


Capítulo 23

Notas Sobre Mecânica Clássica

Conteúdo

23.1	Sistemas de Referência e suas Transformações na Mecânica Clássica. Acelerações Inerciais	1142
23.2	Mecânica de Pontos Materiais	1152
23.3	Mecânica de Corpos Rígidos	1160
23.3.1	Propriedades do Tensor Momento de Inércia	1162
23.3.2	As Equações Dinâmicas	1164
23.3.3	Piões. Algumas Soluções	1170
23.4	Ângulos de Euler na Mecânica de Corpos Rígidos	1174
23.4.1	Usos dos Ângulos de Euler. O Pião de Lagrange	1175
23.5	Mecânica Analítica. Um Mínimo	1182
23.5.1	O Formalismo Lagrangiano	1182
23.5.1.1	A Invariância das Equações de Euler-Lagrange por Mudanças de Sistemas de Referência	1184
23.5.1.2	Modos Normais de Oscilação	1186
23.5.1.3	Sistemas de Coordenadas Não-Inerciais no Formalismo Lagrangiano	1190
23.5.2	O Formalismo Hamiltoniano	1192
23.5.2.1	Derivação Variacional das Equações de Hamilton	1194
23.5.3	Colchetes de Poisson	1196
23.5.3.1	Transformações Canônicas	1201
23.6	Exercícios Adicionais	1211

 ESTE capítulo obteremos alguns resultados básicos da Mecânica Clássica, especialmente sobre o movimento de corpos rígidos, fazendo uso de alguns de nossos resultados anteriores, notadamente sobre o grupo $SO(3)$, tratado na Seção 22.3.2, página 1052. Na Seção 23.5, página 1182, são apresentados e discutidos os ingredientes mais importantes do formalismo Lagrangiano e do formalismo Hamiltoniano. Para a leitura deste capítulo alguma familiaridade com noções elementares da Mecânica Clássica é recomendada. É desnecessário dizer que há uma vasta literatura dedicada ao assunto e sugerimos alguns textos, todos de alta qualidade. Para textos com maior profundidade matemática: [15], [2], [110] e [361]. Para textos com maior ênfase em questões de Física: [215], [303], [186], [122], [201], [225], [214], [357]. Um clássico matemático sobre Mecânica Celeste é o texto de Carl Siegel¹ e Jürgen Moser² [294]. Um clássico sobre teoria e prática da Mecânica de Corpos Rígidos é a obra de Felix Klein³ e Arnold Sommerfeld⁴ [307].

Comentários sobre a notação. É comum denotar-se vetores no espaço físico tridimensional com a sobreposição de uma flecha: \vec{x} , \vec{v} etc. Evitaremos fazê-lo sempre que possível para manter uma certa limpeza gráfica nas expressões. Os produtos escalares usuais entre dois vetores x e y de \mathbb{R}^3 serão aqui denotados tanto por $x \cdot y$ quando por $\langle x, y \rangle$. Seu produto vetorial será denotado por $x \times y$. O leitor deve ser informado que alguns textos, denotam o produto vetorial por $x \wedge y$ e outros, especialmente os de autores russos, denotam o mesmo produto vetorial por $[x, y]$. Essa última notação decorre do fato, já comentado alhures, de \mathbb{R}^3 ser uma álgebra de Lie em relação ao produto vetorial e o colchete usualmente denota a operação de produto em uma álgebra de Lie. Não usaremos essa notação aqui. Como usual na Mecânica Clássica, denotamos a primeira derivada temporal de uma função f pelo símbolo \dot{f} , a segunda derivada por \ddot{f} etc., notação está que só evitaremos se houver perigo de confusão ou ambiguidade. Essa notação teria sido criada pelo próprio Newton. ♣

¹Carl Ludwig Siegel (1896–1981).

²Jürgen Kurt Moser (1928–1999).

³Christian Felix Klein (1849–1925).

⁴Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868–1951).

23.1 Sistemas de Referência e suas Transformações na Mecânica Clássica. Acelerações Inerciais

Na Mecânica Clássica o espaço físico \mathcal{E} é concebido como uma variedade tridimensional homeomorfa ao espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Isso significa que cada ponto do espaço físico \mathcal{E} pode ser bijetivamente associado a uma tripla de coordenadas Cartesianas que representam uma carta (global) de coordenadas. O espaço físico pode ser mapeado por infinitas dessas cartas globais de coordenadas Cartesianas, que denominamos *sistemas de referência*. Sistemas de referência são como palcos onde os movimentos dos corpos materiais são acompanhados. Fazemos uso deles para descrever e expressar leis físicas. Na Mecânica Clássica o tempo tem um papel absoluto, o que significa dizer que é possível calibrar relógios arbitrários distintos, fixos em sistemas de referência eventualmente distintos, de forma que os mesmos coincidam em suas mensurações. Sistemas de referência podem mover-se uns em relação a outros e logo abaixo discutiremos de que forma tais movimentos são concebidos na Mecânica Clássica.

Como todas as áreas da Física, a Mecânica Clássica formula seus princípios sobre certos conceitos idealizados, os quais, estritamente falando, correspondem apenas de forma aproximada a certos objetos reais. Uma dessas idealizações é a noção de *ponto material*, outra é a noção de *corpo rígido*, do qual trataremos mais abaixo. Tais idealizações são úteis por permitirem uma descrição matemática simples do movimento dos objetos idealizados.

Pontos materiais são objetos físicos sem extensão mas dotados de massa. Seu movimento pode ser descrito por *trajetórias* que, em cada sistema de referência, representam funções, contínuas e ao menos uma vez diferenciáveis, definidas em algum intervalo de tempo I e assumindo valores em \mathbb{R}^3 . É parte da formulação da chamada *segunda lei de Newton*⁵ que a trajetória de um ponto material satisfaz uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Assim, sua determinação em um dado sistema de referência necessita de duas informações: a posição e a velocidade do ponto material em um dado instante de tempo nesse sistema de referência. Sob hipóteses adequadas, essas informações definem univocamente as trajetórias e, portanto, descrevem o estado de movimento do ponto material.

Tradicionalmente, na Mecânica Clássica não é costume atribuir a pontos materiais um momento angular intrínseco (“*spin*”), ainda que seja possível fazê-lo (vide para tal os artigos de Jean-Marc Lévy-Leblond⁶ citados na *Nota* da página 1119).

Na Mecânica Clássica, corpos materiais extensos, como gases, líquidos ou sólidos, são idealizados como sendo compostos por pontos materiais em estados variados de agregação. O conhecimento das leis de movimento de pontos materiais permite, assim, ao menos em princípio, estudar propriedades Mecânicas de formas mais realistas de matéria.

A chamada *primeira lei de Newton* é uma afirmação de existência: existem sistemas de referência, denominados *sistemas de referência inerciais*, nos quais todo ponto material que se mova sem a ação de forças externas permanece em seu estado de movimento, ou seja, permanece movendo-se com velocidade constante. Os demais sistemas de referência são ditos *sistemas de referência não-inerciais*. Essa definição de sistemas de referência inercial necessita que se tenha definido previamente a noção de força. Não vamos entrar nessa discussão aqui por desviar-nos de nossos propósitos mais pragmáticos, mas afirmamos que essa questão não é de forma alguma desimportante e é, em verdade, parte de uma questão central da Física, a saber, a de entender de que forma objetos materiais interagem entre si de modo a alterar seus estados de movimento.

O chamado *Princípio de Relatividade*, formulado originalmente por Galilei⁷ e estendido em seu significado por Einstein⁸, afirma que as Leis da Física são identicamente formuladas em sistemas de referência inerciais distintos. Isso aplica-se, em particular, às leis da Mecânica Clássica, como veremos na discussão sobre a segunda lei de Newton.

• Transição de sistemas de coordenadas

Vamos considerar que tenhamos dois sistemas de coordenadas \mathbf{k} e \mathbf{K} descrevendo pontos do espaço físico \mathcal{E} . Um dado ponto arbitrário P de \mathcal{E} pode ser descrito por dois conjuntos de coordenadas Cartesianas: q_P , no sistema \mathbf{k} e Q_P no sistema \mathbf{K} . Denotamos por $A : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{k}$ a função que realiza a transição entre as coordenadas dos dois sistemas, ou seja, a função tal que $A(Q_P) = q_P$ para todos os pontos $P \in \mathcal{E}$.

⁵Sir Isaac Newton (1643–1727).

⁶Jean-Marc Lévy-Leblond (1940–).

⁷Galileo Galilei (1564–1642).

⁸Albert Einstein (1879–1955).

• **Sistemas de referência em movimento relativo**

O ponto de partida de nossa análise é a definição de movimentos relativos de sistemas de referência (inerciais ou não) na Mecânica Clássica, tema de fundamental relevância no estudo da Mecânica. Dizemos que um sistema \mathbf{K} move-se continuamente em relação a um sistema \mathbf{k} caso a função de transição A seja continuamente dependente do tempo: A_t , com $t \in \mathbb{R}$. Em verdade, essa definição é ainda muito geral, pois é um fato advindo da experimentação que nem todos os movimentos são permitidos na Mecânica Clássica, apenas os chamados movimentos Euclidianos.

Um movimento $A_t : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{k}$, com $t \in \mathbb{R}$, é dito ser um *movimento Euclidiano* do sistema se \mathbf{K} em relação ao sistema \mathbf{k} se preservar as distâncias entre pontos, ou seja, se para todo Q_1 e $Q_2 \in \mathbf{K}$ e todo $t \in \mathbb{R}$ valer

$$\|A_t(Q_1) - A_t(Q_2)\| = \|Q_1 - Q_2\|. \tag{23.1}$$

Essa hipótese, a de que em cada instante de tempo \mathbf{K} e \mathbf{k} meçam as mesmas distâncias entre pontos, é uma hipótese fundamental de nossa análise e dela extrairemos nossas conclusões básicas sobre a descrição cinemática da Mecânica Clássica. Note-se que essa hipótese é falsa na Mecânica Relativística, onde o ingrediente básico fundamental não é a preservação de distâncias no espaço físico, mas a preservação do *intervalo* entre pontos do espaço-tempo. Vide para tal a discussão da Seção 22.6, página 1095.

Doravante consideraremos todos os movimentos entre sistemas de referência como sendo Euclidianos.

A hipótese expressa em (23.1) fixa a forma geral da função $A_t : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{k}$. De fato, o Teorema 22.7, página 1043, informa-nos que A_t é forçosamente da forma $A_t(Q) = R_t Q + c_t$ onde, para cada $t \in \mathbb{R}$ tem-se $R_t \in \text{SO}(3)$ e $c_t \in \mathbb{R}^3$. Ambas as funções são supostas contínuas como funções de t , pois movimentos têm de ter essa propriedade. Supomos $R_t \in \text{SO}(3)$ e não $R_t \in \text{O}(3)$, pois podemos passar do segundo caso ao primeiro por um simples acerto da orientação dos eixos coordenados do sistema \mathbf{K} em relação aos de \mathbf{k} .

No que segue suporemos que R_t e c_t , como funções de t , são tantas vezes diferenciável quanto necessário. É importante lembrar que, segundo o já citado Teorema 22.7, página 1043, tanto R_t quanto c_t são univocamente determinados.

Temos, portanto, a seguinte situação: se considerarmos um ponto fixo no sistema \mathbf{K} com um vetor de coordenadas Q , as coordenadas desse mesmo ponto no sistema \mathbf{k} serão dadas por

$$q_t = R_t Q + c_t, \tag{23.2}$$

com $R_t \in \text{SO}(3)$.

Com um pouco mais de generalidade, se tivermos um ponto material descrevendo uma trajetória descrita no sistema de referência \mathbf{K} por uma função $Q(t)$, com $t \in I$, sendo I um intervalo aberto de \mathbb{R} (a função $Q(t)$ é suposta contínua e tantas vezes diferenciável quanto necessário), então sua trajetória em \mathbf{k} será descrita pela função $q(t)$, com $t \in I$, dada por

$$q(t) = R_t Q(t) + c_t. \tag{23.3}$$

Disso segue que

$$Q(t) = R_t^{-1}(q(t) - c_t) = R_t^T(q(t) - c_t). \tag{23.4}$$

Assim,

$$\dot{q}(t) = \dot{R}_t Q(t) + R_t \dot{Q}(t) + \dot{c}_t \stackrel{(23.4)}{=} \dot{R}_t R_t^T (q(t) - c_t) + R_t \dot{Q}(t) + \dot{c}_t.$$

Como $R_t \in \text{SO}(3)$, tem-se $\mathbb{1} = R_t R_t^T$ para todo t . Diferenciando-se essa identidade em relação a t e usando o fato que $\frac{d}{dt}(R_t^T) = (\dot{R}_t)^T$, obtemos $0 = \dot{R}_t R_t^T + R_t (\dot{R}_t)^T = \dot{R}_t R_t^T + (\dot{R}_t R_t^T)^T$. Isso prova que $\dot{R}_t R_t^T$ é uma matriz real antissimétrica e, portanto, pode ser escrita na forma

$$\dot{R}_t R_t^T = \omega_t \cdot \vec{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{pmatrix} \tag{23.5}$$

para algum vetor $\omega_t \in \mathbb{R}^3$ com componentes Cartesianas $(\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$. Recordar que as matrizes J_1, J_2 e J_3 (os geradores do grupo $\text{SO}(3)$, dadas em (22.46)-(22.48), página 1054) formam uma base no espaço das matrizes reais antissimétricas 3×3 .

O vetor $\omega_t \in \mathbb{R}^3$ é muito útil na descrição de movimentos e sua interpretação será discutida mais adiante. Usando o vetor ω_t , podemos escrever

$$\dot{q}(t) = (\omega_t \cdot \vec{J})(q(t) - c_t) + R_t \dot{Q}(t) + \dot{c}_t = \omega_t \times (q(t) - c_t) + R_t \dot{Q}(t) + \dot{c}_t, \tag{23.6}$$

onde usamos o fato, mencionado em (22.65), página 1058 (vide também Exercício E. 22.42), que $(\omega_t \cdot \vec{J})\vec{\alpha} = \omega_t \times \vec{\alpha}$ para qualquer $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$.

A relação

$$\dot{q}(t) = \omega_t \times (q(t) - c_t) + R_t \dot{Q}(t) + \dot{c}_t \tag{23.7}$$

é o ponto de partida de alguns desenvolvimentos da Cinemática e da Dinâmica Clássicas.

• **Interpretação dos termos em (23.7)**

A expressão (23.7) fornece o vetor velocidade $\dot{q}(t)$ de um ponto material observado no sistema \mathbf{k} como soma de três termos.

O termo \dot{c}_t em (23.7) é a velocidade translacional do sistema \mathbf{K} em relação ao sistema \mathbf{k} . A ele se adiciona o termo $R_t \dot{Q}(t)$, que é a velocidade do ponto material em \mathbf{K} , a saber, $\dot{Q}(t)$, transferida para \mathbf{k} por meio da rotação R_t .

Para entendermos o primeiro termo, consideremos em primeiro lugar a situação em que $c_t = 0$ e $\dot{Q}(t) = 0$ para todo t . Nessa situação, as origens de \mathbf{k} e \mathbf{K} coincidem e o ponto material está fixo em \mathbf{K} . A relação (23.7) fica simplesmente $\dot{q}(t) = \omega_t \times q(t)$, ou seja,

$$\dot{q}(t) = (\omega_t \cdot \vec{J}) q(t). \tag{23.8}$$

Se $\omega_t = \omega_0$, constante para todo t , com $\omega_0 \neq 0$, a equação (23.8) é um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas a coeficientes constantes e sua solução é

$$q(t) = \exp\left(t(\omega_0 \cdot \vec{J})\right) q(0) = \exp\left(\|\omega_0\| t (\vec{\eta}_{\omega_0} \cdot \vec{J})\right) q(0), \quad \text{com} \quad \vec{\eta}_{\omega_0} := \frac{\omega_0}{\|\omega_0\|}. \tag{23.9}$$

Vide a discussão sobre soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares no Capítulo 13, página 535. Conforme nossa discussão da Seção 22.3.2, página 1052, a matriz $\exp\left(\|\omega_0\| t (\vec{\eta}_{\omega_0} \cdot \vec{J})\right)$ representa uma rotação de um ângulo $\|\omega_0\| t$ em torno do eixo definido pelo vetor unitário $\vec{\eta}_{\omega_0} := \omega_0 / \|\omega_0\|$. A expressão (23.8) indica, portanto, que $q(t)$ executa no sistema \mathbf{k} um movimento rotacional uniforme em torno do eixo definido por $\omega_0 / \|\omega_0\|$ com velocidade angular $\|\omega_0\|$. O eixo de rotação passa pela origem, nesse caso.

O vetor ω_0 é, desta forma, interpretado como o vetor que determina o eixo de rotação do sistema \mathbf{K} em relação ao sistema \mathbf{k} e sua magnitude, $\|\omega_0\|$, é a velocidade angular dessa rotação. No caso de ω_t não ser constante a interpretação é a mesma: ω_t determina o eixo de rotação instantâneo do sistema \mathbf{K} em relação ao sistema \mathbf{k} , no instante t , e sua magnitude, $\|\omega_t\|$, é a velocidade angular instantânea dessa rotação.

Por essa razão, passaremos a denominar ω_t como o vetor *velocidade angular instantânea* de \mathbf{K} em relação ao sistema \mathbf{k} no instante t . O vetor ω_t deve ser interpretado como um vetor no sistema \mathbf{k} .

• **Eixo de rotação**

No caso em que $\dot{Q}(t) = 0$, (23.6) fica $\frac{d}{dt}(q(t) - c_t) = (\omega_t \cdot \vec{J})(q(t) - c_t)$. Caso ainda $\dot{c}_t = 0$ (ou seja, $c_t = c_0$) e $\omega_t = \omega_0$, constante, com $\omega_0 \neq 0$, a solução é dada por

$$q(t) = c_0 + \exp\left(\|\omega_0\| t (\vec{\eta}_{\omega_0} \cdot \vec{J})\right) (q(0) - c_0). \tag{23.10}$$

Note-se que se $q(0) = c_0 + \lambda \vec{\eta}_{\omega_0}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, teremos $q(t) = c_0 + \lambda \vec{\eta}_{\omega_0}$ para todo t . Verifique! Isso significa que os pontos ao longo da linha reta $\mathcal{E}_{c_0, \vec{\eta}_{\omega_0}} := \{c_0 + \lambda \vec{\eta}_{\omega_0}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ permanecem imóveis quando t varia. A linha reta $\mathcal{E}_{c_0, \vec{\eta}_{\omega_0}}$ é formada pelos pontos que passam por c_0 e aponta na direção de $\vec{\eta}_{\omega_0}$. Ela é denominada *eixo de rotação* do movimento descrito por (23.10).

Em outras palavras, (23.10) representa, no sistema \mathbf{k} , uma rotação em torno do eixo $\mathcal{E}_{c_0, \vec{\eta}_{\omega_0}} := \{c_0 + \lambda \vec{\eta}_{\omega_0}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ com velocidade angular $\|\omega_0\|$.

Se considerarmos apenas a condição $\dot{Q}(t) = 0$ (ponto material fixo em \mathbf{K}), ainda com $\omega_t = \omega_0$, constante, mas com c_t não-necessariamente constante, a relação (23.7) fica

$$\frac{d}{dt}(q(t) - c_t) = \omega_0 \times (q(t) - c_t) = (\omega_0 \cdot \vec{J})(q(t) - c_t),$$

cuja solução é $q(t) = c_t + \exp\left(\|\omega_0\|t(\vec{\eta}_{\omega_0} \cdot \vec{J})\right)(q(0) - c_0)$. Escrevendo isso na forma

$$q(t) = c_t - c_0 + \left[c_0 + \exp\left(\|\omega_0\|t(\vec{\eta}_{\omega_0} \cdot \vec{J})\right)(q(0) - c_0) \right] \tag{23.11}$$

e comparando a (23.10), vemos que trata-se da combinação de dois movimentos: um movimento rotacional em torno do eixo $\mathcal{E}_{c_0, \vec{\eta}_{\omega_0}} := \{c_0 + \lambda \vec{\eta}_{\omega_0}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ com velocidade angular $\|\omega_0\|$, em um movimento translacional, descrito pelo termo $c_t - c_0$.

• **Movimentos Euclidianos, caso geral**

No caso em que ω_t uma função dada, não necessariamente constante, a equação diferencial linear homogênea (23.8) tem solução dada pela série de Dyson:

$$q(t) = D(t)q(0), \quad \text{com} \quad D(t) := \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} (\omega_{t_1} \cdot \vec{J}) \cdots (\omega_{t_k} \cdot \vec{J}) dt_k \cdots dt_1. \tag{23.12}$$

Vide Seção 13.2.2, página 539. A equação (23.5) pode ser lida na forma $\dot{R}_t = (\omega_t \cdot \vec{J})R_t$ a qual pode ser encarada como uma equação diferencial ordinária linear homogênea de primeira ordem para R_t . Novamente usando a série de Dyson, obtemos a solução

$$R_t = D(t)R_0, \tag{23.13}$$

onde $D(t)$ é dada em (23.12). Como $D(t) = R_t R_0^{-1}$, com R_t e R_0 elementos de $SO(3)$, segue também que $D(t) \in SO(3)$.

A interpretação de (23.13) é simples. O fator R_0 faz o ajuste entre os eixos de \mathbf{K} e \mathbf{k} no instante inicial e o fator $D(t)$ implementa a evolução temporal, uma rotação variável com o tempo. Em particular, se $\omega_t = \omega_0$, constante, temos também, como em (23.9),

$$R_t = \exp\left(t(\omega_0 \cdot \vec{J})\right)R_0 = \exp\left(\|\omega_0\|t(\vec{\eta}_{\omega_0} \cdot \vec{J})\right)R_0, \quad \text{com} \quad \vec{\eta}_{\omega_0} := \frac{\omega_0}{\|\omega_0\|}. \tag{23.14}$$

No caso geral de ω_t variável, como $D(t) \in SO(3)$, vale

$$D(t)^{-1} = D(t)^T \stackrel{(23.12)}{=} \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} (\omega_{t_k} \cdot \vec{J}) \cdots (\omega_{t_1} \cdot \vec{J}) dt_k \cdots dt_1, \tag{23.15}$$

o fator $(-1)^k$ em cada termo da somatória se devendo ao fato de as matrizes $\omega_t \cdot \vec{J}$ serem antissimétricas. Observe também a mudança na ordem do produto dessas matrizes em (23.15) se a compararmos a (23.12).

A expressão (23.12) permite obter expressões gerais para $q(t)$ em diversos casos de interesse. Considere em (23.12) a situação em que ω_t não muda de direção. Então, por (22.52), página 1055, vale $[\omega_t \cdot \vec{J}, \omega_{t'} \cdot \vec{J}] = (\omega_t \times \omega_{t'}) \cdot \vec{J} = 0$ para todos t e t' , já que ω_t e $\omega_{t'}$ são sempre paralelos. Por (13.44), página 557, isso implica que nesse caso temos $D(t) = \exp\left[\left(\int_0^t \omega_{t'} dt'\right) \cdot \vec{J}\right]$ e, portanto,

$$q(t) = \exp\left[\left(\int_0^t \omega_{t'} dt'\right) \cdot \vec{J}\right] q(0). \tag{23.16}$$

E. 23.1 Exercício. Retornando ao caso geral da equação (23.7), mostre que se c_t , ω_t e $Q(t)$ forem fornecidos, então $q(t)$ é dada por

$$q(t) = c_t + D(t)(q(0) - c_0) + \int_0^t D(t, s)R_s \dot{Q}(s) ds, \tag{23.17}$$

onde $D(t)$ é dada em (23.12) e

$$D(t, s) := \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_s^t \int_s^{t_1} \cdots \int_s^{t_{k-1}} (\omega_{t_1} \cdot \vec{J}) \cdots (\omega_{t_k} \cdot \vec{J}) dt_k \cdots dt_1. \quad (23.18)$$

Sugestão: Estude o Capítulo 13, página 535, e use (13.12), página 539.

Segundo os resultados do Capítulo 13, temos $D(t, s) = D(t)D(s)^{-1}$ e, portanto,

$$q(t) = c_t + D(t) \left[q(0) - c_0 + \int_0^t D(s)^{-1} R_s \dot{Q}(s) ds \right] \quad (23.19)$$

é uma forma alternativa de se escrever (23.17). ✦

Se em (23.7) considerarmos apenas a condição $\dot{Q}(t) = 0$ (o ponto material está fixo em \mathbf{K}), temos a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}(q(t) - c_t) = \omega_t \times (q(t) - c_t). \quad (23.20)$$

cuja solução, segundo (23.19), é

$$q(t) = c_t + D(t)(q(0) - c_0), \quad (23.21)$$

que generaliza (23.11), no sentido de mostrar que nesse caso o movimento é também uma combinação de um movimento rotacional (com eixo variável), representada pelo termo $D(t)(q(0) - c_0)$, com uma translação, representada pelo termo c_t .

E. 23.2 Exercício. Usando (23.13) a relação (23.21) significa que $R_t^{-1}(q(t) - c_t) = R_0^{-1}(q(0) - c_0)$. Interprete essa relação em termos da transição entre os sistemas \mathbf{k} e \mathbf{K} . Compare (23.21) com a relação (23.2). ✦

É claro por (23.21) que $\frac{d}{dt}(q(t) - c_t)$ (que representa a velocidade relativa do ponto material em relação à origem de \mathbf{K}) é um vetor ortogonal a ω_t e a $(q(t) - c_t)$ e que vale também

$$\frac{d}{dt}(q(t) - c_t) = \omega_t \times (q(t) - c_t)^\perp, \quad (23.22)$$

onde $(q(t) - c_t)^\perp = (q(t) - c_t) - \left\langle \frac{\omega_t}{\|\omega_t\|}, q(t) - c_t \right\rangle \frac{\omega_t}{\|\omega_t\|}$ é a componente de $q(t) - c_t$ ortogonal a ω_t . Assim,

$$\left\| \frac{d}{dt}(q(t) - c_t) \right\| = \|\omega_t\| \left\| (q(t) - c_t)^\perp \right\|. \quad (23.23)$$

• **Aditividade do vetor velocidade angular instantânea**

Um ponto relevante na interpretação de ω_t como sendo o vetor que representa a rotação instantânea do sistema de referência \mathbf{K} em relação ao sistema \mathbf{k} é o seu caráter aditivo.

Vamos supor que tenhamos um terceiro sistema de referência \mathbf{K}' que se mova em relação a \mathbf{K} . Vamos considerar um ponto material em movimento no espaço, e sejam $q(t)$, $Q(t)$ e $Q'(t)$ as coordenadas que descrevem sua trajetória nos sistemas \mathbf{k} , \mathbf{K} e \mathbf{K}' , respectivamente. Segundo nossas considerações prévias, teremos as relações $q(t) = R_t Q(t) + c_t$ e $Q(t) = R'_t Q'(t) + c'_t$ entre essas coordenadas. Assim, $q(t) = \tilde{R}_t Q'(t) + \tilde{c}_t$, onde $(\tilde{R}_t := R_t R'_t$ e $\tilde{c}_t := R_t c'_t + c_t)$ expressa as coordenadas do ponto material no sistema \mathbf{k} em termos das de \mathbf{K}' .

Vamos denotar por ω_t o vetor velocidade angular instantâneo de \mathbf{K} em relação a \mathbf{k} , por ω'_t o vetor velocidade angular instantâneo de \mathbf{K}' em relação a \mathbf{K} e por $\tilde{\omega}_t$ o vetor velocidade angular instantâneo de \mathbf{K}' em relação a \mathbf{k} .

Pela definição (23.5), temos $\dot{R}_t = (\omega_t \cdot \vec{J}) R_t$, $\dot{R}'_t = (\omega'_t \cdot \vec{J}) R'_t$ e $\dot{\tilde{R}}_t = (\tilde{\omega}_t \cdot \vec{J}) \tilde{R}_t$. Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_t \cdot \vec{J} &:= \dot{\tilde{R}}_t (\tilde{R}_t)^{-1} = \left(\dot{R}_t R'_t + R_t \dot{R}'_t \right) (R'_t)^{-1} R_t^{-1} = \left((\omega_t \cdot \vec{J}) R_t R'_t + R_t (\omega'_t \cdot \vec{J}) R'_t \right) (R'_t)^{-1} R_t^{-1} \\ &= (\omega_t \cdot \vec{J}) + R_t (\omega'_t \cdot \vec{J}) R_t^{-1} \stackrel{(22.72)}{=} (\omega_t \cdot \vec{J}) + (R_t \omega'_t) \cdot \vec{J} = (\omega_t + R_t \omega'_t) \cdot \vec{J}, \end{aligned}$$

provando que

$$\tilde{\omega}_t = \omega_t + R_t \omega'_t. \tag{23.24}$$

Observe-se que, pelas definições, ω_t e $\tilde{\omega}_t$ são elementos de \mathbf{k} , enquanto que ω'_t é um elemento de \mathbf{K}^9 . O aparecimento do fator R_t em (23.24) é necessário para que se faça a transição do sistema \mathbf{K} (onde ω'_t “vive”) para o sistema \mathbf{k} .

Essa relação mostra que os vetores que descrevem a velocidade angular instantânea compõem-se aditivamente em cada sistema de referência, o que é coerente com a própria noção de vetor.

E. 23.3 *Exercício.* Usando (23.24), mostre que

$$\tilde{\dot{\omega}}_t = \dot{\omega}_t + \omega_t \times (R_t \omega'_t) + R_t \dot{\omega}'_t.$$

✱

• **Ainda sobre a interpretação de ω_t**

Se \mathbf{K} e \mathbf{K}' diferem apenas por uma translação, ou seja, se $R'_t = \mathbb{1}$, teremos $\omega'_t = 0$ (pois $\omega'_t \cdot \vec{J} = \dot{R}'_t (R'_t)^{-1}$) e, portanto, (23.24) diz-nos que $\tilde{\omega}_t = \omega_t$, o que mostra que o vetor velocidade angular instantânea independe da origem adotada no sistema \mathbf{K} , mesmo se esta seja posta em movimento.

Se \mathbf{k}' for um sistema de referência que difere de \mathbf{k} apenas por uma rotação constante, teremos entre suas coordenadas $q = Sq'$, com $S \in \text{SO}(3)$. Assim, para a transição entre as coordenadas de \mathbf{k}' e \mathbf{K} teremos $q' = R'_t Q + c'_t$, com $R'_t = S^{-1} R_t Q$ e $c'_t = S^{-1} c_t$. Portanto, $\omega'_t \cdot \vec{J} := \dot{R}'_t (R'_t)^{-1} = S^{-1} (\dot{R}_t R_t^{-1}) S = S^{-1} (\omega_t \cdot \vec{J}) S \stackrel{(22.72)}{=} (S^{-1} \omega_t) \cdot \vec{J}$, estabelecendo que

$$\omega'_t = S^{-1} \omega_t. \tag{23.25}$$

Isso mostra que ω_t transforma-se como um vetor por mudanças de sistemas de referência envolvendo apenas rotações constantes.

• **A Segunda Lei de Newton**

Se \mathbf{k} for um sistema de referência inercial, o movimento de um ponto material de massa m sujeito à ação de uma força $f(q, \dot{q}, t)$ é regido pela equação

$$m\ddot{q}(t) = f(q(t), \dot{q}(t), t). \tag{23.26}$$

Esse é o conteúdo da chamada *Segunda Lei de Newton*. O caso expresso em (23.26) é o mais comum tratado na Mecânica Clássica e considera apenas forças dependentes da posição e da velocidade do ponto material e no mesmo instante de tempo. Outras possibilidades, como forças com retardo, são também possíveis e fisicamente relevantes em certos casos. No caso mais simples, a lei física expressa em (23.26) manifesta-se na forma de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Para sua solução condições iniciais devem também ser adicionadas, tais como aquelas que fornecem a posição $q(t_0)$ e a velocidade $\dot{q}(t_0)$ do ponto material no sistema inercial \mathbf{k} em um instante “inicial” t_0 . Sob condições adequadas (por exemplo, continuidade e diferenciabilidade de f em relação à variáveis q e \dot{q}), teoremas gerais da teoria das equações diferenciais ordinárias garantem existência e unicidade de soluções (vide a discussão geral do Capítulo 11, página 497).

Observamos aqui *en passant* que na Mecânica Clássica é assumido que a massa de um ponto material é a mesma em quaisquer sistemas de referência, inerciais ou não. Como é bem sabido, esse princípio é falso na Mecânica Relativística.

• **O vetor velocidade angular instantânea intrínseco**

Doravante consideraremos \mathbf{k} como um sistema de referência inercial e \mathbf{K} realiza um movimento Euclidiano em relação a \mathbf{k} . O vetor

$$\Omega_t := R_t^{-1} \omega_t \tag{23.27}$$

é um vetor em \mathbf{K} e ele representa o vetor velocidade angular instantânea nesse sistema de referência. Ω_t é denominado *vetor velocidade angular instantânea intrínseco* de \mathbf{K} . É claro que \mathbf{K} não está em rotação em relação a si mesmo mas, mesmo assim, podemos falar de um vetor de velocidade angular intrínseco em \mathbf{K} pois, como veremos, é possível inferir no

⁹Estritamente falando, o correto matematicamente seria dizer que ω_t e $\tilde{\omega}_t$ são elementos do espaço tangente de \mathbf{k} , enquanto que ω'_t é um elemento do espaço tangente de \mathbf{K} . Como um sistema de referências Euclidiano coincide em certo sentido com seu espaço tangente, evitamos o que poderia ser visto como um preciosismo de linguagem.

próprio \mathbf{K} a existência de sua rotação em relação a um sistema inercial (como \mathbf{k}) devido ao surgimento em \mathbf{K} de certas acelerações inerciais. De qualquer forma, é útil definir Ω_t como em (23.27) pois essa expressão aparece amiúde, como nos cálculos que faremos a seguir.

Para verificarmos que Ω_t é, de fato, intrínseco a \mathbf{K} , consideremos um outro sistema inercial \mathbf{k}° . Como veremos mais abaixo, o fato de \mathbf{k}° ser inercial significa que sua origem se move em relação à origem de \mathbf{k} com velocidade constante e que \mathbf{k}° e \mathbf{k} não giram continuamente um em relação ao outro.

Isso significa que temos entre as coordenadas de \mathbf{k} e de \mathbf{k}° a relação $q^\circ = Sq + (v_0t + q_0)$, com $S \in \text{SO}(3)$, constante e v_0 e q_0 também constantes. Além disso, temos as relações usuais entre \mathbf{K} e \mathbf{k} e entre \mathbf{K} e \mathbf{k}° : $q = R_t Q + c_t$ e $q^\circ = R_t^\circ Q + c_t^\circ$. Disso segue que $q^\circ = Sq + v_0t + q_0 = (SR_t)Q + (Sc_t + v_0t + q_0)$, o que permite concluir que $R_t^\circ = SR_t$ e $c_t^\circ = Sc_t + v_0t + q_0$. Portanto,

$$\omega_t^\circ \cdot \vec{J} := \dot{R}_t^\circ (R_t^\circ)^{-1} = S \dot{R}_t (R_t)^\circ^{-1} = S(\omega_t \cdot \vec{J}) R_t (R_t)^\circ^{-1} = S(\omega_t \cdot \vec{J}) S^{-1} \stackrel{(22.72)}{=} (S\omega_t) \cdot \vec{J},$$

o que implica $\omega_t^\circ = S\omega_t$. Consequentemente,

$$\Omega_t^\circ := (R_t^\circ)^{-1} \omega_t^\circ = (R_t^\circ)^{-1} S\omega_t = (R_t)^\circ^{-1} \omega_t =: \Omega_t,$$

provando que Ω_t independe do sistema de referência inercial em relação ao qual \mathbf{K} move-se.

E. 23.4 Exercício. Mostre que a regra de adição de vetores velocidade angular instantânea (23.24) assume a forma

$$\tilde{\Omega}_t = (R_t')^{-1} \Omega_t + \Omega_t' \tag{23.28}$$

quando é expressa em termos dos correspondentes vetores velocidade angular instantânea intrínsecos. *

• **O caráter vetorial de Ω_t**

Se \mathbf{K}' for um outro sistema de referência que difere de \mathbf{K} apenas por uma rotação constante, ou seja, se $Q = S^{-1}Q'$, com $S \in \text{SO}(3)$, teremos $q = R_t'Q' + c_t$ com $R_t' = R_t S^{-1}$ para a transição entre \mathbf{K}' e \mathbf{k} . Portanto,

$$\Omega_t' = (R_t')^{-1} \omega_t = S \Omega_t. \tag{23.29}$$

Isso mostra que Ω_t transforma-se como um vetor por mudanças de sistemas de referência envolvendo apenas rotações constantes.

• **Um resultado útil**

Antes de prosseguirmos, vamos apresentar um resultado útil que usaremos em manipulações diversas vezes no que segue:

Proposição 23.1 *Com as definições dadas acima, valem as seguintes relações*

$$\dot{R}_t = (\omega_t \cdot \vec{J}) R_t, \tag{23.30}$$

$$\dot{R}_t = R_t (\Omega_t \cdot \vec{J}), \tag{23.31}$$

$$\dot{R}_t \vec{\alpha} = \omega_t \times (R_t \vec{\alpha}) \quad e \tag{23.32}$$

$$\dot{R}_t \vec{\alpha} = R_t (\Omega_t \times \vec{\alpha}), \tag{23.33}$$

onde as duas últimas expressões são para $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$, arbitrário. □

Prova. A relação (23.30) é evidente pela definição (23.5). Podemos escrever $(\omega_t \cdot \vec{J}) R_t = R_t R_t^{-1} (\omega_t \cdot \vec{J}) R_t \stackrel{(22.72)}{=} R_t ((R_t^{-1} \omega_t) \cdot \vec{J}) = R_t (\Omega_t \cdot \vec{J})$, provando (23.31). As relações (23.32) e (23.33) seguem de (23.30) e (23.31), respectivamente, e do fato, mencionado em (22.65), página 1058 (vide também Exercício E. 22.42), que $(\vec{\beta} \cdot \vec{J}) \vec{\alpha} = \vec{\beta} \times \vec{\alpha}$ para quaisquer $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^3$. ■

• **Acelerações inerciais e forças inerciais**

Partindo de (23.7) e escrevendo $Q(t) = R_t^{-1}(q(t) - c_t)$, temos $\dot{q}(t) = \omega_t \times (R_t Q(t)) + R_t \dot{Q}(t) + \dot{c}_t$. Usando (22.69) e escrevendo $\Omega_t := R_t^{-1}\omega_t$, isso fica

$$\dot{q}(t) = R_t \left[\Omega_t \times Q(t) + \dot{Q}(t) \right] + \dot{c}_t. \tag{23.34}$$

Disso segue que

$$\ddot{q}(t) = \dot{R}_t \left[\Omega_t \times Q(t) + \dot{Q}(t) \right] + R_t \left[\dot{\Omega}_t \times Q(t) + \Omega_t \times \dot{Q}(t) + \ddot{Q}(t) \right] + \ddot{c}_t. \tag{23.35}$$

Usando (23.33), obtemos

$$\ddot{q}(t) = R_t \left[\Omega_t \times (\Omega_t \times Q(t)) + 2\Omega_t \times \dot{Q}(t) + \dot{\Omega}_t \times Q(t) + \ddot{Q}(t) \right] + \ddot{c}_t. \tag{23.36}$$

Verifique! Assim, multiplicando-se pela massa m do ponto material, teremos

$$m\ddot{Q}(t) = R_t^{-1}(m\ddot{q}(t)) - R_t^{-1}(m\ddot{c}_t) - m\Omega_t \times (\Omega_t \times Q(t)) - 2m\Omega_t \times \dot{Q}(t) - m\dot{\Omega}_t \times Q(t). \tag{23.37}$$

Naturalmente, como \mathbf{k} é um sistema de referência inercial, $m\ddot{q}(t)$ é igual (pela segunda lei de Newton) à força externa total resultante $f(q(t), \dot{q}(t), t)$ agindo sobre o ponto material no sistema de referência \mathbf{k} . A expressão $R_t^{-1}(m\ddot{q}(t)) = R_t^{-1}f(q(t), \dot{q}(t), t) =: F(Q(t), \dot{Q}(t), t)$ representa essa força externa resultante segundo o sistema de referência \mathbf{K} .

Para futura referência, destacamos essa relação

$$F(Q(t), \dot{Q}(t), t) := R_t^{-1}f(q(t), \dot{q}(t), t) \tag{23.38}$$

entre forças F e f , sobre um ponto material, no sistemas \mathbf{K} e \mathbf{k} , respectivamente.

Os quatro demais termos de (23.37) são denominados *forças inerciais* e têm denominações específicas, listadas a seguir. Como comentaremos, forças inerciais são nulas em sistemas de referência inerciais e sua existência é, conseqüentemente, característica de sistemas não-inerciais. É importante notar também que todas as quatro forças inerciais sobre um ponto material são proporcionais à sua massa.

- O termo $-R_t^{-1}(m\ddot{c}_t)$ é uma força inercial denominada *força inercial translacional*. Ela se manifesta mesmo em sistemas de referências não-girantes, ao contrário das três forças inerciais a seguir. A expressão $-R_t^{-1}\ddot{c}_t$ é denominada *aceleração inercial translacional*. O célebre *princípio de equivalência*, um dos princípios físicos da Teoria da Relatividade Geral, foi formulado com base na impossibilidade de se distinguir a *força inercial translacional* da força produzida por um campo gravitacional espacialmente constante.
- O termo $-m\dot{\Omega}_t \times Q(t)$ é uma força inercial denominada *força de Euler*¹⁰. A expressão $-\dot{\Omega}_t \times Q(t)$ é denominada *aceleração de Euler*, ou também *aceleração azimutal* ou ainda *aceleração transversa*. É importante notar que esse termo só pode se manifestar se $\dot{\Omega}_t$ for não-nulo, ou seja, se houver uma variação temporal no vetor de velocidade angular instantânea intrínseco.
- O termo $-2m\Omega_t \times \dot{Q}(t)$ é uma força inercial denominada *força de Coriolis*¹¹. A expressão $-2\Omega_t \times \dot{Q}(t)$ é denominada *aceleração de Coriolis*. É importante notar que esse termo depende de \dot{Q}_t e, portanto, não se manifesta se o ponto material estiver parado em relação ao referencial girante \mathbf{K} .
- O termo $-m\Omega_t \times (\Omega_t \times Q(t))$ é uma força inercial denominada *força centrífuga*. A expressão $-\Omega_t \times (\Omega_t \times Q(t))$ é denominada *aceleração centrífuga*. Note-se que a aceleração centrífuga é sempre ortogonal ao eixo de rotação instantâneo. É relevante lembrar que, por (4.14), página 235, tem-se para $\Omega_t \neq 0$,

$$-\Omega_t \times (\Omega_t \times Q(t)) = -\langle \Omega_t, Q(t) \rangle \Omega_t + \|\Omega_t\|^2 Q(t) = \|\Omega_t\|^2 Q^\perp(t),$$

onde

$$Q^\perp(t) := Q(t) - \left\langle \frac{\Omega_t}{\|\Omega_t\|}, Q(t) \right\rangle \frac{\Omega_t}{\|\Omega_t\|},$$

que claramente representa a projeção de $Q(t)$ sobre plano ortogonal a Ω_t . Assim, a aceleração centrífuga (e a força centrífuga) sobre um ponto material aponta no sentido de $Q^\perp(t)$ e tem magnitude igual a $\|\Omega_t\|^2 \|Q^\perp(t)\| = \|\Omega_t\|^2 \|Q(t)\| \text{sen}\theta(t)$, onde $\theta(t) \in [0, \pi]$ é o ângulo entre Ω_t e $Q(t)$.

¹⁰Leonhard Euler (1707–1783).

¹¹Gaspard-Gustave de Coriolis (1792–1843).

A relação (23.36) tem outra consequência relevante:

Proposição 23.2 *Se \mathbf{k} for um sistema de referência inercial, então um segundo sistema de referência \mathbf{K} , cujas coordenadas se relacionam às de \mathbf{k} por $Q = R_t^{-1}(q - c_t)$, será também um sistema inercial se e somente se R_t e \dot{c}_t forem constantes e, portanto, se e somente se a transformação de coordenadas entre os sistemas de \mathbf{k} e \mathbf{K} for da forma $Q = R_0^{-1}q - v_0t - q_0$, com $R_0 \in \text{SO}(3)$, constante, e $v_0, q_0 \in \mathbb{R}^3$, ambos constantes.* \square

Em outras palavras, se \mathbf{k} for um sistema de referência inercial, então um segundo sistema de referência \mathbf{K} será também um sistema inercial se e somente se \mathbf{K} não estiver girando continuamente em relação a \mathbf{k} , mas apenas se transladando com velocidade constante.

As transformações do tipo $q \mapsto R_0^{-1}q - v_0t - q_0$ com $R_0 \in \text{SO}(3)$, constante, e $v_0, q_0 \in \mathbb{R}^3$, ambos constantes, são denominadas *transformações de Galilei*¹² e compõem um grupo, conhecido como *Grupo de Galilei*, estudado na Seção 22.6.7, página 1117. O Grupo de Galilei é, assim, o grupo das transformações de sistemas inerciais entre si.

Prova da Proposição 23.2. A primeira lei de Newton afirma que um ponto material que mova sob a ação de forças externas resultantes nulas terá aceleração nula em qualquer sistema de referência inercial.

I. Se \mathbf{k} for inercial e as coordenadas de \mathbf{K} se relacionarem às de \mathbf{k} segundo $Q = R^{-1}(q - c_t)$ com R e \dot{c}_t constantes, teremos $\ddot{Q}(t) = R^{-1}\ddot{q}(t)$. Logo, se $\ddot{q}(t) = 0$ teremos também $\ddot{Q}(t) = 0$, provando que \mathbf{K} é também inercial.

II. Vamos supor agora que \mathbf{k} e \mathbf{K} são inerciais e seja um ponto material que mova sob a ação de uma força externa resultante nula. Teremos $\ddot{q}(t) = 0$ e $\ddot{Q}(t) = 0$, o que implica, segundo (23.36),

$$\Omega_t \times (\Omega_t \times Q(t)) + 2\Omega_t \times \dot{Q}(t) + \dot{\Omega}_t \times Q(t) + R_t^{-1}\ddot{c}_t = 0. \tag{23.39}$$

Essa relação deve ser válida para todos os valores de $Q(t)$ e de $\dot{Q}(t)$. Assim, os termos $2\Omega_t \times \dot{Q}(t)$ e $R_t^{-1}\ddot{c}_t$ devem ser nulos independentemente dos demais. Isso implica que $\ddot{c}_t = 0$ e $\Omega_t = 0$ para todo t . A relação $\Omega_t = 0$, por definição, implica que \dot{R}_t deve ser nula e implica a nulidade dos termos faltantes: $\Omega_t \times (\Omega_t \times Q(t))$ e $\dot{\Omega}_t \times Q(t)$. Concluímos que nesse caso devemos ter R_t e \dot{c}_t constantes, completando a demonstração. \blacksquare

O seguinte corolário é evidente:

Corolário 23.1 *As acelerações inerciais e as forças inerciais são nulas em todos os sistemas de referência inerciais. Logo, um sistema de referência será não-inercial se ao menos uma das acelerações ou forças inerciais for não-nula.* \square

Dessa forma devemos entender que forças inerciais sobre um ponto material em um sistema de referência não-inercial são um artefato da descrição do movimento em tais sistemas e não provêm de interações “reais” que ajam sobre ele.

• **A Segunda Lei de Newton. Covariância em relação a mudanças de sistemas de referência inerciais**

Se \mathbf{k} e \mathbf{K} são inerciais, temos para as coordenadas que descrevem a trajetória de um ponto material a relação $q(t) = RQ(t) + c_t$, com $c_t = \dot{c}_0t + c_0$, dado que $\dot{c}_t = \dot{c}_0$, por ser constante. Assim, temos por (23.37) que

$$F(Q(t), \dot{Q}(t), t) = R^{-1}f(q(t), \dot{q}(t), t), \tag{23.40}$$

ou seja

$$F(Q(t), \dot{Q}(t), t) = R^{-1}f(q(t), \dot{q}(t), t) = R^{-1}f(RQ(t) + \dot{c}_0t + c_0, R\dot{Q}(t) + \dot{c}_0, t). \tag{23.41}$$

A relação entre F e f expressa nas relações (23.40) e (23.41) manifesta a covariância das interações externas que agem sobre o ponto material.

• **Movimento de um ponto material visto de um referencial não-inercial**

Se a trajetória $q(t)$ de um ponto material em um sistema de referência \mathbf{k} for fornecida, essa trajetória no sistema de referência \mathbf{K} será dada, segundo (23.4) e (23.13), por

$$Q(t) = R_0^{-1}D(t)^{-1}(q(t) - c_t), \tag{23.42}$$

¹²Galileo Galilei (1564–1642).

com $D(t)^{-1}$ dado em (23.15).

No caso em que $\omega_t = \omega_0$, constante, e $R_0 = \mathbb{1}$ (o que significa que os eixos de \mathbf{k} e \mathbf{K} são paralelos em $t = 0$) obtemos, fazendo uso da Fórmula de Rodrigues (22.59),

$$Q(t) = \exp\left(-\|\omega_0\|t\left(\vec{\eta}_{\omega_0} \cdot \vec{J}\right)\right)(q(t) - c_t) \tag{23.43}$$

$$\stackrel{(22.59)}{=} \cos(\|\omega_0\|t)(q(t) - c_t) + \left(1 - \cos(\|\omega_0\|t)\right)\left(\vec{\eta}_{\omega_0} \cdot (q(t) - c_t)\right)\vec{\eta}_{\omega_0} - \text{sen}(\|\omega_0\|t)\left(\vec{\eta}_{\omega_0} \times (q(t) - c_t)\right). \tag{23.44}$$

Essa relação fornece a trajetória do ponto material no sistema \mathbf{K} a partir de sua trajetória em \mathbf{k} no caso descrito (ω_t constante e $R_0 = \mathbb{1}$).

• **Movimento de um ponto material livre visto de um referencial não-inercial**

Considere-se um ponto material livre de forças externas. Sua trajetória $q(t)$ no referencial inercial \mathbf{k} é dada por

$$q(t) = v_0t + q_0,$$

que descreve um movimento retilíneo uniforme. Sua trajetória $Q(t)$ em um referencial não-inercial \mathbf{K} é dada, segundo (23.42), por

$$Q(t) = R_0^{-1}D(t)^{-1}(v_0t + q_0 - c_t). \tag{23.45}$$

Vamos considerar o caso mais simples, onde $c_t = 0$, $\omega_t = \omega_0$, constante e $R_0 = \mathbb{1}$. Logo, as origens de \mathbf{k} e \mathbf{K} coincidem para todo t , assim como seus eixos em $t = 0$ (pois $R_0 = \mathbb{1}$), sendo que \mathbf{K} gira em torno de \mathbf{k} com velocidade angular constante ω_0 . Temos, por (23.44),

$$Q(t) = \exp\left(-\|\omega_0\|t\left(\vec{\eta}_{\omega_0} \cdot \vec{J}\right)\right)(v_0t + q_0) \tag{23.46}$$

$$= \cos(\|\omega_0\|t)(v_0t + q_0) + \left(1 - \cos(\|\omega_0\|t)\right)\left(\vec{\eta}_{\omega_0} \cdot (v_0t + q_0)\right)\vec{\eta}_{\omega_0} - \text{sen}(\|\omega_0\|t)\left(\vec{\eta}_{\omega_0} \times (v_0t + q_0)\right). \tag{23.47}$$

E. 23.5 Exercício. Na solução (23.47), mostre que se v_0 e q_0 são ortogonais a $\vec{\eta}_{\omega_0}$, então $Q(t)$ é igualmente ortogonal a $\vec{\eta}_{\omega_0}$ para todo t . Esse resultado é inesperado? Note que nesse caso vale

$$Q(t) = \left[\cos(\|\omega_0\|t)q_0 - \text{sen}(\|\omega_0\|t)\left(\vec{\eta}_{\omega_0} \times q_0\right)\right] + t\left[\cos(\|\omega_0\|t)v_0 - \text{sen}(\|\omega_0\|t)\left(\vec{\eta}_{\omega_0} \times v_0\right)\right],$$

que combina um movimento circular uniforme com velocidade angular $\|\omega_0\|$ (o primeiro termo em $[\dots]$) com outro movimento circular, mas com raio linearmente crescente com o tempo t (o segundo termo $t[\dots]$). *

É claro por (23.47) que o movimento do ponto material livre visto do sistema não-inercial \mathbf{K} não é mais retilíneo e uniforme. Pode-se atribuir isso à ação em \mathbf{K} de duas forças inerciais: a força centrífuga e a força de Coriolis. O próximo exercício ajuda a esclarecer isso.

E. 23.6 Exercício. Na expressão (23.47), calcule $\ddot{Q}(t)$ e identifique quais termos correspondem à aceleração centrífuga e quais à aceleração de Coriolis, calculando separadamente essas duas acelerações inerciais. *

E. 23.7 Exercício. Considere um navio N de massa M em movimento ao longo de uma latitude θ , fixa, da Terra, sendo $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Seja V sua velocidade no sistema de referência da Terra. V é suposta constante ao longo dessa latitude e convençione que V é positiva se o navio move-se no rumo leste e negativa no rumo oeste.

Determine a força centrífuga e a força de Coriolis sobre o navio N . Para qual valor de V a força de Coriolis supera a força centrífuga em magnitude? Para qual valor de V (positivo ou negativo) as duas forças são iguais e opostas.

Um navio de grande porte pode alcançar a velocidade de aproximadamente 28km/h. Para essa velocidade, compare em termos de percentagens o valor da componente vertical da força centrífuga e da força de Coriolis em relação ao peso do navio N .

Em qual situação a linha-d'água do navio N (que é sempre medida de baixo para cima, a partir do fundo do navio) deve ficar mais alta: quando o navio se move em direção ao leste e ao oeste? Justifique. ✱

O efeito descrito no exercício anterior é conhecido como *efeito Eötvös*¹³.

E. 23.8 Exercício. Os EUA construíram seu maior centro de lançamento de foguetes no sul da Flórida e a França nas Guianas. Por que motivo prático, relacionado à economia de combustíveis dos foguetes, essas escolhas foram feitas? Justifique qualitativa e quantitativamente. ✱

23.2 Mecânica de Pontos Materiais

Nesta seção recordaremos resultados elementares, muito bem conhecidos, da Mecânica de uma coleção finita de pontos materiais. Esses resultados serão adiante usados no tratamento da dinâmica de corpos rígidos.

Considere-se uma coleção \mathcal{C} de $n \geq 1$ pontos materiais cujas trajetórias são descritos em um sistema inercial de coordenadas \mathbf{k} por coordenadas $q_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, e cujas massas são $m_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.

A massa total e o chamado *centro de massa* dessa coleção \mathcal{C} de pontos materiais são definidos por

$$M := \sum_{i=1}^n m_i \quad \text{e} \quad q_{\text{cm}}(t) := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i q_i(t).$$

Nosso propósito imediato é expressar grandezas mecânicas, como a energia cinética, o momento linear e o momento angular desse sistema de pontos materiais em termos de suas coordenadas em um outro sistema de referência \mathbf{K} , não necessariamente inercial, cujas coordenadas relacionem-se às de \mathbf{k} pela relação $q(t) = R_t Q(t) + c_t$, que já usamos repetidas vezes.

Escolhemos esse sistema \mathbf{K} de sorte que $c_t = q_{\text{cm}}(t)$, ou seja, escolhemos a origem do sistema de coordenadas \mathbf{K} coincidente com o centro de massa do conjunto \mathcal{C} . Essa escolha é realizada por mera conveniência: as expressões que obteremos abaixo ficam muito simplificadas com essa escolha.

Temos para cada ponto material as relações $q_i(t) = R_t Q_i(t) + q_{\text{cm}}(t)$ e $\dot{q}_i(t) = R_t [\Omega_t \times Q_i(t) + \dot{Q}_i(t)] + \dot{q}_{\text{cm}}(t)$, onde $Q_i(t)$ fornece a trajetória do i -ésimo ponto material no sistema \mathbf{K} . Usaremos essas relações sem mais comentários nos cálculos que seguem. É importante notar que com a escolha $c_t = q_{\text{cm}}(t)$ temos

$$M q_{\text{cm}}(t) = \sum_{i=1}^n m_i q_i(t) = R_t \left(\sum_{i=1}^n m_i Q_i(t) \right) + M q_{\text{cm}}(t),$$

o que implica que

$$\sum_{i=1}^n m_i Q_i(t) = 0 \quad \text{e, portanto, que} \quad \sum_{i=1}^n m_i \dot{Q}_i(t) = 0 \tag{23.48}$$

para todo t . Essas relações expressam, no sistema \mathbf{K} , a condição de que o centro de massa encontra-se fixo na origem de \mathbf{K} .

¹³Barão Loránd Eötvös de Vásárosnamény (1848–1919).

• **A energia cinética de uma coleção finita de pontos materiais**

A energia cinética da coleção de pontos materiais \mathcal{C} no sistema \mathbf{k} , que denotaremos por $e_c(t)$, é dada por

$$e_c(t) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{q}_i(t)\|^2$$

e pode ser reescrita em termos das coordenadas do sistema \mathbf{K} da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e_c(t) &:= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{q}_i(t)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left\| \Omega_t \times Q_i(t) + \dot{Q}_i(t) + R_t^{-1} \dot{q}_{\text{cm}}(t) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left\| \Omega_t \times Q_i(t) \right\|^2 + \left\| \dot{Q}_i(t) \right\|^2 + \left\| \dot{q}_{\text{cm}}(t) \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(\Omega_t \times Q_i(t)) \cdot \dot{Q}_i(t) + 2(\Omega_t \times Q_i(t)) \cdot (R_t^{-1} \dot{q}_{\text{cm}}(t)) + 2\dot{Q}_i(t) \cdot (R_t^{-1} \dot{q}_{\text{cm}}(t)) \right]. \end{aligned}$$

Devido a (23.48), os dois últimos termos são nulos. Com isso,

$$e_c(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left\| \Omega_t \times Q_i(t) \right\|^2 + \left\| \dot{Q}_i(t) \right\|^2 + \left\| \dot{q}_{\text{cm}}(t) \right\|^2 + 2(\Omega_t \times Q_i(t)) \cdot \dot{Q}_i(t) \right]. \quad (23.49)$$

Vamos agora reescrever o primeiro e o último termos da expressão (23.49). Para o último, usamos que

$$(\Omega_t \times Q_i(t)) \cdot \dot{Q}_i(t) \stackrel{(4.13)}{=} (Q_i(t) \times \dot{Q}_i(t)) \cdot \Omega_t \quad (23.50)$$

e para o primeiro, escrevemos

$$\begin{aligned} \left\| \Omega_t \times Q_i(t) \right\|^2 &= (\Omega_t \times Q_i(t)) \cdot (\Omega_t \times Q_i(t)) \\ &\stackrel{(4.16)}{=} \|\Omega_t\|^2 \|Q_i(t)\|^2 - (\Omega_t \cdot Q_i(t))^2 = \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 (\Omega_t)_a \left[\|Q_i(t)\|^2 \delta_{ab} - Q_i(t)_a Q_i(t)_b \right] (\Omega_t)_b. \end{aligned}$$

Denotemos por $I(t)$ a matriz real 3×3 cujo elemento de matriz $I(t)_{ab}$ é definido por

$$I(t)_{ab} := \sum_{i=1}^n m_i \left[\|Q_i(t)\|^2 \delta_{ab} - Q_i(t)_a Q_i(t)_b \right]. \quad (23.51)$$

Com isso, podemos escrever

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left\| \Omega_t \times Q_i(t) \right\|^2 = \frac{1}{2} \Omega_t \cdot (I(t) \Omega_t), \quad (23.52)$$

Verifique!

A matriz $I(t)$ é denominada *matriz momento de inércia*, *operador momento de inércia* ou, mais frequentemente, *tensor momento de inércia* do conjunto \mathcal{C} . O tensor momento de inércia desempenha um papel importante na descrição do movimento rotacional de corpos rígidos e suas propriedades serão estudadas com mais detalhe futuramente. O tensor momento de inércia aparecerá novamente logo adiante quando tratarmos do momento angular do conjunto \mathcal{C} .

Por ora, fazemos notar que o tensor momento de inércia definido em (23.51) deveria, com mais precisão, ser denominado tensor momento de inércia do sistema de pontos materiais no sistema \mathbf{K} com relação à origem.

A razão de $I(t)$ ser denominado um *tensor* será esclarecida adiante, mas é importante frisar que nas manipulações que faremos $I(t)$ é simplesmente uma matriz 3×3 que age em vetores de \mathbb{R}^3 . Fazemos notar também que, como se vê na definição (23.51), $I(t)$ é uma matriz simétrica: $I(t)_{ab} = I(t)_{ba}$ para todos $a, b \in \{1, 2, 3\}$.

Retornando com (23.50) e (23.52) a (23.49), temos (verifique!)

$$e_c(t) = \frac{1}{2}\Omega_t \cdot (I(t)\Omega_t) + \Omega_t \cdot L(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{Q}_i(t)\|^2 + \frac{M}{2} \|\dot{q}_{cm}(t)\|^2, \quad (23.53)$$

onde introduzimos as grandezas

$$L(t) := \sum_{i=1}^n L_i(t) \quad \text{e} \quad L_i(t) := m_i Q_i(t) \times \dot{Q}_i(t). \quad (23.54)$$

$L_i(t)$ representa o vetor momento angular do i -ésimo ponto material de \mathcal{C} no sistema \mathbf{K} (em relação à origem de \mathbf{K}) e $L(t)$ representa o vetor momento angular total da coleção \mathcal{C} no sistema \mathbf{K} (também em relação à origem de \mathbf{K}).

Notemos que dois dos termos de (23.53) são reconhecíveis: 1º o termo $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{Q}_i(t)\|^2 =: E_C(t)$ representa a energia cinética da coleção \mathcal{C} de pontos materiais no sistema \mathbf{K} . 2º o termo $\frac{M}{2} \|\dot{q}_{cm}(t)\|^2$ representa a energia cinética do movimento do centro de massa em \mathbf{k} , ou seja, de um ponto material de massa M que se movesse com velocidade $\dot{q}_{cm}(t)$ no sistema \mathbf{k} . Os termos $\frac{1}{2}\Omega_t \cdot (I(t)\Omega_t) + \Omega_t \cdot L(t)$ são contribuições provenientes da rotação do sistema de referência \mathbf{K} .

Há dois casos de maior interesse:

1. Caso $\Omega_t = 0$,

$$e_c(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{Q}_i(t)\|^2 + \frac{M}{2} \|\dot{q}_{cm}(t)\|^2.$$

O primeiro termo é a energia cinética da coleção de pontos materiais \mathcal{C} no sistema \mathbf{K} enquanto que o segundo é a energia cinética associada ao movimento do centro de massa no sistema \mathbf{K} .

2. Caso $\dot{Q}_i(t) = 0$ para todo i (corpos rígidos),

$$e_c(t) = \frac{1}{2}\Omega_t \cdot (I\Omega_t) + \frac{M}{2} \|\dot{q}_{cm}(t)\|^2. \quad (23.55)$$

Neste caso I é constante, ou seja, não varia com o tempo. Como discutiremos melhor adiante, o primeiro termo é a energia cinética associada à rotação (rígida) do conjunto \mathcal{C} . O segundo é a energia cinética associada ao movimento do centro de massa de \mathcal{C} no sistema \mathbf{k} .

• Transformações por rotações de sistemas de coordenadas

Consideremos agora a situação, já discutida acima, na qual temos dois sistemas \mathbf{K} e \mathbf{K}' que diferem por uma rotação constante, ou seja, tem-se $Q = S^{-1}Q'$ com $S \in \text{SO}(3)$, e tem-se $\Omega'_t = S\Omega_t$, segundo (23.29). A energia cinética obtida em (23.53) deve, evidentemente, ser a mesma em \mathbf{K} e \mathbf{K}' . É claro que $\|\dot{Q}_i(t)\|$ e $\|\dot{q}_{cm}(t)\|$ não mudam com a passagem de \mathbf{K} a \mathbf{K}' , mas da invariância dos demais termos concluímos que

$$\langle \Omega_t, I(t)\Omega_t \rangle = \langle \Omega'_t, I'(t)\Omega'_t \rangle \quad \text{e que} \quad \langle \Omega_t, L(t) \rangle = \langle \Omega'_t, L'(t) \rangle,$$

ou seja,

$$\langle \Omega_t, I(t)\Omega_t \rangle = \langle \Omega_t, S^{-1}I'(t)S\Omega_t \rangle \quad \text{e} \quad \langle \Omega_t, L(t) \rangle = \langle \Omega_t, S^{-1}L'(t) \rangle.$$

Concluímos que $L'(t) = SL(t)$, fato esse que pode ser provado diretamente da definição de $L(t)$ (faça-o!), e que

$$I'(t) = SI(t)S^{-1}. \quad (23.56)$$

Essa última relação é importante, por mostrar como a matriz momento de inércia transforma-se por rotações do sistema de referência \mathbf{K} . Escrevendo-se de forma explícita o produto de matrizes (23.56) (e usando o fato que $S^{-1} = S^T$), temos para os elementos de matriz a seguinte regra de transformação:

$$I'(t)_{ab} = \sum_{c=1}^3 \sum_{d=1}^3 S_{ac} S_{bd} I(t)_{cd}. \quad (23.57)$$

Verifique! É importante comparar essa regra de transformação com a regra correspondente para a transformação de componentes de vetores, como Ω_t , que, pela a relação $\Omega'_t = S\Omega_t$, são da forma

$$(\Omega'_t)_a = \sum_{b=1}^3 S_{ab} (\Omega_t)_b . \quad (23.58)$$

Uma grandeza física cujas componentes se transformam por rotações (constantes) segundo (23.57) é dita ser um *tensor de segunda ordem*. Um vetor é um tensor de primeira ordem. Vários tipos de tensores ocorrem de forma importante na Física, como no Eletromagnetismo, na Teoria da Relatividade e na Mecânica dos Corpos Elasticamente Deformáveis (para referências sobre essa última área, de onde o próprio vocábulo “tensor” se originou, vide [205] ou [306]). A definição matemática, mais geral e abstrata, da noção de tensor é apresentada e desenvolvida no Capítulo 2, página 75.

Essas considerações justificam por que I é também denominado *tensor de momento de inércia*.

• **O momento linear de uma coleção finita de pontos materiais**

O momento linear da coleção \mathcal{C} de pontos materiais no sistema \mathbf{k} é dado simplesmente por

$$p(t) = \sum_{i=1}^n m_i \dot{q}_i(t) = M \dot{q}_{\text{cm}}(t) . \quad (23.59)$$

Ele corresponde, portanto, ao momento linear associado ao movimento do centro de massa.

• **O momento angular de uma coleção finita de pontos materiais**

O momento angular do i -ésimo ponto material da coleção \mathcal{C} no sistema \mathbf{k} , em relação à origem desse sistema é definido por

$$l_i(t) := m_i q_i(t) \times \dot{q}_i(t) .$$

O momento angular da coleção \mathcal{C} no sistema \mathbf{k} , em relação à origem desse sistema, é definido por

$$l(t) := \sum_{i=1}^n l_i(t) = \sum_{i=1}^n m_i q_i(t) \times \dot{q}_i(t)$$

e pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} l(t) &= \sum_{i=1}^n m_i q_i(t) \times \dot{q}_i(t) = \sum_{i=1}^n m_i (R_t Q_i(t) + q_{\text{cm}}(t)) \times \left(R_t [\Omega_t \times Q_i(t) + \dot{Q}_i(t)] + \dot{q}_{\text{cm}}(t) \right) \\ &= R_t \sum_{i=1}^n m_i (Q_i(t) + R_t^{-1} q_{\text{cm}}(t)) \times \left(\Omega_t \times Q_i(t) + \dot{Q}_i(t) + R_t^{-1} \dot{q}_{\text{cm}}(t) \right) \\ &= R_t \left[\sum_{i=1}^n m_i Q_i(t) \times (\Omega_t \times Q_i(t)) + \sum_{i=1}^n m_i Q_i(t) \times \dot{Q}_i(t) + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n m_i Q_i(t) \right)}_{=0} \times (R_t^{-1} \dot{q}_{\text{cm}}(t)) \right. \\ &\quad \left. + (R_t^{-1} q_{\text{cm}}(t)) \times \underbrace{\left(\Omega_t \times \left(\sum_{i=1}^n m_i Q_i(t) \right) \right)}_{=0} + (R_t^{-1} q_{\text{cm}}(t)) \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{Q}_i(t) \right)}_{=0} + M (R_t^{-1} q_{\text{cm}}(t)) \times (R_t^{-1} \dot{q}_{\text{cm}}(t)) \right] \\ &= R_t \left[\sum_{i=1}^n m_i Q_i(t) \times (\Omega_t \times Q_i(t)) + \sum_{i=1}^n m_i Q_i(t) \times \dot{Q}_i(t) \right] + M q_{\text{cm}}(t) \times \dot{q}_{\text{cm}}(t) . \end{aligned}$$

Consideremos na última expressão o termo

$$\sum_{i=1}^n m_i Q_i(t) \times (\Omega_t \times Q_i(t)) \stackrel{(4.14)}{=} \sum_{i=1}^n m_i \|Q_i(t)\|^2 \Omega_t - \sum_{i=1}^n m_i (Q_i(t) \cdot \Omega_t) Q_i(t) . \quad (23.60)$$

A a -ésima componente do vetor do lado direito de (23.60) é

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \left[\|Q_i(t)\|^2 (\Omega_t)_a - (Q_i(t) \cdot \Omega_t) (Q_i(t))_a \right] \\ = \sum_{i=1}^n m_i \sum_{b=1}^3 \left[\|Q_i(t)\|^2 \delta_{ab} - (Q_i(t))_b (Q_i(t))_a \right] (\Omega_t)_b = \sum_{b=1}^3 I_{ab}(t) (\Omega_t)_b = (I(t)\Omega_t)_a . \end{aligned}$$

Assim,

$$l(t) = R_t J(t) + M q_{\text{cm}}(t) \times \dot{q}_{\text{cm}}(t) , \tag{23.61}$$

com

$$J(t) := I(t)\Omega_t + L(t) , \tag{23.62}$$

sendo $L(t)$ definido em (23.54). Os termos acima têm interpretações específicas. O termo $M q_{\text{cm}}(t) \times \dot{q}_{\text{cm}}(t)$ corresponde ao momento angular do movimento do centro de massa no sistema inercial \mathbf{k} , em relação à origem de \mathbf{k} . Esse termo é por vezes denominado *momento angular orbital* da coleção \mathcal{C} . O termo $J(t) := I(t)\Omega_t + L(t)$ compõe o que se denomina *momento angular intrínseco* da coleção de pontos materiais \mathcal{C} no sistema de referência \mathbf{K} . Note-se que o termo $I(t)\Omega_t$ é obviamente nulo no caso em que $\Omega_t = 0$. O termo $L(t)$ é o momento angular da coleção \mathcal{C} no sistema \mathbf{K} , em relação à origem desse sistema, ou seja, em relação ao centro de massa. Note-se que esse termo é nulo no caso de corpos rígidos.

Há, assim, dois casos de maior interesse:

1. Caso $\Omega_t = 0$, temos $J(t) = L(t)$ e

$$l(t) = R_t L(t) + M q_{\text{cm}}(t) \times \dot{q}_{\text{cm}}(t) .$$

2. Caso $\dot{Q}_i(t)$ para todo i (corpos rígidos), temos $J(t) = I\Omega_t$ (nesse caso I é constante, ou seja, não varia com o tempo) e

$$l(t) = R_t I\Omega_t + M q_{\text{cm}}(t) \times \dot{q}_{\text{cm}}(t) .$$

• As equações dinâmicas

Suporemos que cada ponto material da coleção \mathcal{C} considerado esteja sujeito, quando analisado do sistema inercial \mathbf{k} , a uma força f_i^e resultante da interação com o exterior e de forças internas resultantes da interação dos próprios pontos materiais da coleção \mathcal{C} entre si. Denotaremos por $f_{j \rightarrow i}$ a força que o j -ésimo ponto material exerce sobre o i -ésimo. Adotaremos também a convenção que $f_{i \rightarrow i} = 0$ para todo i . A força total resultante será, portanto $f_i^e + \sum_{j=1}^n f_{j \rightarrow i}$.

As forças $f_{j \rightarrow i}$ podem ser funções de t , das coordenadas q_k , e das velocidades \dot{q}_k , com $k = 1, \dots, n$, mas sobre elas faremos duas hipóteses: que vale $f_{j \rightarrow i} = -f_{i \rightarrow j}$ e que o vetor $f_{j \rightarrow i}$ é paralelo ao vetor $q_i - q_j$.

Pela segunda lei de Newton, temos

$$m_i \ddot{q}_i(t) = f_i^e + \sum_{j=1}^n f_{j \rightarrow i} , \tag{23.63}$$

e, portanto, para o momento linear total da coleção \mathcal{C} de pontos materiais, dado em (23.59),

$$\dot{p}(t) = \sum_{i=1}^n f_i^e + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{j \rightarrow i} .$$

A condição $f_{j \rightarrow i} = -f_{i \rightarrow j}$ implica $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{j \rightarrow i} = 0$, pois

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{j \rightarrow i} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{j \rightarrow i} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_{i \rightarrow j} \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{(f_{j \rightarrow i} + f_{i \rightarrow j})}_{=0} = 0 ,$$

sendo que na primeira igualdade simplesmente trocamos as letras $i \leftrightarrow j$ na segunda somatória. Assim,

$$\dot{p}(t) = f^{Te} , \quad \text{com} \quad f^{Te} := \sum_{i=1}^n f_i^e . \tag{23.64}$$

f^{Te} representa a força externa total agindo sobre a coleção de pontos materiais \mathcal{C} . Note-se que a relação (23.64) diz-nos também que

$$M\ddot{q}_{\text{cm}}(t) = f^{Te}, \quad (23.65)$$

ou seja, o movimento do centro de massa obedece a segunda lei de Newton e se dá como se um ponto material de massa M e coordenadas q_{cm} se movesse sob a ação da força externa total f^{Te} . Sob as hipóteses, as interações internas não afetam o movimento do centro de massa.

Estudemos agora a variação temporal do momento angular total do conjunto \mathcal{C} de pontos materiais (em relação à origem do sistema \mathbf{k}). Para o i -ésimo ponto material, temos $\dot{l}_i(t) := m_i q_i(t) \times \ddot{q}_i(t) = q_i(t) \times (f_i^e + \sum_{j=1}^n f_{j \rightarrow i})$. Assim, para o momento angular total, vale

$$\dot{l}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{l}_i(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \times f_i^e + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i(t) \times f_{j \rightarrow i}.$$

Escrevemos,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i(t) \times f_{j \rightarrow i} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i(t) \times f_{j \rightarrow i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_j(t) \times f_{i \rightarrow j} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i(t) \times f_{j \rightarrow i} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_j(t) \times f_{j \rightarrow i} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (q_i(t) - q_j(t)) \times f_{j \rightarrow i} = 0, \end{aligned}$$

pela hipótese que $f_{j \rightarrow i}$ e $q_i(t) - q_j(t)$ são paralelos. Novamente, na primeira igualdade simplesmente fizemos a troca $i \leftrightarrow j$ na segunda somatória. Logo,

$$\dot{l}(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \times f_i^e.$$

Se agora escrevermos $q_i(t) = R_t Q_i(t) + q_{\text{cm}}(t)$, e definirmos $F_i^e := R_t^{-1} f_i^e$, teremos

$$\dot{l}(t) = R_t \left(\sum_{i=1}^n Q_i(t) \times F_i^e \right) + q_{\text{cm}}(t) \times f^{Te}.$$

Usando-se em seguida a relação (23.61), obtemos

$$\dot{l}(t) = \frac{d}{dt} (R_t J(t)) + M q_{\text{cm}}(t) \times \ddot{q}_{\text{cm}}(t) = R_t \left(\sum_{i=1}^n Q_i(t) \times F_i^e \right) + q_{\text{cm}}(t) \times f^{Te}, \quad (23.66)$$

com $J(t)$ definido em (23.62). Essa expressão contém duas igualdades distintas. Sabemos que

$$M q_{\text{cm}}(t) \times \ddot{q}_{\text{cm}}(t) \stackrel{(23.65)}{=} q_{\text{cm}}(t) \times f^{Te},$$

o que iguala dois dos termos de (23.67). (A expressão $q_{\text{cm}}(t) \times f^{Te}$ representa o torque exercido pelas forças externas sobre o centro de massa (sempre em relação à origem de \mathbf{k})). Consequentemente, (23.67) reduz-se a

$$\frac{d}{dt} (R_t J(t)) = R_t \sum_{i=1}^n Q_i(t) \times F_i^e,$$

relação esta que expressa a variação do momento angular intrínseco do corpo rígido no sistema de referência \mathbf{k} , expresso por $j(t) := R_t J(t)$.

Note-se que na ausência de torque das forças externas, temos a lei de conservação $j(t) = \text{constante}$.

O estudante deve entender que, embora $j(t)$ seja conservado quando da ausência de torque das forças externas, $J(t)$ não necessariamente o é. A conservação de $j(t)$ reflete a simetria de rotações do sistema inercial \mathbf{k} . O sistema \mathbf{K} , porém, não é geralmente inercial, e portanto, não deve necessariamente refletir essa propriedade de simetria.

Usando (23.33) para expressar \dot{R}_t , a relação (23.66) fica

$$\dot{l}(t) = R_t \dot{J}(t) + R_t (\Omega_t \times J(t)) + M q_{\text{cm}}(t) \times \ddot{q}_{\text{cm}}(t) = R_t \left(\sum_{i=1}^n Q_i(t) \times F_i^e \right) + q_{\text{cm}}(t) \times f^{Te}, \quad (23.67)$$

ou seja,

$$\dot{J}(t) + \Omega_t \times J(t) = \sum_{i=1}^n Q_i(t) \times F_i^e, \quad (23.68)$$

com $J(t)$ definido em (23.62). O lado esquerdo é a derivada temporal do momento angular intrínseco (no sistema \mathbf{K}) do conjunto \mathcal{C} de pontos materiais que consideramos. O lado direito é o torque exercido pelas forças externas no sistema de referência \mathbf{K} do centro de massa (em relação à origem de \mathbf{K}).

A relação (23.68) expressa a lei de variação do momento angular intrínseco da coleção \mathcal{C} de pontos materiais no sistema \mathbf{K} e é denominada *equação de Euler*. Outras versões particulares dessa equação serão vistas no que segue.

Há dois casos particulares relevantes a considerar:

1. No caso em que $\Omega_t = 0$ tem-se $J(t) = L(t)$ e a relação (23.68) reduz-se a

$$\dot{L}(t) = \sum_{i=1}^n Q_i(t) \times F_i^e. \quad (23.69)$$

2. No caso em que $\dot{Q}_i(t) = 0$ (que ocorre em corpos rígidos), tem-se $J(t) = I\Omega_t$ (recordar que I é constante nesse caso) e a relação (23.68) reduz-se a

$$\frac{d}{dt}(I\Omega_t) = (I\Omega_t) \times \Omega_t + \sum_{i=1}^n Q_i \times F_i^e. \quad (23.70)$$

Na ausência de forças externas isso reduz-se a

$$\frac{d}{dt}(I\Omega_t) = (I\Omega_t) \times \Omega_t. \quad (23.71)$$

As relações (23.70) e (23.71) são as célebres *equações de Euler da Mecânica de Corpos Rígidos*, as quais serão discutidas com mais detalhe adiante. Note-se que (23.70) e (23.71) são expressas no sistema de coordenadas \mathbf{K} .

• **A energia mecânica e sua conservação**

Em um sistema de referência inercial, uma força f , dependente apenas da posição, é dita ser conservativa se houver uma função U , denominada *potencial*, tal que $f(q) = -(\vec{\nabla}U)(q)$.

Vamos retornar a (23.63) com as seguintes hipóteses adicionais: a força externa $f_i^e \equiv f_i^e(q_1, \dots, q_n)$ é conservativa, ou seja, existe um potencial $U^e(q_1, \dots, q_n)$ tal que $f_i^e(q_1, \dots, q_n) = -(\vec{\nabla}_i U^e)(q_1, \dots, q_n)$. (Aqui $\vec{\nabla}_i$ é o gradiente relativo às coordenadas de q_i).

As forças internas $f_{j \rightarrow i}$ dependem apenas do vetor $q_i - q_j$, são conservativas e existem, para cada par $\{i, j\}$, potenciais $U_{ji}(\|q\|) = U_{ij}(\|q\|)$ (as funções $U_{ji} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de uma variável) tais que

$$f_{j \rightarrow i} = -\vec{\nabla}_i \left(U_{ji}(\|q_i - q_j\|) \right) = -U'_{ij}(\|q_i - q_j\|) \frac{q_i - q_j}{\|q_i - q_j\|}.$$

Com isso, temos satisfeita a condição $f_{j \rightarrow i} = -f_{i \rightarrow j}$, e a condição que $f_{j \rightarrow i}$ e $q_i - q_j$ são vetores paralelos, ambas já supostas acima quando tratamos da conservação do momento linear e do momento angular.

Note-se que, como $f_{i \rightarrow i} = 0$, adotamos U_{ii} como a função identicamente nula.

Segundo (23.63), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \|\dot{q}_i(t)\|^2 &= \sum_{i=1}^n m_i \dot{q}_i(t) \cdot \ddot{q}_i(t) \stackrel{(23.63)}{=} \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i(t) \cdot f_i^e + \sum_{j=1}^n \dot{q}_i(t) \cdot f_{j \rightarrow i} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i(t) \cdot (\vec{\nabla}_i U^e)(q_1(t), \dots, q_n(t)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{q}_i(t) \cdot \vec{\nabla}_i (U_{ji}(\|q_i(t) - q_j(t)\|)). \end{aligned}$$

Escrevemos agora

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i(t) \cdot (\vec{\nabla}_i U^e)(q_1(t), \dots, q_n(t)) = \frac{d}{dt} U^e(q_1(t), \dots, q_n(t))$$

e

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{q}_i(t) \cdot \vec{\nabla}_i (U_{ji}(\|q_i(t) - q_j(t)\|)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\dot{q}_i(t) \cdot \vec{\nabla}_i (U_{ji}(\|q_i(t) - q_j(t)\|)) + \dot{q}_j(t) \cdot \vec{\nabla}_j (U_{ji}(\|q_i(t) - q_j(t)\|)) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ji}(\|q_i(t) - q_j(t)\|) \right), \end{aligned}$$

(acima, na primeira igualdade, usamos que $U_{ji} = U_{ij}$) e com isso concluímos que

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \|\dot{q}_i(t)\|^2 + U^e(q_1(t), \dots, q_n(t)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ji}(\|q_i(t) - q_j(t)\|) \right) = 0. \quad (23.72)$$

A grandeza

$$e_m(t) := \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \|\dot{q}_i(t)\|^2 + U^e(q_1(t), \dots, q_n(t)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ji}(\|q_i(t) - q_j(t)\|) \quad (23.73)$$

é denominada *energia mecânica* do sistema de n pontos materiais e (23.72) ensina-nos que ela é uma constante de movimento.

Observe-se que podemos escrever

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ji}(\|q_i(t) - q_j(t)\|) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} U_{ji}(\|q_i(t) - q_j(t)\|) = \sum_{\text{pares } \{i, j\} \text{ distintos}} U_{ji}(\|q_i(t) - q_j(t)\|).$$

Essa grandeza é a *energia potencial interna* dos n pontos materiais, enquanto que $U^e(q_1(t), \dots, q_n(t))$ é a *energia potencial externa* desses pontos.

Uma situação muito comum é aquela na qual

$$U^e(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^n U_i^e(q_i), \quad (23.74)$$

quando a energia potencial externa é a soma de energia potenciais individuais de cada ponto material. Naturalmente, em ambos os casos a energia mecânica é conservada. Consideraremos apenas o caso (23.74) no que segue.

Vamos agora expressar a energia mecânica em termos de grandezas do sistema \mathbf{K} . Usando a expressão (23.53) para a energia cinética, temos

$$e_m(t) = \frac{1}{2}\Omega_t \cdot (I(t)\Omega_t) + \Omega_t \cdot L(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{Q}_i(t)\|^2 + \frac{M}{2} \|\dot{q}_{\text{cm}}(t)\|^2 + \sum_{i=1}^n U_i^e(R_t Q_i(t) + q_{\text{cm}}(t)) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} U_{ji}(\|Q_i(t) - Q_j(t)\|), \quad (23.75)$$

Acima, usamos o fato que $U_{ji}(\|q_i(t) - q_j(t)\|) = U_{ji}(\|R_t(Q_i(t) - Q_j(t))\|) = U_{ji}(\|Q_i(t) - Q_j(t)\|)$.

Há dois casos de maior interesse:

1. Caso $\Omega_t = 0$,

$$e_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{Q}_i(t)\|^2 + \frac{M}{2} \|\dot{q}_{\text{cm}}(t)\|^2 + \sum_{i=1}^n U_i^e(R_0 Q_i(t) + q_{\text{cm}}(t)) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} U_{ji}(\|Q_i(t) - Q_j(t)\|),$$

com $R_t = R_0 \in \text{SO}(3)$, constante.

2. Caso $\dot{Q}_i(t) = 0$ para todo i (corpos rígidos),

$$e_m = \frac{1}{2}\Omega_t \cdot (I\Omega_t) + \frac{M}{2} \|\dot{q}_{\text{cm}}(t)\|^2 + \sum_{i=1}^n U_i^e(R_t Q_i + q_{\text{cm}}(t)) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} U_{ji}(\|Q_i - Q_j\|). \quad (23.76)$$

Neste caso I é constante, ou seja, não varia com o tempo. No caso de corpos rígidos, as distâncias $\|q_i(t) - q_j(t)\| = \|Q_i - Q_j\|$ são constantes ao longo do movimento. Assim, para corpos rígidos a *energia potencial interna* é uma constante e a energia mecânica pode ser reduzida, por subtração de uma constante, a

$$e_m = \frac{1}{2}\Omega_t \cdot (I\Omega_t) + \frac{M}{2} \|\dot{q}_{\text{cm}}(t)\|^2 + \sum_{i=1}^n U_i^e(R_t Q_i + q_{\text{cm}}(t)), \quad (23.77)$$

que, naturalmente, é também uma constante de movimento.

23.3 Mecânica de Corpos Rígidos

Vamos transpor os resultados gerais acima para o caso específico de corpos rígidos. Um corpo rígido é um objeto material extenso, ocupando uma região compacta do espaço, com massa finita e dotado da propriedade de que ao longo de qualquer movimento a distância entre quaisquer de seus pontos permanece constante. É relevante dizer que a noção de corpo rígido é uma das muitas idealizações existentes na Física. Estritamente falando, eles não existem no mundo real, mas fornecem boas aproximações para a descrição do movimento não-relativístico de corpos sólidos.

A propriedade básica de um corpo rígido é a constância ao longo do tempo das distâncias entre seus pontos. Isso permite associar um corpo rígido a sistemas de referências \mathbf{K} (não necessariamente inerciais) onde o mesmo está fixo e, assim, colocam à nossa disposição todas as considerações anteriores sobre sistemas de referência.

Um corpo rígido é também caracterizado por uma distribuição de massa, definido por uma função ρ , que representa a densidade de massa do corpo. ρ não precisa ser constante em nossa formulação. É um dos princípios da Mecânica Clássica que a densidade de massa em um ponto de um corpo rígido independe do sistema de referência que o observa.

Seja \mathbf{K} um sistema de referência (não necessariamente inercial) onde o corpo está fixo e seja $V \subset \mathbf{K}$ a região do espaço que o mesmo ocupa. A massa total M do corpo rígido é definida por

$$M := \int_V d^3Q \rho(Q).$$

O centro de massa do corpo rígido em \mathbf{K} é definido por

$$Q_{\text{cm}} := \frac{1}{M} \int_V d^3Q \rho(Q) Q .$$

A ideia intuitiva por trás das últimas definições é a de generalizar as definições correspondentes para coleções de pontos materiais considerando que um corpo rígido é um agregado de pontos materiais de dimensões infinitesimais, indexados pelas coordenadas $Q \in V$, e com massa $\rho(Q)d^3Q$.

Seja \mathbf{k} um sistema de referência, que doravante consideraremos como inercial, no qual o movimento do referencial \mathbf{K} (e, portanto, do corpo rígido) é observado. Denotemos por $q_Q(t)$ o vetor posição em \mathbf{k} associado ao ponto Q do corpo rígido. Em concordância com (23.2), tem-se

$$q_Q(t) = R_t Q + c_t . \tag{23.78}$$

Para cada t , a expressão $q_Q(t)$ deve ser encarada como uma função de $Q \in V \subset \mathbf{K}$ em \mathbf{k} . O centro de massa do corpo rígido no sistema de referência \mathbf{k} é definido por

$$q_{\text{cm}}(t) := \frac{1}{M} \int_V d^3Q \rho(Q) q_Q(t) .$$

Assim, por (23.78), tem-se

$$q_{\text{cm}}(t) = R_t Q_{\text{cm}} + c_t .$$

Analogamente ao que fizemos anteriormente, é conveniente escolher-se o sistema \mathbf{K} de sorte que sua origem coincida com a posição do centro de massa do corpo rígido. Isso significa escolher

$$0 = Q_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_V d^3Q \rho(Q) Q \quad \text{e, portanto,} \quad c_t = q_{\text{cm}}(t) .$$

Com essas considerações, e tendo em vista os resultados anteriores sobre coleções de pontos materiais, é relativamente fácil em um sistema inercial \mathbf{k} expressar grandezas como a energia cinética, o momento linear e o momento angular de um corpo rígido em movimento nesse sistema.

• **O espaço das configurações de um corpo rígido**

Como dissemos, a posição de um corpo rígido em um sistema de referência inercial \mathbf{k} é inteiramente fixada pela posição de seu centro de massa e pelos eixos Cartesianos de um sistema de referência \mathbf{K} fixo no corpo (e com origem no seu centro de massa). A orientação dos eixos de \mathbf{K} é inteiramente determinada por um elemento do grupo de rotações $\text{SO}(3)$ (vide Proposição 22.9, página 1062, e a discussão em torno da mesma). Esse elemento de $\text{SO}(3)$ é, a cada instante de tempo, a matriz R_t acima. Assim, o espaço de coordenadas de um corpo rígido é $\mathcal{M} \equiv \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$, que vem a ser uma variedade de dimensão 6 (lembrar que $\text{SO}(3)$ é uma variedade tridimensional, como vimos). No jargão da Física, diz-se por essa razão que um corpo rígido possui seis graus de liberdade: são necessárias seis coordenadas para determinar sua posição, três para o centro de massa e três para sua orientação no espaço. O espaço de fase (que inclui os momentos generalizados) de um corpo rígido é, portanto, o fibrado cotangente $T_{\mathcal{M}}^*$ da variedade \mathcal{M} , que vem a ser uma variedade de dimensão doze. Como discutiremos mais adiante (seção 23.4, página 1174) é, em certos casos, interessante utilizar ângulos de Euler (tratados na Seção 22.3.2.2, página 1063) para coordenatizar R_t e, portanto, descrever a orientação de corpos rígidos no espaço e sua dinâmica.

As noções de variedade diferenciável, fibrado tangente etc. são estudadas no Capítulo 35, página 1642.

Na referência [15] o leitor encontrará uma fina discussão sobre como certas propriedades topológicas do fibrado tangente $T_{\mathcal{M}}$ permitem inferir propriedades gerais do movimento de corpos rígidos, como por exemplo a ausência de pontos singulares no movimento rotacional ou o número de quantidades conservadas.

• **A energia cinética de um corpo rígido**

Num corpo rígido os pontos materiais que o compõem não se movem no sistema \mathbf{K} . Temos, portanto, uma situação como aquela descrita no tratamento de conjuntos finitos de pontos materiais quando adotamos $\dot{Q}_i(t) = 0$ para todo t e todo i .

Assim, segundo (23.55), temos para a energia cinética do corpo rígido em \mathbf{k} a expressão

$$e_c(t) = \frac{1}{2} \Omega_t \cdot (I \Omega_t) + \frac{M}{2} \|\dot{q}_{\text{cm}}(t)\|^2 , \tag{23.79}$$

onde I é o *tensor momento de inércia*, que consiste na matriz com elementos

$$I_{ab} := \int_V d^3Q \rho(Q) \left[\|Q\|^2 \delta_{ab} - Q_a Q_b \right], \quad (23.80)$$

$a, b \in \{1, 2, 3\}$. Neste caso, I é constante, ou seja, não varia com o tempo. O primeiro termo em (23.79) é a energia cinética associada à rotação (rígida) do corpo rígido. O segundo termo em (23.79) é a energia cinética associada ao movimento do centro de massa no sistema \mathbf{k} .

É quase desnecessário recordar que as regras de transformação (23.56) e (23.57) permanecem válidas no caso de corpos rígidos.

• **O momento linear de um corpo rígido**

O momento linear do corpo rígido no sistema \mathbf{k} é dado simplesmente por $p(t) = M\dot{q}_{\text{cm}}(t)$. Ele corresponde, portanto, ao momento linear associado ao movimento do centro de massa.

• **O momento angular de um corpo rígido**

Especializando nossa discussão anterior de conjuntos de pontos materiais para corpos rígidos, temos que o momento angular de um corpo rígido em relação à origem em um sistema de referência inercial \mathbf{k} é dado por

$$l(t) = R_t(I\Omega_t) + Mq_{\text{cm}}(t) \times \dot{q}_{\text{cm}}(t),$$

com I sendo novamente o tensor momento de inércia em relação à origem dado em (23.80). O segundo termo acima, $Mq_{\text{cm}}(t) \times \dot{q}_{\text{cm}}(t)$, claramente representa o momento angular (em relação à origem de \mathbf{k}) devido ao movimento do centro de massa do corpo. Essa parte do momento angular total é denominada *momento angular orbital*. A expressão $J(t) := I\Omega_t$ representa o momento angular intrínseco do corpo rígido. É relevante mencionar que $J(t)$ e Ω_t não necessariamente apontam na mesma direção.

23.3.1 Propriedades do Tensor Momento de Inércia

Conforme já discutimos acima, a transformação que leva o tensor de momento de inércia de um sistema \mathbf{K} , fixo no corpo rígido, a um outro \mathbf{K}' , também fixo no corpo e com a mesma origem é (23.56), com $S \in \text{SO}(3)$. Por um teorema bem conhecido (vide Seção 9.4, página 381), a matriz I , por ser simétrica, pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal. Os elementos da diagonal são autovalores de I e seus autovetores em \mathbb{R}^3 podem ser escolhidos ortonormais.

Assim, existe um sistema \mathbf{K}' (não necessariamente único) onde I é diagonal. Os eixos desse sistema \mathbf{K}' , que são escolhidos como os autovetores normalizados de I em \mathbb{R}^3 , são denominados *eixos principais de inércia* e são, naturalmente, ortogonais entre si. Os elementos diagonais de I' , que denotaremos por I_1, I_2 e I_3 , são denominados *momentos principais de inércia*, ou simplesmente *momentos de inércia*, do corpo rígido. Eles são os autovalores de I (e, portanto, de I') e evidentemente são expressos como

$$I_1 := \int_{V'} d^3Q' \rho(Q') ((Y')^2 + (Z')^2), \quad I_2 := \int_{V'} d^3Q' \rho(Q') ((X')^2 + (Z')^2), \quad I_3 := \int_{V'} d^3Q' \rho(Q') ((X')^2 + (Y')^2),$$

onde (X', Y', Z') são as coordenadas Cartesianas de $Q' \in \mathbf{K}'$ e V' é o volume ocupado pelo corpo rígido em \mathbf{K}' .

A energia cinética rotacional no sistema dos eixos principais é simplesmente

$$e_{cr} = \frac{1}{2} \left(I_1(\Omega_t)_1^2 + I_2(\Omega_t)_2^2 + I_3(\Omega_t)_3^2 \right), \quad (23.81)$$

onde, $(\Omega_t)_k, k = 1, 2, 3$ são as componentes de Ω_t (por simplicidade omitiremos doravante a linha “'” em referência às quantidades do sistema \mathbf{K}'). As componentes do momento angular intrínseco são simplesmente dadas por

$$J_1(t) = I_1(\Omega_t)_1, \quad J_2(t) = I_2(\Omega_t)_2, \quad J_3(t) = I_3(\Omega_t)_3.$$

• **Movimento com um ponto fixo**

Uma situação que é frequentemente encontrada é a de um corpo rígido de massa M que se move de forma que um de seus pontos, o , encontre-se fixo em relação a um sistema de referência inicial \mathbf{k} . Esse ponto fixo, em torno do qual o

pião pode girar livremente, é denominado *pivô*. Consideremos como antes um sistema de referência \mathbf{K} fixo no corpo com origem no seu centro de massa. Denotemos por I_{cm} o seu tensor momento de inércia em relação a seu centro de massa. Queremos saber de que forma o tensor momento de inércia deve ser modificado levando em conta que um dos pontos do corpo é fixo.

A energia cinética do corpo rígido é dada por $e_c = \frac{1}{2}\langle \Omega_t, I_{\text{cm}}\Omega_t \rangle + \frac{M}{2}\|\dot{q}_{\text{cm}}\|^2$. Denotemos por q_o e Q_o os vetores posição do ponto o nos sistemas \mathbf{k} e \mathbf{K} , respectivamente. Segundo (23.34), temos $\dot{q}_o(t) = R_t[\Omega_t \times Q_o + \dot{Q}_o] + \dot{q}_{\text{cm}}$, mas como $\dot{q}_o(t) = 0$ (o ponto o está fixo em \mathbf{k}) e $\dot{Q}_o = 0$ (o ponto o pertence ao ponto rígido e está fixo em \mathbf{K}), obtemos $\dot{q}_{\text{cm}} = -R_t(\Omega_t \times Q_o)$. Assim, $e_c = \frac{1}{2}\langle \Omega_t, I_{\text{cm}}\Omega_t \rangle + \frac{M}{2}\|\Omega_t \times Q_o\|^2$. Fazendo uso do mesmo tipo de manipulações que empregamos anteriormente, podemos escrever

$$M\|\Omega_t \times Q_o\|^2 = M \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 (\Omega_t)_a \left(\|Q_o\|^2 \delta_{ab} - (Q_o)_a (Q_o)_b \right) (\Omega_t)_b .$$

Definindo um novo tensor I_o cujas componentes são dadas por

$$(I_o)_{ab} := (I_{\text{cm}})_{ab} + M \left(\|Q_o\|^2 \delta_{ab} - (Q_o)_a (Q_o)_b \right) ,$$

$a, b \in \{1, 2, 3\}$, vemos que podemos escrever

$$e_c = \frac{1}{2}\langle \Omega_t, I_o \Omega_t \rangle . \tag{23.82}$$

Isso permite interpretar I_o como o tensor de momento de inércia desse corpo rígido com um ponto fixo.

• **Movimento com um eixo fixo. O teorema dos eixos paralelos**

Considere-se a situação em que há um eixo, fixo no corpo, e também imóvel em um sistema de referência inercial \mathbf{k} , e que o corpo gire em relação a esse eixo. No sistema \mathbf{k} esse eixo é descrito por $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \{h + \lambda \vec{\eta}_{\mathbf{k}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$, com $h \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{\eta}_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}^3$ com $\|\vec{\eta}_{\mathbf{k}}\|$. No sistema \mathbf{K} , que é fixo no corpo e tem como origem o seu centro de massa, o eixo é descrito por $\mathcal{E}_{\mathbf{K}} = \{H + \lambda \vec{\eta}_{\mathbf{K}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$, com $H \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{\eta}_{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^3$ com $\|\vec{\eta}_{\mathbf{K}}\|$.

No sistema de referência inercial \mathbf{k} o corpo rígido gira com velocidade angular $\omega_t = \|\omega_t\| \vec{\eta}_{\mathbf{k}}$. De acordo com (23.7), tomando-se q , fixo, ao longo do eixo $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$ (para o que tem-se também $\dot{Q} = 0$, já que o eixo está fixo no corpo) e $c_t = q_{\text{cm}}$, teremos

$$\dot{q}_{\text{cm}}(t) = -\omega_t \times (q - q_{\text{cm}}(t)) .$$

Essa expressão evidentemente independe do ponto q tomado ao longo de $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$, pois um outro ponto diferirá de q por um múltiplo de $\vec{\eta}_{\mathbf{k}}$, que aponta na direção de ω_t . Em termos de grandezas do sistema de referência \mathbf{K} , fixo no corpo rígido, e com origem no centro de massa, isso fica

$$\dot{q}_{\text{cm}}(t) = -R_t(\Omega_t \times Q) ,$$

com Q sendo qualquer ponto situado sobre o eixo de rotação $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}$. A energia cinética rotacional fica, portanto,

$$e_{cr} = \frac{1}{2}\langle \Omega_t, I_{\text{cm}}\Omega_t \rangle + \frac{M}{2}\|\Omega_t \times Q\|^2 .$$

Escrevendo novamente

$$M\|\Omega_t \times Q\|^2 = M \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 (\Omega_t)_a \left(\|Q\|^2 \delta_{ab} - (Q)_a (Q)_b \right) (\Omega_t)_b ,$$

temos

$$e_{cr} = \frac{1}{2}\langle \Omega_t, I_{\mathcal{E}_{\mathbf{K}}}\Omega_t \rangle ,$$

onde $I_{\mathcal{E}_{\mathbf{K}}}$ tem suas componentes dadas por

$$(I_{\mathcal{E}_{\mathbf{K}}})_{ab} := (I_{\text{cm}})_{ab} + M \left(\|Q\|^2 \delta_{ab} - (Q)_a (Q)_b \right) .$$

Esses desenvolvimentos podem ser apresentados de outra forma. Escrevendo $\Omega_t = \|\Omega_t\| \vec{\eta}_{\mathbf{K}}$ e adotando o vetor posição $Q \in \mathcal{E}_{\mathbf{K}}$ ortogonal ao eixo $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}$ e, portanto, a Ω_t (isso é sempre possível tomando-se Q como o ponto de $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}$ mais próximo à origem de \mathbf{K}), então $\|\Omega_t \times Q\|^2 = \|\Omega_t\|^2 \|Q\|^2$ e, portanto,

$$e_{cr} = \frac{I_{\mathcal{E}}}{2} \|\Omega_t\|^2,$$

onde

$$I_{\mathcal{E}} := \langle \vec{\eta}_{\mathbf{K}}, I_{cm} \vec{\eta}_{\mathbf{K}} \rangle + MD^2, \tag{23.83}$$

onde $D = \|Q\|$ é a menor distância da origem de \mathbf{K} ao eixo $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}$. Se $\vec{\eta}_{\mathbf{K}}$ for paralelo ao k -ésimo eixo principal do corpo rígido, então

$$I_{\mathcal{E}} = I_k + MD^2,$$

onde I_k é k -ésimo momento de inércia (de I_{cm}). Esse resultado é conhecido como *teorema dos eixos paralelos*, ou *teorema de Huygens¹⁴–Steiner¹⁵*. A relação (23.83) é uma generalização para o caso de o eixo de rotação não ser paralelo a nenhum dos eixos principais.

A expressão $\langle \vec{\eta}, I_{cm} \vec{\eta} \rangle$, com $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$ e $\|\vec{\eta}\| = 1$ é denominada *momento de inércia em relação ao eixo $\vec{\eta}$* .

23.3.2 As Equações Dinâmicas

Como já comentamos, também no caso de corpos rígidos temos

$$M \ddot{q}_{cm}(t) = f^{Te}(t), \tag{23.84}$$

ou seja, o movimento do centro de massa obedece a segunda lei de Newton e se dá como se um ponto material de massa M e coordenadas q_{cm} se movesse sob a ação da força externa total $f^{Te}(t)$. Se ϕ^e representa, no sistema inercial \mathbf{k} , a força externa por unidade de volume agindo em cada ponto do corpo rígido considerado em cada instante de tempo, teremos

$$f^{Te}(t) = \int_V d^3Q \phi^e(q_Q(t), t) = \int_V d^3Q \phi^e(R_t Q + q_{cm}(t), t), \tag{23.85}$$

onde usamos (23.78) adotando $c_t = q_{cm}(t)$. Para a variação do momento angular orbital, tem-se também, portanto,

$$\frac{d}{dt} \left(M q_{cm}(t) \times \dot{q}_{cm}(t) \right) \stackrel{(23.65)}{=} q_{cm}(t) \times f^{Te}(t). \tag{23.86}$$

Definindo-se

$$\Phi^e(Q, t) := R_t^{-1} \phi^e(q_Q(t), t) = R_t^{-1} \phi^e(R_t Q + q_{cm}(t), t),$$

(vide (23.38)) teremos para a variação do momento angular intrínseco do corpo rígido, conforme adiantado em (23.70), a relação

$$I \dot{\Omega}_t = (I \Omega_t) \times \Omega_t + \Theta(t), \tag{23.87}$$

onde

$$\Theta(t) := \int_V d^3Q Q \times \Phi^e(Q, t), \tag{23.88}$$

que representa o torque total, no sistema \mathbf{K} , exercido pelas forças externas que agem no corpo rígido.

A importante equação (23.87) é denominada *equação de Euler*. Para a história da descoberta da equação de Euler na Mecânica dos corpos rígidos, vide [339] e [87]. Na ausência de forças externas (23.87) reduz-se a

$$I \dot{\Omega}_t = (I \Omega_t) \times \Omega_t, \tag{23.89}$$

relação essa que também é denominada *equação de Euler* (sem torque externo).

A equação de Euler é um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares de primeira ordem para Ω_t (ou também para $J(t)$). Ela descreve a dinâmica de rotações de um corpo rígido e pode ser usada para a dedução de

¹⁴Christiaan Huygens (1629–1695).

¹⁵Jakob Steiner (1796–1863).

propriedades desse movimento e também, em alguns casos específicos, para a determinação explícita desses movimentos. Uma maneira alternativa relevante de determinação desses movimentos usa o formalismo Lagrangiano, adotando-se como as coordenadas dos corpos rígidos um conjunto de ângulos de Euler, que descrevem seu estado de rotação. Exemplos desse tratamento serão tratados na Seção 23.4, página 1174.

• **Constantes de movimento para as equações de Euler sem torque**

Na ausência de torques externos, duas leis de conservação podem ser facilmente obtidas de (23.89). Tomando-se o produto escalar de ambos os lados de (23.89) com $I\Omega_t$ conclui-se que $\frac{d}{dt}\|I\Omega_t\|^2 = 0$. Verifique! Tomando-se o produto escalar de ambos os lados de (23.89) com Ω_t conclui-se que $\frac{d}{dt}\langle\Omega_t, I\Omega_t\rangle = 0$. Verifique! Assim,

$$\|I\Omega_t\|^2 \quad \text{e} \quad \langle\Omega_t, I\Omega_t\rangle \tag{23.90}$$

são constantes de movimento. A primeira lei de conservação afirma que o módulo do vetor momento angular intrínseco é conservado. A segunda afirma que a energia cinética rotacional, $\frac{1}{2}\langle\Omega_t, I\Omega_t\rangle$, é conservada.

As duas quantidades conservadas $\langle I\Omega_t, I\Omega_t\rangle = \text{constante}$ e $\langle\Omega_t, I\Omega_t\rangle = \text{constante}$, definem dois elipsoides no espaço tridimensional $\left((\Omega)_1, (\Omega)_2, (\Omega)_3\right)$, ambos centrados na origem. O movimento de Ω_t se dá, conseqüentemente, no lugar geométrico formado pela intersecção desses dois elipsoides. Excetuando-se casos especiais, esse lugar geométrico é formado por duas curvas fechadas disjuntas.

• **A energia mecânica de um corpo rígido e sua conservação**

A relação (23.77) forneceu a energia mecânica de um sistema de n pontos materiais, cada qual sob um potencial externo U_i^e , sendo constantes ao longo do tempo as distâncias entre os mesmos. Suporemos aqui que esses potenciais U_i^e independam de i , ou seja, sejam os mesmos para todos os pontos materiais infinitesimais que compõem um corpo rígido. Pelo procedimento já descrito de substituir somas por integrais, obtemos, de (23.77) a energia mecânica de um corpo rígido:

$$e_m = \frac{1}{2}\Omega_t \cdot (I\Omega_t) + \frac{M}{2}\|\dot{q}_{cm}(t)\|^2 + \int_V U^e(R_t Q + q_{cm}(t)) d^3 Q, \tag{23.91}$$

com V , como antes, sendo o volume ocupado pelo corpo rígido em \mathbf{K} , um referencial no qual o corpo está fixo. Acima, U^e é o potencial externo por unidade de volume ao qual o corpo está submetido.

Assim, a força por unidade de volume no sistema inercial \mathbf{k} de um ponto cujas coordenadas no sistema \mathbf{K} são Q é dada por

$$\phi^e(R_t Q + q_{cm}(t)) = -(\vec{\nabla}U^e)(R_t Q + q_{cm}(t)). \tag{23.92}$$

Segundo (23.38), essa mesma força será dada, no sistema \mathbf{K} , por

$$\Phi^e(Q, t) := -R_t^{-1}(\vec{\nabla}U^e)(R_t Q + q_{cm}(t)), \tag{23.93}$$

Um exemplo importante é o seguinte. Se o corpo está sob o potencial gravitacional aproximadamente constante da superfície da terra, teremos $U^e(q) = \rho(q)gq_3$ mais constante, com q_3 sendo a componente vertical (ou seja, na direção de \vec{g}) de q . Logo,

$$\begin{aligned} e_m &= \frac{1}{2}\Omega_t \cdot (I\Omega_t) + \frac{M}{2}\|\dot{q}_{cm}(t)\|^2 + \int_V \rho(Q)g(R_t Q + q_{cm}(t))_3 d^3 Q \\ &= \frac{1}{2}\Omega_t \cdot (I\Omega_t) + \frac{M}{2}\|\dot{q}_{cm}(t)\|^2 + gR_t \left(\underbrace{\int_V \rho(Q)Q d^3 Q}_{=0} \right)_3 + Mg(q_{cm}(t))_3 \\ &= \frac{1}{2}\Omega_t \cdot (I\Omega_t) + \frac{M}{2}\|\dot{q}_{cm}(t)\|^2 + Mg(q_{cm}(t))_3, \end{aligned} \tag{23.94}$$

pois convencionamos até aqui que a origem de \mathbf{K} coincide com o centro de massa do corpo e, portanto, $\int_V \rho(Q)Q d^3 Q = 0$.

De volta ao um potencial geral, já sabemos que no caso de um sistema com um número finito de pontos materiais a energia mecânica é conservada. É interessante provarmos isso também para o caso de corpos rígidos usando as correspondentes equações dinâmicas. Temos

$$\frac{d}{dt}e_m = \Omega_t \cdot (I\dot{\Omega}_t) + M\dot{q}_{cm}(t) \cdot \ddot{q}_{cm}(t) + \frac{d}{dt} \int_V U^e(R_t Q + q_{cm}(t)) d^3Q. \quad (23.95)$$

Passemos a analisar cada um dos três termos acima. Seguindo (23.92) e (23.93), usaremos que

$$-\left(\vec{\nabla}U^e\right)(R_t Q + q_{cm}(t)) = \phi^e(R_t Q + q_{cm}(t)) = R_t \Phi^e(Q, t).$$

I. Para o termo $\Omega_t \cdot (I\dot{\Omega}_t)$, vale

$$\Omega_t \cdot (I\dot{\Omega}_t) \stackrel{(23.87)}{=} \underbrace{\Omega_t \cdot ((I\Omega_t) \times \Omega_t)}_{=0} + \Omega_t \cdot \Theta(t) = \Omega_t \cdot \Theta(t) \quad (23.96)$$

onde $\Theta(t) = \int_V d^3Q (Q \times \Phi^e(Q, t))$. Vide (23.88).

II. Para o termo $M\dot{q}_{cm}(t) \cdot \ddot{q}_{cm}(t)$, vale

$$M\dot{q}_{cm}(t) \cdot \ddot{q}_{cm}(t) = \dot{q}_{cm}(t) \cdot f^{Te}(t), \quad (23.97)$$

sendo que $f^{Te}(t) = \int_V d^3Q \phi^e(R_t Q + q_{cm}(t))$. Vide (23.85).

III. Para o último termo, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U^e(R_t Q + q_{cm}(t)) &= (\dot{R}_t Q + \dot{q}_{cm}(t)) \cdot (\vec{\nabla}U^e)(R_t Q + q_{cm}(t)) \\ &\stackrel{(23.93)}{=} -(\dot{R}_t Q) \cdot (R_t \Phi^e(Q, t)) - \dot{q}_{cm}(t) \cdot (\phi^e(R_t Q + q_{cm}(t))) \\ &\stackrel{(23.33)}{=} -\left(R_t(\Omega_t \times Q)\right) \cdot (R_t \Phi^e(Q, t)) - \dot{q}_{cm}(t) \cdot \phi^e(R_t Q + q_{cm}(t)) \\ &= -\left((\Omega_t \times Q)\right) \cdot \Phi^e(Q, t) - \dot{q}_{cm}(t) \cdot \phi^e(R_t Q + q_{cm}(t)) \\ &\stackrel{(4.13)}{=} -\Omega_t \cdot (Q \times \Phi^e(Q, t)) - \dot{q}_{cm}(t) \cdot \phi^e(R_t Q + q_{cm}(t)). \end{aligned}$$

E. 23.10 *Exercício.* Verifique! Sugestão: para a primeira igualdade use a regra da cadeia. ✱

Com isso, o último termo de (23.95) é

$$\begin{aligned} \int_V \frac{d}{dt}U^e(R_t Q + q_{cm}(t)) d^3Q &= -\Omega_t \cdot \int_V (Q \times \Phi^e(Q, t)) d^3Q - \dot{q}_{cm}(t) \cdot \int_V \phi^e(R_t Q + q_{cm}(t)) d^3Q \\ &= -\Omega_t \cdot \Theta(t) - \dot{q}_{cm}(t) \cdot f^{Te}(t). \quad (23.98) \end{aligned}$$

De (23.96), (23.97) e (23.98) conclui-se diretamente que $\frac{d}{dt}e_m = 0$, confirmando que a energia mecânica de um corpo rígido, definida em (23.91), é uma constante de movimento.

• **Trabalho realizado por forças externas**

Temos de (23.97) que $\frac{d}{dt} \frac{M}{2} \|\dot{q}_{cm}(t)\|^2 = \dot{q}_{cm}(t) \cdot f^{Te}(t)$. O lado esquerdo é a derivada da energia cinética orbital (ou seja, do centro de massa) do corpo rígido. Assim,

$$\mathcal{W}_{t_0, t_1}^{cm} := \int_{t_0}^{t_1} \dot{q}_{cm}(t') \cdot f^{Te}(t') dt'$$

representa o trabalho realizado pelas forças externas resultantes sobre o corpo rígido entre dois instantes de tempo t_0 e t_1 . Esse trabalho é igual à variação de energia cinética orbital no mesmo intervalo de tempo.

• **Trabalho realizado por um torque**

Vemos diretamente de (23.96) que $\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \langle \Omega_t, I \Omega_t \rangle = \Omega_t \cdot \Theta(t)$. O lado esquerdo é a derivada da energia cinética rotacional do corpo rígido considerado. Assim,

$$W_{t_0, t_1}^r := \int_{t_0}^{t_1} \Omega_{t'} \cdot \Theta(t') dt'$$

representa o trabalho realizado pelo torque resultante das forças externas sobre o corpo rígido entre dois instantes de tempo t_0 e t_1 . Esse trabalho é igual à variação de energia cinética rotacional no mesmo intervalo de tempo.

É interessante notar também o seguinte. Para a quantidade $\|J(t)\|^2 = \|I \Omega_t\|^2$ tem-se

$$\frac{d}{dt} \|J(t)\|^2 = 2(I \Omega_t) \cdot (I \dot{\Omega}_t) \stackrel{(23.87)}{=} 2 \underbrace{(I \Omega_t) \cdot ((I \Omega_t) \times \Omega_t)}_{=0} + 2(I \Omega_t) \cdot \Theta(t).$$

Já vimos que na ausência de torques externos a quantidade $\|J(t)\|^2$ é conservada. A última relação mostra, assim, que na presença de torques externos vale

$$\frac{d}{dt} \|J(t)\|^2 = 2J(t) \cdot \Theta(t). \tag{23.99}$$

Não há, até onde sabemos, uma denominação para a expressão $\int_{t_0}^{t_1} J(t') \cdot \Theta(t') dt'$, mas ela fornece, como vimos, a variação da quantidade $\|J(t)\|^2$ no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$.

• **Diagonalização de I e as equações dinâmicas**

Em um sistema de referência onde I é diagonal as equações de Euler (23.87) adquirem uma forma mais simples e útil:

$$I_1 (\dot{\Omega}_t)_1 = (I_2 - I_3) (\Omega_t)_2 (\Omega_t)_3 + \Theta_1, \tag{23.100}$$

$$I_2 (\dot{\Omega}_t)_2 = (I_3 - I_1) (\Omega_t)_3 (\Omega_t)_1 + \Theta_2, \tag{23.101}$$

$$I_3 (\dot{\Omega}_t)_3 = (I_1 - I_2) (\Omega_t)_1 (\Omega_t)_2 + \Theta_3. \tag{23.102}$$

Na ausência de torques externos, isso reduz-se a

$$I_1 (\dot{\Omega}_t)_1 = (I_2 - I_3) (\Omega_t)_2 (\Omega_t)_3, \tag{23.103}$$

$$I_2 (\dot{\Omega}_t)_2 = (I_3 - I_1) (\Omega_t)_3 (\Omega_t)_1, \tag{23.104}$$

$$I_3 (\dot{\Omega}_t)_3 = (I_1 - I_2) (\Omega_t)_1 (\Omega_t)_2. \tag{23.105}$$

• **Estabilidade de rotações em torno dos eixos principais**

Decorre das equações de Euler (23.103)–(23.105) que um corpo rígido posto a girar em torno de um de seus eixos principais de inércia, na ausência de forças externas, permanecerá nesse estado de movimento. De fato, é claro que $(\Omega_t)_1 = (\Omega_t)_2 = 0$ com $(\Omega_t)_3 \neq 0$, constante, é uma solução das equações (23.103)–(23.105). O mesmo se dá para os casos em que $(\Omega_t)_1 = (\Omega_t)_3 = 0$ com $(\Omega_t)_2 \neq 0$, constante, ou $(\Omega_t)_2 = (\Omega_t)_3 = 0$ com $(\Omega_t)_1 \neq 0$, constante.

A questão que desejamos discutir aqui é se esses estados de movimento são estáveis por pequenas perturbações. No que segue assumiremos que $I_1 > 0$ e $I_2 > 0$ e que $I_1 \neq I_3$ e $I_2 \neq I_3$ (não sendo excluído ter-se $I_1 = I_2$). Ao final trataremos do caso $I_1 = I_3 \neq I_2$.

Vamos considerar, sem perda de generalidade, a solução $(\Omega_t)_1 = (\Omega_t)_2 = 0$ com $(\Omega_t)_3 \equiv \Omega^3 \neq 0$, constante. E consideremos uma perturbação da mesma, na forma

$$(\Omega_t)_1 = \delta \Omega_1(t), \quad (\Omega_t)_2 = \delta \Omega_2(t), \quad (\Omega_t)_3 = \Omega^3 + \delta \Omega_3(t)$$

onde as funções $\delta\Omega_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, são “pequenas”, ou seja, muito menores em módulo que $|\Omega^3|$. Substituindo em (23.103)–(23.105) e desprezando termos quadráticos nas funções $\delta\Omega_k(t)$ (ou seja, considerando uma versão linearizada das expressões em (23.103)–(23.105)), obtemos:

$$\frac{d}{dt}(\delta\Omega_1(t)) = \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \Omega^3 \delta\Omega_2(t) , \tag{23.106}$$

$$\frac{d}{dt}(\delta\Omega_2(t)) = \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \Omega^3 \delta\Omega_1(t) , \tag{23.107}$$

$$\frac{d}{dt}(\delta\Omega_3(t)) = 0 . \tag{23.108}$$

A última equação tem por solução $\delta\Omega_3(t) = \text{constante}$. As duas primeiras equações compõem um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares que pode ser escrito como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta\Omega_1(t) \\ \delta\Omega_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta\Omega_1(t) \\ \delta\Omega_2(t) \end{pmatrix} , \quad \text{com} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \Omega^3 \\ \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \Omega^3 & 0 \end{pmatrix} .$$

A solução desse sistema é dada por (vide Seção 13.3, página 546)

$$\begin{pmatrix} \delta\Omega_1(t) \\ \delta\Omega_2(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \Delta_0 , \quad \text{com} \quad \Delta_0 := \begin{pmatrix} \delta\Omega_1(0) \\ \delta\Omega_2(0) \end{pmatrix} . \tag{23.109}$$

Concentremo-nos agora em determinar a exponencial e^{tA} .

Os autovalores de A podem ser obtidos encontrando-se as raízes de seu polinômio característico: $q_A(x) = \det(x\mathbb{1} - A) = x^2 - \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} (\Omega^3)^2$, que são

$$\lambda_+ = \sqrt{\frac{(I_2 - I_3)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2}} |\Omega^3| \quad \text{e} \quad \lambda_- = -\sqrt{\frac{(I_2 - I_3)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2}} |\Omega^3| .$$

Pelas hipóteses, ambos são não-nulos e, portanto, distintos. É importante observar que ou ambos são reais ou ambos são imaginários puros. De fato, se $(I_2 - I_3)(I_3 - I_1) < 0$, então $\lambda_{\pm} = \pm i\lambda_0$, com

$$\lambda_0 := \sqrt{\frac{|I_2 - I_3| |I_3 - I_1|}{I_1 I_2}} |\Omega^3| > 0$$

e se $(I_2 - I_3)(I_3 - I_1) > 0$, então $\lambda_{\pm} = \pm\lambda_0$.

O fato de os autovalores serem distintos implica que A é uma matriz diagonalizável (Proposição 9.22, página 392). Vale, portanto, o Teorema Espectral (Teorema 9.6, página 384)¹⁶, que afirma que A pode ser escrita na forma

$$A = \lambda_+ E_+ + \lambda_- E_- ,$$

onde E_{\pm} são os chamados *projetores espectrais* de A , que satisfazem $E_+ + E_- = \mathbb{1}$, $E_+^2 = E_+$, $E_-^2 = E_-$ e $E_+ E_- = E_- E_+ = 0$, sendo explicitamente dados por (vide Proposição 9.18, página 386, e, particularmente a relação (9.56))

$$E_+ = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} (A - \lambda_- \mathbb{1}) \quad \text{e} \quad E_- = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} (A - \lambda_+ \mathbb{1}) .$$

Logo, pelo cálculo funcional para matrizes, Teorema 9.7, página 386, tem-se

$$e^{tA} = e^{t\lambda_+} E_+ + e^{t\lambda_-} E_- .$$

¹⁶Toda a Seção 9.4, página 381 é dedicada a esse importante teorema.

Com isso, temos duas situações: 1^o, caso $(I_2 - I_3)(I_3 - I_1) < 0$, temos

$$\begin{pmatrix} \delta\Omega_1(t) \\ \delta\Omega_2(t) \end{pmatrix} = e^{it\lambda_0} \mathbf{e}_+ + e^{-it\lambda_0} \mathbf{e}_- \tag{23.110}$$

e, 2^o, caso $(I_2 - I_3)(I_3 - I_1) > 0$, temos

$$\begin{pmatrix} \delta\Omega_1(t) \\ \delta\Omega_2(t) \end{pmatrix} = e^{t\lambda_0} \mathbf{e}_+ + e^{-t\lambda_0} \mathbf{e}_-, \tag{23.111}$$

sendo que em ambos os casos $\mathbf{e}_\pm := E_\pm \Delta_0$.

No primeiro caso, a perturbação oscila periodicamente com frequência λ_0 , permanecendo “pequena”, portanto. No segundo caso, porém, a perturbação crescerá exponencialmente na direção do vetor \mathbf{e}_+ (caso este seja não-nulo) sendo, por consequência, uma perturbação instável. O estudante deve entender que esse crescimento exponencial não pode ser eterno já que, ao crescer nesse regime, a perturbação fatalmente deixará de ser “pequena”, saindo fora, portanto, do regime de validade aproximada das equações linearizadas (23.106)–(23.108). Ademais, sabemos que devido à conservação da energia cinética e do momento angular que as soluções das equações de Euler são limitadas para todo t .

Mais do que isso, sabemos também (vide, por exemplo, o tratamento do pião assimétrico livre, adiante) que as soluções exatas das equações de Euler livres para Ω_t são *periódicas* em t , o que significa que após um tempo finito, Ω_t torna a se aproximar da situação de instabilidade para afasta-se exponencialmente rápido da mesma, sendo esse processo repetido periodicamente infinitas vezes.

A condição de estabilidade é, assim, $(I_2 - I_3)(I_3 - I_1) < 0$. Essa condição é alcançada em dois casos: **a)** $I_2 > I_3$ e $I_1 > I_3$ e **b)** $I_2 < I_3$ e $I_1 < I_3$. No caso em que $(I_2 - I_3)(I_3 - I_1) > 0$ tem-se instabilidade, e isso se dá caso $I_1 < I_3 < I_2$ ou caso $I_1 > I_3 > I_2$.

Resumindo, nossas conclusões são as seguintes. Teremos estabilidade por perturbações para a rotação em torno do eixo principal 3 caso I_3 seja o menor ou o maior dos três momentos de inércia principais $\{I_1, I_2, I_3\}$, ou seja, se $I_2 > I_3$ e $I_1 > I_3$ ou se $I_2 < I_3$ e $I_1 < I_3$. Caso contrário, ou seja, se $I_1 < I_3 < I_2$ ou se $I_1 > I_3 > I_2$, a rotação em torno do eixo principal 3 será instável por perturbações.

Um fato muito interessante, mas sobre o qual nada mais falaremos aqui, é que a instabilidade descrita acima pode ser transformada em *estabilidade* se o corpo rígido estiver sob a ação de torques externos periódicos adequados. Esse tipo de fenômeno é conhecido em diversos sistemas dinâmicos, mesmo se descritos por equações diferenciais não-lineares. Há até mesmo um bem conhecido truque circense de malabarismo, conhecido como “*prato chinês*” que se baseia nesse tipo de efeito: um prato girante é suspenso sobre uma longa haste segura por um malabarista, que a faz vibrar de modo a equilibrar o prato e impedi-lo de cair. Para uma discussão teórica geral desse tipo de fenômeno, vide *e.g.*, [341] ou [15].

E. 23.11 Exercício. O que se pode afirmar sobre a estabilidade do movimento de rotação diurno da Terra? Existe o perigo de alguém, digamos, mover um braço e, com isso, desestabilizar o eixo de rotação do planeta? ✦

Consideremos, por fim o caso $I_1 = I_3 \neq I_2$ (o caso $I_2 = I_3 \neq I_1$ é análogo). Nessa situação a matriz A torna-se

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \Omega^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que não é mais uma matriz diagonalizável, mas é nilpotente (pois $A^2 = 0$). Assim, $e^{tA} = \mathbb{1} + tA$ e, portanto,

$$\begin{pmatrix} \delta\Omega_1(t) \\ \delta\Omega_2(t) \end{pmatrix} = (\mathbb{1} + tA) \begin{pmatrix} \delta\Omega_1(0) \\ \delta\Omega_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\Omega_1(0) + t \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \Omega^3 \delta\Omega_2(0) \\ \delta\Omega_2(0) \end{pmatrix}.$$

Como se vê, a solução em geral cresce linearmente com t e, assim, temos novamente uma situação de instabilidade da perturbação, ainda que não seja uma instabilidade exponencial, como anteriormente encontramos.

23.3.3 Piões. Algumas Soluções

• **Piã esférico livre**

Um corpo rígido é dito ser um *pião esférico* se $I_1 = I_2 = I_3$. Nesse caso, as relações (23.103)–(23.105) dizem-nos que $(\dot{\Omega}_t)_k = 0$ para $k = 1, 2, 3$. Assim, tem-se simplesmente, nesse caso, a solução $\Omega_t = \text{constante}$.

• **Piã simétrico livre**

Um corpo rígido é dito ser um pião simétrico se $I_1 = I_2 \neq I_3$. Nesse caso, e na ausência de torques externos, a relação (23.105) tem por solução $(\Omega_t)_3 \equiv \Omega^3$, constante. No que segue, assumiremos $I_1 > 0$.

No caso em que $\Omega_3 = 0$, as equações (23.103) e (23.104) dizem-nos que também tem-se $(\Omega_t)_1 \equiv \Omega^1$ e $(\Omega_t)_2 \equiv \Omega^2$, ambos constantes. Assim, nesse caso as equações (23.103)–(23.105) dizem-nos que Ω_t é um vetor constante, fixo no plano 1–2 do sistema \mathbf{K} (um sistema de referência dos eixos principais) e, portanto, o movimento do pião é um movimento de rotação em torno de um eixo fixo, ortogonal ao eixo 3, e com velocidade angular constante.

No caso em que $\Omega_3 \neq 0$, as equações (23.103) e (23.104) ficam

$$I_1(\dot{\Omega}_t)_1 = -\gamma(\Omega_t)_2 \quad \text{e} \quad I_2(\dot{\Omega}_t)_2 = \gamma(\Omega_t)_1, \quad \text{onde} \quad \gamma := \frac{(I_3 - I_1)}{I_1}\Omega^3.$$

A solução dessas equações é bem simples. Definindo-se $W_t := (\Omega_t)_1 + i(\Omega_t)_2$ as equações acima assumem a forma $\dot{W}_t = i\gamma W_t$, cuja solução é $W_t = e^{i\gamma t}W_0$. Separando novamente as partes real e imaginária, obtemos

$$(\Omega_t)_1 = \cos(\gamma t)\Omega^1 - \text{sen}(\gamma t)\Omega^2 \quad \text{e} \quad (\Omega_t)_2 = \text{sen}(\gamma t)\Omega^1 + \cos(\gamma t)\Omega^2, \tag{23.112}$$

onde $\Omega^1 \equiv (\Omega_0)_1$ e $\Omega^2 \equiv (\Omega_0)_2$.

Como se percebe, a projeção de Ω_t sobre o eixo 3 é constante (e não-nula) e a projeção de Ω_t no plano 1–2 gira em um círculo com velocidade angular γ . Assim, o vetor Ω_t executa um movimento de precessão em torno do eixo 3 e temos

$$\Omega_t = R_3(\gamma t)\Omega_0.$$

E. 23.12 Exercício. Sabemos que, no caso do planeta Terra, tem-se $\frac{(I_3 - I_1)}{I_1} \approx 1/300$. Mostre que o período de precessão associado ao movimento de rotação diurno da Terra é de aproximadamente 10 meses. Ignore os torques exercidos pelo Sol e pela Lua, pois eles exercem pouca influência durante esse curto período de tempo (o período da precessão causada por esses torques, denominada *precessão equinocial*, é da ordem de 26 mil anos).

O período de precessão associado ao movimento de rotação diurno da Terra que é efetivamente medido é de cerca de 14 meses. Essa discrepância é essencialmente devida a três efeitos: deformações elásticas da crosta terrestre, grandes movimentações sazonais de massas de ar (especialmente entre a Ásia e o Pacífico), a deformação na distribuição de massas de água dos oceanos produzida pela marés. *

Para as componentes do momento angular intrínseco temos

$$J_1(t) = \cos(\gamma t)I_1\Omega^1 - \text{sen}(\gamma t)I_1\Omega^2, \quad J_2(t) = \text{sen}(\gamma t)I_1\Omega^1 + \cos(\gamma t)I_1\Omega^2 \quad \text{e} \quad J_3(t) = I_3\Omega^3.$$

Indicando que J executa o mesmo tipo de movimento precessional e indicando que

$$J(t) = R_3(\gamma t)J(0).$$

Das expressões acima segue que $\|J(t)\|^2 = I_1^2((\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2) + I_3^2(\Omega^3)^2$, que é constante no tempo, como já sabíamos.

Vamos agora procurar entender o que se passa num sistema de referência inercial \mathbf{k} .

Sabemos que num sistema inercial \mathbf{k} o momento angular $j = R_t^{-1}J(t)$ é constante. Vamos escolher os eixos de \mathbf{k} de sorte que o eixo 3 aponte na direção de j . Assim, em \mathbf{k} teremos $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \|j\| \end{pmatrix}$.

Afirmamos que R_t é nesse caso dado por

$$R_t = R_3(\gamma_1 t)SR_3(-\gamma t)$$

com $\gamma_1 := \|J\|/I_1$ e com $S \in \text{SO}(3)$ tal que $SJ(0) = j$. Para provar essa afirmativa, notemos que para a R_t dada acima vale $\dot{R}_t = R_3(\gamma_1 t)(\gamma_1 J_3 S - \gamma S J_3)R_3(-\gamma t)$ e, portanto,

$$R_t^{-1} \dot{R}_t = R_3(\gamma t) \left(\gamma_1 S^{-1} J_3 S - \gamma J_3 \right) R_3(-\gamma t).$$

Verifique!

Agora, $\gamma_1 S^{-1} J_3 S = \frac{1}{I_1} S^{-1} (j \cdot \vec{J}) S = \frac{1}{I_1} (S^{-1} j) \cdot \vec{J} = \frac{1}{I_1} J(0) \cdot \vec{J}$. Logo, mostramos que

$$R_t^{-1} \dot{R}_t = R_3(\gamma t) \left(\frac{1}{I_1} J(0) \cdot \vec{J} - \gamma J_3 \right) R_3(-\gamma t) = \frac{1}{I_1} J(t) \cdot \vec{J} - \gamma J_3.$$

O lado direito é

$$(\Omega_t)_1 J_1 + (\Omega_t)_2 J_2 + \left(\frac{I_3}{I_1} \Omega^3 - \gamma \right) J_3 = (\Omega_t)_1 J_1 + (\Omega_t)_2 J_2 + \Omega^3 J_3 = \Omega_t.$$

Assim, provamos que $\dot{R}_t = R_t \Omega_t$, sendo que $R_0 = S$.

A escolha mais geral de S é

$$S = R_3(\alpha) R(\vec{\eta}_0, \phi_0), \tag{23.113}$$

onde $\vec{\eta}_0$ é o vetor unitário $\vec{\eta}_0 = (J(0) \times j) / \|J\|^2$ e ϕ_0 é o ângulo entre $J(0)$ e j . A expressão (23.113) é explicada da seguinte forma. O fator $R(\vec{\eta}_0, \phi_0)$ roda $J(0)$ até j em torno do eixo indicado pelo vetor ortogonal a ambos pelo ângulo que eles formam entre si. O fator $R_3(\alpha)$ realiza uma rotação em torno de j até que os demais eixos de \mathbf{K} coincidam com os de \mathbf{k} .

Notar que

$$\gamma_1 = \frac{\|J\|}{I_1} = \sqrt{(\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2 + \left(\frac{I_3}{I_1} \Omega^3 \right)^2} = \sqrt{(\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2 + (\Omega^3 + \gamma)^2}.$$

Verifique! Podemos escrever

$$R_t = R_3((\gamma_1 - \gamma)t) S_t,$$

onde

$$S_t := R_3(\gamma t) S R_3(-\gamma t) = R_3(\alpha) R_3(\gamma t) R(\vec{\eta}_0, \phi_0) R_3(-\gamma t) = R_3(\alpha) R(\vec{\eta}_t, \phi_0),$$

com $\vec{\eta}_t := R_3(\gamma t) \vec{\eta}_0 = (J(t) \times j) / \|J\|^2$. Entendemos das relações acima que R_t tem a seguinte interpretação: o fator S_t roda os eixos de \mathbf{K} de sorte que, em cada instante t , o vetor $J(t)$ é rodado de forma a coincidir com o eixo 3 de \mathbf{k} .

E. 23.13 *Exercício.* Complete os detalhes dos cálculos acima. *

Com isso, temos

$$\omega_t = R_t \Omega_t = R_3(\gamma_1 t) S \Omega_0.$$

O vetor $S \Omega_0$ não aponta na direção de j , ou seja, na direção 3 de \mathbf{k} , pois Ω_0 e $J(0)$ não são paralelos. Vemos, porém, dessa expressão que ω_t roda em torno do eixo 3 com velocidade angular γ_1 , indicando que em \mathbf{k} ocorre um movimento de precessão do pião simétrico em torno do eixo 3, com velocidade angular de precessão γ_1 mas com $\|\omega_t\| = \|\Omega_0\|$. Note-se que vale $\gamma_1 > \|\Omega_0\|$ caso $I_3 > I_1$ e vale $\gamma_1 < \|\Omega_0\|$ caso $I_3 < I_1$.

• **Pião assimétrico livre**

Um corpo rígido para o qual os três momentos de inércia I_1, I_2 e I_3 sejam diferentes é denominado um *pião assimétrico*, ou um *pião totalmente assimétrico*. Na ausência de forças e torques externos, o movimento de um tal pião é regido pelas equações de Euler (23.103)–(23.105).

Consideremos, sem perda de generalidade, que $I_1 > I_2 > I_3$ (o que sempre pode ser obtido renumerando-se os eixos principais do pião).

E. 23.14 *Exercício.* Definindo-se

$$\begin{aligned} W_1(t) &= I_1 (\Omega_t)_1, \\ W_2(t) &= I_2 \sqrt{\frac{I_2}{I_1} \left(\frac{I_1 - I_3}{I_2 - I_3} \right)} (\Omega_t)_2, \\ W_3(t) &= I_3 \sqrt{\frac{I_3}{I_1} \left(\frac{I_1 - I_2}{I_2 - I_3} \right)} (\Omega_t)_3, \end{aligned}$$

verifique que as equações de Euler (23.103)–(23.105) assumem a seguinte forma:

$$\dot{W}_1(t) = \mu W_2(t)W_3(t), \tag{23.114}$$

$$\dot{W}_2(t) = -\mu W_3(t)W_1(t), \tag{23.115}$$

$$\dot{W}_3(t) = \mu W_1(t)W_2(t), \tag{23.116}$$

onde

$$\mu := \frac{1}{I_1} \sqrt{\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}}, \tag{23.117}$$

equações estas que apresentam a interessante propriedade de depender de um único parâmetro: μ . ✱

O parâmetro μ pode ser ainda eliminado de (23.114)–(23.116), redefinindo-se uma nova coordenada temporal por $\tau = \mu t$. Com isso, (23.114)–(23.116) assume simplesmente a forma

$$\frac{dW_1}{d\tau} = W_2 W_3, \tag{23.118}$$

$$\frac{dW_2}{d\tau} = -W_3 W_1, \tag{23.119}$$

$$\frac{dW_3}{d\tau} = W_1 W_2. \tag{23.120}$$

Isso reflete um caráter *universal* dos movimentos do piões assimétricos, pois todos podem ser obtidos de soluções de (23.118)–(23.120 por reescalamentos e ajustes nas condições iniciais.

Nota. O autor aprendeu sobre a validade das equações (23.114)–(23.116) e (23.118)–(23.120) com o Prof. Nestor Caticha, a quem agradece. É interessante notar que, apesar de sua evidente elegância, simplicidade e utilidade, as mesmas parecem ter passado despercebidas em toda a literatura consultada pelo autor. ♣

• **Rascunho sobre a integração das equações do pião assimétrico livre**

Vamos agora mostrar como as equações (23.118)–(23.120) podem ser resolvidas. Por simplicidade, na presente versão destas Notas contornaremos certos detalhes não-essenciais à discussão (como a escolha de certos sinais ou a discussões de casos especiais onde pode ocorrer divisões por zero) e nos concentraremos nas ideias mais importantes. Tais detalhes podem ser encontrados, *e.g.*, em [201] ou, especialmente, em [357]).

É fácil ver que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, as expressões

$$S_\lambda := (1 - \lambda)W_1(\tau)^2 + W_2(\tau)^2 + \lambda W_3(\tau)^2$$

são constantes de movimento de (23.118)–(23.120). Verifique! Assim,

$$S_0 := W_1(\tau)^2 + W_2(\tau)^2 \quad \text{e} \quad S_1 := W_2(\tau)^2 + W_3(\tau)^2$$

definem duas constantes de movimento independentes para aquelas equações. Essas duas constantes de movimento definem duas superfícies cilíndricas, ortogonais uma a outra, no espaço tridimensional (W_1, W_2, W_3) . A superfície cilíndrica correspondente a S_0 é paralela ao eixo 3 e centrada no mesmo e a superfície cilíndrica correspondente a S_1 é

paralela ao eixo 1 e centrada no mesmo. O movimento do pião assimétrico se dará, assim, na intersecção dessas duas superfícies cilíndricas. Essa intersecção define duas curvas unidimensionais fechadas disjuntas, exceto se $S_0 = S_1$, quando então elas não são disjuntas.

E. 23.15 *Exercício.* Tente visualizar as duas curvas acima descritas. Também no caso $S_0 = S_1$. ✦

Observe-se que $S_0 \geq 0$ e $S_1 \geq 0$. Para o que segue é suficiente, porém, considerar apenas o caso em que $S_0 > 0$ e $S_1 > 0$. De fato, se $S_0 = 0$ temos $W_1(\tau) = W_2(\tau) = 0$ e, por (23.120), $W_3(\tau) = \text{constante}$. Analogamente, se $S_1 = 0$ temos $W_2(\tau) = W_3(\tau) = 0$ e, por (23.118), $W_1(\tau) = \text{constante}$. A solução em cada um desses casos é, assim, trivial.

Adotemos, pois, $S_0 > 0$ e $S_1 > 0$. Escrevendo

$$W_1(\tau)^2 = S_0 - W_2(\tau)^2 \quad \text{e} \quad W_3(\tau)^2 = S_1 - W_2(\tau)^2$$

a relação (23.119) fica na forma¹⁷

$$\frac{dW_2}{d\tau}(\tau) = -\sqrt{(S_0 - W_2(\tau)^2)(S_1 - W_2(\tau)^2)}. \tag{23.121}$$

Definindo-se ainda $U(\tau) := W_2(\tau)/\sqrt{S_0}$ e $\kappa := \sqrt{S_0/S_1}$, obtemos de (23.121):

$$\frac{dU}{d\tau}(\tau) = -\sqrt{S_1}\sqrt{(1 - U(\tau)^2)(1 - \kappa^2 U(\tau)^2)}. \tag{23.122}$$

Comentamos de passagem que assumimos acima que $\kappa^2 < 1$. No caso em que $\kappa^2 > 1$ definimos $V(\tau) := \kappa U(\tau) = W_2(\tau)/\sqrt{S_1}$ e teremos,

$$\frac{dV}{d\tau}(\tau) = -\sqrt{S_0}\sqrt{(1 - V(\tau)^2)(1 - \kappa^{-2}V(\tau)^2)},$$

que é similar a (23.122) com $\kappa^{-2} < 1$.

Retornando a (23.122), supondo que $U(0) = 0$ (essa suposição pode ser corrigida trivialmente, caso não válida), temos

$$\sqrt{S_1} \tau = -\int_0^{U(\tau)} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - \kappa^2 u^2)}}.$$

A função inversa da integral do lado direito é conhecida como *função elíptica de Jacobi*¹⁸, denotada pelo símbolo sn . Mais precisamente, sn satisfaz

$$y = \int_0^{\text{sn}(y, \kappa)} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \kappa^2 x^2)}}, \quad \text{ou seja,} \quad \text{sn}^{-1}(y, \kappa) = \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \kappa^2 x^2)}},$$

com $0 \leq \kappa^2 < 1$ (a função inversa acima refere-se apenas à dependência na primeira variável). Para mais desenvolvimentos sobre as funções elípticas de Jacobi, vide *e.g.*, [356], [154] ou [48]. Assim, obtemos

$$U(\tau) = -\text{sn}(\sqrt{S_1} \tau, \kappa), \quad \text{ou seja,} \quad W_2(\tau) = -\sqrt{S_0} \text{sn}(\sqrt{S_1} \tau, \kappa).$$

Acima, usamos o fato de a função sn ser ímpar na primeira variável: $\text{sn}(-t, \kappa) = -\text{sn}(t, \kappa)$. (No caso mais geral, temos simplesmente $W_2(\tau) = -\sqrt{S_0} \text{sn}(\sqrt{S_1} \tau, \kappa) + W_2(0)$). Com isso, temos também, ignorando questões de sinais,

$$W_1(t) = \sqrt{S_0 - W_2(\tau)^2} = \sqrt{S_0} \sqrt{1 - \text{sn}(\sqrt{S_1} \tau, \kappa)^2} = \sqrt{S_0} \text{cn}(\sqrt{S_1} \tau, \kappa),$$

onde a função cn , também denominada função elíptica de Jacobi, é definida por

$$\text{cn}(t, \kappa) := \sqrt{1 - \text{sn}(t, \kappa)^2}.$$

¹⁷Aqui é feita a escolha de sinais positivos nas raízes quadradas. Um tratamento mais geral e detalhado, mas que conduz aos mesmos resultados essenciais, será omitido na presente versão destas Notas.

¹⁸Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851).

Por fim, usando $W_3(\tau)^2 = S_1 - W_1(\tau)^2$, temos

$$W_3(\tau) = \sqrt{S_1 - S_0 \operatorname{sn}(\sqrt{S_1} \tau, \kappa)^2} = \sqrt{S_1} \sqrt{1 - \kappa^2 \operatorname{sn}(\sqrt{S_1} \tau, \kappa)^2} = \sqrt{S_1} \operatorname{dn}(\sqrt{S_1} \tau, \kappa),$$

onde a função dn , outra função denominada função elíptica de Jacobi, é definida por

$$\operatorname{dn}(t, \kappa) := \sqrt{1 - \kappa^2 \operatorname{sn}(t, \kappa)^2}.$$

Com isso, podemos finalmente escrever, recuperando as expressões deixadas pelo caminho,

$$(\Omega_t)_1 = \frac{1}{I_1} \sqrt{S_0} \operatorname{cn}(\gamma t, \kappa), \tag{23.123}$$

$$(\Omega_t)_2 = -\frac{1}{I_2} \sqrt{\frac{I_1}{I_2} \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1 - I_3} \right)} \sqrt{S_0} \operatorname{sn}(\gamma t, \kappa), \tag{23.124}$$

$$(\Omega_t)_3 = \frac{1}{I_3} \sqrt{\frac{I_1}{I_3} \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1 - I_2} \right)} \sqrt{S_1} \operatorname{dn}(\gamma t, \kappa), \tag{23.125}$$

onde $\gamma := \sqrt{S_1} \mu$, com μ dada em (23.117).

Essas complexas expressões reservam uma surpresa. É um fato bem conhecido (vide *e.g.*, [356], [154] ou [48]) que as funções elípticas de Jacobi $\operatorname{sn}(t, \kappa)$, $\operatorname{cn}(t, \kappa)$ e $\operatorname{dn}(t, \kappa)$ são periódicas e de mesmo período na variável t . Assim, concluímos, talvez inesperadamente, que Ω_t é igualmente uma função periódica de t . Note-se, porém, que isso não implica que o movimento do pião assimétrico seja periódico em t , pois para tal é necessário que as componentes do vetor Ω_t satisfaçam certas condições de comensurabilidade.

O período das funções elípticas de Jacobi é $4K(\kappa)$, onde

$$K(\kappa) := \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\kappa^2 u^2)}}.$$

Vide *e.g.*, [356], [154] ou [48]. Assim, o período T de Ω_t é

$$T = \frac{4}{\gamma} K(\kappa) = 4I_1 \sqrt{\frac{I_2 I_3}{S_1 (I_1 - I_3) (I_1 - I_2)}} K(\kappa).$$

E. 23.16 Exercício. Expresse as constantes de movimento S_0 e S_1 em termos da energia cinética rotacional e de $\|J\|^2$, ambas também, como já vimos, constantes de movimento. Com isso, re-exprese a solução acima em termos dessas quantidades. ✦

O leitor interessado em exercícios poderá encontrar em [201] problemas de interesse físico tratados com uso das soluções acima obtidas.

23.4 Ângulos de Euler na Mecânica de Corpos Rígidos

Os ângulos de Euler, estudados na seção 22.3.2.2, página 1063, prestam-se à descrição de matrizes de rotação e também, conseqüentemente, ao tratamento de alguns problemas envolvendo corpos rígidos. Vamos agora, sob a luz de um exemplo, descrever como isso se dá. Ainda no contexto de nosso tratamento anterior, seja \mathbf{k} um sistema de referência inercial e \mathbf{K} o sistema de referência fixo no corpo rígido, com origem em seu centro de massa, sendo $R_t \in \operatorname{SO}(3)$ definido como antes.

Usando a descrição de rotações em termos de ângulos de Euler, escrevamos $R_t = R_3(\varphi_t)R_1(\theta_t)R_3(\psi_t)$. Assim, $R_t^{-1} = R_3(-\psi_t)R_1(-\theta_t)R_3(-\varphi_t)$ e

$$\dot{R}_t = \dot{\varphi}_t J_3 R_3(\varphi_t) R_1(\theta_t) R_3(\psi_t) + \dot{\theta}_t R_3(\varphi_t) R_1(\theta_t) J_1 R_3(\psi_t) + \dot{\psi}_t R_3(\varphi_t) R_1(\theta_t) R_3(\psi_t) J_3.$$

Como $\Omega_t \cdot \vec{J} = R_t^{-1} \dot{R}_t$, podemos escrever o vetor velocidade angular intrínseca em termos dos três ângulos de Euler φ_t , θ_t e ψ_t e de suas derivadas. Fazendo uso repetido das relações (22.74), página 1062, temos

$$\begin{aligned} \Omega_t \cdot \vec{J} = R_t^{-1} \dot{R}_t &= \dot{\varphi}_t R_3(-\psi_t) \left(R_1(-\theta_t) J_3 R_1(\theta_t) \right) R_3(\psi_t) + \dot{\theta}_t \left(R_3(-\psi_t) J_1 R_3(\psi_t) \right) + \dot{\psi}_t J_3 \\ &= \dot{\varphi}_t \left(\cos(\theta_t) J_3 + \sin(\theta_t) R_3(-\psi_t) J_2 R_3(\psi_t) \right) + \dot{\theta}_t \left(\cos(\psi_t) J_1 - \sin(\psi_t) J_2 \right) + \dot{\psi}_t J_3 \\ &= \dot{\varphi}_t \left(\cos(\theta_t) J_3 + \sin(\theta_t) (\cos(\psi_t) J_2 + \sin(\psi_t) J_1) \right) + \dot{\theta}_t \left(\cos(\psi_t) J_1 - \sin(\psi_t) J_2 \right) + \dot{\psi}_t J_3 \\ &= \left(\dot{\varphi}_t \sin(\theta_t) \sin(\psi_t) + \dot{\theta}_t \cos(\psi_t) \right) J_1 + \left(\dot{\varphi}_t \sin(\theta_t) \cos(\psi_t) - \dot{\theta}_t \sin(\psi_t) \right) J_2 \\ &\quad + \left(\dot{\varphi}_t \cos(\theta_t) + \dot{\psi}_t \right) J_3. \end{aligned} \tag{23.126}$$

Assim, identificamos

$$(\Omega_t)_1 = \dot{\varphi}_t \sin(\theta_t) \sin(\psi_t) + \dot{\theta}_t \cos(\psi_t), \tag{23.127}$$

$$(\Omega_t)_2 = \dot{\varphi}_t \sin(\theta_t) \cos(\psi_t) - \dot{\theta}_t \sin(\psi_t), \tag{23.128}$$

$$(\Omega_t)_3 = \dot{\varphi}_t \cos(\theta_t) + \dot{\psi}_t. \tag{23.129}$$

E. 23.17 *Exercício.* Usando (22.74), verifique os passos que conduzem a (23.126). *

Por conveniência, escolheremos doravante os eixos de \mathbf{K} como sendo eixos principais do corpo rígido, de sorte que o tensor de momento de inércia I seja diagonal. Com isso, podemos expressar a energia cinética rotacional de um corpo rígido dada em (23.81) em termos dos ângulos de Euler e suas derivadas temporais. Por exemplo, a energia cinética de rotação de um pião esférico (para o qual vale $I_1 = I_2 = I_3$) é $e_{cr}(t) = \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}_t^2 + \dot{\theta}_t^2 + \dot{\psi}_t^2 + 2\dot{\varphi}_t \dot{\psi}_t \cos(\theta_t))$.

No caso de um pião simétrico, ou seja, para $I_1 = I_2 \neq I_3$, a energia cinética de rotação é dada, usando-se (23.81) e os ângulos de Euler, por

$$e_{cr}(t) = \frac{I_1}{2} \left(\dot{\varphi}_t^2 \sin^2(\theta_t) + \dot{\theta}_t^2 \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\varphi}_t \cos(\theta_t) + \dot{\psi}_t \right)^2.$$

É importante notar que o lado direito independe dos ângulos φ_t e ψ_t , apenas de suas derivadas.

E. 23.18 *Exercício.* Verifique as expressões acima para e_{cr} . *

23.4.1 Usos dos Ângulos de Euler. O Pião de Lagrange

• Movimento com um ponto fixo. O pião de Lagrange

Vamos agora tratar com algum detalhe de um problema cuja solução exibe características também encontradas em outros sistemas congêneres. Trata-se de um problema de Mecânica em cujo tratamento o uso dos ângulos de Euler é de real utilidade. Consideremos um *Pião de Lagrange*, um pião simétrico colocado sob a ação de um campo gravitacional uniforme, tendo um dos pontos de seu eixo de simetria fixo. Esse ponto fixo, em torno do qual o pião pode girar livremente, é denominado *pivô*. Adotaremos o eixo 3 como o eixo de simetria do pião e adotaremos a origem do sistema de coordenadas inercial coincidente com o pivô.

E. 23.19 *Exercício.* Mostre que o Lagrangiano desse sistema mecânico, expresso em termos de ângulos de Euler, é

$$\mathcal{L} = \frac{I_1}{2} \left(\dot{\varphi}_t^2 \sin^2(\theta_t) + \dot{\theta}_t^2 \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\varphi}_t \cos(\theta_t) + \dot{\psi}_t \right)^2 - Mgl \cos(\theta_t), \tag{23.130}$$

onde l é a distância do centro de massa do pião ao pivô e onde I_1 e I_3 são os momentos de inércia principais definidos em relação ao pivô. *Sugestão: inspire-se em (23.82) e em (23.94).* Obtenha as correspondentes equações de Euler-Lagrange e constate que

$$p_\psi := I_3(\dot{\psi}_t + \dot{\varphi}_t \cos(\theta_t)) \tag{23.131}$$

e que

$$p_\varphi := I_1\dot{\varphi}_t \sin^2(\theta_t) + I_3 \cos(\theta_t)(\dot{\psi}_t + \dot{\varphi}_t \cos(\theta_t)) \tag{23.132}$$

ou seja,

$$p_\varphi = I_1\dot{\varphi}_t \sin^2(\theta_t) + p_\psi \cos(\theta_t) \tag{23.133}$$

são constantes de movimento. Isso se deve ao fato que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$ para o Lagrangiano acima. Na Mecânica Clássica coordenadas q com essa propriedade, ou seja, tais que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$, são denominadas *coordenadas cíclicas* e, por força das equações de Euler-Lagrange, seus momentos generalizados $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ são constantes de movimento. Os ângulos de Euler φ e ψ são, portanto, coordenadas cíclicas no problema do pião de Lagrange.

Mostre que a energia mecânica (cinética mais potencial) do pião de Lagrange é dada por

$$e_m = \frac{I_1}{2}(\dot{\varphi}_t^2 \sin^2(\theta_t) + \dot{\theta}_t^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}_t \cos(\theta_t) + \dot{\psi}_t)^2 + Mgl \cos(\theta_t)$$

e é também uma constante de movimento. Escrevendo

$$\dot{\varphi}_t = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos(\theta_t)}{I_1(\sin^2 \theta_t)} \tag{23.134}$$

e definindo

$$e' := e_m - \frac{p_\psi^2}{2I_3}$$

que também é, obviamente, uma constante de movimento, mostre que

$$e' = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}_t^2 + \tilde{V}(\theta_t), \tag{23.135}$$

onde

$$\tilde{V}(\theta) = Mgl \cos(\theta) + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos(\theta))^2}{2I_1(\sin^2 \theta)}. \tag{23.136}$$

Obtenha disso que

$$\int_{\theta_0}^{\theta_t} \frac{1}{\sqrt{e' - \tilde{V}(\theta)}} d\theta = \sqrt{\frac{2}{I_1}} t. \tag{23.137}$$

Essa expressão fornece uma solução formal ao nosso problema, como passaremos a descrever. *

A relação (23.137) permite obter θ_t em função de t , da seguinte forma. Se $F(\theta)$ for uma primitiva de $\frac{1}{\sqrt{e' - \tilde{V}(\theta)}}$, então (23.137) fica $F(\theta_t) - F(\theta_0) = \sqrt{\frac{2}{I_1}} t$, o que permite escrever

$$\theta_t = F^{-1} \left(\sqrt{\frac{2}{I_1}} t + F(\theta_0) \right),$$

onde F^{-1} seria a função inversa da F . Como descreveremos simplificadamente adiante, a função inversa F^{-1} pode ser escrita em termos das chamadas *funções elípticas de Weierstrass*¹⁹ (vide e.g., [356], [154] ou [48]).

Uma vez obtida a função θ_t , a relação (23.133) permite obter φ_t integrando-se ambos os lados da igualdade

$$\dot{\varphi}_t = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos(\theta_t)}{I_1(1 - \cos^2(\theta_t))}. \tag{23.138}$$

Verifique! Por fim, a relação (23.131) permite obter ψ_t integrando-se ambos os lados da igualdade $\dot{\psi}_t = p_\psi/I_3 - \dot{\varphi}_t \cos(\theta_t)$ que, usando (23.138), também pode ser escrita apenas em termos de $\cos \theta_t$ como

$$\dot{\psi}_t = \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{p_\varphi - p_\psi \cos(\theta_t)}{I_1(1 - \cos^2(\theta_t))} \cos(\theta_t). \tag{23.139}$$

¹⁹Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897).

Verifique!

Os comentários postos acima foram feitos para exibir a factibilidade da resolução das equações de movimento. Porém, o cálculo “explícito” do lado esquerdo de (23.137) (e a inversão da função assim obtida) e, especialmente, a integração de (23.138) e de (23.139) são um tanto complicados, mesmo se escritas em termos de funções especiais, como as funções elípticas de Weierstrass (vide abaixo). Modernamente, é por vezes mais útil em situações concretas resolver essas equações usando-se métodos de integração numérica, tema no qual não tocaremos aqui. No entanto, como comentaremos adiante, informações qualitativas relevantes sobre o movimento podem ser inferidas analisando-se propriedades gerais das equações acima.

• **Obtendo θ_t . As funções elípticas de Weierstrass. O movimento de nutação**

Para aprofundar um pouco mais o tratamento da integral do lado esquerdo de (23.137), façamos nela a mudança de variáveis $u = \cos \theta$. Após algumas contas tediosas mas elementares, a mesma fica

$$-\frac{2}{\sqrt{Mgl}} \int_{u_0}^{u_t} \frac{du}{\sqrt{4(u - e'')(u^2 - 1) + (p'_\varphi - p'_\psi u)^2}},$$

onde $u_t := \cos \theta_t$, $e'' := e'/(Mgl)$, $p'_\varphi := 2p_\varphi/\sqrt{Mgl}$ e $p'_\psi := 2p_\psi/\sqrt{Mgl}$. Verifique! O termo dentro da raiz quadrada é um polinômio de grau 3 na variável u e o escrevemos como $p(u) = 4u^3 + a_2u^2 + a_1u + a_0$. As constantes a_0 , a_1 e a_2 podem facilmente ser escritas explicitamente em termos de e_m , p_φ e p_ψ , mas pouco nos interessa fazê-lo aqui. (Faça-o!). Fazendo a mudança de variáveis $s = u + \alpha$ com $\alpha = a_2/12$, obtemos $p(u) = p(s - \alpha) = 4s^3 - c_1s - c_0$, para novas constantes c_0 e c_1 .

E. 23.20 Exercício. Obtenha as constantes c_0 e c_1 em termos das constantes de movimento e_m , p_φ e p_ψ . *

O ponto de interesse reside no fato que, com as escolhas acima, eliminou-se convenientemente o termo s^2 . Com isso, nossa integral fica

$$-\frac{2}{\sqrt{Mgl}} \int_{u_0+\alpha}^{u_t+\alpha} \frac{du}{\sqrt{4s^3 - c_1s - c_0}}. \tag{23.140}$$

Evitando entrar em detalhes, como em questões relacionadas a domínios de definição, a integral acima pode ser escrita em termos da chamada *função elíptica de Weierstrass* (vide e.g., [356], [154] ou [48]), denotada tradicionalmente pelo símbolo \wp , e que satisfaz

$$\wp^{-1}(x) = \int_x^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - c_1s - c_0}}, \quad \text{ou seja,} \quad y = \int_{\wp(y)}^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - c_1s - c_0}}. \tag{23.141}$$

Naturalmente, a função $\wp(x) \equiv \wp(x; c_0, c_1)$ depende das constantes c_0 e c_1 , mas essa dependência é costumeiramente omitida da notação. Não entraremos em detalhes sobre a definição das funções elípticas de Weierstrass e comentamos apenas que elas são riquíssimas em propriedades, especialmente quando estendidas ao plano complexo. Por exemplo, elas são duplamente periódicas²⁰ em \mathbb{C} e, portanto, são periódicas em \mathbb{R} , ainda que não sejam necessariamente limitadas. As constantes c_0 e c_1 são denominadas *invariantes elípticas* e estão relacionadas aos dois períodos de \wp em \mathbb{C} . Para mais detalhes, vide [356], [9], [268], [164], [154] ou [48].

Retomando (23.140) e (23.137), temos que $\wp^{-1}(\cos(\theta_t) + \alpha) - \wp^{-1}(\cos(\theta_0) + \alpha) = t/\tau$, onde τ é a constante $\tau := \sqrt{\frac{2I_1}{Mgl}}$ e, assim,

$$\theta_t = \arccos \left[\wp \left(\frac{t}{\tau} + d_0 \right) - \alpha \right], \tag{23.142}$$

²⁰A seguinte expressão é frequentemente tomada como definição das funções elípticas de Weierstrass no plano complexo:

$$\wp(z) \equiv \wp(z, \omega_1, \omega_2) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \left[\frac{1}{(z + m\omega_1 + n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right],$$

onde ω_1 e $\omega_2 \in \mathbb{C}$ são por convenção tais que ω_2/ω_1 tem parte imaginária positiva (o que, em particular, implica que $|m\omega_1 + n\omega_2|$ nunca se anula para $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ nem torna-se arbitrariamente pequena). Essa definição origina-se dos trabalhos do próprio Weierstrass. É elementar constatar que $\wp(z) = \wp(z + m\omega_1 + n\omega_2)$ para todos $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ (daí dizer-se que \wp é duplamente periódica em \mathbb{C}). É também fácil ver que soma acima é absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$, onde $\Lambda := \{m\omega_1 + n\omega_2, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$, sendo, portanto, analítica no domínio $\mathbb{C} \setminus \Lambda$. Nos pontos de Λ a função $\wp(z)$ exibe polos duplos. As constantes ω_1 e ω_2 estão relacionadas às constantes c_0 e c_1 da representação (23.141).

onde $d_0 := \varphi^{-1}(\cos(\theta_0) + \alpha)$. Como φ é uma função periódica de período T em \mathbb{R} , vemos que θ_t também é periódica de período τT . Comentamos que τ tem dimensão de tempo, enquanto que T é uma grandeza adimensional e que depende das constantes c_0 e c_1 que definem φ . Esse movimento oscilatório periódico do ângulo de Euler θ_t é denominado *nutação*.

• **Obtendo φ_t e ψ_t . Os movimentos de precessão e rotação intrínseca**

Apresentemos agora expressões para φ_t e ψ_t em termos da função elíptica de Weierstrass para em seguida analisarmos qualitativamente os resultados obtidos.

E. 23.21 *Exercício.* De (23.138) e (23.139) obtenha:

$$\dot{\varphi}_t = \frac{p_\varphi - p_\psi [\varphi(\frac{t}{\tau} + d_0) - \alpha]}{I_1(1 - [\varphi(\frac{t}{\tau} + d_0) - \alpha]^2)} \quad \text{e} \quad \dot{\psi}_t = \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{(p_\varphi - p_\psi [\varphi(\frac{t}{\tau} + d_0) - \alpha]) [\varphi(\frac{t}{\tau} + d_0) - \alpha]}{I_1(1 - [\varphi(\frac{t}{\tau} + d_0) - \alpha]^2)}, \quad (23.143)$$

assim como

$$\varphi_t = \varphi_0 + \frac{\tau}{I_1} \int_{d_0}^{t/\tau + d_0} \frac{p_\varphi - p_\psi [\varphi(t') - \alpha]}{1 - [\varphi(t') - \alpha]^2} dt', \quad (23.144)$$

$$\psi_t = \psi_0 + \frac{p_\psi}{I_3} t - \frac{\tau}{I_1} \int_{d_0}^{t/\tau + d_0} \frac{p_\varphi - p_\psi [\varphi(t') - \alpha]}{1 - [\varphi(t') - \alpha]^2} [\varphi(t') - \alpha] dt'. \quad (23.145)$$

Com uso dessas expressões, de (23.138), de (23.139) e de (23.142) podemos em princípio obter as componentes de Ω_t dadas em (23.127)–(23.129), mas as expressões assim obtidas são deveras complexas, mais ainda que as acima, e de pouco uso direto. ✱

O movimento associado à variação de φ_t é denominado *precessão* e o associado à variação de ψ_t é denominado *rotação intrínseca* em torno do eixo de simetria do pião.

• **Primeiras considerações qualitativas sobre o movimento do pião de Lagrange**

Façamos agora, na medida do possível, alguns comentários gerais sobre o comportamento qualitativo das soluções obtidas acima. Vamos denotar por $\Phi_{t'}$ e $\Psi_{t'}$ os integrandos de (23.144) e de (23.145), respectivamente:

$$\Phi_{t'} := \frac{p_\varphi - p_\psi [\varphi(t') - \alpha]}{1 - [\varphi(t') - \alpha]^2} \quad \text{e} \quad \Psi_{t'} := \frac{p_\varphi - p_\psi [\varphi(t') - \alpha]}{1 - [\varphi(t') - \alpha]^2} [\varphi(t') - \alpha].$$

Como φ é uma função periódica, de período T em \mathbb{R} , ambas as funções $\Phi_{t'}$ e $\Psi_{t'}$ são também periódicas de período T e, portanto, podemos formalmente expandi-las em séries de Fourier (vide Seção 38.4.2, página 1860):

$$\Phi_{t'} = \frac{\hat{\Phi}_0}{\sqrt{T}} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\hat{\Phi}_k}{\sqrt{T}} e^{i2\pi kt'/T} \quad \text{e} \quad \Psi_{t'} = \frac{\hat{\Psi}_0}{\sqrt{T}} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\hat{\Psi}_k}{\sqrt{T}} e^{i2\pi kt'/T}.$$

Com isso, (23.144) e (23.145) se escrevem, respectivamente, como

$$\varphi_t = \varphi_0 + \left(\frac{\hat{\Phi}_0}{I_1 \sqrt{T}} \right) t + L_\varphi(t), \quad (23.146)$$

$$\psi_t = \psi_0 + \left(\frac{p_\psi}{I_3} - \frac{\hat{\Psi}_0}{I_1 \sqrt{T}} \right) t + L_\psi(t), \quad (23.147)$$

onde L_φ e L_ψ são as funções periódicas de período $T\tau$ dadas por

$$L_\varphi(t) := \frac{\sqrt{T} \tau}{4\pi I_1} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{\hat{\Phi}_k e^{i2\pi kd_0/T}}{k} \right) \left(e^{i2\pi k t/(T\tau)} - 1 \right),$$

$$L_\psi(t) := -\frac{\sqrt{T} \tau}{4\pi I_1} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{\hat{\Psi}_k e^{i2\pi kd_0/T}}{k} \right) \left(e^{i2\pi k t/(T\tau)} - 1 \right).$$

E. 23.22 *Exercício.* Verifique! ✦

Vemos de (23.146) e (23.147) que os ângulos de Euler φ_t e ψ_t crescem em média linearmente com t com velocidades angulares médias

$$w_\varphi := \left(\frac{\widehat{\Phi}_0}{I_1\sqrt{T}} \right) \quad \text{e} \quad w_\psi := \left(\frac{p_\psi}{I_3} - \frac{\widehat{\Psi}_0}{I_1\sqrt{T}} \right), \tag{23.148}$$

respectivamente. A esse movimento médio sobrepõem-se oscilações de período $T\tau$ definidas pelas funções L_φ e L_ψ , respectivamente. Como vimos, o movimento de nutação tem a mesma frequência.

O descrito crescimento linear do ângulo de Euler φ_t é um movimento denominado *precessão azimutal* médio, ou simplesmente *precessão média*. O movimento descrito pelo ângulo de Euler ψ_t representa a rotação (intrínseca) instantânea do pião em torno de seu eixo de simetria. Com essa nomenclatura podemos dizer que w_φ é a velocidade angular média de precessão do pião e w_ψ é a velocidade angular média da rotação intrínseca do pião em torno de seu eixo de simetria. Sobre as velocidades angulares médias expressas em (23.148) é relevante observar, da teoria das séries de Fourier (vide (38.59), página 1860), que

$$\frac{\widehat{\Phi}_0}{\sqrt{T}} = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_{t'} dt' \quad \text{e que} \quad \frac{\widehat{\Psi}_0}{\sqrt{T}} = \frac{1}{T} \int_0^T \Psi_{t'} dt',$$

que são os valores médios de $\Phi_{t'}$ e $\Psi_{t'}$, respectivamente, em um intervalo de largura T , o período das mesmas.

As funções θ_t , L_φ e L_ψ são periódicas de mesmo período $T\tau$. No entanto, o movimento do pião só será periódico no caso de os períodos de precessão e rotação intrínseca médios, $2\pi/w_\varphi$ e $2\pi/w_\psi$, respectivamente, forem comensuráveis com $T\tau$, ou seja, se forem múltiplos racionais do mesmo, uma condição um tanto excepcional. De modo geral, o movimento do pião é *almost*-periódico (para a teoria das funções ditas *almost*-periódicas, vide, *e.g.*, [182] ou [70]).

Além do crescimento linear descrito acima, φ_t é sujeita a oscilações periódicas, que podemos descrever qualitativamente a partir do comportamento da velocidade angular $\dot{\varphi}_t$. De acordo com a primeira das relações em (23.143), $\dot{\varphi}_t$ oscila periodicamente e seu sinal é determinado pelo sinal de $p_\varphi - p_\psi [\varphi (\frac{t}{\tau} + d_0) - \alpha]$. Como φ é periódica e oscila entre um valor máximo e um mínimo, há, conseqüentemente, três situações possíveis, dependendo dos valores de p_φ e de p_ψ : 1^a $\dot{\varphi}_t$ é sempre estritamente positiva ou estritamente negativa; 2^a $\dot{\varphi}_t$ troca de sinal periodicamente (e, portanto, anula-se periodicamente em certos instantes); 3^a $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal mas anula-se periodicamente em certos instantes. Simultaneamente, θ_t realiza também um movimento periódico de mesma frequência entre dois valores θ_- e θ_+ (nutação).

A combinação dos movimentos de nutação e precessão correspondentes a essas três situações estão descritas na Figura 23.1, página 1179, onde o movimento de um ponto do eixo de simetria do pião é desenhado. No que segue mostraremos como podemos chegar às mesmas conclusões através de uma análise puramente qualitativa das equações que regem esse movimento do pião de Lagrange.

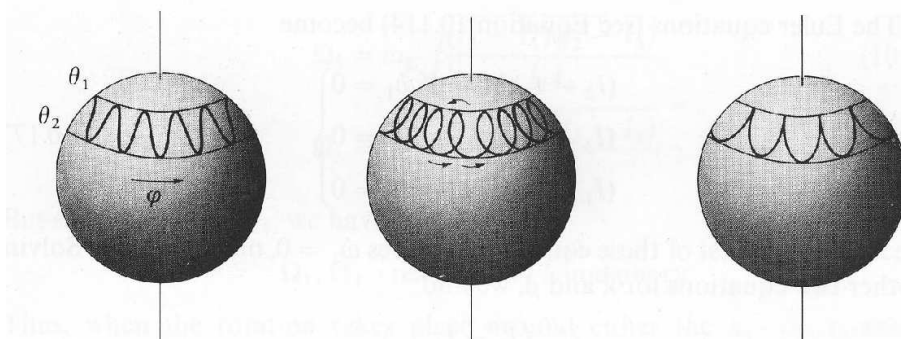


Figura 23.1: Possíveis combinações dos movimentos de nutação e de precessão do pião de Lagrange. Nas três figuras é desenhado o movimento de um ponto do eixo de simetria do pião. Os ângulos θ_- e θ_+ são aqui denominados θ_1 e θ_2 , respectivamente. Na figura da esquerda $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal, na do meio troca de sinal periodicamente e na da direita anula-se periodicamente, mas sem trocas de sinal.

• **Mais sobre a análise qualitativa do movimento do pião de Lagrange**

Como já comentamos, é possível inferir certas propriedades do movimento de um pião de Lagrange, dentre as quais algumas obtidas acima, sem uso direto das soluções “explícitas” que indicamos.

O ponto de partida é a relação (23.135), que pode ser interpretada como a energia mecânica de um sistema unidimensional onde o papel de energia cinética é feito pelo termo $\frac{I_2}{2}\dot{\theta}_t^2$ e o potencial é $\tilde{V}(\theta_t)$. A positividade dessa energia cinética implica que o movimento deve limitar-se à região onde $\tilde{V}(\theta_t) \leq e'$. Para prosseguirmos com a argumentação é importante termos uma noção qualitativa da forma do gráfico da função $\tilde{V}(\theta)$ no intervalo $[0, \pi]$, onde θ está definida.

Consideraremos agora o caso em que $p_\varphi \neq \pm p_\psi$, com ambos p_φ e p_ψ sendo não-nulos (para os demais casos, vide adiante). Da definição de \tilde{V} em (23.136) vê-se que $\tilde{V}(\theta)$ diverge para $+\infty$ quando θ aproxima-se de 0 ou de π (os extremos de seu domínio de definição), devido ao fator $1/(\sin\theta)^2$.

Como $\tilde{V}(\theta)$ é contínua, ela deve possuir ao menos um mínimo no seu intervalo de definição. É possível provar, mas não o faremos na corrente versão destas Notas²¹, que $\tilde{V}(\theta)$ possui um mínimo local único (e, portanto, absoluto) no intervalo $(0, \pi)$, que denotaremos por θ_{min} . Com isso, entendemos que $e' \geq \tilde{V}(\theta_{min})$. Para cada valor de $e' > \tilde{V}(\theta_{min})$ haverá dois ângulos θ_- e θ_+ (dependentes de e'), únicos, com $0 < \theta_- < \theta_{min} < \theta_+ < \pi$ tais que $e' = \tilde{V}(\theta_-)$ e $e' = \tilde{V}(\theta_+)$. Para cada valor de e' o ângulo de Euler θ_t oscilará (periodicamente) entre θ_- e θ_+ . Esse movimento é denominado *nutação*.

Vamos agora analisar o que ocorre com $\dot{\varphi}_t$ ainda na situação em que $e' > \tilde{V}(\theta_{min})$. Observando (23.134) ou (23.138) e sabendo que $\cos\theta_t$ é periódica em t , concluímos que o valor médio de $\dot{\varphi}_t$ é positivo ou negativo, o que implica que φ_t cresce ou decresce em média linearmente com t , podendo sofrer oscilações em torno dessa média.

Esse movimento no qual $|\varphi_t|$ cresce em média linearmente com t é denominado *precessão azimutal*, ou simplesmente *precessão*. Passemos a analisar as oscilações em torno do movimento de precessão.

Escrevamos (23.134) na forma $\dot{\varphi}_t = p_\psi \frac{\Omega - \cos(\theta_t)}{I_1(\sin\theta_t)^2}$, com $\Omega := p_\varphi/p_\psi$ (aqui assumimos $p_\psi \neq 0$). Como $\cos(\theta_+) \leq \cos(\theta_t) \leq \cos(\theta_-)$, temos o seguinte: 1º, caso $\Omega < \cos(\theta_+)$ ou $\Omega > \cos(\theta_-)$, então $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal durante todo o movimento; 2º, caso $\cos(\theta_+) < \Omega < \cos(\theta_-)$, então $\dot{\varphi}_t$ troca de sinal (periodicamente) ao longo do movimento; 3º, caso $\Omega = \cos(\theta_+)$ ou $\Omega = \cos(\theta_-)$, então $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal, mas anula-se periodicamente. Caso $p_\psi = 0$ o movimento se dá como no 1º caso.

As trajetórias descritas pelo eixo do pião nessas três situações são descritas na Figura 23.1, página 1179. O 1º caso corresponde à figura da esquerda, o 2º caso corresponde à figura do meio e o 3º caso à figura da direita.

O movimento geral do pião combina uma rotação intrínseca em relação ao próprio eixo (descrita por ψ_t), um movimento de precessão (descrita por φ_t) e um movimento de nutação (descrita por θ_t).

Finalmente, no caso especial em que $e' = \tilde{V}(\theta_{min})$ teremos $\dot{\theta}_t = 0$ para todo t . Não ocorre, portanto, o movimento de nutação e θ_t assume o valor constante θ_{min} . Nessa situação, (23.138) e (23.139) dizem-nos que $\dot{\varphi}_t$ e $\dot{\psi}_t$ também são constantes e, portanto, φ_t e ψ_t crescem linearmente com t . Não há nutação e a precessão e a rotação em torno do eixo de simetria se dão com velocidades angulares constantes.

• **O caso $p_\varphi = \pm p_\psi$**

Comentemos o que se passa se $p_\varphi = \pm p_\psi$, com ambos p_φ e p_ψ não-nulos. Se $p_\varphi = p_\psi$, ambos não-nulos, então

$$\tilde{V}(\theta) = Mgl \cos(\theta) + \frac{p_\varphi^2}{2I_1} \frac{(1 - \cos(\theta))}{(1 + \cos(\theta))}.$$

Verifique! O segundo termo diverge (para $+\infty$) em $\theta = \pi$, mas não para $\theta = 0$, quando $\tilde{V}(0) = Mgl$. $\tilde{V}(\theta)$ tem um ponto de mínimo no intervalo $\theta \in [0, \pi)$, mas esse ponto de mínimo pode ser 0. O movimento fica, portanto, limitado à região $\theta_t \in [\theta_-, \theta_+]$, para $0 \leq \theta_- < \theta_+ < \pi$. Como $\Omega = 1$, temos a situação descrita no 1º caso se $\theta_- > 0$ ou no 3º caso se $\theta_- = 0$. Nessa última situação $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal, mas anula-se periodicamente nos instantes de tempo em que θ_t assume o valor 0.

No caso $p_\varphi = -p_\psi$, ambos não-nulos, a divergência (a $+\infty$) de $\tilde{V}(\theta)$ se dá em $\theta = 0$ mas não em $\theta = \pi$. $\tilde{V}(\theta)$ tem um ponto de mínimo no intervalo $\theta \in (0, \pi]$, mas esse ponto de mínimo pode ser π . O movimento fica limitado à região

²¹O leitor interessado pode encontrar demonstrações desse fato na literatura supracitada, mas deve ser advertido que algumas provas estão incompletas ou incorretas. Vide [15] para um tratamento ligeiramente diferente dessa questão, mas que também omite algumas considerações.

$\theta_t \in [\theta_-, \theta_+]$, para $0 < \theta_- < \theta_+ \leq \pi$. Como $\Omega = -1$, temos a situação descrita no 1º caso se $\theta_+ < \pi$ ou no 3º caso se $\theta_+ = \pi$. Nessa última situação $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal, mas anula-se periodicamente nos instantes de tempo em que θ_t assume o valor π .

Um movimento sem nutação é em ambos os casos possível, bastando escolher-se e' igual a $\tilde{V}(\theta)$ calculado em seu ponto de mínimo. Note-se que esse pode vir a ser 0 ou π .

E. 23.23 *Exercício*. Analise qualitativamente o movimento na situação em que $p_\varphi = p_\psi = 0$. ✦

*** ** * ** ***



Figura 23.2: Wolfgang Pauli e Niels Bohr observam um “Tippe Top”. Foto tirada em 31 de Maio de 1951, durante a inauguração de um novo instituto de Física na Universidade de Lund, Suécia. Créditos: Foto de Erik Gustafson, AIP Emilio Segrè Visual Archives, Margrethe Bohr Collection (photos.aip.org). Um “Tippe Top” é um tipo especial de pião simétrico que tem a curiosa propriedade de inverter seu eixo de rotação, erguendo com isso seu centro de massa, ao perder energia. O “Tippe Top” foi patenteado em 1891 por Helene Sperrl, sob o nome de “Wendekreisel”. O “Tippe Top” é até os dias de hoje objeto de estudo. Para um artigo de revisão, vide

- R. J. Cohen, “The tippe top revisited”. American Journal of Physics **45**: 12 (1977). Bibcode:1977AmJPh..45...12C. doi:10.1119/1.10926.

Para investigações recentes, vide:

- N. M. Bou-Rabee, J. E. Marsden, L. A. Romero, “Tippe top inversion as a dissipation-induced instability”, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **3**, 352–377 (2004).
- S. Rauch-Wojciechowski, M. Sköldstam, T. Glad, “Mathematical analysis of the tippe top”, Regul. Chaotic Dyn. **10**, 333–362 (2005).

23.5 Mecânica Analítica. Um Mínimo

Além do formalismo Newtoniano, normalmente apresentado em cursos introdutórios de Física, a Mecânica Clássica possui outras formulações que apresentam vantagens no tratamento de questões teóricas ou aplicadas.

Nesta seção apresentaremos um apanhado sucinto do formalismo Lagrangiano e do formalismo Hamiltoniano da Mecânica Clássica de sistemas com um número finito de graus de liberdade. O texto que aqui apresentamos não deve ser tido como introdutório ou completo. Sua leitura pressupõe um certo conhecimento prévio dos assuntos tratados. Há uma extensa lista de referências sobre os temas aqui desenvolvidos e listaremos apenas algumas mais reconhecidas ou recomendadas. Para textos com maior profundidade matemática: [15], [2], [110] e [361]. Para textos com maior ênfase em questões de Física: [215], [303], [186], [122], [201], [225], [214] e [357].

23.5.1 O Formalismo Lagrangiano

Vamos considerar um sistema mecânico descrito por um número finito $n \geq 1$ de graus de liberdade, de sorte que sua posição possa ser descrita por uma n -upla de coordenadas reais independentes $q \equiv (q^1, \dots, q^n)$. Essas coordenadas não são necessariamente coordenadas Cartesianas, sendo apenas uma coleção de n números reais com os quais a posição do sistema mecânico é determinada univocamente. Vamos denominá-las *coordenadas generalizadas*.

No estudo do movimento de sistemas mecânicos descritos por coordenadas generalizadas $q \equiv (q^1, \dots, q^n)$ estamos interessados em estudar as trajetórias descritas pelo sistema como função das interações existentes entre elas ou com o meio externo, levando em conta também condições iniciais. Por uma trajetória entendemos uma função do tempo t , definido em algum intervalo da reta real, no espaço de configurações: $t \mapsto q(t) \equiv (q^1(t), \dots, q^n(t))$. Essa função deve ser suposta contínua e também, na maioria dos problemas, suficientemente diferenciável. As derivadas $\dot{q}(t) \equiv (\dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$ são denominadas *velocidades generalizadas*.

O conjunto de todos os valores possíveis das coordenadas generalizadas q que descrevem um sistema mecânico é um espaço n -dimensional denominado *espaço de configurações* do sistema. Na linguagem da Geometria Diferencial, que não empregaremos amiúde aqui (vide, porém [15] e [2]), o espaço de configurações é suposto compor uma variedade diferenciável n -dimensional real \mathcal{M} , enquanto que o espaço de todas as coordenadas \underline{q} de todas as velocidades generalizadas (q, \dot{q}) é uma variedade diferenciável $2n$ -dimensional que pode ser identificada com o fibrado tangente de \mathcal{M} , denotado por $T\mathcal{M}$. Essa suposição engloba praticamente a totalidade de sistemas mecânicos de interesse. Noções sobre Geometria Diferencial, variedades diferenciáveis, fibrados tangentes e cotangentes, são desenvolvidas nos Capítulos 35 e 36 destas Notas, páginas 1642 e 1706, respectivamente. Vide também a extensa lista de referências lá apontadas.

• O princípio de Hamilton e as equações de Euler-Lagrange

O objeto básico do formalismo Lagrangiano²² é a chamada *função Lagrangiana*, ou simplesmente *Lagrangiano*, uma função \mathcal{L} das coordenadas generalizadas, das velocidades generalizadas e, eventualmente, do tempo, $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \equiv \mathcal{L}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t)$, que é suposta possuir todas as informações necessárias sobre a dinâmica do sistema mecânico estudado. Para sistemas conservativos (que compõem nosso interesse exclusivo aqui), tem-se $\mathcal{L} = T - U$, onde T é a energia cinética do sistema e U sua energia potencial. Na corrente versão dessas notas não apresentaremos nenhuma justificativa para essa escolha e, para tal, remetemos o estudante iniciante à literatura pertinente supramencionada.

Sejam $t_1 < t_2$ dois instantes de tempo e seja $\gamma := [t_1, t_2] \ni t \rightarrow q_\gamma(t)$ uma curva diferenciável no espaço de configurações. Definimos a *ação* associada ao Lagrangiano \mathcal{L} e à curva γ como a integral

$$S[\gamma] := \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_\gamma(t), \dot{q}_\gamma(t), t) dt. \tag{23.149}$$

Podemos nos perguntar: qual é, segundo as leis da Mecânica e segundo as interações a que esta submetido, a trajetória real que de um sistema mecânico que inicia seu movimento no instante t_1 em uma posição $q(t_1)$ e termina-o no instante t_2 em uma posição $q(t_2)$?²³ Ou, em outras palavras, qual a curva γ que é efetivamente seguida pela trajetória real do sistema mecânico considerado?

²²Joseph-Louis Lagrange (1736–1813).

²³No formalismo Lagrangiano é implícita a suposição de que, dados $(t_1, q(t_1))$ e $(t_2, q(t_2))$, com $q(t_1)$ e $q(t_2)$ *arbitrários* no espaço de configurações, existe uma trajetória real que inicia-se em $q(t_1)$ no instante t_1 e termina em $q(t_2)$ no instante t_2 . Por trajetória real entendemos uma trajetória que respeite as leis da Mecânica e seja compatível com as interações às quais o sistema mecânico está sujeito.

A resposta a essa questão é dada pelo chamado *princípio de Hamilton*²⁴, ou *princípio de ação mínima*, que passamos a descrever.

Seja $[t_1, t_2] \ni t \rightarrow \delta q(t)$ uma função definida no espaço de fase que seja infinitamente diferenciável e se anule nos extremos do seu intervalo de definição t_1 e t_2 , ou seja, $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Denotemos $\frac{d}{dt}\delta q(t)$ por $\delta \dot{q}(t)$.

Adicionalmente, suporemos também que $\delta q(t)$ seja suficientemente pequena em todo o intervalo $[t_1, t_2]$ de forma a garantir que a curva $[t_1, t_2] \ni t \mapsto q_\gamma(t) + \delta q(t)$ sempre esteja contida dentro do espaço de configurações.

Denotemos simbolicamente por γ_λ a curva definida pela função $[t_1, t_2] \ni t \mapsto q_\gamma(t) + \lambda \delta q(t)$, com $\lambda \in [-1, 1]$. Pela definição de δq sabemos que essa curva também conecta o ponto $q(t_1)$ no instante t_1 ao ponto $q(t_2)$ no instante t_2 . Quando $\lambda = 0$ a curva γ_λ coincide com γ . Assim, a diferença $S[\gamma] - S[\gamma_\lambda]$ anula-se para $\lambda = 0$. Desejamos saber o quão rapidamente essa diferença afasta-se de zero quando λ torna-se não nulo, mas “pequeno”.

Para tal, definimos a *variação da ação* $S[\gamma]$ na *direção de* δq por

$$\delta_{\delta q} S[\gamma] := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (S[\gamma_\lambda] - S[\gamma]).$$

$\delta_{\delta q} S[\gamma]$ expressa a taxa de variação de $S[\gamma]$ quanto a curva γ é “deformada” pela adição de δq a q_γ . Naturalmente, essa taxa depende da função δq adotada. Por definição, temos

$$\delta_{\delta q} S[\gamma] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathcal{L}(q_\gamma(t) + \lambda \delta q(t), \dot{q}_\gamma(t) + \lambda \delta \dot{q}(t), t) - \mathcal{L}(q_\gamma(t), \dot{q}_\gamma(t), t) \right] dt.$$

Assumindo que \mathcal{L} é uma função duas vezes diferenciável de q e \dot{q} , podemos escrever, pela expansão em série de Taylor em λ ,

$$\mathcal{L}(q_\gamma(t) + \lambda \delta q(t), \dot{q}_\gamma(t) + \lambda \delta \dot{q}(t), t) - \mathcal{L}(q_\gamma(t), \dot{q}_\gamma(t), t) = \lambda \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \delta q^i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i(t) \right] dt + O(\lambda^2).$$

(Doravante vamos frequentemente omitir o índice γ de expressões como $q_\gamma(t)$ e $\dot{q}_\gamma(t)$). Assim,

$$\delta_{\delta q} S[\gamma] = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \delta q^i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i(t) \right] dt.$$

Efetuada integração por partes, temos que

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i(t) dt = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i(t) \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i(t) dt.$$

Como, por hipótese, $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$, obtemos

$$\delta_{\delta q} S[\gamma] = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right] \delta q^i(t) dt. \tag{23.150}$$

Dizemos que a variação da ação $S[\gamma]$ é nula sobre a curva γ , em símbolos $\delta S[\gamma] = 0$, se $\delta_{\delta q} S[\gamma] = 0$ para toda função δq do tipo especificado acima. Assim, vemos de (23.150) que $\delta S[\gamma] = 0$ ao longo de uma curva γ se e somente se q_γ satisfizer as equações diferenciais

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = 0$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Essas equações são denominadas *equações de Euler-Lagrange* e ocupam uma posição central na Mecânica Clássica.

O chamado *princípio de Hamilton* consiste na afirmação que $\delta S[\gamma] = 0$ se e somente se γ for a trajetória real do sistema mecânico considerado que conecta o ponto $q(t_1)$ no instante t_1 e o ponto $q(t_2)$ no instante t_2 . Assim, concluímos que ao longo da trajetória são satisfeitas as equações de Euler-Lagrange. Sob esse princípio entendemos que as equações de Euler-Lagrange são a expressão das leis físicas fundamentais de um sistema mecânico com um número finito de graus de liberdade em forma de um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem.

Essa é a essência do chamado *formalismo Lagrangiano da Mecânica Clássica*. Seu ponto central reside na natureza invariante de sua formulação, isto é, na sua independência do sistema de coordenadas adotado no espaço de configurações, como discutiremos agora.

²⁴William Rowan Hamilton (1805–1865).

23.5.1.1 A Invariância das Equações de Euler-Lagrange por Mudanças de Sistemas de Referência

• A invariância das equações de Euler-Lagrange por mudanças de coordenadas

A característica mais importante das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

e que é a razão de ser do formalismo Lagrangiano, é o fato de as mesmas serem invariantes quando realizamos uma transformação de coordenadas no espaço de configurações. Vamos esclarecer o que isso significa.

Suponhamos que ao invés do sistema de coordenadas (q^1, \dots, q^n) utilizemos um outro sistema de coordenadas (Q^1, \dots, Q^n) para descrever nosso sistema mecânico de n graus de liberdade. Então, afirmamos as equações de Euler-Lagrange permanecem as mesmas nesse novo sistema, ou seja, valerão também as equações

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}^j} = \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial Q^j}, \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, n\},$$

onde $\widehat{\mathcal{L}}(Q, \dot{Q}, t) := \mathcal{L}(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t)$, que é o Lagrangiano original \mathcal{L} escrito em termos das novas coordenadas.

A maneira mais simples e direta de provar essa afirmação é observar que o princípio de Hamilton $\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0$ está expresso de forma independente do particular sistema de coordenadas empregado no espaço de configurações e, portanto, deve conduzir às mesmas equações — as equações de Euler-Lagrange — em qualquer sistema de coordenadas.

Para satisfazer um leitor eventualmente cético quanto a essa argumentação, ou insatisfeito com ela, vamos apresentar uma prova direta da invariância das equações de Euler-Lagrange.

Sejam $Q^j \equiv Q^j(q^1, \dots, q^n, t)$, $j \in \{1, \dots, n\}$, as expressões que fornecem as “novas” coordenadas Q em função das “antigas” coordenadas q e, eventualmente, do tempo t . Vamos supor que essa transformação de coordenadas seja ao menos duas vezes diferenciável e que essa mudança de variáveis seja, para cada t , inversível. Essa última hipótese significa que a matriz Jacobiana $n \times n$, de elementos de matriz $\frac{\partial Q^j}{\partial q^i}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, é uma matriz inversível.

As velocidades generalizadas das novas coordenadas são definidas por

$$\dot{Q}^j(q, \dot{q}, t) := \sum_{k=1}^n \frac{\partial Q^j}{\partial q^k}(q, t) \dot{q}^k + \frac{\partial Q^j}{\partial t}(q, t). \tag{23.151}$$

Assim,

$$\frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial q^i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 Q^j}{\partial q^i \partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial Q^j}{\partial q^i \partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial Q^j}{\partial q^k}, \tag{23.152}$$

sendo que a última igualdade decorre de \dot{Q}^j depender linearmente dos \dot{q}^k 's. Ao longo de uma curva $q(t)$, temos, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q^k} \left(\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} \right) \dot{q}^k + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 Q^j}{\partial q^i \partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial^2 Q^j}{\partial q^i \partial t}$$

e, portanto, mostramos que ao longo de uma curva $q(t)$ vale

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} = \frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial q^i}. \tag{23.153}$$

Agora, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial Q^j} \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}^j} \frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial q^i}. \tag{23.154}$$

Por outro lado, temos também que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}^j} \frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial \dot{q}^i}$. Em (23.152) vimos que $\frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial Q^j}{\partial q^k}$. Assim,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}^j} \frac{\partial Q^j}{\partial q^i}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}^j} \right) \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}^j} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} \right) \stackrel{(23.153)}{=} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}^j} \right) \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}^j} \frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial q^i}. \quad (23.155)$$

Dessa forma, assumindo a validade das equações de Euler-Lagrange para o sistema de coordenadas q , obtemos de (23.154) e de (23.155) que, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, vale

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}^j} \right) \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}^j} \frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial Q^j} \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}^j} \frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial q^i} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}^j} - \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial Q^j} \right) \frac{\partial Q^j}{\partial q^i}. \end{aligned}$$

Como a matriz Jacobiana, de elementos de matriz $\frac{\partial Q^j}{\partial q^i}$, é inversível, segue imediatamente disso que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}^j} - \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial Q^j} = 0, \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

que são as equações de Euler-Lagrange nas “novas” coordenadas Q . Isso estabeleceu a invariância das equações de Euler-Lagrange por mudança de coordenadas no espaço de configurações. Tratemos de exibir um exemplo da invariância das equações de Euler-Lagrange.

Exemplo 23.1 Considere-se um ponto material de massa m movendo-se em uma dimensão sob um potencial $V(x) = \alpha \tanh x$, com α constante. O Lagrangiano é $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} (\dot{x})^2 - \alpha \tanh x$ e a correspondente equação de Euler-Lagrange é

$$m\ddot{x} = -\alpha(1 - (\tanh x)^2). \quad (23.156)$$

Adotemos novas coordenadas $X = \tanh x$, que mapeiam bijetivamente \mathbb{R} no intervalo $(-1, 1)$. Teremos $\dot{X} = (1 - (\tanh x)^2)\dot{x}$ e $\dot{x} = \dot{X}/(1 - X^2)$. Assim, $\widehat{\mathcal{L}}(X, \dot{X}) = \frac{m}{2(1-X^2)^2} (\dot{X})^2 - \alpha X$. Logo,

$$\frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{X}} = \frac{m}{(1-X^2)^2} \dot{X} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial X} = \frac{2mX}{(1-X^2)^3} (\dot{X})^2 - \alpha$$

e, portanto, a nova equação de Euler-Lagrange é

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{(1-X^2)^2} \dot{X} \right) = \frac{2mX}{(1-X^2)^3} (\dot{X})^2 - \alpha. \quad (23.157)$$

Expandindo-se a derivada do lado esquerdo e realizando-se alguns cálculos elementares, essa equação assume a forma

$$m(1-X^2)\ddot{X} + 2mX(\dot{X})^2 = -\alpha(1-X^2)^3. \quad (23.158)$$

Desejamos verificar que as equações (23.158) e (23.156) são equivalentes. Para isso, substituamos $X = \tanh x$ em (23.158). Temos $\dot{X} = (1 - (\tanh x)^2)\dot{x}$ e $\ddot{X} = (1 - (\tanh x)^2)\ddot{x} - 2 \tanh x (1 - (\tanh x)^2)(\dot{x})^2$. Assim, (23.158) fica

$$m(1 - (\tanh x)^2) \left[(1 - (\tanh x)^2)\ddot{x} - 2 \tanh x (1 - (\tanh x)^2)(\dot{x})^2 \right] + 2m \tanh x (1 - (\tanh x)^2)^2 (\dot{x})^2 = -\alpha(1 - (\tanh x)^2)^3$$

que, após cancelamentos, se simplifica para $m\ddot{x} = -\alpha(1 - (\tanh x)^2)$, que é (23.156), como desejávamos mostrar. \square

E. 23.24 Exercício. Considere-se um ponto material de massa m movendo-se em uma dimensão sob um potencial $V(x) = \alpha x^4$, com α constante. O Lagrangiano é $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}(\dot{x})^2 - \alpha x^4$. Mostre que a correspondente equação de Euler-Lagrange é $m\ddot{x} = -4\alpha x^3$. Considere novas coordenadas definidas em \mathbb{R} dadas por $X = x^3$. Mostre que o Lagrangiano nessas coordenadas é $\widehat{\mathcal{L}}(X, \dot{X}) = \frac{m}{18}X^{-4/3}(\dot{X})^2 - \frac{4\alpha}{3}X^{4/3}$. Mostre que as equações de Euler-Lagrange nessas coordenadas assumem a forma $mX\ddot{X} - \frac{2m}{3}(\dot{X})^2 = -12\alpha X^{8/3}$. Substituindo $X = x^3$ nessa última equação, reobtenha a Euler-Lagrange original do sistema de coordenadas original. \spadesuit

Futuramente, se houver perigo de confusão, nem sempre iremos distinguir notacionalmente \mathcal{L} de $\widehat{\mathcal{L}}$.

23.5.1.2 Modos Normais de Oscilação

Ilustremos algumas das ideias acima com o exemplo fisicamente importante de sistemas definidos por Lagrangianos quadráticos e pelos chamados modos normais de oscilação.

• **Lagrangianos quadráticos e sua forma canônica**

Seja um sistema de n partículas pontuais cuja dinâmica é descrita pelo Lagrangiano quadrático

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} q_i q_j + \sum_{i=1}^n \ell_i q_i, \tag{23.159}$$

onde $q'_i \in \mathbb{R}$ para todo i e onde M_{ij} , K_{ij} e ℓ_i são constantes reais. Sem perda de generalidade podemos supor que $M_{ij} = M_{ji}$ e $K_{ij} = K_{ji}$ para todos i e j , pois a expressão para \mathcal{L} é simétrica nos \dot{q}_i 's e q_i 's.

O Lagrangiano (23.159) é usado na descrição de sistemas de osciladores acoplados por forças harmônicas. Um exemplo é discutido no Exercício E. 23.45, página 1214 (vide Figura 23.3, página 1214).

Defina-se os vetores-coluna q' e ℓ e as matrizes $n \times n$ reais simétricas M e K por

$$q' := \begin{pmatrix} q'_1 \\ \vdots \\ q'_n \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}, \quad K := \begin{pmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix}, \quad \ell := \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}.$$

Usando o produto escalar usual em \mathbb{R}^n , denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$, o Lagrangiano \mathcal{L} dada em (23.159) pode ser escrito como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle \dot{q}', M \dot{q}' \rangle_{\mathbb{R}} - \frac{1}{2} \langle q', K q' \rangle_{\mathbb{R}} + \langle \ell, q' \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Assumindo K inversível e definindo novas coordenadas $q := q' - K^{-1}\ell$, e escrevendo-se q como um vetor-coluna $q := \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$, o Lagrangiano \mathcal{L} assume a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, M \dot{q} \rangle_{\mathbb{R}} - \frac{1}{2} \langle q, K q \rangle_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2} \langle \ell, K^{-1} \ell \rangle_{\mathbb{R}}. \tag{23.160}$$

O último termo, sendo uma constante, será doravante omitido, pois não contribui nas equações de Euler-Lagrange.

E. 23.25 Exercício. Obtenha (23.160). \spadesuit

De forma mais explícita (23.160) pode ser escrita (já sem o termo constante) como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} q_i q_j, \tag{23.161}$$

onde $q_i \in \mathbb{R}$ para todo i . As formas (23.160) ou (23.161) são denominadas *formas canônicas* do Lagrangiano quadrático (23.159).

As expressões acima talvez tornem clara a interpretação das novas variáveis q . O ponto de equilíbrio estático do sistema se dá quando $q = 0$, ou seja, quando $q' = K^{-1}\ell$. Assim, q_i mede o desvio de q'_i de sua posição de equilíbrio.

• **Solução na forma canônica**

No que segue suporemos que as matrizes M e K sejam matrizes inversíveis e, mais adiante, suporemos também que M e K sejam positivas.

As equações de Euler-Lagrange associadas ao Lagrangiano (23.161) compõem o sistema de n equações diferenciais ordinárias acopladas

$$\sum_{j=1}^n M_{ij}\ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n K_{ij}q_j(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

E. 23.26 *Exercício.* Verifique! ✱

É mais conveniente escrever essas equações em forma matricial: com as definições acima $M\ddot{q}(t) + Kq(t) = 0$, ou, equivalentemente,

$$\ddot{q}(t) + (M^{-1}K)q(t) = 0. \tag{23.162}$$

Como facilmente se verifica, a solução dessa equação com condições iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ é

$$q(t) = \cos(\Omega_0 t)q_0 + \Omega_0^{-1} \text{sen}(\Omega_0 t)v_0, \tag{23.163}$$

onde Ω_0 é qualquer matriz satisfazendo $(\Omega_0)^2 = M^{-1}K$ e onde $\cos(\Omega_0 t)$ e $\text{sen}(\Omega_0 t)$ são matrizes definidas por via das séries de Taylor das funções cosseno e seno:

$$\cos(\Omega_0 t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} \Omega_0^{2l}, \quad \text{sen}(\Omega_0 t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} \Omega_0^{2l+1}. \tag{23.164}$$

Note-se que Ω_0 terá inversa se e somente se K o tiver, o que estamos supondo.

E. 23.27 *Exercício.* Verifique que (23.163) é, de fato, a solução de (23.162) com as condições iniciais q_0 e v_0 . ✱

Observe-se que, como $(\Omega_0)^2 = M^{-1}K$, podemos escrever, inserindo em (23.163) as séries de (23.164),

$$q(t) = \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} (M^{-1}K)^l \right] q_0 + \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} (M^{-1}K)^l \right] v_0. \tag{23.165}$$

Nessa forma a solução diretamente em termos das matrizes M e K e independe da particular escolha de Ω_0 .

Observemos de passagem que (23.165) representa a solução de (23.162) mesmo quando K não possui inversa. Por exemplo, para $n = 1$ e $K = 0$, a equação diferencial reduz-se a $\ddot{q}(t) = 0$ e, nesse caso, (23.165) fornece $q(t) = q_0 + v_0 t$ (pois só os termos com $l = 0$ sobrevivem), e essa é, de fato, a solução de $\ddot{q}(t) = 0$ para as condições iniciais dadas.

A solução obtida em (23.165), ainda que completa, não ilumina um aspecto importante do movimento de sistemas descritos pelo Lagrangiano (23.161): a presença de modos normais de oscilação quando ambas as matrizes M e K são positivas. Trata-se de novas coordenadas para descrever o sistema, em geral distintas das coordenadas q_i , cujas equações de movimento são desacopladas e descrevem oscilações harmônicas independentes umas das outras com certas frequências que são características do sistema, as chamadas frequências normais de oscilação. No que segue apresentaremos os modos normais e reobteremos com os mesmos a solução (23.165) com uma matriz Ω_0 específica.

• **Modos normais de oscilação**

Vamos aqui supor também que M e K sejam matrizes positivas (ou seja, que seus autovalores sejam todos positivos). Usando o produto escalar usual em \mathbb{R}^n , denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$, é claro que \mathcal{L} dada em (23.161) pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, M\dot{q} \rangle_{\mathbb{R}} - \frac{1}{2} \langle q, Kq \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Defina-se $Q := M^{1/2}q$. Teremos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\langle \dot{Q}, \dot{Q} \rangle_{\mathbb{R}} - \frac{1}{2}\langle Q, BQ \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (23.166)$$

onde $B := M^{-1/2}KM^{-1/2}$. A matriz B é simétrica e, portanto, é diagonalizável por uma matriz ortogonal O . Seja $D = O^TBO$ diagonal. Definindo-se

$$Q := O^TQ = O^TM^{1/2}q, \quad (23.167)$$

obtemos,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\langle \dot{Q}, \dot{Q} \rangle_{\mathbb{R}} - \frac{1}{2}\langle Q, DQ \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Isso pode ser escrito de forma mais explícita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (\dot{Q}_i)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n d_i(Q_i)^2, \quad (23.168)$$

onde

$$Q := \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}, \quad D := \text{diag}(d_1, \dots, d_n).$$

As equações de Euler-Lagrange para (23.168) são

$$\ddot{Q}_i(t) + d_i Q_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (23.169)$$

Note-se que se trata de um sistema de n equações desacopladas.

As constantes d_i são autovalores da matriz D e, portanto, da matriz B . Como B é simétrica e positiva (pois K é positiva e, portanto, $B = M^{-1/2}KM^{-1/2} = (K^{1/2}M^{-1/2})^T(K^{1/2}M^{-1/2})$, que é positiva), temos $d_i > 0$ para todo i . As soluções de (23.169) são, portanto,

$$Q_i(t) = \alpha_i \cos(\sqrt{d_i}t) + \beta_i \text{sen}(\sqrt{d_i}t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (23.170)$$

com α_i e β_i sendo constantes a serem determinadas pelas condições iniciais (por exemplo, $\alpha_i = Q_i(0)$ e $\beta_i = \dot{Q}_i(0)/\sqrt{d_i}$).

As coordenadas Q_i , $i = 1, \dots, n$, são denominadas *modos normais de vibração* do sistema de n partículas considerado. As quantidades $\sqrt{d_i}$ são denominadas *frequências normais de oscilação* do sistema considerado. Por serem autovalores da matriz B , os d_i 's são solução do polinômio característico $\det(\lambda\mathbb{1} - B) = 0$. Assim,

$$0 = \det(\lambda\mathbb{1} - B) = \det(\lambda\mathbb{1} - M^{-1/2}KM^{-1/2}) = \det(\lambda M - K) \det(M^{-1}).$$

Concluimos que os d_i 's são soluções da chamada *equação secular*:

$$\det(\lambda M - K) = 0.$$

Em forma matricial, (23.170) fica

$$Q(t) = \cos(D^{1/2}t)\alpha + \text{sen}(D^{1/2}t)\beta,$$

com α e β sendo os vetores-coluna com componentes α_i e β_i , $i = 1, \dots, n$, respectivamente, com $\cos(D^{1/2}t) = \text{diag}(\cos(\sqrt{d_1}t), \dots, \cos(\sqrt{d_n}t))$ e com $\text{sen}(D^{1/2}t) = \text{diag}(\text{sen}(\sqrt{d_1}t), \dots, \text{sen}(\sqrt{d_n}t))$.

Retornando às coordenadas originais, temos que $q(t) = M^{-1/2}OQ(t)$ e, portanto,

$$q(t) = M^{-1/2}O \cos(D^{1/2}t)\alpha + M^{-1/2}O \text{sen}(D^{1/2}t)\beta. \quad (23.171)$$

Para cada componente, isso diz que

$$q_i(t) = \sum_{a=1}^n (M^{-1/2}O)_{ia} \cos(\sqrt{d_a}t)\alpha_a + \sum_{a=1}^n (M^{-1/2}O)_{ia} \sin(\sqrt{d_a}t)\beta_a. \tag{23.172}$$

Como se vê, para cada coordenada q_i o movimento é uma combinação linear de movimentos harmônicos independentes cada qual com uma frequência normal de oscilação.

Para as condições iniciais em $t = 0$, (23.172) significa que

$$q_i(0) = \sum_{a=1}^n (M^{-1/2}O)_{ia} \alpha_a \quad \text{e} \quad \dot{q}_i(0) = \sum_{a=1}^n (M^{-1/2}O)_{ia} \sqrt{d_a} \beta_a.$$

Em termos matriciais, isso fica

$$q_0 = M^{-1/2}O\alpha \quad \text{e} \quad v_0 = M^{-1/2}OD^{1/2}\beta.$$

Com isso, podemos reescrever (23.171) diretamente em termos das condições iniciais em $t = 0$:

$$\begin{aligned} q(t) &= M^{-1/2}O \cos(D^{1/2}t)O^{-1}M^{1/2}q_0 + M^{-1/2}O \sin(D^{1/2}t)D^{-1/2}O^{-1}M^{1/2}v_0 \\ &= M^{-1/2} \cos(B^{1/2}t)M^{1/2}q_0 + M^{-1/2}B^{-1/2} \sin(B^{1/2}t)M^{1/2}v_0, \end{aligned}$$

Assim, definindo a matriz $\Omega := M^{-1/2}B^{1/2}M^{1/2}$, obtemos

$$q(t) = \cos(\Omega t)q_0 + \Omega^{-1} \sin(\Omega t)v_0. \tag{23.173}$$

E. 23.28 *Exercício.* Constate a validade das igualdades acima. *

Observe-se que nas duas últimas expressões acima não mais ocorre a matriz ortogonal O . Observe-se também que Ω não é, em geral, simétrica e que as seguintes manipulações são ainda possíveis. Escrevendo-se $\cos(\Omega t)$ e $\sin(\Omega t)$ segundo suas definições em termos de séries de Taylor, temos, usando o fato que $\Omega^2 = M^{-1/2}BM^{1/2} = M^{-1}K$,

$$\begin{aligned} q(t) &= \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} \Omega^{2l} \right] q_0 + \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} \Omega^{2l} \right] v_0 \\ &= \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} (M^{-1}K)^l \right] q_0 + \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} (M^{-1}K)^l \right] v_0. \end{aligned}$$

Essa é a mesma solução obtida em (23.163) e (23.165).

* * *

Para ilustrar os métodos e resultados acima apresentados estudamos com algum detalhe no Exercício E. 23.45, página 1214, o caso em que temos um sistema de duas massas acopladas por molas em movimento unidimensional.

• **Determinação dos modos normais pelo Teorema Espectral**

A matriz $B^{1/2}$ é simétrica e seus autovalores são $\sqrt{d_i}$, $i = 1, \dots, n$. Seja $\{\omega_1, \dots, \omega_r\}$, com $0 < r \leq n$ o conjunto de autovalores distintos de $B^{1/2}$. Pelo Teorema Espectral (Teorema 9.6, página 384), podemos escrever $B^{1/2} = \sum_{a=1}^r \omega_a E_a$, com E_a sendo os projetores espectrais, os quais são matrizes simétricas satisfazendo $E_a E_b = \delta_{a,b} E_a$ e $\sum_{a=1}^r E_a = \mathbb{1}_n$. Cada E_a projeta sobre o subespaço de autovetores de $B^{1/2}$ com autovalor ω_a e são dados explicitamente, segundo a Proposição 9.18, página 386 (vide (9.56)) por

$$E_j = \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{1}{\omega_j - \omega_k} \right) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^r (B^{1/2} - \omega_l \mathbb{1}),$$

para todo $j = 1, \dots, r$.

A matriz $\Omega := M^{-1/2}B^{1/2}M^{1/2}$ também possui uma representação espectral: definindo-se $F_a = M^{-1/2}E_aM^{1/2}$, $1 \leq a \leq r$, teremos igualmente $\Omega = \sum_{a=1}^r \omega_a F_a$, sendo que valem $F_a F_b = \delta_{a,b} F_a$ e $\sum_{a=1}^r F_a = \mathbb{1}_n$ (as matrizes F_a não são necessariamente simétricas) e são dadas explicitamente por

$$F_j = \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{1}{\omega_j - \omega_k} \right) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^r (\Omega - \omega_l \mathbb{1}), \tag{23.174}$$

para todo $j = 1, \dots, r$.

Com isso, e recordando que $\Omega^{-1} = \sum_{a=1}^r \omega_a^{-1} F_a$, a solução (23.173) fica

$$q(t) = \sum_{a=1}^r \left[\cos(\omega_a t) F_a q_0 + \frac{1}{\omega_a} \text{sen}(\omega_a t) F_a v_0 \right]. \tag{23.175}$$

Essa é a decomposição de $q(t)$ em seus modos normais, cada um deles sendo $\cos(\omega_a t) F_a q_0 + \frac{1}{\omega_a} \text{sen}(\omega_a t) F_a v_0$, $a = 1, \dots, r$. Se algum dos autovalores, digamos ω_a , for degenerado, os vetores $F_a q_0$ e $F_a v_0$ podem ainda ser decompostos em uma base de vetores no subespaço imagem de F_a .

De forma geral, o uso da decomposição espectral, resultando em (23.175), é o método mais rápido para a determinação dos modos normais de um sistema.

23.5.1.3 Sistemas de Coordenadas Não-Inerciais no Formalismo Lagrangiano

Uma das virtudes do formalismo Lagrangiano é permitir lidar no mesmo pé de igualdade com sistemas de referência inerciais e não-inerciais, e num nível de generalidade ainda maior que aquele tratado na Seção 23.1, página 1142. Isso se deve à invariância das equações de Euler-Lagrange por mudanças de coordenadas, da qual tratamos acima, invariância essa válida mesmo em se tratando de coordenadas dependentes do tempo, como vimos.

Essa invariância da formulação das equações da Mecânica Clássica por transformações gerais de sistemas de referência, e que coloca sistemas de referência inerciais e não-inerciais em pé de igualdade, é uma importante inspiração para a Teoria da Relatividade Geral.

No que segue mostraremos que as equações dinâmicas em um sistema de referência não-inercial específico, do tipo considerado na Seção 23.1, que gira e desloca-se em relação a um sistema inercial, podem ser obtidas com uso da invariância estabelecida acima por mudanças de coordenadas dependentes do tempo.

Seja uma coleção de n pontos materiais de massa m_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, movendo-se em um sistema de referência inercial sob a ação de um potencial U . Em coordenadas Cartesianas $q_i \in \mathbb{R}^3$, seu Lagrangiano é dado por

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \|\dot{q}_i\|^2 - U(q_1, \dots, q_n, t).$$

As correspondentes equações de Euler-Lagrange são $m_i \ddot{q}_i = -\text{grad}_i U(q_1, \dots, q_n, t)$. (Nota: aqui e adiante grad_i refere-se ao gradiente em relação às coordenadas *espaciais* do i -ésimo ponto material).

No espírito da Seção 23.1, página 1142, e usando a mesma notação, consideremos novas coordenadas $Q_i \in \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, \dots, n\}$, definidas por

$$Q_i = Q_i(q, t) \equiv R_t^{-1}(q_i - c_t), \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

com $R_t \in \text{SO}(3)$. Como em (23.34), teremos

$$\dot{q}(t) = R_t \left[\Omega_t \times Q(t) + \dot{Q}(t) \right] + \dot{c}_t. \tag{23.176}$$

Assim, definindo também

$$V(Q_1, \dots, Q_n, t) := U(R_t Q_1 + c_t, \dots, R_t Q_n + c_t, t)$$

temos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}(Q, \dot{Q}, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left\| \Omega_t \times Q_i + \dot{Q}_i + R_t^{-1} \dot{c}_t \right\|^2 - V(Q_1, \dots, Q_n, t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left\| \Omega_t \times Q_i \right\|^2 + \left\| \dot{Q}_i \right\|^2 + \left\| \dot{c}_t \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(\Omega_t \times Q_i) \cdot \dot{Q}_i + 2(\Omega_t \times Q_i) \cdot (R_t^{-1} \dot{c}_t) + 2\dot{Q}_i \cdot (R_t^{-1} \dot{c}_t) \right] - V(Q_1, \dots, Q_n, t), \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}(Q, \dot{Q}, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left\| \dot{Q}_i \right\|^2 + 2\dot{Q}_i \cdot \left((R_t^{-1} \dot{c}_t) + \Omega_t \times Q_i \right) \right. \\ &\quad \left. + \left\| \Omega_t \times Q_i \right\|^2 + 2 \left((R_t^{-1} \dot{c}_t) \times \Omega_t \right) \cdot Q_i \right] + \left\| \dot{c}_t \right\|^2 - V(Q_1, \dots, Q_n, t). \end{aligned} \quad (23.177)$$

Além de reordenar os termos, colocando juntos na primeira linha os termos dependentes de \dot{Q} , usamos também as identidades (4.13) e (4.16), página 235, em dois dos termos.

Com a expressão para $\widehat{\mathcal{L}}$ estabelecida, podemos obter as correspondentes equações de Euler-Lagrange. Isso é obtido no exercício que segue:

E. 23.29 Exercício. Para o Lagrangiano $\widehat{\mathcal{L}}$ dado em (23.177), obtenha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}_i^a} &= m_i \left(\dot{Q}_i^a + (R_t^{-1} \dot{c}_t)^a + (\Omega_t \times Q_i)^a \right) \quad \text{e} \\ \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial Q_i^a} &= m_i \left[\left((\dot{Q}_i + (R_t^{-1} \dot{c}_t)) \times \Omega_t \right)^a + \left\| \Omega_t \right\|^2 Q_i^a - (\Omega_t \cdot Q_i) (\Omega_t)^a \right] - \frac{\partial V}{\partial Q_i^a} \\ &= m_i \left[\left(\dot{Q}_i + (R_t^{-1} \dot{c}_t) \right) \times \Omega_t - \Omega_t \times (\Omega_t \times Q_i) \right]^a - \frac{\partial V}{\partial Q_i^a}. \end{aligned}$$

Mostre disso que as equações de Euler-Lagrange são (em notação vetorial):

$$m_i \ddot{Q}_i = m_i \left[-R_t^{-1} \ddot{c}_t - \frac{d}{dt} (R_t^{-1}) \dot{c}_t - \dot{\Omega}_t \times Q_i - \Omega_t \times \dot{Q}_i + \left(\dot{Q}_i + (R_t^{-1} \dot{c}_t) \right) \times \Omega_t - \Omega_t \times (\Omega_t \times Q_i) \right] - \text{grad}_i V, \quad (23.178)$$

para $i \in \{1, \dots, n\}$. ✦

Usando o fato que $R_t \frac{d}{dt} (R_t^{-1}) + \frac{d}{dt} (R_t) R_t^{-1} = 0$ e, portanto, $\frac{d}{dt} (R_t^{-1}) = -R_t^{-1} \frac{d}{dt} (R_t) R_t^{-1}$, temos por (23.33) que

$$-\frac{d}{dt} (R_t^{-1}) \dot{c}_t = R_t^{-1} \dot{R}_t R_t^{-1} \dot{c}_t \stackrel{(23.33)}{=} \Omega_t \times (R_t^{-1} \dot{c}_t).$$

com isso, dois dos termos em (23.178) cancelam-se e obtemos,

$$m_i \ddot{Q}_i = m_i \left[-R_t^{-1} \ddot{c}_t - \dot{\Omega}_t \times Q_i - 2\Omega_t \times \dot{Q}_i - \Omega_t \times (\Omega_t \times Q_i) \right] - \text{grad}_i V.$$

Como o leitor pode facilmente constatar, o termo entre $[\dots]$ contém todas as acelerações inerciais identificadas em (23.37), página 1149, e discutidas nas páginas subsequentes.

O termo $\text{grad}_i V$ corresponde às forças reais, internas e externas ao sistema de pontos materiais, que agem sobre o i -ésimo deles. As componentes de $\text{grad}_i V$ são

$$\frac{\partial V}{\partial Q_i^a} = \frac{\partial}{\partial Q_i^a} U(R_t Q_1 + c_t, \dots, R_t Q_1 + c_t, t) = (R_t^{-1} \text{grad}_i U)(q_1, \dots, q_n, t).$$

Verifique! Como $m_i \ddot{q}_i = -\text{grad}_i U$, concluímos que $-\text{grad}_i V = R_t^{-1}(m_i \ddot{q}_i)$ e, assim

$$m_i \ddot{Q}_i = R_t^{-1}(m_i \ddot{q}_i) + m_i \left[-R_t^{-1} \ddot{c}_t - \dot{\Omega}_t \times Q_i - 2\Omega_t \times \dot{Q}_i - \Omega_t \times (\Omega_t \times Q_i) \right]. \quad (23.179)$$

Essa relação é idêntica a (23.37).

O ponto relevante por trás de tudo isso é a constatação que fizemos acima de que o Lagrangiano $\widehat{\mathcal{L}}$ realmente descreve o sistema de pontos materiais sob o ponto de vista de um sistema de referência não-inercial, como aquele considerado, com as novas coordenadas dadas por $Q = R_t^{-1}(q - c_t)$, na qual passamos de um sistema Cartesiano de coordenadas a outro sistema Cartesiano, mas que gira e se desloca em relação ao primeiro.

Vemos nisso mais uma virtude de formalismo Lagrangiano: o de colocar num mesmo pé de igualdade sistemas inerciais e não-inerciais. Essa virtude é consequência direta da invariância das equações de Euler-Lagrange por mudanças de sistemas de coordenadas, mesmo as dependentes do tempo.

Note-se que essa invariância não se limita a classe de transformações que consideramos na transformação $Q = R_t^{-1}(q - c_t)$, na qual passamos de um sistema Cartesiano de coordenadas a outro sistema Cartesiano, mas que gira e se desloca em relação ao primeiro. Ela vale, como provamos acima, para quaisquer transformações de coordenadas, mesmo as dependentes do tempo.

23.5.2 O Formalismo Hamiltoniano

Além do formalismo Newtoniano, normalmente apresentado em cursos introdutórios de Física, e do formalismo Lagrangiano que resumimos acima, a Mecânica Clássica possui outras formulações que podem apresentar vantagens no tratamento de questões teóricas ou aplicadas. O chamado *formalismo Hamiltoniano* é de particular importância, entre outras razões, por trazer a Mecânica Clássica mais próximo da formulação operatorial da Mecânica Quântica. A ele dedicamos a seção que aqui se inicia.

• Momentos generalizados

Consideremos o Lagrangiano $\mathcal{L}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t)$ de um sistema mecânico com n graus de liberdade, descrito por coordenadas generalizadas $q \equiv (q^1, \dots, q^n)$ e velocidades generalizadas $\dot{q} \equiv (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ e eventualmente do tempo t . As correspondentes equações de Euler-Lagrange, que regem a dinâmica desse sistema mecânico, são

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (23.180)$$

Os chamados *momentos generalizados* são definidos por

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t). \quad (23.181)$$

Cada momento generalizado p_i é, naturalmente, uma função de q , de \dot{q} e de t : $p_i \equiv p_i(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t)$. Denotamos também $p \equiv (p^1, \dots, p^n)$. Com essa definição, as equações de Euler-Lagrange ficam

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (23.182)$$

Um ponto importante, e que é básico para o formalismo Hamiltoniano que desenvolveremos, é a suposição que essas funções sejam inversíveis, no sentido de que possamos escrever as velocidades generalizadas \dot{q}^i em termos das coordenadas q e dos momentos generalizados p e, eventualmente, do tempo: $\dot{q}^i \equiv \dot{q}^i(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, t)$. Como é bem sabido,

a condição para que tal seja possível é a de que o determinante da matriz Jacobiana, de elementos de matriz $\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$, com $i, j \in \{1, \dots, n\}$, seja não-nulo. Assumiremos implicitamente a validade dessa condição em tudo o que segue, salvo menção em contrário.

Sistemas onde essas condições de invertibilidade não são alcançadas são tratados através da teoria dos sistemas Hamiltonianos com vínculos (desenvolvida notoriamente por Dirac²⁵), tema esse que não abordaremos na presente versão destas Notas. Vide, e.g., [82].

• **Espaço de configurações e o espaço de fase**

O conjunto de todos os valores possíveis das coordenadas q que descrevem um sistema mecânico é um espaço n -dimensional denominado *espaço de configurações* do sistema.

Através da inversão comentada acima, os momentos generalizados p passam a ser considerados, juntamente com as coordenadas q , como variáveis independentes do sistema mecânico. O conjunto de todos os valores possíveis de q e p é um espaço $2n$ -dimensional denominado *espaço de fases* do sistema mecânico, uma noção de grande importância.

Como já dissemos, na linguagem da Geometria Diferencial, que não empregaremos amiúde aqui (vide, porém [15] e [2]), o espaço de configurações é suposto compor uma variedade diferenciável n -dimensional real \mathcal{M} , enquanto que o espaço de todas as coordenadas e velocidades generalizadas (q, \dot{q}) é uma variedade diferenciável $2n$ -dimensional que pode ser identificada com o fibrado tangente de \mathcal{M} , denotado por $T\mathcal{M}$. Já o espaço de fases, o espaço de todas as coordenadas e momentos generalizadas (q, p) , é uma variedade diferenciável $2n$ -dimensional que pode ser identificada com o fibrado cotangente de \mathcal{M} , denotado por $T^*\mathcal{M}$.

Dessa forma, podemos afirmar que o formalismo Lagrangiano é descrito no fibrado tangente $T\mathcal{M}$, enquanto que o formalismo Hamiltoniano, que desenvolveremos no que segue, é descrito no fibrado cotangente $T^*\mathcal{M}$.

Noções sobre Geometria Diferencial, variedades diferenciáveis, fibrados tangentes e cotangentes, são desenvolvidas nos Capítulos 35 e 36 destas Notas, páginas 1642 e 1706, respectivamente. Vide também a extensa lista de referências lá apontadas.

• **O Hamiltoniano e as equações de Hamilton**

O chamado *Hamiltoniano*^{26,27} de um sistema mecânico descrito por uma Lagrangiana \mathcal{L} é a função definida no espaço de fases dada por

$$\mathcal{H}(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, t) := \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i(q, p, t) \right) - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q, p, t), t). \tag{23.183}$$

As coordenadas q e os momentos generalizados p são tomadas como independentes e as velocidades generalizadas são tomadas como funções $\dot{q}(q, p, t)$ de q e p (e de t , se for o caso).

Uma diferença básica entre o formalismo Lagrangiano e o Hamiltoniano é que no formalismo Lagrangiano as equações dinâmicas (as equações de Euler-Lagrange) compõem um sistema de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, enquanto que no formalismo Hamiltoniano as equações dinâmicas (as equações de Hamilton, que obteremos abaixo) compõem um sistema de $2n$ equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Partindo da definição (23.183), vamos agora obter as equações dinâmicas correspondentes ao formalismo Hamiltoniano, as chamadas *equações de Hamilton*. Essas equações podem ser obtidas de diversas formas (trataremos de outras a seguir), mas vamos obtê-las inicialmente calculando as derivadas parciais de \mathcal{H} em relação às variáveis independentes das quais depende.

Para a primeira equação de Hamilton, consideremos

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \stackrel{(23.183)}{=} \dot{q}^i(q, p, t) + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} \stackrel{(23.181)}{=} \dot{q}^i(q, p, t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} = \dot{q}^i(q, p, t).$$

O conjunto de equações

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \tag{23.184}$$

²⁵Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984).

²⁶William Rowan Hamilton (1805–1865).

²⁷O Hamiltoniano é também denominado *função Hamiltoniana*, *função de Hamilton*, ou *Hamiltoniana*.

é uma das *equações de Hamilton*. Chamamos a atenção para o fato de que a dedução não faz uso das equações dinâmicas, as equações de Euler-Lagrange, mas apenas da definição de momento generalizado em (23.181) e da definição de Hamiltoniano \mathcal{H} em (23.183).

Para tratarmos do segundo conjunto de equações de Hamilton, fazemos uso das equações de Euler-Lagrange. Usando a definição (23.181), temos

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} \stackrel{(23.183)}{=} \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} \stackrel{(23.181)}{=} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \stackrel{(23.180)}{=} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \stackrel{(23.181)}{=} -\dot{p}_i .$$

O conjunto assim obtido de equações

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} , \quad i \in \{1, \dots, n\} , \tag{23.185}$$

é também parte das *equações de Hamilton*.

De importância também é considerarmos a derivada parcial do Hamiltoniano em relação a t :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \stackrel{(23.181)}{=} \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial t} \stackrel{(23.181)}{=} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} .$$

Em resumo, as equações de Hamilton são

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} , \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} , \quad i \in \{1, \dots, n\} , \tag{23.186}$$

e adicionalmente, temos

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} .$$

Como dissemos, as equações de Hamilton (23.186) compõem um sistema de $2n$ equações diferenciais ordinárias no espaço de fase.

• **O Hamiltoniano como constante de movimento**

Ao longo de uma trajetória, isto é, de uma solução das equações de Hamilton, temos o seguinte:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(q(t), p(t), t) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^j} \dot{q}^j \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \stackrel{(23.186)}{=} \sum_{j=1}^n \left[- \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^j} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} ,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(q(t), p(t), t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(q(t), p(t), t) = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(q(t), \dot{q}(t), t) .$$

Portanto, se o Lagrangiano não depende de t , o Hamiltoniano é uma constante de movimento ao longo de qualquer trajetória real do sistema mecânico considerado.

23.5.2.1 Derivação Variacional das Equações de Hamilton

As equações de Euler-Lagrange são obtidas a partir de um princípio variacional, o princípio de Hamilton. Como veremos na presente seção, o mesmo se passa com as equações de Hamilton elas mesmas. Essa maneira de obtê-las será útil adiante quando discutirmos as chamadas transformações canônicas.

• **Formalização no espaço de configurações a partir do princípio de Hamilton**

De maneira idêntica àquela empregada no princípio de Hamilton, consideramos a coleção de todas as curvas contínuas e diferenciáveis $p(t)$ no espaço de configurações, com $t \in [t_1, t_2]$ (sendo $t_1 < t_2$) conectando pontos fixados $q(t_1)$ e $q(t_2)$. Para tais curvas, consideramos o funcional ação

$$S := \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt .$$

O princípio de Hamilton é a afirmação que $\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = 0$, quando o funcional é calculado sobre a trajetória real do sistema considerado.

Com base em (23.183), escrevemos

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \left(\sum_{i=1}^n p_i(q, \dot{q}, t) \dot{q}^i \right) - \mathcal{H}(q, p(q, \dot{q}, t), t) \equiv \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i \right) - \mathcal{H}(q, p, t),$$

onde, seguindo (23.181), os momentos generalizados p_i são tomados ao longo de cada curva no espaço de configurações como função de q, \dot{q} e eventualmente de t . Para a variação da ação, obtemos

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i \right) - \mathcal{H}(q, p, t) \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\delta(p_i) \dot{q}^i + p_i \delta(\dot{q}^i) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} \delta(q^i) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \delta(p_i) \right) dt. \quad (23.187)$$

Deveríamos agora escrever $\delta(p_i) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial p_i}{\partial q^j} \delta(q^j) + \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} \delta(\dot{q}^j) \right)$, expressando assim a variação de p_i em termos das variações das coordenadas generalizadas e de suas derivadas. Seguimos, no entanto, um outro caminho, mantendo provisoriamente a expressão em termos de $\delta(p_i)$. Como $\delta(\dot{q}^i) = \frac{d}{dt} \delta(q^i)$, com integração por partes podemos escrever em (23.187) $\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta(\dot{q}^i) dt = \underbrace{p_i \delta(q^i)}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta(q^i) dt$. E assim,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(- \left[\dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} \right] \delta(q^i) + \left[\dot{q}^i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right] \delta(p_i) \right) dt.$$

Neste ponto, impomos o princípio de Hamilton que afirma que $\delta S = 0$ sobre a trajetória real no espaço de configurações seguida pelo sistema mecânico. No entanto, seria precipitado se simplesmente declarássemos que ambos os fatores entre colchetes são nulos pois, em verdade, as variações $\delta(q^i)$ e $\delta(p^i)$ não são independentes. Sucede, porém, como já comentamos quando da dedução de (23.184), que a expressão $\dot{q}^i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$ é nula para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, como consequência das definições de \mathcal{H} e dos momentos generalizados, sem uso das equações de Euler-Lagrange. Assim, o termo que multiplica $\delta(p_i)$ é trivialmente nulo, e o princípio de Hamilton reduz-se a

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} \right] \delta(q^i) dt,$$

conduzindo finalmente à equação de Hamilton faltante $\dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

• Formalização no espaço de fases

Nessa formulação as curvas são tomadas no espaço de fase, conectando pontos fixos $(q(t_1), p(t_1))$ e $(q(t_2), p(t_2))$. As variáveis do espaço de fase q e p são tomadas como independente e variam independentemente. Em particular, não se assume nenhuma relação entre p e \dot{q} . De fato $\dot{q}(t)$ é meramente a derivada de $q(t)$ ao longo de cada curva considerada, exatamente como na formalização feita no espaço de configurações.

Outra diferença é que não assumimos previamente a validade do princípio de Hamilton (que é restrito ao espaço de configurações), mas sim de uma adaptação do mesmo ao contexto do espaço de fases, adaptação essa que se justifica *a posteriori* pelo fato de fornecer as desejadas equações de Hamilton.

Com essas considerações considere-se a integral de $\left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i \right) - \mathcal{H}(q, p, t)$ tomada ao longo de uma curva (contínua e diferenciável) no espaço de fases conectando pontos fixos $(q(t_1), p(t_1))$ e $(q(t_2), p(t_2))$. Sua variação será

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i \right) - \mathcal{H}(q, p, t) \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\delta(p_i) \dot{q}^i + p_i \delta(\dot{q}^i) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} \delta(q^i) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \delta(p_i) \right) dt. \quad (23.188)$$

Como $\delta(\dot{q}^i) = \frac{d}{dt} \delta(q^i)$, com integração por partes podemos escrever em (23.188) $\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta(\dot{q}^i) dt = \underbrace{p_i \delta(q^i)}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta(q^i) dt$.

E assim, (23.188) fica

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(- \left[\dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} \right] \delta(q^i) + \left[\dot{q}^i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right] \delta(p_i) \right) dt. \quad (23.189)$$

Aqui sim, podemos considerar $\delta(q^i)$ e $\delta(p_j)$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, como variações independentes e, impondo-se a nulidade de (23.189), obtemos as equações de Hamilton

$$\dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{q}^i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

como desejado.

* * *

Nota. Curiosamente, a dedução das equações de Hamilton a partir de um princípio variacional é apresentada de forma um tanto defeituosa em alguns livros-texto modernos, os quais não deixam claro se a variação é tomada em curvas no espaço de configurações ou no de fases. Como o resultado é o mesmo, parece não haver diferenças, mas um leitor mais atento ficará confuso com a linha de argumentação. Foi por essa razão que optamos por apresentar as duas formalizações (no espaço de configurações e no de fases), deixando talvez mais claro a argumentação que se emprega em cada caso. O livro de Sommerfeld [303], que muito reputamos, faz sua apresentação no espaço de configurações e aponta cuidadosamente para o problema da falta de independência entre as variações $\delta(q^i)$ e $\delta(p_j)$ que ocorre nesse caso, indicando a solução que apresentamos. ♣

23.5.3 Colchetes de Poisson

Seja um sistema mecânico cuja dinâmica seja definida por um Hamiltoniano $\mathcal{H}(q, p, t)$. Seja $f \equiv f(q, p, t)$ uma função definida no espaço de fases (e eventualmente dependente também de t). Sua derivada temporal ao longo de uma trajetória definida pelo Hamiltoniano \mathcal{H} é dada, segundo as equações de Hamilton, por

$$\frac{d}{dt}f(q(t), p(t), t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}(q(t), p(t), t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}(q(t), p(t), t).$$

Essa expressão motiva a seguinte definição. Sejam $g(q, p, t)$ e $h(q, p, t)$ funções ao menos uma vez diferenciáveis definidas no espaço de fases e, eventualmente, também dependentes do tempo. Definimos os *colchetes de Poisson*²⁸ de g e h , denotados por $\{g, h\}$ como a função definida no espaço de fases (e eventualmente dependente também do tempo t) dada por

$$\{g, h\}(q, p, t) := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q^i} - \frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\partial h}{\partial p_i} \right) (q, p, t). \tag{23.190}$$

Com isso, podemos escrever

$$\frac{d}{dt}f(q(t), p(t)) = \{\mathcal{H}, f\}(q(t), p(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(q(t), p(t), t). \tag{23.191}$$

Os colchetes de Poisson são um instrumento muito útil, como veremos no que seguirá, e suas propriedades refletem estruturas matemáticas importantes subjacentes à Mecânica Clássica (relacionadas ao grupo simplético). Antes de prosseguirmos, é muito importante listarmos algumas de suas propriedades.

• Propriedades dos colchetes de Poisson

Listamos a seguir as propriedades fundamentais dos colchetes de Poisson. Abaixo, f, g, h, g_1, g_2, h_1 e h_2 são funções arbitrárias definidas no espaço de fases (e eventualmente dependentes também do tempo t) que sejam ao menos uma ou duas vezes diferenciáveis (conforme a necessidade).

1. Antissimetria:

$$\{g, h\} = -\{h, g\}.$$

2. Se g ou h forem constantes como funções de q 's e p 's, $\{g, h\} = 0$.

3. Linearidade:

$$\{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, h\} = \alpha_1 \{g_1, h\} + \alpha_2 \{g_2, h\},$$

onde α_1 e α_2 são constantes. Segue da antissimetria que também vale $\{h, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2\} = \alpha_1 \{h, g_1\} + \alpha_2 \{h, g_2\}$.

²⁸Siméon Denis Poisson (1781–1840).

4. Identidade de Leibniz²⁹:

$$\{g, h_1 h_2\} = \{g, h_1\} h_2 + h_1 \{g, h_2\}.$$

Pela antissimetria vale também $\{h_1 h_2, g\} = \{h_1, g\} h_2 + h_1 \{h_2, g\}$.

5. Identidade de Jacobi³⁰:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0. \quad (23.192)$$

6. Identidade para a derivada temporal:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{g, h\} = \left\{ \frac{\partial g}{\partial t}, h \right\} + \left\{ g, \frac{\partial h}{\partial t} \right\}. \quad (23.193)$$

7. Colchetes de Poisson canônicos: para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$, valem

$$\{q^i, q^j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{p_i, q^j\} = \delta_{ij}. \quad (23.194)$$

Incentivamos o estudante a provar essas propriedades. Todas elas seguem diretamente da definição dos colchetes de Poisson e suas demonstrações são simples e pouco trabalhosas, exceto a da identidade de Jacobi (23.192), que tratamos logo abaixo.

• **Prova de identidade de Jacobi**

Das propriedades listadas acima, a única cuja demonstração é mais difícil é a identidade de Jacobi (23.192). Uma maneira de prová-la é à força bruta: expandindo-se o lado esquerdo de (23.192) de acordo com a definição (23.190) e constatando-se que disso obtém-se zero. Aconselhamos todo estudante a fazer isso uma (e somente uma) vez na vida.

Vamos aqui, no entanto, apresentar uma demonstração mais simples e elegante, usando apenas algumas das demais propriedades dos colchetes de Poisson listadas acima.

Consideremos os colchetes $\{f, g\}$ e vamos supor que a dinâmica do sistema seja definida pela função h , ou seja, que h seja o Hamiltoniano de algum sistema mecânico. Seja $(q(t), p(t))$ uma trajetória no espaço de fases definida pelo Hamiltoniano h . Por um lado, teremos por (23.191),

$$\frac{d}{dt} \{f, g\}(q(t), p(t), t) = \{h, \{f, g\}\}(q(t), p(t), t) + \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\}(q(t), p(t), t). \quad (23.195)$$

Por outro lado, como $\frac{df}{dt} = \{h, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}$ e $\frac{dg}{dt} = \{h, g\} + \frac{\partial g}{\partial t}$, temos também

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{f, g\}(q(t), p(t), t) &= \left\{ \{h, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} (q(t), p(t), t) + \left\{ f, \{h, g\} + \frac{\partial g}{\partial t} \right\} (q(t), p(t), t) \\ &\stackrel{(23.193)}{=} \{ \{h, f\}, g \} (q(t), p(t), t) + \{ f, \{h, g\} \} (q(t), p(t), t) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\}(q(t), p(t), t). \end{aligned} \quad (23.196)$$

Assim, igualando-se os lados direitos de (23.195) e de (23.196), temos

$$\{h, \{f, g\}\} = \{ \{h, f\}, g \} + \{ f, \{h, g\} \}$$

ao longo de uma trajetória $(q(t), p(t))$. Essa relação coincide com a identidade de Jacobi (23.192), como é fácil de ser verificado. Faça-o! Como as trajetórias $(q(t), p(t))$ podem ser feitas passar por qualquer ponto do espaço de fase (pois qualquer ponto do espaço de fase pode ser tomado como condição inicial de qualquer movimento), concluímos que a identidade de Jacobi vale em toda parte.

²⁹Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716).

³⁰Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851).

• **Constantes de movimento e integrais primeiras**

Seja um sistema mecânico cuja dinâmica é definida por um Hamiltoniano \mathcal{H} . Uma função $f(q, p, t)$ é dita ser uma *constante de movimento* se ao longo de qualquer trajetória $(q(t), p(t))$ definida por \mathcal{H} valer

$$\frac{df}{dt}(q(t), p(t), t) = 0,$$

ou seja, se $f(q(t), p(t), t)$ for constante ao longo de qualquer trajetória definida por \mathcal{H} .

Uma *integral primeira* é uma função $f(q, p)$, definida no espaço de fases, mas independente de t , que é uma constante de movimento. Integrais primeiras são também denominadas *integrais de movimento*.

Integrais primeiras desempenham um papel particularmente importante no processo de resolução (“integração”) das equações de movimento de certos sistemas ditos *sistemas integráveis*. Um teorema importante nesse contexto é o chamado Teorema de Poisson, que demonstraremos a seguir.

• **O Teorema de Poisson**

Se f é uma constante de movimento, então

$$0 = \frac{d}{dt}f(q(t), p(t), t) = \{\mathcal{H}, f\}(q(t), p(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(q(t), p(t), t).$$

Como isso se dá para quaisquer $(q(t), p(t))$, concluímos que

$$\{\mathcal{H}, f\}(q, p, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(q, p, t) = 0$$

para quaisquer pontos (q, p) do espaço de fase.

O *Teorema de Poisson* consiste na seguinte afirmação: se f e g são constantes de movimento, então $\{f, g\}$ também o é. Prova:

$$\frac{d}{dt}(\{f, g\}(q(t), p(t), t)) = \{\mathcal{H}, \{f, g\}\}(q(t), p(t), t) + \frac{\partial \{f, g\}}{\partial t}(q(t), p(t), t).$$

Agora, por um lado, temos

$$\frac{\partial \{f, g\}}{\partial t} \stackrel{(23.193)}{=} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}.$$

Por outro lado, pela identidade de Jacobi e pela antissimetria, temos

$$\{\mathcal{H}, \{f, g\}\} = -\{g, \{\mathcal{H}, f\}\} - \{f, \{g, \mathcal{H}\}\} = \{\{\mathcal{H}, f\}, g\} + \{f, \{\mathcal{H}, g\}\}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}(\{f, g\}(q(t), p(t), t)) = \underbrace{\{\{\mathcal{H}, f\}, g\}}_{=0}(q(t), p(t), t) + \underbrace{\{f, \{\mathcal{H}, g\}\}}_{=0}(q(t), p(t), t) = 0,$$

demonstrando que $\{f, g\}$ é uma constante de movimento.

Esse teorema nos informa que se estivermos de posse de duas constantes de movimento f e g , podemos obter uma terceira tomando seus colchetes de Poisson $\{f, g\}$, e assim por diante. Em verdade, é preciso que se diga que nem sempre obtemos dessa forma novas constantes de movimento, pois pode ocorrer de $\{f, g\}$ ser nulo ou ser uma combinação de f e g .

De qualquer forma, o Teorema de Poisson revela um significado profundo por trás dos colchetes de Poisson, e que vai além da motivação de sua definição em (23.191), significado esse ligado a noções de simetria e a princípios de conservação em sistemas mecânicos.

• **O Operador de Liouville**

A Mecânica Clássica admite ser formulada em termos de um formalismo operatorial semelhante ao da Mecânica Quântica. Esse formalismo apresenta algumas vantagens quando se discutem propriedades mais profundas de sistemas

mecânicos, como a propriedade de ergodicidade (vide para tal [264]). Não pretendemos explorar esse tema de forma exaustiva aqui, nem entrar em questões matemáticas importantes, como o domínio de definição de certos operadores, mas apresentar alguns de seus rudimentos.

Seja f uma função infinitamente diferenciável definida no espaço de fases e, por simplicidade, suponhamos que f não dependa explicitamente de t . Se considerarmos sua evolução ao longo de uma trajetória real $(q(t), p(t))$, definida por um Hamiltoniano \mathcal{H} (que suporemos, por simplicidade, independente do tempo), teremos

$$\frac{d}{dt}f(q(t), p(t)) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = (\mathbf{L}f)(q(t), p(t)),$$

onde \mathbf{L} é o operador diferencial, denominado *operador de Liouville*³¹, ou *Liouvilliano*, definido por

$$\mathbf{L} := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right), \tag{23.197}$$

ou seja,

$$(\mathbf{L}f)(q, p) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \tag{23.198}$$

Observe-se *en passant* que $\mathbf{L}f = \{\mathcal{H}, f\}$, mas nessa formalização preferimos tratar \mathbf{L} como um operador diferencial agindo num espaço adequado de funções definidas no espaço de fases, explorando as propriedades específicas de operadores diferenciais.

A condição inicial em $t = t_0$ é $f(q_0, p_0)$, onde (q_0, p_0) é uma abreviação para $(q^1(t_0), \dots, q^n(t_0), p_1(t_0), \dots, p_n(t_0))$, que são as condições iniciais para coordenadas e momentos generalizados em $t = t_0$. O ponto relevante da expressão

$$\frac{d}{dt}f(q(t), p(t)) = (\mathbf{L}f)(q(t), p(t)),$$

ou seja, $\dot{f} = \mathbf{L}f$, é que essa equação linear, com a condição inicial $f(q_0, p_0)$, possui uma solução formalmente expressa por

$$f(q(t), p(t)) = \left(e^{(t-t_0)\mathbf{L}} f \right)(q_0, p_0) = f(q_0, p_0) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} (\mathbf{L}^n f) \right)(q_0, p_0). \tag{23.199}$$

E. 23.30 *Exercício.* Justifique informalmente por que essa expressão apresenta a solução desejada. ✦

Para Hamiltonianos dependentes do tempo devemos considerar, alternativamente, a solução expressa em termos de uma série de Dyson, analogamente ao discutido na Seção 13.2.2, página 539.

Como ilustração do uso de (23.199), vamos exibir dois sistemas elementares para os quais a solução das equações de movimento pode ser explicitamente obtida com as expressões acima: o ponto material livre em uma dimensão e o oscilador harmônico em uma dimensão. Um terceiro exemplo, o de um ponto material em uma dimensão sujeito a uma força constante, será tratado no Exercício E. 23.31, em seguida.

Exemplo 23.2 No caso de um ponto material livre de massa m em um movimento unidimensional, temos o Hamiltoniano $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m}$. Assim, o operador de Liouville é

$$\mathbf{L} = \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q}.$$

O operador de derivação $\frac{\partial}{\partial q}$ é o gerador das traslações na variável q no espaço das funções que dela dependam (vide Seção 22.8, página 1123). Dessa forma, vale formalmente

$$\left(e^{t\mathbf{L}} f \right)(q_0, p_0) = \left(e^{t \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q}} f \right)(q_0, p_0) = f \left(q_0 + \frac{p_0}{m} t, p_0 \right).$$

Assim, em particular, para $f(q, p) = q$, concluímos

$$q(t) = q_0 + \frac{p_0}{m} t \quad \text{e} \quad p(t) = p_0,$$

a bem conhecida expressão que descreve a evolução de um ponto material livre. □

³¹Joseph Liouville (1809–1882).

Exemplo 23.3 Para o oscilador harmônico unidimensional o Hamiltoniano é $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2$. O operador de Liouville correspondente é

$$L = m^{-1}p \frac{\partial}{\partial q} - kq \frac{\partial}{\partial p} .$$

Para simplificar um pouco as coisas, definamos $p' = p/\sqrt{m}$ e $q' = \sqrt{k}q$. O operador L fica

$$L = \omega_0 \left(p' \frac{\partial}{\partial q'} - q' \frac{\partial}{\partial p'} \right) ,$$

com $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. O operador $L' \equiv p' \frac{\partial}{\partial q'} - q' \frac{\partial}{\partial p'}$ é o gerador das rotações no espaço (q', p') . Logo, $e^{tL} = e^{t\omega_0 L'}$ representa uma rotação de um ângulo $\omega_0 t$ nesse espaço. Logo, definindo $\tilde{f}(q', p') = f(q, p)$, ou seja, $\tilde{f}(\sqrt{k}q, p/\sqrt{m}) = f(q, p)$

$$\begin{aligned} f(q(t), p(t)) &= (e^{tL} f)(q_0, p_0) = \tilde{f}(\cos(\omega_0 t)q_0' + \text{sen}(\omega_0 t)p_0', \cos(\omega_0 t)p_0' - \text{sen}(\omega_0 t)q_0') \\ &= f\left(\cos(\omega_0 t)q_0 + \text{sen}(\omega_0 t)\frac{p_0}{m\omega_0}, \cos(\omega_0 t)p_0 - \text{sen}(\omega_0 t)m\omega_0 q_0\right) . \end{aligned} \quad (23.200)$$

Em particular, para $f(q, p) = q$ e para $f(q, p) = p$ temos, respectivamente,

$$q(t) = \cos(\omega_0 t)q_0 + \text{sen}(\omega_0 t)\frac{p_0}{m\omega_0} \quad \text{e} \quad p(t) = \cos(\omega_0 t)p_0 - \text{sen}(\omega_0 t)m\omega_0 q_0 ,$$

um resultado bem conhecido. □

O exercício a seguir exhibe mais um caso simples que pode ser tratado por esse método operatorial: o do ponto material sob uma força constante.

E. 23.31 *Exercício.* Considere-se um ponto material de massa m movendo-se em uma dimensão sob a ação de uma força constante F_0 . O Hamiltoniano desse sistema é $\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} - F_0 q$. Verifique que o correspondente operador de Liouville é

$$L = \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} + F_0 \frac{\partial}{\partial p} .$$

Seja $A := t \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q}$ e $B := t F_0 \frac{\partial}{\partial p}$, de sorte que $e^{tL} = e^{A+B}$. Verifique que

$$[A, B] = -t^2 \frac{F_0}{m} \frac{\partial}{\partial q} .$$

Verifique também que

$$[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$$

e, portanto, que $[[A, B], A + B] = 0$. Devido a esses fatos, podemos evocar a utilíssima fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff³² (vide equação (10.4), página 456),³³ que afirma neste caso que $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A, B]}$. Como os operadores $A+B$ e $[A, B]$ formalmente comutam, escrevemos $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A, B]}$. Prove disso e dos demais fatos acima que $e^{tL} = e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]} = e^A e^{-\frac{1}{2}[A, B]} e^B = e^{A-\frac{1}{2}[A, B]} e^B$, ou seja,

$$\begin{aligned} e^{tL} &= \exp\left(t \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q}\right) \exp\left(t F_0 \frac{\partial}{\partial p}\right) \exp\left(t^2 \frac{F_0}{2m} \frac{\partial}{\partial q}\right) \\ &= \exp\left(t \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q}\right) \exp\left(t^2 \frac{F_0}{2m} \frac{\partial}{\partial q}\right) \exp\left(t F_0 \frac{\partial}{\partial p}\right) \\ &= \exp\left(\left(t \frac{p}{m} + t^2 \frac{F_0}{2m}\right) \frac{\partial}{\partial q}\right) \exp\left(t F_0 \frac{\partial}{\partial p}\right) . \end{aligned}$$

³²Henry Frederick Baker (1866–1956). John Edward Campbell (1862–1924). Felix Hausdorff (1868–1942).

³³Sua demonstração (para matrizes ou operadores limitados em espaços de Banach) é apresentada na Seção 10.5, página 483.

Verifique com isso que para uma função f infinitamente diferenciável definida no espaço de fases, teremos

$$\begin{aligned}
 f(q(t), p(t)) &= (e^{tL}f)(q_0, p_0) = \left(\exp \left(\left(t \frac{p}{m} + t^2 \frac{F_0}{2m} \right) \frac{\partial}{\partial q} \right) \exp \left(t F_0 \frac{\partial}{\partial p} \right) f \right) (q_0, p_0) \\
 &= f \left(q_0 + t \frac{p_0}{m} + t^2 \frac{F_0}{2m}, p_0 + t F_0 \right). \quad (23.201)
 \end{aligned}$$

Em particular, para $f(q, p) = q$ e $f(q, p) = p$, conclua que

$$q(t) = q_0 + \frac{p_0}{m}t + \frac{F_0}{2m}t^2 \quad \text{e} \quad p(t) = p_0 + F_0t,$$

respectivamente, fórmulas essas que — o leitor há de reconhecer — são muito bem conhecidas da Física elementar. ✱

• Evolução temporal em termos dos colchetes de Poisson

É claro pela definição (23.198) que

$$(Lf)(q, p) = \{ \mathcal{H}, f \}(q, p).$$

Com isso, a expressão (23.199) também escreve-se como

$$f(q(t), p(t)) = f(q_0, p_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \underbrace{\left\{ \mathcal{H}, \left\{ \mathcal{H}, \dots \left\{ \mathcal{H}, f \right\} \dots \right\} \right\}}_{n \text{ vezes}}(q_0, p_0). \quad (23.202)$$

Essa expressão fornece a evolução temporal da função f em termos de uma série infinita contendo colchetes de Poisson múltiplos com o Hamiltoniano. Ela pode ser usada tanto na obtenção de propriedades gerais do movimento quanto na solução de certos problemas gentis, como aqueles indicados no Exercício E. 23.32, abaixo, ou no Exercício E. 23.42, página 1212 (oscilador harmônico simples).

Não discutiremos aqui, todavia, sob quais condições gerais a série em (23.202) é convergente e para quais valores de $|t - t_0|$ isso se dá. A questão de convergência é, porém, uma questão matemática importante para que possamos realmente validar a solução expressa em (23.202). O Exercício E. 23.43, página 1212, exhibe casos onde a solução expressa em (23.202) é válida para todo t e casos onde ela é válida apenas em um intervalo finito de valores de t .

Há alguns problemas relativamente simples que podem ser resolvidos com uso da expansão (23.202), como mostra o próximo exercício.

E. 23.32 *Exercício.* Obtenha, com o uso de (23.202), a posição como função do tempo, $q(t)$, para os seguintes sistemas elementares: 1^o ponto material livre de massa m em uma dimensão; 2^o ponto material de massa m sob uma força F_0 , constante, em uma dimensão.

Sugestões. constate que se $f(q, p) = q$, então no primeiro e no segundo problemas a série em (23.202) tem um número finito de termos não-nulos. No primeiro caso, $\underbrace{\{ \mathcal{H}, \{ \mathcal{H}, \dots \{ \mathcal{H}, q \} \dots \} \}}_{n \text{ vezes}}$ anula-se para todo $n \geq 2$ e, no segundo caso, para $n \geq 3$. ✱

No Exercício dirigido E. 23.42, página 1212, mostramos como o problema do oscilador harmônico unidimensional pode ser resolvido com uso de (23.202). No Exercício dirigido E. 23.43, página 1212, discutimos um problema um tanto menos trivial que também pode ser resolvido com uso da expansão (23.202).

23.5.3.1 Transformações Canônicas

Transformações canônicas são um tipo especial de transformação de simetria no espaço de fases exibidas por sistemas mecânicos. A expressão “transformação de simetria” talvez seja aqui um abuso de linguagem, mas no que segue tentaremos esclarecer em que sentido ela deve ser entendida. A melhor abordagem desse tema faz uso da linguagem de formas diferenciais e da Geometria Diferencial, como adotada em textos como [15] e [2], mas não usaremos essa linguagem na corrente versão dessas Notas, pois isso multiplicaria as exigências matemáticas para um estudante ainda não suficientemente avançado.

• Alguma notação

Vamos iniciar essa discussão introduzindo uma notação conveniente. Localmente, os pontos do espaço de fase de um sistema mecânico com n graus de liberdade são descritos por $2n$ coordenadas $(q, p) \equiv (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Vamos designar por X a $2n$ -upla $\begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ composto pelas $2n$ componentes do espaço de fase $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$.

Está claro que $X^i = q^i$ e $X^{n+i} = p_i$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Se f é uma função diferenciável definida no espaço de fase, denotamos por $\nabla_X f$ o gradiente $2n$ -dimensional de f nas coordenadas X . Assim, em componentes, temos para cada $i = 1, \dots, n$: $(\nabla_X f)_i = \frac{\partial f}{\partial X^i} = \frac{\partial f}{\partial q^i}$ e $(\nabla_X f)_{i+n} = \frac{\partial f}{\partial X^{i+n}} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$. Assim, na forma de um vetor-coluna, temos

$$\nabla_X f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial q^n} \\ \frac{\partial f}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial p_n} \end{pmatrix}.$$

Vamos também definir uma matriz $2n \times 2n$, denotada por J ou por J_{2n} , através da seguinte representação em blocos:

$$J \equiv J_{2n} := \begin{pmatrix} 0_n & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0_n \end{pmatrix}, \tag{23.203}$$

onde $\mathbb{1}_n \equiv \mathbb{1}$ é a matriz identidade $n \times n$ e $0_n \equiv 0$ é a matriz $n \times n$ identicamente nula. Por exemplo, para $n = 1$ temos $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, para $n = 2$ temos $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ etc.

E. 23.33 Exercício. Mostre que a matriz J_{2n} definida em (23.203) possui as seguintes propriedades:

$$J_{2n}^2 = -\mathbb{1}_{2n}, \quad J_{2n}^T = -J_{2n}, \quad J_{2n} = J_2 \otimes \mathbb{1}_n \quad \text{e} \quad \det J_{2n} = 1.$$

Sugestões. A prova da afirmação que $\det J_{2n} = 1$ pode ser realizada por meio de uso repetido da expansão de determinantes em linhas ou colunas (relações (9.21) ou (9.22), página 360), ou observando que J_{2n} pode ser escrita como o produto tensorial $J_{2n} = J_2 \otimes \mathbb{1}_n$. Pela regra (9.162), página 447, segue disso que $\det J_{2n} = (\det J_2)^n (\det \mathbb{1}_n)^2$ e como $\det J_2 = 1$, segue que $\det J_{2n} = 1$. Produtos tensoriais de matrizes são tratados na Seção 9.10, página 446. ✦

Doravante, denotaremos J_{2n} por J , salvo se houver perigo de confusão.

Com a notação acima as equações de Hamilton do sistema mecânico que consideramos, ou seja, o sistema de equações $\dot{q}^i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$ e $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i}$, $i = 1, \dots, n$, podem ser escritas como

$$\dot{X}(t) = J \left(\nabla_X \mathcal{H} \right) (X(t)). \tag{23.204}$$

Verifique! Essa notação não foi introduzida meramente por ser sintética, mas por tornar mais transparentes algumas das manipulações que faremos.

Ela é útil, por exemplo, na representação de colchetes de Poisson. Sejam $f(q, p)$ e $g(q, p)$ duas funções diferenciáveis definidas no espaço de fase. Denotemos por $\{f, g\}_X$ seu colchetes de Poisson nas coordenadas X , definido por $\{f, g\}_X = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$. Então, podemos escrever

$$\{f, g\}_X = - \left(\nabla_X f \right)^T J \left(\nabla_X g \right). \tag{23.205}$$

A prova segue imediatamente da simples observação que o produto $J \left(\nabla_X g \right)$ pode ser representado em forma vetorial

como

$$J\nabla_X g := \begin{pmatrix} 0_n & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial q^n} \\ \frac{\partial g}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_n} \\ -\frac{\partial g}{\partial q^1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial g}{\partial q^n} \end{pmatrix}.$$

E. 23.34 Exercício. Mostre que os colchetes de Poisson canônicos

$$\{q^i, q^j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0 \quad \text{e} \quad \{p_i, q^j\} = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\},$$

podem ser escritos de maneira compacta como

$$\{X^a, X^b\} = -J_{ab}, \quad a, b \in \{1, \dots, 2n\}, \tag{23.206}$$

onde J_{ab} é o elemento de matriz ab da matriz J . ✦

• **Transformações de coordenadas no espaço de fase**

A descrição dos pontos do espaço de fase pode ser feita por outras coordenadas que não as coordenadas (q, p) que usamos acima. Consideremos um novo sistema (Q, P) que permita descrever localmente pontos do espaço de fase, de sorte que as novas coordenadas possam ser obtidas univocamente e de forma diferenciável das anteriores e vice-versa. Isso significa dizer as funções

$$Q^i(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) \quad \text{e} \quad P_i(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

são diferenciáveis, assim como suas inversas

$$q^i(Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n) \quad \text{e} \quad p_i(Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Analogamente ao vetor X , denotemos por Y o vetor-coluna composto pelas novas coordenadas, ou seja, Y é o vetor-coluna com $2n$ componentes dadas por $Y^i = Q^i$ e $Y^{n+i} = P_i$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Definamos agora a matriz Jacobiana da transformação $X \rightarrow Y$, como sendo a matriz \mathcal{J} cujos elementos de matriz são $(\mathcal{J})_{ab} := \frac{\partial Y^a}{\partial X^b}$. Por exemplo, no caso $n = 2$,

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y^1}{\partial X^1} & \frac{\partial Y^1}{\partial X^2} & \frac{\partial Y^1}{\partial X^3} & \frac{\partial Y^1}{\partial X^4} \\ \frac{\partial Y^2}{\partial X^1} & \frac{\partial Y^2}{\partial X^2} & \frac{\partial Y^2}{\partial X^3} & \frac{\partial Y^2}{\partial X^4} \\ \frac{\partial Y^3}{\partial X^1} & \frac{\partial Y^3}{\partial X^2} & \frac{\partial Y^3}{\partial X^3} & \frac{\partial Y^3}{\partial X^4} \\ \frac{\partial Y^4}{\partial X^1} & \frac{\partial Y^4}{\partial X^2} & \frac{\partial Y^4}{\partial X^3} & \frac{\partial Y^4}{\partial X^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q^1}{\partial q^1} & \frac{\partial Q^1}{\partial q^2} & \frac{\partial Q^1}{\partial p_1} & \frac{\partial Q^1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial Q^2}{\partial q^1} & \frac{\partial Q^2}{\partial q^2} & \frac{\partial Q^2}{\partial p_1} & \frac{\partial Q^2}{\partial p_2} \\ \frac{\partial P_1}{\partial q^1} & \frac{\partial P_1}{\partial q^2} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \frac{\partial P_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial q^1} & \frac{\partial P_2}{\partial q^2} & \frac{\partial P_2}{\partial p_1} & \frac{\partial P_2}{\partial p_2} \end{pmatrix}.$$

Sabemos também que a inversa \mathcal{J}^{-1} da matriz Jacobiana tem como elementos de matriz $(\mathcal{J}^{-1})_{ab} = \frac{\partial X^a}{\partial Y^b}$ pois, de fato, com essas definições, e com uso da regra da cadeia,

$$\sum_{b=1}^{2n} (\mathcal{J}^{-1})_{ab} (\mathcal{J})_{bc} = \sum_{b=1}^{2n} \frac{\partial X^a}{\partial Y^b} \frac{\partial Y^b}{\partial X^c} = \frac{\partial X^a}{\partial X^c} = \delta_{ac},$$

confirmando que $\mathcal{J}^{-1}\mathcal{J} = \mathbb{1}_{2n}$.

Seja $f(q, p)$ uma função diferenciável definida no espaço de fase. Seja uma transformação de coordenadas diferenciável $X \equiv (q, p) \rightarrow (Q, P) \equiv Y$ no espaço de fases. Defina-se $\hat{f}(Q, P) := f(q(Q, P), p(Q, P))$, que representa a função f e g nas novas coordenadas. Pela regra da cadeia, sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial X^i} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial Y^j}{\partial X^i} \frac{\partial \hat{f}}{\partial Y^j}.$$

Com uso da matriz Jacobiana podemos escrever isso como

$$\nabla_X f = \mathcal{J}^T \nabla_Y \hat{f}. \tag{23.207}$$

Verifique!

• **Transformações canônicas de coordenadas no espaço de fase**

Denotemos por $\widehat{\mathcal{H}}$ o Hamiltoniano nas novas coordenadas:

$$\widehat{\mathcal{H}}(Q, P) = \mathcal{H}(q(Q, P), p(Q, P)).$$

A pergunta que nos colocamos é: sob quais condições as equações de movimento do sistema mecânico possuem, quando expressas nas novas coordenadas, a forma Hamiltoniana

$$\dot{Y}(t) = J \left(\nabla_Y \widehat{\mathcal{H}} \right) (Y(t)),$$

ou, mais explicitamente, $\dot{Q}^i(t) = \frac{\partial \widehat{\mathcal{H}}}{\partial P_i}$ e $\dot{P}_i(t) = -\frac{\partial \widehat{\mathcal{H}}}{\partial Q^i}$, $i = 1, \dots, n$?

Note-se ao colocarmos essa questão não estamos a perguntar quando as equações dinâmicas permanecem invariantes, mas sim quando elas descrevem um novo sistema Hamiltoniano.

Transformações de coordenadas no espaço de fase que satisfaçam essas condições são denominadas *transformações canônicas*. Uma transformação canônica representa um certo tipo de transformação de simetria onde o caráter Hamiltoniano da evolução é preservado.

Vamos procurar saber quando transformações de coordenadas no espaço de fase são canônicas. Pela regra da cadeia, sabemos que

$$\dot{X}_i = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial X^i}{\partial Y^j} \dot{Y}_j. \tag{23.208}$$

Fazendo uso da matriz Jacobiana e de (23.207), temos, portanto, $\dot{X} = \mathcal{J}^{-1} \dot{Y}$ e $\nabla_X \mathcal{H} = \mathcal{J}^T \nabla_Y \widehat{\mathcal{H}}$. Verifique! Assim, as equações de Hamilton (23.204) implicam

$$\dot{Y} = \mathcal{J} J \mathcal{J}^T \left(\nabla_Y \widehat{\mathcal{H}} \right),$$

onde se conclui que uma condição necessária e suficiente para que as equações dinâmicas nas novas variáveis sejam Hamiltonianas é que a matriz Jacobiana \mathcal{J} da transformação $X \rightarrow Y$ satisfaça

$$\mathcal{J} J \mathcal{J}^T = J. \tag{23.209}$$

Nota. Uma matriz $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 2n)$ é dita ser uma *matriz simplética* se satisfizer $A J A^T = J$. Uma tal matriz preserva a forma simplética definida por J . Vide página 3.1.1 e Lema 3.1, página 221. Transformações canônicas em espaços de fase são modernamente denominadas *simplectomorfismos* na literatura matemática. ♣

E. 23.35 *Exercício.* Para transformações canônicas as novas variáveis Q e P não têm necessariamente o caráter de coordenadas espaciais e momenta, respectivamente, que naturalmente associamos a elas. O seguinte exemplo é significativo: mostre que as transformações $Q^i = p_i$ e $P_i = -q^i$, $i = 1, \dots, n$, são canônicas. ✦

E. 23.36 *Exercício.* Seja $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 2n)$ uma matriz simplética. Mostre que a transformação linear $Y = AX$ é uma transformação canônica. ✦

• **Transformações canônicas dependentes do tempo**

Comentamos aqui sem maiores detalhes que a condição (23.209) é também válida no caso de transformações canônicas dependentes do tempo. Não apresentaremos a demonstração dessa afirmação na presente versão destas Notas e remetemos o estudante à literatura básica listada à página 1182.

• **Transformações canônicas e colchetes de Poisson**

Uma característica importante de transformações canônicas é preservar colchetes de Poisson. Isso é o conteúdo da seguinte proposição:

Proposição 23.3 *Sejam $f(q, p)$ e $g(q, p)$ duas funções diferenciáveis definidas no espaço de fase. Seja uma transformação de coordenadas diferenciável $X \equiv (q, p) \rightarrow (Q, P) \equiv Y$ no espaço de fases. Defina-se $\hat{f}(Q, P) := f(q(Q, P), p(Q, P))$ e $\hat{g}(Q, P) := g(q(Q, P), p(Q, P))$, que representam as funções f e g , respectivamente, nas novas coordenadas. Então, se a transformação $X \rightarrow Y$ for canônica, vale*

$$\{\hat{f}, \hat{g}\}_Y = \{f, g\}_X. \quad (23.210)$$

Em palavras, isso diz que os colchetes de Poisson são preservados por transformações canônicas. \square

Logo abaixo trataremos de uma recíproca da afirmação acima.

Prova da Proposição 23.3. Por (23.205) temos

$$\begin{aligned} \{f, g\}_X &= -(\nabla_X f)^T J(\nabla_X g) \stackrel{(23.207)}{=} -(\mathcal{J}^T \nabla_Y \hat{f})^T J(\mathcal{J}^T \nabla_Y \hat{g}) = -(\nabla_Y f)^T \mathcal{J} J \mathcal{J}^T (\nabla_Y \hat{g}) \\ &\stackrel{(23.209)}{=} -(\nabla_Y \hat{f})^T J(\nabla_Y \hat{g}) = \{\hat{f}, \hat{g}\}_Y, \end{aligned}$$

completando a prova. \blacksquare

A seguinte proposição é de importância fundamental no estudo das transformações canônicas e suas consequências:

Proposição 23.4 *Uma transformação de coordenadas diferenciável $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ no espaço de fases é uma transformação canônica se e somente se valerem*

$$\{Q^i, Q^j\}_X = 0, \quad \{P_i, P_j\}_X = 0 \quad e \quad \{P_i, Q^j\}_X = \delta_{ij}, \quad (23.211)$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$, ou seja, se e somente se ela preservar os colchetes de Poisson (no sistema de coordenadas $X!$) de posições e momentos generalizados. \square

Nota. Observemos que, pela definição dos colchetes de Poisson, é evidente que

$$\{Q^i, Q^j\}_Y = 0, \quad \{P_i, P_j\}_Y = 0 \quad e \quad \{P_i, Q^j\}_Y = \delta_{ij}.$$

Essas relações não devem ser confundidos com (23.211). Na notação compacta de (23.206), essas relações se escrevem como

$$\{Y^a, Y^b\}_Y = -J_{ab}, \quad a, b \in \{1, \dots, 2n\}. \quad (23.212)$$

Com essa notação, as relações (23.211) equivalem a $\{Y^a, Y^b\}_X = -J_{ab}$, para todos $a, b \in \{1, \dots, 2n\}$. \clubsuit

Prova da Proposição 23.4. Temos que $\hat{Y}_a = Y^a$ para todo $a \in \{1, \dots, 2n\}$. Logo, se a transformação for canônica, a Proposição 23.3 garante que

$$-J_{ab} \stackrel{(23.212)}{=} \{Y^a, Y^b\}_Y = \{\hat{Y}_a, \hat{Y}_b\}_Y \stackrel{(23.210)}{=} \{Y^a, Y^b\}_X,$$

o que equivale a provar (23.211).

Vamos agora supor válidas as relações (23.211). Na notação compacta de (23.206), isso significa que supomos $\{Y^a, Y^b\}_X = -J_{ab}$ para todos $a, b \in \{1, \dots, 2n\}$. Sabemos que, de modo geral, vale

$$\{f, g\}_X = -(\nabla_X f)^T J(\nabla_X g) = -(\mathcal{J}^T \nabla_Y \hat{f})^T J(\mathcal{J}^T \nabla_Y \hat{g}) = -(\nabla_Y \hat{f})^T (\mathcal{J} J \mathcal{J}^T) (\nabla_Y \hat{g}).$$

Assim, para todos $a, b \in \{1, \dots, 2n\}$ vale

$$-J_{ab} = \{Y^a, Y^b\}_X = -(\nabla_Y Y^a)^T (\mathcal{J} J \mathcal{J}^T) (\nabla_Y Y^b) = -(\mathcal{J} J \mathcal{J}^T)_{ab},$$

provando que $\mathcal{J} J \mathcal{J}^T = J$ e, portanto, que a transformação é canônica, como desejávamos estabelecer. Acima, usamos o fato evidente que a i -ésima componente do vetor $(\nabla_Y Y^a)$ vale $\delta_{i,a}$. \blacksquare

• **Conservação de volumes por transformações canônicas**

Seja R uma região do espaço de fases, que assumimos ser compacta. Seu volume em um sistema de coordenadas (q, p) será dado por $|R| = \int_R dq^1 \cdots dq^n dp_1 \cdots dp_n$. Por uma transformação de coordenadas $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ essa região será levada bijetivamente em uma outra região R' , cujo volume nas novas coordenadas será dado por

$$|R'| = \int_{R'} dQ^1 \cdots dQ^n dP_1 \cdots dP_n = \int_R |\det(\mathcal{J})| dq^1 \cdots dq^n dp_1 \cdots dp_n,$$

sendo \mathcal{J} , como antes, a matriz Jacobiana da transformação $(q, p) \rightarrow (Q, P)$. Se a transformação em questão for canônica, teremos $\mathcal{J}\mathcal{J}^T = J$. Tomando-se o determinante de ambos os lados, teremos que $\det(\mathcal{J})^2 = 1$, o que implica $|\det(\mathcal{J})| = 1$. Assim, $|R'| = \int_R |\det(\mathcal{J})| dq^1 \cdots dq^n dp_1 \cdots dp_n = \int_R dq^1 \cdots dq^n dp_1 \cdots dp_n = |R|$.

Concluimos disso que o volume de uma região do espaço de fase permanece inalterado sob uma transformação canônica. Essa fato será relevante adiante quando discutirmos o Teorema de Liouville.

• **Funções geratrizes de transformações canônicas**

A dedução variacional das equações de Hamilton discutida na Seção 23.5.2.1, página 1194, permite uma abordagem das transformações canônicas a qual oferece algumas vantagens.

Como vimos, as equações de Hamilton equivalem ao princípio variacional $\delta \int_{t_1}^{t_2} ((\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i) - \mathcal{H}(q, p, t)) dt = 0$. Se uma transformação canônica conduz igualmente a equações de Hamilton nas novas variáveis, devemos ter a igualdade

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i \right) - \mathcal{H}(q, p, t) = \alpha \left[\left(\sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}^i \right) - \mathcal{H}'(Q, P, t) \right] + \frac{dF_1}{dt}, \tag{23.213}$$

onde α é uma constante real e F_1 uma função, em princípio arbitrária, definida no espaço de fases. Isso se justifica por implicar na equivalência dos princípios variacionais

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i \right) - \mathcal{H}(q, p, t) \right) dt = 0 \iff \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}^i \right) - \mathcal{H}'(Q, P, t) \right) dt = 0. \tag{23.214}$$

Alguns autores chegam a tomar (23.213) como a definição mesma de transformações canônicas, mas não seguimos essa lógica aqui.

A constante α em (23.213) é inócua e pode ser absorvida na definição de P, Q e \mathcal{H}' , de modo que, sem perda de generalidade, tomaremos $\alpha = 1$. A derivada total $\frac{dF_1}{dt}$, por sua vez, é relevante. Lembremos que um tal termo sempre pode ser incluído em (23.213) pois a variação de uma derivada total é sempre nula (pois as variações são sempre feitas de sorte a manter fixos os pontos localizados nos limites de integração, quer no espaço de fase quer no de configurações).

De forma geral, F_1 pode ser considerada como uma função dos quatro conjuntos de variáveis q, p, Q, P e eventualmente também de t . Como essas não são independentes (pois as coordenadas (q, p) podem ser bijetivamente mapeadas nas coordenadas (Q, P)), é suficiente considerar apenas dois conjuntos de coordenadas independentes. Se tomarmos F_1 como função de q e de Q , a relação (23.213) (já com $\alpha = 1$) pode ser reescrita como

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i \right) - \mathcal{H}(q, p, t) = \left(\sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}^i \right) - \mathcal{H}'(Q, P, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial q^i} \dot{q}^i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial Q^i} \dot{Q}^i + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{23.215}$$

Supondo a validade dessa relação para todas as possíveis trajetórias do sistema mecânico considerado, concluimos que devem valer as seguintes relações:

$$\frac{\partial F_1}{\partial q^i} = p_i, \tag{23.216}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q^i} = -P_i \quad \text{e} \tag{23.217}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \mathcal{H}'(Q, P, t) - \mathcal{H}(q, p, t). \tag{23.218}$$

Funções como F_1 desempenham um papel relevante no estudo de transformações canônicas e são denominadas *funções geratrizes das transformações canônicas*.

Funções geratrizes não são únicas, pois podemos modificá-las, por exemplo, alterando as variáveis das quais dependem, da forma que ilustraremos a seguir. Explorando o fato que

$$\sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}^i = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n P_i Q^i \right) - \sum_{i=1}^n \dot{P}_i Q^i ,$$

podemos reescrever (23.213) na forma

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i \right) - \mathcal{H}(q, p, t) = - \left(\sum_{i=1}^n Q^i \dot{P}_i \right) - \mathcal{H}'(Q, P, t) + \frac{dF_2}{dt} , \tag{23.219}$$

onde definimos

$$F_2 := F_1 + \sum_{i=1}^n P_i Q^i .$$

Agora, tomando $F_2 \equiv F_2(q, P, t)$ como função de q e de P e t , escrevemos

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i \right) - \mathcal{H}(q, p, t) = - \left(\sum_{i=1}^n Q^i \dot{P}_i \right) - \mathcal{H}'(Q, P, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial q^i} \dot{q}^i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} , \tag{23.220}$$

o que nos permite identificar as relações

$$\frac{\partial F_2}{\partial q^i} = p_i ,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q^i \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = \mathcal{H}'(Q, P, t) - \mathcal{H}(q, p, t) .$$

Acima, as variáveis Q e p são tomadas como funções de q e P .

Naturalmente, podemos efetuar diversas outras transformações desse tipo, obtendo funções geratrizes F_3, F_4 etc., mas, como exemplo, as funções geratrizes acima bastam.

Como veremos, uma das vantagens do uso de funções geratrizes reside no fato de que é por vezes possível identificar uma função satisfazendo as relações acima para uma dada transformação, o que nos leva à conclusão que essa transformação é canônica.

• **O funcional ação como função definida no espaço de configurações**

Na expressão (23.149), página 1182, definimos a noção de ação associada a uma curva γ que une pontos $q(t_1)$ e $q(t_2)$ em instantes de tempo distintos t_1 e t_2 , respectivamente. Vamos agora explorar algumas propriedades dessa definição estudando sua dependência com relação aos pontos inicial e final quando a curva γ é uma trajetória real do sistema mecânico. Essa discussão é importante por duas razões: por nos apresentar a uma importante classe de transformações canônicas e por nos conduzir a uma equação importante, a equação de Hamilton-Jacobi, porta de entrada de mais um formalismo da Mecânica Clássica.

Sejam fixos os instantes de tempo inicial \underline{t} e a posição inicial $q(\underline{t})$, que doravante denotaremos por \underline{t} e \underline{q} , respectivamente. Denotemos também o instante final por \bar{t} e a posição final por \bar{q} . Seja $S(\bar{q}, \bar{t})$ a ação como função do pontos e do instante de tempo finais:

$$S(\bar{q}, \bar{t}) = \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \mathcal{L}(q(t'), \dot{q}(t'), t') dt' , \tag{23.221}$$

com a integral tomada ao longo da curva que conecta $(\underline{q}, \underline{t})$ a (\bar{q}, \bar{t}) ao longo da trajetória que minimiza a ação, ou seja, que satisfaz as equações de Euler-Lagrange.

Se fixarmos \bar{t} e variarmos \bar{q} de uma quantidade $\Delta\bar{q}$, a trajetória que conecta $(\underline{q}, \underline{t})$ a $(\bar{q} + \Delta\bar{q}, \bar{t})$ ao longo da trajetória que minimiza a ação será alterada de $q(t')$ para $q(t') + \delta q(t')$, com $\delta q(\underline{t}) = 0$ e $\delta q(\bar{t}) = \Delta\bar{q}$. A diferença entre as duas ações será, portanto,

$$S(\bar{q} + \Delta\bar{q}, \bar{t}) - S(\bar{q}, \bar{t}) = \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \left[\mathcal{L}(q(t') + \delta q(t'), \dot{q}(t') + \delta \dot{q}(t'), t') - \mathcal{L}(q(t'), \dot{q}(t'), t') \right] dt'.$$

Assim,

$$S(\bar{q} + \Delta\bar{q}, \bar{t}) - S(\bar{q}, \bar{t}) = \sum_{i=1}^n \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \delta q^i(t') + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i(t') \right] dt' + O(\|\Delta\bar{q}\|^2).$$

Por integração por partes, teremos

$$\int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i(t') dt' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}(\bar{t}) \underbrace{\delta q^i(\bar{t})}_{=\Delta\bar{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}(\underline{t}) \underbrace{\delta q^i(\underline{t})}_{=0} - \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \right) \delta q^i(t') dt'.$$

Definindo $\bar{p} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}(\bar{t})$, o momento generalizado no instante \bar{t} , escrevemos

$$S(\bar{q} + \Delta\bar{q}, \bar{t}) - S(\bar{q}, \bar{t}) = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \Delta\bar{q}^i + \sum_{i=1}^n \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}(t') - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \right)(t') \right] \delta q^i(t') dt' + O(\|\Delta\bar{q}\|^2).$$

O termo entre $[\dots]$ anula-se sob a hipótese supracitada de que a trajetória satisfaz as equações de Euler-Lagrange. Logo, concluímos dessa análise que

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{q}^i}(\bar{q}, \bar{t}) = \bar{p}_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (23.222)$$

Além disso, temos também da própria definição (23.221)

$$\frac{d}{dt} S(\bar{q}(\bar{t}), \bar{t}) = \mathcal{L}(\bar{q}(\bar{t}), \dot{\bar{q}}(\bar{t}), \bar{t}).$$

Como

$$\frac{d}{dt} S(\bar{q}(\bar{t}), \bar{t}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial \bar{q}^i}(\bar{q}(\bar{t}), \bar{t}) \dot{\bar{q}}^i(\bar{t}) + \frac{\partial S}{\partial \bar{t}}(\bar{q}(\bar{t}), \bar{t}),$$

concluímos que

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{t}}(q, \bar{t}) = \mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \bar{t}) - \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \dot{\bar{q}}^i = -\mathcal{H}(\bar{q}, \bar{p}, \bar{t}). \quad (23.223)$$

Obtivemos em (23.222) e em (23.223) as derivadas parciais primeiras de $S(\bar{q}, \bar{t})$. A equação (23.223) será particularmente relevante quando discutirmos o formalismo de Hamilton-Jacobi, mais adiante.

• **A ação como função das coordenadas de ambos os extremos da integração que a define**

Podemos proceder de forma análoga e considerar também a dependência da ação com os pontos iniciais \underline{t} e \underline{q} . Denotando a ação por $S(\underline{q}, \underline{t}, \bar{q}, \bar{t})$ temos adicionalmente, de forma totalmente análoga ao que expusemos acima,

$$S(\underline{q} + \Delta\underline{q}, \underline{t}, \bar{q}, \bar{t}) - S(\underline{q}, \underline{t}, \bar{q}, \bar{t}) = \sum_{i=1}^n \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \delta q^i(t') + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i(t') \right] dt' + O(\|\Delta\underline{q}\|^2).$$

Por integração por partes, teremos

$$\int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i(t') dt' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}(\bar{t}) \underbrace{\delta q^i(\bar{t})}_{=0} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}(\underline{t}) \underbrace{\delta q^i(\underline{t})}_{=\Delta\underline{q}^i} - \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \right) \delta q^i(t') dt'.$$

Definindo $\underline{p} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{q}}}(t)$, o momento generalizado no instante \bar{t} , escrevemos

$$S(\bar{q} + \Delta \underline{q}, \bar{t}) - S(\bar{q}, \bar{t}) = - \sum_{i=1}^n \underline{p}_i \Delta q^i + \sum_{i=1}^n \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}(t') - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right)(t') \right] \delta q^i(t') dt' + O(\|\Delta \bar{q}\|^2).$$

O termo entre $[\dots]$ anula-se sob a hipótese supracitada de que a trajetória satisfaz as equações de Euler-Lagrange. Dessa forma, concluímos que

$$\frac{\partial S}{\partial \underline{q}^i}(\underline{q}, \underline{t}, \bar{q}, \bar{t}) = \underline{p}_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (23.224)$$

Para a derivada temporal porém, há uma outra diferença de sinal, pois dependência da integral que define a ação em \underline{t} está no limite inferior de integração. Portanto,

$$\frac{d}{dt} S(\underline{q}(t), t, \bar{q}, \bar{t}) = -\mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t).$$

Como

$$\frac{d}{dt} S(\underline{q}(t), t, \bar{q}, \bar{t}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial \underline{q}^i}(\underline{q}(t), t, \bar{q}, \bar{t}) \dot{q}^i(t) + \frac{\partial S}{\partial t}(\underline{q}(t), t, \bar{q}, \bar{t}),$$

concluímos que

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\underline{q}, t, \bar{q}, \bar{t}) = -\mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + \sum_{i=1}^n \underline{p}_i \dot{q}^i = \mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p}, t). \quad (23.225)$$

Vamos agora escrever $\underline{t} = t$ e $\bar{t} = \tau + t$, definindo duas novas variáveis temporais $t \equiv \underline{t}$ e $\tau \equiv \bar{t} - \underline{t}$. A ação fica $S(\underline{q}(t), t, \bar{q}(\tau + t), \tau + t)$ e valerá:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S(\underline{q}(t), t, \bar{q}(\tau + t), \tau + t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial \underline{q}^i}(\underline{q}(t), t, \bar{q}(\tau + t), \tau + t) \dot{q}^i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial \bar{q}^i}(\underline{q}(t), t, \bar{q}(\tau + t), \tau + t) \dot{\bar{q}}^i(t + \tau) \\ &\quad + \frac{\partial S}{\partial t}(\underline{q}(t), t, \bar{q}(\tau + t), \tau + t) + \frac{\partial S}{\partial \tau}(\underline{q}(t), t, \bar{q}(\tau + t), \tau + t) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\underline{p}_i(t) \dot{q}^i(t) - \bar{p}_i(t) \dot{\bar{q}}^i(t) \right) + \mathcal{H}(\underline{q}(t), \underline{p}(t), t) - \mathcal{H}(\bar{q}(\tau + t), \bar{p}(\tau + t), \tau + t). \end{aligned}$$

Segue disso que

$$\frac{\partial S}{\partial \underline{q}^i} = \underline{p}_i(t), \quad \frac{\partial S}{\partial \bar{q}^i} = -\bar{p}_i(t + \tau), \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

e

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{H}(\underline{q}(t), \underline{p}(t), t) - \mathcal{H}(\bar{q}(\tau + t), \bar{p}(\tau + t), \tau + t).$$

Note-se, porém, que se o Lagrangiano não depender explicitamente do tempo, a conservação do Hamiltoniano implica que $\mathcal{H}(\underline{q}(t), \underline{p}(t), t) = \mathcal{H}(\bar{q}(\tau + t), \bar{p}(\tau + t), \tau + t)$. Nesse caso, portanto, teremos

$$\frac{\partial S}{\partial \underline{q}^i} = \underline{p}_i(t), \quad \frac{\partial S}{\partial \bar{q}^i} = -\bar{p}_i(t + \tau), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Comparando cuidadosamente essa expressão a (23.215) e (23.216)-(23.218), concluímos que, no caso em que o Lagrangiano não depende explicitamente do tempo, a ação S é a função geratriz de uma transformação canônica entre as variáveis $(\underline{q}, \underline{p})$ e as variáveis $(\bar{q}_\tau, \bar{p}_\tau)$ — as coordenadas $(\underline{q}, \underline{p})$ evoluídas de um tempo $\tau > 0$ (aqui $\tau > 0$, pois $\underline{t} < \bar{t}$). Concluímos disso que a evolução temporal de um sistema Hamiltoniano é uma transformação canônica. A consequência mais importante dessa revelação é o Teorema de Liouville, o qual discutiremos a seguir.

Comentemos antes que a afirmação que fizemos acima pode ser demonstrada de forma mais rápida, ainda que carente de rigor, da seguinte forma.

Para $\tau > 0$ fixo, defina-se $Q^i = q^i(\tau, q_0, p_0)$ e $P_i = p_i(\tau, q_0, p_0)$, onde q_0 e p_0 são condições iniciais em $t = 0$ da evolução de um sistema mecânico. Na notação compacta $Y^a = X^a(\tau, X_0)$, $a \in \{1, \dots, 2n\}$. Temos,

$$\{Y^a, Y^b\}_X(\tau) = \underbrace{\{Y^a, Y^b\}_X(0)}_{=-J_{ab}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \underbrace{\left\{ \mathcal{H}, \left\{ \mathcal{H}, \dots \left\{ \mathcal{H}, \{Y^a, Y^b\} \dots \right\} \right\} \right\}}_{n \text{ vezes}}(q_0, p_0). \tag{23.226}$$

Sucedo que $\{Y^a, Y^b\}_X(q_0, p_0)$ é constante e igual a $-J_{ab}$. Assim, seus colchetes de Poisson com \mathcal{H} são nulos e, portanto, apenas o primeiro termo acima sobrevive, fornecendo $\{Y^a, Y^b\}_X(\tau) = -J_{ab}$. Logo, pela Proposição 23.4, a transformação $(q_0, p_0) \rightarrow (q(\tau, q_0, p_0), p(\tau, q_0, p_0))$ é canônica para todo τ .

O problema matemático com essa demonstração gira em torno da convergência da série em (23.226), cujas condições não foram estabelecidas aqui.

• **O Teorema de Liouville**

Consideremos um sistema mecânico cujo Lagrangiano não depende explicitamente do tempo (e, portanto, o Hamiltoniano também não). Seja \mathcal{R} uma região de volume finito $|\mathcal{R}|$ do espaço de fases em um instante de tempo $t = 0$: $|\mathcal{R}| = \int_{\mathcal{R}} d^n q d^n p$. Após um intervalo de tempo τ , os pontos de \mathcal{R} evoluirão a um novo conjunto \mathcal{R}_τ do espaço de fases. Como a evolução temporal induz uma transformação canônica, concluímos da nossa discussão da página 1206 (que volumes no espaço de fase são conservados por transformações canônicas) que $|\mathcal{R}| = |\mathcal{R}_\tau|$, ou seja: *em sistemas mecânicos com um número finito de graus de liberdade em que o Lagrangiano (e, portanto, o Hamiltoniano) não depende explicitamente do tempo a evolução temporal preserva volumes no espaço de fases.*

Essa afirmação é conhecida como *Teorema de Liouville*³⁴ e desempenha um papel importante no estudo de propriedades qualitativas de sistemas Hamiltonianos, tais como a ergodicidade, caos, estabilidade etc.

³⁴Joseph Liouville (1809–1882).

23.6 Exercícios Adicionais

E. 23.37 *Exercício*. Obtenha o Lagrangiano associado ao pião de Lagrange em coordenadas definidas por ângulos de Euler e mostre que as equações de Euler-Lagrange assim obtidas coincidem com as equações de Euler (com torque externo). *Sugestão*: escreva as equações de Euler em termos dos ângulos de Euler e compare-as às correspondentes equações de Euler-Lagrange. Conte quantas vezes as palavras “Euler” e “Lagrange” aparecem no enunciado acima em sentidos diversos. *

E. 23.38 *Exercício*. Considere o movimento de um corpo rígido na ausência de forças e torques externos e com seu centro de massa parado. Considere um sistema de referência fixo no corpo tendo como eixos seus eixos principais de inércia. Escreva seu correspondente Lagrangiano usando ângulos de Euler. Obtenha as correspondentes equações de Euler-Lagrange e, usando-as, reobtenha as equações de Euler (23.103)–(23.105). *Sugestão*: escreva as equações de Euler em termos dos ângulos de Euler e compare-as às correspondentes equações de Euler-Lagrange. *

E. 23.39 *Exercício*. Escreva Hamiltoniano associado ao Exercício E. 23.38 e obtenha as correspondentes equações de Hamilton. Compare-as às equações de Euler (23.103)–(23.105). *

E. 23.40 *Exercício*. [Equações de Hamilton para o Pião de Lagrange]. Mostre que o Hamiltoniano associado ao pião de Lagrange, cujo Lagrangiano foi dado em (23.130) em termos de ângulos de Euler, é

$$\mathcal{H}(\theta, \varphi, \psi, p_\theta, p_\varphi, p_\psi) = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1(\sin \theta)^2} + Mgl \cos \theta. \quad (23.227)$$

Mostre que os momentos generalizados, expressos em termos das velocidades generalizadas, são:

$$p_\theta = I_1 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta, \quad p_\psi = I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}). \quad (23.228)$$

Obtenha de (23.227) as correspondentes equações de Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{I_1}, & \dot{p}_\theta &= \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)(p_\varphi \cos \theta - p_\psi)}{I_1(\sin \theta)^3} + Mgl \sin \theta, \\ \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I_1(\sin \theta)^2}, & \dot{p}_\varphi &= 0, \\ \dot{\psi} &= \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I_1(\sin \theta)^2} \cos \theta, & \dot{p}_\psi &= 0. \end{aligned} \quad (23.229)$$

*

E. 23.41 *Exercício*. [Pião de Lagrange sem Nutação]. Sob a luz das equações de Hamilton (23.229) é interessante analisar sob quais condições o movimento do pião de Lagrange pode ser livre de nutação. Se não ocorre nutação, devemos ter $\dot{\theta} = 0$ ao longo do movimento. Isso implica $\theta = \theta_0$, constante, e, por (23.229), $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ são também constantes, que denotaremos por $\dot{\varphi}_0$ e $\dot{\psi}_0$, respectivamente. Assim, a precessão e a rotação intrínseca se dão com velocidades angulares constantes. Além disso, devemos ter $p_\theta = 0$, o que implica (exceto no caso especial em que $\theta_0 = 0$ ou π)

$$(p_\varphi - p_\psi \cos \theta_0)(p_\varphi \cos \theta_0 - p_\psi) + MglI_1(1 - (\cos \theta_0)^2)^2 = 0. \quad (23.230)$$

Usando (23.228), verifique que essa condição equivale a

$$\dot{\varphi}_0^2(I_1 - I_3) \cos \theta_0 - \dot{\varphi}_0 I_3 \dot{\psi}_0 + Mgl = 0. \quad (23.231)$$

Encarando essa relação como uma equação algébrica de segundo grau para $\dot{\varphi}_0$ (o que pressupõe $(I_1 - I_3) \cos \theta_0 \neq 0$), mostre que as soluções são

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{I_3 \dot{\psi}_0 \pm \sqrt{I_3^2 \dot{\psi}_0^2 - 4Mgl(I_1 - I_3) \cos \theta_0}}{(I_1 - I_3) \cos \theta_0}. \quad (23.232)$$

Observe que as duas soluções são complexas caso $\dot{\psi}_0^2 < 4Mgl \frac{(I_1 - I_3)}{I_3^2} \cos \theta_0$. Nessa situação (rotação lenta em torno do eixo de simetria) um movimento sem nutação não é possível, portanto. Ele é possível, porém, se $\dot{\psi}_0^2 \geq 4Mgl \frac{(I_1 - I_3)}{I_3^2} \cos \theta_0$. No caso em

que $\dot{\psi}_0^2 = 4Mgl \frac{(I_1 - I_3)}{I_3^2} \cos \theta_0$ há exatamente uma solução real para a velocidade angular de precessão $\dot{\psi}_0$ e para o caso em que $\dot{\psi}_0^2 > 4Mgl \frac{(I_1 - I_3)}{I_3^2} \cos \theta_0$ há duas soluções reais para $\dot{\psi}_0$, para um mesmo θ_0 e um mesmo $\dot{\psi}_0$. Mostre que essas soluções são

$$\dot{\psi}_0 = \frac{I_3 \dot{\psi}_0 \pm \sqrt{I_3^2 \dot{\psi}_0^2 - 4Mgl(I_1 - I_3) \cos \theta_0}}{(I_1 - I_3) \cos \theta_0}.$$

Mostre que essas soluções em (23.232) têm sinais opostos no caso em que $(I_1 - I_3) \cos \theta_0 < 0$ e que ambas têm o sinal de $\dot{\psi}_0$ caso $(I_1 - I_3) \cos \theta_0 > 0$.

É de se notar que se $(I_1 - I_3) \cos \theta_0 < 0$, a condição $\dot{\psi}_0^2 > 4Mgl \frac{(I_1 - I_3)}{I_3^2} \cos \theta_0$ é satisfeita para qualquer valor de $\dot{\psi}_0$, inclusive para $\dot{\psi}_0 = 0$. Essa última observação é digna de nota. Se $\dot{\psi}_0 = 0$ e $(I_1 - I_3) \cos \theta_0 < 0$ as soluções para $\dot{\psi}_0$ são

$$\dot{\psi}_0 = \pm \sqrt{\frac{Mgl}{-(I_1 - I_3) \cos \theta_0}}.$$

Nessa situação, o movimento do pião é puramente precessional, sem nutação e sem rotação em torno do próprio eixo.

No caso em que $(I_1 - I_3) \cos \theta_0 = 0$ a relação (23.231) é uma equação algébrica de primeiro grau para $\dot{\psi}_0$, cuja solução é

$$\dot{\psi}_0 = \frac{Mgl}{I_3 \dot{\psi}_0},$$

pressupondo, naturalmente, que $\dot{\psi}_0 \neq 0$. ✦

E. 23.42 Exercício. Considere o Hamiltoniano do oscilador harmônico simples unidimensional $\mathcal{H}(q, p) = \frac{\mu_1}{2} p^2 + \frac{\mu_2}{2} q^2$, com $\mu_1 = 1/m$ e $\mu_2 = k$, como usual. Usando (23.202), vamos determinar a trajetória $q(t)$ a partir de condições iniciais (q_0, p_0) , fixadas em $t_0 = 0$.

Mostre que $\{\mathcal{H}, q\} = \mu_1 p$ e que $\{\mathcal{H}, p\} = -\mu_2 q$. Com isso, mostre por indução que

$$\underbrace{\left\{ \mathcal{H}, \left\{ \mathcal{H}, \dots \left\{ \mathcal{H}, q \right\} \dots \right\} \right\}}_{n \text{ vezes}} = \begin{cases} \mu_1 (-\mu_1 \mu_2)^{(n-1)/2} p, & \text{para } n \geq 1, \text{ ímpar,} \\ (-\mu_1 \mu_2)^{n/2} q, & \text{para } n \geq 2, \text{ par.} \end{cases}$$

Conclua de (23.202), escrevendo os termos com n par na forma $n = 2j$ e os termos com n par na forma $n = 2j - 1$, com $j \in \mathbb{N}$ em ambos os casos, que temos

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{2j}}{(2j)!} (-\mu_1 \mu_2)^j \right) q_0 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{2j-1}}{(2j-1)!} (-\mu_1 \mu_2)^{j-1} \right) \mu_1 p_0 \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(\sqrt{\mu_1 \mu_2} t)^{2j}}{(2j)!} \right) q_0 + \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(\sqrt{\mu_1 \mu_2} t)^{2l+1}}{(2l+1)!} \right) \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} p_0 \\ &= \cos(\sqrt{\mu_1 \mu_2} t) q_0 + \text{sen}(\sqrt{\mu_1 \mu_2} t) \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} p_0 \end{aligned}$$

Acima, na segunda igualdade, o termo q_0 foi absorvido na primeira somatória (que passa a começar com $j = 0$) e na segunda somatória fizemos a mudança de variáveis $l = j - 1$. Portanto, obtivemos

$$q(t) = \cos(\omega_0 t) q_0 + \text{sen}(\omega_0 t) \frac{p_0}{m \omega_0},$$

onde $\omega_0 := \sqrt{\mu_1 \mu_2} = \sqrt{\frac{k}{m}}$, recuperando a bem conhecida solução do oscilador harmônico simples unidimensional. ✦

E. 23.43 Exercício. Considere-se o Hamiltoniano $\mathcal{H}(q, p) = \mu q^a p^b$, com $q, p \in \mathbb{R}$, com $a, b \in \mathbb{N}_0$ e com μ sendo uma constante real. Vamos determinar a trajetória $q(t)$ a partir de condições iniciais (q_0, p_0) , fixadas em $t_0 = 0$, usando (23.202). Mostre que

$$\{\mathcal{H}, q\} = \mu b q^a p^{b-1} \tag{23.233}$$

e mostre por indução que para todo $n \geq 2$ vale

$$\underbrace{\left\{ \mathcal{H}, \left\{ \mathcal{H}, \dots \left\{ \mathcal{H}, q \right\} \dots \right\} \right\}}_{n \text{ vezes}} = \mu^n b \left[\prod_{k=0}^{n-2} (a + k(a - b)) \right] q^{n(a-1)+1} p^{n(b-1)}. \quad (23.234)$$

Para prosseguirmos deste ponto, há dois casos a se considerar: $a \neq b$ e $a = b$.

I. Caso $a \neq b$. No caso em que $a \neq b$, mostre que podemos escrever

$$\prod_{k=0}^{n-2} (a + k(a - b)) = (a - b)^{n-1} \prod_{k=0}^{n-2} (\alpha + 1 + k) = (a - b)^{n-1} \frac{(\alpha)_n}{\alpha},$$

com $\alpha := b/(a - b)$, de sorte que $\alpha + 1 = a/(a - b)$. Acima, $(x)_n$ são os *símbolos de Pochhammer*, definidos em (14.147), página 657. Assim, para $n \geq 2$ temos

$$\begin{aligned} \underbrace{\left\{ \mathcal{H}, \left\{ \mathcal{H}, \dots \left\{ \mathcal{H}, q \right\} \dots \right\} \right\}}_{n \text{ vezes}} &= \mu^n b (a - b)^{n-1} \frac{(\alpha)_n}{\alpha} q^{n(a-1)+1} p^{n(b-1)} \\ &= q (\alpha)_n \left(\mu (a - b) q^{a-1} p^{b-1} \right)^n, \end{aligned} \quad (23.235)$$

sendo que usamos $\frac{b}{(a-b)(\alpha)} = 1$. Constate, comparando com (23.233), que (23.235) é também válida para $n = 1$ e obtenha

$$q(t) = q_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} \left(t \mu (a - b) q_0^{a-1} p_0^{b-1} \right)^n \right], \quad (23.236)$$

sendo a expansão em série de potências acima absolutamente convergente na região $|t \mu (a - b) q_0^{a-1} p_0^{b-1}| < 1$. Identificando com a expansão binomial na forma (14.168), página 666, obtemos, finalmente, a solução

$$q(t) = q_0 \left(1 - t/T_0 \right)^{-\alpha}, \quad (23.237)$$

onde $T_0 := 1/(\mu(a - b)q_0^{a-1}p_0^{b-1})$, ao menos na região $|t/T_0| < 1$. Caso $\alpha \leq 0$ a solução (23.237) pode ser estendida para todo t real. Caso $\alpha > 0$ a solução é singular em $t = T_0$. Assim, se $T_0 > 0$ a solução $q(t)$ será limitada a um intervalo $[0, T_0)$, a partir do instante 0, onde foi fixada a condição inicial. Se $T_0 < 0$ a solução acima para pode ser estendida a todo \mathbb{R}_+ . Os seguintes casos particulares ilustram essas situações.

A. Caso $a = 2$ e $b = 1$ (o que corresponde a $\mathcal{H} = \mu q^2 p$), teremos $\alpha = 1$ e $T_0 = 1/(\mu q_0)$. Assim,

$$q(t) = q_0 (1 - t \mu q_0)^{-1},$$

sendo essa igualdade limitada à região $|t \mu q_0| < 1$. Caso $q_0 > 0$, a solução é limitada ao intervalo $[0, 1/(\mu q_0))$ e diverge para $t = 1/(\mu q_0)$. Isso exhibe uma situação na qual a solução provida pela série (23.202) tem sua validade limitada no tempo.

B. Caso $a = 0$ e $b = 2$ (o que corresponde a $\mathcal{H} = \mu p^2$, o Hamiltoniano de um ponto material de massa $1/(2\mu)$ se movendo livremente em uma dimensão), teremos $\alpha = -1$ e $T_0 = -1/(2\mu q_0^{-1} p_0)$. Assim,

$$q(t) = q_0 (1 - t/T_0) = q_0 + 2t \mu p_0,$$

que corresponde ao bem conhecido movimento retilíneo uniforme unidimensional de um ponto material livre, de massa $1/(2\mu)$. Naturalmente, a solução pode ser estendida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Retornemos agora a (23.234) para tratar do caso faltante $a = b$.

II. Caso $a = b$. No caso em que $a = b$, podemos escrever o lado direito de (23.234) como

$$\underbrace{\left\{ \mathcal{H}, \left\{ \mathcal{H}, \dots \left\{ \mathcal{H}, q \right\} \dots \right\} \right\}}_{n \text{ vezes}} = \mu^n a^n q^{n(a-1)+1} p^{n(a-1)},$$

para $n \geq 2$. Logo,

$$q(t) = q_0 + t \mu a q_0^a p_0^{a-1} + q_0 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(t \mu a (q_0 p_0)^{a-1})^n}{n!}, \quad \text{ou seja,} \quad q(t) = q_0 \exp \left(t \mu a (q_0 p_0)^{a-1} \right). \quad (23.238)$$

Essa solução é válida para todo t . Vale observar que ela pode ser obtida de (23.237), tomando-se o limite $|a - b| \rightarrow 0$. Mostre isso! ✦

E. 23.44 *Exercício.* Sob as condições do Exercício E. 23.43, e seguindo passos similares, obtenha $p(t)$. O resultado é

$$p(t) = p_0(1 - t/T_0)^{\alpha+1}, \quad \text{para } a \neq b \text{ e } p(t) = p_0 \exp(-t\mu a(q_0 p_0)^{a-1}) \quad \text{para } a = b.$$

Verifique que as equações de Hamilton são satisfeitas para tais funções $q(t)$ e $p(t)$. *

E. 23.45 *Exercício.* [Modos normais de um sistema com duas massas] Aqui seguimos a notação da Seção 23.5.1.2, página 1186. Considere o sistema unidimensional descrito na Figura 23.3, página 1214, composto por duas massas m_1 e m_2 acopladas linearmente a molas de constantes de mola k_1 , k_2 e k_3 , todas positivas, a primeira mola acoplando a massa m_1 à parede da esquerda, a segunda mola acoplando as massas entre si e a terceira mola acoplando a massa m_2 à parede da direita. Suporemos também que as molas estão em equilíbrio quando não estão estendidas.

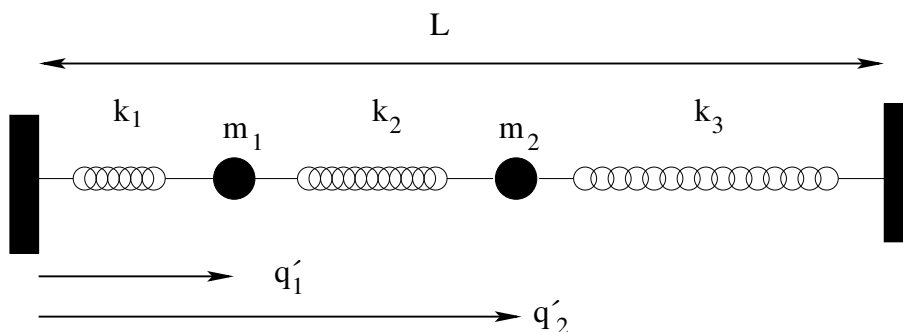


Figura 23.3: Massas pontuais m_1 e m_2 em movimento horizontal acopladas a molas de constantes de mola k_1 , k_2 e k_3 . As respectivas coordenadas q_1' e q_2' medem a distância à parede à esquerda. A distância entre as paredes é L .

Constatare que o Lagrangiano desse sistema mecânico é

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}(\dot{q}_1')^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{q}_2')^2 - \frac{k_1}{2}(q_1')^2 - \frac{k_2}{2}(q_1' - q_2')^2 - \frac{k_3}{2}(L - q_2')^2.$$

Constatare que nesse caso temos

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix}, \quad \ell = \begin{pmatrix} 0 \\ k_3 L \end{pmatrix},$$

e

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle \dot{q}', M \dot{q}' \rangle_R - \frac{1}{2} \langle q', K q' \rangle_R + \langle \ell, q' \rangle_R - \frac{k_3 L^2}{2}.$$

Como o último termo é uma constante, será omitido doravante.

Constatare que $\det(K) = k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 \equiv \kappa > 0$ e que

$$K^{-1} = \frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} k_2 + k_3 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 \end{pmatrix}.$$

Definindo

$$q = q' - K^{-1} \ell = \begin{pmatrix} q_1' - \frac{k_2 k_3 L}{\kappa} \\ q_2' - \frac{(k_1 + k_2) k_3 L}{\kappa} \end{pmatrix},$$

obtemos o Lagrangiano canônico

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, M \dot{q} \rangle_R - \frac{1}{2} \langle q, K q \rangle_R.$$

Verifique que a equação secular $\det(\lambda M - K) = 0$ fica nesse caso $m_1 m_2 \lambda^2 + b \lambda + \kappa = 0$, com $b = -(m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2))$. Verifique que as soluções são

$$d_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2m_1 m_2}, \quad d_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2m_1 m_2},$$

onde $\Delta = b^2 - 4m_1m_2 = (m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2))^2 - 4m_1m_2k_2^2$. Mostre que

$$\Delta = (m_1(k_2 + k_3) - m_2(k_1 + k_2))^2 + 4m_1m_2k_2^2,$$

e, portanto, que $\Delta > 0$, implicando que d_1 e d_2 são reais. Observe também que, como $\Delta < b^2$ e $\sqrt{\Delta} < |b|$, tem-se $d_1 > 0$ e $d_2 > 0$.

De forma explícita em termos de m_1, m_2, k_1, k_2 e k_3 , temos

$$d_1 = \frac{m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2) + \sqrt{(m_1(k_2 + k_3) - m_2(k_1 + k_2))^2 + 4m_1m_2k_2^2}}{2m_1m_2},$$

$$d_2 = \frac{m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2) - \sqrt{(m_1(k_2 + k_3) - m_2(k_1 + k_2))^2 + 4m_1m_2k_2^2}}{2m_1m_2}.$$

Vamos agora considerar o caso particular em que $m_1 = m_2 = m$ e $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Usando as fórmulas acima, mostre que para esse caso tem-se

$$d_1 = \frac{3k}{m}, \quad d_2 = \frac{k}{m}.$$

Temos ainda

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = M^{-1/2}KM^{-1/2} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Constatare que

$$B^{1/2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}$$

e constatare que essa matriz é positiva. Assim,

$$\Omega = M^{-1/2}B^{1/2}M^{1/2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}.$$

A matriz B pode ser diagonalizada pela matriz ortogonal $O = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Verifique que

$$O^TBO = \begin{pmatrix} 3k/m & 0 \\ 0 & k/m \end{pmatrix}.$$

A matriz à direita é a matriz D e seus autovalores são $d_1 = \frac{3k}{m}$ e $d_2 = \frac{k}{m}$, como deveria ser. Os modos normais são dados, segundo (23.167), por

$$\Omega = O^T M^{1/2} q = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} q_1 - q_2 \\ q_1 + q_2 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, temos as soluções

$$q_1(t) - q_2(t) = \alpha_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) + \beta_1 \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right), \tag{23.239}$$

$$q_1(t) + q_2(t) = \alpha_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \beta_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \tag{23.240}$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ e β_2 sendo constantes dependentes de condições iniciais.

Somando-se e subtraindo-se ambas as expressões uma da outra, vemos que as coordenadas q_1 e q_2 são combinações lineares de senos e cossenos das frequências $\sqrt{\frac{3k}{m}}$ e $\sqrt{\frac{k}{m}}$ vezes o tempo.

Se retornarmos às coordenadas originais usando $q' = q + K^{-1}\ell$, teremos $q'_1 = q_1 + \frac{L}{3}$ e $q'_2 = q_2 + \frac{2L}{3}$. Verifique! Assim, as posições de equilíbrio estático para as partículas 1 e 2 são $\frac{L}{3}$ e $\frac{2L}{3}$, respectivamente.

Com uso dos modos normais (23.239)-(23.240) vemos que:

1. $q'_2(t) - q'_1(t) = q_2(t) - q_1(t) + \frac{L}{3}$ e, portanto,

$$q'_2(t) - q'_1(t) = \frac{L}{3} - \alpha_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) - \beta_1 \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right).$$

Assim, vemos que diferença de posição $q'_2(t) - q'_1(t)$ entre as partículas 2 e 1 é dada por um movimento harmônico de frequência $\sqrt{\frac{3k}{m}}$ em torno do ponto $L/3$. Lembremos que $L/3$ é a distância entre partículas 2 e 1 na situação de equilíbrio estático.

2. A posição do centro de massa das duas partículas, $(q'_1(t) + q'_2(t))/2 = (q_1(t) + q_2(t))/2 + L/2$, é dada por

$$\frac{q'_1(t) + q'_2(t)}{2} = \frac{L}{2} + \frac{\alpha_2}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{\beta_2}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

Assim o centro de massa do sistema de suas partículas de massa m é dado um movimento harmônico de frequência $\sqrt{\frac{k}{m}}$ em torno do ponto $L/2$. Lembremos que $L/2$ é a posição do centro de massas na situação de equilíbrio estático.

Esses dois pontos permitem uma interpretação mecânica do significado dos modos normais no caso considerado.

Os resultados acima também podem ser obtidos diretamente da solução (23.165), página 1187, que fica, no caso corrente,

$$q(t) = \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} \left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right)^{2l} K^l \right] q_0 + \sqrt{m} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} \left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right)^{2l+1} K^l \right] v_0.$$

Verifique que os autovetores de K são $\gamma_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, com autovalor $3k$, e $\gamma_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, com autovalor k . Escrevendo $q_0 = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2$ e $v_0 = (b_1/\sqrt{m})\gamma_1 + (b_2/\sqrt{m})\gamma_2$ (onde a_1, a_2, b_1 e b_2 são constantes), verifique que

$$q(t) = \left[a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) + b_1 \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \right] \gamma_1 + \left[a_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + b_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \right] \gamma_2,$$

donde as mesmas conclusões obtidas acima podem ser extraídas.

Segundo (23.174), os projetores espectrais de Ω são

$$F_1 = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} (\Omega - \omega_2 \mathbb{1}) = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$F_2 = \frac{1}{1 - \sqrt{3}} (\Omega - \omega_1 \mathbb{1}) = \frac{1}{1 - \sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \sqrt{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

E. 23.46 *Exercício.* Verifique! ✱

Escrevendo $q_0 = \begin{pmatrix} q_{01} \\ q_{02} \end{pmatrix}$ e $v_0 = \begin{pmatrix} v_{01} \\ v_{02} \end{pmatrix}$, os dois modos normais expressos em (23.175), página 1190, serão

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \begin{pmatrix} q_{01} - q_{02} \\ q_{02} - q_{01} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{3k}} \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \begin{pmatrix} v_{01} - v_{02} \\ v_{02} - v_{01} \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \begin{pmatrix} q_{01} + q_{02} \\ q_{02} + q_{01} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \begin{pmatrix} v_{01} + v_{02} \\ v_{02} + v_{01} \end{pmatrix}.$$

No primeiro vemos que $q_2(t) - q_1(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)(q_{02} - q_{01}) + \sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)(v_{02} - v_{01})$ e para o segundo vemos que $(q_1(t) + q_2(t))/2 = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)(q_{01} + q_{02})/2 + \sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)(v_{01} + v_{02})/2$.

De forma geral, o uso da decomposição espectral, resultando em (23.175), é o método mais rápido para a determinação dos modos normais de um sistema. ✦