortogonalidade entre as auto-funções. Verifique-as explicitamente.

Expresse a função de Green do problema de Sturm correspondente usando a fórmula de Mercer.

Sugestão: Verifique que funções do tipo

$$c_1 e^{i\sqrt{\lambda}\ln x} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}\ln x} ,$$

são as soluções gerais de $(xu')' + \frac{\lambda}{x}u = 0$. Mostre, daí, que as auto-funções são da forma

$$u_n(x) = c_n \,\mathrm{sen}(n\pi \ln x) ,$$

$n = 1, 2, \ldots$. Determine c_n impondo que cada u_n seja normalizada. ✠

E. 18.29 *Exercício*. Resolva explicitamente o problema de Sturm-Liouville semi-homogêneo

$$(xu')' + \frac{\gamma}{x}u = f(x) , \qquad x \in [1, e] ,$$

com $u(1) = 0$ e $u(e) = 0$, γ fixo, $\gamma \neq n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \ldots$, primeiramente para f genérica e depois, explicitamente, para $f(x) = x^{-1}$. ✠

E. 18.30 *Exercício*. Considere o seguinte problema de Sturm, definido no intervalo $[0, 1]$:

$$(e^x u')' = f(x) ,$$

com $u(0) = u(1) = 0$.

a. Determine explicitamente a função de Green desse problema.

b. Determine os auto-valores e as auto-funções *normalizadas* do problema de Sturm-Liouville

$$(e^x u')' + \lambda e^x u = 0 ,$$

com $x \in [0, 1]$ e com $u(0) = u(1) = 0$.

c. Usando a fórmula de Mercer, expresse função de Green em termos de uma série envolvendo os auto-valores e as auto-funções normalizadas.

d. Determine explicitamente a solução da equação diferencial

$$(e^x u')' + 5e^x u \;=\; f(x), \qquad x \in [0,\ 1]\ ,$$

com $u(0) = u(1) = 0$, para $f(x) = e^{x/2}$.

✠

E. 18.31 *Exercício*. Seja o problema de Sturm-Liouville $u'' + \lambda u = 0$, no intervalo $[0,\ 1]$, com as condições de contorno $u(0) = 0$ e $\beta_1 u(1) + \beta_2 u'(1) = 0$.

a. Determine os auto-valores positivos no caso $\beta_1 = 0$, no caso $\beta_2 = 0$, e indique como determiná-los no caso em que ambos β_1 e β_2 são não-nulos. Determine as auto-funções em cada situação.

b. Que relação devem satisfazer as constantes β_1 e β_2 para que $\lambda = 0$ seja um auto-valor? Determine a auto-função correspondente, caso a mesma exista.

c. Que relação devem satisfazer as constantes β_1 e β_2 para que haja também auto-valores λ negativos? Quantos são os auto-valores negativos, se os houver? Determine suas auto-funções, se as houver.

d. Reunindo os resultados obtidos, indique no plano Cartesiano $(\beta_1,\ \beta_2)$ a região onde os auto-valores são estritamente positivos, a região onde ocorre o auto-valor zero e a região onde ocorrem auto-valores negativos além dos auto-valores positivos.

Nota. Em **a**, **b** e **c** não é necessário normalizar as auto-funções. ✠

E. 18.32 *Exercício*. [Adaptado de [277]].

a. Obtenha a função de Green associada ao problema de Sturm $y''(x) = f(x)$ com $x \in [0,\ 1]$ e $y(0) = y(1) = 0$.

b. Mostre que as auto-funções do problema de Sturm-Liouville

$$y''(x) + \lambda x y(x) \;=\; 0 \tag{18.134}$$

com $x \in [0,\ 1]$ e $y(0) = y(1) = 0$ são dadas por $y_n(x) = \sqrt{x} J_{1/3}\big(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda_n x^3}\big)$, com λ_n positivos e satisfazendo $J_{1/3}\big(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda_n}\big) = 0$. *Sugestão.* Para $\lambda \neq 0$ a equação (18.134) é uma *equação de Airy*, cuja solução é discutira na Seção 14.1.4, página 622. A relação entre suas soluções e as funções de Bessel é apresentada e discutida à página 652.

c. Determine as relações de ortogonalidade entre essas auto-funções. Obtenha as auto-funções normalizadas. Sugestão: use as relações de ortogonalidade das funções de Bessel.

d. Expresse a função de Green do problema de Sturm correspondente usando a fórmula de Mercer.

e. Determine aproximadamente os dois primeiros auto-valores usando o método variacional. Sugestão: procure aproximantes da forma $y_{(2)}(x) = c_1 x(1-x) + c_2 x^2(1-x)$.

f. Obtenha os zeros "exatos" de $J_{1/3}$ em alguma tabela e compare os resultados, indicando os erros percentuais.

g. Resolva explicitamente a equação diferencial $y'' + \gamma x y = f(x)$, $x \in [0,\ 1]$, com $y(0) = 0$ e $y(1) = 0$, γ fixo, $\gamma \neq \lambda_n$, para todo n, primeiramente para f genérica e depois, explicitamente, para $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}$. Sugestão: use a identidade

$$\int_0^1 J_\nu(au)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \;=\; \frac{\pi}{2}\Big[J_{\frac{\nu}{2}}\Big(\frac{a}{2}\Big)\Big]^2\ ,$$

válida para $a > 0$, $\nu > -1$.

✠

Apêndices

18.A Prova do Teorema 18.1. Existência e Unicidade

Abaixo faremos uso da notação e de resultados do Capítulo 13, página 535.

A equação $u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = g(x)$ é equivalente à equação de primeira ordem

$$Y'(x) \; = \; A(x)Y(x) + G(x)$$

onde

$$Y(x) \; = \; \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \qquad A(x) \; = \; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \\ -a_0(x) & -a_1(x) \end{pmatrix}, \quad G(x) \; = \; \begin{pmatrix} 0 \\ \\ g(x) \end{pmatrix},$$

com as identificações $u(x) = y_1(x)$, $u'(x) = y_2(x)$.

A solução é da forma

$$Y(x) \; = \; D(x,\; x_0)Y_{x_0} + \int_{x_0}^{x} D(x,\; y)G(y)\, dy \; ,$$

onde $Y_{x_0} = Y(x_0)$, x_0 arbitrário.

É fácil ver daí que a solução geral da equação $u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = g(x)$ é da forma

$$u(x) \; = \; A_1 u_1(x) + A_2 u_2(x) + u_p(x) \; ,$$

onde A_1 e A_2 são constantes, u_1 e u_2 são soluções independentes da equação homogênea $u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0$ e u_p é uma solução particular da equação não-homogênea $u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = g(x)$.

Desejamos impor as condições de contorno

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) \;\; = \;\; \varphi_1, \tag{18.A.1}$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) \;\; = \;\; \varphi_2 \; , \tag{18.A.2}$$

à solução. Isso implica

$$\alpha_1\Big(A_1 u_1(a) + A_2 u_2(a) + u_p(a)\Big) + \alpha_2\Big(A_1 u_1'(a) + A_2 u_2'(a) + u_p'(a)\Big) \;\; = \;\; \varphi_1 \; , \tag{18.A.3}$$

$$\beta_1\Big(A_1 u_1(b) + A_2 u_2(b) + u_p(b)\Big) + \beta_2\Big(A_1 u_1'(b) + A_2 u_2'(b) + u_p'(b)\Big) \;\; = \;\; \varphi_2 \; . \tag{18.A.4}$$

Esse par de equações pode ser escrito em forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) & \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u_2'(a) \\ \\ \beta_1 u_1(b) + \beta_2 u_1'(b) & \beta_1 u_2(b) + \beta_2 u_2'(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 - \alpha_1 u_p(a) - \alpha_2 u_p'(a) \\ \\ \varphi_2 - \beta_1 u_p(b) - \beta_2 u_p'(b) \end{pmatrix}. \tag{18.A.5}$$

E. 18.33 *Exercício*. Verifique. ✠

Essa última equação (cujas incógnitas são A_1 e A_2) tem solução única se e somente se

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) & \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u_2'(a) \\ \\ \beta_1 u_1(b) + \beta_2 u_1'(b) & \beta_1 u_2(b) + \beta_2 u_2'(b) \end{pmatrix}$$

for uma matriz inversível, ou seja, se e somente se seu determinante for não-nulo. Isso completa a demonstração. ■

18.B Prova da Proposição 18.2

Pelas hipóteses mencionadas, existem funções u_1 e u_2 independentes entre si que são soluções de $Lu = 0$ e satisfazem (18.25). Sejam c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} definidas por

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) & \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u_2'(a) \\ \beta_1 u_1(b) + \beta_2 u_1'(b) & \beta_1 u_2(b) + \beta_2 u_2'(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u_2'(a) & -(\alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a)) \\ \beta_1 u_2(b) + \beta_2 u_2'(b) & -(\beta_1 u_1(b) + \beta_2 u_1'(b)) \end{pmatrix} .$$

Note-se que, por (18.25),

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) & \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u_2'(a) \\ \beta_1 u_1(b) + \beta_2 u_1'(b) & \beta_1 u_2(b) + \beta_2 u_2'(b) \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 . \tag{18.B.6}$$

Sejam as funções $v_1(x)$ e $v_2(x)$ definidas por

$$\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} .$$

Pela definição,

$$\begin{pmatrix} Lv_1 \\ Lv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Lu_1 \\ Lu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

pois $Lu_1 = Lu_2 = 0$. Além disso,

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_1'(x) \\ v_2(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x) & u_1'(x) \\ u_2(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} \tag{18.B.7}$$

e como

$$\det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_1'(x) \\ u_2(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0 ,$$

pois u_1 e u_2 são independentes, segue de (18.B.6) que

$$\det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_1'(x) \\ v_2(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0 , \tag{18.B.8}$$

para todo $x \in [a,\ b]$, provando que v_1 e v_2 são também independentes. Tem-se de (18.B.7)

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 v_1(x) + \alpha_2 v_1'(x) \\ \\ \alpha_1 v_2(x) + \alpha_2 v_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x) & v_1'(x) \\ \\ v_2(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x) & u_1'(x) \\ \\ u_2(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_1'(x) \\ \\ \alpha_1 u_2(x) + \alpha_2 u_2'(x) \end{pmatrix} .$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 v_1(a) + \alpha_2 v_1'(a) \\ \\ \alpha_1 v_2(a) + \alpha_2 v_2'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) \\ \\ \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u_2'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_{12} \\ \\ c_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \end{pmatrix} , \tag{18.B.9}$$

que afirma, em particular, que

$$\alpha_1 v_1(a) + \alpha_2 v_1'(a) \; = \; 0 . \tag{18.B.10}$$

Analogamente,

$$\begin{pmatrix} \beta_1 v_1(x) + \beta_2 v_1'(x) \\ \\ \beta_1 v_2(x) + \beta_2 v_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x) & v_1'(x) \\ \\ v_2(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x) & u_1'(x) \\ \\ u_2(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 u_1(x) + \beta_2 u_1'(x) \\ \\ \beta_1 u_2(x) + \beta_2 u_2'(x) \end{pmatrix} .$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} \beta_1 v_1(b) + \beta_2 v_1'(b) \\ \\ \beta_1 v_2(b) + \beta_2 v_2'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 u_1(b) + \beta_2 u_1'(b) \\ \\ \beta_1 u_2(b) + \beta_2 u_2'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_{22} \\ \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21} \\ \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{18.B.11}$$

que afirma, em particular, que

$$\beta_1 v_2(b) + \beta_2 v_2'(b) \; = \; 0 . \tag{18.B.12}$$

As relações (18.B.10) e (18.B.12) são precisamente o que afirmamos em (18.31) e (18.32). Note-se que de (18.B.6), de (18.B.9) e de (18.B.11) obtem-se também que $\alpha_1 v_2(a) + \alpha_2 v_2'(a) \neq 0$ e que $\beta_1 v_1(b) + \beta_2 v_1'(b) \neq 0$. Isso conclui o que queríamos provar sobre a existência e propriedades das funções v_1 e v_2. ■

18.C Comentário Sobre o Determinante Wronskiano

Faremos aqui um comentário sobre a noção de determinante Wronskiano introduzida no Capítulo 13, página 13 (vide página 544) e aquele apresentado na definição. (18.39). Abaixo faremos uso de notação e de resultados daquele capítulo.

A equação $Lu = 0$ pode ser escrita na forma $u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0$ que, por sua vez, é equivalente à equação de primeira ordem

$$Y'(x) \; = \; A(x)Y(x) ,$$

onde

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \qquad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) \end{pmatrix},$$

com as identificações $u(x) = y_1(x)$, $u'(x) = y_2(x)$.

A solução é da forma

$$Y(x) = D(x, x_0)Y_{x_0},$$

onde $Y_{x_0} = Y(x_0)$, x_0 arbitrário.

Se Y_1 e Y_2 são duas soluções independentes da equação homogênea $Y'(x) = A(x)Y(x)$, o determinante Wronskiano (segundo a definição usada no Capítulo 13, página 13 (vide página 544)) é

$$\det \Big[\!\Big[Y_1(x), Y_2(x) \Big]\!\Big].$$

Como comentamos acima, Y_1 e Y_2 são da forma

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_1'(x) \end{pmatrix}, \qquad Y_2(x) = \begin{pmatrix} u_2(x) \\ u_2'(x) \end{pmatrix},$$

onde u_1 e u_2 são duas soluções independentes de $Lu = 0$.

É claro então que

$$\det \Big[\!\Big[Y_1(x), Y_2(x) \Big]\!\Big] = \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_1'(x) \\ u_2(x) & u_2'(x) \end{pmatrix}.$$

A última igualdade é apenas o fato de que o determinante de uma matriz não muda quando a transpomos.

Por outro lado, a relação (18.B.7) nos diz que

$$\det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_1'(x) \\ v_2(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_1'(x) \\ u_2(x) & u_2'(x) \end{pmatrix}. \tag{18.C.13}$$

Como $\det \left(\begin{smallmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{smallmatrix}\right)$ é não-nulo, isso diz que $\det \left(\begin{smallmatrix} v_1(x) & v_1'(x) \\ v_2(x) & v_2'(x) \end{smallmatrix}\right)$ e $\det \left(\begin{smallmatrix} u_1(x) & u_1'(x) \\ u_2(x) & u_2'(x) \end{smallmatrix}\right)$ diferem apenas por um fator constante. Agora $\det \left(\begin{smallmatrix} v_1(x) & v_1'(x) \\ v_2(x) & v_2'(x) \end{smallmatrix}\right)$ é o determinante Wronskiano, introduzido em (18.39). Com isso, mostramos que o determinante Wronskiano do Capítulo 13, página 535, difere apenas por um fator não-nulo constante daquele introduzido em (18.39).

18.D Demonstração do Teorema 18.3

A demonstração que se segue é parcialmente derivada da referência [148], mas as ideias empregadas ser encontradas de forma generalizada na literatura da Análise Funcional dedicada a estimativas de auto-valores. Nesse sentido, essa demonstração pode ser de particular interesse ao estudante interessado em propriedades do espectro de operadores diferenciais lineares, por representar um caso mais simples de resultados mais gerais obtidos com recursos, por vezes, mais elaborados.

A expressão (18.82), página 849, será nosso ponto de partida para mostrar que os auto-valores λ são limitados inferiormente, ou seja, que existe uma constante $M \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \geq M$.

As constantes γ_1 e γ_2 encontradas em (18.82) são números reais que podem ser positivos ou negativos. Vamos considerar os quatro casos possíveis: 1. $\gamma_1 \geq 0$ e $\gamma_2 \geq 0$; 2. $\gamma_1 < 0$ e $\gamma_2 \geq 0$; 3. $\gamma_1 \geq 0$ e $\gamma_2 < 0$; 4. $\gamma_1 < 0$ e $\gamma_2 < 0$.

Caso 1. $\gamma_1 \geq 0$ e $\gamma_2 \geq 0$.

Nesse caso tem-se de (18.82) que

$$\lambda \int_a^b u(x)^2 r(x)\, dx \;\geq\; -\int_a^b u(x)^2 q(x)\, dx\;,$$

pois $\gamma_1 u(a)^2 + \gamma_2 u(b)^2 \geq 0$ e $\int_a^b \big(u'(x)\big)^2 p(x)dx \geq 0$, pois $p(x) > 0$. Logo,

$$\lambda \;\geq\; -\frac{\displaystyle\int_a^b u(x)^2\, q(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b u(x)^2\, r(x)\, dx} \;=\; \frac{\displaystyle\int_a^b u(x)^2 \left(-\frac{q(x)}{r(x)}\right) r(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b u(x)^2\, r(x)\, dx}\;. \tag{18.D.14}$$

Sejam agora

$$Q \;=\; \max_{x\in[a,\,b]} q(x), \qquad R_1 \;=\; \max_{x\in[a,\,b]} r(x), \qquad \text{e} \qquad R_2 \;=\; \min_{x\in[a,\,b]} r(x)\;.$$

Lembrando que $r(x) > 0$ para todo $x \in [a,\ b]$, teremos $-\frac{q(x)}{r(x)} \geq -\frac{Q}{r(x)}$. Como consequência disso, vale

$$-\frac{q(x)}{r(x)} \;\geq\; B \;:=\; \begin{cases} 0 & ,\ \text{se } Q = 0\;, \\ -\dfrac{Q}{R_1} & ,\ \text{se } Q < 0\;, \\ -\dfrac{Q}{R_2} & ,\ \text{se } Q > 0\;. \end{cases} \tag{18.D.15}$$

E. 18.34 *Exercício*. Justifique cuidadosamente as desigualdades acima. ✠

Retornando a (18.D.14)

$$\lambda \;\geq\; \frac{\displaystyle\int_a^b |u(x)|^2 B r(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b |u(x)|^2 r(x)\, dx} \;=\; B\;,$$

onde B está definida em (18.D.15). Adotando $M = B$ para esse caso, obtemos o que se queria provar.

Caso 2. $\gamma_1 < 0$ e $\gamma_2 \geq 0$.

Nesse caso tem-se de (18.82) que

$$\lambda \int_a^b u(x)^2 r(x)\, dx \;\geq\; \int_a^b \Big(\big(u'(x)\big)^2 p(x) - u(x)^2 q(x)\Big)\, dx + \gamma_1 u(a)^2\;, \tag{18.D.16}$$

pois $\gamma_2 u(b)^2 \geq 0$.

No Apêndice 18.D.1, página 872, demonstramos a seguinte desigualdade, válida para todo $x \in [a,\ b]$ e todo $\epsilon > 0$:

$$u(x)^2 \;\leq\; \epsilon \int_a^b \big(u'(y)\big)^2\, dy + \xi(\epsilon) \int_a^b u(y)^2 r(y)\, dy\;, \tag{18.D.17}$$

onde

$$\xi(\epsilon) \;:=\; \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{b-a} + \frac{1}{\epsilon}\right)\;,$$

R_2 sendo definido como acima: $R_2 = \min_{x\in[a,\,b]} r(x)$.

Tomando $x = a$, temos

$$\gamma_1 u(a)^2 \;\geq\; \gamma_1 \epsilon \int_a^b \big(u'(y)\big)^2\, dy + \gamma_1 \xi(\epsilon) \int_a^b u(y)^2 r(y)\, dy\;,$$

sendo que a desigualdade se inverteu pois $\gamma_1 < 0$, por hipótese. Inserindo isso em (18.D.16), tem-se

$$\lambda \int_a^b u(x)^2 r(x)\, dx \;\geq\; \int_a^b (p(x) + \gamma_1 \epsilon)\left(u'(x)\right)^2 dx + \int_a^b (\gamma_1 \xi(\epsilon) r(x) - q(x))\, u(x)^2\, dx \; .$$

Até agora não fixamos o valor de ϵ. Vamos agora escolhê-lo pequeno o suficiente de modo que

$$p(x) + \gamma_1 \epsilon \;\geq\; 0 \; ,$$

para todo $x \in [a,\; b]$. Isso é sempre possível, pois, por hipótese $p(x) > 0$ para todo $x \in [a,\; b]$. Com essa escolha a integral $\int_a^b (p(x) + \gamma_1 \epsilon)\left(u'(x)\right)^2 dx$ é positiva e podemos escrever

$$\lambda \int_a^b u(x)^2 r(x)\, dx \;\geq\; \int_a^b (\gamma_1 \xi(\epsilon) r(x) - q(x))\, u(x)^2\, dx \;=\; \int_a^b \left(\gamma_1 \xi(\epsilon) - \frac{q(x)}{r(x)}\right) u(x)^2 r(x)\, dx \; .$$

Com o uso de (18.D.15) isso fica

$$\lambda \int_a^b u(x)^2 r(x)\, dx \;\geq\; (\gamma_1 \xi(\epsilon) + B) \int_a^b u(x)^2 r(x)\, dx \; ,$$

o que implica

$$\lambda \;\geq\; (\gamma_1 \xi(\epsilon) + B) \; .$$

Adotando-se $M = (\gamma_1 \xi(\epsilon) + B)$ para esse caso, obtemos que queríamos provar.

Caso 3. $\gamma_1 \geq 0$ e $\gamma_2 < 0$.

Esse caso é totalmente análogo ao caso 2, e não precisa ser considerado em detalhe.

Caso 4. $\gamma_1 < 0$ e $\gamma_2 < 0$.

Esse caso é também análogo ao caso 2, mas trataremos dos detalhes. De (18.82) temos

$$\lambda \int_a^b u(x)^2 r(x)\, dx \;\geq\; \int_a^b \Big(\left(u'(x)\right)^2 p(x) - u(x)^2 q(x)\Big)\, dx + \gamma_1 u(a)^2 + \gamma_2 u(b)^2 \; . \tag{18.D.18}$$

Usando novamente a desigualdade (18.D.17) para $x = a$ e $x = b$, temos

$$\gamma_1 u(a)^2 + \gamma_2 u(b)^2 \;\geq\; (\gamma_1 + \gamma_2)\epsilon \int_a^b \left(u'(y)\right)^2 dy + (\gamma_1 + \gamma_2)\xi(\epsilon) \int_a^b u(y)^2 r(y)\, dy,$$

sendo que a desigualdade se inverteu pois $\gamma_1 < 0$ e $\gamma_2 < 0$, por hipótese. Inserindo isso em (18.D.16), tem-se

$$\lambda \int_a^b u(x)^2 r(x)\, dx \;\geq\; \int_a^b (p(x) + (\gamma_1 + \gamma_2)\epsilon)\left(u'(x)\right)^2 dx + \int_a^b ((\gamma_1 + \gamma_2)\xi(\epsilon) r(x) - q(x))\, u(x)^2\, dx.$$

Até agora não fixamos o valor de ϵ. Vamos agora escolhê-lo pequeno o suficiente de modo que

$$p(x) + (\gamma_1 + \gamma_2)\epsilon \;\geq\; 0 \; ,$$

para todo $x \in [a,\; b]$. Isso é sempre possível, pois, por hipótese $p(x) > 0$ para todo $x \in [a,\; b]$. Com essa escolha a integral $\int_a^b (p(x) + (\gamma_1 + \gamma_2)\epsilon)\left(u'(x)\right)^2 dx$ é positiva e podemos escrever

$$\lambda \int_a^b u(x)^2 r(x)\; dx \quad\geq\quad \int_a^b ((\gamma_1 + \gamma_2)\xi(\epsilon) r(x) - q(x))\, u(x)^2\; dx \quad=\quad \int_a^b \left((\gamma_1 + \gamma_2)\xi(\epsilon) - \frac{q(x)}{r(x)}\right) |u(x)|^2 r(x)\; dx \; .$$

Com o uso de (18.D.15) isso fica

$$\lambda \int_a^b u(x)^2 r(x)\, dx \;\geq\; ((\gamma_1 + \gamma_2)\xi(\epsilon) + B) \int_a^b u(x)^2 r(x)\, dx \; ,$$

o que implica

$$\lambda \;\geq\; \Big((\gamma_1 + \gamma_2)\xi(\epsilon) + B\Big) \; .$$

Adotando-se $M = ((\gamma_1 + \gamma_2)\xi(\epsilon) + B)$ para esse caso, isto é o que queríamos provar. Com isso, a demonstração do Teorema 18.3 está completa. ■

18.D.1 Prova da Desigualdade (18.D.17)

Seja u uma função qualquer duas vezes diferenciável definida em $[a,\ b]$. Sejam $x \in [a,\ b]$ e $x_0 \in [a,\ b]$. Tem-se

$$u(x)^2 \;=\; u(x_0)^2 + \int_{x_0}^{x} \big(u(y)^2\big)' \, dy \;=\; u(x_0)^2 + 2\int_{x_0}^{x} u'(y)u(y)\, dy \;.$$

Portanto, tem-se, para quaisquer $x,\ x_0 \in [a,\ b]$,

$$u(x)^2 \;\leq\; u(x_0)^2 + 2\left|\int_{x_0}^{x} u'(y)u(y)\, dy\right| \;.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\int_{x_0}^{x} u'(y)u(y)\, dy\right| \;\leq\; \left[\int_{x_0}^{x} \big(u'(y)\big)^2 \, dy\right]^{1/2} \left[\int_{x_0}^{x} u(y)^2 \, dy\right]^{1/2} \;.$$

Consequentemente, juntando as duas últimas desigualdades,

$$u(x)^2 \;\leq\; u(x_0)^2 + 2\left[\int_{x_0}^{x} u(y)^2 \, dy\right]^{1/2} \left[\int_{x_0}^{x} \big(u'(y)\big)^2 \, dy\right]^{1/2} \;.$$

Como x e x_0 são elementos de $[a,\ b]$ é também óbvio que

$$\int_{x_0}^{x} u(y)^2 \, dy \;\leq\; \int_{a}^{b} |u(y)|^2 \, dy \qquad \text{e que} \qquad \int_{x_0}^{x} \big(u'(y)\big)^2 \, dy \;\leq\; \int_{a}^{b} \big(u'(y)\big)^2 \, dy \;,$$

já que ao passarmos de uma integral em $[x_0,\ x]$ a uma integral em $[a,\ b]$ estamos em geral aumentando o intervalo de integração e, em ambos os casos, o integrando é positivo. Assim,

$$u(x)^2 \;\leq\; u(x_0)^2 + 2\left[\int_{a}^{b} u(y)^2 \, dy\right]^{1/2} \left[\int_{a}^{b} \big(u'(y)\big)^2 \, dy\right]^{1/2} \;.$$

Para qualquer $\epsilon > 0$ isso pode ser reescrito como

$$u(x)^2 \;\leq\; u(x_0)^2 + 2\left[\frac{1}{\epsilon}\int_{a}^{b} u(y)^2 \, dy\right]^{1/2} \left[\epsilon\int_{a}^{b} \big(u'(y)\big)^2 \, dy\right]^{1/2} \;. \tag{18.D.19}$$

Se A e B são dois números positivos, é fácil provar a partir de $\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)^2 \geq 0$, que $2\sqrt{A}\sqrt{B} \leq A+B$. Usando isso em (18.D.19) com $A = \frac{1}{\epsilon}\int_a^b u(y)^2\, dy$ e $B = \epsilon\int_a^b \big(u'(y)\big)^2\, dy$, tem-se

$$u(x)^2 \;\leq\; u(x_0)^2 + \frac{1}{\epsilon}\int_{a}^{b} u(y)^2 \, dy + \epsilon\int_{a}^{b} \big(u'(y)\big)^2 \, dy \;. \tag{18.D.20}$$

Até aqui x_0 era um ponto arbitrário do intervalo $[a,\ b]$. Vamos escolhê-lo agora de modo que x_0 seja o ponto onde $|u(x)|$ assume seu menor valor nesse intervalo: $|u(x_0)| = \min\limits_{x\in[a,\ b]} |u(x)|$. Um tal ponto x_0 sempre existe, pois $|u(x)|$ é contínua e $[a,\ b]$ é um intervalo compacto (vide Teorema 34.16, página 1597). Com isso teremos, obviamente,

$$\int_{a}^{b} u(y)^2 \, dy \;\geq\; (b-a)u(x_0)^2 \;,$$

ou seja,

$$u(x_0)^2 \;\leq\; \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} u(y)^2 \, dy \;.$$

Inserindo isso em (18.D.20), ficamos com

$$u(x)^2 \;\leq\; \epsilon \int_a^b \big(u'(y)\big)^2\,dy + \left(\frac{1}{b-a} + \frac{1}{\epsilon}\right)\int_a^b u(y)^2\,dy\;. \tag{18.D.21}$$

Seja agora r uma função contínua qualquer definida em $[a,\ b]$ com $r(y) > 0$ para todo $y \in [a,\ b]$. Definindo-se como antes $R_2 = \min\limits_{y\in[a,\ b]} r(y)$ teremos $\dfrac{r(y)}{R_2} \geq 1$, para todo $y \in [a,\ b]$. Inserindo isso na segunda integral de (18.D.21), aquela expressão fica

$$u(x)^2 \;\leq\; \epsilon \int_a^b \big(u'(y)\big)^2\,dy + \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{b-a} + \frac{1}{\epsilon}\right)\int_a^b u(y)^2 r(y)\,dy\;. \tag{18.D.22}$$

Isso é a desigualdade (18.D.17), que queríamos provar. ■