Capítulo 30
Medidas

Conteúdo

O presente capítulo visa apresentar ao estudante a noção de medida de conjuntos, algumas de suas propriedades básicas e exemplos elementares e, por fim, discutir uma construção importante de medidas devida a Carathéodory[1]. O caso importante da chamada medida de Lebesgue[2] é discutido com essa base no Capítulo 31, página 1453. Começaremos com uma discussão parcialmente informal sobre os problemas básicos por trás da noção intuitiva de medida de conjuntos.

30.1 O Problema da Teoria da Medida

Em uma primeira instância, o objetivo da área da Análise conhecida como Teoria da Medida é dar fundamento às ideias intuitivas de comprimento, área, volume etc. de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Grandezas como comprimento, área, volume etc. de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ são referidas genericamente como *medidas* de tais conjuntos e à Teoria da Medida cabe não só apresentar definições precisas de tais conceitos mas também cabe determinar que classes de conjuntos são *mensuráveis*, ou seja, a quais conjuntos tais conceitos são aplicáveis.

Talvez surpreenda ouvir pela primeira vez que conceitos como comprimento, área e volume não possam ser aplicados a qualquer conjunto e que a manipulação dos mesmos, se feita sem o devido cuidado, possa levar a situações paradoxais. Entretanto, como mostra o exemplo do conjunto de Vitali, tratado logo adiante, existem, já no simples caso da reta real, conjuntos para os quais o conceito de comprimento não pode ser definido. A dificuldade que temos de sequer imaginar como devem ser tais conjuntos reside, talvez, no fato que os mesmos serem de construção incomum (a construção, como veremos, faz uso explícito do Axioma da Escolha).

A Teoria da Medida não se restringe, porém, a tratar de conceitos geométricos como comprimento, área etc., sendo que o conceito formal de medida de um conjunto extrapola em muito esse campo de aplicações, como veremos. Fora isso, a Teoria da Medida não se limita apenas ao estudo do conceito de medida e de conjuntos mensuráveis, mas tem como seu mais importante objetivo formalização da teoria da integração. Que os conceitos de medida e de integral são conectados diz-nos já a velha noção de *integral definida* como sendo o "área sob o gráfico" de uma função. De fato, a teoria da medida fornece material poderoso para um tratamento mais profundo do conceito de integral e de suas extensões. Nestas notas, o tratamento da Teoria da Integração será iniciado no Capítulo 33, página 1495.

Todos esses conceitos serão tratados de modo cuidadoso adiante, mas achamos por bem começar mostrando ao estudante a origem de toda a problemática: a existência de conjuntos não mensuráveis.

• **O exemplo de Vitali**

Considere-se o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e seus subconjuntos. Temos uma noção intuitiva clara do que seja o comprimento de intervalos da reta real como $(a,\ b)$ ou $[a,\ b]$ ou $[a,\ b)$ ou $(a,\ b]$. Em todos esses casos o comprimento é

[1]Constantin Carathéodory (1873–1950).
[2]Henri Léon Lebesgue (1875–1941).

o número positivo (ou nulo) $b-a$. Para um intervalo I como aqueles acima, denotemos por $m(I)$ o seu comprimento. Assim, por exemplo, $m([a, b]) = b - a$, para todo a e b com $b \geq a$.

Se um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ for formado pela união disjunta de dois intervalos I e J como os acima, é também intuitivo que o comprimento de A seja dado por $m(A) = m(I) + m(J)$, ou seja, pela soma dos comprimentos dos intervalos disjuntos que formam A. Se A for formado por uma união disjunta contável de intervalos I_a, $a \in \mathbb{N}$, então, igualmente, é natural dizer que o comprimento total de A é dado por

$$m(A) = \sum_{a=1}^{\infty} m(I_a) .$$

Note-se que não excluímos a possibilidade de A ser um conjunto com comprimento infinito, como é o caso da semirreta $[0, \infty)$, que, aliás pode ser escrita como a união contável disjunta de intervalos de comprimento 1 do tipo $[n, n+1)$ com $n \in \mathbb{N}_0$. Conjuntos com comprimento zero, como conjuntos com um só elemento $\{x\}$ também existem.

Dessas noções extraímos o seguinte princípio: se um conjunto A puder ser escrito como uma união disjunta contável de outros conjuntos B_a, $a \in \mathbb{N}$, que possuem um comprimento bem definido (finito ou não), então o comprimento de A deve ser dado pela soma dos comprimentos de cada B_a, seja essa soma finita ou não:

$$m\left(\bigcup_{a\in\mathbb{N}} B_a\right) = \sum_{a\in\mathbb{N}} m(B_a) .$$

Outra propriedade razoável que devemos supor do conceito de comprimento de um conjunto é que se A e B são conjuntos e $A \subset B$ então $m(A) \leq m(B)$. Note que podemos ter a igualdade mesmo que A seja um subconjunto próprio de B. Esse é, por exemplo, o caso dos conjuntos $A = (1, 3)$ e $B = [1, 3]$ onde tanto A quanto B têm o mesmo comprimento, a saber 2.

Por fim, uma última condição razoável que o a noção usual de comprimento de subconjuntos da reta deve satisfazer é o de invariância por translações. Seja $E \subset \mathbb{R}$. Denotemos por E_x, ou por $E + x$, o conjunto E transladado por um número $x \in \mathbb{R}$, ou seja:

$$E_x = \Big\{y \in \mathbb{R}, \text{ com } y = a + x \text{ para algum } a \in E\Big\} .$$

Então, é razoável supor que $m(E_x) = m(E)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

O que vamos agora fazer é mostrar que existem subconjuntos da reta real para os quais não há a menor possibilidade de definir um comprimento m que satisfaça os requerimentos razoáveis delineados acima.

O exemplo que construiremos é conhecido como exemplo de Vitali[3]. Vamos supor que a todo subconjunto E da reta real possamos associar um comprimento $m(E)$ com as condições mencionadas acima. Seja o intervalo $I = [0, 1]$. Definamos em I uma relação de equivalência da seguinte forma. Dois pontos x e y, ambos elementos de I, são ditos ser equivalentes, $x \sim y$, se e somente se $x - y$ for um número racional.

E. 30.1 *Exercício*. Prove que isso define de fato uma relação de equivalência. ✠

O fato de termos assim criado uma relação de equivalência em I significa que I pode ser escrito como uma união disjunta das classes de equivalência por essa relação. Usando o Axioma da Escolha podemos construir um conjunto, que chamaremos de V, tomando um e somente um elemento arbitrário de cada classe de equivalência de I. Obviamente, temos $V \subset I$.

Seja agora V_r o conjunto obtido transladando-se o conjunto V por um número $r \in \mathbb{Q}$. Vamos mostrar que $V_r \cap V_s = \emptyset$ se $r \neq s$ com $r, s \in \mathbb{Q}$, ou seja, que V_r e V_s são disjuntos se r e s forem elementos distintos de $\mathbb{Q}$. Para ver isso suponhamos o contrário, ou seja, que exista um elemento $u \in V_r \cap V_s$. Como $u \in V_r$ então $u = v + r$, para algum elemento $v \in V$. Por outro lado, como $u \in V_s$ então $u = v' + s$, para algum elemento $v' \in V$. Portanto $v + r = v' + s$ e $v - v' = s - r$. Como $s - r$ é um racional então $v \sim v'$. Mas isso só é possível se $v = v'$ pois, ao construirmos V, tomamos um e somente um elemento de cada classe de equivalência de I, o que significa dizer que elementos distintos de V não podem ser equivalentes. Por outro lado, se $v = v'$ a relação $v - v' = s - r$ diz que $s = r$, o que contraria as hipóteses. Logo $V_r \cap V_s = \emptyset$ se $r, s \in \mathbb{Q}$ com $r \neq s$.

[3]Giuseppe Vitali (1875–1932).

Vamos denotar por $\mathbb{Q}_1$ o conjunto de todos os números racionais contidos no intervalo $[-1,\ 1]$: $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q} \cap [-1,\ 1]$. Afirmamos que as seguintes relações de inclusão são válidas:

$$[0,\ 1] \subset \bigcup_{r\in\mathbb{Q}_1} V_r \subset [-1,\ 2] \,. \tag{30.1}$$

Vamos provar isso. A relação $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}_1} V_r \subset [-1,\ 2]$ é óbvia pois V é um subconjunto do intervalo $[0,\ 1]$ e, ao transladarmos V por um número r do conjunto $\mathbb{Q}_1$ podemos no máximo cair dentro de $[-1,\ 2]$.

A relação $[0,\ 1] \subset \bigcup_{r\in\mathbb{Q}_1} V_r$ pode ser vista da seguinte forma. Se $x \in [0,\ 1]$ então x pertence a uma classe de equivalência $\mathcal{V}$. Seja v o elemento de $\mathcal{V}$ que foi escolhido para comparecer em V como o representante de $\mathcal{V}$. Como x e v são membros da mesma classe de equivalência, então $x - v$ é um racional s. Como x e v são elementos de $[0,\ 1]$, então sua diferença deve ser um elemento de $[-1,\ 1]$. Assim, vemos que $s \in \mathbb{Q}_1$. Logo, $x \in V_s$ com $s \in \mathbb{Q}_1$. Como isso vale para todo $x \in [0,\ 1]$, segue que $[0,\ 1] \subset \bigcup_{r\in\mathbb{Q}_1} V_r$ como queríamos mostrar.

Que consequências isso tudo tem? Pela hipótese que se $A \subset B$ então $m(A) \leq m(B)$, segue de (30.1) que

$$m\big([0,\ 1]\big) \leq m\left(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}_1} V_r\right) \leq m\big([-1,\ 2]\big) \,,$$

ou seja,

$$1 \leq m\left(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}_1} V_r\right) \leq 3 \,,$$

Pelo que vimos acima a união $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}_1} V_r$ é uma união disjunta e contável (pois os racionais são contáveis). Logo, pelas nossas hipóteses sobre m, temos que

$$m\left(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}_1} V_r\right) = \sum_{r\in\mathbb{Q}_1} m(V_r) \,.$$

A desigualdade acima fica então

$$1 \leq \sum_{r\in\mathbb{Q}_1} m(V_r) \leq 3 \,.$$

Por fim, pela hipótese que m é invariante por translações, segue que $m(V_r) = m(V)$ e, portanto,

$$1 \leq \sum_{r\in\mathbb{Q}_1} m(V) \leq 3 \,.$$

Agora, essa relação é absurda pois não pode ser nunca satisfeita para $m(V) \geq 0$. Se $m(V) = 0$ a primeira desigualdade é violada e se $m(V) > 0$ (ou infinito) a segunda o é pois a soma é infinita.

O que está errado? O erro está em supor que se possa atribuir ao conjunto V um comprimento $m(V)$. O conjunto V, que é chamado *conjunto de Vitali*, é um exemplo de um *conjunto não-mensurável*. A ele não é possível atribuir um comprimento, nem nulo, nem finito, nem infinito.

Para finalizar essa discussão fazemos notar que fizemos uso de modo crucial do Axioma da Escolha na construção do conjunto V acima. Em outros esquemas axiomáticos sobre a teoria dos conjuntos subjacente à Matemática o Axioma da Escolha pode ser substituído por um outro axioma que impeça a construção de conjuntos como V. Tais esquemas conduzem, entretanto, a Matemáticas em um certo sentido empobrecidas, nas quais vários resultados de interesse não podem mais ser estabelecidos.

* *** *

Para a leitura do que segue neste Capítulo é conveniente que o estudante esteja familiarizado com a noção de σ-álgebra e suas propriedades básicas. Vide Capítulo 29, página 1401.

30.2 Medidas de Conjuntos. Definição, Exemplos e Propriedades Básicas

• **A definição de medida**

Uma vez visto que problemas com a mensurabilidade de conjuntos podem existir, vemo-nos forçados a tratar o problema de conceitualizar a noção intuitiva de medida reunindo instrumentos mais sólidos para sua abordagem.

Seja X um conjunto não-vazio e $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra em X (para a definição, vide Capítulo 29, página 1401). Vamos apresentar o conceito formal de medida. Uma *medida* em $\mathcal{M}$ é uma função μ que associa a cada elemento da σ-álgebra $\mathcal{M}$ um número real ≥ 0 ou infinito, ou seja, $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ e de tal forma que as seguintes condições sejam satisfeitas:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Se A_i, $i \in \mathbb{N}$, é uma coleção contável e disjunta de elementos de $\mathcal{M}$ então

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) . \tag{30.2}$$

A propriedade 2 é por vezes denominada *aditividade contável*, ou ainda *σ-aditividade*.

Uma palavra tem de ser dita aqui sobre o significado dessa definição. Conforme vimos, há conjuntos em $\mathbb{R}$ aos quais não podemos atribuir uma noção razoável de comprimento. O problema consiste então em identificar classes de conjuntos para os quais esta definição pode fazer sentido sem que venhamos a cair em paradoxos como os envolvendo o conjunto de Vitali. A experiência mostrou que σ-álgebras são justamente o ambiente ideal para desenvolver a noção de medida de conjuntos, sem que se recaia em dificuldades lógicas. Daí restringirmos a definição de medida a σ-álgebras. A propriedade (30.2) é de importância crucial para o desenvolvimento da teoria de medida (e como tal, um achado histórico) e é chamada de *propriedade de σ-aditividade*.

• **Exemplos**

Vamos a alguns exemplos básicos de medidas.

1. A *medida de contagem*. Seja X um conjunto não-vazio e $\mathcal{M} = \mathbb{P}(X)$. Para $E \in \mathcal{M}$ definimos

$$\mu_c(E) := \begin{cases} \text{o número de elementos de } E , & \text{caso } E \text{ seja um conjunto finito,} \\ \infty , & \text{caso } E \text{ não seja um conjunto finito.} \end{cases}$$

Então, μ_c define uma medida em $\mathcal{M}$ (verifique!), a qual "conta" o número de elementos de cada conjunto E, daí sua designação.

2. A *medida de Dirac*[4]. em x_0. Seja X um conjunto não-vazio, seja $\mathcal{M} = \mathbb{P}(X)$ e seja x_0 um elemento de X. Para $E \in \mathcal{M}$ definimos

$$\delta_{x_0}(E) := \begin{cases} 1, & \text{caso } x_0 \in E , \\ 0, & \text{caso } x_0 \notin E . \end{cases} \tag{30.3}$$

Então, δ_{x_0} é uma medida (verifique!) que diz se o ponto x_0 fixado é um elemento de E ou não. Observe que $\delta_{x_0}(E) = \mu_c(E \cap \{x_0\})$ para todo $E \in \mathcal{M}$.

3. A *medida de Dirac sobre um conjunto contável C*. Seja X um conjunto não-vazio, seja $\mathcal{M} = \mathbb{P}(X)$ e seja C um subconjunto contável de X. Para $E \in \mathcal{M}$ definimos

$$\delta_C(E) := \begin{cases} \text{o número de elementos de } E \cap C, & \text{caso } E \cap C \text{ seja um conjunto finito,} \\ \infty, & \text{caso } E \cap C \text{ não seja um conjunto finito.} \end{cases}$$

[4] Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984).

Então, δ_C é uma medida (verifique!) que generaliza a medida δ_{x_0} acima. Observe que $\delta_C(E) = \mu_c(E \cap C)$ para todo $E \in \mathcal{M}$.

4. Sejam α, $\beta \geq 0$ e seja X um conjunto não-vazio que possua um subconjunto próprio não-vazio A (para isso basta que X tenha mais de um elemento). Considere a σ-álgebra $\mathcal{M} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$. Se definirmos $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) = \alpha$, $\mu(A^c) = \beta$ e $\mu(X) = \alpha + \beta$, então μ será uma medida em $\mathcal{M}$. Mostre isso!

Por estes exemplos vemos que a noção de medida extrapola a noção geométrica de comprimento, área, volume etc. de um conjunto, conceitos esses que, ademais, só se aplicam a certos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Outros exemplos mais elaborados de medidas serão vistos adiante, em especial aqueles referentes justamente às noções geométricas de comprimento, área etc. de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Tais medidas são conhecidas como medidas de Lebesgue e serão discutidas adiante.

E. 30.2 *Exercício*. Sejam α, β e γ três objetos distintos (por exemplo, três letras distintas do alfabeto grego). Mostre que

$$\mathcal{M} = \Big\{\emptyset, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\Big\}$$

é uma σ-álgebra em $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Mostre que $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+$, definida por

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu\big(\{\gamma\}\big) = 1, \quad \mu\big(\{\alpha, \beta\}\big) = 0, \quad \mu\big(\{\alpha, \beta, \gamma\}\big) = 1$$

é uma medida em $\mathcal{M}$. ✠

E. 30.3 *Exercício*. Sejam α, β e γ três objetos distintos (por exemplo, três letras distintas do alfabeto grego). Mostre que

$$\mathcal{M} = \Big\{\emptyset, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\Big\}$$

é uma σ-álgebra em $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Mostre que $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+$, definida por

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu\big(\{\gamma\}\big) = 2, \quad \mu\big(\{\alpha, \beta\}\big) = 1, \quad \mu\big(\{\alpha, \beta, \gamma\}\big) = 3$$

é uma medida em $\mathcal{M}$. ✠

E. 30.4 *Exercício*. Sejam α, β e γ três objetos distintos (por exemplo, três letras distintas do alfabeto grego). Mostre que

$$\mathcal{M} = \Big\{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\Big\}$$

é uma σ-álgebra em $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Mostre que $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+$ definida por

$$\mu(\emptyset) = 0\,, \quad \mu\big(\{\alpha\}\big) = 0\,, \quad \mu\big(\{\beta\}\big) = 0\,, \quad \mu\big(\{\gamma\}\big) = 1\,,$$
$$\mu\big(\{\alpha, \beta\}\big) = 0\,, \quad \mu\big(\{\alpha, \gamma\}\big) = 1\,, \quad \mu\big(\{\beta, \gamma\}\big) = 1\,, \quad \mu\big(\{\alpha, \beta, \gamma\}\big) = 1$$

é uma medida em $\mathcal{M}$. Constate que se trata da medida de Dirac centrada no elemento γ. ✠

• Propriedades básicas de medidas

Vamos agora extrair algumas consequências básicas da definição de medida [275]. Abaixo, seja X um conjunto não-vazio, $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra em X e μ uma medida em $\mathcal{M}$.

1. Se $A_1, \ldots, A_n$ é uma coleção finita de elementos disjuntos de $\mathcal{M}$ então $\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$.

   Prova. Defina-se $A_m = \emptyset$ para $m > n$. Então, $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ e, portanto,

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)\,,$$

   pois $\mu(\emptyset) = 0$.

2. Se A e B são elementos de $\mathcal{M}$ e $A \subset B$ então $\mu(A) \leq \mu(B)$.

   Prova. Como $A \subset B$, segue que $B = A \cup (A^c \cap B)$, uma união disjunta de elementos de $\mathcal{M}$ (por que?). Logo, pelo item anterior segue que $\mu(B) = \mu(A) + \mu(A^c \cap B)$. Como $\mu(A^c \cap B) \geq 0$, segue que $\mu(B) \geq \mu(A)$.

3. Se A_j, $j \in \mathbb{N}$, são elementos de $\mathcal{M}$ com $A_j \subset A_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$, onde $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

   Prova. Defina-se $B_1 = A_1$ e $B_a = A_a \setminus A_{a-1}$ para $a \geq 2$. Então, pelas hipóteses,
$$A_n \;=\; B_1 \cup \cdots \cup B_n \qquad \text{e} \qquad A \;=\; \bigcup_{a\in\mathbb{N}} B_a \;,$$
   onde, em ambos os casos, as uniões são disjuntas. Assim,
$$\mu(A_n) \;=\; \mu(B_1) + \cdots + \mu(B_n) \qquad \text{e} \qquad \mu(A) \;=\; \sum_{a\in\mathbb{N}} \mu(B_a) \;.$$
   Portanto, $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$, como queríamos provar.

4. Se A_j, $j \in \mathbb{N}$, são elementos de $\mathcal{M}$ com $A_{j+1} \subset A_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, e se $\mu(A_1)$ for finito, então $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$, onde $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

   Prova. Seja $C_a = A_1 \setminus A_a$. Então, pelas hipóteses, $C_j \subset C_{j+1}$. Como vimos no item anterior, isso diz que
$$\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) \;=\; \mu(C) \;,$$
   onde $C = \bigcup\limits_{a\in\mathbb{N}} C_a = A_1 \setminus A$. Temos agora que $A_1 = A_n \cup C_n$ e $A_1 = A \cup C$, duas uniões disjuntas. Portanto $\mu(A_n) + \mu(C_n) = \mu(A) + \mu(C)$. Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) + \lim\limits_{n\to\infty} \mu(C_n) = \mu(A) + \mu(C)$ e, então,
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) + \mu(C) \;=\; \mu(A) + \mu(C) \;.$$
   Como $\mu(A_1)$ é finito, então $\mu(C)$ e $\mu(A)$ também são finitos (pois são subconjuntos de A_1). Logo, podemos cancelar $\mu(C)$ da última igualdade e obtemos o desejado.

Os dois primeiros itens acima são resultados desejados pela noção intuitiva de medida. O penúltimo diz que a medida de um conjunto mensurável A pode ser aproximada "por dentro" pelas medidas de conjuntos mensuráveis que convergem a A e o último item diz que se um conjunto mensurável A tem medida finita e se há conjuntos A_n também com medida finita que contêm A e convergem a A então também podemos aproximar a medida de A pela dos aproximantes externos A_n.

• Fórmula de Inclusão-Exclusão

O seguinte exercício apresenta mais algumas propriedades gerais elementares de medidas. As expressões (30.4) e (30.5), denominadas por vezes *fórmulas de inclusão-exclusão*, ou *princípio de inclusão-exclusão*, são usadas amiúde, por exemplo, na Teoria de Probabilidades e em Análise Combinatória.

E. 30.5 *Exercício.* Sejam X um conjunto não-vazio, $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra em X e μ uma medida em $\mathcal{M}$. Então, se A e B são elementos de $\mathcal{M}$ tais que $\mu(A) < \infty$ e $\mu(B) < \infty$, mostre que
$$\mu\big(A \cup B\big) \;=\; \mu(A) + \mu(B) - \mu\big(A \cap B\big) \;. \tag{30.4}$$
Mais genericamente, prove que vale para todo $n \in \mathbb{N}$ vale a seguinte afirmação: se $A_1, \ldots, A_n$ são elementos de $\mathcal{M}$ com $\mu(A_k) < \infty$ para todo $k = 1, \ldots, n$, então
$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left[\sum_{1\leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)\right] \;. \tag{30.5}$$
Uma demonstração de (30.4) e (30.5) pode ser encontrada no Apêndice 30.A, página 1451. ✠

No caso de a medida μ ser a medida de contagem, (30.4) e (30.5) fornecem expressões para o número de elementos de uniões de conjuntos finitos. Nesse contexto, (30.4) e (30.5) são por vezes denominadas *fórmulas do crivo de de Moivre*[5],

[5] Abraham de Moivre (1667–1754).

ou *fórmulas do crivo de Poincaré*[6]*-Sylvester*[7].

E. 30.6 *Exercício*. Mostre que (30.5) pode ser escrita como

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\,\ldots,\,n\}\\ I\neq\emptyset\\ I=\{i_1,\,\ldots,\,i_{|I|}\}}} (-1)^{|I|+1}\mu\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{|I|}}\right) . \tag{30.6}$$

Usando a Fórmula de Inversão de Möbius, Proposição 1.26, página 73, mostre, por (30.6), que

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{\substack{J\subset\{1,\,\ldots,\,n\}\\ J\neq\emptyset\\ J=\{j_1,\,\ldots,\,j_{|J|}\}}} (-1)^{|J|+1}\mu\left(A_{j_1}\cup\cdots\cup A_{j_{|J|}}\right) , \tag{30.7}$$

e, portanto, que

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+1}\left[\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_l\leq n}\mu\big(A_{j_1}\cup\cdots\cup A_{j_l}\big)\right] . \tag{30.8}$$

Essa última relação também pode ser provada diretamente, de modo análogo à demonstração de (30.5) apresentada no Apêndice 30.A, página 1451. ✠

• **Quase em toda parte**

Se X é um conjunto no qual está definida uma medida μ, uma afirmação a respeito dos elementos de X que for falsa apenas em um conjunto de medida μ nula é dita valer *quase em toda a parte* em relação a μ, ou μ*-quase em toda parte*. Abreviadamente, escreve-se também *q.t.p.*, ou μ*-q.t.p.*[8]

30.3 Construindo Medidas. A Medida Exterior e o Teorema de Carathéodory

Há muitos processos que permitem construir medidas com certas propriedades desejadas. Vamos aqui delinear um tal processo, devido a Carathéodory[9], que será particularmente importante para a construção da chamada *medida de Lebesgue da reta real*, a qual corresponde à noção intuitiva de comprimento de conjuntos em $\mathbb{R}$. A construção a que nos referimos exige que introduzamos mais um conceito, o de *medida exterior*.

• **Medidas Exteriores**

Uma medida exterior $\overline{\mu}$ em um conjunto não-vazio X é uma função que associa a cada subconjunto de X um número real maior ou igual a zero ou infinito e de tal forma que:

1. $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$.
2. Se $A\subset B$ então $\overline{\mu}(A)\leq\overline{\mu}(B)$.
3. Para qualquer coleção contável A_j, $j\in\mathbb{N}$, de subconjuntos de X tem-se que

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}}\overline{\mu}(A_j) .$$

Antes de prosseguirmos, façamos alguns comentários.

[6]Jules Henri Poincaré (1854–1912).
[7]James Joseph Sylvester (1814–1897).
[8]Em língua inglesa usa-se a abreviação *a.e.*: "almost everywhere".
[9]Constantin Carathéodory (1873–1950).

- Um exemplo elementar de medida exterior, e que ilustrará o Teorema de Carathéodory, abaixo, é encontrado no Exercício E. 30.8 da página 1439.
- Enfatizamos que medidas exteriores são definidas sobre a totalidade dos subconjuntos de X ao contrário de medidas, que são definidas apenas sobre σ-álgebras em X (e que podem ser menores que $\mathbb{P}(X)$).
- Uma outra distinção relevante entre medidas exteriores e medidas é a seguinte. Seja A um conjunto e sejam A_1 e A_2 dois subconjuntos disjuntos próprios do conjunto A tais que $A = A_1 \cup A_2$. Então, há casos em que $\overline{\mu}(A) \neq \overline{\mu}(A_1) + \overline{\mu}(A_2)$. Esse fato é contrário à intuição por trás da noção de medida de um conjunto. Para uma medida μ isso nunca pode ocorrer se A, A_1 e A_2 forem elementos da σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis por μ, pela própria definição de medida dada acima.
- Se A_1 e A_2 são dois subconjuntos de X sempre temos que $\overline{\mu}(A_1 \cup A_2) \leq \overline{\mu}(A_1) + \overline{\mu}(A_2)$. Isso é fácil de se ver pela definição de medida exterior pois, tomando-se $A_j = \emptyset$ para $j > 2$ temos que $A_1 \cup A_2 = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$.
- Para um esquema de construção de medidas exteriores, vide Seção 30.4, página 1444.
- A noção de medida exterior foi introduzida por Carathéodory, que desenvolveu boa parte da sua teoria.

A seguinte proposição será relevante quando construirmos a medida de Hausdorff no Capítulo 31, página 1453.

Proposição 30.1 *Se $\overline{\mu}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, for uma família de medidas exteriores em X, então $\overline{\mu} := \sup_{\lambda\in\Lambda} \overline{\mu}_\lambda$ é também uma medida exterior em X.* □

Prova. Como $\overline{\mu}_\lambda(\emptyset) = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$, segue que $\overline{\mu}(\emptyset) := \sup_{\lambda\in\Lambda}\{\overline{\mu}_\lambda(\emptyset)\} = 0$. Sejam A, $B \subset X$ com $A \subset B$. Como $\overline{\mu}_\lambda(A) \leq \overline{\mu}_\lambda(B)$ para todo $\lambda \in \Lambda$, segue que $\overline{\mu}(A) := \sup_{\lambda\in\Lambda}\{\overline{\mu}_\lambda(A)\} \leq \sup_{\lambda\in\Lambda}\{\overline{\mu}_\lambda(B)\} =: \overline{\mu}(B)$. Por fim, sejam $A_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\overline{\mu}_\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}_\lambda(A_n)$ para todo $\lambda \in \Lambda$, segue que

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) := \sup_{\lambda\in\Lambda}\left\{\overline{\mu}_\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right\} \leq \sup_{\lambda\in\Lambda}\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}_\lambda(A_n)\right\} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\lambda\in\Lambda}\{\overline{\mu}_\lambda(A_n)\} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(A_n) .$$

■

• O Teorema de Carathéodory

Vamos agora demonstrar o seguinte resultado fundamental e que é a verdadeira razão de ser do conceito de medida exterior.

Teorema 30.1 (Teorema de Carathéodory) [10] *Seja X um conjunto não-vazio e seja $\overline{\mu}$ uma medida exterior em X. Considere $\mathcal{M}_{\overline{\mu}} \subset \mathbb{P}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos A de X que tenham a seguinte propriedade: Para todo $E \subset X$ vale que*

$$\overline{\mu}(E) = \overline{\mu}\big(E \cap A\big) + \overline{\mu}\big(E \cap A^c\big) , \tag{30.9}$$

onde $A^c = X \setminus A$. Então, $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ é uma σ-álgebra. Fora isso, $\overline{\mu}$ é uma medida em $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$. □

Antes de provarmos esse teorema, façamos algumas observações sobre o mesmo.

No enunciado do Teorema 30.1 a condição (30.9) pode ser substituida pela desigualdade

$$\overline{\mu}(E) \geq \overline{\mu}\big(E \cap A\big) + \overline{\mu}\big(E \cap A^c\big) , \tag{30.10}$$

pois, como $\overline{\mu}$ é uma medida exterior, vale sempre que $\overline{\mu}(E) \leq \overline{\mu}\big(E \cap A\big) + \overline{\mu}\big(E \cap A^c\big)$, pois $E = \big(E \cap A\big) \cup \big(E \cap A^c\big)$. Assim, (30.10) implica (30.9).

[10] Em sua forma original esse teorema é devido ao matemático Constantin Carathéodory (1873–1950) e por isso vamos nomeá-lo assim, ainda que tal denominação não seja universal.

Apesar de o teorema acima não ser, admitidamente, muito intuitivo, o mesmo fornece um método importante de construção de medidas. A razão é que, como veremos no caso da construção da medida de Lebesgue, é em muitos casos mais fácil (um esquema de construção de medidas exteriores é apresentado na Seção 30.4, página 1444) construir-se primeiro uma medida exterior sobre um conjunto X que uma medida, o que exigiria a identificação prévia de uma σ-álgebra conveniente. O teorema acima já permite exibir uma tal σ-álgebra, no caso $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$, para a qual $\overline{\mu}$ é uma medida. Historicamente o teorema acima representou também uma simplificação importante, especialmente na construção da medida de Lebesgue, dado que a mesma era originalmente alcançada por vias mais trabalhosas (identificando-se a medida exterior com o que se chama de medida interior, da qual não trataremos aqui).

Um exemplo elementar que ilustra o Teorema de Carathéodory é encontrado no Exercício E. 30.8 da página 1439. O estudante poderá estudá-lo antes de mergulhar na demonstração do teorema.

A prova do Teorema de Carathéodory é um pouco longa e precisamos de um resultado preparatório.

Lema 30.1 *Sejam A e B dois elementos de $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$. Então, $A \cup B$ é também um elemento de $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$.* □

Prova. Tudo o que queremos provar é que

$$\overline{\mu}(E) \;=\; \overline{\mu}\big(E \cap (A \cup B)\big) + \overline{\mu}\big(E \cap (A \cup B)^c\big)$$

para um subconjunto $E \subset X$ genérico.

Seja E' o conjunto $E' = (A \cup B) \cap E$. Então, como $A \in \mathcal{M}_{\overline{\mu}}$, segue que

$$\overline{\mu}(E') \;=\; \overline{\mu}\big(E' \cap A\big) + \overline{\mu}\big(E' \cap A^c\big) \;,$$

ou seja,

$$\overline{\mu}\big((A \cup B) \cap E\big) \;=\; \overline{\mu}\big((A \cup B) \cap E \cap A\big) + \overline{\mu}\big((A \cup B) \cap E \cap A^c\big) \;.$$

É fácil de se ver agora (faça!) que

$$(A \cup B) \cap E \cap A \;=\; A \cap E$$

e que

$$(A \cup B) \cap E \cap A^c \;=\; A^c \cap E \cap B \;.$$

Assim,

$$\overline{\mu}\big((A \cup B) \cap E\big) \;=\; \overline{\mu}\big(A \cap E\big) + \overline{\mu}\big(A^c \cap E \cap B\big) \;.$$

Vamos fazer uso dessa última igualdade logo abaixo.

Notemos agora que, como A e B são elementos de $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$, temos que

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(E) \;&=\; \overline{\mu}\big(A \cap E\big) + \overline{\mu}\big(A^c \cap E\big) \\ &=\; \overline{\mu}\big(A \cap E\big) + \overline{\mu}\big(A^c \cap E \cap B\big) + \overline{\mu}\big(A^c \cap E \cap B^c\big) \;.\end{aligned}$$

Acabamos de ver que a soma dos dois primeiros termos da última igualdade vale $\overline{\mu}\big((A \cup B) \cap E\big)$ e para o último termo vale $\overline{\mu}\big(A^c \cap B^c \cap E\big) = \overline{\mu}\big((A \cup B)^c \cap E\big)$, pois $A^c \cap B^c = \big(A \cup B\big)^c$. Assim, provamos que

$$\overline{\mu}(E) \;=\; \overline{\mu}\big(E \cap (A \cup B)\big) + \overline{\mu}\big(E \cap (A \cup B)^c\big) \;,$$

que é o que queríamos demonstrar. ■

Note que o resultado acima também diz que se $A_1, \ldots, A_n$ são elementos de $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ então o conjunto $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ também é elemento de $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ para qualquer n finito.

Passemos agora à prova do Teorema de Carathéodory.

• **Prova do teorema de Carathéodory**

Parte I. Vamos nesta parte I provar que o conjunto $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ é, de fato, uma σ-álgebra.

Em primeiro lugar, note-se que se $A \in \mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ então A^c também é um elemento de $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ pois $(A^c)^c = A$ e portanto, para todo $E \subset X$,

$$\overline{\mu}\big(E \cap (A^c)\big) + \overline{\mu}\big(E \cap (A^c)^c\big) \;=\; \overline{\mu}\big(E \cap (A^c)\big) + \overline{\mu}\big(E \cap A\big) \;=\; \overline{\mu}(E) \,,$$

por hipótese. Assim, podemos também ver que tanto $\emptyset$ quanto X são elementos de $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ pois, claramente, para qualquer $E \subset X$

$$\overline{\mu}(E) \;=\; \overline{\mu}\big(E \cap \emptyset\big) + \overline{\mu}\big(E \cap (\emptyset)^c\big)$$

dado que $\emptyset^c = X$, que $E \cap X = E$, que $E \cap \emptyset = \emptyset$ e que $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$.

Vimos no Lema 30.1 que se A e B são elementos de $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ então $A \cup B$ também o é. Como $A \cap B = \big(A^c \cup B^c\big)^c$ então concluímos que $A \cap B$ também é elemento de $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$, o mesmo valendo para $A \setminus B$ pois $A \setminus B = A \cap B^c$.

Resta-nos provar que se $\{A_j,\; j \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção contável de elementos de $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ então $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ também o é.

Seja E um subconjunto genérico de X. Claramente temos que $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$, o que, pelo que observamos acima, significa que $\overline{\mu}(E) \;\leq\; \overline{\mu}\big(E \cap A\big) + \overline{\mu}\big(E \cap A^c\big)$. Tudo o que precisamos fazer, então, é provar que $\overline{\mu}(E) \;\geq\; \overline{\mu}\big(E \cap A\big) + \overline{\mu}\big(E \cap A^c\big)$ o que significaria então que $A \in \mathcal{M}_{\overline{\mu}}$, como queremos provar.

Para provar esta desigualdade, observemos primeiro que, para qualquer conjunto E' e qualquer elemento A de $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ vale, por definição, $\overline{\mu}(E') \;=\; \overline{\mu}\big(E' \cap A\big) + \overline{\mu}\big(E' \cap A^c\big)$. Daí, tomando-se E' da forma $E' = (A \cup B) \cap E$, com $E \subset X$ e $A,\, B \in \mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ com $A \cap B = \emptyset$, temos

$$\overline{\mu}\big((A \cup B) \cap E\big) \;=\; \overline{\mu}\big(A \cap E\big) + \overline{\mu}\big(B \cap E\big) \,,$$

pois, como $A \cap B = \emptyset$, tem-se que $(A \cup B) \cap E \cap A = A \cap E$ e $(A \cup B) \cap E \cap A^c = B \cap E$.

E. 30.7 *Exercício*. Verifique estas últimas afirmativas. ✠

Isso significa, em particular, que se $B_1, \ldots, B_n$ são elementos disjuntos de $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$, então

$$\overline{\mu}\Big(E \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_n)\Big) \;=\; \overline{\mu}(E \cap B_1) + \cdots + \overline{\mu}(E \cap B_n) \,.$$

Vamos definir $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \big(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}\big)$ para $n \geq 2$. Então, pelo que já observamos, cada B_j é elemento de $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ e $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Fora isso,

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \;=\; \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \,.$$

Como cada B_i é elemento de $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$, então já vimos que para cada n finito $\bigcup_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{M}_{\overline{\mu}}$, ou seja,

$$\overline{\mu}(E) \;=\; \overline{\mu}\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)\right) + \overline{\mu}\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)^c\right)$$

para todo $E \subset X$. Agora

$$\overline{\mu}\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \overline{\mu}(B_i \cap E)$$

pois os B_i's são disjuntos.

Por outro lado

$$\overline{\mu}\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)^c\right) \;\geq\; \overline{\mu}\left(E \cap \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right)^c\right)$$

dado que

$$\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right)^c \;\subset\; \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)^c \qquad \text{(justifique!)} \,.$$

Logo, vimos que

$$\overline{\mu}(E) \;\geq\; \sum_{i=1}^{n}\overline{\mu}(B_i\cap E)+\overline{\mu}\left(E\cap\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\right)^c\right) .$$

Como essa desigualdade vale para qualquer n, segue que

$$\overline{\mu}(E) \;\geq\; \sum_{i=1}^{\infty}\overline{\mu}(B_i\cap E)+\overline{\mu}\left(E\cap\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\right)^c\right) .$$

Por fim, pela própria definição de medida exterior, temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\overline{\mu}(B_i\cap E) \;\geq\; \overline{\mu}\left(E\cap\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\right)\right) \qquad \text{(justifique!)}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(E) \;&\geq\; \overline{\mu}\left(E\cap\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\right)\right)+\overline{\mu}\left(E\cap\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\right)^c\right)\\ &=\; \overline{\mu}\left(E\cap\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i\right)\right)+\overline{\mu}\left(E\cap\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i\right)^c\right) .\end{aligned}$$

Isso é exatamente o que queríamos provar. Assim, mostramos que $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ é de fato uma σ-álgebra e a prova da parte I do teorema está completa.

Parte II. Vamos nesta parte *II* provar que a medida exterior é de fato uma medida quando restrita aos elementos da σ-álgebra $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$.

Tudo o que queremos provar é a propriedade seguinte: se B_i, $i\in\mathbb{N}$, são elementos disjuntos de $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$, então

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\right) \;=\; \sum_{i\in\mathbb{N}}\overline{\mu}(B_i) .$$

Pelo que já vimos na parte I, temos que

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(E) \;&\geq\; \sum_{i=1}^{\infty}\overline{\mu}(B_i\cap E)+\overline{\mu}\left(E\cap\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\right)^c\right)\\ &\geq\; \overline{\mu}\left(E\cap\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\right)\right)+\overline{\mu}\left(E\cap\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\right)^c\right)\\ &=\; \overline{\mu}(E) ,\end{aligned}$$

onde a última igualdade é precisamente a afirmativa que foi provada na parte I. Assim, como $\overline{\mu}(E)$ aparece no começo e no fim da cadeia de desigualdades, todos os símbolos de "$\geq$" podem ser substituídos por símbolos de igualdade "$=$" (justifique!). Ou seja, temos que

$$\overline{\mu}(E) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty}\overline{\mu}(B_i\cap E)+\overline{\mu}\left(E\cap\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\right)^c\right) .$$

Como isso vale para todo $E\subset X$, tomemos, em particular, $E=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i$. A última fórmula fica

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty}\overline{\mu}(B_i) ,$$

que é exatamente o que queríamos provar. Isso completa a prova do Teorema de Carathéodory. ■

*

No Capítulo 31 vamos ilustrar o uso do Teorema de Carathéodory, Teorema 30.1, página 1435, na construção de uma medida muito importante: a medida de Lebesgue da reta real. O Teorema de Carathéodory pode ser utilizado em várias outras construções de medidas, as mais notáveis talvez sejam medidas em *conjuntos fractais*, conjuntos que não possuem dimensão (de Hausdorff) inteira, tais como o conjunto de Cantor[11], a *Estrela de Koch*[12] (Fig. 30.1) e outras. A Estrela de Koch tem dimensão (de Hausdorff, vide Seção 31.2, página 1457) igual a $\ln(4)/\ln(3)$

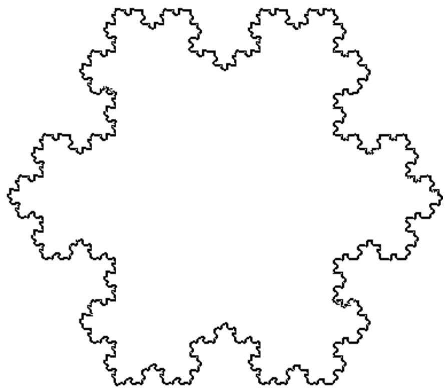

Figura 30.1: A Estrela de Koch.

O Teorema de Carathéodory, Teorema 30.1, página 1435, permite a construção de uma medida em uma determinada σ-álgebra e seria útil conhecer critérios que permitam obter mais informações sobre os elementos dessa σ-álgebra. No caso de espaços métricos uma informação importante pode ser obtida para o caso das chamadas *medidas exteriores métricas*, a saber, que todos os conjuntos Borelianos são mensuráveis no sentido de Carathéodory, ou seja, satisfazem a condição (30.9), página 1435. Disso trataremos na Seção 30.3.1, página 1441.

• **Uma ilustração elementar do Teorema de Carathéodory**

O seguinte exercício-exemplo ilustra o Teorema de Carathéodory.

E. 30.8 *Exercício-exemplo.* Sejam α, β e γ três objetos distintos (por exemplo, três letras distintas do alfabeto grego). Seja $X = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ e seja

$$\mathbb{P}(X) \;=\; \Big\{\emptyset,\ \{\alpha\},\ \{\beta\},\ \{\gamma\},\ \{\alpha,\ \beta\},\ \{\alpha,\ \gamma\},\ \{\beta,\ \gamma\},\ \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}\Big\}\ .$$

Mostre que $\overline{\mu} : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{R}_+$, definida por

$$\overline{\mu}(\emptyset) = 0\ , \quad \overline{\mu}\big(\{\alpha\}\big) = 1\ , \quad \overline{\mu}\big(\{\beta\}\big) = 1\ , \quad \overline{\mu}\big(\{\gamma\}\big) = 2\ ,$$

$$\overline{\mu}\big(\{\alpha,\ \beta\}\big) = 1\ , \quad \overline{\mu}\big(\{\alpha,\ \gamma\}\big) = 3\ , \quad \overline{\mu}\big(\{\beta,\ \gamma\}\big) = 3\ , \quad \overline{\mu}\big(\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}\big) = 3$$

é uma medida exterior em $\mathbb{P}(X)$. Podemos, então, nos perguntar: quais conjuntos $A \subset X$ têm a propriedade de Carathéodory

$$\overline{\mu}(E) \;=\; \overline{\mu}(E \cap A) + \overline{\mu}(E \cap A^c) \tag{30.11}$$

para todo $E \in \mathbb{P}(X)$? Mostre explicitamente (ou seja, analisando caso-a-caso) que os elementos de

$$\mathcal{M} \;=\; \Big\{\emptyset,\ \{\gamma\},\ \{\alpha,\ \beta\},\ \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}\Big\}$$

possuem a propriedade (30.11). Mostre agora que

[11] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918).
[12] Niels Fabian Helge von Koch (1870–1924).

1. Para $A = \{\alpha\}$ a propriedade (30.11) falha com $E = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ e com $E = \{\alpha,\ \beta\}$.
2. Para $A = \{\beta\}$ a propriedade (30.11) falha com $E = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ e com $E = \{\alpha,\ \beta\}$.
3. Para $A = \{\alpha,\ \gamma\}$ a propriedade (30.11) falha com $E = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ e com $E = \{\alpha,\ \beta\}$.
4. Para $A = \{\beta,\ \gamma\}$ a propriedade (30.11) falha com $E = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ e com $E = \{\alpha,\ \beta\}$.

Assim, apenas os elementos de $\mathcal{M}$, acima, possuem a propriedade de Carathéodory.

Os fatos, garantidos pelo Teorema de Carathéodory, que $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra e que $\overline{\mu}$ restrita a $\mathcal{M}$, ou seja

$$\overline{\mu}(\emptyset) \;=\; 0\;, \quad \overline{\mu}\big(\{\gamma\}\big) \;=\; 2\;, \quad \overline{\mu}\big(\{\alpha,\ \beta\}\big) \;=\; 1\;, \quad \overline{\mu}\big(\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}\big) \;=\; 3$$

é uma medida em $\mathcal{M}$, podem agora ser facilmente verificados diretamente e, de fato, já o fizemos no Exercício E. 30.3, página 1432. ✠

• Medidas completas

Uma medida μ em uma σ-álgebra $\mathcal{M}$ é dita ser uma *medida completa* se para todo $A \in \mathcal{M}$ com a propriedade que $\mu(A) = 0$ valer que todo $B \subset A$ é também elemento de $\mathcal{M}$. Em palavras mais simples, μ é completa se qualquer subconjunto de um conjunto de medida nula for também mensurável.

Um exemplo de uma medida não-completa é aquele encontrado no Exercício E. 30.2 da página 1432. Aquela medida não é completa pois $\{\alpha,\ \beta\}$ é um conjunto de medida nula, mas possui subconjuntos, $\{\alpha\}$ e $\{\beta\}$, que não são elementos de $\mathcal{M}$.

Esse exemplo, ainda que um tanto elementar, ilustra que para uma medida ser completa deve estar definida em uma σ-álgebra rica o suficiente para poder conter todos os subconjuntos dos conjuntos de medida nula. O Exercício seguinte ilustra isso.

E. 30.9 *Exercício*. Mostre que a medida definida no Exercício E. 30.4, página 1432, é completa. Compare com a medida do Exercício E. 30.2, página 1432, em particular, compare as σ-álgebras desses dois exercícios. ✠

A medida do Exercício E. 30.3, página 1432, é completa pois lá $\emptyset$ é o único conjunto de medida nula. A razão profunda daquela medida ser completa, porém, está relacionada ao fato, estudado no Exercício E. 30.8, página 1439, que aquela medida provem de uma medida exterior. Esse é o nosso próximo assunto.

• Medidas completas e o Teorema de Carathéodory

Mostraremos que qualquer medida construída pelo procedimento de Carathéodory, ou seja, a partir de uma medida exterior, é completa. Isso é o conteúdo do seguinte teorema:

Teorema 30.2 *Seja $\overline{\mu}$ uma medida exterior em um conjunto não-vazio X e sejam $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ e μ a σ-álgebra e a medida associadas a $\overline{\mu}$ pela construção de Carathéodory. Então, μ é completa, ou seja, se A é um conjunto μ-mensurável e $\mu(A) = 0$ segue que todo $B \subset A$ é também μ-mensurável (um fato não trivial!) e $\mu(B) = 0$.* □

Prova. Para provar a afirmativa note que, se $E \subset X$ e $B \subset A$ com A sendo μ-mensurável, então

$$\overline{\mu}(E \cap B) \;\leq\; \overline{\mu}(E \cap A) \;\leq\; \overline{\mu}(A) \;=\; \mu(A) \;=\; 0\;, \tag{30.12}$$

$$\overline{\mu}\big(E \cap B^c \cap A\big) \;\leq\; \overline{\mu}(A) \;=\; \mu(A) \;=\; 0\;, \tag{30.13}$$

$$\overline{\mu}(E \cap A) \;\leq\; \overline{\mu}(A) \;=\; \mu(A) \;=\; 0\;, \tag{30.14}$$

pois $E \cap B^c \cap A$ e $E \cap A$ são ambos subconjuntos de A e, para medidas exteriores, vale que se $M \subset N$ então $\overline{\mu}(M) \leq \overline{\mu}(N)$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}\big(E\cap B\big)+\overline{\mu}\big(E\cap B^c\big) &\overset{(30.12)}{=} \overline{\mu}\big(E\cap B^c\big)\\
&\overset{A \text{ é } \mu\text{-mensurável}}{=} \overline{\mu}\big(E\cap B^c\cap A^c\big)+\overline{\mu}\big(E\cap B^c\cap A\big)\\
&= \overline{\mu}\big(E\cap (B\cup A)^c\big)+\overline{\mu}\big(E\cap B^c\cap A\big)\\
&\overset{B\subseteq A}{=} \overline{\mu}\big(E\cap A^c\big)+\overline{\mu}\big(E\cap B^c\cap A\big)\\
&\overset{(30.13)}{=} \overline{\mu}\big(E\cap A^c\big)\\
&\overset{(30.14)}{=} \overline{\mu}\big(E\cap A^c\big)+\overline{\mu}\big(E\cap A\big)\\
&\overset{A \text{ é } \mu\text{-mensurável}}{=} \overline{\mu}(E)\ .
\end{aligned}$$

Assim, estabeleceu-se que para todo $E\subset X$ vale $\overline{\mu}(E) = \overline{\mu}\big(E\cap B\big)+\overline{\mu}\big(E\cap B^c\big)$ e, portanto, B é μ-mensurável. O fato que $\mu(B)=0$ é agora trivial pois $B\subset A$ e, portanto, $\mu(B)\leq\mu(A)=0$. ■

Nota. Não poderíamos logo de partida ter concluído que $\mu(B)=0$ do fato que $B\subset A$ e, portanto, $\mu(B)\leq\mu(A)=0$, pois não estava ainda estabelecido que B era μ-mensurável e que $\mu(B)$ estivesse definido. ♣

A medida de Lebesgue, que construiremos no Capítulo 31, é completa, pois é também construída por uma medida exterior, seguindo Carathéodory. Já a medida de Borel-Lebesgue, também tratada naquele capítulo, não é completa.

30.3.1 Medidas Exteriores Métricas e Conjuntos Borelianos

De grande importância em aplicações são medidas exteriores definidas em conjuntos dotados de uma métrica e que tenham uma relação cordial com a topologia induzida por essa métrica. Nesta seção discutiremos uma classe de medidas exteriores com essa característica, as chamadas *medidas exteriores métricas*. A grande importância de medidas exteriores métricas reside no fato, demonstrado no Teorema 30.3, página 1443, que todo conjunto Boreliano (em relação à topologia induzida pela métrica) é mensurável no sentido de Carathéodory, ou seja, satisfaz a condição (30.9), página 1435. Assim, a σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis por uma medida exterior métrica contém a σ-álgebra de Borel.

• **Medidas exteriores métricas**

Seja M um conjunto não-vazio dotado de uma métrica d e seja τ_d a topologia induzida em M pela métrica d. Dados dois conjuntos $A,\ B\subset M$ definimos a distância[13] de A a B, denotada por $d(A,\ B)$, por

$$d(A,\ B)\ :=\ \inf\Big\{d(a,\ b),\ a\in A,\ b\in B\Big\}\ .$$

Se A e B forem tais que $d(A,\ B)>0$, ou seja, se forem tais que $\inf\{d(a,\ b),\ a\in A,\ b\in B\}>0$, então os fechos de A e de B não têm pontos em comum: $\overline{A}\cap\overline{B}=\emptyset$. De fato, se $\inf\{d(a,\ b),\ a\in A,\ b\in B\}>0$ e existir $c\in\overline{A}\cap\overline{B}$, existirão uma sequência $a_n\in A$ que converge a c e uma sequência $b_n\in B$ que convergem a c. Logo, pela desigualdade triangular $d(a_n,\ b_n)\leq d(a_n,\ c)+d(c,\ b_n)$, e $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n,\ b_n)=0$, contrariando $\inf\{d(a,\ b),\ a\in A,\ b\in B\}>0$.

Uma medida exterior $\overline{\mu}$ em M é dita ser uma *medida exterior métrica* (em relação à métrica d) se para todos os conjuntos $A,\ B\subset M$ que satisfizerem $d(A,\ B)>0$ valer

$$\overline{\mu}(A\cup B)\ =\ \overline{\mu}(A)+\overline{\mu}(B)\ . \tag{30.15}$$

Uma sequência de conjuntos $A_n\in M$ é dita ser uma sequência *crescente* se $A_n\subset A_{n+1}$ para todo n. Para uma sequência crescente de conjuntos vale $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}}A_m$. Vide Proposição 1.12, página 58.

[13] Atenção: apesar do nome, não se trata de uma *métrica* (no sentido usado em Topologia) na coleção de todos os subconjuntos de M.

O lema técnico a seguir tem consequências importantes a respeito da mensurabilidade de conjuntos Borelianos, das quais trataremos logo abaixo.

Lema 30.2 *Sejam M um conjunto não-vazio dotado de uma métrica d, τ_d a topologia em M induzida por d e $\overline{\mu}$ uma medida exterior métrica em M. Seja $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência crescente de subconjuntos de M com a propriedade*

$$d(A_n,\ A \setminus A_{n+1}) \ > \ 0 \tag{30.16}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $A \equiv \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} A_m$. Então,

$$\overline{\mu}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) \ = \ \lim_{n\to\infty} \overline{\mu}\left(A_n\right) \ . \tag{30.17}$$

□

Prova. Defina-se uma nova sequência $\{B_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos de M por $B_1 = A_1$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$, $k \geq 2$. Pela definição vale, evidentemente, que

$$B_k \ \subset \ A_k \tag{30.18}$$

para todo k, e que, para $l - k \geq 2$

$$B_l \ \subset \ A \setminus A_{k+1} \tag{30.19}$$

pois $B_l = A_l \setminus A_{l-1} \subset A \setminus A_{l-1} \subset A \setminus A_{k+1}$ a última relação sendo devida a $A_{l-1} \supset A_{k+1}$. Segue disso que

$$d(B_k,\ B_l) \ > \ 0 \text{ para todos } k \text{ e } l \text{ com } l - k \geq 2, \tag{30.20}$$

pois para $l - k \geq 2$ vale

$$d(B_k,\ B_l) \ = \ \inf\big\{d(x,\ y),\ \ x \in B_k,\ y \in B_l\big\}$$

$$\overset{(30.18)-(30.19)}{\geq} \ \inf\big\{d(x,\ y),\ \ x \in A_k,\ y \in A \setminus A_{k+1}\big\} \ =: \ d\big(A_k,\ \ A \setminus A_{k+1}\big) \ \overset{(30.16)}{>} \ 0 \ .$$

Por (30.15), segue de (30.20) que $\overline{\mu}(B_1 \cup B_3) = \overline{\mu}(B_1) + \overline{\mu}(B_3)$ e $\overline{\mu}(B_2 \cup B_4) = \overline{\mu}(B_2) + \overline{\mu}(B_4)$ e, por indução, segue também facilmente que

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{a=1}^{m} B_{2a-1}\right) \ = \ \sum_{a=1}^{m} \overline{\mu}(B_{2a-1}) \quad \text{ e } \quad \overline{\mu}\left(\bigcup_{a=1}^{m} B_{2a}\right) \ = \ \sum_{a=1}^{m} \overline{\mu}(B_{2a}) \tag{30.21}$$

para todo $m \geq 1$.

Há dois casos a considerar: *1.* quando pelo menos uma das somas em (30.21) diverge para $m \to \infty$ e *2.* quando ambas as somas em (30.21) convergem para $m \to \infty$.

No caso *1.*, observe-se que para todo k,

$$A_k \ = \ \bigcup_{a=1}^{k} B_a \ . \tag{30.22}$$

Logo, para todo m tem-se $A_{2m-1} \supset \bigcup_{a=1}^{m} B_{2a-1}$ e $A_{2m} \supset \bigcup_{a=1}^{m} B_{2a}$. Portanto,

$$\overline{\mu}(A_{2m-1}) \ \geq \ \overline{\mu}\left(\bigcup_{a=1}^{m} B_{2a-1}\right) \ \overset{(30.21)}{=} \ \sum_{a=1}^{m} \overline{\mu}(B_{2a-1}) \quad \text{ e } \quad \overline{\mu}(A_{2m}) \ \geq \ \overline{\mu}\left(\bigcup_{a=1}^{m} B_{2a}\right) \ \overset{(30.21)}{=} \ \sum_{a=1}^{m} \overline{\mu}(B_{2a}) \ .$$

Consequentemente, se qualquer das somas em (30.21) divergir quando $m \to \infty$ teremos $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{\mu}(A_n) = \infty$, o que implica $\overline{\mu}(A) = \infty$ pois, como $A \supset A_n$ para todo n, vale $\overline{\mu}(A) \geq \overline{\mu}(A_n)$, também para todo n. Nesse caso teríamos, então, $\overline{\mu}(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{\mu}(A_n) = \infty$, provando (30.17) para o caso *1.*

No caso *2* procedemos da seguinte forma. Segue de (30.22) que

$$A = \bigcup_{a=1}^{\infty} A_a = A_j \cup \bigcup_{a=j+1}^{\infty} B_a$$

para qualquer j. Logo,

$$\overline{\mu}(A) = \overline{\mu}\left(A_j \cup \bigcup_{a=j+1}^{\infty} B_a\right) \leq \overline{\mu}(A_j) + \overline{\mu}\left(\bigcup_{a=j+1}^{\infty} B_a\right) \leq \overline{\mu}(A_j) + \sum_{a=j+1}^{\infty} \overline{\mu}(B_a) , \tag{30.23}$$

sendo a soma ao lado direito convergente, por hipótese. Pela mesma razão, vale $\lim_{j\to\infty} \sum_{a=j+1}^{\infty} \overline{\mu}(B_a) = 0$ e, portanto, segue de (30.23) que $\overline{\mu}(A) \leq \lim_{j\to\infty} \overline{\mu}(A_j)$. Do fato que $A \supset A_n$ para todo n, segue que $\overline{\mu}(A) \geq \overline{\mu}(A_n)$, implicando que $\overline{\mu}(A) \geq \lim_{n\to\infty} \overline{\mu}(A_n)$. Essas duas últimas desigualdades implicam (30.17) para o caso *2*. ■

• Mensurabilidade de conjuntos Bolerianos para medidas exteriores métricas

Teorema 30.3 *Sejam M um conjunto não-vazio dotado de uma métrica d, τ_d a topologia em M induzida por d e seja $\overline{\mu}$ uma medida exterior métrica em M. Então $\mathcal{M}[\tau_d] \subset \mathcal{M}_{\overline{\mu}}$, ou seja, os conjuntos Borelianos de M (segundo a topologia τ_d) são mensuráveis para a medida exterior métrica $\overline{\mu}$.* □

Prova. É suficiente demonstrarmos que todo aberto $A \in \tau_d$ satisfaz a condição de mensurabilidade de Carathéodory (30.9), página 1435, para todo $E \subset M$, pois isso garante que $\tau_d \subset \mathcal{M}_{\overline{\mu}}$, o que implica que $\mathcal{M}[\tau_d] \subset \mathcal{M}_{\overline{\mu}}$. Para tal, é suficiente provarmos que $\overline{\mu}(E) \geq \overline{\mu}(E \cap A) + \overline{\mu}(E \cap A^c)$ para todo $A \in \tau_d$ e todo $E \subset M$, pois a desigualdade oposta $\overline{\mu}(E) \leq \overline{\mu}(E \cap A) + \overline{\mu}(E \cap A^c)$ é sempre satisfeita para uma medida exterior $\overline{\mu}$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $E_m \subset E \cap A$ o conjunto

$$E_m = \left\{x \in E \cap A \,\middle|\, d(x,\ y) \geq 1/m \text{ para todo } y \in A^c\right\} .$$

Claramente, para todo $x \in E_m$ e para todo $y \in E \cap A^c \subset A^c$ vale $d(x,\ y) \geq 1/m$ e, portanto, $d\big(E_m,\ E \cap A^c\big) \geq 1/m$. Logo, por $\overline{\mu}$ ser uma medida exterior métrica, vale

$$\overline{\mu}\big(E_m \cup (E \cap A^c)\big) = \overline{\mu}\big(E_m\big) + \overline{\mu}\big(E \cap A^c\big) . \tag{30.24}$$

Porém, como $E_m \subset E \cap A$, segue que $E_m \cup (E \cap A^c) \subset (E \cap A) \cup (E \cap A^c) = E$ e, portanto, $\overline{\mu}\big(E_m \cup (E \cap A^c)\big) \leq \overline{\mu}(E)$. Assim, estabelecemos por (30.24) que para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\overline{\mu}(E) \geq \overline{\mu}\big(E_m\big) + \overline{\mu}\big(E \cap A^c\big) . \tag{30.25}$$

Como se vê, se provarmos que $\lim_{m\to\infty} \overline{\mu}\big(E_m\big) = \overline{\mu}\big(E \cap A\big)$, teremos por (30.25) que $\overline{\mu}(E) \geq \overline{\mu}(E \cap A) + \overline{\mu}(E \cap A^c)$ e a demonstração do Teorema 30.3 estará completa. No que segue estabeleceremos isso em três passos sucessivos.

O primeiro passo é notar que vale

$$E \cap A = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m . \tag{30.26}$$

Para provar isso, lembremos que para todo m tem-se $E_m \subset E \cap A$ e, assim, trivialmente, $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m \subset E \cap A$. Por outro lado, se $x \in E \cap A$ então existe $r(x) > 0$ tal que todo $z \in M$ com $d(z,\ x) < r(x)$ também pertence a A, pois A é τ_d-aberto, por hipótese[14]. Logo, para todo $y \in A^c$ forçosamente vale $d(y,\ x) \geq r(x)$. Assim, se $x \in E \cap A$ existe algum m grande o suficiente tal que $d(y,\ x) \geq 1/m$ para todo $y \in A^c$. Isso equivale a dizer que se $x \in E \cap A$, então $x \in E_m$ para algum m. Logo, $E \cap A \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m$, provando (30.26).

[14] O estudante deve atentar para o fato que somente nessa passagem é evocado que A é τ_d-aberto.

O segundo passo é observar que,

$$\lim_{m\to\infty} E_m \;=\; E\cap A\;, \tag{30.27}$$

pois, como a sequência de conjuntos E_m é crescente, ou seja, $E_m \subset E_{m'}$ para todos $m \leq m'$, segue que $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m = \lim_{m\to\infty} E_m$ e, de (30.26), segue imediatamente (30.27).

No terceiro passo provamos que para todo $m \in \mathbb{N}$ vale

$$d\big(E_m,\ (E\cap A)\setminus E_{m+1}\big) \;>\; 0\;. \tag{30.28}$$

De fato, notemos que se $z \in (E\cap A)\setminus E_{m+1}$ então, pela definição de E_{m+1}, existe pelo menos um ponto $y \in A^c$ tal que $d(z,\ y) < 1/(m+1)$. Logo, para qualquer $x \in E_m$ teremos pela definição de E_m que $d(x,\ y) \geq 1/m$. Da desigualdade triangular segue que $d(x,\ y) \leq d(x,\ z) + d(z,\ y)$ e, portanto, que

$$d(x,\ z) \;\geq\; d(x,\ y) - d(z,\ y) \;>\; \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\;.$$

Assim,

$$d\big(E_m,\ (E\cap A)\setminus E_{m+1}\big) \;=\; \inf\Big\{d(x,\ z),\ \ x\in E_m\ ,\ \ z\in (E\cap A)\setminus E_{m+1}\Big\} \;>\; \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \;>\; 0\;,$$

provando (30.28).

Por (30.27), (30.28) e pelo Lema 30.2, página 1442, vale

$$\overline{\mu}\big(E\cap A\big) \;=\; \lim_{m\to\infty}\overline{\mu}\big(E_m\big)\;.$$

Logo, de (30.25) segue que

$$\overline{\mu}(E) \;\geq\; \lim_{m\to\infty}\overline{\mu}\big(E_m\big) + \overline{\mu}\big(E\cap A^c\big) \;=\; \overline{\mu}\big(E\cap A\big) + \overline{\mu}\big(E\cap A^c\big)$$

completando a demonstração. ■

30.4 Um Esquema de Construção de Medidas Exteriores

Vamos nesta seção descrever um procedimento de construção de medidas exteriores que é aplicável em diversos contextos, em particular, na construção das medidas de Lebesgue e de Hausdorff, das quais trataremos no Capítulo 31, página 1453. Começamos com uma proposição útil. Lembramos que a construção de medidas exteriores é relevante por permitir a construção de medidas, como descrito no Teorema de Carathéodory, Teorema 30.1, página 1435.

Proposição 30.2 *Seja X um conjunto não-vazio e seja uma coleção não-vazia $\mathfrak{R} \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X, com $\emptyset \in \mathfrak{R}$. Denotemos por $\mathfrak{S}_{\mathfrak{R}}$ a coleção de todos os subconjuntos contáveis de $\mathfrak{R}$. Seja uma função $h : \mathfrak{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} = [0,\ \infty]$, com $h(\emptyset) = 0$. Defina-se uma função $H : \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ da seguinte forma: para cada $\mathcal{R} = \{R_n \in \mathfrak{R},\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}}$ tem-se*

$$H(\mathcal{R}) \;:=\; \sum_{R_n\in\mathcal{R}} h(R_n)\;. \tag{30.29}$$

Então, valem

1. *$H(\{\emptyset\}) = 0$.*
2. *Se $\mathcal{R}^b \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}}$ para todo $b \in \mathbb{N}$, então*

$$H\left(\bigcup_{b\in\mathbb{N}}\mathcal{R}^b\right) \;\leq\; \sum_{b\in\mathbb{N}} H(\mathcal{R}^b). \tag{30.30}$$

□

Prova. Que $H(\{\emptyset\}) = 0$ segue de $h(\emptyset) = 0$. Se $\mathcal{R}^b \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}}$, então é da forma $\mathcal{R}^b = \{R_n^b \in \mathfrak{R},\ n \in \mathbb{N}\}$. Logo, $\bigcup_{b\in\mathbb{N}} \mathcal{R}^b = \{R_n^b \in \mathfrak{R},\ n \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{N}\}$. Portanto, $H\left(\bigcup_{b\in\mathbb{N}} \mathcal{R}^b\right) = \sum' h(R_n^b)$, a soma $\sum'$ sendo feita entre elementos distintos de $\{R_n^b \in \mathfrak{R},\ n \in \mathbb{N}\}$. Agora, claramente $\sum' h(R_n^b) \leq \sum_{b\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} h(R_n^b) = \sum_{b\in\mathbb{N}} H(\mathcal{R}^b)$, provando (30.30). ■

Seja X um conjunto não-vazio. Se $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, dizemos que uma coleção contável de conjuntos $\mathcal{B} = \{B_n \subset X,\ n \in \mathbb{N}\}$ é um *recobrimento contável* de A se sua união contém A: $\{B_n \subset X,\ n \in \mathbb{N}\}$ é um recobrimento contável de A se $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \supset A$. Por convenção, diremos que $\{\emptyset\}$ é um recobrimento (contável, pois só possui um elemento) de $\emptyset$.

O teorema a seguir descreve um esquema para a construção de medidas exteriores.

Teorema 30.4 *Seja X um conjunto não-vazio. Vamos supor que exista uma a coleção não-vazia $\mathfrak{R} \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X, com as seguintes propriedades:*

1. $\emptyset \in \mathfrak{R}$.
2. *Se $\mathfrak{S}_{\mathfrak{R}}$ denota a coleção de todos os subconjuntos contáveis de $\mathfrak{R}$ (ou seja, cada $\mathcal{R} \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}}$ é uma coleção contável $\{B_n \in \mathfrak{R},\ n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\mathfrak{R}$), então existe uma função $H : \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ com as seguintes propriedades:*
   (a) $H(\{\emptyset\}) = 0$.
   (b) *Se $\mathcal{R}^b \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}}$ para todo $b \in \mathbb{N}$, então*
   $$H\left(\bigcup_{b\in\mathbb{N}} \mathcal{R}^b\right) \leq \sum_{b\in\mathbb{N}} H(\mathcal{R}^b). \tag{30.31}$$
   (Lembrar que se $\mathcal{R}^b \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}}$ para todo $b \in \mathbb{N}$ então $\bigcup_{b\in\mathbb{N}} \mathcal{R}^b \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}}$, pois uniões contáveis de conjuntos contáveis são também contáveis. Assim, $H\left(\bigcup_{b\in\mathbb{N}} \mathcal{R}^b\right)$, acima, está bem definida).
3. *Todo $A \subset X$ possui ao menos um recobrimento contável por elementos de $\mathfrak{R}$. Para cada $A \subset X$ denotemos por $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(A) \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}}$ a coleção (não-vazia) de todos os recobrimentos contáveis de A por elementos de $\mathfrak{R}$.*

Com isso, defina-se para cada $A \subset X$,

$$\overline{\mu}(A) \equiv \overline{\mu}_{\mathfrak{R}}(A) := \inf\Big\{H(\mathcal{R}),\ \mathcal{R} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(A)\Big\}. \tag{30.32}$$

Então, a aplicação $\overline{\mu} : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, definida em (30.32), é uma medida exterior em X. □

Antes de apresentarmos a demonstração do Teorema 30.4 façamos alguns comentários.

1. Cada $\mathcal{R} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(A)$ é uma coleção contável $\{B_n \in \mathfrak{R},\ n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\mathfrak{R}$ tais que $\bigcup_{R_m\in\mathcal{R}} R_m \supset A$. Note também que, como $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(A) \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}}$, então $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(A)$ pertence ao domínio de definição de H.
2. Note que se $\{\mathcal{R}^b,\ b \in \mathbb{N}\}$ for uma coleção contável de elementos de $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(A)$, então $\bigcup_{b\in\mathbb{N}} \mathcal{R}^b$ é também elemento de $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(A)$:
   $$\text{se } \mathcal{R}^b \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(A),\ \forall\, b \in \mathbb{N}, \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{b\in\mathbb{N}} \mathcal{R}^b \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(A). \tag{30.33}$$
3. No Teorema 30.4, a função H desempenha um papel especial, pois $\overline{\mu}$ é definida como o ínfimo entre certos valores de H. Em algumas situações concretas, e tal é o caso das medidas de Lebesgue e Hausdorff que discutiremos no Capítulo 31, página 1453, a função H é definida a partir de uma função h, dotada de significado geométrico, definida nos elementos de $\mathfrak{R}$, tal como descrito na Proposição 30.2, em especial, em (30.29). É importante observar que os fatos provados na Proposição 30.2 sobre a função H definida por (30.29) são precisamente aqueles requeridos da função H no Teorema 30.4. Assim, as hipóteses sobre H usadas no Teorema 30.4 podem ser substituídos pelas hipóteses sobre h usadas na Proposição 30.2, com H agora sendo definida por (30.29). As construções das medidas de Lebesgue e Hausdorff do Capítulo 31, página 1453, seguirão essas ideias.
4. Afirmamos acima que a função h tem, por vezes, um significado geométrico. Ilustramos isso com o que ocorre no caso da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ (vide Capítulo 31). A coleção $\mathfrak{R}$ é uma coleção de cubos n-dimensionais e, para um tal n-cubo R, a função $h(R)$ fornece o volume de R. Assim, $H(\mathcal{R})$ fornece a soma de uma coleção contável $\mathcal{R}$ de n-cubos e $\overline{\mu}(A)$ é o menor valor possível (o ínfimo) de $H(\mathcal{R})$ dentre todas as coleções contáveis de n-cubos que recobrem A.

Prova do Teorema 30.4. Em primeiro lugar, como $\{\emptyset\}$ é um recobrimento contável de $\emptyset$, vale $H(\{\emptyset\}) = 0$. Assim, pela definição de $\overline{\mu}$, segue que $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$.

Em segundo lugar, se $A \subset B$, então $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(B) \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(A)$ pois se uma coleção $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ recobre B, então também recobre A. Logo,

$$\inf_{\mathcal{R}\in\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(A)} \{H(\mathcal{R})\} \leq \inf_{\mathcal{R}\in\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(B)} \{H(\mathcal{R})\} ,$$

provando que $\overline{\mu}(A) \leq \overline{\mu}(B)$.

Falta-nos apenas provar que $\overline{\mu}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(A_i)$ onde A_i são subconjuntos de X. Observemos primeiramente que se A é um subconjunto qualquer de X, então pela definição de ínfimo de um conjunto de números, podemos encontrar para qualquer número real positivo r dado pelo menos um $\mathcal{R} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(A)$ tal que $H(\mathcal{R}) \leq \overline{\mu}(A) + r$.

Isto posto, fixando $\epsilon > 0$ existe para cada $b \in \mathbb{N}$ um $\mathcal{R}^b \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}(A_b)$ tal que

$$H(\mathcal{R}^b) \leq \overline{\mu}(A_b) + \frac{\epsilon}{2^b} . \tag{30.34}$$

Pela hipótese (30.33), a coleção $\mathcal{J} = \bigcup_{b\in\mathbb{N}} \mathcal{R}^b$ é também uma coleção contável de conjuntos que cobrem o conjunto $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ e, portanto, pertencem a $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)$. Fora isso,

$$H(\mathcal{J}) \overset{(30.31)}{\leq} \sum_{b=1}^{\infty} H(\mathcal{R}^b) \overset{(30.34)}{\leq} \sum_{b=1}^{\infty} \left(\overline{\mu}(A_b) + \frac{\epsilon}{2^b}\right) = \sum_{b\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(A_b) + \epsilon . \tag{30.35}$$

Como $\mathcal{J} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)$, segue que

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \inf\left\{H(\mathcal{R}) , \; \mathcal{R} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)\right\} \leq H(\mathcal{J}) \overset{(30.35)}{\leq} \sum_{b\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(A_b) + \epsilon .$$

Como isso vale para qualquer $\epsilon > 0$, segue que

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{b\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(A_b) .$$

Isso completa a prova que $\overline{\mu}$ é uma medida exterior. ■

A Proposição 30.2 e o Teorema 30.4 ensinam-nos quais ingredientes devem ser reunidos para a construção de uma medida exterior em X: *1.* uma coleção $\mathfrak{R}$ de conjuntos de X; *2.* uma função positiva h definida em $\mathfrak{R}$, ingredientes estes que devem satisfazer as condições da Proposição 30.2 e do Teorema 30.4. No Capítulo 31, página 1453, esse esquema será ilustrado em exemplos importantes.

30.5 Medidas sobre Anéis e suas Extensões

Nesta seção faremos uso da noção de anel conjuntos e de outros sistemas de conjuntos introduzidos na Seção 1.2, página 59. Apresentaremos aqui mais uma consequência útil da construção de Caratheodory enunciada no Teorema 30.1, página 1435, a saber, apresentaremos um procedimento de construção de medidas sobre σ-álgebras a partir de medidas construidas sobre anéis que a gerem e apresentaremos condições sob as quais essa construção é única. Esse tipo de construção é empregado, por exemplo, na construção das chamadas medidas produto.

Nosso resultado principal é o Teorema 30.5, página 1448. Antes, introduzamos algumas noções necessárias.

• **Medidas sobre anéis**

Seja X um conjunto não-vazio e $\mathfrak{R}$ um anel sobre X que contenha o conjunto vazio. Uma função $\mu : \mathfrak{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ é dito ser uma medida sobre o anel $\mathfrak{R}$ se satisfizer:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. Se A_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma coleção de elementos de $\mathfrak{R}$ disjuntos dois-a-dois (i.e., $A_a \cap A_b = \emptyset$ se $a \neq b$) e se $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}$, então
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) .$$

A segunda propriedade é denominada σ-aditividade.

Como discutiremos, sob hipóteses adequadas medidas sobre anéis podem ser estendidas a σ-álgebras.

• **Conjuntos monotonamente alcançáveis por um anel.**

Seja X não-vazio e $\mathfrak{R}$ um anel em X. Disemos que $Y \in \mathbb{P}(X)$ é *monotonamente alcançável* por $\mathfrak{R}$ se existir uma coleção contável A_n, $n \in \mathbb{N}$, de elementos de $\mathfrak{R}$ que seja crescente (i.e., $A_n \subset A_m$ sempre que $n \leq m$) e tal que $Y \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Analogamente, dizemos que o próprio X é *monotonamente alcançável* por $\mathfrak{R}$ se existir uma coleção contável A_n, $n \in \mathbb{N}$, de elementos de $\mathfrak{R}$ que seja crescente (i.e., $A_n \subset A_m$ sempre que $n \leq m$) e tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Se X é monotonamente alcançável por $\mathfrak{R}$ então, evidentemente, todo $Y \subset X$ é monotonamente alcançável por $\mathfrak{R}$.

Comentamos que se X é monotonamente alcançável por um anel $\mathfrak{R}$ em X, então $\mathfrak{R}$ não é necessariamente uma álgebra, pois não é necessariamente válido que $X \in \mathfrak{R}$. No entanto, se X é monotonamente alcançável por $\mathfrak{R}$, então o σ-anel $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}]$ gerado por $\mathfrak{R}$ coincide com a σ-álgebra $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}]$ gerada por $\mathfrak{R}$. De fato, nesse caso é evidente que $X \in \mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}]$ o que faz de $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}]$ uma σ-álgebra que contém $\mathfrak{R}$. Logo, $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}] \supset \mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}]$. Como, naturalmente, toda σ-álgebra é um σ-anel, $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}]$ é um σ-anel que contém $\mathfrak{R}$ e, portanto, temos também $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}] \supset \mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}]$. Isso estabelece $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}] = \mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}]$.

• **Medidas σ-finitas sobre anéis**

Seja X um conjunto não-vazio e seja $\mathfrak{A}$ uma σ-álgebra ou um anel contendo o conjunto vazio e seja μ uma medida sobre $\mathfrak{A}$. Um elemento $A \in \mathfrak{A}$ é dito ser μ-σ-finito se existir uma sequência de conjuntos $\{B_n \in \mathfrak{A},\ n \in \mathbb{N}\}$ tal que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ e tal que $\mu(B_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma medida μ em $\mathfrak{A}$ é dita ser σ-finita se para cada $A \in \mathfrak{A}$ existir uma coleção contável de conjuntos $\{B_n \in \mathfrak{A},\ n \in \mathbb{N}\}$ tal que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ e tal que $\mu(B_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, se todo elemento de $\mathfrak{A}$ for μ-σ-finito.

Em palavras mais simples, μ é dita ser σ-finita se todo elemento de $\mathfrak{A}$ puder ser recoberto por uma união contável de elementos de $\mathfrak{A}$ que possuam medida μ finita.

No caso de $\mathfrak{A}$ ser uma σ-álgebra, para que uma medida μ sobre $\mathfrak{A}$ seja σ-finita é suficiente que X seja um conjunto μ-σ-finito, ou seja, é suficiente que exista uma coleção contável de conjuntos $\{B_n \in \mathfrak{A},\ n \in \mathbb{N}\}$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ e tal que $\mu(B_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como veremos, a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ é σ-finita. Como exemplo de uma medida que não é σ-finita, considere-se $X = \mathbb{R}$ e a σ-álgebra $\mathcal{A} = \mathbb{P}(\mathbb{R})$ com a medida de contagem μ_c. Um elemento $A \in \mathcal{A}$ é μ_c-σ-finito se e somente se for finito ou contável. Como $\mathbb{R}$ (e outros dos seus subconjuntos) não é enumerável, a medida de contagem μ_c em $\mathbb{R}$ não é σ-finita.

A noção de medida σ-finita captura uma propriedade de medidas que conduz a importantes consequências comuns. Por exemplo, a existência de medidas produto, o Teorema de Fubini e o Teorema de Radon-Nikodym têm por requisito que as medidas envolvidas sejam σ-finitas.

O seguinte resultado será usado logo adiante:

Proposição 30.3 *Seja X não-vazio e $\mathfrak{R}$ um anel em X de tal sorte que X seja monotonamente alcançável por $\mathfrak{R}$. Suponhamos também que $\emptyset \in \mathfrak{R}$ e que μ seja uma medida σ-finita sobre $\mathfrak{R}$. Então, existe uma coleção contável $\{C_k \in \mathfrak{R},\ k \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\mathfrak{R}$ que é crescente (i.e., $C_k \subset C_l$ se $k \leq l$), sendo $\mu(C_k) < \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e tal que $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$.* □

Prova. Se X é monotonamente alcançável por $\mathfrak{R}$, então existe uma coleção contável $\{A_n \in \mathfrak{R},\ n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\mathfrak{R}$ que é crescente (i.e., $A_n \subset A_m$ se $n \leq m$) e tal que $X = \bigcup_{n\in M} A_n$. Se μ é σ-finita, então existe para cada $n \in \mathbb{N}$ uma coleção contável $\{B_{n,\,m} \in \mathfrak{R},\ m \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\mathfrak{R}$ tal que $A_n \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_{n,\,m}$ e $\mu(B_{n,\,m}) < \infty$.

Seja $\mathbb{N} \ni a \mapsto \big(n(a),\ m(a)\big) \in \mathbb{N}^2$ uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^2$. Seja também, para cada $k \in \mathbb{N}$, $C_k := \bigcup_{a=1}^{k} B_{n(a),\,m(a)}$. É evidente que para todo k tem-se $C_k \in \mathfrak{R}$ e $\mu(C_k) < \infty$ (por C_k ser uma união finita de conjuntos de medida finita). Além disso, é também evidente que $C_k \subset C_l$ se $k \leq l$. Por fim, observe-se que

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \;=\; \bigcup_{(n,\,m)\in\mathbb{N}^2} B_{n,\,m} \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_{n,\,m} \;\supset\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \;=\; X ,$$

provando que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k = X$ ■

• **Extensões de medidas sobre anéis**

Uma vez munidos das noções acima, passemos à parte mais importante da discussão corrente.

Teorema 30.5 (Teorema de extensão de medidas sobre anéis) *Seja X não-vazio e $\mathfrak{R}$ um anel sobre X que contenha o conjunto vazio e tal que X seja monotonamente alcançável por $\mathfrak{R}$. Seja μ uma medida sobre $\mathfrak{R}$.*

Parte I. *Então, existe uma medida μ^σ sobre $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}] = \mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}]$ (a sigma-álgebra gerada por $\mathfrak{R}$) que estende μ, ou seja, que é identica a μ sobre os elementos de $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}]$.*

Parte II. *Se μ for σ-finita, a extensão μ^σ, cuja existência foi garantida na parte I, é única e também é σ-finita.* □

A demonstração que apresentamos segue [144] e [29], com modificações.

Prova da Parte I. Apoiados na construção de Caratheodory enunciada no Teorema 30.1, página 1435, comecemos construindo uma medida exterior em X definindo, para todo $Y \subset X$

$$\overline{\mu}(Y) \;:=\; \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n),\ Y \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ \ \text{com } A_n \in \mathfrak{R} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\right\} .$$

Em palavras, $\overline{\mu}(Y)$ é o ínfimo das quantidades $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ tomado sobre todos os possíveis conjuntos contáveis $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ compostos por elementos de $\mathfrak{R}$ cuja união recobra Y. Já comentamos que da hipótese de X ser monotonamente alcançável segue que todo $Y \subset X$ pode ser recoberto pela união de uma sequência crescente de elementos de $\mathfrak{R}$. Na definição de $\overline{\mu}$ não requeremos que as coleções $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ sejam crescentes.

É evidente da definição que se $Y \in \mathfrak{R}$, então $\overline{\mu}(Y) = \mu(Y)$ (justifique!).

Afirmamos que $\overline{\mu}$ é uma medida exterior em X. É evidente que $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$ e que $\overline{\mu}(Y) \leq \overline{\mu}(Y')$ se $Y \subset Y'$. Resta-nos provar que se $Y_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, então

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right) \;\leq\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(Y_n) . \tag{30.36}$$

Se existir ao menos um Y_n tal que $\overline{\mu}(Y_n) = \infty$, então (30.36) vale trivialmente. Suponhamos, portanto, que $\overline{\mu}(Y_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pela definição de $\overline{\mu}$ é possível encontrar, para cada $\epsilon > 0$ e para cada n, um conjunto contável $\{Z_{nm},\ m \in \mathbb{N}\}$ tal que cada Z_{nm} é um elemento de $\mathfrak{R}$, com $Y_n \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} Z_{nm}$ e com $\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(Z_{nm}) < \overline{\mu}(Y_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$. É claro disso que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \subset \bigcup_{n,\,m\in\mathbb{N}} Z_{nm}$ e, portanto,

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right) \;\leq\; \sum_{n,\,m\in\mathbb{N}} \mu(Z_{nm}) \;<\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\overline{\mu}(Y_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(Y_n) + \epsilon .$$

Como essa desigualdade é válida para todo $\epsilon > 0$, provamos que $\overline{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(Y_n)$, como desejávamos, estabelecendo que $\overline{\mu}$ é uma medida exterior.

Agora passamos a demonstrar que a σ-álgebra $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ dos conjuntos $\overline{\mu}$-mensuráveis (vide o Teorema de Caratheodory, Teorema 30.1, página 1435) contém $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}]$. Para tal, desejamos provar que cada $A \in \mathfrak{R}$ satisfaz

$$\overline{\mu}(E) \;\geq\; \overline{\mu}\big(A \cap E\big) + \overline{\mu}\big(A^c \cap E\big) \tag{30.37}$$

para todo $E \subset X$. Segundo o comentário feito em torno de (30.10), isso implica que todo elemento de $\mathfrak{R}$ é $\overline{\mu}$-mensurável, ou seja, que $\mathfrak{R} \subset \mathcal{M}_{\overline{\mu}}$, implicando que $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}] \subset \mathcal{M}_{\overline{\mu}}$. Como $\overline{\mu}$ é uma medida quando restrito à σ-álgebra $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ (novamente pelo Teorema de Caratheodory, Teorema 30.1, página 1435), concluímos disso que $\overline{\mu}$ é também uma medida quando restrito à σ-álgebra $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}]$. Essa restrição é a medida μ^σ prometida no enunciado do Teorema 30.5.

É suficiente tomarmos $E \subset X$ tal que $\overline{\mu}(E) < \infty$, pois caso $\overline{\mu}(E) = \infty$, então (30.37) é satisfeita automaticamente. Nesse caso, tomemos um $\epsilon > 0$, arbitrário, e tomemos um conjunto contável $\{E_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\mathfrak{R}$ cuja união recobra E e tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) \;\leq\; \overline{\mu}(E) + \epsilon\ .$$

Para $A \in \mathfrak{R}$ teremos, já que μ é uma medida em $\mathfrak{R}$, $\mu\big(E_n\big) = \mu\big(E_n \cap A\big) + \mu\big(E_n \cap A^c\big)$ para todo n, pois $E_n = \big(E_n \cap A\big) \cup \big(E_n \cap A^c\big)$, uma união disjunta de elementos de $\mathfrak{R}$ (para ver que $E_n \cap A^c$ e $E_n \cap A$ são elementos de $\mathfrak{R}$, notar que $E_n \cap A^c = E_n \setminus A$ e recordar a Proposição 1.13, página 61). Assim,

$$\overline{\mu}(E) + \epsilon \;\geq\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\mu\big(E_n \cap A\big) + \mu\big(E_n \cap A^c\big)\Big)\ .$$

Observe-se, agora, que $\{E_n \cap A,\ n \in \mathbb{N}\}$ e $\{E_n \cap A^c,\ n \in \mathbb{N}\}$ são coleções contáveis de elementos de $\mathfrak{R}$ cujas respectivas uniões contém $E \cap A$ e $E \cap A^c$, respectivamente. Logo, $\overline{\mu}\big(E \cap A\big) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\big(E_n \cap A\big)$ e $\overline{\mu}\big(E \cap A^c\big) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\big(E_n \cap A^c\big)$. Com isso, estabelecemos que $\overline{\mu}(E) + \epsilon \geq \overline{\mu}\big(E \cap A\big) + \overline{\mu}\big(E \cap A^c\big)$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, (30.37) está demonstrada.

Como comentamos, isso estabelece a existência de uma extensão μ^σ da medida μ sobre a σ-álgebra $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}]$, completando a demonstração da parta I. Vamos agora provar que se μ é σ-finita, então a extensão μ^σ é única e é também σ-finita.

Prova da Parte II. Se μ for σ-finita, então, pela Proposição 30.3, página 1447, existe uma coleção contável $\{C_k \in \mathfrak{R},\ k \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\mathfrak{R}$ que é crescente (i.e., $C_k \subset C_l$ se $k \leq l$), sendo $\mu(C_k) < \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e tal que $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina-se

$$\mathfrak{R}_k \;:=\; \big\{C_k \cap A,\ A \in \mathfrak{R}\big\}\ .$$

É claro que para cada $k \in \mathbb{N}$ vale $\mathfrak{R}_k \subset \mathfrak{R}$, que $\emptyset \in \mathfrak{R}_k$ (pois $\emptyset \in \mathfrak{R}$) e é fácil ver que cada $\mathfrak{R}_k$ é igualmente um anel. De fato, se $A,\ A' \in \mathfrak{R}$, então $\big(C_k \cap A\big) \cap \big(C_k \cap A'\big) = C_k \cap \big(A \cap A'\big) \in \mathfrak{R}_k$ e $\big(C_k \cap A\big) \cup \big(C_k \cap A'\big) = C_k \cap \big(A \cup A'\big) \in \mathfrak{R}_k$, pois $A \cap A'$ e $A \cup A'$ são também elementos de $\mathfrak{R}$.

Como de costume, denotemos por $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$ a σ-álgebra gerada por $\mathfrak{R}_k$. Todos os elementos de $\mathfrak{R}_k$ são subconjuntos de C_k e, portanto, o mesmo vale para $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$. Em verdade, $C_k \in \mathfrak{R}_k$ e, portanto, $C_k \in \mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$ e podemos dizer que $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$ é uma σ-álgebra sobre C_k.

Denotemos também por $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$ o σ-anel gerado por $\mathfrak{R}_k$. Analogamente, vale que $\mathfrak{R}_k$ é um σ-anel sobre C_k e que contém o mesmo. Logo, $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$ é uma σ-álgebra e vale $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k] \subset \mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$, pois $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$ é, por definição, a menor σ-álgebra a conter $\mathfrak{R}_k$. Como, por definição, $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$ é também um σ-anel, vale $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}_k] \subset \mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$, já que, por definição $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$ é o menor σ-anel a conter $\mathfrak{R}_k$. Estabelecemos, assim, que

$$\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k] \;=\; \mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}_k]\ . \tag{30.38}$$

Sejam μ_1 e μ_2 duas extensões sobre $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$ da medida μ em $\mathfrak{R}$ (a existência de ao menos uma é garantida pela parte I). Como $\mu(C_k) < \infty$, segue que μ_1 e μ_2 são finitas, ou seja, $\mu_1(Y) < \infty$ e $\mu_2(Y) < \infty$ valem para todo $Y \in \mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$.

Definamos,

$$\mathfrak{G}_k \;:=\; \Big\{B \in \mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k] \Big|\ \mu_1(B) \;=\; \mu_2(B)\Big\}\ . \tag{30.39}$$

Note-se que, evidentemente, $\mathfrak{R}_k \subset \mathfrak{G}_k$, pois μ_1 e μ_2 estendem μ, sendo, portanto, idênticas em $\mathfrak{R}_k$. Afirmamos que $\mathfrak{G}_k$ é um sistema monótono[15]. Se $\{B_n \in \mathfrak{G}_k,\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção contável e crescente de elementos de $\mathfrak{G}_k$ (e,

[15] Para a definição da noção de sistema monótono de conjuntos, vide Seção 1.2.6, página 65).

portanto, da σ-álgebra $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$ onde μ_1 e μ_2 estão definidas), vale pela propriedade descrita no item 3, página 1433, $\lim_{n\in\to\infty}\mu_i(B_n) = \mu_i\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$, para $i = 1$ e 2. Como $\mu_2(B_n) = \mu_2(B_n)$ para cada n e são finitas e limitadas por $\mu(C_k)$, segue que $\mu_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu_2\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$, mostrando que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathfrak{G}_k$. Para uma coleção contável e decrescente $\{B_n \in \mathfrak{G}_k,\ n \in \mathbb{N}\}$ elementos de $\mathfrak{G}_k$ argumenta-se da de forma análoga, usando-se, porém, a propriedade descrita no item 4, página 1433.

Como $\mathfrak{G}_k$ é um sistema monótono e que contém $\mathfrak{R}_k$, concluímos que

$$\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k] \stackrel{(30.38)}{=} \mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}_k] \stackrel{(1.30)}{=} \mathsf{M}[\mathfrak{R}_k] \subset \mathfrak{G}_k ,$$

a última inclusão decorrendo do fato que, por definição, $\mathsf{M}[\mathfrak{R}_k]$ é o menor sistema monótono que contém $\mathfrak{R}_k$ (para a definição de sistema monótono gerado por uma coleção de conjuntos, vide Seção 1.2.6, página 65).

É de se observar, porém, que pela própria definição (30.39), $\mathfrak{G}_k$ é composta por elementos de $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$, isto é, $\mathfrak{G}_k \subset \mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$. Logo, provamos que

$$\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k] = \mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}_k] = \mathsf{M}[\mathfrak{R}_k] = \mathfrak{G}_k .$$

Pela definição de $\mathfrak{G}_k$, isso estabeleceu que μ_1 e μ_2 coincidem em toda a σ-álgebra $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$. No entanto, como essa igualdade é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$, é também verdadeira em todo $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}]$. De fato, vamos supor que μ_1 e μ_2 também estendam μ sobre todo $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}]$. Se $A \in \mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}]$ vale $A = \lim_{k\to\infty} A\cap C_k$, pois $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$. Logo, Como $A\cap C_k \in \mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}_k]$, teremos

$$\mu_1(A) = \mu_1\left(\lim_{k\to\infty} A\cap C_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu_1\big(A\cap C_k\big) = \lim_{k\to\infty} \mu_2\big(A\cap C_k\big) = \mu_2\left(\lim_{k\to\infty} A\cap C_k\right) = \mu_2(A) ,$$

A segunda e a quarta igualdades acima decorrem da propriedade descrita no item 3, página 1433, e do fato de $\{A\cap C_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ ser uma sequência crescente de conjuntos, já que $\{C_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ o é. Assim, provamos que $\mu_1 = \mu_2$ em toda $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}]$ e, portanto, a medida μ tem uma extensão única de $\mathfrak{R}$ em $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}]$ caso seja σ-finita em $\mathfrak{R}$.

Resta-nos ainda provar que essa extensão, μ^σ, é também σ-finita, mas isso é evidente: se μ é σ-finita em $\mathfrak{R}$ existe uma coleção $\{A_n \in \mathfrak{R},\ n \in \mathbb{N}\}$ que recobre X sendo que cada A_n tem medida finita. Ora, cada A_n é também elemento de $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{R}]$ e $\mu^\sigma(A_n) = \mu(A_n) < \infty$. Isso mostra que μ^σ tem também a propriedade de ser σ-finita. ■

Apêndices

30.A Prova das Fórmulas de Inclusão-Exclusão

Para provar (30.4), observe-se que $A \cup B$ pode ser escrito como a união disjunta $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$, sendo que $B \cap A^c \in \mathcal{M}$. Logo, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \cap A^c)$. Ao mesmo tempo, B também pode ser escrito como a união disjunta $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$, sendo que, novamente, tanto $B \cap A$ quanto $B \cap A^c$ são elementos de $\mathcal{M}$. Logo, $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$. Eliminando $\mu(B \cap A^c)$ de ambas as relações obtemos (30.4).

A prova de (30.5) pode ser feita por indução. O caso $n = 1$ é trivial, o caso $n = 2$ corresponde a (30.4). Suporemos a igualdade válida para $n - 1$ e provarêmo-la para n. Tomando $A = \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$ e $B = A_n$, tem-se $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = A \cup B$ e por (30.4) obtém-se

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) + \mu(A_n) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} (A_j \cap A_n)\right) .$$

Agora, assumindo (30.5) verdadeira para $n - 1$, segue que

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \left[\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n-1} \mu\big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\big)\right]$$

e

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} (A_j \cap A_n)\right) = \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{l+1} \left[\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n-1} \mu\big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l} \cap A_n\big)\right] , \tag{30.A.1}$$

pois $\big(A_{i_1} \cap A_n\big) \cap \cdots \cap \big(A_{i_l} \cap A_n\big) = A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l} \cap A_n$. Note que o lado direito de (30.A.1) pode ser escrito como

$$\sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{l+1} \left[\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_{l+1} \leq n \\ i_{l+1} = n}} \mu\big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l} \cap A_{i_{l+1}}\big)\right]$$

Logo,

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \left[\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n-1} \mu\big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\big)\right]$$
$$+ \mu(A_n) - \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{l+1} \left[\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_{l+1} \leq n \\ i_{l+1} = n}} \mu\big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l} \cap A_{i_{l+1}}\big)\right]$$

Fazendo-se a mudança de variáveis $l \to k - 1$ na segunda somatória, obtemos

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \stackrel{l \to k-1}{=} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \left[\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n-1} \mu\big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\big)\right]$$
$$+ \mu(A_n) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \left[\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n \\ i_k = n}} \mu\big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\big)\right]$$

O termo $\mu(A_n)$ pode ser absorvido na última somatória se a iniciarmos por $k = 1$ em lugar de $k = 2$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\left[\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n-1} \mu\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\big)\right] + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left[\sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n\\ i_k=n}} \mu\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\big)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left[\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mu\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\big)\right] ,
\end{aligned}$$

que é o que se desejava provar.