Capítulo 29

Espaços Topológicos e Espaços Mensuráveis. Definições e Propriedades Básicas

Conteúdo

INTRODUZIREMOS neste capítulo dois conceitos de importância fundamental em Matemática, o conceito de *Espaço Topológico* e o conceito de *Espaço Mensurável*. O primeiro conceito é uma generalização do conceito de Espaço Métrico, introduzido no Capítulo 27, página 1313, e o segundo é moldado de forma a permitir uma definição consistente do conceito intuitivo de medida (como comprimento, área, volume etc.) de um conjunto. De modo muito simplificado, podemos dizer que Topologias desempenham um papel quando se faz necessário o emprego de noções como as de convergência e continuidade, enquanto que Espaços Mensuráveis são especialmente relevantes na teoria da integração e na teoria de probabilidades. As noções de Espaço Topológico e Espaço Mensurável penetram áreas da Matemática tão variadas quanto a Análise, a Análise Funcional, a Geometria Diferencial, a Teoria das Equações Diferenciais, a Teoria de Grupos, a Teoria de Probabilidades e outras, através das quais exercem também sua influência sobre praticamente toda a Física. Falaremos um pouco mais sobre o significado e sobre a importância de cada conceito adiante. Para um texto dedicado à história da Topologia, vide [172].

29.1 Definições, Propriedades Elementares e Exemplos

Dado um conjunto X (doravante considerado não-vazio), denota-se por $\mathbb{P}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos de X. Assim, em símbolos, podemos expressar o fato de um conjunto A ser um subconjunto de X escrevendo $A \subset X$ ou $A \in \mathbb{P}(X)$. É natural que $X \in \mathbb{P}(X)$ e convenciona-se que $\emptyset \in \mathbb{P}(X)$. Como sempre, se $A \subset X$, denotamos por A^c o conjunto $X \setminus A$, dito o complementar de A em X.

Estamos muitas vezes interessados em estudar propriedades de certas coleções de subconjuntos de X (ou seja de subconjuntos de $\mathbb{P}(X)$) que possuem certas características de interesse. Há dois tipos de coleções de subconjuntos que merecem particular atenção: as chamadas topologias e as chamadas σ-álgebras. Vamos às definições.

- **Topologias**

Uma coleção τ de subconjuntos de X, ou seja, $\tau \subset \mathbb{P}(X)$, é dita ser uma *topologia* em X se os seguintes requisitos forem satisfeitos:

1. $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$.

2. Se $A \in \tau$ e $B \in \tau$, então $A \cap B \in \tau$.

3. Se I é um conjunto arbitrário de índices e $A_\lambda \in \tau$ para todo $\lambda \in I$, então $\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$ também é um elemento de τ.

• **σ-álgebras**

Uma coleção $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X, ou seja, $\mathcal{M} \subset \mathbb{P}(X)$, é dita ser uma *$\sigma$-álgebra* em X se os seguintes requisitos forem satisfeitos:

1. $\emptyset \in \mathcal{M}$ e $X \in \mathcal{M}$.

2. Se $A \in \mathcal{M}$, então $A^c \equiv X \setminus A \in \mathcal{M}$.

3. Se $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção enumerável arbitrária de elementos de $\mathcal{M}$, então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ também é um elemento de $\mathcal{M}$.

• **Comentários e nomenclatura**

- Um conjunto X dotado de uma topologia τ é dito ser um *espaço topológico*. De um modo um pouco mais técnico, um espaço topológico é um par $(X,\ \tau)$ onde X é um conjunto não-vazio e $\tau \subset \mathbb{P}(X)$ é uma topologia em X.

- Um conjunto X dotado de uma σ-álgebra $\mathcal{M}$ é dito ser um *espaço mensurável*. De um modo um pouco mais técnico, um espaço mensurável é um par $(X,\ \mathcal{M})$ onde X é um conjunto não-vazio e $\mathcal{M} \subset \mathbb{P}(X)$ é uma σ-álgebra em X.

- Ideias relacionadas à de Topologia já habitam a Matemática há muito, mas foi nas duas primeiras décadas do século XX que as mesmas começaram a ser sistematizadas e abstraídas, como resultado do trabalho de vários indivíduos, como Cantor[1], Fréchet[2], Riesz[3] e Hausdorff[4]. A palavra *topologia* é um pouco mais antiga, tendo sido cunhada por Listing[5] em 1847, o qual tomara contacto com ideias topológicas sob influência de Gauss[6]. A noção de conjuntos abertos e fechados (na topologia usual da reta real) foi introduzida por Cantor. Fréchet percebeu sua conexão com a noção de métrica (a qual introduziu). A noção moderna de Espaço Topológico foi introduzida pela primeira vez por Hausdorff em 1914. Hausdorff também cunhou a expressão "espaço métrico", noção criada por Fréchet em 1906, e foi o primeiro a introduzir a noção de *medida*, entre outras coisas.

- A palavra "álgebra" na designação "σ-álgebra" tem origem histórica em uma analogia observada por Felix Hausdorff entre certas operações envolvendo conjuntos, tais como união e intersecção, e operações algébricas de soma e multiplicação. Apesar disso o conceito de σ-álgebra não deve ser confundido de forma alguma com o conceito usual de *álgebra* (um espaço vetorial com um produto entre seus elementos). A analogia a que nos referimos é a de que a operação de união de conjuntos disjuntos pode ser entendida como uma "soma" de conjuntos, com o elemento nulo sendo o conjunto vazio (pois $A \cup \emptyset = A$ para qualquer conjunto A). O papel de "multiplicação" entre conjuntos seria exercido pela intersecção, onde novamente o conjunto vazio seria o elemento nulo (pois sempre $A \cap \emptyset = \emptyset$). Note-se também a validade da propriedade distributiva $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, outra analogia com somas e produtos numéricos.

  Ainda sobre a nomenclatura, o "σ" do nome "σ-álgebra" é usado em função da propriedade *3* da definição, que se refere ao fato de σ-álgebras serem fechadas em relação a operações envolvendo uniões ("σomas") enumeráveis de seus conjuntos. Aqui, o ponto importante é a enumerabilidade e, por isso, é frequente encontrar-se o símbolo σ em outros objetos matemáticos para os quais a enumerabilidade desempenha algum papel (como na topologia chamada de σ-fraca, por exemplo).

[1] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918).
[2] Maurice René Fréchet (1878–1973).
[3] Frigyes Riesz (1880–1956).
[4] Felix Hausdorff (1868–1942). Matemático de grande originalidade e influência, Hausdorff foi um dos criadores da Topologia e da moderna Teoria dos Conjuntos. Perseguido pelo nacional-socialismo, suicidou-se em 1942 para evitar ser enviado a um campo de concentração.
[5] Johann Benedict Listing (1808–1882).
[6] Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855).

- Os subconjuntos $A \subset X$ que são membros de uma topologia τ são chamados de *conjuntos abertos* (em relação à topologia τ), ou conjuntos τ-abertos. Se um subconjunto $F \subset X$ é tal que $F^c \in \tau$, então F é dito ser um *conjunto fechado*, ou τ-fechado. Note que há conjuntos que podem ser simultaneamente abertos e fechados em relação à mesma topologia. Por exemplo, $\emptyset$ e X são ao mesmo tempo abertos e fechados (por que?). Além destes conjuntos pode haver outros também. Veremos exemplos.

- O estudante deve ser advertido que um conjunto pode ser aberto em relação a uma topologia, mas não em relação a outra. O mesmo comentário vale para conjuntos fechados.

- Os subconjuntos $A \subset X$ que são membros de uma σ-álgebra $\mathcal{M}$ são chamados de *conjuntos mensuráveis* (em relação à σ-álgebra $\mathcal{M}$), ou conjuntos $\mathcal{M}$-mensuráveis. Será para conjuntos mensuráveis que se definirá o conceito de medida.

- O estudante deve ser advertido que um conjunto pode ser mensurável em relação a uma σ-álgebra, mas não em relação a outra.

- Note que, pela definição, se $A_1, \ldots, A_n$ é uma coleção de n conjuntos abertos de uma topologia τ, então $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ é também um conjunto aberto (por que?).

- Note que, no item 3 da definição de topologia, nenhuma restrição é feita em relação ao conjunto de índices I, podendo o mesmo ser até um conjunto não-contável.

- Note que se $A_1, \ldots, A_n$ é uma coleção (finita) de n elementos de uma σ-álgebra $\mathcal{M}$, então $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ é também um elemento de $\mathcal{M}$. Para ver isso note que, se definíssemos $A_m = \emptyset$ para todo $m > n$ teríamos claramente $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup\limits_{a \in \mathbb{N}} A_a$ que é um elemento de $\mathcal{M}$ pelo item 3 da definição de σ-álgebra.

- Se $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra em X e $A,\ B \in \mathcal{M}$, então $A \cap B \in \mathcal{M}$. Isso é fácil de ver, pois $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$. Pelo item 2 da definição de σ-álgebra, A^c e B^c são também elementos de $\mathcal{M}$. Pela observação acima, sua união $A^c \cup B^c$ também o é. Por fim, o complemento de $A^c \cup B^c$ pertence a $\mathcal{M}$, novamente pelo item 2 da definição de σ-álgebra.

- A última afirmação estende-se facilmente para intersecções <u>contáveis</u> de conjuntos mensuráveis: se $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra em X e $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$. Isso segue facilmente de

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)^c \right)^c$$

  e dos itens 2 e 3 da definição de σ-álgebra.

• Vizinhanças

Seja X um conjunto não-vazio e τ uma topologia em X. Se $x \in X$, um conjunto $V \subset X$ é dito ser uma *vizinhança* de x (segundo τ) se V contém x e se contiver um aberto que também contém x, ou seja, se existir $A \in \tau$ tal que $x \in A \subset V$.

A noção de vizinhança é frequentemente empregada no estudo de espaços topológicos.

• Exemplos básicos de topologias e mais alguns comentários

Seja X um conjunto não-vazio.

- Considere τ o conjunto, formado por apenas dois elementos, dado por $\tau = \{\emptyset,\ X\}$. Então, τ é uma topologia em X (verifique!). É chamada de *topologia indiscreta* ou *topologia trivial* e é a menor topologia que se pode formar em X.

- Seja τ a coleção de todos os subconjuntos de X: $\tau = \mathbb{P}(X)$. Então, τ é uma topologia em X (verifique!). É chamada de *topologia discreta* e é a maior topologia que se pode formar em X.

- Seja X um espaço métrico com uma métrica d e seja τ_d a coleção de todos os seus subconjuntos abertos em relação a d. Um subconjunto A de X é dito ser *aberto* (em relação à métrica d) se tiver a seguinte propriedade: para todo $x \in A$ podemos achar um número real $\delta(x) > 0$ (eventualmente dependente de x) tal que para todo $x' \in X$ com a propriedade que $d(x, x') < \delta(x)$ (ou seja, que dista de x menos que $\delta(x)$) vale que x' também é um elemento de A. Então, conforme já vimos na Seção 27.2, página 1329, τ_d é, de fato, uma topologia, chamada de *topologia induzida pela métrica d*.

- Uma topologia τ em X é dita ser uma *topologia métrica* se existir uma métrica d em X tal que $\tau = \tau_d$.
- Pelo Exercício E. 27.30, página 1330, $\mathbb{P}(X)$ é uma topologia métrica.
- Nem todas as topologias são métricas. Condições que garantam que uma topologia seja métrica são denominadas condições de metrizabilidade.
- Seja $A \subset X$. Então, $\{\emptyset, A, X\}$ é uma topologia em X (verifique!), a menor a conter A (justifique!).
- Sejam $A, B \subset X$. Então, $\{\emptyset, A, B, A \cap B, A \cup B, X\}$ é uma topologia em X (verifique!), a menor a conter A e B (justifique!).

No caso do conjunto dos reais, podemos introduzir a topologia métrica definida pela métrica $d(x, y) = |x - y|$. Essa topologia é denominada de *topologia usual da reta* e para designá-la usaremos aqui o símbolo $\tau_{\mathbb{R}}$. Esse nome é auto-explicativo: quase toda a Análise Real é feita com o uso dessa topologia. Conforme o costume de toda a literatura, sempre que falarmos de uma topologia nos reais pensaremos nessa topologia usual, salvo menção explícita em contrário. Fique claro porém que sobre os números reais podem ser definidas outras topologias além $\tau_{\mathbb{R}}$ (e da topologia trivial e da topologia discreta). Exemplos serão vistos adiante.

E. 29.1 *Exercício*. Mostre, seguindo as definições de conjuntos abertos e fechados em espaços métricos, que todo intervalo (a, b) com $a < b \in \mathbb{R}$ é um elemento de $\tau_{\mathbb{R}}$ e que todo intervalo $[a, b]$ com $a \leq b$ é um conjunto fechado em relação a $\tau_{\mathbb{R}}$. ✠

E. 29.2 *Exercício*. Sejam $A, B, C \subset X$. Determine a menor topologia a conter A, B e C. ✠

E. 29.3 *Exercício*. **A topologia de um conjunto particular.** Seja X não-vazio e seja $B \subset X$. Mostre que a coleção de conjuntos $\{\emptyset\} \cup \{A \subset X |\; A \supset B\}$ é uma topologia, denominada *topologia do conjunto particular* B. Denotaremos essa topologia por $\tau_{cp}(B)$. .

Mostre que $F \subset X$ é um conjunto fechado na topologia $\tau_{cp}(B)$ se e somente se $F \subset B^c$ ou $F = X$. ✠

E. 29.4 *Exercício*. Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais positivos. Mostre que a coleção de subconjuntos de $\mathbb{N}$ composta por $\emptyset$, por $\mathbb{N}$ e por todo conjunto da forma $\{1, \ldots, n\}$, com $n \in \mathbb{N}$, compõe uma topologia em $\mathbb{N}$. ✠

E. 29.5 *Exercício*. Seja $X = [0, \infty)$, o conjunto dos números reais não-negativos. Mostre que a coleção de subconjuntos de X composta por $\emptyset$, por X e por todos os conjunto da forma $[0, a)$, com $a > 0$, compõe uma topologia em X. ✠

E. 29.6 *Exercício*. Seja $X = [0, \infty)$, o conjunto dos números reais não-negativos. Mostre que a coleção de subconjuntos de X composta por $\emptyset$, por X e por todos os conjunto da forma $[0, a]$, com $a > 0$, **não** compõe uma topologia em X. ✠

• Exemplos básicos de σ-álgebras

Seja X um conjunto não-vazio.

- Considere $\mathcal{M}$ o conjunto, formado por apenas dois elementos, dado por $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$. Então, $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra (verifique!) e é a menor σ-álgebra que se pode formar em X. Essa σ-álgebra é chamada de *σ-álgebra indiscreta* ou *σ-álgebra trivial*.
- Seja $\mathcal{M}$ a coleção de todos os subconjuntos de X: $\mathcal{M} = \mathbb{P}(X)$. Então, $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra (verifique!) e é a maior σ-álgebra que se pode formar em X. Essa σ-álgebra é chamada de σ-álgebra discreta.
- Seja X um conjunto e $A \subset X$. Então, a coleção $\mathcal{M} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ é uma σ-álgebra (verifique!), a menor a conter A (justifique!)

Outros exemplos menos triviais de σ-álgebras serão vistos adiante. Exemplos realmente interessantes de σ-álgebras requerem construções elaboradas, como a da σ-álgebra de Lebesgue[7], a qual trataremos com certo detalhe no Capítulo 31.

E. 29.7 *Exercício*. Sejam α, β e γ três objetos distintos (por exemplo, três letras distintas do alfabeto grego). Mostre que

$$\mathcal{M} = \Big\{\emptyset, \{\alpha, \beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\Big\}$$

é uma σ-álgebra em $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. ✠

E. 29.8 *Exercício*. Sejam α, β e γ três objetos distintos (por exemplo, três letras distintas do alfabeto grego). Mostre que

$$\mathcal{M} = \Big\{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\Big\}$$

é uma σ-álgebra em $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. ✠

• Abertos e fechados

Sejam X um conjunto e τ uma topologia em X. Denotemos por $\mathcal{F}(\tau)$ a coleção de todos os conjuntos fechados de X em relação à τ, ou seja, a coleção de todos os conjuntos F de X tais que F^c é um aberto, ou seja, um elemento de τ.

É muito importante o estudante notar que $\mathcal{F}(\tau)$ pode conter elementos que **não** são elementos de τ. Porém $\mathcal{F}(\tau)$ e τ nunca são conjuntos disjuntos, pois ambos sempre têm elementos em comum. Sempre se tem, por exemplo, que $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{F}(\tau) \cap \tau$.

E. 29.9 *Exercício*. Mostre que se $\mathcal{F}(\tau) \subset \tau$, então $\mathcal{F}(\tau) = \tau$. ✠

E. 29.10 *Exercício*. Mostre que se $\tau \subset \mathcal{F}(\tau)$, então $\tau = \mathcal{F}(\tau)$. ✠

Exemplos de topologias onde $\tau = \mathcal{F}(\tau)$ são a topologia trivial e a topologia discreta (por que?). Há, porém, muitos outros exemplos, como mostra o próximo exercício.

E. 29.11 *Exercício*. Seja a reta real e X o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$: $X = (0, 1) \cup (1, 2)$. Mostre que a coleção τ de subconjuntos de X dada por $\tau = \{\emptyset, (0, 1), (1, 2), X\}$ é uma topologia em X e que $\mathcal{F}(\tau) = \tau$. Note que τ não é nem a topologia trivial nem a discreta de X. ✠

A coleção $\mathcal{F}(\tau)$ de todos os conjuntos fechados em relação a uma topologia τ em X possui uma série de propriedades especiais:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}(\tau)$ e $X \in \mathcal{F}(\tau)$.
2. Se $F \in \mathcal{F}(\tau)$ e $G \in \mathcal{F}(\tau)$, então $F \cup G \in \mathcal{F}(\tau)$.
3. Se I é um conjunto arbitrário de índices e $F_\lambda \in \mathcal{F}(\tau)$ para todo $\lambda \in I$, então $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda$ também é um elemento de $\mathcal{F}(\tau)$.

E. 29.12 *Exercício muito importante*. Justifique as afirmativas acima. ✠

E. 29.13 *Exercício*. Sejam as seguintes coleções de conjuntos fechados na reta real (na topologia usual): $\{F_n = [-1/n, 1+1/n],\ n \in \mathbb{N}\}$ e $\{G_n = [1/n, 1 - 1/n],\ n \in \mathbb{N}, n > 1\}$. Mostre explicitamente que $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ é um conjunto fechado mas que $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N},\ n > 1} G_n$ é um conjunto aberto. Note que $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N},\ n > 1} G_n$ não é uma união finita! ✠

[7] Henri Léon Lebesgue (1875–1941).

Seja agora (reciprocamente) uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de um conjunto X tal que as seguintes condições (que chamaremos de "axiomas de conjuntos fechados") são verdadeiras:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$ e $X \in \mathcal{F}$.
2. Se $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{F}$, então $F \cup G \in \mathcal{F}$.
3. Se I é um conjunto arbitrário de índices e $F_\lambda \in \mathcal{F}$ para todo $\lambda \in I$, então $\bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda$ também é um elemento de $\mathcal{F}$.

Então, a coleção $\tau(\mathcal{F}) = \{A \subset X, \text{ tais que } A^c \in \mathcal{F}\}$ é uma topologia em X.

E. 29.14 *Exercício muito importante.* Justifique essa última afirmativa. ✠

• **Mais exemplos de topologias: a topologia co-contável e a co-finita**

Vamos ilustrar o que acabamos de ver com dois exemplos (importantes, pois deles se extraem alguns exemplos e contraexemplos de propriedades de topologias, como veremos adiante).

Seja X um conjunto e $\mathcal{C}_c$ a coleção de todos os conjuntos contáveis de X. Então, vamos mostrar que a coleção $\mathcal{C} = \{\emptyset, X\} \cup \mathcal{C}_c$ satisfaz os axiomas de conjuntos fechados.

As propriedades que $\emptyset \in \mathcal{C}$ e $X \in \mathcal{C}$ são óbvias por definição. Se F e G são elementos de $\mathcal{C}$, então $F \cup G$ também é um elemento de $\mathcal{C}$, basicamente pois a união de dois conjuntos contáveis é também um conjunto contável. Finalmente a intersecção arbitrária de conjuntos contáveis é também um conjunto contável (pois, como vimos acima, qualquer subconjunto de um conjunto contável também é contável) e, com isso, fica também verificado o axioma 3.

Com isso, e com o que dissemos anteriormente, vemos que a coleção $\tau(\mathcal{C})$ é uma topologia em X. Todo elemento de $\tau(\mathcal{C})$ é, então, $\emptyset$, X ou da forma $X \setminus C$, onde C é um conjunto contável. Chamaremos a topologia $\tau_{cc} \equiv \tau(\mathcal{C})$ de *topologia co-contável* de X.

E. 29.15 *Exercício.* Seja X um conjunto e τ_{cf} a coleção

$$\tau_{cf} = \Big\{A \subset X, \ A = X \setminus U \text{ onde } U \subset X \text{ é um conjunto finito}\Big\} \cup \{\emptyset\} .$$

Mostre que τ_{cf} é uma topologia em X (chamada de *topologia co-finita* de X). Como são os conjuntos fechados em relação a τ_{cf}? ✠

E. 29.16 *Exercício.* Verifique que para todo X não-vazio tem-se $\tau_{cf} \subset \tau_{cc}$. Para que tipo de conjunto X podemos ter $\tau_{cf} = \tau_{cc}$? ✠

A topologia co-contável tem a seguinte propriedade digna de nota. Sejam A e B dois abertos não-vazios quaisquer da topologia co-contável de um conjunto X e suponha que X não seja um conjunto contável. Então, $A \cap B$ sempre é um conjunto não-vazio. Para provar isso, notemos que, pelas hipóteses, $A = X \setminus C_1$ e $B = X \setminus C_2$, para dois subconjuntos contáveis C_1 e C_2 de X. Daí, $A \cap B = (X \setminus C_1) \cap (X \setminus C_2) = C_1^c \cap C_2^c = (C_1 \cup C_2)^c$. Agora, como $C_1 \cup C_2$ é também um conjunto contável, seu complemento é não-vazio pois X não é contável.

Assim, provamos que dois abertos não-vazios quaisquer da topologia co-contável de um conjunto não-contável (como, por exemplo, o conjunto dos reais) sempre se intersectam. Como veremos, isso significa que tais espaços topológicos não são do tipo Hausdorff (a definição de espaço Hausdorff virá à página 1479).

E. 29.17 *Exercício.* Sejam A e B dois abertos não-vazios quaisquer da topologia co-finita de um conjunto X e suponha que X não seja um conjunto finito. Mostre, então, que $A \cap B$ sempre é um conjunto não-vazio. ✠

E. 29.18 *Exercício.* Sejam $\tau_{cf}(\mathbb{R})$ e $\tau_{cc}(\mathbb{R})$ as topologias co-finita e co-contável de $\mathbb{R}$, respectivamente. Mostre que todo conjunto $\tau_{cf}(\mathbb{R})$-fechado é também $\tau_{\mathbb{R}}$-fechado e conclua que $\tau_{cf}(\mathbb{R}) \subset \tau_{\mathbb{R}}$. Pelo Exercício E. 29.16, tem-se também $\tau_{cf}(\mathbb{R}) \subset \tau_{cc}(\mathbb{R})$. Porém, $\tau_{cc}(\mathbb{R}) \not\subset \tau_{\mathbb{R}}$, pois o conjunto dos irracionais é $\tau_{cc}(\mathbb{R})$-aberto, mas não é $\tau_{\mathbb{R}}$ aberto. Justifique essa afirmativa.

Claramente, $\tau_{cf}(\mathbb{R}) \subset \tau_{cc}(\mathbb{R}) \cap \tau_{\mathbb{R}}$. Porém, a topologia $\tau_{cc}(\mathbb{R}) \cap \tau_{\mathbb{R}}$ é maior que $\tau_{cf}(\mathbb{R})$: verifique que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \in \tau_{cc}(\mathbb{R}) \cap \tau_{\mathbb{R}}$ mas $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \notin \tau_{cf}(\mathbb{R})$. ✠

29.2 Algumas Construções Especiais e Exemplos

29.2.1 Topologias Geradas por Famílias de Conjuntos

• **A noção de topologia gerada**

Vamos agora discutir um método importante de gerar topologias e σ-álgebras.

Seja X um conjunto não-vazio e seja $\{\tau_\lambda,\ \lambda \in I\}$ uma coleção de topologias em X (cada uma indexada por um elemento λ de um conjunto de índices I arbitrário). Como cada topologia é por si um subconjunto de $\mathbb{P}(X)$, podemos considerar uniões e intersecções de topologias.

Em particular para uma coleção genérica de topologias como $\{\tau_\lambda,\ \lambda \in I\}$, temos o seguinte resultado importante:

Proposição 29.1 *O subconjunto τ_I de $\mathbb{P}(X)$ dado por $\tau_I = \bigcap_{\lambda\in I} \tau_\lambda$ é também uma topologia em X.* □

Prova. Em primeiro lugar é claro pelas definições que $\emptyset \in \tau_I$ e que $X \in \tau_I$.

Vamos agora mostrar que se A e B são elementos de τ_I, então $A\cap B$ também o é. Para tal, note que se A e B são elementos de τ_I, então A e B são elementos de toda topologia τ_λ com $\lambda \in I$. Assim, como para cada λ particular tem-se A e $B \in \tau_\lambda$, segue que $A\cap B \in \tau_\lambda$ (pois τ_λ é uma topologia). Assim, mostramos que $A\cap B$ pertence a toda topologia τ_λ com $\lambda \in I$ e, portanto, $A\cap B \in \tau_I$.

Por fim, temos que provar que se $\{A_\mu,\ \mu \in J\}$ é uma coleção de elementos de τ_I (onde J é uma coleção arbitrária de índices), então segue que $\bigcup_{\mu\in J} A_\mu$ é também um elemento de τ_I. Para tal, note-se que se $\{A_\mu,\ \mu \in J\}$ é uma coleção de elementos de τ_I, então cada A_μ é um elemento de cada τ_λ. Daí, para cada λ particular segue que $\bigcup_{\mu\in J} A_\mu$ é também um elemento de τ_λ (pois τ_λ é uma topologia). Como isso vale para todo $\lambda \in I$, segue que $\bigcup_{\mu\in J} A_\mu \in \tau_I$, como queríamos provar. ■

Este resultado tem um uso de grande importância: fornecer um método de gerar topologias. Seja $\mathcal{A}$ uma coleção qualquer de subconjuntos de X. Considere a coleção de todas as topologias que contém $\mathcal{A}$ como um subconjunto. Como vimos, a intersecção de todas essas topologias é também uma topologia que denotaremos por $\tau[\mathcal{A}]$. A topologia $\tau[\mathcal{A}]$ é chamada de *topologia gerada por* $\mathcal{A}$.

Assim, cada coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um conjunto X tem automaticamente uma topologia associada a si: a topologia gerada pela coleção. Muitas topologias podem ser produzidas dessa forma, como sendo geradas por uma coleção conveniente de subconjuntos de X.

E. 29.19 *Exercício*. Mostre que $\mathcal{A} \subset \tau[\mathcal{A}]$ e que $\tau[\mathcal{A}]$ é a menor topologia que contém $\mathcal{A}$ como subconjunto, ou seja, se houver uma topologia $\tau' \subset \tau[\mathcal{A}]$ que contém $\mathcal{A}$, então $\tau' = \tau[\mathcal{A}]$. ✠

E. 29.20 *Exercício*. Mostre que se $\mathcal{A}$ é uma topologia, então $\tau[\mathcal{A}] = \mathcal{A}$. ✠

E. 29.21 *Exercício*. Seja X um conjunto não-vazio e $A \subset X$. Mostre que $\tau\big[\{A\}\big] = \{\emptyset,\ A,\ X\}$. ✠

E. 29.22 *Exercício*. Seja X um conjunto não-vazio e $\mathcal{A} = \big\{\{x\},\ x \in X\big\}$ a coleção de subconjuntos de X formada apenas por todos os conjuntos de um elemento de X. Mostre, então, que $\tau[\mathcal{A}]$ é a topologia discreta de X. Sugestão: use o item 3 da definição de topologia para mostrar que todo subconjunto de X é um elemento de $\tau[\mathcal{A}]$. ✠

E. 29.23 *Exercício*. Seja X um conjunto não-vazio e $\mathcal{A} = \big\{\{x,\ y\},\ x,\ y \in X \text{ e } x \neq y\big\}$ a coleção de subconjuntos de X formada por todos os conjuntos de dois elementos distintos de X. Mostre que se X possui ao menos três elementos, então $\tau[\mathcal{A}]$ é a topologia discreta de X. O que ocorre se X possuir apenas um elemento? E se X possuir apenas dois elementos? ✠

O método de gerar topologias descrito acima é muito usado e será reencontrado adiante em outros exemplos.

• **Sub-base de uma topologia**

Se τ é uma topologia em um conjunto não-vazio X, dizemos que uma coleção $\mathcal{A}$ de elementos de τ é uma *sub-base* de τ se $\tau = \tau[\mathcal{A}]$, ou seja, se τ for a menor topologia que contém $\mathcal{A}$. Mais adiante, na Seção 29.2.3, página 1411, introduziremos a noção de *base* de uma topologia e advertimos o leitor antecipadamente que os dois conceitos não coincidem, mas são relacionados. Vide discussão da Seção 29.2.3.

• **Estrutura de reticulado em topologias**

Seja X um conjunto não-vazio. A coleção de todas as topologias em X define um reticulado (para a definição, vide Seção 2.1.2, página 79) com as operações $\wedge$ e $\vee$ são definidas da seguinte forma. Se τ_1 e τ_2 são topologias em X, definimos: $\tau_1 \wedge \tau_2 := \tau_1 \cap \tau_2$ e $\tau_1 \vee \tau_2 := \tau\big[\tau_1 \cup \tau_2\big]$ (a topologia gerada por τ_1 e τ_2).

E. 29.24 *Exercício*. Prove que a coleção de todas as topologias em X com as operações $\wedge$ e $\vee$ definidas acima é, de fato, um reticulado, satisfazendo as propriedades de idempotência, comutatividade, associatividade e absorvência descritas na definição de reticulado da Seção 2.1.2.

Prove que se trata de um reticulado limitado, com o mínino sendo a topologia trivial $\{\emptyset,\ X\}$ e o máximo sendo a topologia discreta $\mathbb{P}(X)$.

Prove que se trata de um reticulado completo: todo subconjunto não-vazio possui um supremo e um ínfimo. ✠

• **Mais sobre a topologia usual de $\mathbb{R}$**

Já definimos a topologia usual da reta como sendo a topologia induzida pela métrica $d(x,\ y) = |y-x|$. Vamos mostrar aqui que há uma outra caracterização da mesma topologia.

Seja $\mathcal{A}$ a coleção de todos os intervalos abertos $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}$ com $a < b$. Vamos provar que $\tau_{\mathbb{R}} = \tau[\mathcal{A}]$, ou seja, que a topologia usual é idêntica à topologia gerada pela coleção de todos os intervalos abertos de $\mathbb{R}$.

Já sabemos que $\mathcal{A} \subset \tau_{\mathbb{R}}$, pois todo intervalo do tipo $(a,\ b)$, $a < b$, é aberto de $\tau_{\mathbb{R}}$. Como por definição $\tau[\mathcal{A}]$ é a *menor* topologia que contém $\mathcal{A}$, tem-se que $\tau[\mathcal{A}] \subset \tau_{\mathbb{R}}$. Tudo o que precisamos fazer, então, é provar que $\tau_{\mathbb{R}} \subset \tau[\mathcal{A}]$.

Seja τ' uma topologia qualquer que contenha $\mathcal{A}$. Isso significa que uniões arbitrárias de elementos de $\mathcal{A}$ são também elementos de τ' (pois τ' é uma topologia e pelo item 3 da definição de topologia). Se B é um elemento de $\tau_{\mathbb{R}}$ isso significa que para cada $x \in B$ existe $\delta(x) > 0$ tal que $y \in B$ desde que $|y - x| < \delta(x)$. Não é difícil ver que isso significa que podemos escrever

$$B \;=\; \bigcup_{x\in B} \big(x-\delta(x),\ x+\delta(x)\big)\ .$$

Como todo intervalo do tipo $(x-\delta(x),\ x+\delta(x))$ é um elemento de $\mathcal{A}$, segue que $B \in \tau'$. Como isso vale para todo $B \in \tau_{\mathbb{R}}$ isso significa que $\tau_{\mathbb{R}} \subset \tau'$. Esse último fato vale, porém, para qualquer que seja a topologia τ', desde que contenha a coleção $\mathcal{A}$. Portanto, concluí-se que $\tau_{\mathbb{R}} \subset \tau[\mathcal{A}]$, como queríamos mostrar.

29.2.1.1 A Topologia de Sorgenfrey

• **A topologia de Sorgenfrey de $\mathbb{R}$**

Seja $\mathcal{S}$ a coleção de todos os intervalos semiabertos de $\mathbb{R}$ do tipo $[a,\ b)$ com $-\infty < a < b < \infty$, $a,\ b \in \mathbb{R}$. A topologia $\tau[\mathcal{S}]$ é denominada *topologia de Sorgenfrey*[8] dos reais. O espaço topológico $(\mathbb{R},\ \tau[\mathcal{S}])$ é por vezes denominado *reta de Sorgenfrey* e é frequentemente denotado por $\mathbb{R}_l$.

E. 29.25 *Exercício*. Se ao invés dos intervalos semiabertos do tipo $[a,\ b)$ utilizarmos intervalos semiabertos do tipo $(a,\ b]$ obtemos uma topologia distinta da topologia $\tau[\mathcal{S}]$. O correspondente espaço topológico é denotado por $\mathbb{R}_r$. Mostre, porém, que a aplicação $\mathbb{R} \ni x \mapsto -x \in \mathbb{R}$ é um homeomorfirmo entre esses dois espaços topológicos. ✠

[8]Robert Henry Sorgenfrey (1915–1996). Para o trabalho original de Sorgenfrey, vide [308].

E. 29.26 *Exercício*. Mostre que $\tau_{\mathbb{R}}$ é um subconjunto próprio de $\tau[\mathbb{S}]$. Sugestão: mostre que todo intervalo aberto (a, b), $a < b$, é um elemento de $\tau[\mathbb{S}]$ e conclua a partir daí que $\tau_{\mathbb{R}} \subset \tau[\mathbb{S}]$. Para ver que $\tau[\mathbb{S}] \setminus \tau_{\mathbb{R}}$ não é vazio, note apenas que um intervalo semiaberto $[a, b)$, $a < b$ é um elemento de $\tau[\mathbb{S}]$, mas não de $\tau_{\mathbb{R}}$.

Sugestão. Prove a afirmação que $\tau_{\mathbb{R}} \subset \tau[\mathbb{S}]$ baseando-se na observação que, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $-\infty < a < b < \infty$, tem-se $(a, b) = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n>1/|b-a|}} \left[a + \frac{1}{n}, b\right)$. ✠

Note ainda que $\tau[\mathbb{S}]$ é menor que a topologia discreta $\mathbb{P}(\mathbb{R})$, pois intervalos fechados $[a, b]$, $a \leq b$, não são elementos de $\tau[\mathbb{S}]$.

E. 29.27 *Exercício*. Justifique esta última afirmativa. ✠

Assim, vimos nos últimos exercícios que $\tau_{\mathbb{R}} \subset \tau[\mathbb{S}] \subset \mathbb{P}(\mathbb{R})$, onde todas essas inclusões são próprias.

E. 29.28 *Exercício*. Mostre que os intervalos fechados $[a, b]$, $a \leq b$ são conjuntos fechados na topologia de Sorgenfrey. ✠

A topologia $\tau[\mathbb{S}]$ é rica em conjuntos que são simultaneamente abertos e fechados.

E. 29.29 *Exercício*. Mostre que na topologia de Sorgenfrey de $\mathbb{R}$ todo intervalo do tipo $[a, b)$ com $a < b$ é simultaneamente aberto e fechado. ✠

E. 29.30 *Exercício*. O último exercício inspira a seguinte questão: será que em $\tau[\mathbb{S}]$ todo conjunto aberto é também fechado? Verifique que isso não é verdade mostrando que o conjunto $A = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$, com $a \leq b$, é aberto segundo $\tau[\mathbb{S}]$ mas que seu complemento $A^c = [a, b]$ não é aberto segundo $\tau[\mathbb{S}]$. ✠

Nota. A aplicação identidade $\mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$ não é contínua como aplicação do espaço topológico $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ no espaço topológico $(\mathbb{R}, \tau[\mathbb{S}])$, pois a pré-imagem do conjunto $\tau[\mathbb{S}]$-aberto $[a, b)$ é o mesmo conjunto $[a, b)$, que não é um conjunto $\tau_{\mathbb{R}}$-aberto . ♣

Mais propriedades da reta de Sorgenfrey serão estudadas na Seção 34.3.3.4, página 1597. Lá estabeleceremos que os conjuntos $\tau[\mathbb{S}]$-compactos são contáveis e que a reta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \tau[\mathbb{S}])$ *não* é um espaço topológico localmente compacto.

• A topologia de Sorgenfrey de $\mathbb{R}^2$

Seja $\mathbb{S}^2$ a coleção de todos os retângulos semiabertos de $\mathbb{R}^2$ do tipo

$$[a, b) \times [c, d) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leq x < b, \ c \leq y < d\right\}, \tag{29.1}$$

com $a < b$, $c < d$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. O espaço topológico $(\mathbb{R}^2, \tau[\mathbb{S}^2])$ é denominado *plano de Sorgenfrey*.

E. 29.31 *Exercício*. Mostre que $\tau_{\mathbb{R}^2} \subset \tau[\mathbb{S}^2]$. ✠

E. 29.32 *Exercício*. Mostre que os conjuntos

$$C_1 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geq -x\right\}, \qquad C_2 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > -x\right\} \qquad \text{e} \qquad C_3 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y < -x\right\}$$

são abertos na topologia $\tau[\mathbb{S}^2]$. Sugestão, mostre que eles são uniões de retângulos semiabertos do tipo (29.1). Como $C_1 = (C_3)^c$, conclui-se que C_1 e C_3 são também fechados na topologia $\tau[\mathbb{S}^2]$. Seja

$$D_1 := \left\{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Como $D_1 = C_1 \cap (C_2)^c$, conclui-se que D_1 é fechado na topologia $\tau[\mathbb{S}^2]$. ✠

E. 29.33 *Exercício*. Com as definições do Exercício E. 29.32, mostre que

$$D_1^r := \left\{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in \mathbb{Q}\right\} \qquad \text{e} \qquad D_1^i := \left\{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \notin \mathbb{Q}\right\}$$

são fechados na topologia $\tau[\mathbb{S}^2]$. Sugestão: *1)* mostre que $D_1^r \cup C_2$ é aberto em $\tau[\mathbb{S}^2]$, por ser a união de todos os abertos do tipo $[x, a) \times [-x,\ b)$ para todos os $x \in \mathbb{Q}$ e todos a e b com $a > x$ e $b > -x$; *2)* mostre que $D_1^i \cup C_2$ é aberto em $\tau[\mathbb{S}^2]$, por ser a união de todos os abertos do tipo $[x, a) \times [-x,\ b)$ para todos os $x \notin \mathbb{Q}$ e todos a e b com $a > x$ e $b > -x$; *3)* conclua que $D_1^i \cup C_3$ e $D_1^r \cup C_3$ são fechados em $\tau[\mathbb{S}^2]$; *4)* de $D_1^r = D_1 \cap (D_1^r \cup C_3)$ e $D_1^i = D_1 \cap (D_1^i \cup C_3)$ conclua que D_1^r e D_1^i são fechados na topologia $\tau[\mathbb{S}^2]$. ✠

29.2.2 σ-Álgebras Geradas por Famílias de Conjuntos

• **A noção de σ-álgebra gerada**

O método de construção de topologias descrito acima tem um análogo quase literal entre as σ-álgebras.

Seja X um conjunto e $\{\mathcal{M}_\lambda,\ \lambda \in I\}$ uma coleção de σ-álgebras em X (cada uma indexada por um elemento λ de um conjunto de índices I arbitrário). Como cada σ-álgebra é por si um subconjunto de $\mathbb{P}(X)$ podemos considerar uniões e intersecções de σ-álgebras.

Em particular, para uma coleção genérica de σ-álgebras como $\{\mathcal{M}_\lambda,\ \lambda \in I\}$, temos o seguinte resultado importante:

Proposição 29.2 *O subconjunto $\mathcal{M}_I$ de $\mathbb{P}(X)$ dado por $\mathcal{M}_I = \bigcap_{\lambda \in I} \mathcal{M}_\lambda$ é também uma σ-álgebra em X.* □

Prova. Em primeiro lugar, é claro pelas definições que $\emptyset \in \mathcal{M}_I$ e que $X \in \mathcal{M}_I$.

Vamos agora mostrar que se $A \subset X$ é um elemento de $\mathcal{M}_I$, então $A^c = X \setminus A$ também o é. Se $A \in \mathcal{M}_I$, então $A \in \mathcal{M}_\lambda$ para todo $\lambda \in I$ e, portanto, $A^c \in \mathcal{M}_\lambda$ para todo $\lambda \in I$ pois cada $\mathcal{M}_\lambda$ é uma σ-álgebra. Assim, segue que $A^c \in \mathcal{M}_I$.

Por fim, vamos provar que se $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção enumerável de elementos de $\mathcal{M}_I$, então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ também é um elemento de $\mathcal{M}_I$. Se $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção enumerável de elementos de $\mathcal{M}_I$, então cada A_n pertence a cada $\mathcal{M}_\lambda$ e, portanto, para cada λ particular segue que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ também é um elemento de $\mathcal{M}_\lambda$. Daí segue imediatamente que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}_I$, que é o que queríamos provar. ■

Este resultado tem um uso de grande importância: fornecer um método de gerar σ-álgebras. Seja $\mathcal{A}$ uma coleção qualquer de subconjuntos de X. Considere a coleção de todas as σ-álgebras que contêm $\mathcal{A}$ como um subconjunto. Como vimos, a intersecção de todas essas σ-álgebras é também uma σ-álgebra que denotaremos por $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$. A σ-álgebra $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ é chamada de *σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$*.

Assim, cada coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um conjunto X tem automaticamente uma σ-álgebra associada a si: a σ-álgebra gerada pela coleção. Muitas σ-álgebras podem ser produzidas dessa forma, como sendo geradas por uma coleção conveniente de subconjuntos de X.

E. 29.34 *Exercício*. Mostre que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ e que $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ é a menor σ-álgebra que contém $\mathcal{A}$ como subconjunto, ou seja, se houver uma σ-álgebra $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ que contém $\mathcal{A}$, então $\mathcal{M}' = \mathcal{M}[\mathcal{A}]$. ✠

E. 29.35 *Exercício*. Mostre que se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra, então $\mathcal{M}[\mathcal{A}] = \mathcal{A}$. ✠

• **A σ-álgebra de Borel**

Dentre os muitos tipos de σ-álgebras existentes particular destaque têm as σ-álgebras geradas por topologias.

Seja X um conjunto e τ uma topologia em X. Como τ é uma coleção de subconjuntos de X podemos considerar a σ-álgebra $\mathcal{M}[\tau]$ gerada pela topologia τ. Essa σ-álgebra é chamada de *σ-álgebra de Borel*[9] associada à topologia τ em X e seus elementos são chamados de *conjuntos de Borel* ou *conjuntos Borelianos*.

[9] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956).

E. 29.36 *Exercício.* Considere a reta real $\mathbb{R}$. Mostre que intervalos como $(a,\ b)$, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$ com $a < b$ e $[a,\ b]$ com $a \leq b$ são elementos da σ-álgebra de Borel $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$. Que outros elementos de $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$ você poderia identificar? ✠

Como veremos, as σ-álgebras de Borel desempenham um papel importante na Teoria da Medida.

29.2.3 Bases de Espaços Topológicos

• **Base de uma topologia**

Seja X um espaço com uma topologia τ. Uma coleção de abertos $\mathcal{B} \subset \tau$ é dita ser uma *base* da topologia τ se todo τ-aberto puder ser escrito como união de elementos de $\mathcal{B}$: se $A \in \tau$, então $A = \bigcup_{\lambda} B_\lambda$, onde todos os B_λ são elementos de $\mathcal{B}$. Note que a união não necessita ser finita ou enumerável.

Um fato básico é o seguinte: se $\mathcal{B}$ é uma base de uma topologia τ, então $\tau = \tau[\mathcal{B}]$, ou seja, toda base de uma topologia é também uma sub-base (para a definição de sub-base de uma topologia, vide página 1408).

Provar isso é bem simples. Primeiramente note-se que, como τ é uma topologia que contém $\mathcal{B}$ e $\tau[\mathcal{B}]$ é, por definição, a menor topologia com essa propriedade, então segue que $\tau[\mathcal{B}] \subset \tau$. Por outro lado, como vimos, se $A \in \tau$, então A é a união de elementos de $\mathcal{B}$ e, portanto, A é um elemento de $\tau[\mathcal{B}]$. Logo $\tau \subset \tau[\mathcal{B}]$, completando a prova.

Para evitar confusões e ao mesmo tempo clarificar ideias, o estudante deve notar, porém, o seguinte fato. Se $\mathcal{A}$ é uma coleção de subconjuntos de um conjunto X, então não é em geral verdade que $\mathcal{A}$ ou mesmo $\mathcal{A} \cup X$ sejam uma base de $\tau[\mathcal{A}]$, ou seja, nem sempre uma sub-base de uma topologia é uma base. Tome-se o seguinte exemplo: $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{A} = \{(i/2,\ i/2+1),\ i \in \mathbb{Z}\}$. Então, o intervalo $(1/2,\ 1)$ é um elemento de $\tau[\mathcal{A}]$ pois é intersecção dos intervalos $(0,\ 1)$ e $(1/2,\ 3/2)$ mas não pode ser escrito como união de elementos de $\mathcal{A}$.

E. 29.37 *Exercício.* Seja X um espaço métrico e $\mathcal{B}$ a coleção de todas as bolas abertas de X: $\{B(x,\ r),\ x \in X,\ r > 0\}$. Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base da topologia métrica de X. ✠

• **Produzindo bases de topologias a partir de sub-bases**

A discussão do último parágrafo pode ser usada para introduzir e motivar mais um modo importante de se produzir bases de topologias, o qual será usado quando discutirmos o conceito de topologia gerada por famílias de funções, um tópico importante, por exemplo, em estudos mais avançados de propriedades de espaços de Banach e de Hilbert.

Como já vimos, se X é um conjunto e $\mathcal{A}$ é uma coleção arbitrária de subconjuntos de X não podemos em geral garantir que $\mathcal{A}$ é uma base de $\tau[\mathcal{A}]$. Há, porém, uma maneira de se produzir uma base a partir da sub-base $\mathcal{A}$ que discutiremos a seguir.

Proposição 29.3 *Seja X não-vazio e $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X)$ uma coleção de subconjuntos de X. Então, todo elemento de $\tau[\mathcal{A}]$ que não seja X ou $\emptyset$ pode ser obtido como união de conjuntos formados por intersecções finitas de elementos de $\mathcal{A}$. Em outras palavras, a coleção formada por X, $\emptyset$ e por todos os conjuntos que sejam intersecções finitas de elementos de $\mathcal{A}$ é uma base para $\tau[\mathcal{A}]$.* □

Prova. Considere a coleção $\mathcal{A}_I$ formada por todos os conjuntos que podem ser escritos como uma *intersecção finita* de elementos de $\mathcal{A} \cup \{X\} \cup \{\emptyset\}$. Ou seja, $A \subset X$ pertence a $\mathcal{A}_I$ se puder ser escrito da forma $A = B_1 \cap B_2 \cdots \cap B_n$, para algum n finito, onde cada B_i ou é igual a X ou $\emptyset$ ou é um elemento de $\mathcal{A}$.

É claro pela definição que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_I$ (por que?) e também que $\mathcal{A}_I \subset \tau[\mathcal{A}]$ (por que?). Assim, temos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_I \subset \tau[\mathcal{A}]$. Notemos agora que se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são duas coleções de subconjuntos de X com $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, então $\tau[\mathcal{B}] \subset \tau[\mathcal{C}]$ (por que?). Daí segue, pelo que vimos, que $\tau[\mathcal{A}] \subset \tau[\mathcal{A}_I] \subset \tau\big[\tau[\mathcal{A}]\big]$. Como $\tau[\mathcal{A}]$ é uma topologia temos, por um exercício anterior que $\tau\big[\tau[\mathcal{A}]\big] = \tau[\mathcal{A}]$. Assim, provamos que $\tau[\mathcal{A}] = \tau[\mathcal{A}_I]$ e vamos agora explorar consequências desse fato.

Vamos mostrar que $\mathcal{A}_I$ é uma base de $\tau[\mathcal{A}_I]$ e, portanto, de $\tau[\mathcal{A}]$. Para isso consideremos a coleção $\mathcal{U}$ formada por todas as possíveis uniões de elementos de $\mathcal{A}_I$: se $A \in \mathcal{U}$, então

$$A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda,$$

com $A_\lambda \in \mathcal{A}_I$ para todo λ. Vamos agora provar que $\mathcal{U}$ é uma topologia em X.

Pela definição, é claro que $\emptyset \in \mathcal{U}$ e que $X \in \mathcal{U}$ (por que?). É claro também que uniões arbitrárias de elementos de $\mathcal{U}$ são novamente elementos de $\mathcal{U}$. Resta-nos provar que se A e B são elementos de $\mathcal{U}$, então $A \cap B$ também o é. Sejam, assim, A e B da forma

$$A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda , \qquad B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda ,$$

onde todo A_λ e todo B_λ são elementos de $\mathcal{A}_I$. Note que podemos acima, sem perda de generalidade, usar o mesmo conjunto de índices Λ tanto para A quanto para B, pois podemos fazer alguns A_λ e/ou alguns B_λ iguais ao conjunto vazio se necessário, de modo a igualar ambos os conjuntos de índices.

Com isso temos, então, que

$$A \cap B = \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \bigcap \left(\bigcup_{\lambda'\in\Lambda} B_{\lambda'}\right) = \bigcup_{\lambda,\, \lambda'\in\Lambda} (A_\lambda \cap B_{\lambda'}) ,$$

que claramente é um elemento de $\mathcal{U}$, pois os conjuntos $A_\lambda \cap B_{\lambda'}$ são elementos de $\mathcal{A}_I$.

Dado que provamos que $\mathcal{U}$ é uma topologia, vamos ver as consequências desse fato. Em primeiro lugar, é claro pela definição de $\mathcal{U}$ que $\mathcal{A}_I \subset \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ é uma topologia, segue que $\tau[\mathcal{A}_I] \subset \mathcal{U}$. Por outro lado, temos também que os elementos de $\mathcal{U}$ são uniões de elementos de $\mathcal{A}_I$ e, portanto, são elementos de qualquer topologia que contenha $\mathcal{A}_I$, como, em particular, a topologia $\tau[\mathcal{A}_I]$. Assim, $\mathcal{U} \subset \tau[\mathcal{A}_I]$. Com isso, vimos que $\tau[\mathcal{A}] = \tau[\mathcal{A}_I] = \mathcal{U}$. Pela definição de $\mathcal{U}$, isso diz que todos os elementos de $\tau[\mathcal{A}]$ podem ser escritos como uniões de elementos de $\mathcal{A}_I$ e, assim, fica provado que $\mathcal{A}_I$ é uma base para $\tau[\mathcal{A}]$. ■

E. 29.38 *Exercício.* Mostre que a coleção de todos os intervalos abertos da forma $(-\infty,\, x)$ ou $(y,\, \infty)$ com $x,\, y \in \mathbb{R}$ é uma sub-base da topologia usual $\tau_\mathbb{R}$ da reta real. Mostre que o mesmo se dá se tomarmos $x,\, y \in \mathbb{Q}$. ✠

• A topologia gerada por um ordenamento total

Com o uso da noção de topologia gerada podemos produzir novas topologias associadas a relações de ordem totais definidas em conjuntos.

Seja X um conjunto não-vazio no qual está definida uma relação de ordem total "$\preceq$" (para a definição de relação de ordem total, vide página 48). Se $a,\, b \in X$ dizemos que $a \prec b$ se $a \preceq b$ mas $a \neq b$. Fixados $a,\, b \in X$ com $a \prec b$ definamos

$$\begin{aligned}(a,\, b) &:= \big\{x \in X |\ a \prec x \ \text{ e } \ x \prec b\big\} ,\\ (a,\, \rightarrow) &:= \big\{x \in X |\ a \prec x\big\} ,\\ (\leftarrow,\, b) &:= \big\{x \in X |\ x \prec b\big\} .\end{aligned}$$

Seja $\mathcal{A}$ a coleção

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_{lim} \cup \mathcal{A}_\rightarrow \cup \mathcal{A}_\leftarrow ,$$

com

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{lim} &:= \big\{(a,\, b), \ \text{ para todos } a,\, b \in X \text{ com } a \prec b\big\} ,\\ \mathcal{A}_\rightarrow &:= \big\{(a,\, \rightarrow), \ \text{ para todo } a \in X\big\} ,\\ \mathcal{A}_\leftarrow &:= \big\{(\leftarrow,\, b), \ \text{ para todo } b \in X\big\} .\end{aligned}$$

A topologia $\tau[\mathcal{A}]$ é denominada *topologia gerada pelo ordenamento total "$\preceq$"*.

E. 29.39 *Exercício.* Mostre que a topologia gerada pelo ordenamento usual da reta real coincide com a topologia usual da reta. ✠

E. 29.40 *Exercício*. Mostre que a topologia gerada pelo ordenamento lexicográfico de $\mathbb{R}^2$ (vide página 49) é uma topologia Hausdorff. ✠

Um texto clássico sobre a relação entre topologias e relações de ordem é [246].

29.2.4 Topologias e σ-Álgebras Induzidas

• **A topologia induzida (ou "relativa")**

Vamos agora estudar mais uma maneira de produzir topologias que também tem seu análogo para as σ-álgebras.

Seja X um conjunto e τ uma topologia em X. Seja também Y um subconjunto arbitrário de X (Y não precisa ser um elemento de τ). Podemos construir uma topologia no conjunto Y usando a topologia de X da seguinte forma. Definimos a seguinte coleção τ_Y de subconjuntos de Y:

$$\tau_Y \ := \ \Big\{ A \subset Y, \text{ tal que } A = Y \cap T \text{ para algum } T \in \tau \Big\} \ .$$

Em palavras, τ_Y é formado por todos os subconjuntos de Y que podem ser escritos como intersecção de Y com algum aberto de τ.

Então, afirmamos que τ_Y é uma topologia em Y. Vamos provar isso. Primeiro é claro que $\emptyset \in \tau_Y$ pois $\emptyset = Y \cap \emptyset$ e $\emptyset \in \tau$. Em segundo lugar é também claro que $Y \in \tau_Y$ pois $Y = Y \cap X$ (dado que $Y \subset X$) e $X \in \tau$.

Vamos agora mostrar que se A e $B \in \tau_Y$, então $A \cap B \in \tau_Y$. Para isso note que, como A e $B \in \tau_Y$, então existem A' e $B' \in \tau$ de forma que $A = Y \cap A'$ e $B = Y \cap B'$. Logo $A \cap B = (Y \cap A') \cap (Y \cap B') = Y \cap (A' \cap B')$ (por que?) e, como $A' \cap B' \in \tau$, segue que $A \cap B \in \tau_Y$.

Para finalizar, falta-nos mostrar que se $\{A_\lambda, \ \lambda \in I\}$ é uma coleção de elementos de τ_Y (indexados por um conjunto arbitrário de índices I), então $\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda \in \tau_Y$. Pelas hipóteses, cada A_λ é da forma $A_\lambda = Y \cap T_\lambda$ com $T_\lambda \in \tau$ e, portanto,

$$\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda \ = \ \bigcup_{\lambda \in I} (Y \cap T_\lambda) \ = \ Y \cap \left(\bigcup_{\lambda \in I} T_\lambda \right) \ \text{(por que?)} \ .$$

Assim, como $\bigcup_{\lambda \in I} T_\lambda \in \tau$ fica provado que $\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda \in \tau_Y$ como queríamos demonstrar.

Vimos portanto que τ_Y é uma topologia em Y. Essa topologia é chamada de *topologia induzida* em Y pela topologia τ.

E. 29.41 *Exercício*. Verifique que, usando a mesma notação usada acima, $\tau_X = \tau$. ✠

Fazemos notar que se $Y \subset X$ e Y possui uma topologia $\tau' \subset \mathbb{P}(Y)$, então existe uma topologia τ em X que induz a topologia τ'. Essa topologia é dada por $\tau = \tau' \bigcup \big\{ A \cup (X \setminus Y), \ A \in \tau' \big\}$. Observe que se $A \in \tau'$, então obviamente $A \in \tau$ e $A = A \cap Y$. Isso prova que τ' é induzida por τ.

E. 29.42 *Exercício*. Prove que τ, definida acima, é uma topologia em X. Sugestão: recorde que $Y \in \tau'$. ✠

• **Exercícios e exemplos**

E. 29.43 *Exercício*. Seja $Y = [0, \ 1] \subset \mathbb{R}$ e seja $\tau_{\mathbb{R}}$ a topologia usual de $\mathbb{R}$. Mostre que conjuntos da forma $[0, \ x)$ com $0 < x \leq 1$ são abertos na topologia τ_Y induzida em Y por $\tau_{\mathbb{R}}$. Mostre que conjuntos da forma $(x, \ 1]$ com $0 \leq x < 1$ são abertos na topologia τ_Y induzida em Y por $\tau_{\mathbb{R}}$. ✠

Para o estudante é importante ver que, no exercício acima, nem $[0, \ x)$ nem $(x, \ 1]$ são abertos em $\tau_{\mathbb{R}}$! Isso mostra que topologias induzidas podem trazer elementos novos ao jogo.

E. 29.44 *Exercício*. Mostre que a topologia τ_Y do exercício anterior é igual à topologia induzida em Y pela métrica $d(x, y) = |y-x|$. ✠

E. 29.45 *Exercício*. Seja $Y = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e seja $\tau_\mathbb{Q}$ a topologia induzida em $\mathbb{Q}$ por $\tau_\mathbb{R}$. Mostre que todo conjunto de um elemento $\{r\}$ com $r \in \mathbb{Q}$ é um conjunto fechado segundo $\tau_\mathbb{Q}$. ✠

Essa topologia $\tau_\mathbb{Q}$ do último exercício tem propriedades curiosas. Seja x um número irracional e seja o conjunto $\chi = (-\infty, x) \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$. Então, χ é ao mesmo tempo aberto e fechado em $\tau_\mathbb{Q}$. O fato que χ é aberto é evidente pois $(-\infty, x)$ é aberto em $\tau_\mathbb{R}$. O fato que χ é fechado segue da constatação que o complemento de χ em $\mathbb{Q}$ é o conjunto $\chi^c = [x, \infty) \cap \mathbb{Q}$ e que $[x, \infty) \cap \mathbb{Q} = (x, \infty) \cap \mathbb{Q}$ pois x é irracional. Assim, χ^c é aberto em $\tau_\mathbb{Q}$ pois (x, ∞) é aberto em $\tau_\mathbb{R}$. Logo χ, que é o complemento de χ^c nos racionais, é fechado por $\tau_\mathbb{Q}$.

E. 29.46 *Exercício*. Seja $Y = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e seja $\tau_\mathbb{Q}$ a topologia induzida em $\mathbb{Q}$ por $\tau_\mathbb{R}$. Mostre que o intervalo aberto de racionais $\{x \in \mathbb{Q}, \ e < x < \pi\}$ é um conjunto aberto e fechado em $\tau_\mathbb{Q}$. ✠

E. 29.47 *Exercício*. Seja X um conjunto com uma topologia τ e considere $Y \subset X$ e a topologia induzida por τ em Y: τ_Y. Considere agora um terceiro conjunto Z com $Z \subset Y \subset X$. Podemos, em princípio, construir duas topologias induzidas em Z: 1) a topologia induzida por τ em Z e 2) a topologia induzida por τ_Y em Z. Mostre que essas topologias são na verdade idênticas. ✠

E. 29.48 *Exercício*. Seja $Y = (0, 1) \cup (1, 2)$ munido da topologia τ_Y induzida pela topologia $\tau_\mathbb{R}$. Mostre que os subconjuntos $(0, 1)$ e $(1, 2)$ são ambos simultaneamente abertos e fechados nessa topologia τ_Y. ✠

• A σ-álgebra induzida

Seja X um conjunto e seja $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra em X. Seja também Y um subconjunto genérico de X. Podemos fazer de Y um espaço mensurável construindo com o auxílio de $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra entre os subconjuntos de Y. A construção é análoga àquela da topologia induzida.

Seja $\mathcal{M}_Y$ a seguinte coleção de subconjuntos de Y:

$$\mathcal{M}_Y := \Big\{A \subset Y, \ A = Y \cap M \text{ para algum } M \in \mathcal{M}\Big\} .$$

Vamos mostrar que $\mathcal{M}_Y$ é uma σ-álgebra em Y. Os fatos que $\emptyset \in \mathcal{M}_Y$ e que $Y \in \mathcal{M}_Y$ podem ser provados tal como no caso da topologia induzida. Queremos agora provar que se $A \in \mathcal{M}_Y$, então seu complemento em Y, $A^c = Y \setminus A$, também é um elemento de $\mathcal{M}_Y$. Por hipótese A é da forma $A = Y \cap M$ com $M \in \mathcal{M}$ e, portanto,

$$A^c = Y \setminus (Y \cap M) = Y \cap (X \setminus M) .$$

Assim, como $X \setminus M$ é um elemento de $\mathcal{M}$, segue que $A^c = Y \setminus A$ é um elemento de $\mathcal{M}_Y$.

Finalmente queremos provar que se $\{A_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ é uma família enumerável de elementos de $\mathcal{M}_Y$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ também o é.

Pelas hipóteses cada A_n é da forma $Y \cap M_n$ com $M_n \in \mathcal{M}$. Daí

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (Y \cap M_n) = Y \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) .$$

Como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ é também um elemento de $\mathcal{M}$, a afirmativa está provada.

A σ-álgebra $\mathcal{M}_Y$ á chamada de *σ-álgebra induzida* em Y pela σ-álgebra $\mathcal{M}$.

29.2.5 Topologias e σ-Álgebras Produto

• A topologia produto de espaços topológicos

Uma construção muito importante é a da chamada topologia produto de espaços topológicos. Muito pode ser dito sobre essa topologia (para mais detalhes vide, por exemplo, [56]), mas vamos nos restringir por ora somente à sua definição para o caso de produtos Cartesianos finitos. Uma importante extensão para produtos Cartesianos gerais será apresentada na Seção 34.6, página 1623.

Seja $\{X_1, \ldots, X_n\}$ uma coleção finita de conjuntos e seja, para cada $a \in I_n = \{1, \ldots, n\}$, τ_a uma topologia em X_a. Seja $\mathcal{X} = \prod_{a=1}^{n} X_a$ o produto Cartesiano de todos os X_a, $a \in I_n$ e seja $\mathcal{B}$ a coleção de todos os subconjuntos de $\mathcal{X}$ que sejam da forma $\prod_{a \in I_n} A_a$ onde $A_a \in \tau_a$, ou seja, cada A_a é um aberto em X_a segundo a topologia τ_a. Então, a topologia gerada por $\mathcal{B}$, $\tau[\mathcal{B}]$ é chamada de *topologia produto* dos espaços topológicos X_a, τ_a.

O correspondente espaço topológico é denotado por $\big(X_1 \times \cdots \times X_n, \ \tau_1 \times \cdots \times \tau_n\big)$.

E. 29.49 *Exercício*. Seja o espaço $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e considere que cada fator $\mathbb{R}$ é munido da topologia usual $\tau_{\mathbb{R}}$. Mostre que a topologia produto obtida em $\mathbb{R}^2$ é idêntica à topologia métrica usual de $\mathbb{R}^2$ definida pela métrica usual

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} ,$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. ✠

• A σ-álgebra produto

Há uma construção análoga para σ-álgebras. Seja X_a, $a \in I_n$ uma coleção finita de conjuntos e seja, para cada $a \in I_n$, $\mathcal{M}_a$ uma σ-álgebra em X_a. Seja como antes $\mathcal{X} = \prod_{a \in I_n} X_a$ o produto Cartesiano de todos os X_a, $a \in I_n$. Definimos $\mathcal{D}$ a coleção de todos os subconjuntos de $\mathcal{X}$ que sejam da forma $\prod_{a \in I_n} M_a$ onde $M_a \in \mathcal{M}_a$, ou seja, cada M_a é mensurável em X_a segundo a σ-álgebra $\mathcal{M}_a$. Então, a σ-álgebra gerada por $\mathcal{D}$, $\mathcal{M}[\mathcal{D}]$ é chamada de *σ-álgebra produto* das σ-álgebras $\mathcal{M}_a$.

29.3 Interior e Fecho de Conjuntos em Espaços Topológicos

Seja X um espaço dotado de uma topologia τ. Podemos associar a cada subconjunto genérico B de X três conjuntos importantes, o chamado fecho de B, o chamado interior de B e a chamada fronteira ou bordo de B. Vamos discutir agora esses conceitos.

• Fecho

Para $B \subset X$ genérico, definamos a coleção

$$\mathcal{F}_B := \Big\{ F \subset X, \ F \text{ é } \tau\text{-fechado e tal que } F \text{ contém } B\text{: } F \supset B \Big\} .$$

Se $B = \emptyset$, então $\mathcal{F}_\emptyset = \mathcal{F}(\tau)$, a coleção de todos os subconjuntos τ-fechados de X, incluindo o vazio, pois, por convenção, todos contêm $\emptyset$.

A coleção $\mathcal{F}_B$ é, então, a coleção de todos os conjuntos fechados (segundo a topologia τ) que contém o conjunto B. Sabemos que a intersecção arbitrária de conjuntos fechados é também um conjunto fechado. Isso motiva a seguinte definição:

$$\overline{B} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}_B} F .$$

O conjunto $\overline{B}$ é chamado de *fecho*, ou *aderência*, do conjunto B na topologia τ e é, pela própria definição, um conjunto fechado.

E. 29.50 *Exercício*. Pode-se dizer que o fecho de um conjunto B é o menor conjunto fechado que contém B. Justifique isso em face da definição dada acima para $\overline{B}$. ✠

	$\overline{(a,\, b)}$	$\overline{[a,\, b)}$	$\overline{[a,\, b]}$	$\overline{\{a\}}$
τ_I	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\tau_{cf}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\{a\}$
$\tau_{cc}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\{a\}$
$\tau_{\mathbb{R}}$	$[a,\, b]$	$[a,\, b]$	$[a,\, b]$	$\{a\}$
$\tau[\mathbb{S}]$	$[a,\, b)$	$[a,\, b)$	$[a,\, b]$	$\{a\}$
$\mathbb{P}(\mathbb{R})$	$(a,\, b)$	$[a,\, b)$	$[a,\, b]$	$\{a\}$

	$(a,\, b)^0$	$[a,\, b)^0$	$[a,\, b]^0$	$\{a\}^0$
τ_I	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\tau_{cf}(\mathbb{R})$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\tau_{cc}(\mathbb{R})$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\tau_{\mathbb{R}}$	$(a,\, b)$	$(a,\, b)$	$(a,\, b)$	$\emptyset$
$\tau[\mathbb{S}]$	$(a,\, b)$	$[a,\, b)$	$[a,\, b)$	$\emptyset$
$\mathbb{P}(\mathbb{R})$	$(a,\, b)$	$[a,\, b)$	$[a,\, b]$	$\{a\}$

	$\partial(a,\, b)$	$\partial[a,\, b)$	$\partial[a,\, b]$	$\partial\{a\}$
τ_I	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\tau_{cf}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\{a\}$
$\tau_{cc}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\{a\}$
$\tau_{\mathbb{R}}$	$\{a,\, b\}$	$\{a,\, b\}$	$\{a,\, b\}$	$\{a\}$
$\tau[\mathbb{S}]$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{a\}$
$\mathbb{P}(\mathbb{R})$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Tabela 29.1: As três tabelas acima apresentam, da esquerda para a direita, o fecho, o interior e o bordo, respectivamente, dos subconjuntos $(a,\, b)$, $[a,\, b)$, $[a,\, b]$ e $\{a\}$ da reta real, com $-\infty < a < b < \infty$, em diferentes topologias. Acima, $\tau_I = \{\emptyset,\, \mathbb{R}\}$ é a topologia indiscreta de $\mathbb{R}$, $\tau_{cf}(\mathbb{R})$ é a topologia co-finita de $\mathbb{R}$, $\tau_{cc}(\mathbb{R})$ é a topologia co-contável de $\mathbb{R}$, $\tau_{\mathbb{R}}$ é a topologia usual de $\mathbb{R}$, $\tau[\mathbb{S}]$ é a topologia de Sorgenfrey de $\mathbb{R}$ (Seção 29.2.1.1, página 1408) e $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ é a topologia discreta de $\mathbb{R}$.

E. 29.51 _Exercício importante_. Um conjunto B é fechado se e somente se $B = \overline{B}$. Prove isso. ✠

A seguinte proposição enuncia algumas propriedades elementares úteis da noção de fecho.

Proposição 29.4 *Seja X um conjunto não-vazio dotado de uma topologia τ. Valem as seguintes afirmações:*

1. *$M \subset \overline{M}$ para todo $M \subset X$.*
2. *$\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ para todo $M \subset X$.*
3. *Se $M,\, N \subset X$ com $M \subset N$, então $\overline{M} \subset \overline{N}$.*
4. *Se $M,\, N \subset X$, então $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.*
5. *Para uma família arbitrária $\{M_\lambda \subset X,\ \lambda \in \Lambda\}$ vale $\overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda} \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{M_\lambda}$.*
6. *$\overline{\emptyset} = \emptyset$ e $\overline{X} = X$.* □

Demonstração. Prova de 1: elementar, pois, pela definição, $\overline{M}$ é uma intersecção de conjuntos que contém M. Prova de 2: elementar, pois $\overline{M}$ é fechado e, portanto, está contido em $\mathcal{F}_{\overline{M}}$ (vide Exercício E. 29.51). Prova de 3: $M \subset N \subset \overline{N}$ (pelo item 1). Assim, $\overline{N}$ é um fechado que contém M. Logo, pela definição de fecho, $\overline{M} \subset \overline{N}$. Prova de 4: como $\overline{M}$ e $\overline{N}$ são fechados e valem $M \subset \overline{M}$, $N \subset \overline{N}$, o conjunto $\overline{M} \cup \overline{N}$ é fechado e contém $M \cup N$. Logo, $\overline{M \cup N} \subset \overline{M} \cup \overline{N}$. Por outro lado, pelo item 3 tem-se $\overline{M} \subset \overline{M \cup N}$ e $\overline{N} \subset \overline{M \cup N}$. Logo, $\overline{M} \cup \overline{N} \subset \overline{M \cup N}$. Prova de 5: Como $M_\lambda \subset \overline{M_\lambda}$, segue que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{M_\lambda}$, que é um τ-fechado. Logo, $\overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda} \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{M_\lambda}$. Prova de 6: $\emptyset$ e X são fechados e, portanto, $\overline{\emptyset} = \emptyset$ e $\overline{X} = X$. ■

E. 29.52 _Exercício_. Seja $X = \mathbb{R}$. A Tabela 29.1, página 1416, mostra o fecho dos conjuntos $(a,\, b)$, $[a,\, b)$, $[a,\, b]$ e $\{a\}$, com $-\infty < a < b < \infty$, em várias topologias. Estude cada um dos casos. ✠

Note na Tabela 29.1, as topologias escolhidas estão postas em ordem crescente de inclusão (exceto por $\tau_{cc}(\mathbb{R})$):

$$\begin{array}{ccccccccc} \tau_I & \subset & \tau_{cf}(\mathbb{R}) & \subset & \tau_{\mathbb{R}} & \subset & \tau[\mathbb{S}] & \subset & \mathbb{P}(\mathbb{R}) \ . \\ & & \cap & & & & & & \\ & & \tau_{cc}(\mathbb{R}) \ . & & & & & & \end{array}$$

O caso do conjunto $(a,\, b)$ (e os outros) ilustra claramente um fato relevante, a saber, que quanto "maior" a topologia "menor" é o fecho de um dado conjunto.

E. 29.53 *Exercício muito importante*. Seja $\overline{B}^{\tau}$ o fecho de um conjunto qualquer B, segundo uma topologia τ. Seja τ' uma outra topologia tal que $\tau \subset \tau'$. Mostre que $\overline{B}^{\tau'} \subset \overline{B}^{\tau}$. ✠

• **Interior**

Para $B \subset X$ genérico, definamos a coleção

$$\mathcal{A}_B := \Big\{ A \subset X, \ A \text{ é aberto e tal que } A \text{ está contido em } B\text{: } A \subset B \Big\} .$$

A coleção $\mathcal{A}_B$ é, então, a coleção de todos os conjuntos abertos (segundo a topologia τ) contidos no conjunto B. Sabemos que a união arbitrária de conjuntos abertos é também um conjunto aberto. Isso motiva a seguinte definição:

$$B^0 := \bigcup_{A \in \mathcal{A}_B} A .$$

O conjunto B^0 é chamado de *interior* do conjunto B na topologia τ e é, pela própria definição, um subconjunto aberto de B.

E. 29.54 *Exercício*. Pode-se dizer que o interior de um conjunto B é o maior conjunto aberto contido em B. Justifique isso em face da definição dada acima para B^0. ✠

E. 29.55 *Exercício*. Um conjunto B é aberto se e somente se $B = B^0$. Prove isso. ✠

A seguinte proposição enuncia algumas propriedades elementares úteis da noção de interior.

Proposição 29.5 *Seja X um conjunto não-vazio dotado de uma topologia τ. Valem as seguintes afirmações:*

1. *$M^0 \subset M$ para todo $M \subset X$.*
2. *$(M^0)^0 = M^0$ para todo $M \subset X$.*
3. *Se $M, \ N \subset X$ com $M \subset N$, então $M^0 \subset N^0$.*
4. *Se $M, \ N \subset X$, então $(M \cap N)^0 = M^0 \cap N^0$.*
5. *Para uma família arbitrária $\{M_\lambda \subset X, \ \lambda \in \Lambda\}$ vale $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda\right)^0 \supset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (M_\lambda)^0$.*
6. *$\emptyset^0 = \emptyset$ e $X^0 = X$.* □

Demonstração. O item 1 é evidente pela definição. O item 2 segue da observação que M^0 é um subconjunto aberto de si mesmo e, portanto, $M^0 \subset (M^0)^0$, pela definição de interior. Pelo item 1 vale também $(M^0)^0 \subset M^0$, provando que $M^0 = (M^0)^0$. Prova do item 3: $M^0 \subset M \subset N$. Logo, M^0 é um aberto contido em N e, portanto, $M^0 \subset N^0$. Prova do item 4: como M^0 e N^0 são abertos com $M^0 \subset M$ e $N^0 \subset N$, segue que $M^0 \cap N^0$ é um aberto contido em $M \cap N$ e, portanto, $M^0 \cap N^0 \subset (M \cap N)^0$. Por outro lado, pelo item 3, $(M \cap N)^0 \subset M^0$ e $(M \cap N)^0 \subset N^0$, o que implica $(M \cap N)^0 \subset M^0 \cap N^0$, provando que $(M \cap N)^0 = M^0 \cap N^0$. Prova de 5: Como $M_\lambda \supset (M_\lambda)^0$, segue que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \supset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (M_\lambda)^0$, que é um τ-aberto. Logo, $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda\right)^0 \supset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (M_\lambda)^0$. Prova do item 6: $\emptyset$ e X são abertos e, portanto, $\emptyset^0 = \emptyset$ e $X^0 = X$. ■

E. 29.56 *Exercício*. Seja $X = \mathbb{R}$. A Tabela 29.1, página 1416, mostra o interior dos conjuntos (a, b), $[a, b)$, $[a, b]$ e $\{a\}$, com $-\infty < a < b < \infty$, em várias topologias. Estude cada um dos casos.

Na Tabela 29.1, o caso do conjunto $[a, b]$ ilustra claramente um fato relevante, a saber, que quanto maior a topologia maior é o interior de um dado conjunto. ✠

E. 29.57 *Exercício*. Seja $(B^0)^{\tau}$ o interior de um conjunto qualquer B, segundo uma topologia τ. Seja τ' uma outra topologia tal que $\tau \subset \tau'$. Mostre que $(B^0)^{\tau} \subset (B^0)^{\tau'}$. ✠

Por fim, note que para qualquer conjunto $B \subset X$ vale sempre, em qualquer topologia τ, que

$$B^0 \subset B \subset \overline{B} .$$

A proposição seguinte estabelece algumas relações úteis.

Proposição 29.6 *Com as definições acima valem*

$$A^0 = \left(\overline{(A^c)}\right)^c , \tag{29.2}$$

$$\overline{A} = \left((A^c)^0\right)^c , \tag{29.3}$$

para todo $A \in X$. Dessas relações, segue que

$$\left((A^0)^c\right)^0 = \left(\overline{(A^c)}\right)^0 , \tag{29.4}$$

$$\overline{\left((\overline{A})^c\right)} = \overline{\left((A^c)^0\right)} . \tag{29.5}$$

□

É de se notar que as relações (29.2) e (29.3) relacionam as operações de fecho e de interior.

Prova da Proposição 29.6. As igualdades (29.2) e (29.3) são equivalentes (justifique!), portanto, é suficiente provar a primeira. Como $A^0 \subset A$, vale $A^c \subset (A^0)^c$. Lembrando que $(A^0)^c$ é fechado (pois A^0 é aberto), segue pela definição de fecho que $\overline{(A^c)} \subset (A^0)^c$. Tomando-se o complementar disso concluímos que $A^0 \subset \left(\overline{(A^c)}\right)^c$. Por outro lado, se $x \in \left(\overline{(A^c)}\right)^c \Longrightarrow x \notin \overline{(A^c)} \Longrightarrow x \notin A^c \Longrightarrow x \in A$, ou seja, $\left(\overline{(A^c)}\right)^c \subset A$. Logo, como $\left(\overline{(A^c)}\right)^c$ é aberto (pois $\overline{(A^c)}$ é fechado), segue pela definição de interior que $\left(\overline{(A^c)}\right)^c \subset A^0$, completando a prova de (29.2).

A relação (29.4) segue de (29.2) tomando-se o complemento e, em seguida, o interior. A relação (29.5) segue de (29.3) tomando-se o complemento e em seguida o fecho. ■

• <u>Fronteira ou bordo</u>

Para $A \subset X$ arbitrário, definamos a sua <u>fronteira</u> ou <u>bordo</u> (na topologia τ) como sendo o conjunto

$$\partial A := \overline{A} \setminus A^0 = \overline{A} \cap (A^0)^c \stackrel{(29.2)}{=} \overline{A} \cap \overline{(A^c)} . \tag{29.6}$$

A seguinte proposição apresenta alguns fatos elementares relevantes sobre o bordo de conjuntos.

Proposição 29.7 *Com as definições acima, valem, para todo $A \subset X$,*

$$\overline{\partial A} = \partial A , \text{ ou seja, } \partial A \text{ é fechado,} \tag{29.7}$$

$$\partial A = \partial(A^c) , \tag{29.8}$$

$$\partial(\partial A) \subset \partial A , \tag{29.9}$$

$$\partial(\partial A) = \partial A \text{ se e somente se } (\partial A)^0 = \emptyset , \tag{29.10}$$

$$\partial\Big(\partial(\partial A)\Big) = \partial(\partial A) . \tag{29.11}$$

Valem também $\partial\emptyset = \emptyset$ e $\partial X = \emptyset$. □

Chamamos a atenção do leitor para o fato que alguns textos mais antigos definem ∂A como $A \cap \overline{(A^c)}$. Nesse caso as propriedades listadas acima não são necessariamente válidas. Por exemplo, ∂A não é necessariamente fechado.

Demonstração da Proposição 29.7. ∂A é fechado pois a igualdade $\partial A = \overline{A} \cap (A^0)^c$ de (29.6) mostra que é a intersecção de dois fechados. Isso provou (29.7). Da igualdade $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(A^c)}$ em (29.6) é também evidente que $\partial A = \partial(A^c)$, provando (29.8). Da definição, e do fato de ∂A ser fechado, segue que $\partial(\partial A) = \overline{\partial A} \setminus \big(\partial A\big)^0 = \partial A \setminus \big(\partial A\big)^0$. Isso mostra que $\partial(\partial A) \subset \partial A$ e que a igualdade se dá se e somente se $\big(\partial A\big)^0$ for vazio (já que $\big(\partial A\big)^0 \subset \partial A$). Isso provou (29.9) e (29.10). A igualdade $\partial(\partial A) = \partial A \setminus \big(\partial A\big)^0$ significa $\partial(\partial A) = (\partial A) \cap \Big(\big(\partial A\big)^0\Big)^c$ e, pelo item 4 da Proposição 29.5, página 1417, temos que $\big(\partial(\partial A)\big)^0 = (\partial A)^0 \cap \bigg(\Big(\big(\partial A\big)^0\Big)^c\bigg)^0$. Porém, $\bigg(\Big(\big(\partial A\big)^0\Big)^c\bigg)^0 \subset \Big(\big(\partial A\big)^0\Big)^c$. Logo, $\big(\partial(\partial A)\big)^0 \subset (\partial A)^0 \cap \Big(\big(\partial A\big)^0\Big)^c = \emptyset$. Isso estabeleceu que $\big(\partial(\partial A)\big)^0 = \emptyset$ e, por (29.10), isso implica (29.11). Que $\partial\emptyset = \emptyset$ e $\partial X = \emptyset$ é evidente pela definição. ■

E. 29.58 *Exercício*. Seja $X = \mathbb{R}$. A Tabela 29.1, página 1416, mostra o bordo dos conjuntos (a, b), $[a, b)$, $[a, b]$ e $\{a\}$, com $-\infty < a < b < \infty$, em várias topologias. Estude cada um dos casos. ✠

E. 29.59 *Exercício*. Seja $\partial^\tau B$ o bordo de um conjunto qualquer B, segundo uma topologia τ. Seja τ' uma outra topologia tal que $\tau \subset \tau'$. Mostre que $\partial^{\tau'} B \subset \partial^\tau B$. ✠

A afirmativa do último exercício pode ser confirmada contemplando-se a Tabela 29.1, página 1416.

• Outra caracterização do fecho de um conjunto

O conceito de fecho de um conjunto é de grande importância. Uma das razões, como veremos, é que no caso de espaços métricos o fecho de um conjunto B caracteriza o conjunto de todos os limites de sequências de elementos de B. Em particular um conjunto só é fechado em um espaço métrico se contiver todos os limites de sequências de seus elementos (vide Seção 29.3.1, página 1422). Muitos resultados importantes em Matemática decorrem dessa observação.

Vamos nos preparar para apresentar esse fato, assim como outros válidos em espaços topológicos gerais. A seguinte proposição apresenta uma caracterização equivalente da noção de fecho de um conjunto, sendo essencial a outros desenvolvimentos relacionados à noção de fecho de um conjunto.

Proposição 29.8 *Seja X um conjunto não-vazio e τ uma topologia em X. Seja $B \subset X$. Um ponto $x \in X$ é um elemento de $\overline{B}$ se e somente se a seguinte propriedade for válida: todo aberto $A \in \tau$ que contém o ponto x tem uma intersecção não-vazia com B, ou seja,*

$$\overline{B} \;=\; \Big\{x \in X|\ A \cap B \neq \emptyset,\ \forall A \in \tau \text{ com } x \in A\Big\}\,. \tag{29.12}$$

□

Prova. Suponha que $x \in \overline{B}$ e que haja um aberto A que contém x e tal que $A \cap B = \emptyset$. Isso implica que $\overline{B} \cap A^c \supset B$, pois

$$\overline{B} \cap A^c \;\supset\; B \cap A^c \;=\; B\,.$$

Assim, $\overline{B} \cap A^c$ é um conjunto fechado que contém B e, portanto, $\overline{B} \subset \overline{B} \cap A^c$, dado que o fecho de B é o menor fechado que contém B. Isso, por sua vez, diz que $\overline{B} \subset A^c$, o que significa que $\overline{B} \cap A = \emptyset$. Mas isso contradiz as hipóteses de partida que diziam que $x \in \overline{B}$ e $x \in A$. Portanto, se $x \in \overline{B}$, então $A \cap B \neq \emptyset$ para todo aberto A que contém x.

Suponhamos agora que para um ponto $x \in X$ valha que $A \cap B \neq \emptyset$ para todo aberto A que contém x. Se supormos que $x \notin \overline{B}$, então $x \in \big(\overline{B}\big)^c$, que é um aberto. Assim, deveríamos ter, pelas hipóteses que $\big(\overline{B}\big)^c \cap B \neq \emptyset$. Como $\overline{B} \supset B$ isso é impossível. Assim, supor que $A \cap B \neq \emptyset$ para todo aberto A que contém x implica que $x \in \overline{B}$. Isso completa a demonstração da proposição. ■

• Pontos de acumulação e conjuntos derivados

Seja (X, τ) um espaço toplógico e seja $B \subset X$, não-vazio. Um ponto $x \in X$ é dito ser um *ponto de acumulação* de B segundo τ se todo τ-aberto A que contiver x contém também outros pontos de B que não x, ou seja, se $\big(A \cap B\big) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ para todo $A \in \tau$ com $x \in A$.

A coleção de todos os pontos de acumulação de B é denominada o *conjunto derivado* de B, e é frequentemente denotado por B'. Assim,

$$B' = \Big\{x \in X \big| \ \big(A \cap B\big) \setminus \{x\} \neq \emptyset, \ \forall A \in \tau \text{ com } x \in A\Big\} . \tag{29.13}$$

Honorificamente declara-se $\emptyset' = \emptyset$.

Exemplos 29.1 Seja $X = \mathbb{R}$ com sua topologia usual $\tau_{\mathbb{R}}$. Tem-se que $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, $\mathbb{N}' = \mathbb{Z}' = \emptyset$. Para $B = \{1/n, \ n \in \mathbb{N}\}$ tem-se $B' = \{0\}$. Para $B = (0, \ 1)$, $B = [0, \ 1]$, $B = [0, \ 1)$ ou $B = (0, \ 1]$ tem-se $B' = [0, \ 1]$. ¤

A proposição que segue é importante.

Proposição 29.9 *Seja $(X, \ \tau)$ um espaço topológico e seja $B \subset X$. Então, $\overline{B} = B \cup B'$.* □

Prova. É evidente por (29.12) e pela definição de B' que

$$\begin{aligned}\overline{B} &= \Big\{x \in X \big| \ \big(A \cap B\big) \setminus \{x\}^c \neq \emptyset, \ \forall A \in \tau \text{ com } x \in A\Big\} \bigcup \Big\{x \in X \big| \ \big(A \cap B\big) \setminus \{x\} \neq \emptyset, \ \forall A \in \tau \text{ com } x \in A\Big\} \\ &= \Big\{x \in X \big| \ \big(A \cap B\big) \setminus \{x\}^c \neq \emptyset, \ \forall A \in \tau \text{ com } x \in A\Big\} \bigcup B' .\end{aligned}$$

Mas para $A \in \tau$ com $x \in A$ vale $\big(A \cap B\big) \setminus \{x\}^c = A \cap B \cap \{x\} = B \cap \{x\}$. Agora,

$$\begin{aligned}\Big\{x \in X \big| \ \big(A \cap B\big) \setminus \{x\}^c \neq \emptyset, \ \forall A \in \tau \text{ com } x \in A\Big\} &= \Big\{x \in X \big| \ B \cap \{x\} \neq \emptyset, \ \forall A \in \tau \text{ com } x \in A\Big\} \\ &= \Big\{x \in X \big| \ B \cap \{x\} \neq \emptyset\Big\} = B ,\end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

Uma consequência relevante é a seguinte afirmação:

Corolário 29.1 *Seja $(X, \ \tau)$ um espaço topológico. Então $F \subset X$ é τ-fechado se e somente se $F' \subset F$. Em palavras mais diretas: um conjunto é fechado segundo uma topologia se e somente se contiver seus pontos de acumulação nessa topologia.* □

Prova. F é τ-fechado se e somente se $F = \overline{F}$. Se F for τ-fechado, tem-se pela Proposição 29.9 que $F = F \cup F'$, o que implica que $F' \subset F$. Por outro lado, se $F' \subset F$, então a Proposição 29.9 afirma que $\overline{F} = F \cup F' = F$, o que implica que F é τ-fechado. ■

• Fechos e espaços topológicos. Os axiomas de Kuratowski

Em um espaço X dotado de uma topologia τ podemos associar a cada subconjunto $A \subset X$ um outro subconjunto $\overline{A}$, o fecho de A. Essa associação $A \mapsto \overline{A}$ pode ser entendida como uma operação entre conjuntos e satisfaz as propriedades listadas na Proposição 29.4, página 1416. A proposição que segue mostra que há uma espécie de recíproca dessa construção: é possível definir uma topologia em X a partir de uma operação que possua as mesmas propriedades da operação de fecho.

Proposição 29.10 *Seja X um conjunto não-vazio e seja uma aplicação $\kappa : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$ que a cada $A \subset X$ associa um conjunto $\kappa(A)$ satisfazendo:*

1. $\kappa(\emptyset) = \emptyset$.
2. $A \subset \kappa(A)$ *para todo* $A \subset X$.

3. $\kappa\big(\kappa(A)\big) = \kappa(A)$ *para todo* $A \subset X$.

4. Se $A,\ B \subset X$, *então* $\kappa(A \cup B) = \kappa(A) \cup \kappa(B)$.

Dizemos que um conjunto F *é fechado segundo a aplicação* κ *se* $F = \kappa(F)$ *e dizemos que um conjunto é aberto segundo* κ *se for o complementar em* X *de um conjunto fechado segundo* κ. *Então, a coleção de todos os abertos segundo* κ *define uma topologia em* X, *que denotaremos por* τ_κ. *Por fim, para todo* $A \subset X$ *vale* $\overline{A}^{\tau_\kappa} = \kappa(A)$, *ou seja, o fecho de* A *na topologia* τ_κ *coincide com* $\kappa(A)$. □

Nota. Uma aplicação $\kappa : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$ satisfazendo as condições dos itens 1–4 da Proposição 29.10 é por vezes dita ser um *operador de Kuratowski*[10]. A possibilidade de definir-se a noção de espaço topológico a partir de um operador de Kuratowski, tal como enunciado na Proposição 29.10, é de relevância por aproximar o estudo de espaços topológicos do estudo de álgebras Booleanas[11]. Os itens 1–4 da Proposição 29.10 são por vezes denominados *axiomas de fecho de Kuratowski* ou apenas *axiomas de Kuratowski*. ♣

Prova da Proposição 29.10. Comecemos observando que se $M \subset N$, então $N = M \cup (N \setminus M)$. Logo, pelo item 4, $\kappa(N) = \kappa(M) \cup \kappa(N \setminus M)$, o que provou que $\kappa(M) \subset \kappa(N)$. Assim,

$$M \subset N \implies \kappa(M) \subset \kappa(N) \ . \tag{29.14}$$

Pelo item 2, vale $X \subset \kappa(X)$, o que implica $\kappa(X) = X$. Junto com o item 1 isso prova que $\emptyset$ e X são abertos e fechados segundo κ.

Se F e $G \subset X$ são fechados segundo κ, então $F = \kappa(F)$ e $G = \kappa(G)$. Logo, $F \cup G = \kappa(F) \cup \kappa(G) = \kappa(F \cup G)$, sendo que na última igualdade usamos a hipótese do item 4. Isso provou que $F \cup G$ é fechado segundo κ.

Precisamos ainda provar que intersecções arbitrárias de conjuntos fechados segundo κ permanecem conjuntos fechados segundo κ. Seja $\{F_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ uma família de fechados segundo κ, indexada por um conjunto de índices Λ.

Pela hipótese do item 2 tem-se $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \subset \kappa\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\right)$. Por outro lado, $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \subset F_{\lambda'}$ para todo $\lambda' \in \Lambda$. Logo, por (29.14), $\kappa\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\right) \subset \kappa(F_{\lambda'}) = F_{\lambda'}$. Como isso vale para todo $\lambda' \in \Lambda$, segue que $\kappa\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\right) \subset \bigcap\limits_{\lambda'\in\Lambda} F_{\lambda'}$. Isso completa a prova que $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \kappa\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\right)$.

Com isso, provamos que a coleção de todos os conjuntos fechados segundo κ satisfaz todos os axiomas de conjuntos fechados em um espaço topológico. A topologia assim definida pela operação κ será denotada aqui por τ_κ.

Seja $\overline{A}^{\tau_\kappa}$ o fecho de $A \subset X$ na topologia τ_κ. Como $A \subset \kappa(A)$ (item 2) e $\kappa(A)$ é fechado em τ_κ, segue da definição de fecho que $\overline{A}^{\tau_\kappa} \subset \kappa(A)$. Por outro lado, de $A \subset \overline{A}^{\tau_\kappa}$ (item 1 da Proposição 29.4, página 1416), segue de (29.14) que $\kappa(A) \subset \kappa\left(\overline{A}^{\tau_\kappa}\right) = \overline{A}^{\tau_\kappa}$, a última igualdade sendo devida ao fato de $\overline{A}^{\tau_\kappa}$ ser fechado em τ_κ. Isso demonstrou que $\overline{A}^{\tau_\kappa} = \kappa(A)$, completando a prova da Proposição 29.10. ■

E. 29.60 *Exercício*. Se κ é um operador de Kuratowski, mostre que um conjunto A é um τ_κ-aberto se e somente se $A = \kappa(A^c)^c$. ✠

E. 29.61 *Exercício*. Se κ é um operador de Kuratowski, a relação (29.2) mostra que o interior de um conjunto A é dado por $\iota(A) = \kappa(A^c)^c$. Quais propriedades abstratas um "operador de interior" $\iota : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$ deve satisfazer para que se possa dele definir uma topologia? Sugestão: inspire-se na Proposição 29.5, página 1417. ✠

[10] Kazimierz Kuratowski (1896–1980).
[11] George Boole (1815–1864).

29.3.1 Fecho de Conjuntos em Espaços Métricos

Vamos agora particularizar a discussão acima sobre fecho de conjuntos para o importantíssimo caso de espaços métricos (completos ou não). Como subproduto obteremos importantes caracterizações de conjuntos fechados em espaços métricos, já mencionadas na Seção 27.2, página 1329.

• **Fecho de conjuntos em espaços métricos**

Seja M um espaço métrico com métrica d e τ_d a topologia induzida em M por essa métrica. Seja $B \subset M$. Vamos apresentar agora uma caracterização importante do fecho de B, que anunciamos acima.

Uma sequência $\{x_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de M é dita convergir na métrica d a um elemento $x \in M$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_d(x, \ \epsilon)$ para todo $n > N(\epsilon)$.

Se uma sequência converge a um ponto x, este é dito ser um *limite* da sequência. (Mais sobre o conceito de convergência de sequências em espaços métricos será visto no Capítulo 32, página 1477).

Temos assim a seguinte proposição:

Proposição 29.11 *Um ponto $x \in M$ pertence ao fecho $\overline{B}$ na topologia τ_d de um subconjunto B de M se e somente se existir uma sequência de elementos de B que converge a x na métrica d.* □

Prova. Suponha que x seja um limite de uma sequência x_n de elementos de B. Seja A_x um aberto que contém x. Como A_x é um aberto de um espaço métrico, existe uma bola aberta centrada em x com um raio positivo suficientemente pequeno, que chamaremos de ϵ, tal que $B_d(x, \ \epsilon) \subset A_x$. Daí, como a sequência converge a x, vale que $B \ni x_n \in B_d(x, \ \epsilon)$, desde que n seja grande o suficiente. Mas isso diz que para tais x_n's vale também $x_n \in A_x$. Logo, $A_x \cap B \neq \emptyset$, pois pelo menos esses x_n's pertencem aos dois conjuntos. Note que isso vale para qualquer aberto A_x que contém x. Daí, pelo que vimos na Proposição 29.8, concluímos que $x \in \overline{B}$.

Assim, vimos que se uma sequência de elementos de B converge a um ponto x em um espaço métrico, então esse ponto x é um elemento do fecho de B. Vamos agora provar a recíproca.

Vamos agora supor que $x \in \overline{B}$ e vamos provar que existe uma sequência de elementos de B que converge a x. Como $x \in \overline{B}$ vale que $B_d(x, \ 1/n) \cap B \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, podemos escolher, para cada $n \in \mathbb{N}$, um elemento x_n do conjunto $B_d(x, \ 1/n) \cap B$. Com isso formamos uma sequência $\{x_n\}$ de elementos de B que converge a x, completando a prova. ■

• **Conjuntos fechados em espaços métricos**

A Proposição 29.11 tem o seguinte importante corolário imediato:

Corolário 29.2 *Seja M um conjunto não-vazio dotado de uma métrica d e seja τ_d a topologia induzida por essa métrica. Então, $F \subset M$ é fechado se e somente se toda sequência de elementos de F que for convergente em M convergir a um elemento de F, ou seja, se F coincidir com o conjunto de seus pontos-limite.* □

Esse corolário representa em muitos sentidos uma caracterização alternativa da noção de conjunto fechado em espaços métricos. Vamos agora especializar a discussão para espaços métricos completos.

• **Conjuntos fechados em espaços métricos e completeza**

Seja M um conjunto não-vazio dotado de uma métrica d. Qualquer subconjunto não-vazio de M é também um espaço métrico com métrica d (por que?). Porém, se M é *completo* em relação a d e se $F \subset M$ é um conjunto fechado, então F é também um espaço métrico *completo* em relação a d.

Provar isso é bem simples. Se $f_n \subset F$ é uma sequência de Cauchy em relação a d em F, então f_n é também uma sequência de Cauchy em relação a d em M. Como M é completo existe $f \in M$ ao qual a sequência converge. Mas, devemos ter, pelo que vimos, $f \in \overline{F} = F$. Assim, toda sequência de Cauchy em relação a d em F converge a um elemento de F. Isso prova completeza de F.

A recíproca é também verdadeira. Seja M completo em relação a d e seja $B \subset M$ também completo em relação a d. Então, B é fechado. Para ver isso note que toda sequência de elementos de B que converge em M é uma sequência de

Cauchy em M e, portanto, é também uma sequência de Cauchy em B. Logo, uma tal sequência converge a um elemento de B, pois B é completo. Mas isso equivale a dizer que $B \supset \overline{B}$, o que implica $B = \overline{B}$.

Provamos assim o seguinte:

Proposição 29.12 *Se M é um espaço métrico completo em relação a uma métrica d, então $F \subset M$ é fechado na topologia induzida por essa métrica se e somente se F for igualmente completo em relação à métrica d.* □

29.4 Espaços Topológicos Separáveis e Segundo-Contáveis

• **Conjuntos densos em um espaço topológico**

Seja um espaço X dotado de uma topologia τ. Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é um *conjunto denso*, ou *conjunto τ-denso*, em X se o fecho de A for igual a X, ou seja, se $\overline{A} = X$. Em outras palavras, A é τ-denso em X se não houver outro conjunto τ-fechado que não X contendo A.

A seguinte proposição elementar é útil e será usada adiante.

Proposição 29.13 *Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto $A \subset X$ é τ-denso em X se e somente se para todo $C \in \tau$, não-vazio, valer $A \cap C \neq \emptyset$.* □

Prova. Suponhamos que $A \subset X$ seja τ-denso em X. Seja $c \in C = \overline{A} \cap C$. Como $c \in \overline{A}$, vale pela Proposição 29.8, página 1419, que todo τ-aberto que contém c possui intersecção não-vazia com A. Mas C é τ-aberto e contém c. Logo, $A \cap C \neq \emptyset$.

Reciprocamente, suponhamos que $A \subset X$ seja tal que $A \cap C \neq \emptyset$ para todo $C \in \tau$ com $C \neq \emptyset$. Seja $x \in X$, e seja $D \in \tau$, um aberto arbitrário que contém x. Como $A \cap D \neq \emptyset$, segue da Proposição 29.8, página 1419, que $x \in \overline{A}$. Como x é um elemento arbitrário de X, estabeleceu-se que $\overline{A} = X$, provando que A é τ-denso em X. ■

• **Espaços topológicos separáveis**

Um espaço topológico (X, τ) é dito ser um *espaço topológico separável* se possuir um subconjunto denso contável.

Exemplo. A reta real com a topologia usual $\tau_{\mathbb{R}}$ é separável pois $\mathbb{Q}$, o conjunto dos racionais é contável e denso em $\mathbb{R}$. Vide abaixo.

• **Espaços topológicos segundo-contáveis**

Um espaço topológico X é dito ser um *espaço topológico segundo-contável* ("second countable") se possuir uma base contável.

Pelo que vimos, se $\mathcal{A}$ for uma coleção contável de subconjuntos de X, então a topologia gerada por $\mathcal{A}$ possui uma base também contável e é, portanto, segundo-contável. Vamos demonstrar a seguinte afirmativa:

Proposição 29.14 *Todo espaço topológico segundo-contável é separável.* □

Prova. Seja X um conjunto não-vazio dotado de uma topologia τ e suponhamos que esse espaço topológico seja segundo-contável. Seja $\mathcal{B} = \{B_n \in \tau, \ n \in \mathbb{N}_0\}$, uma base contável em τ. Vamos supor que $\mathcal{B}$ não seja uma coleção finita, mas a argumentação é analoga se $\mathcal{B}$ o for.

Podemos, sem perda de generalidade, supor que cada $B_n \in \mathcal{B}$ é não-vazio. Podemos, igualmente sem perda de generalidade, supor que cada elemento de $\mathcal{B}$ não se deixa escrever como uma união finita de outros elementos de $\mathcal{B}$, pois se houvesse algum B_j que pudesse ser escrito como união finita de outros elementos de $\mathcal{B}$, então esse B_j poderia ser extraido de $\mathcal{B}$ sem que $\mathcal{B}$ deixasse de ser uma base no espaço topológico (X, τ).

Vamos formar conjuntos $A_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}_0$, cada um contendo um único elemento, da seguinte forma: A_0 é formado por um elemento escolhido arbitrariamente em B_0 e A_n, $n \geq 1$, é formado por um elemento escolhido arbitrariamente em

$B_n \setminus \Big(A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}\Big)$. Note-se que $B_n \setminus \Big(B_0 \cup \cdots \cup B_{n-1}\Big)$ nunca é o conjunto vazio (pelas considerações do parágrafo anterior) e, como $A_k \subset B_k$ para todo $k < n$, o conjunto $B_n \setminus \Big(A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}\Big)$ é igualmente não-vazio, o que permite definir o conjunto A_n. Observe-se também que, por construção, $A_m \subset B_m$ para todo m e que $A_n \neq A_m$ para todos $n, m \in \mathbb{N}_0$ com $n \neq m$.

Defina-se agora $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Claro está que A é um conjunto contável, já que cada A_n possui um único elemento. Vamos mostrar por absurdo que A é τ-denso em X.

Suponha que haja um conjunto fechado F que contém A e que seja um subconjunto próprio de X. Então, $C = X \setminus F$ é aberto, não-vazio e $A \cap C = \emptyset$. Isso implica $A_n \cap C = \emptyset$ para todo n. Como C é aberto, existe, por hipótese, uma família $\{B_{n_k}, \ k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}$, tal que $C = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{n_k}$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $\emptyset = A_n \cap C = A_n \cap \big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{n_k}\big) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_n \cap B_{n_k})$. Logo, $A_n \cap B_{n_k} = \emptyset$ para todo n e todo k. Isso é absurdo, pois, por construção, vale para todo k que $A_{n_k} \subset B_{n_k}$. Logo, não pode existir F fechado contendo A e com $F \neq X$. Isso implica que $\overline{A} = X$ e, portanto, é denso em X. ■

É interessante notar que a recíproca da Proposição 29.14, acima, não é verdadeira: há espaços separáveis que não são segundo-contáveis. Como exemplo, mostraremos que a topologia de Sorgenfrey é separável mas não é segundo-contável (página 1426). Tal, porém, não é verdade para espaços métricos em geral.

Proposição 29.15 *Um espaço métrico é separável se e somente se for segundo-contável.* □

Na Proposição 34.16, página 1582, trataremos de uma extensão das afirmações acima.

Prova da Proposição 29.15. Pela Proposição 29.14, resta-nos apenas mostrar que se (X, d) é um espaço métrico separável, então possui uma base enumerável. Seja A um conjunto contável denso em X e seja $\mathcal{B}$ o conjunto de todas as bolas abertas centradas em elementos de A com raio racional positivo: $\mathcal{B} := \big\{B(a, r), \ a \in A \text{ e } r \in \mathbb{Q}_+\big\}$. A coleção de abertos $\mathcal{B}$ é contável (por quê?). Vamos provar que trata-se de uma base em X. Seja C um aberto contido em X. Para cada ponto a em $A \cap C$ (que é um conjunto não-vazio, pela Proposição 29.13, página 1423) podemos achar um raio $r_a \in \mathbb{Q}_+$ tal que $B(a, r_a)$ está inteiramente contido em C (pela definição de conjunto aberto em um espaço métrico). Vamos mostrar que

$$C = \bigcup_{a\in C\cap A} B(a, r_a) , \tag{29.15}$$

o que demonstra que todo aberto pode ser escrito como união de elementos do conjunto contável $\mathcal{B}$ e, portanto, que $\mathcal{B}$ é uma base.

Seja $c \in C$. Como A é denso em X, toda bola aberta $B(c, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, contém elementos de A (novamente pela Proposição 29.13, página 1423). Se ϵ for suficientemente pequeno $B(c, \epsilon)$ e $B(c, \epsilon/4)$ estarão inteiramente contidas no aberto C. Logo, para um racional r com $\epsilon/4 < r < \epsilon/2$ teremos $c \in B(a', r)$ para algum $a' \in B(c, \epsilon/4) \cap A$, sendo que $B(a', r) \subset B(c, \epsilon) \subset C$ (o fato que $B(a', r) \subset B(c, \epsilon)$ segue da desigualdade triangular). Lembrando que $a' \in C \cap A$ e que podemos escolher $\epsilon/2 < r_{a'}$, teremos $B(a', r) \subset B(a', r_{a'})$. Assim, $c \in B(a', r) \subset \bigcup_{a\in C\cap A} B(a, r_a)$, provando (29.15). ■

• **A topologia $\tau_{\mathbb{R}}$ é segundo-contável**

Como comentamos logo acima, $\tau_{\mathbb{R}}$ é separável pois $\mathbb{Q}$ é contável e denso em $\mathbb{R}$. Pela Proposição 29.15, $\tau_{\mathbb{R}}$ é segundo-contável. A título de ilustrar futuros desenvolvimentos, vamos no que segue provar esse fato de modo mais explícito, exibindo uma base contável para $\tau_{\mathbb{R}}$.

Para isso, vamos mostrar que $\tau_{\mathbb{R}}$ pode ser gerada por uma coleção contável de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Esse fato é importante por várias razões, uma delas conectada à σ-álgebra de Borel e sua relação com a σ-álgebra de Lebesgue, que introduziremos quando falarmos da Teoria da Medida (vide Capítulo 31).

Para $a \in \mathbb{R}$ e $b > 0$ vamos denotar por $B(a, b)$ a bola aberta de raio b centrada em a que, neste caso, é o intervalo aberto $(a - b, a + b)$ centrado em a com largura $2b$.

Vamos primeiramente ver que qualquer intervalo $B(a, b)$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, pode ser escrito como uma união contável de intervalos abertos. Para isso, considere uma sequência s_i de números racionais positivos tais que $s_i < b$ mas tais que a sequência s_i converge a b quando $i \to \infty$. Então, é claro que

$$B(a,\ b) \ = \ \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(a,\ s_i) \ ,$$

que é uma união contável.

Pela definição, se A é um aberto não-vazio em $\tau_{\mathbb{R}}$, $A \neq \mathbb{R}$, então para cada $x \in A$ podemos encontrar um número $\delta(x) > 0$ (que eventualmente depende de x) de forma que $B(x,\ \delta(x)) \subset A$. Para A aberto e $x \in A$ vamos denotar por $\delta_A(x)$ o maior número com essa propriedade, ou seja,

$$\delta_A(x) \ := \ \sup\{b > 0, \ \ \text{tal que } B(x,\ b) \subset A\}.$$

Como $A \neq \mathbb{R}$, $\delta_A(x)$ é sempre finito para $x \in A$. (Por quê?).

É bem claro assim que

$$A \ = \ \bigcup_{x \in A} B\big(x,\ \delta_A(x)\big) \ .$$

E. 29.62 *Exercício*. Por quê? ✠

Vamos provar a seguinte afirmativa:

$$A \ = \ \bigcup_{r \in A \cap \mathbb{Q}} B\big(r,\ \delta_A(r)\big) \ .$$

Para tal, seja $A' := \bigcup_{r \in A \cap \mathbb{Q}} B\big(r,\ \delta_A(r)\big)$, suponha que $A \setminus A' \neq \emptyset$ e seja $w \in A \setminus A'$. Considere, então, o conjunto aberto $B(w,\ \delta_A(w))$. Tomemos $s \in B(w,\ \delta_A(w)) \cap \mathbb{Q}$ de tal forma que $|s - w| < \delta_A(w)/2$ (isso é sempre possível. Por quê?). Logo, teremos que $\delta_A(w)/2 < \delta_A(s)$ e, portanto, $w \in B(s,\ \delta_A(s))$, mostrando que $w \in A'$: um contradição. Consequentemente, $A = A'$.

Caso $A = \mathbb{R}$ podemos sempre escrever $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} B(r,\ p)$, para qualquer $p > 0$.

O que acabamos de provar é que todo aberto não-vazio A de $\tau_{\mathbb{R}}$ pode ser escrito como uma união contável de intervalos abertos. Por outro lado, vimos também que cada intervalo aberto $B(r, \delta_A(r))$ pode ser escrito ele mesmo como uma união contável de intervalos abertos do tipo $B(r,\ s)$ onde r e $s > 0$ são números racionais.

Seja $\mathcal{R}$ a coleção de todos os intervalos abertos do tipo $B(r,\ s)$ com $r,\ s \in \mathbb{Q}$ e $s > 0$. A coleção $\mathcal{R}$ é claramente uma coleção contável e $\mathcal{R} \subset \tau_{\mathbb{R}}$ (pois todos esses intervalos são abertos). Logo $\tau[\mathcal{R}] \subset \tau_{\mathbb{R}}$, pois $\tau[\mathcal{R}]$ é, por definição, a menor topologia que contém $\mathcal{R}$. Por outro lado, qualquer topologia que contenha $\mathcal{R}$ contém também qualquer elemento que possa ser escrito como união de elementos de $\mathcal{R}$ e, como vimos, todo aberto de $\tau_{\mathbb{R}}$ pode ser escrito como uma união (contável) de elementos de $\mathcal{R}$ e é, consequentemente, um elemento de qualquer topologia que contenha $\mathcal{R}$. Logo $\tau_{\mathbb{R}} \subset \tau[\mathcal{R}]$.

Vemos, portanto, que $\tau_{\mathbb{R}} = \tau[\mathcal{R}]$ e, assim, $\tau_{\mathbb{R}}$ é o que se chama de uma topologia segundo-contável, pois tem uma base contável obtida tomando-se intersecções finitas de elementos de $\mathcal{R}$, como vimos acima.

Para finalizar, vamos mostrar a seguinte identidade:

$$\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}] \ = \ \mathcal{M}[\mathcal{R}] \ , \tag{29.16}$$

ou seja, vamos mostrar que a σ-álgebra de Borel da reta real e a σ-álgebra gerada por $\mathcal{R}$ coincidem.

Como $\mathcal{R} \subset \tau_{\mathbb{R}}$, é claro que $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$. Daí segue que $\mathcal{M}[\mathcal{R}] \subset \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$, dado que $\mathcal{M}[\mathcal{R}]$ é, por definição, a menor σ-álgebra que contém $\mathcal{R}$. Por outro lado, $\mathcal{M}[\mathcal{R}]$ contém (pela definição de σ-álgebra) qualquer conjunto que seja uma união contável de elementos de $\mathcal{R}$. Vimos acima que qualquer elemento de $\tau_{\mathbb{R}}$ tem essa propriedade. Logo $\tau_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}[\mathcal{R}]$ e, assim, $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}] \subset \mathcal{M}[\mathcal{R}]$, provando que $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}] = \mathcal{M}[\mathcal{R}]$.

Os fatos aqui discutidos serão importantes quando apresentarmos a chamada σ-álgebra de Lebesgue no Capítulo 31, página 1453.

- **A topologia de Sorgenfrey não é uma topologia métrica**

Mostraremos agora que a Topologia de Sorgenfrey é separável mas não é segundo-contável e, portanto, não é métrica.

Para mostrar que a topologia de Sorgenfrey $\tau[\mathcal{S}]$ é separável, provemos que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ segundo $\tau[\mathcal{S}]$. Suponha que não seja. Então, existiria $z \in \mathbb{R}$ e aberto em $\tau[\mathcal{S}]$ contendo z que não contém nenhum número racional. Como um tal aberto é união de intersecções finitas de intervalos semiabertos de $\mathcal{S}$, isso é impossível.

Vamos agora mostrar que $\tau[\mathcal{S}]$ não é segundo-contável. Suponhamos que $\mathcal{B}$ seja uma base para $\tau[\mathcal{S}]$ e seja $x \in \mathbb{R}$. Pela hipótese existe para cada $x \in \mathbb{R}$ um subconjunto $\mathcal{B}_x = \{B_\lambda, \ \lambda \in \Lambda_x\}$ de $\mathcal{B}$ tal que

$$\tau[\mathcal{S}] \ \ni \ [x, \ \infty) \ = \ \bigcup_{\lambda \in \Lambda_x} B_\lambda \ ,$$

com $B_\lambda \in \mathcal{B}_x$. Mas isso só é possível se existir pelo menos um conjunto de $\mathcal{B}_x$ que contém x. Escolhamos um tal conjunto e denotemo-lo $B_{\lambda(x)}$. É claro que $B_{\lambda(x)}$ não pode conter nenhum $y \in \mathbb{R}$ com $y < x$ (por que?). Logo, a aplicação $\mathbb{R} \ni x \mapsto B_{\lambda(x)} \in \mathcal{B}$ é injetora[12], o que nos diz que a cardinalidade de $\mathcal{B}$ é pelo menos a cardinalidade de $\mathbb{R}$. Isso mostra que $\mathcal{B}$ não pode ser contável.

Como vimos acima (página 1424), um espaço métrico é separável se e somente se for segundo-contável. Isso mostra que a topologia de Sorgenfrey não é uma topologia métrica!

• Um espaço topológico segundo-contável não-Hausdorff e (portanto) não-métrico

E. 29.63 *Exercício-Exemplo.* Um espaço topológico pode ser segundo-contável (e, portanto, separável, pela Proposição 29.14, página 1423) sem ser Hausdorf e, portanto, sem ser métrico. Considere-se a *reta real com dupla origem*, tratada no Exercício E. 34.12, página 1566. Mostre que a coleção de conjuntos compostos por todos os intervalos $(a, \ b)$ com $a, \ b \in \mathbb{Q}$ e $a < b$ em união com a coleção de todos os conjuntos da forma $(a, \ 0) \cup \{p\} \cup (0, \ b)$, com $a, \ b \in \mathbb{Q}$ e $a < 0 < b$ é uma base contável naquele espaço topológico.

Isso estabeleceu que a reta real com dupla origem é um espaço topológico segundo-contável. Porém, esse espaço topológico não pode ser metrico, por não ser Hausdorff, como discutido no Exercício E. 34.12, página 1566. ✠

29.4.1 A Segundo-Contabilidade como Propriedade Herdada

A propriedade de ser segundo-contável é uma das propriedades definidoras da noção de variedade topológica (vide Capítulo 35, página 1642). Vamos aqui mostrar que essa propriedade é preservada pela tomada de topologias induzidas e pelo produto (finito!) de espaços topológicos, dois fatos simples mas relevantes na construção de variedades topológicas.

• Espaços segundo-contáveis e a topologia induzida

Proposição 29.16 *Seja $(X, \ \tau)$ um espaço topológico e seja $Y \subset X$. Vamos supor Y não-vazio e vamos considerar em Y a topologia τ_I induzida pela topologia τ. Então, se $(X, \ \tau)$ for segundo-contável o espaço topológico $(Y, \ \tau_I)$ também será segundo-contável.* □

Prova. Por definição, τ_I é composto por todos os conjuntos da forma $A \cap Y$ com $A \in \tau$. Se τ é segundo-contável, então τ possui uma base contável $\mathcal{B} = \{A_n \in \tau, \ n \in \mathbb{N}\}$. Assim, todo $A \in \tau$ é uma união de elementos de $\mathcal{B}$. Seja $\mathcal{C} := \{A_n \cap Y \in \tau_I, \ A_n \in \mathcal{B}, \ n \in \mathbb{N}\}$. É evidente que todo conjunto da forma $A \cap Y$ com $A \in \tau$ é união de elementos de $\mathcal{C}$. Logo, $\mathcal{C}$ é uma base contável em $(Y, \ \tau_I)$. ■

Devido a esse resultado, costuma-se dizer que a propriedade de segundo-contabilidade é *herdada* por uma topologia relativa.

• Espaços segundo-contáveis e o produto finito de espaços topológicos

Proposição 29.17 *Para algum $m \in \mathbb{N}$, sejam $(X_a, \ \tau_a)$, $a = 1, \ \ldots, \ m$, espaços topológicos segundo-contáveis. Então, o espaço produto[13] $\big(X_1 \times \cdots \times X_m, \ \tau_1 \times \cdots \times \tau_m\big)$ é também segundo-contável.* □

[12] Como $x \in B_{\lambda(x)}$ e $y \notin B_{\lambda(x)}$ se $y < x$, segue que $\inf(B_{\lambda(x)}) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o que implica injetividade.

[13] Para a definição, vide Seção 29.2.5, página 1415 ou Seção 34.6, página 1623.

Prova. Para cada $a = 1, \ldots, m$ seja $\mathcal{B}^a = \{A_n^a \in \tau_a, \ n \in \mathbb{N}\}$ uma base contável em τ_a. É elementar constatar que $\mathcal{C} := \big\{A_{n_1}^1 \times \cdots \times A_{n_m}^m, \ \text{com } A_n^a \in \mathcal{B}^a \text{ para cada } a \text{ e } (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m\big\}$ é uma base contável em $\tau_1 \times \cdots \times \tau_m$. ■

Devido a esse resultado, costuma-se dizer que a propriedade de segundo-contabilidade é *herdada* por produtos (finitos!) de espaços topológicos.