

# Capítulo 24

## Grupos de Lie e Álgebras de Lie. Uma Breve Introdução

### Conteúdo

---

<b>24.1</b>	<b>Variedades e Grupos de Lie . . . . .</b>	<b>1218</b>
<b>24.2</b>	<b>Breves Considerações sobre Grupos Topológicos . . . . .</b>	<b>1220</b>
<b>24.3</b>	<b>Grupos de Lie Matriciais . . . . .</b>	<b>1222</b>
24.3.1	Uma Topologia Métrica em $GL(\mathbb{C}, n)$ . . . . .	1223
24.3.2	O Grupo de Lie $GL(\mathbb{C}, n)$ . . . . .	1223
24.3.3	Subgrupos Uniparamétricos e seus Geradores . . . . .	1225
24.3.4	Subgrupos Uniparamétricos e Álgebras de Lie . . . . .	1228
24.3.5	Subgrupos Fechados de $GL(\mathbb{C}, n)$ . . . . .	1232
<b>24.4</b>	<b>A Relação entre Grupos de Lie Matriciais e suas Álgebras de Lie . . . . .</b>	<b>1235</b>
24.4.1	Álgebras de Lie Nilpotentes, Solúveis, Simples e Semi-Simples . . . . .	1236
24.4.2	Questões sobre a Exponenciação de Álgebras de Lie . . . . .	1239
24.4.3	Alguns Exemplos Especiais . . . . .	1241

---



ESTE capítulo pretende ser uma modesta introdução ao estudo de grupos de Lie. Com particular destaque discutiremos grupos de Lie matriciais. Algumas observações prévias são necessárias. Para a discussão do conceito geral de grupo de Lie são indispensáveis algumas noções básicas sobre espaços topológicos mas, de importância especial é a noção de variedade diferenciável. Esse importante conceito, proveniente da Geometria, desempenha um papel importante em várias áreas de Física, tais como a Teoria da Relatividade Geral e as Teorias de Calibre. O conceito de variedade diferenciável nasceu inspirado na noção mais familiar de superfície em espaços  $\mathbb{R}^n$  e não se desvincula totalmente daquela. Não pressuporemos da parte do leitor conhecimento prévio do conceito de variedade diferenciável e, por isso, vamos introduzi-lo adiante. Não iremos, no entanto, desenvolver esse assunto em detalhe no presente capítulo e, para tal, remetemos o estudante interessado ao Capítulo 35, página 1642, e aos (inúmeros) bons livros sobre Geometria Diferencial, por exemplo [247].

Iremos nos concentrar em exemplificar o conceito de grupo de Lie tratando primordialmente de grupos de Lie matriciais. Isso simplifica um pouco o tratamento e reduz um tanto o escopo destas notas introdutórias. No entanto, a grande maioria dos grupos de Lie de interesse (especialmente em Física) é formada por grupos de Lie matriciais. Para o tratamento de grupos de Lie matriciais discutiremos com certo detalhe aspectos algébricos e topológicos de grupos de matrizes.

Mais de 100 anos de pesquisa intensa nos separam dos primórdios do estudo dos grupos e álgebras de Lie e nossas pretensões aqui são a de uma modesta introdução a esse vastíssimo assunto. Para tratamentos gerais e abrangentes de grupos de Lie recomendamos as referências [258], [245], [61], [185], [336], [146], [147] ou [291]. Para álgebras de Lie, recomendamos [167] e [276].

Vários grupos de Lie são importantes na Física e seu tratamento é particularmente importante na Mecânica Quântica e nas Teorias Quânticas de Campos. Exemplos de grupos de Lie importantes para a Física são discutidos com certo detalhe no Capítulo 22, tais como os grupos  $SO(3)$ ,  $SU(2)$  e o grupo de Lorentz.

## 24.1 Variedades e Grupos de Lie

### • Variedades diferenciáveis

Uma *variedade diferenciável* real de dimensão  $n$  é um espaço topológico Hausdorff segundo-contável  $V$  dotado de uma

família de abertos  $\mathcal{F} = \{U_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$  com as seguintes propriedades:

1.  $V = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ .
2. Para cada  $U_\alpha \in \mathcal{F}$  existe um conjunto aberto  $C_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  e uma bijeção contínua com inversa contínua  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow C_\alpha$ .
3. Para todo par  $U_\alpha, U_\beta \in \mathcal{F}$  com  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  a função

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é infinitamente diferenciável como função de (um subconjunto de)  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Vide Capítulo 35, página 1642.

Uma *variedade analítica* complexa de dimensão  $n$  é definida analogamente, substituindo-se  $\mathbb{R}^n$  por  $\mathbb{C}^n$  e substituindo-se a condição de diferenciabilidade infinita do item 3, acima, por analiticidade.

*Observação 1.* Acima,  $\Lambda$  é apenas um conjunto de índices usados para rotular os elementos de  $\mathcal{F}$  e não tem nenhum papel especial.  $\Lambda$  pode ser finito ou não, contável ou não.

*Observação 2.* As funções  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$  de acima são denominadas *funções de transição*. Em uma *variedade  $k$ -diferenciável* exige-se apenas que as funções de transição sejam  $k$ -vezes diferenciáveis. Esses objetos têm, porém, interesse relativamente limitado.

*Observação 3.* Os pares  $(\phi_\alpha, U_\alpha)$  são frequentemente denominados *cartas locais* da variedade ou simplesmente *cartas*. A coleção das cartas é frequentemente denominada *atlas*.

Vamos à interpretação das condições acima. A condição 1 diz apenas que a família  $\{U_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$  é um recobrimento de  $V$ , ou seja, todo elemento de  $V$  pertence a pelo menos um aberto  $U_\alpha$ , podendo naturalmente ocorrer que alguns pontos de  $V$  pertençam a vários elementos da família  $\mathcal{F}$ , ou seja, os elementos de  $\mathcal{F}$  podem ter intersecções não-vazias. A condição 2 é importante e diz que os elementos de cada  $U_\alpha$  podem ser rotulados (univocamente) por uma  $n$ -upla de números reais (ou complexos). Ou seja, podemos dotar cada  $U_\alpha$  de um *sistema de coordenadas*. Note que esses sistemas podem ser diferentes para  $U_\alpha$ 's diferentes. Como dissemos, pontos de  $V$  podem pertencer a vários  $U_\alpha$ 's e, portanto, podem ter a si atribuídas coordenadas diferentes, uma para cada  $U_\alpha$  ao qual pertence. Assim, os pontos de  $U_\alpha \cap U_\beta$  têm a si atribuídos pelo menos dois sistemas de coordenadas: as coordenadas  $C_\alpha$  de  $U_\alpha$  e as coordenadas  $C_\beta$  de  $U_\beta$ . A condição 3 diz-nos como esses sistemas de coordenadas devem relacionar-se, a saber, o que se deseja é que a passagem das coordenadas  $C_\beta$  para as coordenadas  $C_\alpha$ , a qual é definida pela função  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ , seja infinitamente diferenciável (ou analítica).

Como mencionamos, a conceito de variedade foi inspirado na noção de superfície em conjuntos como  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{C}^n$ . Sem entrarmos em detalhes técnicos, toda superfície em  $\mathbb{R}^n$  convenientemente definida (tais como a superfície da esfera e o toro, em  $\mathbb{R}^3$ ) é uma variedade, ou seja, tem um sistema de coordenadas local. Isso pode ser garantido, por exemplo, pelo conhecido teorema da função implícita da análise real. Note-se porém que variedades não são apenas conjuntos de pontos, como as superfícies de  $\mathbb{R}^n$  o são, podendo ser também conjuntos de outros tipos de objetos, como funções, curvas, vetores, matrizes etc. A ideia intuitiva básica em torno da noção de variedade é que a mesma representa uma coleção contínua de objetos que podem ser rotulados por sistemas de coordenadas e de tal forma que possamos, ao menos localmente, manipular essas coordenadas de modo (infinitamente) diferenciável, como se faz em  $\mathbb{R}^n$ .

**E. 24.1** *Exercício.* Mostre que o conjunto de matrizes  $\{R = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \text{ com } \det(R) = 1\}$  é uma variedade diferenciável de dimensão 1. ✦

### • Grupos topológicos

Vamos agora apresentar a definição de *grupo topológico*, da qual precisaremos para discutir grupos de Lie.

Seja  $G$  um grupo. Para cada  $g \in G$  podemos definir uma função  $\lambda_g : G \rightarrow G$  por  $\lambda_g(h) := gh$ . Fora isso tem-se também em  $G$  a função *inv* :  $G \rightarrow G$  definida por  $inv(h) := h^{-1}$ .

**Definição.** Um grupo  $G$  é dito ser um *grupo topológico* em relação a uma topologia  $\tau$  definida em  $G$  se nessa topologia a função *inv* e todas as funções  $\lambda_g$  forem contínuas. ♠

Comentário. Podemos definir também para cada  $g \in G$  a função  $\rho_g : G \rightarrow G$  por  $\rho_g(h) = hg$ , que representa a multiplicação à direita por  $g$ . É fácil de se ver, porém, que  $\rho_g = \text{inv} \circ \lambda_{g^{-1}} \circ \text{inv}$ . Assim, em um grupo topológico as funções  $\rho_g$  são também contínuas. ♣

Comentário. Um grupo pode ser topológico em relação a uma topologia mas não em relação a outra. Veremos exemplos. ♣

Informalmente, um grupo  $G$  é topológico se as operações de produto por elementos do grupo e inversão forem contínuas.

Em termos mais precisos um grupo topológico é formado por um grupo  $G$  e uma coleção  $\mathfrak{G}$  de subconjuntos de  $G$ ,  $\mathfrak{G} \subset \mathcal{P}(G)$ , satisfazendo as condições definidoras de um Espaço Topológico (vide Capítulo 29):

1.  $\emptyset \in \mathfrak{G}$  e  $G \in \mathfrak{G}$ ,
2. Se  $\mathcal{A} \in \mathfrak{G}$  e  $\mathcal{B} \in \mathfrak{G}$  então  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in \mathfrak{G}$ ,
3. Se  $I$  é um conjunto arbitrário de índices e  $\mathcal{A}_\lambda \in \mathfrak{G}$  para todo  $\lambda \in I$  então  $\bigcup_{\lambda \in I} \mathcal{A}_\lambda$  também é um elemento de  $\mathfrak{G}$ ,

e tais que para todo  $\mathcal{O} \in \mathfrak{G}$  as imagens inversas  $\text{inv}^{-1}(\mathcal{O})$  e  $\lambda_g^{-1}(\mathcal{O})$ , para todo  $g \in G$ , são igualmente elementos de  $\mathfrak{G}$ .

Os elementos de  $\mathfrak{G}$  são ditos ser os conjuntos abertos de  $G$ . Como em geral se faz em espaços topológicos, um conjunto  $\mathcal{F} \subset G$  é dito ser *fechado* se seu complementar  $G \setminus \mathcal{F}$  for aberto.

• **Grupos de Lie**

Um grupo topológico que, enquanto espaço topológico, seja uma variedade real diferenciável (complexa analítica) é dito ser um *Grupo de Lie*<sup>1</sup> real (complexo) se as operações de multiplicação à direita e inversão forem infinitamente diferenciáveis (analíticas).

**E. 24.2** Exercício. Verifique que  $(\mathbb{R}, +)$  (o grupo aditivo dos reais) e  $(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, \cdot)$  (o grupo multiplicativo dos reais não-negativos) são grupos de Lie reais. ✦

**E. 24.3** Exercício. Verifique que  $\{R = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \text{ com } \det(R) = 1\}$  é um grupo de Lie real. ✦

Na Seção 24.3.2, página 1223, mostraremos com detalhe que  $GL(\mathbb{C}, n)$  é um grupo de Lie. Para mais exemplos, vide a discussão sobre os grupos  $SO(3)$ ,  $SU(2)$  etc. do Capítulo 22.

## 24.2 Breves Considerações sobre Grupos Topológicos

Nesta seção nos limitaremos a apresentar alguns poucos resultados sobre grupos topológicos, dos quais faremos uso adiante ao tratarmos de grupos de Lie. O estudo de grupos topológicos gerais é bastante vasto e para um texto clássico recomendamos fortemente [258].

Introduzimos aqui a seguinte notação. Seja  $G$  um grupo topológico. Se  $U$  é algum subconjunto de  $G$  e  $g \in G$  definimos

$$gU := \{x \in G \mid x = gu \text{ para algum } u \in U\}.$$

Analogamente,

$$Ug := \{x \in G \mid x = ug \text{ para algum } u \in U\}.$$

**E. 24.4** Exercício. Se  $U$  é um conjunto aberto de  $G$  mostre que para todo  $g \in G$  os conjuntos  $gU$  e  $Ug$  são também conjuntos abertos de  $G$ . ✦

---

<sup>1</sup>Marius Sophus Lie (1842-1899). Lie introduziu esse conceito em cerca de 1870 em seus estudos de propriedades de invariância de equações diferenciais parciais.

• **Grupos topológicos conexos e desconexos**

Um grupo topológico  $H$  é dito ser *desconexo* se for a união disjunta de dois conjuntos  $A$  e  $B$ , ambos não-vazios e ambos simultaneamente abertos e fechados. Ou seja,  $H = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$  com  $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$ , onde  $A$  e  $B$  são abertos e fechados. Um grupo topológico  $H$  é dito ser *conexo* se não for desconexo.

• **Alguns fatos sobre grupos topológicos**

Vamos aqui provar alguns fatos básicos sobre grupos topológicos gerais. Faremos uso da Proposição 24.3 abaixo quando falarmos da relação entre álgebras de Lie matriciais e álgebras de Lie.

Seja  $H$  um grupo topológico e  $G \subset H$  um subgrupo de  $H$ . Dizemos que  $G$  é um *subgrupo topologicamente aberto* de  $H$  (ou simplesmente *subgrupo aberto* de  $H$ ) se  $G$  for um subconjunto aberto de  $H$ . Analogamente, dizemos que  $G$  é um *subgrupo topologicamente fechado* de  $H$  (ou simplesmente *subgrupo fechado* de  $H$ ) se  $G$  for um subconjunto fechado de  $H$ . A seguinte proposição é relevante nesse contexto.

**Proposição 24.1** *Seja  $H$  um grupo topológico e  $G$  um subgrupo aberto de  $H$ . Então  $G$  é igualmente um subgrupo fechado de  $H$ .* □

*Prova.* Seja  $g' \in \overline{G}$ , onde  $\overline{G}$  é o fecho de  $G$ . Então, se  $U_{g'}$  é qualquer aberto de  $H$  que contém  $g'$ , tem-se  $U_{g'} \cap G \neq \emptyset$  (Proposição 29.8, página 1419). Vamos escolher cuidadosamente um tal aberto  $U_{g'}$ . Seja  $U_e$  um aberto de  $H$  que contém a identidade. Como  $G$  é aberto,  $V = U_e \cap G$  é igualmente aberto. Escolhemos  $U_{g'} = g'V := \{x \in H, x = g'v \text{ para algum } v \in V\}$ . Então, como  $U_{g'} \cap G \neq \emptyset$  existe algum elemento  $g \in G$  que é também elemento de  $U_{g'}$ , ou seja,  $g = g'v$  para algum elemento  $v \in V$ . Mas isso implica que  $g' = gv^{-1}$ . Agora,  $v \in V = U_e \cap G \subset G$  e, portanto,  $g' \in G$  por ser o produto de dois elementos de  $G$ , que é um grupo. ■

**Proposição 24.2** *Seja  $H$  um grupo topológico conexo e  $G$  um subgrupo aberto de  $H$ . Então  $G = H$ .* □

*Prova.* Vamos supor que  $G \neq H$ , ou seja,  $H \setminus G \neq \emptyset$ . Como  $G$  é um conjunto aberto e fechado (pela proposição anterior)  $H \setminus G = H \cap G^c$  é um conjunto aberto e fechado. Assim,  $H$  é a união disjunta de dois conjuntos abertos e fechados, a saber  $G$  e  $H \setminus G$ . Isso é uma contradição com o fato de  $H$  ser conexo. Logo,  $G = H$ . ■

**Proposição 24.3** *Seja  $H$  um grupo topológico conexo e  $U$  um aberto de  $H$  que contém a identidade e que seja tal que para todo  $u \in U$  tem-se  $u^{-1} \in U$ . Então,*

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n,$$

onde  $U^1 := U$  e  $U^n := \left\{ x \in H \mid x = u_n \cdots u_1 \text{ para } u_i \in U, i = 1, \dots, n \right\}$ ,  $n > 1$ . □

*Prova.* Todos os conjuntos  $U^n$  são conjuntos abertos. Isso é fácil de se ver. De fato,

$$U^2 = \bigcup_{u_2 \in U} u_2 U$$

e, assim,  $U^2$  é aberto, pois é uma união de abertos (vide exercício à página 1220). Analogamente,

$$U^n = \bigcup_{u_n \in U} u_n U^{n-1}, \quad n > 2. \tag{24.1}$$

Por indução, segue facilmente que todo  $U^n$  é aberto.

Assim  $\mathcal{U} := \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$  é igualmente um conjunto aberto (por ser uma união de abertos). Se provarmos que  $\mathcal{U}$  é um grupo, a proposição anterior garante a prova desejada.

É evidente que  $\mathcal{U}$  contém a identidade  $e$  (que está contida em  $U$ ). Fora isso, se  $g_1 \in U^{n_1}$  e  $g_2 \in U^{n_2}$ , então  $g_1 = u_{n_1} \cdots u_1$  e  $g_2 = u'_{n_2} \cdots u'_1$  para certos  $u_i$  e  $u'_i \in U$ . Logo,  $g_1 g_2 = u_{n_1} \cdots u_1 u'_{n_2} \cdots u'_1$ , mostrando que  $g_1 g_2 \in U^{n_1+n_2} \subset \mathcal{U}$ . Finalmente, se  $g \in U^n$  e  $g = u_n \cdots u_1$ , então  $g^{-1} = u_1^{-1} \cdots u_n^{-1} \in U^n \subset \mathcal{U}$ . Isso completa a prova que  $\mathcal{U}$  é um grupo. ■

Informalmente, essa proposição diz que se  $H$  é um grupo topológico conexo, então qualquer aberto  $\mathcal{U}$  que contém a identidade gera o grupo  $H$ , ou seja, todo elemento de  $H$  pode ser escrito como o produto finito de elementos de  $\mathcal{U}$ .

*Observação.* Como a identidade  $e$  é um elemento de  $U$ , segue facilmente de (24.1) que  $U^{n-1} \subset U^n$  para todo  $n \geq 1$ . ♣

Seja  $H$  um grupo topológico. Dizemos que uma coleção de conjuntos abertos  $\mathcal{A}_\lambda \in H$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , é um *recobrimento* de  $H$  se

$$H = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda .$$

Um grupo topológico é dito ser *compacto*<sup>2</sup> se possuir a seguinte propriedade: para todo recobrimento  $\mathcal{A}_\lambda \in H$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , de  $H$  existir um subconjunto finito  $\mathcal{A}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{A}_{\lambda_n}$  de conjuntos abertos que também é um recobrimento de  $H$ :

$$H = \mathcal{A}_{\lambda_1} \cup \dots \cup \mathcal{A}_{\lambda_n} .$$

A seguinte proposição é imediata:

**Proposição 24.4** *Seja  $H$  um grupo topológico conexo e compacto e seja  $U$  um aberto de  $H$  que contém a identidade e que seja tal que para todo  $u \in U$  tem-se  $u^{-1} \in U$ . Então, existe um  $n$  tal que*

$$H = U^n .$$

□

*Prova.* Como  $H$  é conexo, pela Proposição 24.3 tem-se  $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ . O lado direito é, portanto, um recobrimento de  $H$  por abertos. Assim, como  $H$  é compacto,  $H$  tem um recobrimento finito pelos abertos  $U^n$ : existem  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  tais que  $H = U^{n_1} \cup \dots \cup U^{n_k}$ . Como  $U^{n_1} \subset \dots \subset U^{n_k}$ , tem-se  $H = U^{n_k}$ , como queríamos provar. ■

*Comentário.* Na proposição acima, a igualdade  $H = U^n$  afirma que todo elemento de  $H$  é obtido por um produto de no máximo  $n$  elementos de  $U$ . O número  $n$  é dependente de  $U$  e é intuitivo dizer que quanto “menor” for o aberto  $U$  que contém a identidade, maior será  $n$ . ♣

• **Continuidade uniforme de funções em grupos topológicos**

Seja  $G$  um grupo topológico. Uma função  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  é dita ser uniformemente contínua se para cada  $\epsilon > 0$  existir uma vizinhança aberta  $V_\epsilon$  do elemento neutro de  $G$  tal que  $|f(g) - f(h)| \leq \epsilon$  sempre que  $g$  e  $h$  pertencerem a  $V_\epsilon$ .

A seguinte afirmação é importante no presente contexto.

**Proposição 24.5** *Seja  $G$  um grupo topológico. Seja  $f_1 : G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função uniformemente contínua e seja  $f_2 : G \rightarrow G$  uma função contínua com  $f_2(e) = e$ . Então, a função composta  $f_1 \circ f_2 : G \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função uniformemente contínua.*

□

*Prova.* Como  $f_1$  é uniformemente contínua, existe para cada  $\epsilon > 0$  uma vizinhança aberta  $V_\epsilon$  do elemento neutro de  $G$  tal que  $|f_1(g) - f_1(h)| \leq \epsilon$  sempre que  $g$  e  $h$  pertencerem a  $V_\epsilon$ . Defina-se  $W_\epsilon := f_2^{-1}(V_\epsilon)$ . Trata-se de um aberto em  $G$ , pois  $V_\epsilon$  é aberto e  $f_2$  contínua. Além disso,  $e \in W_\epsilon$ , pois  $e \in V_\epsilon$  e  $f_2(e) = e$ . Logo, se  $g$  e  $h$  são ambos elementos de  $W_\epsilon$ , teremos  $f_2(g) \in V_\epsilon$  e  $f_2(h) \in V_\epsilon$ . Portanto, valerá também  $|f_1 \circ f_2(g) - f_1 \circ f_2(h)| \leq \epsilon$ , completando a prova que  $f_1 \circ f_2 : G \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função uniformemente contínua. ■

## 24.3 Grupos de Lie Matriciais

Nosso objetivo nesta seção e nas que se seguem é introduzir os grupos de Lie matriciais e discutí-los. Trataremos de alguns exemplos ilustrativos com algum detalhe, começando com o grupo  $GL(\mathbb{C}, n)$ . Comentemos que essencialmente todas as nossas afirmações adiante sobre  $GL(\mathbb{C}, n)$  são também válidas para o grupo real  $GL(\mathbb{R}, n)$ .

<sup>2</sup>Para a definição da noção de compacidade e suas propriedades, vide Seção 34.3, página 1579.

### 24.3.1 Uma Topologia Métrica em $GL(\mathbb{C}, n)$

Como preparação, façamos alguns comentários topológicos sobre  $GL(\mathbb{C}, n)$ . A topologia métrica de  $Mat(\mathbb{C}, n)$  discutida na Seção 10.1, página 457, pode ser introduzida naturalmente em  $GL(\mathbb{C}, n)$ , que afinal é um subconjunto de  $Mat(\mathbb{C}, n)$ , ao definirmos para  $A, B \in GL(\mathbb{C}, n)$  a métrica  $d(A, B) = \|A - B\|$ , sendo  $\|\cdot\|$  a norma operatorial de  $Mat(\mathbb{C}, n)$ . Mostremos que  $GL(\mathbb{C}, n)$  é um conjunto aberto e denso de  $Mat(\mathbb{C}, n)$ .

•  $GL(\mathbb{C}, n)$  é um conjunto aberto de  $Mat(\mathbb{C}, n)$

É relevante notarmos que  $GL(\mathbb{C}, n)$  não é um subconjunto fechado de  $Mat(\mathbb{C}, n)$ . Isso se vê tomando o exemplo da sequência de matrizes diagonais  $2 \times 2$  da forma  $A_m = \begin{pmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , sequência essa formada por elementos de  $GL(\mathbb{C}, 2)$  mas que converge para a matriz nula, que obviamente não é elemento de  $GL(\mathbb{C}, 2)$ .

Em verdade,  $GL(\mathbb{C}, n)$  é um conjunto aberto de  $Mat(\mathbb{C}, n)$ . Para mostrar isso temos que provar<sup>3</sup> que se  $A \in GL(\mathbb{C}, n)$  e  $B$  é uma matriz tal que  $\|B - A\|_{\mathbb{C}}$  é suficientemente pequena, então  $B$  é inversível e, portanto, também pertence a  $GL(\mathbb{C}, n)$ . Observemos que  $B = A(\mathbb{1} + A^{-1}(B - A))$ . Se provarmos que  $\mathbb{1} + A^{-1}(B - A)$  é inversível então teremos que  $B^{-1}$  existe, sendo dada por  $(\mathbb{1} + A^{-1}(B - A))^{-1} A^{-1}$ .

Escolhendo  $B$  próximo o suficiente de  $A$  de modo que  $\|B - A\|_{\mathbb{C}} < 1/\|A^{-1}\|_{\mathbb{C}}$  então  $A^{-1}(B - A)$  terá norma menor que 1 e, portanto,  $\mathbb{1} + A^{-1}(B - A)$  tem uma inversa dada pela série de Neumann<sup>4</sup> convergente<sup>5</sup>

$$(\mathbb{1} + A^{-1}(B - A))^{-1} = \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (A^{-1}(B - A))^m .$$

Isso prova que  $B$  tem inversa e completa a prova que  $GL(\mathbb{C}, n)$  é um conjunto aberto.

**E. 24.5 Exercício.** Há uma maneira alternativa “rápida” de provar que  $GL(\mathbb{C}, n)$  é um conjunto aberto. Mostre que  $\det(A)$  é contínua como função dos elementos de matriz de  $A$ . Mostre que isso implica que  $\det(A) \neq 0$  é contínua na topologia induzida em  $Mat(\mathbb{C}, n)$  pela norma operatorial (em, verdade, por qualquer norma, pois são todas equivalentes). Conclua que  $GL(\mathbb{C}, n)$  é um conjunto aberto, observando para tal que se trata do conjunto de todas as matrizes complexas com determinante não-nulo e notando que  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{C}$ . ✱

•  $GL(\mathbb{C}, n)$  é denso em  $Mat(\mathbb{C}, n)$

Provemos que todo elemento de  $Mat(\mathbb{C}, n)$  pode ser aproximado em norma por uma matriz inversível. Isso equivale a dizer que  $GL(\mathbb{C}, n)$  é denso em  $Mat(\mathbb{C}, n)$ . Seja  $A \in Mat(\mathbb{C}, n)$  e seja  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  o conjunto de seus autovalores distintos ( $r \leq n$ ). É claro que se  $\alpha \notin \sigma(A)$  então  $\det(\alpha\mathbb{1} - A) \neq 0$  e  $A - \alpha\mathbb{1}$  tem inversa (recorde que os autovalores de  $A$  são os zeros do polinômio característico de  $A$ ). Seja agora,  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ , uma sequência de números complexos tais que  $\alpha_n \notin \sigma(A)$  para todo  $n$ , e tais que  $\alpha_n \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ . Teremos que as matrizes  $A_n := A - \alpha_n\mathbb{1}$  são todas inversíveis e  $d(A, A_n) = \|A - A_n\| = |\alpha_n| \|\mathbb{1}\| = |\alpha_n| \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ . Isso prova nossa afirmação.

### 24.3.2 O Grupo de Lie $GL(\mathbb{C}, n)$

Nesta seção mostraremos que  $GL(\mathbb{C}, n)$  é um grupo de Lie. Para isso mostraremos primeiro que  $GL(\mathbb{C}, n)$  é um grupo topológico e depois que é uma variedade analítica, para então mostrar que o produto e a inversão são analíticos. Esses resultados, além de importantes em si, servem ao propósito pedagógico de ilustrar os conceitos de grupo topológico e de variedade.

•  $GL(\mathbb{C}, n)$  é um grupo topológico

Para provarmos que  $GL(\mathbb{C}, n)$  é um grupo topológico precisamos mostrar que o produto em  $GL(\mathbb{C}, n)$  e a inversão

<sup>3</sup>Vide a definição de conjunto aberto em espaços métricos dada à página 1329.

<sup>4</sup>Karl Neumann (1832-1925).

<sup>5</sup>A justificativa dessa expressão foi apresentada na Seção 10.2. Note que a expansão de Taylor da função analítica  $\frac{1}{1+z}$  para  $|z| < 1$  em torno de  $z = 0$  é precisamente  $1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m z^m$ .

de matrizes em  $GL(\mathbb{C}, n)$  são operações contínuas.

Sejam  $G, G', H \in GL(\mathbb{C}, n)$ . Temos que

$$\|G'H - GH\|_{\mathbb{C}} = \|(G' - G)H\|_{\mathbb{C}} \leq \|G' - G\|_{\mathbb{C}} \|H\|_{\mathbb{C}},$$

mostrando que  $\|G'H - GH\|_{\mathbb{C}} \rightarrow 0$  se  $\|G' - G\|_{\mathbb{C}} \rightarrow 0$ . Assim, o produto à esquerda é contínuo.

Sejam agora  $G, H \in GL(\mathbb{C}, n)$ . Fixemos  $H$  e tomemos  $\|G - H\|_{\mathbb{C}} < \epsilon$  com  $\epsilon > 0$  escolhido pequeno o suficiente de modo que  $\epsilon \|H^{-1}\|_{\mathbb{C}} < 1$ . É claro que  $G = H + (G - H) = H(\mathbb{1} + H^{-1}(G - H))$ , de maneira que  $G^{-1} = [\mathbb{1} + H^{-1}(G - H)]^{-1} H^{-1}$ . Logo,

$$G^{-1} - H^{-1} = \left\{ [\mathbb{1} + H^{-1}(G - H)]^{-1} - \mathbb{1} \right\} H^{-1}.$$

Assim, como pela escolha de  $\epsilon$  temos  $\|H^{-1}(G - H)\|_{\mathbb{C}} \leq \epsilon \|H^{-1}\|_{\mathbb{C}} < 1$ , podemos escrever

$$G^{-1} - H^{-1} = \left[ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m [H^{-1}(G - H)]^m \right] H^{-1}.$$

A justificativa dessa expressão<sup>6</sup> foi apresentada na Seção 10.2. Tem-se, então,

$$\|G^{-1} - H^{-1}\|_{\mathbb{C}} \leq \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \|H^{-1}\|_{\mathbb{C}}^m \|G - H\|_{\mathbb{C}}^m \right] \|H^{-1}\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{\epsilon \|H^{-1}\|_{\mathbb{C}}^2}{1 - \epsilon \|H^{-1}\|_{\mathbb{C}}}.$$

Portanto  $\|G^{-1} - H^{-1}\|_{\mathbb{C}} \rightarrow 0$  quando  $\|G - H\|_{\mathbb{C}} \rightarrow 0$ , provando a continuidade da operação de inversão de matrizes. Isso completa a prova que  $GL(\mathbb{C}, n)$  é um grupo topológico.

**E. 24.6 Exercício.** Há uma maneira alternativa “rápida” de provar que a operação de inversão é contínua: use a regra de Laplace, expressão (9.20), página 360, para calcular a inversa de uma matriz e evoque o fato que o determinante é contínuo. ✱

• **GL(C, n) é uma variedade analítica**

Vamos agora mostrar que  $GL(\mathbb{C}, n)$  é uma variedade analítica. Seja, para cada  $\epsilon > 0$ , o subconjunto  $\mathcal{C}_{\epsilon}$  de  $\mathbb{C}^{n^2}$  definido por

$$\mathcal{C}_{\epsilon} := \left\{ (x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nn}) \in \mathbb{C}^{n^2} \text{ com } |x_{ij}| < \epsilon \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Para  $x = (x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nn}) \in \mathcal{C}_{\epsilon}$ , denotemos por  $X$  a matriz cujo elemento  $ij$  é  $X_{ij} = x_{ij}$  e denotemos  $\mathbb{1} + X$  por  $A(x)$ . Obviamente  $A(x)_{ij} = \delta_{ij} + x_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

É bem claro que cada  $\mathcal{C}_{\epsilon}$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}^{n^2}$ . Seja também  $\mathcal{U}_{\epsilon} := \{A(x) \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n) \mid x \in \mathcal{C}_{\epsilon}\}$ .

**E. 24.7 Exercício.** Mostre que cada  $\mathcal{U}_{\epsilon}$  é um subconjunto aberto de  $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ . ✱

É bem claro que para toda matriz  $A(x)$  como acima tem-se  $\det(A(x)) = 1 + p(x)$ , onde  $p(x)$  é um polinômio nas variáveis  $x_{ij}$  que se anula quanto todas as  $x_{ij}$  são nulas. Assim, se  $x \in \mathcal{C}_{\epsilon}$  vê-se que  $\det(A(x)) \neq 0$  caso  $\epsilon$  seja pequeno o suficiente, pois isso garante que  $|p(x)| < 1$ . Portanto, se escolhermos  $\epsilon$  pequeno o suficiente, teremos que  $\mathcal{U}_{\epsilon}$  é um subconjunto aberto de  $GL(\mathbb{C}, n)$ , o que suporemos daqui por diante.

Seja agora  $g$  uma matriz arbitrária de  $GL(\mathbb{C}, n)$  e seja

$$U_g = \{gA(x), \text{ com } A(x) \in \mathcal{U}_{\epsilon}\}.$$

Pela notação que apresentamos quando discutimos grupos topológicos,  $U_g = g\mathcal{U}_{\epsilon}$ , e  $U_g$  é um aberto de  $GL(\mathbb{C}, n)$ . Fora isso,  $g \in U_g$ , pois  $\mathbb{1} = A(0) \in \mathcal{U}_{\epsilon}$ . Concluimos que

$$GL(\mathbb{C}, n) = \bigcup_{g \in GL(\mathbb{C}, n)} U_g,$$

<sup>6</sup>Note que a expansão de Taylor da função analítica  $\frac{1}{1+z} - 1$  para  $|z| < 1$  em torno de  $z = 0$  é precisamente  $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m z^m$ .

ou seja,  $GL(\mathbb{C}, n)$  possui um recobrimento por abertos.

Vamos agora mostrar que cada  $U_g$  é bijetivamente mapeado em um aberto de  $\mathbb{C}^{n^2}$ . Isso é bem simples pois, se para cada  $g \in GL(\mathbb{C}, n)$  definirmos funções  $\phi_{ij}^g : U_g \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\phi_{ij}^g(gA(x)) = \phi_{ij}^g(g + gX) := (gX)_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

ou seja,

$$\phi_{ij}^g(gA(x)) := \sum_{k=1}^n g_{ik}x_{kj}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

vemos facilmente que todo  $h \in U_g$  é da forma  $h_{ij} = g_{ij} + \phi_{ij}^g(gA(x))$ . Assim, o conjunto  $C_g \subset \mathbb{C}^{n^2}$  formado pelas variáveis  $\overline{x_{ij}} = \sum_{k=1}^n g_{ik}x_{kj}$  com  $x_{ij} \in \mathbb{C}_\epsilon$  é um sistema de coordenadas para  $U_g$ .

Por fim, para todo  $h \in U_g \cap U_{g'}$ , teremos  $h = gA(x) = g'A(x')$ , ou seja,  $A(x') = (g')^{-1}gA(x)$  e

$$x'_{ij} = -\delta_{ij} + \sum_{k=1}^n [(g')^{-1}g]_{ik}(\delta_{kj} + x_{kj}) = ((g')^{-1}g - \mathbb{1})_{ij} + \sum_{k=1}^n [(g')^{-1}g]_{ik}x_{kj},$$

o que mostra que as coordenadas  $x'$  são expressas em termos de polinômios nas variáveis  $x$ . Portanto, a mudança nas coordenadas de  $U_g$  para as de  $U_{g'}$  é expressa em termos de funções analíticas (em verdade, polinômios). Isso provou que  $GL(\mathbb{C}, n)$  é uma variedade analítica.

• **GL(C, n) é grupo de Lie**

Para finalmente provarmos que  $GL(\mathbb{C}, n)$  é um grupo de Lie, resta-nos provar que a multiplicação à direita e a inversão são analíticas. A primeira parte é elementar. Tomemos  $g, h \in GL(\mathbb{C}, n)$ . Os elementos de  $U_h$  são da forma  $hA(x)$  e os de  $gU_h$  são da forma  $ghA(x) \in U_{gh}$ . Agora, as funções de  $\mathbb{C}_\epsilon$  em  $\mathbb{C}$  dadas por

$$\mathbb{C}_\epsilon \ni x \mapsto \phi_{ij}^{gh}(ghA(x)) = \sum_{k=1}^n (gh)_{ik}x_{kj}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

são polinômios nas variáveis  $x_{ij}$  e, portanto, são analíticas. Assim, o produto é analítico.

Para provar que a inversão é analítica tomemos  $g \in GL(\mathbb{C}, n)$ . Um elemento genérico de  $U_g$  é da forma  $gA(x) = g(\mathbb{1} + X)$ . Agora,

$$(gA(x))^{-1} = (\mathbb{1} + X)^{-1}g^{-1} = g^{-1}(\mathbb{1} + gY(x)g^{-1}), \quad \text{com } Y(x) := \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m X^m.$$

Cada elemento de matriz de  $Y(x)$  é uma função analítica dos  $x_{ij}$ , pois a série de Neumann<sup>7</sup> acima converge absolutamente (claramente, temos que escolher  $\epsilon$  pequeno o suficiente). Agora, as funções

$$\mathbb{C}_\epsilon \ni x \mapsto \phi_{ij}^{g^{-1}}((gA(x))^{-1}) = \phi_{ij}^{g^{-1}}(g^{-1}(\mathbb{1} + gY(x)g^{-1})) = (gY(x)g^{-1})_{ij}$$

são funções analíticas dos  $x_{ij}$ , provando que a aplicação de inversão é analítica. Isso estabelece finalmente que  $GL(\mathbb{C}, n)$  é um grupo de Lie de dimensão  $n^2$ .

**E. 24.8 Exercício.** Há uma maneira alternativa “rápida” de provar que a operação de inversão é analítica: use a regra de Laplace, expressão (9.20), página 360, para calcular a inversa de uma matriz e evoque o fato que o determinante é analítico. ✦

### 24.3.3 Subgrupos Uniparamétricos e seus Geradores

Subgrupos uniparamétricos são muito importantes na teoria dos grupos de Lie. Vamos apresentá-los no caso de matrizes.

<sup>7</sup>Karl Neumann (1832-1925).



**Definição.** Um *subgrupo uniparamétrico* de  $GL(\mathbb{C}, n)$  é um homomorfismo contínuo<sup>8</sup> do grupo  $(\mathbb{R}, +)$  em  $GL(\mathbb{C}, n)$ . Em outras palavras, é uma função que a cada  $t$  real associa continuamente uma matriz inversível  $\gamma(t)$  de modo que

$$\gamma(t)\gamma(t') = \gamma(t+t') \tag{24.2}$$

para todos  $t, t' \in \mathbb{R}$ . Note que de (24.2) segue automaticamente que  $\gamma(0) = \mathbb{1}$  (por que?). ♠

A importância dos subgrupos uniparamétricos reside na seguinte proposição, a qual também começa a revelar a relevância das exponenciais de matrizes na teoria dos grupos de Lie.

**Proposição 24.6** *Seja  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow GL(\mathbb{C}, n)$  um subgrupo uniparamétrico contínuo. Então existe uma matriz  $M \in Mat(\mathbb{C}, n)$ , univocamente definida, tal que  $\gamma(t) = \exp(tM)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Esse fato, em particular, mostra que  $\gamma$  é real-analítica (e, portanto, diferenciável) e que  $M = \gamma'(0)$ . A matriz  $M$  é dita ser o gerador do subgrupo uniparamétrico  $\gamma$ . □*

**Prova.**<sup>9</sup> Se supuséssemos que  $\gamma$  é uma matriz diferenciável próximo a  $t = 0$ , teríamos que para qualquer  $t$

$$\gamma'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\gamma(t+s) - \gamma(t)) = \gamma(t) \left( \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\gamma(s) - \gamma(0)) \right) = \gamma(t)\gamma'(0).$$

Definindo  $M := \gamma'(0)$ , concluiríamos que  $\gamma$  satisfaz a equação diferencial  $\gamma'(t) = \gamma(t)M$ , cuja solução é única (vide Capítulo 13) e dada por  $\gamma(t) = \exp(tM)$ , como queríamos provar.

A demonstração estaria completa, não fosse o fato de que no enunciado supomos apenas que  $\gamma$  é contínua, o que em geral não implica que  $\gamma$  seja também diferenciável em  $t = 0$ . É, no entanto, possível provar que se  $\gamma$  é contínua, então pelo fato de ser um homomorfismo de  $(\mathbb{R}, +)$  segue que  $\gamma$  é também diferenciável próximo a  $t = 0$ ! A ideia é construir a partir de  $\gamma$  uma função  $\tilde{\gamma}$  infinitamente diferenciável e posteriormente mostrar que  $\gamma$  pode ser recuperada de  $\tilde{\gamma}$  por operações diferenciáveis.

Para tal seja  $\theta$  uma função real, positiva infinitamente diferenciável, com suporte compacto contendo  $t = 0$  e tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(s)ds = 1.$$

Um exemplo de uma tal função seria (para  $a < 0 < b$ )

$$\theta(s) = \begin{cases} K \exp\left(-\frac{1}{(s-a)^2(s-b)^2}\right), & \text{para } s \in (a, b) \\ 0, & \text{de outra forma,} \end{cases}$$

que tem suporte  $[a, b] \ni 0$ . Uma escolha conveniente da constante  $K$  garante que  $\int_{-\infty}^{\infty} \theta(s)ds = 1$ .

Assim, seja uma tal função  $\theta$  desse tipo e com suporte em, digamos,  $[-a, a]$  para algum  $a > 0$ , e seja

$$\tilde{\gamma}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t-s)\gamma(s)ds.$$

É fácil (Exercício!) ver que  $\tilde{\gamma}$  assim definida é infinitamente diferenciável. Fora isso,

$$\tilde{\gamma}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t-s)\gamma(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u)\gamma(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u)\gamma(t)\gamma(-u)du = \gamma(t) \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u)\gamma(-u)du = \gamma(t)Y,$$

com  $Y := \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u)\gamma(-u)du$ . Temos que

$$Y - \mathbb{1} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u)(\gamma(-u) - \mathbb{1})du,$$

<sup>8</sup>Vide nota à página 1228.

<sup>9</sup>Extraída de [146]. A observação de que no enunciado da Proposição 24.6 é suficiente supor-se que o subgrupo uniparamétrico  $\gamma$  é apenas contínuo (dispensando uma condição de diferenciabilidade) é devida a von Neumann (John von Neumann (1903–1957)).

pois  $\int_{-\infty}^{\infty} \theta(u) du = 1$ , por hipótese. Logo,

$$\|Y - \mathbb{1}\|_{\mathbb{C}} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u) \|\gamma(-u) - \mathbb{1}\|_{\mathbb{C}} du = \int_{-a}^a \theta(u) \|\gamma(-u) - \mathbb{1}\|_{\mathbb{C}} du \leq c \int_{-a}^a \theta(u) du = c \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u) du = c,$$

onde  $c := \sup_{u \in [-a, a]} \|\gamma(-u) - \mathbb{1}\|_{\mathbb{C}}$ . Como  $\gamma$  é contínua e  $\gamma(0) = \mathbb{1}$ , podemos fazer  $c$  arbitrariamente pequena, escolhendo  $a$  pequeno. Mas isso diz que  $Y = \mathbb{1} - (\mathbb{1} - Y)$  é inversível, com  $Y^{-1}$  dado pela série convergente  $\sum_{m=0}^{\infty} (\mathbb{1} - Y)^m$ . Assim, com  $a$  pequeno teremos  $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)Y^{-1}$ , o que prova que  $\gamma(t)$  é infinitamente diferenciável. ■

**Definição.** O que essa proposição provou é que todo subgrupo uniparamétrico de  $GL(\mathbb{C}, n)$  é da forma  $\exp(tM)$  para alguma matriz  $M \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ . Essa matriz  $M$  é dita ser o gerador do subgrupo uniparamétrico em questão. ♠

Comentemos brevemente que a Proposição 24.6, que acabamos de provar, tem generalizações importantes na teoria dos espaços de Hilbert e de Banach, onde é conhecida como Teorema de Stone<sup>10</sup>. Vide, por exemplo, [260].

• A coleção de todos os geradores de subgrupos uniparamétricos

Seja  $G$  um subgrupo de  $GL(\mathbb{C}, n)$ . Seja definido o seguinte conjunto:

$$\mathcal{L}(G) := \{M \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n) \mid \exp(tM) \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Analogamente, seja  $G$  um subgrupo de  $GL(\mathbb{R}, n)$ . Seja definido o seguinte conjunto:

$$\mathcal{L}(G) := \{M \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n) \mid \exp(tM) \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Em palavras,  $\mathcal{L}(G)$  é a coleção de todos os geradores de todos os subgrupos uniparamétricos de  $G$ . É claro, pela definição, que  $\mathcal{L}(G)$  contém sempre pelo menos a matriz nula (pois  $\exp(t0) = \mathbb{1} \in G, \forall t \in \mathbb{R}$ ), mas não é nem um pouco evidente que esse não seja o único elemento de  $\mathcal{L}(G)$ . Por exemplo, se  $G$  for um grupo discreto então  $\mathcal{L}(G) = \{0\}$ . Mesmo no caso de  $G$  ser um grupo contínuo não é nada óbvio que  $G$  possua subgrupos uniparamétricos não-triviais. Logo abaixo estudaremos essa questão no caso do grupo  $GL(\mathbb{C}, n)$  e, um pouco mais adiante, no caso de subgrupos fechados (não-discretos) de  $GL(\mathbb{C}, n)$ . Em tais casos veremos que  $\mathcal{L}(G)$  não consiste apenas da matriz nula.

Chamamos a atenção do estudante para o fato que, para um grupo  $G$  genérico, não é necessariamente verdade que todo elemento de  $G$  pode ser escrito na forma  $\exp(tM)$  para algum  $M \in \mathcal{L}(G)$  e algum  $t \in \mathbb{R}$ . Ou seja, existem grupos  $G$  nos quais encontram-se elementos que não pertencem a nenhum subgrupo uniparamétrico de  $G$ . Na Proposição 10.10, página 468, vimos que isso ocorre no grupo real  $GL(\mathbb{R}, n)$ , pois esse grupo não é conexo, mas esse fenômeno pode ocorrer mesmo em grupos conexos. Um exemplo será discutido na página 1242, adiante.

\*

A coleção de todos os geradores de todos os subgrupos uniparamétricos de um dado grupo  $G$  é um objeto muito importante, especialmente na teoria dos grupos de Lie. Discutiremos esse fato adiante. No caso do grupo  $GL(\mathbb{C}, n)$  podemos facilmente identificar o que é  $\mathcal{L}(GL(\mathbb{C}, n))$ . Faremos isso agora.

• Subgrupos uniparamétricos de  $GL(\mathbb{C}, n)$  e a álgebra de Lie associada a  $GL(\mathbb{C}, n)$

A coleção de todos os geradores de todos os subgrupos uniparamétricos do grupo  $GL(\mathbb{C}, n)$  será denotada aqui por  $\mathcal{L}(GL(\mathbb{C}, n))$  ou por  $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}, n)$ . Vamos identificar esse conjunto.

Na Proposição 10.11, página 468, demonstramos que todo elemento  $A \in GL(\mathbb{C}, n)$  pode ser escrito na forma  $A = \exp(B)$  para algum  $B \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ . Conseqüentemente,  $A$  pertence ao subgrupo uniparamétrico composto pelas matrizes da forma  $\exp(tB)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Assim,  $GL(\mathbb{C}, n)$  possui subgrupos uniparamétricos não-triviais. Reciprocamente, para todo  $B \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$  o conjunto de matrizes da forma  $\exp(tB)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , forma um subgrupo uniparamétrico de  $GL(\mathbb{C}, n)$ . Concluímos disso que  $\mathcal{L}(GL(\mathbb{C}, n)) = \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ .

Já discutimos por diversas vezes (vide página 99 e seguintes) que o conjunto  $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$  é uma álgebra de Lie com relação ao produto definido pelo comutador de matrizes. Um pouco mais adiante, veremos que esse fato é geral: o conjunto de todos os geradores de um subgrupo fechado (não-discreto) de um grupo de Lie é também uma álgebra de Lie. Esse fato é de importância central na teoria dos grupos de Lie.

<sup>10</sup>Marshall Harvey Stone (1903-1989).

**E. 24.9** *Exercício.* Para  $a, b = 1, \dots, n$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ , sejam  $\gamma_\alpha^{ab}(t)$ , matrizes definidas da seguinte forma:

$$\gamma_\alpha^{ab}(t) := \begin{cases} \mathbb{1} + \alpha t E^{ab}, & \text{para } a \neq b, \\ \mathbb{1} + (e^{\alpha t} - 1) E^{aa}, & \text{para } a = b, \end{cases} \quad \text{com } t \in \mathbb{R}.$$

Aqui  $E^{ab}$  é a matriz cujos elementos  $ij$  são dados por  $(E^{ab})_{ij} = \delta_{ia} \delta_{jb}$ , ou seja,  $E^{ab}$  é a matriz cujos elementos de matriz são todos nulos, exceto o elemento  $ab$ , que vale 1. Mostre que as matrizes  $\gamma_\alpha^{ab}$  são subgrupos uniparamétricos de  $GL(\mathbb{C}, n)$ , ou seja, que  $\gamma_\alpha^{ab}(t)$  são contínuas e que  $\gamma_\alpha^{ab}(t)\gamma_\alpha^{ab}(t') = \gamma_\alpha^{ab}(t+t')$  para todo  $a, b$  e todo  $\alpha$ . (*Sugestão:* mostre que  $(E^{ab})^2 = \delta_{ab} E^{ab}$  e use esse fato). Mostre que seus geradores são as matrizes  $\alpha E^{ab}$ . Constate também explicitamente que  $\gamma_\alpha^{ab}(t) = \exp(\alpha t E^{ab})$ .  $\clubsuit$

Note que a coleção formada por todas combinações lineares reais dos geradores dos subgrupos uniparamétricos  $\gamma_\alpha^{ab}$  de  $GL(\mathbb{C}, n)$  coincide com  $Mat(\mathbb{C}, n)$  (por que?).

**E. 24.10** *Exercício.* Como são as relações de comutação das matrizes  $E^{ab}$ ?  $\clubsuit$

• **Homomorfismos não-contínuos de  $(\mathbb{R}, +)$**

Contemplando a definição de subgrupo uniparamétrico que apresentamos acima, como sendo um homomorfismo contínuo de  $(\mathbb{R}, +)$  em um grupo  $G$ , o estudante pode legitimamente questionar se existem, afinal, homomorfismos não-contínuos desse grupo que justifiquem a necessidade de evocar a condição de continuidade na Proposição 24.6. Talvez um tanto surpreendentemente, a resposta é positiva. Há até mesmo automorfismos não-contínuos de  $(\mathbb{R}, +)$  em si mesmo, os quais foram apresentados à página 140, onde discutimos a existência de funções descontínuas de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  que satisfazem  $f(t) + f(t') = f(t+t')$  para todos  $t, t' \in \mathbb{R}$ . Assim, com o uso de uma tal função  $f$ , é relativamente fácil construir um homomorfismo não-contínuo de  $(\mathbb{R}, +)$  em um grupo  $G$  dado, caso conheçamos um homomorfismo contínuo de  $(\mathbb{R}, +)$  em  $G$ . De fato, se  $\gamma(t), t \in \mathbb{R}$ , é um homomorfismo contínuo de  $(\mathbb{R}, +)$  em  $G$  então  $\gamma(f(t)), t \in \mathbb{R}$ , é um homomorfismo de  $(\mathbb{R}, +)$  em  $G$ , mas que não é contínuo. Dada a “artificialidade” daquelas funções  $f$ , tais exemplos são um tanto patológicos, mas explicam a necessidade de incluir a condição de continuidade na definição de subgrupo uniparamétrico e na Proposição 24.6, página 1226.

### 24.3.4 Subgrupos Uniparamétricos e Álgebras de Lie

• **Subgrupos uniparamétricos em subgrupos fechados**

**Definição.** Seja  $H$  um subgrupo fechado mas não discreto de  $GL(\mathbb{C}, n)$ . Definimos,

$$\mathcal{L}(H) := \{X \in Mat(\mathbb{C}, n) \text{ tais que } e^{tX} \in H \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$



Como se vê, trata-se do conjunto dos geradores de todos os subgrupos uniparamétricos de  $H$ . É claro, pela definição acima, que  $\mathcal{L}(H)$  possui pelo menos um elemento, a saber a matriz nula, pois, obviamente  $e^{t0} = \mathbb{1} \in H$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Não é nem um pouco óbvio, porém, que haja outros elementos em  $\mathcal{L}(H)$  que não o elemento nulo. Não é sequer óbvio que existam subgrupos uniparamétricos não-triviais<sup>11</sup> em  $H$ . Na Proposição 24.7 adiante, provaremos que  $\mathcal{L}(H)$ , de fato, é não-trivial e que há, de fato, subgrupos uniparamétricos não-triviais em  $H$ . Para demonstrarmos a Proposição 24.7 precisamos de algumas definições e de alguns resultados preparatórios. Seguiremos muito proximamente a exposição de [245] (vide todo o §2 do Capítulo XI daquela referência), mas com ligeiras correções e aperfeiçoamentos.

Para simplificar a notação denotaremos aqui o grupo  $GL(\mathbb{C}, n)$  por  $G$  e sua álgebra de Lie  $Mat(\mathbb{C}, n)$  por  $\mathfrak{g}$ .

Fixemos doravante um número  $r > 0$ , arbitrário mas conveniente, e seja  $\mathfrak{w}_r$  a bola fechada de raio  $r$  centrada na origem em  $\mathfrak{g}$ :

$$\mathfrak{w}_r := \{X \in \mathfrak{g} \mid \|X\| \leq r\}. \tag{24.3}$$

<sup>11</sup>Um subgrupo uniparamétrico  $\gamma(t)$  é trivial se  $\gamma(t)$  for igual ao elemento neutro para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Notemos que  $\mathfrak{w}_r$  é simétrica, ou seja, se  $X \in \mathfrak{w}_r$  então  $-X \in \mathfrak{w}_r$ . Denotaremos por  $\mathfrak{w}_r^O$  a bola aberta de raio  $r$  centrada na origem em  $\mathfrak{g}$ :

$$\mathfrak{w}_r^O := \{X \in \mathfrak{g} \mid \|X\| < r\}. \tag{24.4}$$

Vamos denotar por  $W_r$  a imagem de  $\mathfrak{w}_r$  pela exponenciação:

$$W_r := \{\exp(X), X \in \mathfrak{w}_r\}. \tag{24.5}$$

É claro que  $W_r \subset G$  e é claro que  $W_r$  é simétrico, ou seja, se  $Y \in W_r$  então  $Y^{-1} \in W_r$ .

Como  $H$  é um subconjunto fechado de  $G$ , o conjunto  $H \cap W_r$  é fechado. Seja  $\mathfrak{f}_r$  o subconjunto de  $\mathfrak{w}_r$  formado pelos elementos cuja exponencial está em  $H \cap W_r$ :

$$\mathfrak{f}_r := \{X \in \mathfrak{w}_r \mid \exp(X) \in H \cap W_r\}. \tag{24.6}$$

Comentemos que, pela Proposição 10.11, página 468, todo elemento de  $H$  é uma exponencial de algum elemento de  $\mathfrak{g} = \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ . Portanto, todo  $h \in H \cap W_r$  é da forma  $h = \exp(f)$  para algum  $f \in \mathfrak{f}_r$ . Simbolicamente, podemos escrever

$$\exp(\mathfrak{f}_r) = H \cap W_r. \tag{24.7}$$

É bastante claro que  $\mathfrak{f}_r$  é também simétrico. Como  $\exp$  é contínua,  $\mathfrak{f}_r$  é também fechado (vide Seção 32.5.2, página 1491). Fora isso,  $\mathfrak{f}_r \subset \mathfrak{w}_r$ , por definição. Logo,  $\mathfrak{f}_r$  é limitado. Por ser fechado e limitado,  $\mathfrak{f}_r$  é compacto.

Definamos  $\mathcal{M}(H, W_r) \equiv \mathcal{M}_r$  por

$$\mathcal{M}_r := \{X \in \mathfrak{g} \text{ tais que, para algum } \epsilon > 0, \text{ tem-se } \exp(tX) \in H \cap W_r \text{ sempre que } |t| < \epsilon\}. \tag{24.8}$$

Alternativamente, é claro que

$$\mathcal{M}_r = \{X \in \mathfrak{g} \text{ tais que, para algum } \epsilon > 0, \text{ tem-se } tX \in \mathfrak{f}_r \text{ sempre que } |t| < \epsilon\}.$$

Note-se que  $\mathcal{M}_r$  contém sempre ao menos um elemento, a saber, 0. Não é nada óbvio, porém, se esse é o único elemento de  $\mathcal{M}_r$ . No Corolário 24.1, adiante, provaremos que tal não é o caso, ou seja,  $\mathcal{M}_r$  não é trivial. Antes disso precisamos de dois lemas preparatórios.

**Lema 24.1** *Com as definições acima, valem as seguintes afirmações. I. Se  $X \in \mathcal{M}_r$  então  $\lambda X \in \mathcal{M}_r$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . II.  $\mathfrak{w}_r \cap \mathcal{M}_r \subset \mathfrak{f}_r$ . □*

**Prova do Lema 24.1.** Se  $X \in \mathcal{M}_r$  então, para algum  $\epsilon > 0$  tem-se  $tX \in \mathfrak{f}_r$  sempre que  $|t| < \epsilon$ . Mas, então, se  $\lambda \neq 0$ , vale  $t(\lambda X) \in \mathfrak{f}_r$  sempre que  $|t| < \epsilon/|\lambda|$ . Isso prova a afirmativa **I**.

Seja agora  $X \in \mathfrak{w}_r \cap \mathcal{M}_r$ . Queremos provar que  $X \in \mathfrak{f}_r$ . Como  $X \in \mathcal{M}_r$  então, para algum  $\epsilon > 0$  tem-se  $\exp(tX) \in H \cap W_r$  sempre que  $|t| < \epsilon$ . Assim, para  $n \in \mathbb{N}$  grande o suficiente ( $n > \epsilon^{-1}$ ) teremos  $\exp(n^{-1}X) \in H \cap W_r$  o que, em particular, diz que  $\exp(n^{-1}X) \in H$ . Como  $H$  é um grupo, tem-se que  $(\exp(n^{-1}X))^n \in H$ . Mas o lado esquerdo é  $\exp(X)$  e, portanto, concluímos que  $\exp(X) \in H$ . Agora, por hipótese,  $X \in \mathfrak{w}_r$ , o que implica, pela definição de  $W_r$ , que  $\exp(X) \in W_r$ . Logo, mostramos que  $\exp(X) \in H \cap W_r$ , o que significa que  $X \in \mathfrak{f}_r$ . Provamos, assim, que  $\mathfrak{w}_r \cap \mathcal{M}_r \subset \mathfrak{f}_r$ . Isso completa a prova do Lema 24.1. ■

Podemos agora demonstrar o seguinte lema, de importância central no presente contexto e, talvez, o resultado preparatório tecnicamente mais difícil.

**Lema 24.2** *Seja  $X_n, n \in \mathbb{N}$ , uma seqüência de elementos de  $\mathfrak{f}_r$  tais que  $X_n \neq 0$ . Suponhamos que  $X_n \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$  e que  $X_n/\|X_n\| \rightarrow Y$  para algum  $Y \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ . Então<sup>12</sup>  $Y \in \mathcal{M}_r$ . □*

<sup>12</sup>Após a demonstração do Lema 24.2, discutiremos à página 1231 que de fato existem seqüências satisfazendo essas hipóteses.

Prova do Lema 24.2. Notemos antes de mais nada que se  $Y_n := X_n/\|X_n\| \rightarrow Y \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$  então  $Y \neq 0$ . Em verdade,  $\|Y\| = 1$  pois, fazendo uso da desigualdade (3.24), página 208, temos  $|\|Y_n\| - \|Y\|| \leq \|Y_n - Y\|$ . Como o lado direito vai a zero quando  $n \rightarrow \infty$ , segue que  $\|Y\| = 1$ , pois  $\|Y_n\| = 1$ .

Fixemos também um número  $m \in \mathbb{N}$  não-nulo. Podemos escrever  $\mathfrak{w}_r$  como a união

$$\mathfrak{w}_r = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{s}_k,$$

onde

$$\mathfrak{s}_k \equiv \mathfrak{s}_k^r := \left\{ X \in \mathfrak{w}_r \mid \frac{k-1}{m}r \leq \|X\| \leq \frac{k}{m}r \right\},$$

ou seja, podemos escrever  $\mathfrak{w}_r$  como uma união de “fatias”, ou cascas esféricas, de vetores com normas entre  $\frac{k-1}{m}r$  e  $\frac{k}{m}r$ . Note-se que  $\mathfrak{s}_1$  é a bola fechada de raio  $r/m$  centrada em 0:

$$\mathfrak{s}_1 = \left\{ X \in \mathfrak{w}_r \mid \|X\| \leq \frac{r}{m} \right\}.$$

Como  $X_n$  converge a 0, existe um número  $N_m$  (que pode depender de  $m$ ) tal que  $X_n \in \mathfrak{s}_1$  para todo  $n > N_m$ . Seja agora um  $k_0 \in \mathbb{N}$  fixo, escolhido de modo que  $1 < k_0 \leq m$ . Vamos mostrar que para cada  $n > N_m$  podemos encontrar um número inteiro  $j_n$  (eventualmente dependente de  $n$ ) de modo que  $j_n X_n \in \mathfrak{s}_{k_0}$ , ou seja, tal que

$$\frac{(k_0-1)r}{m} \leq \|j_n X_n\| \leq \frac{k_0 r}{m}.$$

Para isso, é suficiente escolhermos um  $j_n$  inteiro satisfazendo

$$\frac{(k_0-1)r}{m\|X_n\|} \leq |j_n| \leq \frac{k_0 r}{m\|X_n\|}.$$

Haverá inteiros no intervalo entre  $\frac{(k_0-1)r}{m\|X_n\|}$  e  $\frac{k_0 r}{m\|X_n\|}$ ? Para ver isso, notemos que o comprimento desse intervalo é

$$\frac{k_0 r}{m\|X_n\|} - \frac{(k_0-1)r}{m\|X_n\|} = \frac{r}{m\|X_n\|} \geq 1,$$

pois  $\|X_n\| \leq \frac{r}{m}$ , dado que  $X_n \in \mathfrak{s}_1$ . Então, uma tal escolha de  $j_n$  é sempre possível para cada  $n$  (pois todo intervalo fechado de comprimento igual ou maior que 1 contém ao menos um inteiro).

Vamos denominar  $j_n X_n$  por  $Y_n^{(k_0)}$  (com  $k_0$  fixo). É evidente que  $Y_n^{(k_0)} \in \mathfrak{s}_{k_0} \subset \mathfrak{w}_r$ . Isso implica que  $\exp\left(Y_n^{(k_0)}\right) \in W_r$ . Fora isso,  $\exp\left(Y_n^{(k_0)}\right) = \exp(j_n X_n) = (\exp(X_n))^{j_n}$ . Como  $\exp(X_n)$  pertence ao grupo  $H$  (pois  $X_n \in \mathfrak{f}_r$ ), segue pela propriedade de grupo que também tem-se  $\exp\left(Y_n^{(k_0)}\right) \in H$  (é por essa razão que escolhemos  $j_n$  inteiro). Com isso, provamos que  $\exp\left(Y_n^{(k_0)}\right) \in H \cap W_r$ , o que significa que<sup>13</sup>  $Y_n^{(k_0)} \in \mathfrak{f}_r$ .

O conjunto  $\mathfrak{f}_r$  é fechado e limitado e, portanto, compacto. Isso significa que existe uma subsequência  $Y_{n_l}^{(k_0)}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , que é convergente em  $\mathfrak{f}_r$ . Agora, como  $Y_n = X_n/\|X_n\|$  converge a  $Y$ , isso significa que  $Y_{n_l}^{(k_0)}$  converge a um múltiplo de  $Y$ , digamos  $\lambda^{(k_0)} Y$ , pois  $Y_{n_l}^{(k_0)}$  é um múltiplo de  $Y_{n_l}$ , a saber,  $Y_{n_l}^{(k_0)} = j_{n_l} \|X_{n_l}\| Y_{n_l}$ . Portanto, para um tal  $\lambda^{(k_0)}$  temos  $\lambda^{(k_0)} Y \in \mathfrak{f}_r$ . Note que também tem-se  $-\lambda^{(k_0)} Y \in \mathfrak{f}_r$ , bastando para tal trocar  $X_n$  por  $-X_n$  na argumentação acima, o que é permitido pois  $\mathfrak{f}_r$  é simétrico.

Assim,  $\lambda^{(k_0)} = \lim_{l \rightarrow \infty} j_{n_l} \|X_{n_l}\|$  e, conseqüentemente,

$$\frac{(k_0-1)r}{m} \leq \left| \lambda^{(k_0)} \right| \leq \frac{k_0 r}{m}.$$

O que provamos acima vale para cada  $k_0 \in \mathbb{N}$  com  $1 < k_0 \leq m$ . Resumindo nossas conclusões, provamos que para todo  $m \in \mathbb{N}$ , cada intervalo  $I_{k_0, m} := \left[ \frac{(k_0-1)r}{m}, \frac{k_0 r}{m} \right]$  com  $1 < k_0 \leq m$  contém pelo menos um  $\lambda^{(k_0)}$  tal que  $\pm \lambda^{(k_0)} Y \in \mathfrak{f}_r$ .

<sup>13</sup>Em [245] o argumento que prova que  $Y_n^{(k_0)} \in \mathfrak{f}_r$  não está correto, lamentavelmente.

A união  $\bigcup_{k_0=2}^m I_{k_0, m}$  é o conjunto  $[\frac{1}{m}r, r]$ . Esses intervalos  $I_{k_0, m}$  podem ser feitos mais finos e em maior número, fazendo  $m \rightarrow \infty$ , sendo que  $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} [\frac{1}{m}r, r] = (0, r]$ .

Concluimos disso que existe um conjunto contável denso de números  $\lambda$  no intervalo  $(0, r]$  tais que  $\pm\lambda Y \in \mathfrak{f}_r$ . Como  $\mathfrak{f}_r$  é fechado, isso implica que  $\lambda Y \in \mathfrak{f}_r$  para todo  $\lambda \in [-r, r]$ . Agora, isso significa precisamente que  $Y \in \mathcal{M}_r$ , que é o que queríamos provar.

A prova do Lema 24.2 está completa. ■

Podemos nos perguntar agora, será que existem sequências  $X_n$  satisfazendo as hipóteses do Lema 24.2, ou seja, tais que  $X_n/\|X_n\|$  convirja para algum  $Y$ ? É fácil ver que sim. Notemos para isso que para qualquer sequência  $X_n \in \mathfrak{f}_r$  com  $X_n \rightarrow 0$  a sequência  $Y_n = X_n/\|X_n\|$  está contida no conjunto compacto formado pelos vetores de norma 1. Assim,  $Y_n$  sempre tem uma subsequência convergente a algum  $Y$ , que também tem norma 1. A essa subsequência aplica-se então o Lema 24.2 e tem-se  $Y \in \mathcal{M}_r$ . Isso, em particular, mostra-nos que  $\mathcal{M}_r$  é não-trivial, ou seja, contém elementos não-nulos. Provamos então:

**Corolário 24.1** *O conjunto  $\mathcal{M}_r$  definido acima contém elementos diferentes de 0.* □

Esse simples corolário é crucial para o que segue<sup>14</sup>, pois tem a seguinte consequência.

**Proposição 24.7** *Seja  $H$  um subgrupo fechado e não-discreto de  $GL(\mathbb{C}, n)$ . Então valem as seguintes afirmativas. I.  $\mathcal{M}_r = \mathcal{L}(H)$  para qualquer  $r > 0$ . II.  $\mathcal{L}(H)$  é não-trivial, ou seja, não consiste apenas da matriz nula. Há, portanto, subgrupos uniparamétricos não-triviais em  $H$ .* □

*Prova.* Seja o conjunto  $\mathcal{M}_r \equiv \mathcal{M}(H, W_r)$  definido em (24.8), com  $W_r$  definido em (24.3)-(24.5) para algum  $r > 0$ . Provaremos que  $\mathcal{M}(H, W_r) = \mathcal{L}(H)$ .

Em primeiro lugar, é claro (por definição!) que se  $X \in \mathcal{L}(H)$  teremos  $\exp(tX) \in H, \forall t \in \mathbb{R}$ . Se  $X = 0$  então  $X \in \mathcal{M}(H, W_r)$  trivialmente. Se  $X \neq 0$  então, se escolhermos  $|t| < r/\|X\|$ , teremos que  $tX \in \mathfrak{w}_r$ . Logo,  $X \in \mathcal{M}(H, W_r)$ . Isso mostra que  $\mathcal{L}(H) \subset \mathcal{M}(H, W_r)$ .

Seja  $X \in \mathcal{M}(H, W_r)$  com  $X \neq 0$ . Pelo Corolário 24.1, um tal  $X$  existe. Assim, existe um  $\epsilon > 0$  tal que  $\exp(t'X) \in H$  para todo  $t' \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Seja agora  $t \in \mathbb{R}$  qualquer. Se escolhermos  $n \in \mathbb{Z}$  com  $|n|$  grande o suficiente, teremos  $|t/n| < \epsilon$ . Daí,  $\exp((t/n)X) \in H$  e, como  $H$  é um grupo,  $\exp(tX) = (\exp((t/n)X))^n \in H$ . Como isso vale para qualquer  $t \in \mathbb{R}$  provamos que  $X \in \mathcal{L}(H)$ .

Com isso provamos que  $\mathcal{M}(H, W_r) \subset \mathcal{L}(H)$  e, portanto,  $\mathcal{M}(H, W_r) = \mathcal{L}(H)$ . Assim, pelo Corolário 24.1,  $\mathcal{L}(H)$  é não-trivial. Consequentemente existem em  $H$  subgrupos uniparamétricos não-triviais, a saber aqueles que têm como geradores os elementos não-nulos de  $\mathcal{M}(H, W_r)$ . ■

\*

Chegamos agora ao ponto em que boa parte do que fizemos será unificado e revelaremos a importância de subgrupos uniparamétricos para os grupos de Lie matriciais.

• **Subgrupos uniparamétricos e álgebras de Lie**

Seja  $H$  um subgrupo fechado e não-discreto de  $GL(\mathbb{C}, n)$ . O seguinte teorema, o qual é uma consequência das fórmulas de Lie-Trotter e do comutador (fórmulas (10.33) e 10.34 da Proposição 10.12, página 470. Vide Capítulo 10), é de importância fundamental:

<sup>14</sup>Infelizmente, alguns textos como [291], [336] e mesmo (surpreendentemente) [258], não provam que  $\mathcal{M}_r$  é não-trivial, o que torna suas demonstrações do Teorema 24.2 incompletas. Mesmo [245], que prova os Lemas 24.1 e 24.2, não menciona o Corolário 24.1, embora o mesmo fique implícito pela sua análise. A referência [146]-[147], que segue outra e muito interessante linha de raciocínio, é explícita quanto ao Corolário 24.1.

**Teorema 24.1** *Se  $H$  é um subgrupo fechado e não-discreto de  $GL(\mathbb{C}, n)$  então  $\mathcal{L}(H)$ , definida acima, é uma álgebra de Lie real<sup>15</sup>.  $\square$*

*Prova.* Vamos primeiramente mostrar que  $\mathcal{L}(H)$  é um espaço vetorial real. Para tal, precisamos mostrar que se  $X$  e  $Y$  são geradores de dois subgrupos uniparamétricos de  $H$ , então  $\alpha X + \beta Y$  também o é, para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Começemos observando que  $\gamma(t) := \exp(t(\alpha X + \beta Y))$  é um subgrupo uniparamétrico contínuo de  $GL(\mathbb{C}, n)$  cujo gerador é obviamente  $\alpha X + \beta Y$ . Tudo o que precisamos fazer é mostrar que  $\gamma(t) \in H$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Pela fórmula de Lie-Trotter (fórmula (10.33) da Proposição 10.12, página 470),

$$\exp(t(\alpha X + \beta Y)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \exp\left(\frac{t\alpha}{m}X\right) \exp\left(\frac{t\beta}{m}Y\right) \right]^m. \quad (24.9)$$

Observemos então o seguinte. Pela hipótese, as matrizes  $\exp\left(\frac{t\alpha}{m}X\right)$  e  $\exp\left(\frac{t\beta}{m}Y\right)$  pertencem ao grupo  $H$ , pois supomos que  $X$  e  $Y$  são geradores de subgrupos uniparamétricos de  $H$ . Portanto os produtos  $\exp\left(\frac{t\alpha}{m}X\right) \exp\left(\frac{t\beta}{m}Y\right)$  são também elementos de  $H$ , pois  $H$  é um grupo. Ora, o lado direito de (24.9) é, portanto, o limite de uma sequência de elementos de  $H$ . Como supomos que  $H$  é fechado, segue que o limite é igualmente um elemento de  $H$ , como queríamos mostrar. Isso provou então que  $\alpha X + \beta Y \in \mathcal{L}(H)$  para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e, portanto,  $\mathcal{L}(H)$  é um espaço vetorial real.

Vamos mostrar agora que  $\mathcal{L}(H)$  é uma álgebra de Lie. Se  $X, Y \in \mathcal{L}(H)$  temos, pela fórmula do comutador (fórmula 10.34 da Proposição 10.12, página 470), e usando  $[tX, Y] = t[X, Y]$ , que

$$\exp(t[X, Y]) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \exp\left(\frac{t}{m}X\right) \exp\left(\frac{1}{m}Y\right) \exp\left(-\frac{t}{m}X\right) \exp\left(-\frac{1}{m}Y\right) \right]^{m^2}. \quad (24.10)$$

Raciocínio idêntico ao que empregamos acima conclui que  $\exp(t[X, Y]) \in H$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , mostrando que  $[X, Y]$  é o gerador de um subgrupo uniparamétrico contínuo de  $H$ , ou seja,  $[X, Y] \in \mathcal{L}(H)$ . Isso provou que  $\mathcal{L}(H)$  é uma álgebra de Lie.  $\blacksquare$

*Comentário.* Se para todo  $X \in \mathcal{L}(H)$  tivermos também  $\alpha X \in \mathcal{L}(H)$  para todo  $\alpha \in \mathbb{C}$ , conclui-se pela demonstração acima que  $\mathcal{L}(H)$  é uma álgebra de Lie complexa.  $\clubsuit$

### 24.3.5 Subgrupos Fechados de $GL(\mathbb{C}, n)$

Nesta Seção provaremos o seguinte teorema:

**Teorema 24.2** *Se  $H$  é um subgrupo topologicamente fechado de  $GL(\mathbb{C}, n)$  (na topologia métrica induzida de  $GL(\mathbb{C}, n)$ ), então  $H$  é também um grupo de Lie (na topologia métrica induzida de  $GL(\mathbb{C}, n)$ ).  $\square$*

Observamos que o enunciado desse teorema é válido mesmo no caso de  $H$  ser um subgrupo discreto, pois nesse caso  $H$  é um grupo de Lie enquanto variedade de dimensão zero. No correr da demonstração, adiante, suporemos  $H$  não discreto, eliminando esse caso trivial.

O Teorema 24.2 é particularmente importante pois muitos grupos encontrados em aplicações são subgrupos fechados de  $GL(\mathbb{C}, n)$  ou de  $GL(\mathbb{R}, n)$ . Tal é o caso, por exemplo, dos grupos  $U(n)$ ,  $U(p, q)$ ,  $SU(n)$ ,  $SU(p, q)$ ,  $O(n)$ ,  $SO(n)$  e outros. Assim, o Teorema 24.2 informa-nos que tais grupos são grupos de Lie.

A prova desse teorema será oferecida à página 1234. Antes de chegarmos lá precisaremos apresentar vários teoremas preparatórios. Chamamos a atenção do leitor para o fato que as demonstrações de alguns desses resultados preparatórios são bastante técnicas e talvez devam ser omitidas em uma primeira leitura.

Seja  $H$  um subgrupo fechado não-discreto de  $G = GL(\mathbb{C}, n)$ . Sabemos pelo Teorema 24.1 que  $\mathcal{L}(H)$  é um subespaço de  $\mathcal{L}(G) = \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ . Seja  $\mathcal{L}(H)^\perp$  seu complemento ortogonal (em relação a algum produto escalar em  $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ ), por

<sup>15</sup>Álgebras de Lie foram definidas à página 99.

exemplo  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^*B)$ ). Todo elemento  $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$  pode ser escrito de modo único na forma  $A = A^\parallel + A^\perp$ , com  $A^\parallel \in \mathcal{L}(H)$  e  $A^\perp \in \mathcal{L}(H)^\perp$ .

Seja assim a função  $\Phi_H : \mathcal{L}(G) \rightarrow G$  definida por

$$\Phi_H(A) := \exp(A^\parallel) \exp(A^\perp) .$$

**Lema 24.3** Para  $H$ , subgrupo fechado e conexo de  $\text{GL}(\mathbb{C}, n)$ , existe  $r_0 > 0$  tal que a aplicação  $\Phi_H$  definida acima é um homeomorfismo do aberto  $\mathfrak{w}_{r_0}^O$  em um aberto  $\Phi_H(\mathfrak{w}_{r_0}^O) \supset W_{r'_0}$  para um certo  $r'_0 > 0$ . □

Acima,  $\mathfrak{w}_{r_0}^O$  é a bola aberta de raio  $r_0$  em torno da matriz nula. Vide (24.4).

*Prova.* Escolhamos  $r_0$  pequeno o suficiente para que valha a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff<sup>16</sup>. Considere-se a aplicação  $\phi_H : \mathcal{L}(G) \rightarrow \mathcal{L}(G)$  definida por  $\phi_H(A) = \ln(\Phi_H(A))$ , ou seja,

$$\phi_H(A) := \ln\left(\exp(A^\parallel) \exp(A^\perp)\right) = A^\parallel * A^\perp = A + \varphi_H(A) ,$$

(lembre-se que  $A^\parallel + A^\perp = A$ ) onde

$$\varphi_H(A) := \frac{1}{2} [A^\parallel, A^\perp] + \frac{1}{12} \left( [A^\parallel, [A^\parallel, A^\perp]] + [A^\perp, [A^\perp, A^\parallel]] \right) + \dots .$$

Como facilmente se constata,  $\frac{\|\varphi_H(A)\|}{\|A\|} \rightarrow 0$  para  $\|A\| \rightarrow 0$ . Assim,  $\phi_H$  é contínua e diferenciável em uma vizinhança de 0 e sua derivada em 0 é a identidade. Assim, pelo bem conhecido Teorema da Aplicação Inversa (vide, Seção 28.3, página 1394, ou por exemplo, [217]),  $\phi_H$  é um homeomorfismo entre  $\mathfrak{w}_{r_0}^O$  e sua imagem. Como  $\Phi_H = \exp \circ \phi_H$  e a exponencial é também um homeomorfismo local (Proposição 10.4, página 463), a prova do Lema 24.3 está completa. ■

Seja  $H$  um subgrupo fechado de  $\text{GL}(\mathbb{C}, n)$ . Vimos acima que  $\mathcal{L}(H) \subset \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$  é uma álgebra de Lie real e, como tal, um subespaço de  $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ . É evidente que se  $A \in \mathcal{L}(H)$  então  $\exp(A) \in H$ . Vamos denotar por  $\tilde{H}$  o subgrupo de  $H$  cujos elementos são produtos finitos de exponenciais de elementos de  $\mathcal{L}(H)$ :

$$\tilde{H} := \left\{ h \in H, h = \exp(A_1) \cdots \exp(A_m) \text{ para algum } m \in \mathbb{N} \right\} .$$

$\tilde{H}$  é de fato um grupo, pois

1.  $\mathbb{1} \in \tilde{H}$ ,
2. se  $h = \exp(A_1) \cdots \exp(A_m) \in \tilde{H}$  então  $h^{-1} = \exp(-A_m) \cdots \exp(-A_1) \in \tilde{H}$  e
3. se  $h = \exp(A_1) \cdots \exp(A_m)$  e  $h' = \exp(A'_1) \cdots \exp(A'_{m'}) \in \tilde{H}$  então tem-se, evidentemente,

$$hh' = \exp(A_1) \cdots \exp(A_m) \exp(A'_1) \cdots \exp(A'_{m'}) \in \tilde{H} .$$

O grupo  $\tilde{H}$  é denominado *subgrupo gerado por*  $\mathcal{L}(H)$ . Vamos provar o seguinte teorema:

**Teorema 24.3** Se  $H$  é fechado e conexo então  $\tilde{H} = H$ . □

*Prova.* Já é evidente, pela definição, que  $\tilde{H} \subset H$ , de modo que queremos apenas provar que  $H \subset \tilde{H}$ . Seja  $r > 0$ , fixo. O que faremos é provar que  $\mathfrak{f}_r \subset \mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}$  para algum  $r' > 0$ . Se isso for verdadeiro, então, pela definição de  $\mathfrak{f}_r$  em (24.6) e por (24.7), os elementos de  $H \cap W_r$  são da forma  $\exp(A)$  com  $A \in \mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}$ . Agora, pelo fato de  $H$  ser conexo, sabemos pela Proposição 24.3, que todo elemento de  $H$  pode ser escrito como um produto finito de elementos do interior de  $H \cap W_r$ . Logo, todo elemento de  $H$  pode ser escrito como um produto finito  $\exp(A_1) \cdots \exp(A_m)$ , para algum  $m \in \mathbb{N}$ , com  $A_k \in \mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}$ . Ora, isso está precisamente dizendo que  $H \subset \tilde{H}$ , que é o que queríamos provar.

<sup>16</sup>Vide Capítulo 10, página 456. A fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff é dada em (10.60) à página 483.



Vamos então mostrar que  $\mathfrak{f}_r \subset \mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}$  para algum  $r' > 0$ . A demonstração será feita por absurdo, ou seja, supondo que não existam  $r$  e  $r' > 0$  tais que  $\mathfrak{f}_r \subset \mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}$  e chegando-se daí a uma contradição.

É muito fácil ver pela definição dos conjuntos  $\mathfrak{f}_r$  em (24.6) que  $\mathfrak{f}_{r_1} \subset \mathfrak{f}_{r_2}$  sempre que  $r_1 \leq r_2$ . Além disso,  $\bigcap_{r>0} \mathfrak{f}_r = \{0\}$ .

Para um  $r'$  arbitrário, fixo, vamos então supor que não haja nenhum  $\mathfrak{f}_r$  com  $\mathfrak{f}_r \subset \mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}$ . Isso implica que  $\mathfrak{f}_r \setminus (\mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}) \neq \emptyset$  para todo  $r$ . Fixando  $r$ , poderíamos escolher uma sequência  $r_n < r$ ,  $r_n \rightarrow 0$  com  $\mathfrak{f}_{r_n} \setminus (\mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}) \neq \emptyset$ . Escolhendo para cada  $n$  um elemento  $X_n \in \mathfrak{f}_{r_n} \setminus (\mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'})$ , teremos que  $X_n \in \mathfrak{f}_r \setminus (\mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'})$  para todo  $n$  e  $X_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Como  $X_n \rightarrow 0$ , teremos  $\exp(X_n) \in W_{r'_0}$  para todo  $n$  grande o suficiente, onde  $r'_0$  é referido no enunciado do Lema 24.3. Assim, pelo mesmo lema, existirá para cada um de tais  $n$ 's um elemento  $Z_n \in \mathfrak{w}_{r_0}$ ,  $Z_n = Z_n^{\parallel} + Z_n^{\perp}$ , tal que  $\exp(X_n) = \Phi_H(Z_n) = \exp(Z_n^{\parallel}) \exp(Z_n^{\perp})$ .

Antes de prosseguirmos, façamos algumas observações sobre  $Z_n^{\parallel}$  e  $Z_n^{\perp}$ . Como  $X_n \rightarrow 0$ , deve valer também  $Z_n \rightarrow 0$  já que, pelo Lema 24.3,  $\Phi_H$  e sua inversa são contínuas. Assim, tem-se igualmente  $Z_n^{\parallel} \rightarrow 0$  e  $Z_n^{\perp} \rightarrow 0$ . Pela parte **II** do Lema 24.1 e pela parte **I** da Proposição 24.7, segue que  $\mathfrak{w}_r \cap \mathcal{L}(H) \subset \mathfrak{f}_r$ . Daí, para  $n$  grande o suficiente, ter-se-á  $Z_n^{\parallel} \in \mathfrak{f}_r$ . Note-se também que, como  $X_n \notin \mathcal{L}(H)$  para  $n$  grande, teremos  $Z_n^{\perp} \neq 0$ , pois, se assim não fosse, valeria  $\exp(X_n) = \exp(Z_n^{\parallel})$  e, tomando-se o logaritmo (o que é permitido para  $n$  grande, já que  $\|X_n\|$  e  $\|Z_n^{\parallel}\|$  estão ambos próximos a zero), obteríamos  $X_n = Z_n^{\parallel} \in \mathcal{L}(H)$ , o que é impossível.

Como consequência das observações acima, teremos que  $\exp(Z_n^{\perp}) = \exp(-Z_n^{\parallel}) \exp(X_n)$ . Sucede que  $\exp(X_n) \in H \cap W_r$  e  $\exp(-Z_n^{\parallel}) \in H \cap W_r$ . Assim  $\exp(Z_n^{\perp}) \in H$  e,  $\|Z_n^{\perp}\| \leq \|Z_n\| < r_0$ . Logo,  $\exp(Z_n^{\perp}) \in H \cap W_{r_0}$ . Portanto,  $Z_n^{\perp} \in \mathfrak{f}_{r_0}$ .

Como consequência do Lema 24.2, da parte **I** da Proposição 24.7 e da compacidade de  $\mathfrak{f}_{r_0}$ , a sequência de vetores de norma 1 dada por  $Z_n^{\perp}/\|Z_n^{\perp}\|$  tem uma subsequência que converge a um elemento de  $\mathcal{M}_{r_0} = \mathcal{L}(H)$ . Porém, como  $Z_n^{\perp} \in \mathcal{L}(H)^{\perp}$ , isso é impossível e tem-se aí uma contradição. Logo, deve valer  $\mathfrak{f}_r \subset \mathcal{L}(H) \cap \mathfrak{w}_{r'}$  para certos  $r$ ,  $r' > 0$ . Isso completa a prova do Teorema 24.3. ■

Podemos agora reunir os resultados que provamos acima e passar à

**Prova do Teorema 24.2.**

Seja  $H$  um subgrupo fechado de  $GL(\mathbb{C}, n)$ . Como veremos, é suficiente provarmos o teorema considerando apenas a componente de  $H$  que é conexa ao elemento neutro, componente essa que denominaremos  $H_0$ . Isso pois se provarmos que  $H_0$  é uma variedade, a demonstração facilmente se estenderá para todo  $H$ . Esse ponto será discutido com mais detalhe ao final da demonstração, de modo que, por ora, nos limitamos a considerar o caso em que  $H$  é conexo (o que, no caso geral, equivale a nos restringirmos a  $H_0$ ).

Pelo Teorema 24.3, basta provarmos que  $\tilde{H}$  é um grupo de Lie. Pelo Teorema 10.4, podemos encontrar uma vizinhança aberta de  $V$  de 0 em  $Mat(\mathbb{C}, n)$  e uma vizinhança aberta  $W$  de  $\mathbb{1}$  em  $GL(\mathbb{C}, n)$  tais que  $\exp : V \rightarrow W$  é um difeomorfismo. Seja  $V_H$  a vizinhança de 0 em  $\mathcal{L}(H)$  definida por  $V_H = V \cap \mathcal{L}(H)$  e seja  $W_H$  sua imagem em  $\tilde{H}$  pela exponencial. A aplicação  $\exp : V_H \rightarrow W_H$  é também um difeomorfismo, pois é a restrição de um difeomorfismo (a saber  $\exp : V \rightarrow W$ ) por uma função suave (a projeção  $V \rightarrow V_H$ ). Existe naturalmente um sistema de coordenadas em  $V_H$ , pois  $\mathcal{L}(H)$  é um espaço vetorial e, portanto, isomorfo a  $\mathbb{C}^k$ ,  $k$  sendo a dimensão de  $\mathcal{L}(H)$ . Dessa forma como  $\exp : V_H \rightarrow W_H$  é uma bijeção,  $\exp^{-1} : W_H \rightarrow V_H$  estabelece um sistema de coordenadas em  $W_H$ . Para estabelecer um sistema de coordenadas em todo  $\tilde{H}$ , por exemplo, em torno de um elemento  $h \in \tilde{H}$ , podemos transladar o sistema de coordenadas de  $W_H$  para uma vizinhança de  $h$ , a saber,  $hW_H$ . As cartas locais assim obtidas serão compatíveis (infinitamente diferenciáveis ou analíticas) devido ao fato de  $\exp : V_H \rightarrow W_H$  ser um difeomorfismo e pelo fato de a multiplicação por um  $h$  constante não alterar esse caráter. O argumento de translação pode ser aplicado mesmo a elementos de  $H$  que não estão na componente conexa à identidade, de modo que todo  $H$  se torna uma variedade de dimensão  $k$ . O produto e a inversa são contínuas e infinitamente diferenciáveis por o serem em  $GL(\mathbb{C}, n)$  e também devido ao fato de  $\exp : V_H \rightarrow W_H$  ser um difeomorfismo. A demonstração do Teorema 24.2 está então completa. ■

*Comentário.* Segundo [245], o Teorema 24.2 é devido a Cartan<sup>17</sup>. Demonstrações desse importante teorema podem ser encontradas em vários livros-texto, como por exemplo [245] ou [258]. Devemos, porém, notar ao leitor e advertir o estudante que alguns textos (inclusive alguns clássicos) apresentam certas falhas na sua demonstração, falhas essas que procuramos corrigir e evitar nas demonstrações acima. Vários textos apresentam demonstrações incompletas (por exemplo, [291], [336] e mesmo parcialmente [258]), pois deixam por exemplo, de provar que o conjunto  $\mathcal{M}_r$ , definido acima, não é apenas formado pelo elemento nulo, um ponto crucial. A demonstração que apresentamos é essencialmente (mas não exatamente) a de [245] (vide todo §2 do Capítulo XI daquela referência). Um outro tratamento excelente é o de [147] (vide também [146]). ♣

Um ponto importante do Teorema 24.2 é que o subgrupo fechado  $H$  é um grupo de Lie com a topologia induzida em  $H$  por  $G$ . Em verdade, vale para grupos de Lie um teorema mais ainda forte que o Teorema 24.2:

**Teorema 24.4** *Todo subgrupo  $H$  de um grupo de Lie  $G$  é também um grupo de Lie, mas não necessariamente em relação à topologia induzida por  $G$  em  $H$ .* □

Como se vê, esse teorema generaliza o Teorema 24.2 pois não é necessário requerer que  $H$  seja um subgrupo fechado de  $G$ . Porém, a topologia na qual  $H$  é um grupo de Lie pode não ser a topologia induzida em  $H$  por  $G$ . Um exemplo ilustrativo será discutido na Seção 24.4.3. A demonstração do Teorema 24.4 está além dos limites dessas notas e pode ser encontrada em textos como [258], [147] ou [146].

\*

O Teorema 24.1, página 1232, revela um sentido da relação fundamental entre grupos de Lie e álgebras de Lie. Ele mostra que é possível construir uma álgebra de Lie a partir de um grupo de Lie fechado. A teoria geral dos grupos de Lie revela que muitas propriedades importantes de grupos de Lie podem ser estudadas a partir das álgebras de Lie associadas a seus subgrupos uniparamétricos. Essa relação se mostra particularmente relevante no estudo de representações de grupos de Lie. É possível provar (e faremos isso no exemplo do grupo  $SO(3)$  no Capítulo 25) que existe uma correspondência um-a-um entre as representações de um grupo de Lie e as representações de sua álgebra de Lie. Sucede que (devido à estrutura linear) é muito mais simples estudar as representações de uma álgebra de Lie do que de um grupo de Lie. Infelizmente ainda está fora do modesto alcance destas notas explorar completamente esse vasto terreno e remetemos o estudante aos bons livros supra-citados sobre grupos e álgebras de Lie.

Iremos no que segue deste capítulo limitar-nos a discutir algumas questões as quais são importantes para um estudo mais abrangente. Particularmente nos deteremos na questão de identificar algumas situações nas quais podemos prosseguir no caminho inverso ao que apontamos acima, ou seja, na questão de quando um grupo de Lie pode ser recuperado a partir da álgebra de Lie dos seus geradores por aplicação da exponenciação.

## 24.4 A Relação entre Grupos de Lie Matriciais e suas Álgebras de Lie

Vimos nas seções anteriores que se  $H$  é um subgrupo não-discreto fechado de  $GL(\mathbb{C}, n)$  existe associada ao mesmo uma álgebra de Lie a qual é (obviamente) uma subálgebra de da álgebra de Lie de  $GL(\mathbb{C}, n)$  que é  $Mat(\mathbb{C}, n)$ . Será a recíproca verdadeira, ou seja, se  $\mathcal{A}$  é uma subálgebra de Lie de  $Mat(\mathbb{C}, n)$  haverá um grupo de Lie fechado associado a  $\mathcal{A}$ ? A resposta, em geral, é não. Um contraexemplo (para  $n = 2$ ) é o seguinte: Seja  $a$  um número real irracional e

seja a álgebra de Lie formada pelas matrizes  $2 \times 2$  dadas por  $\begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & iat \end{pmatrix}$  com  $t \in \mathbb{R}$ . Exponenciando os elementos dessa

álgebra de Lie obtemos as matrizes  $\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{iat} \end{pmatrix}$  com  $t \in \mathbb{R}$ . Esse conjunto de matrizes forma certamente um grupo.

Sucede, porém, que não se trata de um subgrupo topologicamente fechado de  $GL(\mathbb{C}, 2)$ , como veremos com um pouco mais de detalhe na Seção 24.4.3 (a qual o leitor poderá passar sem perdas). Felizmente é possível dizer um pouco mais se enfraquecermos a condição de  $H$  ser um subgrupo fechado. Tem-se, por exemplo, o seguinte:

<sup>17</sup>Elie Joseph Cartan (1869-1951). E. J. Cartan foi um dos mais importantes contribuidores à teoria de grupos de Lie.

**Proposição 24.8** *Seja  $G$  um subgrupo fechado não-discreto de  $GL(\mathbb{C}, n)$  cuja álgebra de Lie é  $\mathcal{L}(G)$  e seja  $H$  um subgrupo (não discreto) de  $G$ . Seja  $\mathcal{L}(H) := \{M \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n) \mid \exp(tM) \in H, \forall t \in \mathbb{R}\}$  e suponha que se saiba que  $\mathcal{L}(H)$  é um subespaço de  $\mathcal{L}(G)$ . Então  $\mathcal{L}(H)$  é também uma subálgebra de  $\mathcal{L}(G)$ .  $\square$*

*Prova.* Sejam  $A, B \in \mathcal{L}(H)$ . Então é claro que para todos  $t$  e  $s \in \mathbb{R}$  teremos  $e^{sA}e^{tB}e^{-sA} \in H$  pois  $H$  é um grupo e  $e^{sA}, e^{tA} \in H$ . Podemos escrever  $e^{sA}e^{tB}e^{-sA} = \exp(te^{sA}Be^{-sA})$  e isso prova que  $e^{sA}Be^{-sA} \in \mathcal{L}(H)$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Como por hipótese  $\mathcal{L}(H)$  é um subespaço de  $\mathcal{L}(G)$ ,  $\mathcal{L}(H)$  é fechado (pois estamos em dimensão finita). Logo,

$$\mathcal{L}(H) \ni \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (e^{sA}Be^{-sA} - B) = \left. \frac{d}{ds} (e^{sA}Be^{-sA}) \right|_{s=0} = [A, B],$$

completando a prova. ■

Comparando a demonstração acima com a do Teorema 24.1, vemos que a diferença é que não supomos que  $H$  seja fechado. Podemos ir mais um pouco além e estabelecer o seguinte:

**Teorema 24.5** *Seja  $G$  um subgrupo fechado de  $GL(\mathbb{C}, n)$  cuja álgebra de Lie é  $\mathcal{L}(G)$  e seja  $\mathfrak{h}$  uma subálgebra de Lie real de  $\mathcal{L}(G)$ . Então existe um único subgrupo conexo  $H$  de  $G$  cuja álgebra de Lie é  $\mathfrak{h}$ .  $H$  é um grupo de Lie (em uma certa topologia).  $\square$*

Não apresentaremos a demonstração dessa afirmação aqui no caso geral, a qual é uma consequência da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. Mais adiante (página 1239) discutiremos como  $H$  pode ser construída a partir de  $\mathfrak{h}$  no caso dessa última ser uma álgebra de Lie nilpotente, o caso mais fácil de tratar.

### 24.4.1 Álgebras de Lie Nilpotentes, Solúveis, Simples e Semi-Simples

Já comentamos anteriormente que se  $A$  e  $B$  são matrizes  $n \times n$  reais ou complexas tais que  $AB = BA$ , então  $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$ . O que ocorre caso  $A$  e  $B$  não comutem entre si? A resposta a esta questão é dada por uma expressão conhecida como *fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff*, a qual foi discutida e demonstrada no Capítulo 10, página 456. Essa fórmula permite expressar o produto  $\exp(A)\exp(B)$  para duas matrizes  $A$  e  $B \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$  (ou  $\in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ ) novamente como uma exponencial de matrizes:

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(A * B),$$

onde  $A * B$  é uma expressão um tanto complexa envolvendo somas de comutadores múltiplos das matrizes  $A$  e  $B$ , e cujos primeiros termos são os seguintes:

$$A * B = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] + \frac{1}{12}[B, [B, A]] + \dots$$

A expressão completa encontra-se em (10.60) à página 483.

Vamos agora fazer uma pausa e, antes de entrarmos na discussão das consequências da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff e da exponenciação de álgebras de Lie e sua relação com grupos de Lie, vamos nos dedicar a discutir alguns aspectos algébricos das álgebras de Lie (com o perdão do pleonasma).

A fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff nos chama a atenção para a importância de comutadores múltiplos de elementos de uma álgebra de Lie. Vamos aproveitar a oportunidade para introduzir algumas noções algébricas muito empregadas no estudo de álgebras de Lie. Falaremos da sua relevância adiante.

No que segue trataremos apenas de álgebras de Lie sobre o corpo dos números reais ou complexos.

Seja  $\mathcal{L}$  uma álgebra de Lie e  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  dois subconjuntos de  $\mathcal{L}$ . Por  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$  denotamos o conjunto de todos os elementos de  $\mathcal{L}$  que são iguais ao comutador de algum elemento de  $\mathcal{A}$  por algum elemento de  $\mathcal{B}$ . Em símbolos:

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \{[a, b], a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}. \tag{24.11}$$

• **Álgebras de Lie nilpotentes**

Seja uma álgebra de Lie  $\mathcal{L}$ . Com a notação acima, denotaremos por  $\mathcal{L}^{[n]}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , a sequência de conjuntos obtida da seguinte forma:  $\mathcal{L}^{[0]} := \mathcal{L}$  e  $\mathcal{L}^{[n]} = [\mathcal{L}, \mathcal{L}^{[n-1]}]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{[0]} &:= \mathcal{L}, \\ \mathcal{L}^{[1]} &:= [\mathcal{L}, \mathcal{L}^{[0]}] = [\mathcal{L}, \mathcal{L}], \\ \mathcal{L}^{[2]} &:= [\mathcal{L}, \mathcal{L}^{[1]}] = [\mathcal{L}, [\mathcal{L}, \mathcal{L}]], \\ \mathcal{L}^{[3]} &:= [\mathcal{L}, \mathcal{L}^{[2]}] = [\mathcal{L}, [\mathcal{L}, [\mathcal{L}, \mathcal{L}]]] \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

**Definição.** Uma álgebra de Lie é dita ser *álgebra de Lie nilpotente* se  $\mathcal{L}^{[m]} = \{0\}$  para algum  $m$ . ♠

O menor  $m$  para o qual  $\mathcal{L}^{[m]} = \{0\}$  é dito ser o *grau* ou *índice* da álgebra de Lie nilpotente. Note-se que se  $\mathcal{L}^{[m]} = \{0\}$  então  $\mathcal{L}^{[m']} = \{0\}$  para todo  $m' > m$ .

Um exemplo de álgebra de Lie nilpotente é a álgebra de Heisenberg tri-dimensional  $\mathfrak{gh}_3$ , com geradores  $p$ ,  $q$  e  $\hbar$ , satisfazendo  $[p, \hbar] = 0$ ,  $[q, \hbar] = 0$  e  $[p, q] = -i\hbar$ . Para ela vale  $(\mathfrak{gh}_3)^{[2]} = \{0\}$ . Essa álgebra foi apresentada e discutida na Seção 22.2.2 à página 1035.

Há várias razões por que as álgebras de Lie nilpotentes são relevantes. Uma delas está no fato de as álgebras de Lie nilpotentes serem igualmente álgebras de Lie solúveis (vide o que segue) e a importância destas será discutida. O leitor pode reconhecer uma outra razão da importância das álgebras de Lie nilpotentes na seguinte observação: para uma álgebra de Lie nilpotente a série de Baker-Campbell-Hausdorff em (10.60) e (10.61) é uma série finita! Voltaremos a isso quando retomarmos adiante a discussão da fórmula Baker-Campbell-Hausdorff.

• **Álgebras de Lie solúveis**

Em paralelo à noção de álgebra de Lie nilpotente que apresentamos acima, existe a noção de *álgebra de Lie solúvel*.

Para uma álgebra de Lie  $\mathcal{L}$ , denotaremos por  $\mathcal{L}^{(n)}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , a sequência de conjuntos obtida da seguinte forma:  $\mathcal{L}^{(0)} := \mathcal{L}$  e  $\mathcal{L}^{(n)} := [\mathcal{L}^{(n-1)}, \mathcal{L}^{(n-1)}]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)} &:= \mathcal{L}, \\ \mathcal{L}^{(1)} &:= [\mathcal{L}^{(0)}, \mathcal{L}^{(0)}] = [\mathcal{L}, \mathcal{L}], \\ \mathcal{L}^{(2)} &:= [\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}^{(1)}] = [[\mathcal{L}, \mathcal{L}], [\mathcal{L}, \mathcal{L}]] \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

**Definição.** Uma álgebra de Lie é dita ser uma *álgebra de Lie solúvel* se  $\mathcal{L}^{(m)} = \{0\}$  para algum  $m$ . ♠

Para qualquer álgebra de Lie  $\mathcal{L}$  é bastante evidente, pelas definições, acima que  $\mathcal{L}^{(n)} \subset \mathcal{L}^{[n]}$ . De fato,  $\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}^{[0]}$  e  $\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{[1]}$  e, se  $\mathcal{L}^{(n)} \subset \mathcal{L}^{[n]}$  para algum  $n$ , segue que  $\mathcal{L}^{(n+1)} = [\mathcal{L}^{(n)}, \mathcal{L}^{(n)}] \subset [\mathcal{L}^{[n]}, \mathcal{L}^{[n]}] \subset [\mathcal{L}, \mathcal{L}^{[n]}] = \mathcal{L}^{[n+1]}$ , provando a afirmativa por indução. Segue dessa observação que toda álgebra de Lie nilpotente é também solúvel.

A recíproca dessa última afirmação é falsa: nem toda álgebra de Lie solúvel é nilpotente. Considere-se com exemplo a álgebra de Lie bidimensional com geradores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  satisfazendo  $[\lambda_1, \lambda_2] = \lambda_2$ . Essa álgebra não é nilpotente, pois  $[\lambda_1, [\lambda_1, [\dots, [\lambda_1, \lambda_2]]]] = \lambda_2$ . Porém, essa álgebra é solúvel, pois  $[[\lambda_1, \lambda_2], [\lambda_1, \lambda_2]] = [\lambda_2, \lambda_2] = 0$ . Essa álgebra aparecerá concretamente no exemplo discutido à página 1242.

Há várias razões por que as álgebras de Lie solúveis são relevantes. Uma delas será discutida após apresentarmos o Teorema de Levi, abaixo.

• **Álgebras de Lie simples e semi-simples**

Se  $\mathcal{L}$  é uma álgebra de Lie, dizemos que é um subespaço vetorial  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{L}$  é uma *subálgebra* (de Lie) se

$$[\mathcal{J}, \mathcal{J}] \subset \mathcal{J} .$$

Se  $\mathcal{L}$  é uma álgebra de Lie, dizemos que um subespaço vetorial  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{L}$  é um *ideal* se

$$[\mathcal{L}, \mathcal{J}] \subset \mathcal{J} .$$

Pela definição, todo ideal de  $\mathcal{L}$  é uma subálgebra de Lie de  $\mathcal{L}$ .

As álgebras de Lie nilpotentes e as solúveis possuem “muitos” ideais. Contrapostas às mesmas estão as chamadas álgebras de Lie simples e semi-simples, que possuem “poucos” ideais.

**Definição.** Uma álgebra de Lie  $\mathcal{L}$  é dita ser *simples* se seus únicos ideais forem  $\{0\}$  e a própria  $\mathcal{L}$ . ♠

**Definição.** Uma álgebra de Lie  $\mathcal{L}$  é dita ser *semi-simples* se não possuir ideais solúveis (que não  $\{0\}$ ). ♠

É bem claro que toda álgebra de Lie simples é semi-simples.

Há várias razões por que as álgebras de Lie semi-simples são relevantes. Uma delas será discutida após apresentarmos o Teorema de Levi, abaixo.

• **Soma direta e soma semi-direta de álgebras de Lie**

**Definição.** Uma álgebra de Lie  $\mathcal{L}$  é dita ser a *soma direta* de duas de suas subálgebras  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  se

$$[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] = 0$$

e se todo elemento  $x \in \mathcal{L}$  puder ser escrito de modo único da forma  $x = x_1 + x_2$  com  $x_1 \in \mathcal{L}_1$  e  $x_2 \in \mathcal{L}_2$ . ♠

Se  $\mathcal{L}$  for a soma direta de  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  denotamos isso por  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ .

**Definição.** Uma álgebra de Lie  $\mathcal{L}$  é dita ser a *soma semi-direta* de duas de suas subálgebras  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  se

$$[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] \subset \mathcal{L}_2$$

e se todo elemento  $x \in \mathcal{L}$  puder ser escrito de modo único da forma  $x = x_1 + x_2$  com  $x_1 \in \mathcal{L}_1$  e  $x_2 \in \mathcal{L}_2$ . ♠

Se  $\mathcal{L}$  for a soma semi-direta de  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  denotamos isso por  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \boxplus \mathcal{L}_2$ . Note que  $\mathcal{L}_2$  deve ser um ideal de  $\mathcal{L}$ .

Nesse contexto é importante o seguinte teorema, cuja demonstração está além das pretensões destas notas (vide e.g. [245, 167]):

**Teorema 24.6 (Teorema de Levi)** *Toda álgebra de Lie  $\mathcal{L}$  de dimensão finita é uma soma semi-direta*

$$\mathcal{L} = \mathcal{S} \boxplus \mathcal{R}$$

onde  $\mathcal{S}$  é semi-simples e  $\mathcal{R}$  solúvel. □

A subálgebra  $\mathcal{R}$  acima é denominada *radical* de  $\mathcal{L}$ .

*Exemplos.* O chamado *grupo Euclidiano*<sup>18</sup> em três dimensões  $E_3$  possui seis geradores  $J_1, J_2, J_3$  (geradores de rotações) e  $P_1, P_2, P_3$  (geradores de translações), satisfazendo as relações

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} J_k \quad [J_i, P_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} P_k \quad [P_i, P_j] = 0 ,$$

onde  $\epsilon_{ijk}$  é o símbolo antissimétrico de Levi-Civita definido em (22.50), página 1054. Se denominarmos por  $\mathcal{P}$  a subálgebra gerada por  $P_1, P_2, P_3$  e por  $\mathcal{J}$  a subálgebra gerada por  $J_1, J_2, J_3$ , veremos que  $\mathcal{P}$  é solúvel (pois é Abelian) e que  $\mathcal{J}$  é simples (e, portanto, semi-simples). É também imediato que  $\mathcal{L} = \mathcal{P} \boxplus \mathcal{J}$ .

<sup>18</sup>Euclides, de Alexandria (ci. 325 A.C., ci. 265 A.C.).

\*

O teorema de Levi nos diz que o estudo geral de álgebras de Lie, e consequentemente, de grupos de Lie, reduz-se ao estudo das álgebras de Lie solúveis (dentre as quais estão as nilpotentes) e das álgebras de Lie semi-simples. Um dos resultados mais importantes da teoria das álgebras de Lie é uma célebre classificação completa de todas as álgebras de Lie semi-simples, feito devido a Killing<sup>19</sup> e a Cartan<sup>20</sup>. Para o caso das álgebras solúveis uma classificação completa está ainda longe de ser alcançada.

### 24.4.2 Questões sobre a Exponenciação de Álgebras de Lie

Apesar de sua importância, a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff apresenta uma restrição quanto à norma das matrizes  $A$  e  $B$ , necessária para garantir a convergência da série que ocorre em (10.60). Há, porém, uma classe de álgebras de Lie para a qual essa questão não é importante, as chamadas álgebras de Lie nilpotentes, das quais trataremos agora.

#### • Grupos de Lie nilpotentes

A importância das álgebras de Lie nilpotentes no contexto da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (10.60), página 483, é a seguinte. Se  $\mathcal{L} \subset \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$  é uma álgebra de Lie nilpotente de grau  $m$  de matrizes, então para quaisquer  $A, B \in \mathcal{L}$  teremos que  $A * B$  definida em (10.60) é uma soma finita, contendo no máximo comutadores múltiplos de ordem  $m$ .

Com isso, vemos que para uma álgebra de Lie nilpotente de matrizes  $\mathcal{L} \subset \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$  não existe o problema da convergência da série de (10.60), e a mesma vale para todo  $A, B \in \mathcal{L}$ , independente da norma desses elementos. Fora isso  $A * B \in \mathcal{L}$ , já que é dado por uma soma finita de elementos de  $\mathcal{L}$ . Uma consequência é a seguinte proposição.

**Proposição 24.9** *Seja  $G$  um subgrupo de Lie de  $\text{GL}(\mathbb{C}, n)$  e  $\mathcal{L}_G \subset \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$  sua álgebra de Lie. Vamos supor que  $\mathcal{L}_G$  seja nilpotente. Então o produto  $*$  definido pela fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff é associativo. Fora isso, a álgebra de Lie  $\mathcal{L}_G$  é, ela mesma, um grupo com o produto  $*$ .* □

*Prova.* Sejam  $A^1, A^2$  e  $A^3$  três elementos de  $\mathcal{L}_G$ . Se  $L_1, \dots, L_m$  formam uma base em  $\mathcal{L}_G$  podemos escrever  $A^i = \sum_{k=1}^m \alpha_k^i L_k$ , onde  $\alpha_k^i$  são números complexos. Como a soma de comutadores que ocorre na fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff é finita, concluímos que

$$(A^1 * A^2) * A^3 = \sum_{k=1}^m p_k(\alpha) L_k \quad \text{e} \quad A^1 * (A^2 * A^3) = \sum_{k=1}^m q_k(\alpha) L_k,$$

onde  $p_k(\alpha)$  e  $q_k(\alpha)$  são polinômios nas variáveis  $\alpha_j^i, i = 1, 2, 3, j = 1, \dots, m$ . Desejamos provar que para cada  $k$  tem-se  $p_k = q_k$ . Como ambos são polinômios, é suficiente provar isso para quando as variáveis  $\alpha_j^i$  estão restritas a algum aberto de  $\mathbb{C}$ .

Sejam  $G_i = \exp(A^i), i = 1, 2, 3$ , elementos de  $G$ . Como o produto do grupo é associativo, temos  $(G_1 G_2) G_3 = G_1 (G_2 G_3)$  e, portanto,  $\exp((A^1 * A^2) * A^3) = \exp(A^1 * (A^2 * A^3))$ . Se escolhermos as variáveis  $\alpha_j^i$  suficientemente próximas de zero, teremos  $p_k(\alpha)$  e  $q_k(\alpha)$  igualmente próximas de zero (convença-se disso checando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff) e, portanto,  $\|(A^1 * A^2) * A^3\|_{\mathbb{C}}$  e  $\|A^1 * (A^2 * A^3)\|_{\mathbb{C}}$  podem ser ambas feitas menores que  $\ln 2$ . Pela Proposição 10.5, página 463, podemos tomar o logaritmo das exponenciais acima e concluir que  $(A^1 * A^2) * A^3 = A^1 * (A^2 * A^3)$ . Assim,

$$\sum_{k=1}^m p_k(\alpha) L_k = \sum_{k=1}^m q_k(\alpha) L_k$$

pelo menos para  $\alpha_j^i$  pequenos o suficiente. Como os elementos  $L_k$  da base são linearmente independentes, concluímos que  $p_k(\alpha) = q_k(\alpha)$  para todo  $k = 1, \dots, m$ , pelo menos quando os  $\alpha_j^i$  são pequenos o suficiente. Como  $p_k$  e  $q_k$  são polinômios, isso vale para todos  $\alpha_j^i \in \mathbb{C}$ . Isso provou a associatividade.

<sup>19</sup>Wilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923).

<sup>20</sup>Elie Joseph Cartan (1869-1951).

Para provar que  $\mathcal{L}_G$  é um grupo, devemos mostrar que há um elemento neutro em  $\mathcal{L}_G$  para o produto  $*$  e que para cada elemento de  $\mathcal{L}_G$  existe uma inversa. Pela fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff é fácil constatar que

$$A * 0 = 0 * A = A$$

para todo  $A \in \mathcal{L}_G$ . Assim o zero é o elemento neutro procurado. Fora isso, também pela fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff é fácil constatar que

$$A * (-A) = A + (-A) + \text{comutadores de } A \text{ com } -A = 0.$$

Logo,  $(\mathcal{L}_G, *)$  é um grupo. ■

Esses fatos têm ainda uma consequência importante. Seja  $\mathcal{L} \subset \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$  uma álgebra de Lie nilpotente de matrizes. Definamos por  $\exp(\mathcal{L})$  o conjunto de todas as matrizes que são exponenciais de elementos de  $\mathcal{L}$ :

$$\exp(\mathcal{L}) = \{G \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n) \mid G = \exp(A) \text{ para algum } A \in \mathcal{L}\}.$$

Afirmamos que  $\exp(\mathcal{L})$  é um grupo (em relação ao produto usual de matrizes), em verdade um subgrupo de  $\text{GL}(\mathbb{C}, n)$ . De fato,  $\mathbb{1} \in \exp(\mathcal{L})$ , pois,  $0 \in \mathcal{L}$ . Se  $G = \exp(A)$  com  $A \in \mathcal{L}$ , então sua inversa é  $G^{-1} = \exp(-A)$ , que também pertence a  $\exp(\mathcal{L})$  pois  $-A \in \mathcal{L}$ . Por fim, se  $G_1 = \exp(A_1)$  e  $G_2 = \exp(A_2)$  com  $A_1$  e  $A_2$  dois elementos quaisquer de  $\mathcal{L}$ , então, pela fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff,  $G_1 G_2 = \exp(A_1 * A_2) \in \exp(\mathcal{L})$ , pois  $A_1 * A_2 \in \mathcal{L}$ .

A conclusão é que a partir de uma álgebra de Lie nilpotente  $\mathcal{L}$  podemos construir um grupo, denominado *grupo de Lie associado à álgebra  $\mathcal{L}$*  pelo procedimento de exponenciação. É importante notar que  $\mathcal{L}$  é um conjunto conexo. Portanto, como a exponencial é contínua, o grupo  $\exp(\mathcal{L})$  é igualmente conexo.

Interessantemente vale também a recíproca. Seja  $G$  um grupo de Lie *conexo* fechado (de matrizes) e  $\mathcal{L}_G$  sua álgebra de Lie e vamos supor que  $\mathcal{L}_G$  seja *nilpotente*. Considere, para algum  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, o subconjunto  $V_\epsilon$  de  $\mathcal{L}_G$  definido por

$$V_\epsilon := \left\{ \sum_{k=1}^m \lambda_k L_k, \text{ com } |\lambda_i| < \epsilon \text{ para todo } i = 1, \dots, m \right\},$$

e o subconjunto  $U_\epsilon$  de  $G$  definido por

$$U_\epsilon := \left\{ \exp \left( \sum_{k=1}^m \lambda_k L_k \right), \text{ com } |\lambda_i| < \epsilon \text{ para todo } i = 1, \dots, m \right\},$$

onde  $L_1, \dots, L_m$  formam uma base em  $\mathcal{L}_G$ .

Note-se que  $V_\epsilon$  é um subconjunto aberto de  $\mathcal{L}_G$ . Note-se também que  $\mathbb{1} \in U_\epsilon$  e que se  $g = \exp(\sum_{k=1}^m \lambda_k L_k) \in U_\epsilon$  então  $g^{-1} = \exp(-\sum_{k=1}^m \lambda_k L_k) \in U_\epsilon$ . Assim, se provarmos que  $U_\epsilon$  é aberto poderemos usar a Proposição 24.3, página 1221.

Se  $\epsilon$  for pequeno o suficiente poderemos garantir que  $\|\sum_{k=1}^m \lambda_k L_k\|_{\mathbb{C}} < \ln 2$  sempre que  $|\lambda_i| < \epsilon$  para todo  $i = 1, \dots, m$  e, pela Proposição 10.5, página 463, teremos  $\ln(\exp(\sum_{k=1}^m \lambda_k L_k)) = \sum_{k=1}^m \lambda_k L_k$ . Logo,  $U_\epsilon$  é a imagem inversa pela função  $\ln$  do conjunto aberto  $V_\epsilon$ . Como  $\ln$  é uma função contínua (Proposição 10.3, página 462) concluímos que  $U_\epsilon$  é igualmente aberto.

Logo, pela Proposição 24.3, cada elemento  $g$  de  $G$  pode ser escrito como um produto de  $n$  elementos de  $U_\epsilon$ :  $g = g_1 \cdots g_n$ , onde  $g_i = \exp(l_i)$  com  $l_i \in V_\epsilon$ . Agora, como a álgebra é nilpotente, vale  $\exp(l_1) \cdots \exp(l_n) = \exp(l_1 * \cdots * l_n)$ . Com isso, fica demonstrada a seguinte afirmação: se  $G$  é um subgrupo conexo fechado de  $\text{GL}(\mathbb{C}, n)$  e se sua álgebra de Lie  $\mathcal{L}_G$  é nilpotente, então todo elemento de  $G$  pode ser escrito como exponencial de um elemento de  $\mathcal{L}_G$ . Um exemplo dessa situação é o grupo de Heisenberg  $\text{GH}_3$ , tratado à página 1035.

*Observação 1.* O número  $n$  mencionado no último parágrafo pode não ser o mesmo para todo  $g \in G$  (vide o enunciado da Proposição 24.3), podendo eventualmente crescer arbitrariamente quando  $g$  varia no grupo. Porém, como a álgebra  $\mathcal{L}_G$  é nilpotente, o produto  $l_1 * \cdots * l_n$  está sempre definido para qualquer  $n$ . ♣

*Observação 2.* Nas circunstâncias descritas acima, é fácil constatar que a função exponencial  $\exp : \mathcal{L}_G \rightarrow G$  é um isomorfismo do grupo  $(\mathcal{L}_G, *)$  em  $G$ . ♣

Grupos de Lie com álgebras de Lie nilpotentes não são os únicos grupos de Lie para os quais vale que todo seu elemento pode ser escrito como exponencial de um elemento da sua álgebra de Lie. É possível mostrar que grupos de Lie

compactos com álgebras de Lie semi-simples também têm essa propriedade. Para uma demonstração vide, por exemplo, [291]. Vimos isso de modo explícito quando tratarmos dos grupos  $SO(3)$ ,  $SU(2)$ ,  $SL(\mathbb{C}, 2)$ ,  $SU(n)$  e  $SO(n)$  no Capítulo 22, página 1027.

Para grupos de Lie não-conexos tipicamente ocorre que não se pode escrever todos os seus elementos como exponenciais de elementos de sua álgebra de Lie. Tal é, por exemplo, o caso do grupo de Lie  $GL(\mathbb{R}, 2)$ , cuja álgebra de Lie é  $Mat(\mathbb{R}, 2)$ . A exponencial de matrizes reais  $2 \times 2$  é sempre formada por matrizes com determinante positivo (pela Proposição 9.14, página 373, ou pela Proposição 10.7, página 466), enquanto que  $GL(\mathbb{R}, 2)$  possui também matrizes com determinante negativo. Vide Proposição 10.10, página 468.

Porém, como veremos no exemplo discutido em detalhe à página 1242, não basta que um grupo de Lie seja conexo para que todos os seus elementos possam ser escritos como exponenciais de elementos de sua álgebra de Lie. Em vários casos, todavia, os elementos do grupo podem ser escritos como um produto finito de exponenciais. Tal também ocorre no exemplo da página 1242.

Para um grupo de Lie conexo  $G$  é possível, sob hipóteses adequadas que não discutiremos aqui, construir um grupo de Lie simplesmente conexo a partir de sua álgebra de Lie, usando um procedimento semelhante ao que empregamos quando discutimos acima o caso de álgebras de Lie nilpotentes. Constrói-se primeiramente uma vizinhança  $U$  da identidade que seja simétrica (ou seja, se  $g \in U$  então  $g^{-1} \in U$ ) –por exemplo a vizinhança na qual a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff converge, no caso de matrizes– e em seguida considera-se o conjunto formado por produtos finitos de elementos de  $U$ , o chamado *grupo gerado por  $U$* . Esse conjunto é em geral um grupo de Lie simplesmente conexo que é um recobrimento do grupo original  $G$ .

### 24.4.3 Alguns Exemplos Especiais

• **Um subgrupo conexo não-fechado de  $GL(\mathbb{C}, 2)$**

Exibiremos aqui um exemplo de um subgrupo conexo não-fechado de  $GL(\mathbb{C}, 2)$  o qual é um grupo de Lie mas não é um subgrupo de Lie de  $GL(\mathbb{C}, 2)$ . Isso significa que a topologia que faz desse subgrupo  $H_a$  um grupo de Lie não é a topologia induzida por  $GL(\mathbb{C}, 2)$  em  $H_a$ .

Esse exemplo é bastante instrutivo e ilustra o porquê de haver certas dificuldades sutis de natureza topológica na teoria dos grupos de Lie (e na geometria diferencial, em geral).

O grupo em questão é o seguinte grupo de matrizes a um parâmetro real:

$$H_a := \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{iat} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\},$$

onde  $a$  é um número real irracional fixo arbitrário. Para mostrar que esse grupo não é fechado, vamos exibir uma sequência convergente de matrizes de  $H_a$  que não converge a um elemento de  $H_a$ . Considere  $t_n = (2n + 1)\pi$  com  $n \in \mathbb{N}_0$ .

As matrizes de  $H_a$  correspondentes a esses valores de  $t$  são  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^{i2\pi a(2n+1)} \end{pmatrix}$ . Sucede que, como  $a$  é irracional, os

números complexos da forma  $e^{i2\pi a(2n+1)}$ , com  $n \in \mathbb{N}_0$ , formam um conjunto denso em todo o círculo unitário do plano complexo<sup>21</sup>. Assim, existe uma subsequência  $n_k$  tal que  $e^{i2\pi a(2n_k+1)}$  converge a  $-1$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Isso mostra que a matriz  $-1$  está no fecho de  $H_a$ . Sucede, porém, que  $-1 \notin H_a$  pois, para  $a$  irracional, não existe nenhum  $t$  real tal que valham simultaneamente  $e^{it} = -1$  e  $e^{iat} = -1$  (prove isso). Isso mostra que  $H_a$  não é fechado.

Por outro lado, é claro que há uma aplicação bijetora de  $\mathbb{R}$  em  $H_a$  dada por  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{iat} \end{pmatrix}$ , a qual induz a

topologia usual de  $\mathbb{R}$  em  $H_a$ , topologia essa na qual  $H_a$  é um grupo de Lie, como facilmente se vê. Essa topologia não coincide com a topologia induzida em  $H_a$  pela norma de matrizes em  $H_a$ .

<sup>21</sup>O leitor para o qual esse fato não é familiar poderá encontrar demonstrações em bons livros sobre teoria de números, por exemplo [136].



Há uma maneira geométrica de entender o que está acontecendo nesse grupo. Considere o seguinte grupo de Lie de matrizes  $2 \times 2$ :

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{is} \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esse grupo de Lie (a dois parâmetros reais) pode ser visualizado como um toro bidimensional (pois é o produto Cartesiano de dois círculos: o círculo  $e^{it}$  com  $t \in \mathbb{R}$  e o círculo  $e^{is}$  com  $s \in \mathbb{R}$ ). Cada grupo  $H_a$  é um subgrupo de  $T$  e, nessa imagem, corresponde a uma curva (pois cada  $H_a$  é unidimensional) que preenche densamente o toro sem auto-cruzamentos. Dessa forma entende-se que o fecho de  $H_a$  na topologia da norma das matrizes é o grupo  $T$ .

Se imaginarmos um aberto no toro, veremos que este intersecta a curva que corresponde a  $H_a$  em infinitos segmentos. Assim,  $H_a$  não é uma subvariedade de  $T$  e, portanto, apesar de ser um subgrupo de  $T$ ,  $H_a$  não pode ser um subgrupo de Lie de  $T$  na topologia de  $T$ .

• **Exponenciação e álgebras de Lie matriciais. Um contraexemplo**

Vamos agora apresentar um exemplo de um grupo de Lie conexo no qual não podemos escrever todos os seus elementos como exponenciais de elementos de sua álgebra de Lie, ou seja, a exponencial de sua álgebra de Lie não é sobrejetora no grupo.

Seja  $\alpha$  um número real irracional<sup>22</sup> fixo. Vamos considerar o seguinte conjunto de matrizes complexas  $2 \times 2$ :

$$\mathcal{H}_\alpha := \{h(t, z), t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\},$$

onde

$$h(t, z) := \begin{pmatrix} e^{it} & z \\ 0 & e^{i\alpha t} \end{pmatrix}. \tag{24.12}$$

Afirmamos que  $\mathcal{H}_\alpha$  é um subgrupo de  $GL(\mathbb{C}, 2)$ . De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= h(0, 0) \in \mathcal{H}_\alpha, \\ h(t, z)h(t', z') &= h(t+t', ze^{i\alpha t'} + z'e^{it}) \in \mathcal{H}_\alpha \quad \text{e} \\ h(t, z)^{-1} &= h(-t, -ze^{-i(1+\alpha)t}) \in \mathcal{H}_\alpha. \end{aligned}$$

**E. 24.11** *Exercício.* Verifique! \*

$\mathcal{H}_\alpha$  é um grupo de Lie conexo parametrizado por  $t \in \mathbb{R}$  e  $z \in \mathbb{C}$ . De fato, o grupo  $\mathcal{H}_\alpha$  é homeomorfo à variedade conexa  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ . O homeomorfismo de  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$  em  $\mathcal{H}_\alpha$  é dado pela função  $h$  definida em (24.12), isto é,  $h : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}_\alpha$ ,

$$(t, z) \mapsto h(t, z) := \begin{pmatrix} e^{it} & z \\ 0 & e^{i\alpha t} \end{pmatrix}.$$

Claramente,  $h$  é contínua. Vamos mostrar que  $h$  é bijetora. Suponha que existam  $(t, z)$  e  $(t', z') \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$  tais que  $h(t, z) = h(t', z')$ , ou seja,

$$\begin{pmatrix} e^{it} & z \\ 0 & e^{i\alpha t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it'} & z' \\ 0 & e^{i\alpha t'} \end{pmatrix}.$$

---

<sup>22</sup>Como veremos abaixo, é crucial para a construção desejada que  $\alpha$  não seja racional.

Isso implica as três seguintes condições simultâneas:

$$e^{it} = e^{it'} \tag{24.13}$$

$$e^{i\alpha t} = e^{i\alpha t'} \tag{24.14}$$

$$z = z'. \tag{24.15}$$

As relações (24.13) e (24.14) implicam

$$t = t' + 2\pi k \quad \text{e} \quad \alpha t = \alpha t' + 2\pi l,$$

respectivamente, para  $k, l \in \mathbb{Z}$ . Assim, multiplicando-se a primeira igualdade por  $\alpha$  e subtraindo-se da segunda, teríamos

$$\alpha k = l$$

para  $k, l \in \mathbb{Z}$ . Mas isso é impossível se  $\alpha$  for um número irracional, a menos que  $k = l = 0$ . Com isso, concluímos que  $t = t'$ , fato esse que, juntamente com (24.15), prova que  $h$  é uma bijeção. Mais ainda, é bem claro que  $h$  é infinitamente diferenciável e, portanto, é um difeomorfismo.

Vamos determinar os geradores de  $\mathcal{H}_\alpha$ , que denotaremos por  $\lambda_1, \lambda_2$ :

$$\lambda_1 := \left. \frac{\partial}{\partial t} h(t, z) \right|_{t=z=0} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i\alpha \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 := \left. \frac{\partial}{\partial z} h(t, z) \right|_{t=z=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**E. 24.12** *Exercício.* Verifique! \*

Um elemento genérico da álgebra de Lie  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\alpha)$  associada a  $\mathcal{H}_\alpha$  é, portanto, da forma

$$\mathfrak{h}(\tau, w) := \tau\lambda_1 + w\lambda_2 = \begin{pmatrix} i\tau & w \\ 0 & i\alpha\tau \end{pmatrix},$$

com  $\tau \in \mathbb{R}$  e  $w \in \mathbb{C}$ .

**E. 24.13** *Exercício.* Constate que  $[\lambda_1, \lambda_2] = i(1 - \alpha)\lambda_2$ . Conclua daí que a álgebra de Lie  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\alpha)$  associada a  $\mathcal{H}_\alpha$  não é nilpotente, não é simples e não é semi-simples, mas é solúvel. \*

Vamos nos dedicar agora a calcular  $\exp(\mathfrak{h}(\tau, w))$ . É muito fácil provar que

$$\mathfrak{h}(\tau, w)^2 = \begin{pmatrix} (i\tau)^2 & w(i\tau)(1 + \alpha) \\ 0 & (i\alpha\tau)^2 \end{pmatrix}$$

e que

$$\mathfrak{h}(\tau, w)^3 = \begin{pmatrix} (i\tau)^3 & w(i\tau)^2(1 + \alpha + \alpha^2) \\ 0 & (i\alpha\tau)^3 \end{pmatrix}.$$

Por indução, vê-se também que

$$\mathfrak{h}(\tau, w)^n = \begin{pmatrix} (i\tau)^n & w(i\tau)^{n-1} \left( \sum_{p=0}^{n-1} \alpha^p \right) \\ 0 & (i\alpha\tau)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i\tau)^n & w(i\tau)^{n-1} \left( \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \right) \\ 0 & (i\alpha\tau)^n \end{pmatrix},$$

para todo  $n \geq 1$ . Na última igualdade usamos a bem conhecida fórmula da progressão geométrica.

**E. 24.14** Exercício importante. Prove as afirmações de acima. \*

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \exp(\mathfrak{h}(\tau, w)) &= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathfrak{h}(\tau, w)^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\tau)^n & w \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\tau)^{n-1} \left( \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \right) \\ 0 & 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\alpha\tau)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\tau} & wf(\tau) \\ 0 & e^{i\alpha\tau} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde

$$f(\tau) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\tau)^{n-1} \left( \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \right).$$

Vamos agora expressar melhor a função  $f(\tau)$ . Note-se que  $f(0) = 1$  e que, para  $\tau \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\tau)^{n-1} \left( \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \right) &= \frac{1}{1-\alpha} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\tau)^{n-1} - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\alpha\tau)^{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left[ \left( \frac{e^{i\tau} - 1}{i\tau} \right) - \left( \frac{e^{i\alpha\tau} - 1}{i\tau} \right) \right] \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{e^{i\tau} - e^{i\alpha\tau}}{i\tau} \right) \\ &= \frac{e^{i\alpha\tau}}{1-\alpha} \left( \frac{e^{i(1-\alpha)\tau} - 1}{i\tau} \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$f(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{para } \tau = 0, \\ \frac{e^{i\alpha\tau}}{1-\alpha} \left( \frac{e^{i(1-\alpha)\tau} - 1}{i\tau} \right), & \text{para } \tau \neq 0 \end{cases}$$

e, finalmente,

$$\exp(\mathfrak{h}(\tau, w)) = \begin{pmatrix} e^{i\tau} & wf(\tau) \\ 0 & e^{i\alpha\tau} \end{pmatrix}. \tag{24.16}$$

A questão que agora se põe é: será o conjunto de matrizes  $\exp(\mathcal{L}(\mathcal{H}_\alpha)) := \{\exp(\mathfrak{h}(\tau, w)), \tau \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}\}$  igual a  $\mathcal{H}_\alpha$ ? A resposta é **não!** Para provar isso mostraremos que as matrizes  $h\left(\frac{2\pi}{1-\alpha}, z\right)$  com  $z \neq 0$  **não** são elementos do conjunto  $\exp(\mathcal{L}(\mathcal{H}_\alpha))$ . Se tal não fosse o caso, existiriam  $\tau \in \mathbb{R}$  e  $w \in \mathbb{C}$  tais que

$$h\left(\frac{2\pi}{1-\alpha}, z\right) = \exp(\mathfrak{h}(\tau, w)),$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{1-\alpha}} & z \\ 0 & e^{i\frac{2\pi\alpha}{1-\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\tau} & wf(\tau) \\ 0 & e^{i\alpha\tau} \end{pmatrix}.$$

Isso só é possível se as seguintes três condições forem satisfeitas simultaneamente:

$$e^{i\frac{2\pi}{1-\alpha}} = e^{i\tau}, \tag{24.17}$$

$$e^{i\frac{2\pi\alpha}{1-\alpha}} = e^{i\alpha\tau}, \tag{24.18}$$

$$z = wf(\tau). \tag{24.19}$$

As condições (24.17) e (24.18) implicam

$$\tau = \frac{2\pi}{1-\alpha} + 2\pi k \quad \text{e} \quad \alpha\tau = \frac{2\pi\alpha}{1-\alpha} + 2\pi l,$$

respectivamente, com  $k, l \in \mathbb{Z}$ . Das duas concluí-se (multiplicando a primeira por  $\alpha$ ) que  $2\pi k\alpha = 2\pi l$ , ou seja,  $k\alpha = l$ . Porém, como  $\alpha$  foi suposto ser um número irracional, isso só é possível se  $k = l = 0$ . Portanto

$$\tau = \frac{2\pi}{1-\alpha}.$$

Ocorre agora, porém, que inserindo-se esse valor de  $\tau$  no lado direito de (24.19) obtemos

$$wf\left(\frac{2\pi}{1-\alpha}\right) = w \frac{e^{i\frac{2\pi\alpha}{1-\alpha}}}{1-\alpha} \left( \frac{e^{i(1-\alpha)\frac{2\pi}{1-\alpha}} - 1}{i\frac{2\pi}{1-\alpha}} \right) = w e^{i\frac{2\pi\alpha}{1-\alpha}} \left( \frac{e^{2\pi i} - 1}{2\pi i} \right) = 0$$

e, conseqüentemente, (24.19) não pode ser satisfeita para  $z \neq 0$ .

Esse exemplo ilustra bem o fato mencionado de haver situações nas quais a imagem pela exponenciação da álgebra de Lie  $\mathcal{L}(G)$  associada a um grupo de Lie  $G$  não coincide com o grupo  $G$ .

**E. 24.15 Exercício.** Seja um grupo de Lie simplesmente conexo  $G$ , cuja álgebra de Lie é  $\mathcal{L}$ . Um teorema devido a Dixmier [146]-[147] afirma, entre outras coisas, que  $\exp(\mathcal{L}) = G$  se  $\exp$  for injetora. Mostre que  $(\tau, w) \mapsto \exp(\mathfrak{h}(\tau, w))$  definida em (24.16) não é injetora. \*

No exemplo acima vale, porém, a seguinte afirmação: todo elemento de  $\mathcal{H}_\alpha$  pode ser escrito como produto de duas exponenciais de elementos da álgebra de Lie  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\alpha)$ , a saber, da forma

$$\exp(\mathfrak{h}(\tau, 0)) \exp(\mathfrak{h}(0, w)).$$

De fato, é bem fácil ver que

$$h(t, z) = \begin{pmatrix} e^{it} & z \\ 0 & e^{i\alpha t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{-it}z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(\mathfrak{h}(t, 0)) \exp(\mathfrak{h}(0, e^{-it}z)).$$