Capítulo 31
Elementos da Teoria da Integração

Conteúdo

APRESENTAREMOS neste capítulo ingredientes básicos da chamada teoria da integração, centrada na noção de integral de funções definidas em espaços mensuráveis, a integral de Lebesgue sendo uma de suas instâncias de particular importância. Iniciaremos com uma breve digressão sobre o desenvolvimento histórico e recordaremos a noção de integrabilidade no sentido de Riemann, passando a seguir à noção mais geral de integração em espaços de medida. Advertimos o leitor que os assuntos tratados neste capítulo envolvem por vezes noções e problemas matematicamente muito sutis, sendo difícil apresentá-los de modo resumido ou simplificado. Por essa razão, optamos por apresentar certas demonstrações mais técnicas não no texto principal, mas nos apêndices que se iniciam à página 1497. Nossa intenção é, antes de tudo, guiar o leitor, apontando-lhe os ingredientes de maior importância e de modo a eventualmente motivar seu interesse em um estudo mais aprofundado.

Como referências gerais para a teoria da medida e da integração, recomendamos [348] (fortemente), e também [299], [237], [347], [127] ou ainda [266, 267]. Um texto clássico é [165]. Para estas Notas também coletamos material de [181, 182], [177] e de [35].

31.1 Comentários Preliminares

É parte essencial da formação de todo físico ou matemático aprender as noções básicas do Cálculo, como os conceitos de limite, de derivada e de integral de funções. Nos passos iniciais dessa formação é importante dar ênfase a métodos de cálculo de derivadas e integrais de funções e, consequentemente, é natural que assim seja, pouco se discute sobre certas sutilezas ocultas por trás de tais conceitos.

A noção de integral de uma função é uma das ideias fundamentais de toda a Matemática e originou-se no século XVII com os trabalhos de Newton[1] e Leibniz[2], ainda que tenha raízes muito mais antigas, remontando pelo menos a Arquimedes[3]. Intuitivamente, a integral de uma função real em um intervalo compacto $[a,\ b]$ é entendida como a área descrita sob o gráfico dessa função nesse intervalo. Essa noção simples é suficiente para motivar e sustentar os primeiros passos de qualquer aluno iniciante e, mesmo em um plano histórico, satisfez as mentes matemáticas até cerca de meados do século XIX, pois as aplicações almejadas pela Física e pela Matemática de então pouco requeriam além dessa noção intuitiva.

Mesmo hoje, pode ser difícil a um estudante, acostumado com o cálculo de integrais de funções "elementares", entender que a noção de integral envolve questões sutis, principalmente pois essas sutilezas envolvem primordialmente a questão de caracterizar para quais funções o conceito de integral se aplica. Considere-se, por exemplo, as seguintes funções:

$$f(x) \ = \ \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ for irracional,} \\ 0, & \text{se } x \text{ for racional,} \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad f(x) \ = \ \begin{cases} \operatorname{sen}(x), & \text{se } x \text{ for transcendente,} \\ x^2, & \text{se } x \text{ for algébrico.} \end{cases} \tag{31.1}$$

Terão essas funções uma integral em um dado intervalo compacto $[a,\ b]$? Como essas funções são descontínuas em todos os pontos, é fácil reconhecer que a noção de integral como "área sob o gráfico" de uma função é aqui muito problemática (o leitor não convencido deve tentar desenhar os gráficos dessas funções e se perguntar qual a "área" sob os mesmos).

Na grande maioria das aplicações com as quais nos acostumamos, funções como essas não ocorrem, mas sim funções contínuas e suficientemente diferenciáveis, para as quais a noção intuitiva de integral dificilmente é problemática. No entanto, uma série de desenvolvimentos teóricos na Matemática conduziram à necessidade de estender a noção de integral a classes mais abrangentes de funções, como as do exemplo acima. Seria precipitado enumerar neste ponto quais foram precisamente esses desenvolvimentos que pressionaram por um aprofundamento da noção de integral, pois para tal uma série de comentários e definições teria que ser antecipada. Discutiremos isso no devido momento. Mencionamos, porém, que esse avanço foi possibilitado pelo desenvolvimento concomitante da Teoria da Medida, que, como já discutimos alhures, fundamentou e estendeu noções como comprimento, área, volume etc., de conjuntos. A área da Matemática que surgiu desse desenvolvimento é usualmente conhecida como *Teoria da Integração*.

Um outro avanço importante obtido através da Teoria da Integração foi o seguinte. As noções de integração que aprendemos nos cursos de Cálculo aplicam-se a integrais de funções definidas em conjuntos como $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ etc. Uma das consequências mais importantes do desenvolvimento da teoria da integração foi a possibilidade de definir a noção de integral mesmo para funções definidas em conjuntos mais "exóticos" que os supra-citados, tais como conjuntos fractais, conjuntos de curvas, de funções, de distribuições e outros.

Esse desenvolvimento relevou-se de grande importância para a Física também. Na Mecânica Quântica, por exemplo, ocorrem as chamadas *integrais funcionais*, que são integrais de funções definidas em conjuntos de curvas contínuas. Dados dois pontos x e y no espaço, um método importante desenvolvido por Feynman[4] permite expressar certas funções de Green $G(x,\ y)$ de sistemas quânticos em termos de integrais sobre o conjunto $\mathcal{C}_{x,\ y}$ de todas as curvas contínuas no espaço que conectam x a y. Na Teoria Quântica de Campos, o análogo das integrais de Feynman é ainda mais abstrato e envolve integrais sobre conjuntos de distribuições[5]. Como se percebe, tais aplicações requerem muito mais que definir a noção de integral como "área" ou "volume sob um gráfico".

Tentativas informais de caracterizar a noção de integral são tão antigas quanto o Cálculo. Leibniz tentou definir integrais e derivadas a partir da noção de infinitésimos. A noção de infinitésimos carece de respaldo matemático mas, como outras ideias filosófico-especulativas infelizes do passado, estende sua perversa influência até o presente, causando em alguns, especialmente em cursos de física e engenharia, uma compreensão falsa da noção de integral que impede o entendimento de outros desenvolvimentos. A noção de limite, que acabou por expurgar os infinitésimos da linguagem

[1] Sir Isaac Newton (1643–1727).
[2] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716).
[3] Arquimedes de Siracusa (ci. 287 A.C. – ci. 212 A.C.).
[4] Richard Phillips Feynman (1918–1988). A formulação da Mecânica Quântica em termos das *integrais funcionais de Feynman* surgiu em cerca de 1942.
[5] Para uma exposição introdutória sobre a integração funcional de Feynman na Mecânica Quântica, vide, por exemplo, [309], ou bons livros de Mecânica Quântica. Para a integração funcional de Feynman-Kac, definida no espaço-tempo Euclidiano, vide e.g. [149] ou [336, 337, 338, 339].

matemática, era praticamente desconhecida dos fundadores do Cálculo, tendo sido usada pela primeira vez em 1754 por d'Alembert[6] para definir a noção moderna de derivada.

Um dos primeiros passos importantes no sentido de dotar a noção de integral definida de fundamentos mais sólidos foi dado por Riemann[7] em 1854, em sua famosa tese de livre-docência[8]. A motivação de Riemann foi o estudo das séries de Fourier. Ao estudar condições que garantam um rápido decaimento dos coeficientes de Fourier de funções periódicas, Riemann deparou-se com a necessidade de caracterizar mais precisamente a noção de integrabilidade de funções ou, melhor dizendo, de caracterizar quais funções podem ser dotadas de uma integral. Um dos problemas com que Riemann se debateu foi demonstrar que o limite $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)e^{-i\lambda x}dx$ vale zero se f for contínua por partes. Esse fato é importante para a teoria das séries de Fourier e sua demonstração original, que pode ser acompanhada, por exemplo, em [128], requer compreender a integral como limite de somas de Riemann (a serem definidas abaixo). Nestas Notas apresentamos no Teorema 36.10, página 1836, uma versão ainda mais geral, conhecida como Lema de Riemann-Lebesgue, válida no caso menos restritivo em que f é apenas integrável no sentido de Lebesgue.

A noção de integrabilidade de Riemann, que será recordada abaixo, é a primeira a ser ensinada em (bons) cursos de Cálculo mas, como discutiremos mais adiante, também não é plenamente satisfatória. Para a grande maioria dos propósitos modernos, a noção mais satisfatória de integrabilidade é a de Lebesgue, que também apresentaremos adiante. É dessa noção de integral que emergem os desenvolvimentos mais importantes, na teoria das séries de Fourier, dos espaços de Banach e de Hilbert etc. Adiantamos que no caso de funções limitadas reais definidas em conjuntos compactos da reta real, as integrais de Riemann e de Lebesgue coincidem. Nesse sentido, a integração de Lebesgue estende a de Riemann. Trataremos disso de modo mais preciso nos Teoremas 31.2 e 31.3, da Seção 31.3.3, página 1483.

Nesse momento é conveniente que encerremos esse palavreado preliminar e elevemos a discussão a um nível mais sólido.

31.2 A Integração no Sentido de Riemann

Na presente seção recapitularemos um pouco, mas em um nível talvez mais avançado, da teoria da integração de Riemann no intuito de preparar a discussão, que lhe seguirá, concernente à noção de integral de Lebesgue. Apresentaremos apenas as definições e os resultados estruturais mais relevantes. Tendo em vista outras aplicações (vide, por exemplo, o tratamento do Teorema da Função Implícita em espaços de Banach da Seção 25.3, página 1335), nosso intuito é também o de apresentar a noção de integral de Riemann de modo a permitir sua extensão para funções de uma variável real assumindo valores em um espaço de Banach. Essa preocupação, ainda que sem maior importância para a abordagem da teoria de integração de Lebesgue, subjaz boa parte dos tratamento da integração de Riemann que se segue.

Por simplicidade, restringiremos nossa discussão aqui a funções de uma variável real. A definição de integral de Riemann é feita inicialmente em intervalos fechados $[a,\ b]$ finitos, ou seja, com $-\infty < a < b < \infty$. Integrais de Riemann em intervalos não-finitos são definidas posteriormente (Seção 31.2.1, página 1465), tomando-se limites de integrais em intervalos finitos, caso esses limites existam. Seguiremos parcialmente a exposição de [181], mas com uma organização distinta de ideias e com a adição de alguns detalhes nas demonstrações. Aquela referência também apresenta diversas extensões da teoria aqui apresentada as quais omitiremos, por pertencerem mais propriamente a um texto sobre Cálculo Diferencial e fora, portanto, das pretensões gerais do presente capítulo.

• **Partições**

Importante para a definição da integral de Riemann é a noção de *partição* de um intervalo compacto $[a,\ b]$, com $a < b$. Trata-se de um conjunto finito de pontos $\{x_1,\ \ldots,\ x_n\}$ satisfazendo $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, o número n podendo ser arbitrário, com $n \geq 2$.

O conjunto de todas as partições possíveis (com número de pontos arbitrário) de um intervalo compacto $[a,\ b]$ será denotado por $\mathfrak{P}([a,\ b])$, ou simplesmente $\mathfrak{P}$, se $[a,\ b]$ estiver subentendido. Uma partição particular será denotada por $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}([a,\ b])$.

A cada partição $\mathcal{P} = \{x_1,\ \ldots,\ x_n\} \in \mathfrak{P}([a,\ b])$, com n pontos, estão associados $n-1$ intervalos fechados $I_1,\ \ldots,\ I_{n-1}$,

[6] Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783).
[7] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866).
[8] "Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe". Publidada em 1867.

sendo $I_k = [x_k, \; x_{k+1}]$. Denotaremos por $|I_k|$ o comprimento do k-ésimo intervalo: $|I_k| := x_{k+1} - x_k$.

Outra noção útil é a de *fineza de uma partição* $\mathcal{P}$, denotada por $|\mathcal{P}|$. Se $\mathcal{P} = \{x_1, \; \ldots, \; x_n\} \in \mathfrak{P}([a, \; b])$ definimos $|\mathcal{P}| := \max\{|I_1|, \; \ldots, \; |I_{n-1}|\}$. Assim, $|\mathcal{P}|$ é o máximo comprimento dos intervalos definidos por $\mathcal{P}$ em $[a, \; b]$.

Podemos fazer de $\mathfrak{P}([a, \; b])$ um conjunto dirigido[9], definindo a seguinte relação de pré-ordenamento: $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}'$ se $|\mathcal{P}| \geq |\mathcal{P}'|$.

Note-se que se particularmente $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, então $|\mathcal{P}| \geq |\mathcal{P}'|$ e, portanto, $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}'$.

E. 31.1 *Exercício*. Mostre que isso define uma relação de pré-ordenamento em $\mathfrak{P}([a, \; b])$ e que isso faz de $\mathfrak{P}([a, \; b])$ um conjunto dirigido. ✠

Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ são duas partições de $[a, \; b]$ dizemos que $\mathcal{P}'$ é um *refinamento* de $\mathcal{P}$ (ou que $\mathcal{P}'$ é *mais fina* que $\mathcal{P}$) se $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}'$. Assim, $\mathcal{P}'$ é *mais fina* que $\mathcal{P}$ se o maior intervalo de $\mathcal{P}'$ tiver comprimento menor que o maior intervalo de $\mathcal{P}$.

Se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são duas partições de $[a, \; b]$, então é evidente que $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ é um refinamento de $\mathcal{P}_1$ e de $\mathcal{P}_2$.

• Partições indexadas

Dada uma partição $\mathcal{P} = \{x_1, \; \ldots, \; x_n\} \in \mathfrak{P}([a, \; b])$ com n pontos, podemos associar à mesma um conjunto χ de $n-1$ pontos $\chi = \{\chi_1, \; \ldots, \; \chi_{n-1}\}$, com $a \leq \chi_1 \leq \cdots \leq \chi_{n-1} \leq b$, escolhendo $\chi_k \in I_k$, $k = 1, \; \ldots, \; n-1$, ou seja, escolhendo cada χ_k no k-ésimo intervalo fechado da partição $\mathcal{P}$. Se χ é associado a $\mathcal{P}$ da forma descrita acima, denotamos esse fato em símbolos por $\chi \propto \mathcal{P}$. Um par $(\mathcal{P}, \; \chi)$ com $\chi \propto \mathcal{P}$ é dito ser uma *partição indexada* de $[a, \; b]$, os "índices" sendo os pontos χ_k associados a cada intervalo I_k. Denotaremos por $\mathfrak{X}([a, \; b])$ coleção formada por todas as partições indexadas de $[a, \; b]$:

$$\mathfrak{X}([a, \; b]) \; := \; \big\{(\mathcal{P}, \; \chi) \text{ com } \mathcal{P} \in \mathfrak{P}([a, \; b]) \text{ e } \chi \propto \mathcal{P}\big\} \; .$$

Tal como $\mathfrak{P}([a, \; b])$, o conjunto $\mathfrak{X}([a, \; b])$ é também um conjunto dirigido se definirmos a relação de pré-ordenamento $(\mathcal{P}, \; \chi) \prec (\mathcal{P}', \; \chi')$ se $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}'$, ou seja, se $|\mathcal{P}| \geq |\mathcal{P}'|$ (independentemente de χ e χ'!).

E. 31.2 *Exercício*. Mostre que isso define uma relação de pré-ordenamento em $\mathfrak{X}([a, \; b])$ e que isso faz de $\mathfrak{X}([a, \; b])$ um conjunto dirigido. ✠

• Somas de Riemann. Integrabilidade de Riemann

Dada uma função real limitada f, definida em $[a, \; b]$, e dado um par $(\mathcal{P}, \; \chi) \in \mathfrak{X}([a, \; b])$, com $\mathcal{P} = \{x_1, \; \ldots, \; x_n\}$ e $\chi = \{\chi_1, \; \ldots, \; \chi_{n-1}\}$, $\chi_k \in I_k$, $k = 1, \; \ldots, \; n-1$, definimos a *soma de Riemann* de f associada ao par $(\mathcal{P}, \; \chi)$, denotada por $S\big[(\mathcal{P}, \; \chi), \; f\big]$, como

$$S\big[(\mathcal{P}, \; \chi), \; f\big] \; := \; \sum_{k=1}^{n-1} f(\chi_k)|I_k| \; .$$

Vide Figura 31.1.

Para f fixa, a aplicação $\mathfrak{X}([a, \; b]) \ni (\mathcal{P}, \; \chi) \mapsto S\big[(\mathcal{P}, \; \chi), \; f\big] \in \mathbb{R}$ é uma rede[10] segundo o pré-ordenamento $\prec$. Podemos, assim, perguntar-nos se essa rede possui pontos de acumulação e pontos limite.

Notemos que, como a topologia usualmente adotada em $\mathbb{R}$ (a topologia métrica usual) é do tipo Hausdorff, se essa rede possuir um ponto limite, o mesmo é único (pela Proposição 30.5, página 1442).

Essa questão nos conduz à seguinte definição:

Definição. Integrabilidade de Riemann Ia Uma função limitada $f : [a, \; b] \to \mathbb{R}$ é dita ser uma *função integrável por Riemann* no intervalo compacto $[a, \; b]$ se a rede $\mathfrak{X}([a, \; b]) \ni (\mathcal{P}, \; \chi) \mapsto S\big[(\mathcal{P}, \; \chi), \; f\big] \in \mathbb{R}$ possuir um ponto limite $S(f) \in \mathbb{R}$. ♠

Se $f : [a, \; b] \to \mathbb{R}$ for integrável por Riemann no intervalo compacto $[a, \; b]$ o limite $S(f)$ é denominado *integral de Riemann* de f em $[a, \; b]$. Como é bem conhecido, a integral de Riemann de f em $[a, \; b]$ é mais frequentemente denotada[11]

[9] Para a definição, vide página 56.
[10] A definição de rede encontra-se à página 1440. Note que $\mathfrak{X}([a, \; b])$ é um conjunto dirigido, pelo comentado acima.
[11] O símbolo $\int$ foi introduzido por Leibniz, sendo uma estilização da letra S, de "soma".

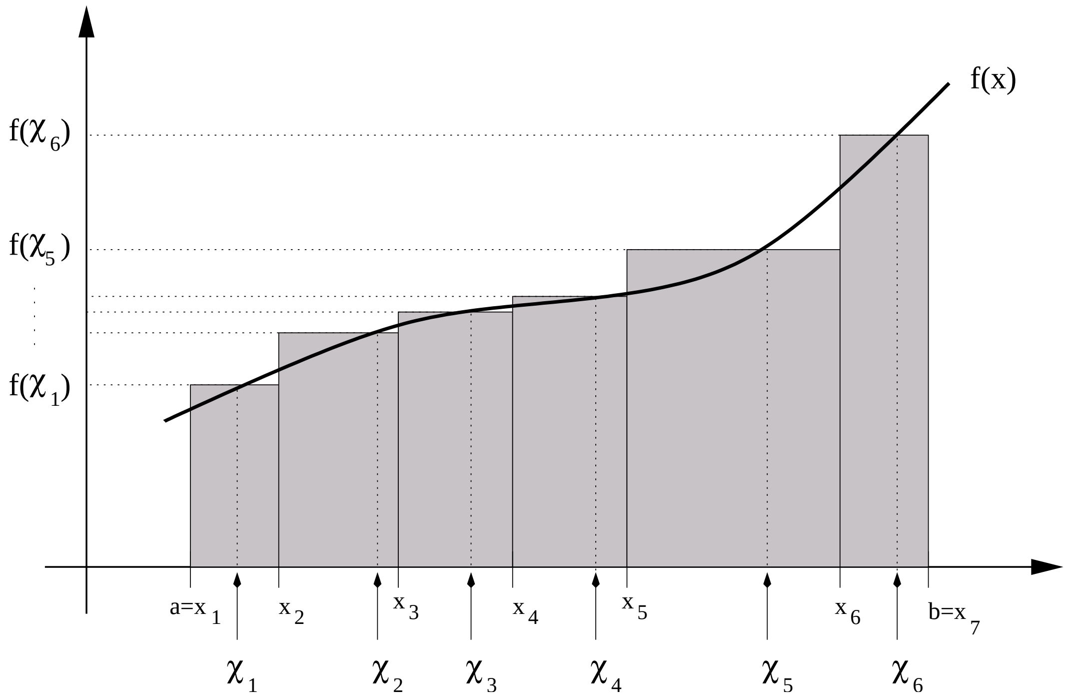

Figura 31.1: Representação da soma de Riemann de uma função f no intervalo $[a,\ b]$ com a partição $\mathcal{P} = \{a = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 = b\}$, com os pontos intermediários $\chi = \{\chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3,\ \chi_4,\ \chi_5,\ \chi_6\}$. O k-ésimo retângulo tem altura $f(\chi_k)$ e largura $|I_k| = x_{k+1} - x_k$. A soma das áreas desses retângulos fornece $S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big]$.

por $\int_a^b f(x)\,dx$, ou seja,

$$S(f) \ \equiv \ \int_a^b f(x)\,dx \ . \tag{31.2}$$

Nota. Uma possibilidade alternativa seria prover $\mathfrak{P}([a,\ b])$ (e, portanto, $\mathfrak{X}([a,\ b])$) de um outro pré-ordenamento, definido pela inclusão, definindo $\mathcal{P} \prec_o \mathcal{P}'$ se $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$. Essa definição pode ser também utilizada e conduz a uma outra definição equivalente à Ia acima (que denominamos definição III), da qual tratamos à página 1463 e seguintes. Vide também Apêndice 31.A.1, página 1498. ♣

• **Integrabilidade de Riemann. Formulações e critérios alternativos**

Para tornar a definição Ia um pouco mais palpável, vamos reformulá-la um pouco lembrando a definição de ponto limite de uma rede da Seção 30.3, página 1440. Dizemos que $S(f) \in \mathbb{R}$ é um ponto limite da rede $\mathfrak{X}([a,\ b]) \ni (\mathcal{P},\ \chi) \mapsto S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] \in \mathbb{R}$, se para todo $\epsilon > 0$ existir um par $(\mathcal{P}_\epsilon,\ \chi_\epsilon) \in \mathfrak{X}([a,\ b])$ tal que $S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big]$ pertence ao intervalo aberto $(S(f) - \epsilon,\ \ S(f) + \epsilon)$ para todo par $(\mathcal{P},\ \chi) \in \mathfrak{X}([a,\ b])$ tal que $(\mathcal{P},\ \chi) \succ (\mathcal{P}_\epsilon,\ \chi_\epsilon)$. Chegamos à seguinte definição equivalente alternativa para a noção de integrabilidade de Riemann:

Definição. Integrabilidade de Riemann Ib Uma função limitada $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ é dita ser integrável por Riemann se existir $S(f) \in \mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: para todo $\epsilon > 0$ existe $(\mathcal{P}_\epsilon,\ \chi_\epsilon) \in \mathfrak{X}([a,\ b])$ tal que $\Big|S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] - S(f)\Big| < \epsilon$ para todo $(\mathcal{P},\ \chi)$ com $(\mathcal{P},\ \chi) \succ (\mathcal{P}_\epsilon,\ \chi_\epsilon)$. ♠

Em palavras, uma função f é integrável no sentido de Riemann se o processo de "refinamento" de partições, fazendo-as incluir mais e mais pontos com espaçamentos cada vez menores, conduzir a um limite único das somas de Riemann. A integral de Riemann de f é então esse limite das somas das áreas dos retângulos descritos na Figura 31.1, para quando as partições são feitas cada vez mais finas.

A definição Ib acima pode ainda ser refraseada de uma forma ligeiramente mais concreta:

Definição. Integrabilidade de Riemann Ic Uma função limitada $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ é dita ter uma integrável por

Riemann se existir $S(f) \in \mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que $\Big|S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] - S(f)\Big| < \epsilon$ para toda partição $\mathcal{P}$ tal que $|\mathcal{P}| \leq \delta_\epsilon$. ♠

Pela Proposição 30.6, página 1443, a rede $\mathfrak{X}([a,\ b]) \ni (\mathcal{P},\ \chi) \mapsto S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] \in \mathbb{R}$ possui um ponto limite se e somente se for uma rede de Cauchy[12]. Assim, o critério de Integrabilidade de Riemann Ia pode ser equivalentemente reformulado da seguinte forma:

Definição. Integrabilidade de Riemann Id Uma função limitada $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ é dita ser uma *função integrável por Riemann* no intervalo compacto $[a,\ b]$ se a rede $\mathfrak{X}([a,\ b]) \ni (\mathcal{P},\ \chi) \mapsto S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] \in \mathbb{R}$ for uma rede de Cauchy, ou seja, se para todo $\epsilon > 0$ existir $(\mathcal{P}_\epsilon,\ \chi_\epsilon)$ tal que $\Big|S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] - S\big[(\mathcal{P}',\ \chi'),\ f\big]\Big| < \epsilon$ para todos $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ com $\mathcal{P} \succ \mathcal{P}_\epsilon$ e $\mathcal{P}' \succ \mathcal{P}_\epsilon$. ♠

Como as condições $\mathcal{P} \succ \mathcal{P}_\epsilon$ e $\mathcal{P}' \succ \mathcal{P}_\epsilon$ equivalem a $|\mathcal{P}| < |\mathcal{P}_\epsilon|$ e $|\mathcal{P}'| < |\mathcal{P}_\epsilon|$, podemos ainda apresentar a seguinte reformulação equivalente:

Definição. Integrabilidade de Riemann Ie Uma função limitada $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ é dita ser *função integrável por Riemann* no intervalo compacto $[a,\ b]$ se a rede $\mathfrak{X}([a,\ b]) \ni (\mathcal{P},\ \chi) \mapsto S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] \in \mathbb{R}$ for uma rede de Cauchy, ou seja, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta_\epsilon > 0$ tal que $\Big|S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] - S\big[(\mathcal{P}',\ \chi'),\ f\big]\Big| < \epsilon$ para todos $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ com $|\mathcal{P}| \leq \delta_\epsilon$ e $|\mathcal{P}'| \leq \delta_\epsilon$. ♠

Enfatizamos que todas as definições acima, de Ia a Ie, são equivalentes, sendo apenas refraseamentos umas das outras com respeito à noção de convergência de redes.

• Funções contínuas são integráveis por Riemann

Até o momento não apresentamos exemplos de funções integráveis por Riemann. Vamos agora fechar parcialmente essa lacuna, exibindo uma classe importante de funções que satisfazem o critério de integrabilidade de Riemann Id. Uma visão completa de quais funções são integráveis por Riemann é fornecida pelo critério de Lebesgue, discutido brevemente à página 1464.

Proposição 31.1 *Toda função real contínua definida em um intervalo compacto $[a,\ b]$ é integrável por Riemann.* □

Para a demonstração[13], necessitamos do seguinte lema:

Lema 31.1 *Seja f real contínua definida em um intervalo compacto $[a,\ b]$. Seja $\mathcal{P} = \{x_1,\ \ldots,\ x_n\} \in \mathfrak{P}([a,\ b])$ uma partição de $[a,\ b]$ com n pontos à qual estão associados $n-1$ intervalos fechados $I_1,\ \ldots,\ I_{n-1}$, com $I_k = [x_k,\ x_{k+1}]$. Se $\mathcal{P}' \in \mathfrak{P}([a,\ b])$ é uma segunda partição tal que $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, então*

$$\Big|S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] - S\big[(\mathcal{P}',\ \chi'),\ f\big]\Big| \ \leq\ \mathsf{W}(f,\ \mathcal{P})\ |b-a| \tag{31.3}$$

para quaisquer χ e χ', onde

$$\mathsf{W}(f,\ \mathcal{P}) \ :=\ \max_{k=1,\ \ldots,\ n-1}\left\{\sup_{x,\ y \in I_k} |f(x) - f(y)|\right\}\ . \tag{31.4}$$

□

Prova. À partição $\mathcal{P}' = \{x_1',\ \ldots,\ x_m'\} \in \mathfrak{P}([a,\ b])$, com m pontos, estão associados $m-1$ intervalos fechados $I_1',\ \ldots,\ I_{m-1}'$, sendo $I_k' = [x_k',\ x_{k+1}']$. Como $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, o intervalo I_1 é a união de, digamos, l intervalos de $\mathcal{P}'$: $I_1 = I_1' \cup \cdots \cup I_l'$. Assim, $|I_1| = \sum_{a=1}^{l} |I_a'|$ e

$$f(\chi_1)|I_1| - \sum_{a=1}^{l} f(\chi_a')|I_a'| \ =\ \sum_{a=1}^{l}\big(f(\chi_1) - f(\chi_a')\big)\ |I_a'|\ ,$$

[12] Isso é sempre verdade se f assume valores em um espaço métrico completo.

[13] Seguiremos basicamente [181].

o que evidentemente implica

$$\left|f(\chi_1)|I_1| - \sum_{a=1}^{l} f(\chi'_a)|I'_a|\right| \leq \sum_{a=1}^{l} \left|f(\chi_1) - f(\chi'_a)\right| |I'_a| \leq \left(\sup_{x,\ y \in I_1} |f(x) - f(y)|\right) \sum_{a=1}^{l} |I'_a|$$

$$= \left(\sup_{x,\ y\in I_1} |f(x) - f(y)|\right) |I_1| \leq \mathsf{W}(f,\ \mathcal{P})\,|I_1| \ .$$

Na segunda desigualdade usamos simplesmente o fato que cada χ_a pertence a I_1. Como o mesmo raciocínio aplica-se aos demais subintervalos de $\mathcal{P}$, segue imediatamente a validade de (31.3). ■

Prova da Proposição 31.1. Por um resultado bem conhecido (Teorema 32.12, página 1555), toda função contínua f definida em um intervalo compacto $[a,\ b]$ é *uniformemente contínua*, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ sempre que x e y encontrem-se ambos em algum subintervalo de $[a,\ b]$ que tenha largura menor que δ.

Fixado um $\epsilon > 0$, sejam $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ duas partições tais que $|\mathcal{P}_1| < \delta$ e $|\mathcal{P}_2| < \delta$. Seja $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Evidentemente valem $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}'$. Pelo Lema 31.1 teremos

$$\left|S\big[(\mathcal{P}_1,\ \chi_1),\ f\big] - S\big[(\mathcal{P}',\ \chi),\ f\big]\right| \leq \mathsf{W}(f,\ \mathcal{P}_1)\,|b-a| < \epsilon\,|b-a|\ ,$$

$$\left|S\big[(\mathcal{P}_2,\ \chi_2),\ f\big] - S\big[(\mathcal{P}',\ \chi),\ f\big]\right| \leq \mathsf{W}(f,\ \mathcal{P}_2)\,|b-a| < \epsilon\,|b-a|\ .$$

Acima, usamos os fatos que $\mathsf{W}(f,\ \mathcal{P}_1) < \epsilon$ e $\mathsf{W}(f,\ \mathcal{P}_2) < \epsilon$, pois cada intervalo de $\mathcal{P}_1$ e de $\mathcal{P}_2$ tem largura menor que δ. Logo,

$$\left|S\big[(\mathcal{P}_1,\ \chi_1),\ f\big] - S\big[(\mathcal{P}_2,\ \chi_2),\ f\big]\right| \leq \left|S\big[(\mathcal{P}_1,\ \chi_1),\ f\big] - S\big[(\mathcal{P}',\ \chi),\ f\big]\right| + \left|S\big[(\mathcal{P}_2,\ \chi_2),\ f\big] - S\big[(\mathcal{P}',\ \chi),\ f\big]\right| < 2\epsilon\,|b-a|\ .$$

Com isso vemos que o critério Id de integrabilidade de Riemann é satisfeito, que é o que queríamos demonstrar. ■

O seguinte corolário é imediato e sua prova é deixada como exercício.

Corolário 31.1 *Toda função real contínua por partes*[14] *e limitada definida em um intervalo compacto* $[a,\ b]$ *é integrável por Riemann.* □

Esse fato é importante, pois a grande parte, se não a totalidade, das funções encontradas na prática das ciências naturais e da engenharia é formada por funções contínuas ou contínuas por partes. No Exercício E. 31.6, página 1464, adiante, exibimos um exemplo de uma função que não é contínua por partes mas é integrável por Riemann.

• Funções com valores em espaços de Banach. Integrabilidade de Riemann

Até o momento tratamos apenas de caracterizar a noção de integral de Riemann para funções definidas em conjuntos compactos $[a,\ b]$ assumindo valores reais. O estudante é convidado a constatar, no entanto, que as construções acima (incluindo a Proposição 31.1) permanecem inalteradas se as funções consideradas assumirem valores em espaços de Banach.

Se $\mathfrak{B}$ é um espaço de Banach e $f : [a,\ b] \to \mathfrak{B}$ é uma função assumindo valores em $\mathfrak{B}$, a soma de Riemann de f associada ao par $(\mathcal{P},\ \chi)$ é analogamente definida por

$$S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] := \sum_{k=1}^{n-1} f(\chi_k)|I_k| \in \mathfrak{B}. \tag{31.5}$$

Temos, assim:

[14] Para a definição geral de continuidade por partes, vide página 1449.

Definição. Integrabilidade de Riemann para espaços de Banach Seja $\mathfrak{B}$ um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$. Uma função limitada $f : [a, b] \to \mathfrak{B}$ é dita ser uma *função integrável por Riemann* no intervalo compacto $[a, b]$ se a rede $\mathfrak{X}([a, b]) \ni (\mathcal{P}, \chi) \mapsto S\big[(\mathcal{P}, \chi), f\big] \in \mathfrak{B}$ for uma rede de Cauchy, ou seja, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\mathcal{P}_\epsilon$ tal que $\Big\|S\big[(\mathcal{P}, \chi), f\big] - S\big[(\mathcal{P}_\epsilon, \chi'), f\big]\Big\|_{\mathfrak{B}} < \epsilon$ para todo $\mathcal{P}$ com $\mathcal{P}_\epsilon \prec \mathcal{P}$. ♠

Tem-se, analogamente, a importante

Proposição 31.2 *Toda função contínua definida em um intervalo compacto $[a, b]$ e assumindo valores em um espaço de Banach é integrável por Riemann.* □

A demonstração repete os mesmos passos da demonstração da Proposição 31.1 se substituirmos os módulos das funções e das somas de Riemann por normas em espaços de Banach.

Alguns desenvolvimentos sobre a integração e diferenciação de funções assumindo valores em espaços de Banach serão apresentados na Seção 31.2.2, página 1467.

• **Somas de Darboux**

Os critérios de integrabilidade que apresentamos acima são essencialmente aqueles apresentados por Riemann em 1854. Da maneira como os formulamos, podemos aplicá-los para definir a noção de integral (de Riemann) mesmo para funções definidas em intervalos compactos $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mas que assumam valores em espaços de Banach. Uma desvantagem dos critérios de integrabilidade acima é a de fazerem o uso da noção de rede e pontos limite de redes, que talvez não sejam intuitivas para todos. Felizmente, no caso de funções reais, há uma outra caracterização da noção de integrabilidade de Riemann, devida a Darboux[15], que é mais transparente e prescinde dessas noções. Trataremos disso agora.

Dada uma função real limitada f, definida em $[a, b]$ e dada uma partição $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}([a, b])$, com $\mathcal{P} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, definimos as *somas de Darboux* (inferior e superior) de f no intervalo $[a, b]$, associadas à $\mathcal{P}$ por

$$D_i[\mathcal{P}, f] := \sum_{k=1}^{n-1}\left(\inf_{y\in I_k} f(y)\right)|I_k| \qquad \text{e} \qquad D_s[\mathcal{P}, f] := \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sup_{y\in I_k} f(y)\right)|I_k| , \tag{31.6}$$

respectivamente. Vide Figura 31.2.

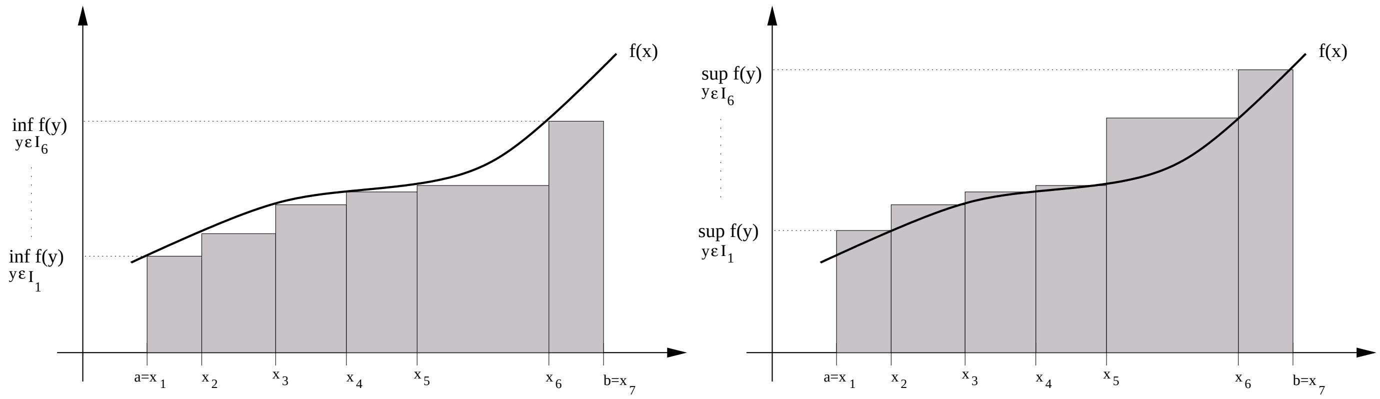

Figura 31.2: Representação das somas de Darboux da mesma função e da mesma partição da Fig. 31.1. A soma das áreas dos retângulos à esquerda fornece $D_i[\mathcal{P}, f]$ e a soma das áreas dos retângulos à direita fornece $D_s[\mathcal{P}, f]$.

É evidente pela definição que $D_i[\mathcal{P}, f] \leq D_s[\mathcal{P}, f]$ para qualquer partição $\mathcal{P}$. Fora isso, tem-se também os fatos compreendidos nos seguintes exercícios:

E. 31.3 *Exercício*. Mostre que para partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}' \in \mathfrak{P}([a, b])$ com $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ tem-se $D_i[\mathcal{P}, f] \leq D_i[\mathcal{P}', f]$ e $D_s[\mathcal{P}, f] \geq D_s[\mathcal{P}', f]$. Sugere-se provar isso por indução no número de pontos da partição. ✠

[15]Jean Gaston Darboux (1842–1917). O trabalho de Darboux sobre a integral de Riemann data de 1875.

E. 31.4 *Exercício*. Mostre que para quaisquer partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}' \in \mathfrak{P}([a,\ b])$ tem-se $D_i[\mathcal{P},\ f] \leq D_s[\mathcal{P}',\ f]$. Sugestão: use as afirmações do Exercício E. 31.3 e os fatos que $\mathcal{P} \subset \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$. ✣

E. 31.5 *Exercício*. Mostre que para partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}' \in \mathfrak{P}([a,\ b])$ com $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ tem-se $D_s[\mathcal{P}',\ f] - D_i[\mathcal{P}',\ f] \leq D_s[\mathcal{P},\ f] - D_i[\mathcal{P},\ f]$. Sugestão: isso segue facilmente dos Exercícios E. 31.3 e E. 31.4. ✣

O exercício E. 31.3 sugere a seguinte definição. Definimos as *integrais de Darboux* (inferior e superior) de f no intervalo $[a,\ b]$ por

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}([a,\ b])} D_i[\mathcal{P},\ f] \qquad \text{e} \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}([a,\ b])} D_s[\mathcal{P},\ f] \ ,$$

respectivamente. O fato estabelecido no exercício E. 31.4 acima que $D_i[\mathcal{P},\ f] \leq D_s[\mathcal{P}',\ f]$ para quaisquer partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}' \in \mathfrak{P}([a,\ b])$ implica (por quê?)

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \ . \tag{31.7}$$

Tudo isso sugere a seguinte definição.

Definição. Integrabilidade de Riemann II Uma função limitada f é dita ser uma *função integrável por Riemann* no intervalo compacto $[a,\ b]$ se $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Nesse caso a integral de f no intervalo $[a,\ b]$ é definida por

$$D(f) := \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \ . \tag{31.8}$$

A integral definida em (31.8) é por vezes denominada *integral de Darboux*. Como veremos (Proposição 31.4), essa integral coincide com a integral $S(f)$ anteriormente definida. Por isso, $D(f)$ será também denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$. ♠

A seguinte proposição é relevante no contexto dessa definição:

Proposição 31.3 *Seja f uma função real limitada no intervalo compacto $[a,\ b]$. Então, f é integrável no sentido da definição II se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existir uma partição $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}([a,\ b])$ tal que $D_s[\mathcal{P},\ f] - D_i[\mathcal{P},\ f] < \epsilon$.* □

A demonstração da Proposição 31.3 é apresentada na Seção 31.A, página 1497. Na mesma seção demonstramos também a seguinte proposição importante, que estabelece a equivalência das definições I e da definição II, acima:

Proposição 31.4 *Uma função real limitada f, definida em um intervalo compacto $[a,\ b]$, é integrável no sentido das definições I se e somente se o for no sentido da definição II. Em ambos os casos as integrais definidas por (31.2) e por (31.8) coincidem.* □

• Rede de Riemann-Darboux

Na definições Ia–Ie da integrabilidade de Riemann provemos a coleção de partições $\mathfrak{P}([a,\ b])$ com um pré-ordenamento, definindo $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}'$ se $|\mathcal{P}| \geq |\mathcal{P}'|$. Uma outra possibilidade é considerar em $\mathfrak{P}([a,\ b])$ o pré-ordenamento definido pela inclusão, definindo $\mathcal{P} \prec_o \mathcal{P}'$ se $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$. Com relação a esse pré-ordenamento $\prec_o$ as coleções $\mathfrak{P}([a,\ b])$ e $\mathfrak{X}([a,\ b])$ são também conjuntos dirigidos e a aplicação $\mathfrak{X}([a,\ b]) \ni (\mathcal{P},\ \chi) \mapsto S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] \in \mathbb{R}$ é também uma rede, dita por alguns autores ser uma *rede de Riemann-Darboux*. Com a mesma podemos estabelecer mais um critério de integrabilidade.

Definição. Integrabilidade de Riemann III Uma função limitada $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ é dita ser uma *função integrável por Riemann* no intervalo compacto $[a,\ b]$ se a rede (em relação ao pré-ordemento $\prec_o$) $\mathfrak{X}([a,\ b]) \ni (\mathcal{P},\ \chi) \mapsto S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] \in \mathbb{R}$ possuir um ponto limite $S(f) \in \mathbb{R}$. ♠

A definição acima equivale à definição II (e, portanto, às definições I) da noção de integrabilidade de Riemann. Por ser bastante técnica e sem relevância especial para o que segue, apresentamos a demonstração dessa afirmação não aqui, mas no Apêndice 31.A.1, página 1498.

• **Critério de Lebesgue para integrabilidade de Riemann**

Há uma caracterização da integrabilidade de Riemann, devida a Lebesgue, que permite precisar quais funções são integráveis no sentido de Riemann:

Critério de Lebesgue para integrabilidade de Riemann. Uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável no sentido de Riemann se e somente se for contínua quase em toda parte (em relação à medida de Lebesgue), ou seja, se a coleção de pontos onde f é descontínua tiver medida de Lebesgue nula.

Não apresentaremos a demonstração desse fato aqui (vide [181]). Uma consequência desse critério (que também pode ser obtida por meios mais diretos, como vimos acima) é que toda função limitada e contínua por partes[16] é integrável no sentido de Riemann.

É curioso e relevante observar também que não são apenas as funções contínuas por partes que são integráveis no sentido de Riemann. O seguinte exercício ilustra isso.

E. 31.6 *Exercício-desafio*. Aqui vamos designar números racionais r na forma $r = p/q$, supondo p e q primos entre si. Seja a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{q}, & \text{se } x = \dfrac{p}{q} \text{ for racional} \\ 1, & \text{se } x \text{ for irracional} \end{cases} .$$

Mostre que f é contínua em x se x for irracional mas que f é descontínua em x se x for racional. Sugestão: lembre que se x é irracional, então para toda sequência p_n/q_n de racionais que aproxima x tem-se que $q_n \to \infty$ para $n \to \infty$.

Como os racionais têm medida de Lebesgue zero, segue pelo critério de Lebesgue que f é integrável de Riemann. Prove diretamente da definição que $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = b - a$ para todos $a < b$. Note que o fato que $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = b - a$ é evidente, a dificuldade está em provar que $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = b - a$. ✣

• **Deficiências da integral de Riemann**

As noções de função integrável no sentido de Riemann e de integral de Riemann que apresentamos acima são a base de todo o Cálculo elementar e delas se extrai uma série de consequências bem conhecidas e que não repetiremos aqui, tais como a linearidade da integral, o teorema fundamental do cálculo, métodos de integração (como a integração por partes) etc. Para uma ampla exposição, vide e.g. [266]-[267]. A integral de Riemann, porém, possui algumas deficiências que ilustraremos abaixo. Essas deficiências conduziram à procura de uma noção mais forte de integrabilidade, da qual falaremos posteriormente.

Seja $[a, b]$, $a < b$, um intervalo compacto e considere-se a seguinte função $D : [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ for racional}, \\ 1, & \text{se } x \text{ for irracional}. \end{cases} \tag{31.9}$$

Será essa função integrável em $[a, b]$ sentido de Riemann? A resposta é não, pois como facilmente se constata,

$$\underline{\int_a^b} D(x)\,dx = 0 \qquad \text{mas} \qquad \overline{\int_a^b} D(x)\,dx = b - a,$$

já que, para qualquer subintervalo $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ de qualquer partição de $[a, b]$ teremos

$$\inf_{y \in I_k} D(y) = 0 \qquad \text{mas} \qquad \sup_{y \in I_k} D(y) = 1 ,$$

pois I_k sempre conterá números racionais e irracionais. Assim, aprendemos que há funções limitadas que não são integráveis no sentido de Riemann. Esse exemplo, porém, ilustra um outro problema de consequências piores.

Seja o conjunto $\mathcal{Q} = \mathbb{Q} \cap [a, b]$ de todos os racionais do intervalo $[a, b]$. Como esse conjunto é contável, podemos representá-lo como $\mathcal{Q} = \{r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots\} = \{r_k, k \in \mathbb{N}\}$, onde $\mathbb{N} \ni k \to r_k \in \mathcal{Q}$ é uma contagem de $\mathcal{Q}$. Seja definida

[16] Lembremos: uma função é dita ser uma *função contínua por partes* se for descontínua apenas em um número finito de pontos.

agora a seguinte sequência de funções:

$$D_n(x) \;=\; \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \{r_1,\;\ldots,\;r_n\}\;, \\ \\ 1, & \text{de outra forma.} \end{cases}$$

É fácil ver que para todo $x \in [a,\; b]$ tem-se $D(x) = \lim_{n\to\infty} D_n(x)$, onde D está definida em (31.9). Cada função D_n é integrável no sentido de Riemann, pois é contínua por partes, sendo descontínua apenas nos pontos do conjunto finito $\{r_1,\;\ldots,\;r_n\}$. É muito fácil ver que $\int_a^b D_n(x)\,dx = b - a$ e assim, $\lim_{n\to\infty}\int_a^b D_n(x)\,dx = b-a$. Entretanto, trocar a integral pelo limite $\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} D_n(x)\right)\,dx$ não faz sentido, pois a função $D(x) = \lim_{n\to\infty} D_n(x)$ não é integrável no sentido de Riemann.

A lição que se aprende disso é que a integração de Riemann não pode ser sempre cambiada com o limite pontual de funções[17]. Esse é um fato desagradável, que impede manipulações onde gostaríamos de poder trocar de ordem integrais e limites. O problema reside no fato de o critério de integração de Riemann não ser suficientemente flexível de modo a permitir integrar um conjunto suficientemente grande de funções ou, melhor dizendo, o conjunto das funções integráveis no sentido de Riemann não é grande o suficiente. Como vimos no critério de Lebesgue, só são integráveis no sentido de Riemann as funções que são contínuas quase em toda parte. Esse conjunto, que exclui funções como D, acaba sendo pequeno demais para dar liberdade a certas manipulações de interesse.

E. 31.7 *Exercício*. Por que D não é contínua quase em toda parte? Para responder isso, mostre que D não é contínua em nenhum ponto. Sugestão: recorde que todo x irracional pode ser aproximado por uma sequência de racionais e que todo x racional pode ser aproximado por uma sequência de irracionais. Mostre então que para qualquer x existem sequências x_n com $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, mas com $\lim_{n\to\infty} D(x_n) = D(x)$. ✠

Um outro problema, de outra natureza, diz respeito à propriedade de completeza da coleção das funções integráveis por Riemann. Tais conjuntos não formam espaços métricos completos em relação à métricas como $d_1(f,\; g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$. Como a propriedade de completeza é muito importante, faz-se necessário aumentar o conjunto de funções integráveis para obter essa propriedade. De fato, como veremos, o conjunto de funções integráveis no sentido de Lebesgue é completo e esse fato é importante na teoria dos espaços de Hilbert e de Banach.

31.2.1 A Integral de Riemann Imprópria

Vamos aqui tratar de definir a *integral de Riemann imprópria* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\;dx$ de uma função f definida em toda a reta real $\mathbb{R}$. De maneira intuitiva, essa integral deve ser definida como o limite de integrais $\int_a^b f(x)\;dx$ tomando a indo a $-\infty$ e b indo a ∞ de diversas formas, sem afetar o resultado.

Uma possibilidade provisória seria a seguinte definição. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função integrável por Riemann em cada intervalo $[a,\; b]$, poderíamos definir a integral de Riemann imprópria de f por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\;dx \;:=\; \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\;dx\;, \tag{31.10}$$

caso o limite exista. A definição provisória (31.10) apresenta, porém, um problema que requer alguns comentários. Em certos casos, pode ocorrer que o limite $\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,dx$ exista, mas não, por exemplo, o limite $\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A^2} f(x)\,dx$, ou outros. Tal é o caso da função $f(x) = x$. Tem-se aqui que $\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} x\,dx = 0$ mas $\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A^2} x\,dx$ diverge.

[17] A troca de ordem de integrais de Riemann e limites de sequências de funções é permitida, porém, se o limite for uniforme.

Por causa disso é insatisfatório tomar (31.10) como definição das integrais de Riemann impróprias. É prudente elaborar uma definição mais conservadora e que leve em conta o que pode acontecer em todas as integrais em intervalos $[a, b]$ quando $a \to -\infty$ e $b \to \infty$, independentemente. Isso é feito da seguinte forma.

Denotemos por $\mathcal{C}$ a coleção de todos os intervalos finitos $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Notando que os intervalos $[a, b]$ podem ser ordenados por inclusão, percebemos facilmente que $\mathcal{C}$ é um conjunto dirigido (vide definição à página 56).

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função fixa, integrável por Riemann em cada intervalo $[a, b]$. A aplicação $\mathcal{C} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F_{[a,\, b]} := \int_a^b f(x)\, dx \tag{31.11}$$

forma uma rede. O conceito de limite em relação a uma rede é bem definido (a noção de rede, limites de redes e suas propriedades foram estudadas na Seção 30.3, página 1440). Isso nos permite estabelecer a definição precisa de integral de Riemann imprópria.

Dizemos, que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, integrável por Riemann em cada intervalo $[a, b]$, *possui uma integral de Riemann imprópria* se a rede $F_{[a,\, b]}$, $[a, b] \in \mathcal{C}$ possuir um ponto limite (o qual será único, pois $\mathbb{R}$ é um espaço Hausdorff na topologia usual. Vide Proposição 30.5, página 1442).

Assim, f possui uma integral de Riemann imprópria se

$$\lim_{[a,\, b]\in\mathcal{C}} F_{[a,\, b]} = \lim_{[a,\, b]\in\mathcal{C}} \int_a^b f(x)\; dx$$

existir, o limite acima sendo o da rede, com os intervalos ordenados por inclusão. Se f tiver essa propriedade, definimos a *integral de Riemann imprópria* de f por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\; dx := \lim_{[a,\, b]\in\mathcal{C}} F_{[a,\, b]} = \lim_{[a,\, b]\in\mathcal{C}} \int_a^b f(x)\; dx\ .$$

Para tornar essa definição um pouco mais palpável, vamos reformulá-la um pouco lembrando a definição de ponto limite de uma rede da Seção 30.3, página 1440. Dizemos que $F \in \mathbb{R}$ é um ponto limite da rede $F_{[a,\, b]}$, $[a, b] \in \mathcal{C}$, se para todo $\epsilon > 0$ existir um intervalo $[A, B]$ tal que $F_{[a,\, b]} \in (F - \epsilon, F + \epsilon)$ para todo $[a, b] \supset [A, B]$.

Assim, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, integrável por Riemann em cada intervalo finito, é dita ter uma integral de Riemann imprópria $F \in \mathbb{R}$ se para todo $\epsilon > 0$ existir um intervalo $[A, B] \in \mathcal{C}$ tal que

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - F \right| < \epsilon$$

para todo $[a, b] \supset [A, B]$, $[a, b] \in \mathcal{C}$. O número F é denotado por $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

De maneira análoga definem-se as integrais de Riemann impróprias $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$, para $a \in \mathbb{R}$, finito, como os limites $\displaystyle\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)\, dx$ e $\displaystyle\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^a f(x)\, dx$, respectivamente, caso existam.

Notemos *en passant*, que na definição da integral de Riemann em intervalos finitos $[a, b]$, que apresentamos na Seção 31.2, página 1457, faz-se necessário supor que a função f seja limitada. Para a definição da integral de Riemann imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ isso não é necessário, e f pode divergir em $\pm\infty$, desde que o limite da integral exista! Um exemplo é a função $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(e^{x^3}\right)$, que não é limitada para $x \to +\infty$. Como facilmente se vê com a mudança de variáveis $u = e^{x^3}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \operatorname{sen}\left(e^{x^3}\right)\; dx = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u}\, du = \frac{\pi}{6}\ .$$

A última igualdade pode ser obtida pelo método dos resíduos. Um outro exemplo do mesmo tipo é a função $x\cos(x^4)$, que não é limitada mas $\int_a^{\infty} x\cos(x^4)dx < \infty$ para qualquer a finito.

*

No sentido da definição acima, a função $f(x) = x$ não possui uma integral de Riemann imprópria bem definida pois, como observamos, limites como $\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A^2} x\,dx$ divergem. Para funções que possuam uma integral de Riemann imprópria bem definida vale, obviamente, a expressão (31.10) e para elas vale também

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;=\; \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,dx \;=\; \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A^2} f(x)\,dx \qquad \text{etc.},$$

ou seja, o limite de $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser tomado com a indo a $-\infty$ e b indo a ∞ de diversas formas, sem afetar o resultado.

Precisamos agora de definições adequadas para as noções de derivação e integração (de Riemann) de funções entre espaços de Banach.

31.2.2 Diferenciação e Integração em Espaços de Banach

Vamos na presente seção (cuja leitura é dispensável para o desenvolvimento da teoria de integração de Lebesgue que se lhe segue) aprofundar um pouco mais a teoria da integração de funções com valores em espaços de Banach no sentido de reproduzir, nesse contexto geral, alguns dos resultados básicos do Cálculo Diferencial e Integral[18].

A noção de integral de Riemann para funções de uma variável real com valores em um espaço de Banach foi apresentada na Seção 31.2, em especial à página 1461. Nosso principal propósito agora é demonstrar o Teorema do Valor Médio e obter outros resultados preparatórios para a demonstração do Teorema da Função Implícita, tratado na Seção 25.3, página 1335. O primeiro passo é apresentar a noção geral de diferenciação de funções entre espaços de Banach.

• **Aplicações diferenciáveis em espaços de Banach. A derivada de Fréchet**

Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ dois espaços de Banach. Seja M um aberto em $\mathcal{M}$ e $g : M \to \mathcal{N}$ uma aplicação (não-necessariamente linear). Dizemos que g é *diferenciável* em um ponto $x \in M$ se existir uma aplicação linear limitada $G_x : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ tal que

$$\lim_{y\to 0}\frac{\big[g(x+y)-g(x)\big]-G_x y}{\|y\|_{\mathcal{M}}} \;=\; 0\;, \qquad \text{ou seja,} \qquad \lim_{y\to 0}\frac{\big\|\big[g(x+y)-g(x)\big]-G_x y\big\|_{\mathcal{N}}}{\|y\|_{\mathcal{M}}} \;=\; 0\;.$$

Se g é diferenciável em x, ou seja, se um tal G_x existir, então é unicamente definido. De fato, suponhamos que exista $H : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ linear e limitado tal que

$$\lim_{y\to 0}\frac{\big\|\big[g(x+y)-g(x)\big]-H y\big\|_{\mathcal{N}}}{\|y\|_{\mathcal{M}}} \;=\; 0\;.$$

Seja $v \in \mathcal{M}$ com $\|v\|_{\mathcal{M}} = 1$ e seja $y \in \mathcal{M}$ tal que $\lim_{y\to 0}\frac{y}{\|y\|_{\mathcal{M}}} = v$. Então,

$$\begin{aligned}
\|(H-G_x)v\|_{\mathcal{N}} \;&=\; \lim_{y\to 0}\frac{\|(H-G_x)y\|_{\mathcal{N}}}{\|y\|_{\mathcal{M}}}\\
&=\; \lim_{y\to 0}\frac{\Big\|\Big([g(x+y)-g(x)]-G_x y\Big)-\Big([g(x+y)-g(x)]-Hy\Big)\Big\|_{\mathcal{N}}}{\|y\|_{\mathcal{M}}}\\
&\leq\; \lim_{y\to 0}\frac{\big\|[g(x+y)-g(x)]-G_x y\big\|_{\mathcal{N}}}{\|y\|_{\mathcal{M}}}+\lim_{y\to 0}\frac{\big\|[g(x+y)-g(x)]-Hy\big\|_{\mathcal{N}}}{\|y\|_{\mathcal{M}}}\\
&=\; 0\;.
\end{aligned}$$

Logo, $H - G_x$ anula-se em todo vetor norma 1 e, portanto, anula-se em todo $\mathcal{M}$.

O estudante pode facilmente convencer-se que a definição acima corresponde à noção bem-conhecida de diferenciabilidade de funções de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. O operador linear limitado G_x pode ser interpretado como a "melhor aproximação linear" à função g na vizinhança de x.

[18]Seguiremos proximamente a exposição de [182].

Se g é diferenciável em todo ponto x do aberto M e se a aplicação $M \ni x \mapsto G_x \in \mathcal{B}(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$ for contínua em norma, dizemos que g é uma *aplicação de classe* C^1.

Para manter uma familiaridade notacional, denotaremos os operadores lineares limitados G_x definidos acima por $(Dg)(x)$ ou mesmo por $g'(x)$. O operador linear limitado $(Dg)(x)$ representa, assim, a *derivada* de g no ponto x, também denominada *derivada de Fréchet*[19] de g em x.

E. 31.8 *Exercício.* Mostre que se g é diferenciável no ponto x de acordo com a definição acima então é também contínua em x. ✠

• Diferenciação e integração de funções de uma variável real

De particular interesse é o caso em que $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ e $M = (a,\ b) \subset \mathbb{R}$, um intervalo aberto finito da reta real. Aqui, tem-se o seguinte:

Proposição 31.5 *Seja $\mathcal{N}$ um espaço de Banach e seja $g : [a,\ b] \to \mathcal{N}$ uma função contínua. Seja $G : [a,\ b] \to \mathcal{N}$ definida por*

$$G(x) \ := \ \int_a^x g(t)dt\ , \quad x \in [a,\ b]\ . \tag{31.12}$$

Então G é diferenciável em todo intervalo $(a,\ b)$ e $(DG)(x) \equiv G'(x) = g(x)$. □

Prova. Pela definição da integral de Riemann é evidente que

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)\,dt + \int_{t_2}^{t_3} g(t)\,dt \ = \ \int_{t_1}^{t_3} g(t)\,dt \tag{31.13}$$

para todos $t_1,\ t_2,\ t_3 \in [a,\ b]$. É também fácil ver que

$$\left\| \int_a^b g(t)\,dt \right\|_{\mathcal{N}} \ \leq \ \int_a^b \|g(t)\|_{\mathcal{N}}\ dt \tag{31.14}$$

pois para as somas de Riemann (31.5) tem-se $\big\|S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ g\big]\big\|_{\mathcal{N}} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \|g(\chi_k)\|_{\mathcal{N}}\,|I_k|$, o que implica (31.14), tomando-se os limites. De (31.14) obtem-se trivialmente a estimativa

$$\left\| \int_a^b g(t)\,dt \right\|_{\mathcal{N}} \ \leq \ |b-a| \ \max_{t\in[a,\ b]} \|g(t)\|_{\mathcal{N}} \tag{31.15}$$

que usaremos logo abaixo. Seja G definida em (31.12). Tem-se por (31.13) que $G(x+y) - G(x) = \int_x^{x+y} g(t)dt$ para todo $x,\ y \in (a,\ b)$ com $x + y \in (a,\ b)$. Logo,

$$G(x+y) - G(x) - g(x)y \ = \ \int_x^{x+y} \big(g(t) - g(x)\big)dt\ .$$

Assim, por (31.15),

$$\big\|G(x+y) - G(x) - g(x)y\big\|_{\mathcal{N}} \quad \leq \quad |y| \ \max_{t\in[x,\ x+y]} \|g(t) - g(x)\|_{\mathcal{N}}\ ,$$

donde segue que

$$\lim_{y\to 0} \frac{\big\|G(x+y) - G(x) - g(x)y\big\|_{\mathcal{N}}}{|y|} \quad \leq \quad \lim_{y\to 0} \ \max_{t\in[x,\ x+y]} \|g(t) - g(x)\|_{\mathcal{N}} \ \stackrel{\text{continuidade}}{=} \ 0\ .$$

Isso provou que G é diferenciável em todo $x \in (a,\ b)$ com $(DG)(x) \equiv G'(x) = g(x)$. ■

Na demonstração do Teorema do Valor Médio faremos uso do lema a seguir (cujo enunciado e demonstração foram extraídos de [182]). O estudante deve cuidadosamente observar que, ao contrário do que uma primeira impressão pode sugerir, esse lema não é consequência da Proposição 31.5.

[19] Maurice René Fréchet (1878–1973).

Lema 31.2 *Seja $\mathcal{N}$ um espaço de Banach e $f : [a,\ b] \to \mathcal{N}$ contínua e diferenciável em todo $(a,\ b)$ mas de modo que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,\ b)$. Então, f é constante.* □

Prova.[20] Sejam s e $t \in (a,\ b)$, arbitrários, com $s < t$. Desejamos mostrar que $f(s) = f(t)$. Como s e t são arbitrários e f é contínua, isso implica que f é constante em todo intervalo fechado $[a,\ b]$. Vamos definir uma sequência de intervalos $(s_n,\ t_n) \in (s,\ t)$, $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo

$$(s_n,\ t_n) \subset (s_{n-1},\ t_{n-1}) \qquad \text{e} \qquad |t_n - s_n| = 2^{-n}|t-s|$$

dados da seguinte forma: $(s_0,\ t_0) = (s,\ t)$ e para $n \geq 1$,

$$(s_n,\ t_n) := \begin{cases} \left(s_{n-1},\ \frac{s_{n-1}+t_{n-1}}{2}\right), & \text{caso } \left\|f(s_{n-1}) - f\left(\frac{s_{n-1}+t_{n-1}}{2}\right)\right\| \geq \left\|f\left(\frac{s_{n-1}+t_{n-1}}{2}\right) - f(t_{n-1})\right\| , \\ \\ \left(\frac{s_{n-1}+t_{n-1}}{2},\ t_{n-1}\right), & \text{caso } \left\|f\left(\frac{s_{n-1}+t_{n-1}}{2}\right) - f(t_{n-1})\right\| \geq \left\|f(s_{n-1}) - f\left(\frac{s_{n-1}+t_{n-1}}{2}\right)\right\| . \end{cases}$$

Em palavras, quebramos a cada passo o intervalo $(s_{n-1},\ t_{n-1})$ ao meio e escolhemos $(s_n,\ t_n)$ como sendo a metade na qual a variação de f em norma foi maior. É claro por essa escolha que

$$\begin{aligned} \|f(s_{n-1}) - f(t_{n-1})\| &\leq \left\|f(s_{n-1}) - f\left(\frac{s_{n-1}+t_{n-1}}{2}\right)\right\| + \left\|f\left(\frac{s_{n-1}+t_{n-1}}{2}\right) - f(t_{n-1})\right\| \\ &\leq 2\,\|f(s_n) - f(t_n)\| \end{aligned}$$

e, portanto, tem-se para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f(s) - f(t)\| \leq 2^n\,\|f(s_n) - f(t_n)\| . \tag{31.16}$$

Pela construção, s_n é uma sequência não-decrescente e limitada superiormente por t, enquanto que t_n é uma sequência não-crescente e limitada inferiormente por s. Assim, ambas convergem a pontos no intervalo $[s,\ t]$. Como, porém, $|t_n - s_n| = 2^{-n}|t-s|$, segue que ambas as sequências s_n e t_n convergem e a um <u>mesmo</u> ponto $\xi \in [s,\ t]$. Fora isso, é também claro que $\xi \in [s_n,\ t_n]$ para todo n.

Pela hipótese, vale $f'(\xi) = 0$. Pela definição de f', isso significa que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(\xi)\|/|x-\xi| < \epsilon$ sempre que $|x-\xi| \leq \delta$. Como s_n e t_n convergem a ξ, podemos escolher n grande o suficiente de modo que $|s_n - \xi| \leq \delta$ e $|t_n - \xi| \leq \delta$. Teremos, assim, para tais n's,

$$\|f(s_n) - f(t_n)\| \leq \|f(s_n) - f(\xi)\| + \|f(\xi) - f(t_n)\| \leq \epsilon\big(|s_n - \xi| + |\xi - t_n|\big) .$$

Como $\xi \in [s_n,\ t_n]$ para todo n, segue que $|s_n - \xi| + |\xi - t_n| = |t_n - s_n| = 2^{-n}|t-s|$. Logo, obtivemos

$$\|f(s_n) - f(t_n)\| \leq \epsilon 2^{-n}|t-s| .$$

Voltando a (31.16) isso implica $\|f(s) - f(t)\| \leq 2^n\,\|f(s_n) - f(t_n)\| \leq \epsilon|t-s|$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue disso que $\|f(s) - f(t)\| = 0$, completando a prova. ■

Com esse lema e com a Proposição 31.5 a prova do Teorema do Valor Médio torna-se elementar.

• O Teorema do Valor Médio

O teorema seguinte generaliza um resultado bem conhecido de Cálculo:

Teorema 31.1 (Teorema do Valor Médio) *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ espaços de Banach e $M \subset \mathcal{M}$ um conjunto aberto e conexo de $\mathcal{M}$. Seja $g : M \to \mathcal{N}$ contínua e diferenciável. Então, para todos $x,\ y \in M$ vale*

$$g(x) - g(y) = \left(\int_0^1 g'\big(\tau x + (1-\tau)y\big)\,d\tau\right)(x-y) ,$$

[20] De [182].

assim como a estimativa

$$\|g(x) - g(y)\|_{\mathcal{N}} \;\leq\; K_{x,\,y}\,\|x - y\|_{\mathcal{M}}\;,$$

onde $K_{x,\,y} := \max\limits_{t\in[0,\,1]} \big\|g'\big(tx + (1-t)y\big)\big\|$. □

Prova. Para $x,\ y \in M$ fixos, seja $h : [0,\ 1] \to \mathcal{N}$ definida por $h(t) := g\big(tx + (1-t)y\big)$. Pela regra da cadeia, $h'(t) = g'\big(tx + (1-t)y\big)(x - y)$. Defina-se também

$$H(t) \;:=\; \int_0^t g'\big(\tau x + (1-\tau)y\big)(x-y)\,d\tau\;, \qquad t \in [0,\ 1]\;.$$

Pela Proposição 31.5, H é diferenciável e $H'(t) = g'\big(tx+(1-t)y\big)\big(x-y\big)$. Assim, $H'(t) = h'(t)$, o que implica, pelo Lema 31.2, que a diferença $H(t)-h(t)$ é constante para todo $t \in [0,\ 1]$. Como $H(0) = 0$, segue que $H(t)-h(t) = -h(0) = -g(y)$ para todo $t \in [0,\ 1]$. Para $t = 1$ essa igualdade fica $H(1) - h(1) = -g(y)$ e como $h(1) = g(x)$ concluímos que

$$g(x) - g(y) \;=\; \int_0^1 g'\big(\tau x + (1-\tau)y\big)(x-y)\,d\tau\;.$$

Usando (31.15), segue disso que

$$\|g(x) - g(y)\|_{\mathcal{N}} \;\leq\; \max_{t\in[0,\,1]} \big\|g'\big(tx + (1-t)y\big)(x-y)\big\|_{\mathcal{N}} \;\leq\; \left(\max_{t\in[0,\,1]} \big\|g'\big(tx + (1-t)y\big)\big\|\right)\|x-y\|_{\mathcal{M}}\;,$$

o que completa a demonstração. ■

• Derivadas parciais

Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dois espaços normados com normas $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$, respectivamente. Podemos fazer do produto Cartesiano $\mathcal{X}\times\mathcal{Y} = \{(x,\ y),\ x \in \mathcal{X},\ y \in \mathcal{Y}\}$ um espaço vetorial normado declarando as operações de soma e produto por escalares por $\alpha_1(x_1,\ y_1) + \alpha_2(x_2,\ y_2) := (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$ e definindo a norma $\|(x,\ y)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} := \|x\|_{\mathcal{X}} + \|y\|_{\mathcal{Y}}$. Mais que isso, se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ forem espaços de Banach em relação às suas respectivas normas, é fácil constatar que $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ também o é em relação a norma $\|(x,\ y)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$.

E. 31.9 *Exercício*. Prove que $\|\cdot\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ é de fato uma norma e que $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ é um espaço de Banach em relação à mesma se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ o forem em relação às suas respectivas normas. ✠

Para distinguirmos a estrutura de espaço vetorial de $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ definida acima, denotaremos os vetores $(x,\ y) \in \mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ como vetores-coluna: $\binom{x}{y}$.

Definamos as projeções $\Pi_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}\times\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ e $\Pi_{\mathcal{Y}} : \mathcal{X}\times\mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ por

$$\Pi_{\mathcal{X}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;:=\; x\;, \qquad \Pi_{\mathcal{Y}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;:=\; y\;,$$

respectivamente, e definamos $\Lambda_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ e $\Lambda_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ por

$$\Lambda_{\mathcal{X}}\,x \;:=\; \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\;, \qquad \Lambda_{\mathcal{Y}}\,y \;:=\; \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\;,$$

respectivamente. É um exercício elementar (mas importante) mostrar que $\Pi_{\mathcal{X}}$, $\Pi_{\mathcal{Y}}$, $\Lambda_{\mathcal{X}}$ e $\Lambda_{\mathcal{Y}}$ são lineares e contínuas se dotarmos $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ das topologias das normas $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$, respectivamente. É igualmente elementar constatar que

$$\Pi_{\mathcal{X}}\Lambda_{\mathcal{X}} \;=\; \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\;, \qquad \Pi_{\mathcal{Y}}\Lambda_{\mathcal{Y}} \;=\; \mathbb{1}_{\mathcal{Y}} \quad \text{e} \quad \Lambda_{\mathcal{X}}\Pi_{\mathcal{X}} + \Lambda_{\mathcal{Y}}\Pi_{\mathcal{Y}} \;=\; \mathbb{1}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}\;. \tag{31.17}$$

Seja $\mathcal{Z}$ um terceiro espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_{\mathcal{Z}}$. Para $A \subset \mathcal{X}$ e $B \subset \mathcal{B}$ dois abertos convexos, seja $F : A\times B \to \mathcal{Z}$ uma função contínua e diferenciável, sendo $F' : A\times B \to \mathcal{Z}$ sua derivada. Para cada $(x,\ y) \in A\times B$ a expressão $F'(x,\ y)$ define um operador linear e contínuo $\mathcal{X}\times\mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$.

Para y fixo em B podemos considerar também a função $A \ni x \mapsto F(x,\ y)$, assim como para x fixo em A podemos considerar a função $B \ni y \mapsto F(x,\ y)$. Se essas funções forem diferenciáveis denotaremos suas derivadas por D_1F e D_2F, respectivamente. Note-se que D_1F é uma aplicação linear $\mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ e D_2F é uma aplicação linear $\mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$.

Vamos mostrar que se F' existe então essas duas funções são também diferenciáveis e vamos estabelecer relações entre D_1F, D_2F e F'. De fato, da existência de F' sabemos que

$$F(x+a,\ y+b) - F(x,\ y) \ = \ F'(x,\ y)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + R(a,\ b)\ , \qquad \text{com} \qquad \lim_{(a,\ b)\to 0} \frac{\|R(a,\ b)\|_{\mathcal{Z}}}{\|(a,\ b)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}} \ = \ 0\ .$$

para todos $(a,\ b) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Em particular, para $b = 0$ teremos

$$F(x+a,\ y) - F(x,\ y) \ = \ F'(x,\ y)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + R(a,\ 0)\ , \qquad \text{com} \qquad \lim_{a\to 0} \frac{\|R(a,\ 0)\|_{\mathcal{Z}}}{\|(a,\ 0)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}} \ = \ 0\ ,$$

ou seja, escrevendo $R(a,\ 0) \equiv R(a)$ e lembrando que $\|(a,\ 0)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} = \|a\|_{\mathcal{X}}$, tem-se

$$F(x+a,\ y) - F(x,\ y) \ = \ F'(x,\ y)\Big(\Lambda_{\mathcal{X}}\, a\Big) + R(a)\ , \qquad \text{com} \qquad \lim_{a\to 0} \frac{\|R(a)\|_{\mathcal{Z}}}{\|a\|_{\mathcal{X}}} \ = \ 0\ ,$$

o que nos permite concluir que

$$D_1F(x,\ y) \ = \ F'(x,\ y)\Lambda_{\mathcal{X}}.$$

Analogamente, podemos concluir que

$$D_2F(x,\ y) \ = \ F'(x,\ y)\Lambda_{\mathcal{Y}}.$$

Dessas expressões extrai-se facilmente a continuidade de $D_1F(x,\ y)$ e $D_2F(x,\ y)$ como funções de $(x,\ y) \in A \times B$. Da última das relações em (31.17) obtemos

$$F'(x,\ y) \ = \ D_1F(x,\ y)\,\Pi_{\mathcal{X}} + D_2F(x,\ y)\,\Pi_{\mathcal{Y}}\ . \tag{31.18}$$

As últimas três expressões valem para todo $(x,\ y) \in A \times B$.

D_1F e D_2F definem as *derivadas parciais* de F em relação a seu primeiro e segundo argumentos, respectivamente.

31.3 A Integração no Sentido de Lebesgue

A presente seção é dedicada à teoria da integração de funções definidas em espaços mensuráveis. A noção de integração da qual trataremos foi introduzida por Lebesgue entre 1901 e 1902[21] e redescoberta independentemente por Young[22] dois anos mais tarde. A teoria de integração introduzida por Lebesgue representa uma importante extensão da teoria de integração de Riemann e desde cedo encontrou aplicações em diversas áreas da Matemática (como, para ficar em um único exemplo, na teoria das séries de Fourier), com reflexos também na Física.

A teoria da integração de Lebesgue faz amplo uso de noções da teoria da medida e necessita, em particular, da noção de função mensurável, que iremos discutir antes de passarmos à definição geral da integral de Lebesgue propriamente dita.

31.3.1 Funções Mensuráveis e Funções Simples

Comecemos com uma definição que será amplamente empregada no que segue, a de função característica de um conjunto.

- **A função característica de um conjunto**

Seja M um conjunto não-vazio e $A \subset M$. A função $\chi_A : M \to \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_A(x) \ := \ \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

[21] O trabalho de Lebesgue sobre a teoria da integração, intitulado "Intégrale, longueur, aire" foi apresentado como dissertação à Universidade de Nancy em 1902.
[22] William Henry Young (1863–1942).

é denominada *função característica do conjunto A*, ou *função indicatriz do conjunto A*.

E. 31.10 *Exercício*. Seja M um conjunto não-vazio e $A, B \subset M$. Mostre que

$$\chi_A(x)\chi_B(x) = \chi_{A\cap B}(x), \qquad \forall x \in M . \tag{31.19}$$

✣

• Funções mensuráveis. Definição e comentários

Apresentemos uma importante definição, a de função mensurável. Sejam $(M, \mathcal{M})$ e $(N, \mathcal{N})$ dois espaços mensuráveis, sendo M e N dois conjuntos não-vazios e $\mathcal{M} \subset \mathbb{P}(M)$ e $\mathcal{N} \subset \mathbb{P}(N)$ σ-álgebras em M e N, respectivamente.

Uma função $f : M \to N$ é dita ser uma *função mensurável* em relação às σ-álgebras $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, ou $[\mathcal{M}, \mathcal{N}]$-mensurável, se $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ para todo $A \in \mathcal{N}$, ou seja, se a pré-imagem de todo conjunto mensurável segundo $\mathcal{N}$ for um conjunto mensurável segundo $\mathcal{M}$.

O estudante deve comparar essa definição com a definição de função contínua **DC 1**, página 1447. Devido ao seu papel preponderante na teoria da integração (de Lebesgue), vamos primeiro estudar algumas das propriedades básicas das funções mensuráveis, especialmente das funções numéricas, ou seja, aquelas cuja imagem está em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{C}$.

A primeira propriedade elementar é bastante geral: se $(M_1, \mathcal{M}_1)$, $(M_2, \mathcal{M}_2)$ e $(M_3, \mathcal{M}_3)$ são três espaços mensuráveis e se $f : M_1 \to M_2$ e $g : M_2 \to M_3$ são duas funções mensuráveis (f sendo $[\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2]$-mensurável e g sendo $[\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3]$-mensurável) então $g \circ f : M_1 \to M_3$ é mensurável em relação a $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_3$ (ou seja, $[\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_3]$-mensurável). A prova é imediata pela definição.

Dado um espaço mensurável $(M, \mathcal{M})$ estaremos, como dissemos, primordialmente interessados em funções $f : M \to \mathbb{R}$. Qual σ-álgebra adotar em $\mathbb{R}$? As duas possibilidades mais importantes são a σ-álgebra de Lebesgue[23] $\mathcal{M}_{\mu_L}$, dos conjuntos mensuráveis pela medida de Lebesgue μ_L, e a σ-álgebra de Borel[24] $\mathcal{M}[\tau_\mathbb{R}]$ que, por definição, é a menor σ-álgebra que contém a topologia usual da reta $\tau_\mathbb{R}$. A σ-álgebra de Borel foi estudada no Capítulo 27 (vide especialmente a página 1370). Vimos na Seção 29.1.1, página 1415, que $\mathcal{M}[\tau_\mathbb{R}] \subset \mathcal{M}_{\mu_L}$.

Para a grande maioria dos propósitos da teoria da integração é suficiente considerar em $\mathbb{R}$ a σ-álgebra de Borel $\mathcal{M}[\tau_\mathbb{R}]$. Assim, dado um espaço mensurável $(M, \mathcal{M})$ estaremos interessados em funções $f : M \to \mathbb{R}$, dotando $\mathbb{R}$ da σ-álgebra de Borel $\mathcal{M}[\tau_\mathbb{R}]$.

Os conjuntos que compõem $\mathcal{M}[\tau_\mathbb{R}]$ são denominados *conjuntos Borelianos*. Que conjuntos são estes? Recordando o que aprendemos nos capítulos supra-citados, todos os conjuntos abertos ou fechados de $\mathbb{R}$ (na topologia usual $\tau_\mathbb{R}$) são Borelianos. São também Borelianos intervalos semiabertos como $[a, b)$ ou $(a, b]$, assim como uniões contáveis dos mesmos e seus complementos.

Há em $\mathbb{R}$, além dos intervalos semiabertos, outros conjuntos Borelianos que não são nem abertos nem fechados. O conjunto dos racionais, $\mathbb{Q}$, é Boreliano, pois $\mathbb{Q} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\{r\}$, uma união <u>contável</u> de conjuntos Borelianos $\{r\}$ (que contêm apenas um ponto e são Borelianos por serem fechados). O conjunto dos irracionais é Boreliano por ser o complemento de $\mathbb{Q}$, que é Boreliano. Analogamente o conjunto dos números reais algébricos é Boreliano, assim como o conjunto dos números reais transcendentes. Generalizando o raciocínio, todo conjunto finito ou contável de $\mathbb{R}$ é Boreliano e seu complemento também.

Se $f : M \to \mathbb{R}$ é mensurável em relação às σ-álgebras $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}[\tau_\mathbb{R}]$, f dita ser uma *função Boreliana*. Se $f : M \to \mathbb{R}$ é mensurável em relação às σ-álgebras $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}_{\mu_L}$, f dita ser uma *função mensurável de Lebesgue*. Como $\mathcal{M}[\tau_\mathbb{R}] \subset \mathcal{M}_{\mu_L}$, toda função mensurável de Lebesgue é Boreliana. Que funções são Borelianas? É difícil dar uma descrição geral, mas no caso importante de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde adotamos $\mathcal{M}[\tau_\mathbb{R}]$ como a σ-álgebra tanto do domínio quando da imagem, é relativamente fácil provar que toda função contínua é Boreliana. A prova é apresentada no Apêndice 31.B, página 1499, quando tratarmos de funções mensuráveis entre espaços topológicos.

São também Borelianas as funções contínuas por partes, ou seja, aquelas que possuem um número finito de descontinuidades. Há ainda outras funções que são Borelianas mas que não são nem contínuas nem contínuas por parte. Exemplos são as funções de (31.1), página 1456.

E. 31.11 *Exercício*. Justifique! ✣

[23] Henri Léon Lebesgue (1875–1941).
[24] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956).

Um exemplo de uma função não-mensurável, mais especificamente, de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que não é Boreliana, é a função característica de um conjunto não-mensurável (ou não Boreliano), como a função característica $\chi_V(x)$ do conjunto de Vitali V que introduzimos no Capítulo 28 (vide especialmente a página 1388). Funções não-mensuráveis são praticamente desconsideradas na teoria da integração.

No Apêndice 31.B, página 1499, estuda-se com mais profundidade a noção de função mensurável. Para os nossos propósitos, o principal resultado que lá obtemos é o seguinte:

Proposição 31.6 *Se $(M, \mathcal{M})$ é um espaço de medida, então o conjunto de todas as funções $f : M \to \mathbb{R}$ que sejam $[\mathcal{M}, \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensuráveis forma uma álgebra real. Mais precisamente, se $f : M \to \mathbb{R}$ e $g : M \to \mathbb{R}$ são ambas $[\mathcal{M}, \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensuráveis, então*

1. *Para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale que $\alpha f + \beta g$ é $[\mathcal{M}, \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável.*
2. *O produto $f \cdot g$ é $[\mathcal{M}, \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável.* □

• **Funções mensuráveis complexas**

Uma função $f : M \to \mathbb{C}$ é $[\mathcal{M}, \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{C}}]]$-mensurável se e somente se suas partes real e imaginária forem $[\mathcal{M}, \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensuráveis. Isso é demonstrado nas Proposições 31.16 e 31.17, das páginas 1503 e seguintes.

Usando a Proposição 31.6 é fácil ver que o conjunto de todas as funções complexas mensuráveis é também uma álgebra complexa. Vide Proposição 31.18, página 1504.

• **Funções definidas por $\sup$'s e $\inf$'s**

Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções definidas em M assumindo valores em $\mathbb{R}$, então as funções $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$ e $\liminf_n f_n$ são definidas para cada $x \in M$ por

$$\begin{aligned}
\left(\sup_n f_n\right)(x) &:= \sup_n \big(f_n(x)\big) , \\
\left(\inf_n f_n\right)(x) &:= \inf_n \big(f_n(x)\big) , \\
\left(\limsup_n f_n\right)(x) &:= \limsup_n \big(f_n(x)\big) , \\
\left(\liminf_n f_n\right)(x) &:= \liminf_n \big(f_n(x)\big) .
\end{aligned}$$

Se $(M, \mathcal{M})$ for um espaço de medida e as funções f_n forem todas $[\mathcal{M}, \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensuráveis, então todas as funções definidas acima são também $[\mathcal{M}, \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensuráveis.

Por exemplo, para provar que a função $f := \sup_n f_n$ é mensurável, notamos que para qualquer $a \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}\big((a, \infty)\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}\big((a, \infty)\big) .$$

E. 31.12 *Exercício*. Certo? Sugestão: Seção 1.1.3, página 64. ✣

Pela Proposição 31.12, página 1501, cada conjunto $f_n^{-1}((a, \infty))$ pertence a $\mathcal{M}$, portanto, a união acima também, pois é uma união contável. Logo, $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$ e, novamente pela Proposição 31.12, isso implica que f é $[\mathcal{M}, \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável.

Analogamente, prova-se que $f := \inf_n f_n$ é $[\mathcal{M}, \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável, pois nesse caso

$$f^{-1}\big((-\infty, a)\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}\big((-\infty, a)\big) .$$

Para o caso de $f = \limsup_n f_n$, notamos que $\limsup_n f_n = \inf_{m\geq 1} \sup_{n\geq m} f_n$. Pelo argumentado acima, cada $\sup_{n\geq m} f_n$ é $[\mathcal{M}, \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável e assim o é seu ínfimo para todo m. Finalmente, o caso da função $\liminf_n f_n$ é análogo.

• Partes positiva e negativa de uma função

Para $f : M \to \mathbb{R}$, definimos

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 , \\ 0, & \text{se } f(x) < 0 , \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f^-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{se } f(x) \leq 0 , \\ 0, & \text{se } f(x) > 0 , \end{cases} .$$

f^+ é denominada *parte positiva de* f e f^- é denominada *parte negativa de* f. É claro que $f^+(x) \geq 0$ e que $f^-(x) \geq 0$ para todo x. É fácil ver que

$$f^+(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2} \qquad \text{e} \qquad f^-(x) = \frac{-f(x) + |f(x)|}{2}$$

e, consequentemente,

$$f = f^+ - f^- \qquad \text{e} \qquad |f| = f^+ + f^- .$$

É igualmente fácil ver que

$$f^+(x) = f(x)\chi_{F^+}(x) \qquad \text{e} \qquad f^-(x) = -f(x)\chi_{F^-}(x) \tag{31.20}$$

sendo que

$$F^+ = \{x \in M|\ f(x) \geq 0\} \qquad \text{e} \qquad F^- = \{x \in M|\ f(x) \leq 0\} .$$

Se f é mensurável, F^+ e F^- são conjuntos mensuráveis, por serem as pré-imagens por f dos Borelianos $[0, \infty)$ e $(-\infty, 0]$, respectivamente. Assim, as funções características $\chi_{F^\pm}$ são mensuráveis. Como o produto de duas funções mensuráveis é mensurável (Proposição 31.6, página 1473), concluímos de (31.20) que f^+ e f^- são funções mensuráveis. Daí, como $|f| = f^+ + f^-$, segue também que $|f|$ é mensurável, pois é a soma de duas funções mensuráveis (novamente, Proposição 31.6, página 1473).

• A representação normal

Se M é um conjunto não-vazio, dizemos que uma função real ou complexa $f : M \to \mathbb{R}$, ou $f : M \to \mathbb{C}$ possui uma representação normal se para algum $m \in \mathbb{N}$ existirem números $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, não necessariamente distintos, e conjuntos $B_1, \ldots, B_m$ tais que $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$, que $M = B_1 \cup \cdots \cup B_m$ e que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\ \chi_{B_k}(x) \tag{31.21}$$

A soma do lado direito de (31.21) é dita ser uma *representação normal de* f. Note que nem toda função f possui uma representação normal. Além disso, se f possui uma representação normal esta não é necessariamente única: podemos dividir alguns dos conjuntos B_k em subconjuntos disjuntos menores e obter uma nova representação normal. Ou podemos tomar a união de conjuntos B_k com valores iguais de α_k e obter uma nova representação normal.

É importante notar que se f admite uma representação normal, então f assume um número finito de valores (certo?). Veremos que essa é uma condição necessária e suficiente para que uma função f possua uma representação normal.

• Funções simples

Se M é um conjunto não-vazio, uma função $s : M \to \mathbb{R}$, ou $s : M \to \mathbb{C}$, é dita ser *elementar* ou *simples* se assumir apenas um número finito de valores, ou seja, se sua imagem for $\Im(s) = \{s_1, \ldots, s_n\}$, para algum $n \in \mathbb{N}$, com $s_i \neq s_j$ para $i \neq j$, sendo que cada s_k é um elemento de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$, conforme o caso. Se s é simples e $\Im(s) = \{s_1, \ldots, s_n\}$, defina-se os conjuntos $A_k \subset M$ por $A_k = s^{-1}(s_k)$, ou seja, A_k é a pré-imagem de s_k por s:

$$A_k = \{x \in M|\ s(x) = s_k\}.$$

É bastante evidente que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, que $M = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ e que

$$s(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} s_k \, \chi_{A_k}(x) \; . \tag{31.22}$$

Vemos com isso que toda função simples possui pelo menos uma representação normal.

Uma representação normal como a de (31.22), na qual as constantes s_k são todas distintas, é dita ser uma *representação normal curta* da função simples s. O leitor poderá facilmente convencer-se que a representação normal curta de uma função simples é única.

Um ponto importante é a seguinte observação: uma função simples é mensurável (em relação a uma σ-álgebra $\mathcal{M}$ definida em M) se e somente se cada A_k acima for um conjunto mensurável (ou seja $A_k \subset \mathcal{M}$). A prova é evidente e dispensável.

• A álgebra das funções simples

As funções simples formam uma álgebra. As funções simples e mensuráveis também formam uma álgebra. A prova dessas afirmações é bem simples e deixada ao leitor. O próximo exercício é mais detalhado quanto às propriedades algébricas das funções simples.

E. 31.13 *Exercício (fácil).* Se s e r são funções simples definidas em M com representações normais

$$s(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} s_k \, \chi_{A_k}(x) \qquad \text{e} \qquad r(x) \;=\; \sum_{l=1}^{m} r_l \, \chi_{B_l}(x)$$

mostre que

$$r(x)s(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} s_k r_l \, \chi_{A_k \cap B_l}(x) \; .$$

Isso segue facilmente da identidade $\chi_A \chi_B = \chi_{A\cap B}$. Para qualquer número α tem-se, obviamente,

$$\alpha s(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \alpha s_k \, \chi_{A_k}(x) \; .$$

Por fim, mostre que

$$r(x) + s(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} (s_k + r_l) \, \chi_{A_k \cap B_l}(x) \; . \tag{31.23}$$

Para provar isso, você deverá usar os fatos que $A_1 \cup \cdots \cup A_n = M$ e que $B_1 \cup \cdots \cup B_m = M$, sendo ambas uniões de conjuntos disjuntos, para mostrar que

$$1 \;=\; \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(x) \qquad \text{e} \qquad 1 \;=\; \sum_{l=1}^{m} \chi_{B_l}(x) \; .$$

Disso, segue facilmente, usando a identidade $\chi_A \chi_B = \chi_{A\cap B}$, que

$$\chi_{A_k}(x) \;=\; \sum_{l=1}^{m} \chi_{A_k \cap B_l}(x) \qquad \text{e} \qquad \chi_{B_l}(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \chi_{B_l \cap A_l}(x) \; ,$$

e disso, segue facilmente (31.23). ✠

• Funções mensuráveis e funções simples

Toda função real não-negativa, mensurável por Lebesgue ou Boreliana, pode ser aproximada por funções simples. Mais precisamente temos o seguinte lema (de [177]) que, embora um tanto técnico, revela uma relação subjacente entre funções mensuráveis em geral e funções simples mensuráveis.

Lema 31.3 *Se M é um espaço de medida com uma σ-álgebra $\mathcal{M}$, toda função $f : M \to \mathbb{R}$ não-negativa e Boreliana (ou mensurável por Lebesgue) é o limite pontual de uma sequência monótona não-decrescente de funções simples mensuráveis e não-negativas. Se f for também limitada, a convergência é até mesmo uniforme.* □

A prova encontra-se no Apêndice 31.C, página 1504. O Lema 31.3 tem o seguinte corolário:

Corolário 31.2 *Se M é um espaço de medida com uma σ-álgebra $\mathcal{M}$, toda função $f : M \to \mathbb{R}$ que seja Boreliana é o limite de uma sequência de funções simples mensuráveis.* □

Prova. A diferença com relação ao Lema 31.3 é que f não é necessariamente não-negativa. Pelo que observamos, porém, $f = f^+ - f^-$, sendo ambas $f^\pm$ não-negativas e Borelianas. A elas, portanto, aplica-se o Lema 31.3, o que encerra a prova. ■

31.3.2 A Integral de Lebesgue. Integração em Espaços Mensuráveis

Passamos agora à empreitada de definir o conceito de integral de Lebesgue em espaços mensuráveis. O processo segue várias etapas sucessivas, iniciando com a definição de integral de funções simples mensuráveis, que serão usadas para definir a integral de funções positivas mensuráveis e assim por diante.

• **Integração de funções simples**

Seja agora M um espaço mensurável com uma σ-álgebra $\mathcal{M}$, na qual está definida uma medida μ.

Se s é uma função simples e não-negativa (ou seja, se $s(x) \geq 0$ para todo x), $\mathcal{M}$-mensurável e com representação normal curta $s(x) = \sum_{k=1}^n s_k \chi_{A_k}(x)$, a *integral de s em M com respeito à medida μ* é definida por

$$\int_M s \, d\mu \equiv \int_M s(x) \, d\mu(x) := \sum_{\substack{k=1 \\ s_k \neq 0}}^n s_k \, \mu(A_k) . \tag{31.24}$$

Observações.

1. Note-se que na soma à direita na expressão (31.24) exclui-se os valores de k para os quais $s_k = 0$. Para tais valores de k pode eventualmente valer $\mu(A_k) = \infty$. Se convencionarmos que $0 \times \infty = 0$, podemos reescrever a definição acima de forma mais simplificada como
$$\int_M s \, d\mu \equiv \int_M s(x) \, d\mu(x) := \sum_{k=1}^n s_k \, \mu(A_k) .$$
Para simplificar a notação, essa convenção $0 \times \infty = 0$ é adotada por muitos autores e nos juntaremos a eles nestas Notas. Observemos também que a soma do lado esquerdo pode valer ∞, caso $\mu(A_k) = \infty$ para algum k com $s_k > 0$.
2. Na definição (31.24) usamos a representação normal curta da função s, mas isso não é necessário pois qualquer representação normal de s pode ser usada com idêntico resultado. De fato, sejam
$$s(x) = \sum_{k=1}^p \beta_k \, \chi_{B_k}(x) \qquad \text{e} \qquad s(x) = \sum_{l=1}^q \gamma_l \, \chi_{C_l}(x) \tag{31.25}$$
duas representações normais de s, com $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$, com $M = B_1 \cup \cdots \cup B_p$ e igualmente $C_i \cap C_j = \emptyset$ para $i \neq j$, com $M = C_1 \cup \cdots \cup C_q$. Então,
$$\sum_{k=1}^p \beta_k \, \mu(B_k) = \sum_{l=1}^q \gamma_l \, \mu(C_l) . \tag{31.26}$$
A prova de (31.26) é apresentada no Apêndice 31.D, página 1505. A validade de (31.26) mostra que a definição de integral de uma função simples dada acima é intrínseca e não depende da particular representação normal adotada.

♣

Uma função simples (não necessariamente positiva) e $\mathcal{M}$-mensurável s, com uma representação normal $s(x) = \sum_{k=1}^n s_k \chi_{A_k}(x)$, é dita ser uma *função μ-integrável* se $\mu(A_k) < \infty$ para todo k com $s_k \neq 0$. Observe-se que para os valores de k para os quais $s_k = 0$ não estamos impedidos de ter $\mu(A_k) = \infty$. Para uma tal função definimos igualmente

$$\int_M s \, d\mu \equiv \int_M s(x) \, d\mu(x) := \sum_{\substack{k=1 \\ s_k \neq 0}}^n s_k \, \mu(A_k) = \sum_{k=1}^n s_k \, \mu(A_k) .$$

Na última igualdade usamos a convenção $0 \times \infty = 0$. Note que para s integrável, $\int_M s \, d\mu < \infty$.

A definição de integral de funções simples que empreendemos acima é o primeiro passo da definição mais geral de integral de funções em espaços mensuráveis. Antes de prosseguirmos, façamos alguns comentários de esclarecimento sobre as definições acima.

- **Alguns esclarecimentos**

O estudante deve reparar nos cuidados tomados nas definições acima: só definimos a noção de integral para funções simples e mensuráveis que sejam ou não-negativas ou integráveis. Ao definirmos a integral de funções simples não-negativas permitimos ter $\mu(A_k) = \infty$ para algum k com $s_k > 0$. Aqui, a condição de s ser não-negativa é importante para evitar o aparecimento de somas to tipo $\infty - \infty$, que não estão definidas. Isso seria o caso de uma função simples como

$$s(x) \;=\; \begin{cases} +2, & \text{se } x \in (1,\ \infty) \\[2ex] -1, & \text{se } x \in (-\infty,\ 1] \end{cases} .$$

Essa função é mensurável de Lebesgue. Porém, para a medida de Lebesgue μ_L, a integral dessa função $\int_{\mathbb{R}} s\, d\mu_L = +2\mu_L((1,\ \infty)) + (-1)\mu_L((-\infty,\ 1])$ não está definida, pois $\mu_L((1,\ \infty)) = \infty$ e $\mu_L((-\infty,\ 1]) = \infty$ e não temos como definir a diferença $+2\mu_L((1,\ \infty)) + (-1)\mu_L((-\infty,\ 1])$. Já para a função simples e mensurável

$$s(x) \;=\; \begin{cases} +2, & \text{se } x \in (1,\ \infty)\ , \\[2ex] 0, & \text{se } x \in (-\infty,\ 1]\ , \end{cases}$$

teremos $\int_{\mathbb{R}} s\, d\mu_L = +2\mu_L((1,\ \infty)) + (0)\mu_L((-\infty,\ 1]) = +2\mu_L((1,\ \infty)) = \infty$. Para as funções simples integráveis tais problemas não ocorrem já que os termos $s_k\mu(A_k)$ são finitos (positivos ou negativos). De fato, para funções simples integráveis só se terá $\mu(A_k) = \infty$ se $s_k = 0$ e nesse caso convenciona-se $s_k\mu(A_k) = 0$. O seguinte exemplo ilustra isso: com relação à medida de Lebesgue a função simples

$$s(x) \;=\; \begin{cases} +2, & \text{se } x \in (1,\ 4) \\[2ex] 0, & \text{se } x \notin (1,\ 4) \end{cases}$$

é mensurável e integrável e $\int_M s\, d\mu_L = +2\mu_L((1,\ 4)) + (0)\mu_L(\mathbb{R} \setminus (1,\ 4)) = 2 \times 3 + 0 \times \infty = 2 \times 3 = 6$.

- **Integrais indefinidas de funções simples**

Se s é simples mensurável não-negativa ou s é simples mensurável e integrável e se $E \subset M$ com $E \in \mathcal{M}$, definimos

$$\int_E s\ d\mu \;:=\; \int_M s\,\chi_E\ d\mu \;=\; \sum_{k=1}^{n} s_k\ \mu(A_k \cap E)\ .$$

A última igualdade segue de $s(x)\chi_E(x) = \sum_{k=1}^{n} s_k\chi_{A_k}(x)\chi_E(x) \overset{(31.19)}{=} \sum_{k=1}^{n} s_k\chi_{A_k\cap E}(x)$, de onde extrai-se que $\int_M s\chi_E\ d\mu = \sum_{k=1}^{n} s_k\ \mu(A_k \cap E)$, como desejamos. As integrais $\int_E s\ d\mu$ são por vezes denominadas *integrais definidas* da função simples s.

• **Propriedades elementares da integração de funções simples**

As seguintes propriedades das integrais de funções simples são válidas e podem ser facilmente verificadas:

$$\int_E (\alpha s)\, d\mu = \alpha \int_E s\, d\mu ,$$

$$\int_E (s_a + s_b)\, d\mu = \int_E s_a\, d\mu + \int_E s_b\, d\mu ,$$

$$\int_E s_1\, d\mu \leq \int_E s_2\, d\mu \quad \text{se} \quad s_1(x) \leq s_2(x), \quad \forall x \in E .$$

Acima, s, s_a e s_b são funções simples, integráveis e complexas quaisquer e $\alpha \in \mathbb{C}$, constante. s_1 e s_2 são funções simples, integráveis e reais quaisquer.

• **Medidas definidas pela integral de funções simples não-negativas**

O seguinte resultado (de [348]), que tem interesse por si só, será usado mais adiante, por exemplo quando demonstrarmos o Teorema da Convergência Monótona, Teorema 31.4, página 1486.

Lema 31.4 *Seja M não-vazio, $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra de M na qual definimos uma medida μ. Seja s uma função simples, não-negativa e $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_\mathbb{R}]]$-mensurável e integrável. Para $E \in \mathcal{M}$ defina-se*

$$\varphi_s(E) := \int_E s\, d\mu = \int_M s\, \chi_E\, d\mu .$$

Então φ_s é uma medida em $\mathcal{M}$. □

Prova. Em primeiro lugar, note-se que $\varphi_s(\phi) = 0$, pois $\chi_\emptyset$ é identicamente nula. Como s é não-negativa, $\varphi_s(E) \geq 0$ para todo $E \in \mathcal{M}$.

Seja uma representação normal de $s = \sum_{k=1}^n s_k \chi_{A_k}$ (com $A_k \in \mathcal{M}$ para todo k, pois s é mensurável). Teremos para cada $E \in \mathcal{M}$, $\varphi_s(E) = \sum_{k=1}^n s_k\, \mu(A_k \cap E)$. Se $E = \bigcup_{m=1}^\infty E_m$ é uma união disjunta e contável com $E_m \in \mathcal{M}$ para todo m, vale que $A_k \cap E = \bigcup_{m=1}^\infty (A_k \cap E_m)$, também uma união disjunta e contável de elementos de $\mathcal{M}$. Logo, como μ é uma medida, vale que

$$\mu(A_k \cap E) = \mu\left(A_k \cap \bigcup_{m=1}^\infty E_m\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^\infty (A_k \cap E_m)\right) = \sum_{m=1}^\infty \mu(A_k \cap E_m) .$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_s\left(\bigcup_{m=1}^\infty E_m\right) &= \sum_{k=1}^n s_k\, \mu\left(A_k \cap \bigcup_{m=1}^\infty E_m\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^\infty s_k\, \mu\left(A_k \cap E_m\right) = \sum_{m=1}^\infty \sum_{k=1}^n s_k\, \mu\left(A_k \cap E_m\right) \\ &= \sum_{m=1}^\infty \varphi_s(E_m) . \end{aligned}$$

Isso provou que φ_s é σ-aditiva e, portanto, é uma medida. ■

E. 31.14 *Exercício*. O que justifica a troca de ordem das somas feita na demonstração acima? ✠

• **Integração de funções mensuráveis. A integral de Lebesgue**

Como acima, seja M não-vazio, $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra de M na qual definimos uma medida μ.

Seja $f : M \to \mathbb{R}_+$ uma função não-negativa e mensurável. Denotaremos por $S(f)$ a coleção de todas as funções simples, mensuráveis, não-negativas e menores ou iguais a f:

$$S(f) \; := \; \Big\{ s : M \to \mathbb{R} | \; s \text{ é simples, mensurável e } 0 \leq s(x) \leq f(x) \text{ para todo } x \in M \Big\} \, .$$

O Lema 31.3 nos ensinou que $S(f)$ é não-vazio e que há até mesmo sequências em $S(f)$ que convergem a f. Definimos então para $E \subset M$ com $E \in \mathcal{M}$,

$$\int_E f \, d\mu \; := \; \sup_{s \in S(f)} \int_E s \, d\mu \, . \tag{31.27}$$

Essa expressão define a *integral de Lebesgue da função f sobre o conjunto E em respeito à medida μ.*

A definição acima foi introduzida por Lebesgue como substituto à definição de integral devida a Riemann. Discutiremos suas virtudes mais adiante. Note que a definição acima é bastante geral, no sentido de não ser especificado o que é o conjunto M nem a medida μ. Por ora, a definição acima limita-se a funções não-negativas f. Logo mostraremos como essa definição pode ser estendida para funções que podem ser negativas ou complexas.

Se f_n é uma sequência monótona não-decrescente de funções simples mensuráveis de $S(f)$ que converge a f (que tal existe, garante-nos o Lema 31.3) é possível mostrar que

$$\int_E f \, d\mu \; = \; \lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu \, . \tag{31.28}$$

A expressão (31.28) pode ser tomada como definição alternativa equivalente de $\int_E f \, d\mu$ e, de fato, alguns autores assim o fazem. A equivalência das duas definições é demonstrada no Apêndice 31.E, página 1505. Seu estudo é dispensável em uma primeira leitura.

• A integração de Lebesgue e conjuntos de medida zero

Dentre as propriedades da integral definida acima, a seguinte observação terá um papel importante a desempenhar.

Proposição 31.7 *Seja $(M, \mathcal{M})$ um espaço de medida e seja $f : M \to \mathbb{R}_+$ uma função $[\mathcal{M}, \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável tal que $\int_E f \, d\mu = 0$ para algum $E \in \mathcal{M}$. Então $f = 0$ μ-q.t.p. em E.* □

Prova. Seja $E_n = \{x \in M | \; f(x) > 1/n\} \cap E = \{x \in E | \; f(x) > 1/n\}$. Pela Proposição 31.12 da página 1501, tem-se $E_n \in \mathcal{M}$. É claro pela definição de E_n que $f \geq \frac{1}{n}\chi_{E_n}$. Portanto, a função simples $\frac{1}{n}\chi_{E_n}$ é um elemento de $S(f)$ e, pela definição (31.27) da integral de Lebesgue, segue que

$$0 \; = \; \int_E f \, d\mu \; \geq \; \int_E \frac{1}{n}\chi_{E_n} \, d\mu \; = \; \frac{1}{n}\mu(E_n) \, ,$$

ou seja, $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note-se agora que $\{x \in E | \; f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Logo, $\mu(\{x \in E | \; f(x) > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0$, provando que $f = 0$ μ-q.t.p em E. ■

• Funções integráveis

Como acima, seja M não-vazio, $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra de M na qual definimos uma medida μ. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. f é dita ser *integrável em M* se

$$\int_M |f| \, d\mu \; < \; \infty \, .$$

Como $|f| = f^+ + f^-$, sendo ambas $f^{\pm}$ não-negativas e mensuráveis, segue que $\int_M f^+ \, d\mu < \infty$ e $\int_M f^- \, d\mu < \infty$. Com isso, e como $f = f^+ - f^-$, sendo ambas $f^{\pm}$ não-negativas, é natural definir

$$\int_M f \, d\mu \; := \; \int_M f^+ \, d\mu - \int_M f^- \, d\mu \, .$$

As integrais do lado direito são finitas e, portanto, sua diferença está bem definida.

• Propriedades elementares da integração

As seguintes propriedades das integrais de funções integráveis são válidas e podem ser facilmente verificadas:

$$\int_E (\alpha f)\, d\mu \;=\; \alpha \int_E f\, d\mu\,, \tag{31.29}$$

$$\int_E (f_a + f_b)\, d\mu \;=\; \int_E f_a\, d\mu + \int_E f_b\, d\mu\,, \tag{31.30}$$

$$\int_E f_1\, d\mu \;\leq\; \int_E f_2\, d\mu \quad \text{se} \quad f_1(x) \leq f_2(x), \quad \forall x \in E\,. \tag{31.31}$$

Acima, f, f_a, f_b, f_1 e f_2 são funções integráveis reais quaisquer e $\alpha \in \mathbb{R}$, constante.

E. 31.15 *Exercício (recomendado a quem deseja testar se está realmente acompanhando a exposição).* Demonstre as propriedades elementares acima. ✠

Uma outra propriedade relevante de demonstração simples é a seguinte se $f : M \to \mathbb{R}$ for integrável,

$$\left|\int_E f\, d\mu\right| \;\leq\; \int_E |f|\, d\mu\,. \tag{31.32}$$

Isso segue das seguintes linhas:

$$\begin{aligned}
\left|\int_E f\, d\mu\right| &= \left|\int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu\right| \;\leq\; \left|\int_E f^+\, d\mu\right| + \left|\int_E f^-\, d\mu\right| \\
&= \int_E f^+\, d\mu + \int_E f^-\, d\mu \;=\; \int_E (f^+ + f^-)\, d\mu \\
&= \int_E |f|\, d\mu\,.
\end{aligned}$$

• Funções complexas integráveis

Caso f seja uma função complexa, $f : M \to \mathbb{C}$, procede-se de forma semelhante. Como antes, f é dita ser *integrável em* M se

$$\int_M |f|\, d\mu \;<\; \infty\,.$$

Denotemos por $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ as partes real e imaginária de f. Como $|f| = \sqrt{|\mathrm{Re}(f)|^2 + |\mathrm{Im}(f)|^2}$ é mensurável pela Proposição 31.16, página 1503, é claro que $|\mathrm{Re}(f)| \leq |f|$, $|\mathrm{Im}(f)| \leq |f|$ e, de (31.31), segue que

$$\int_M |\mathrm{Re}(f)|\, d\mu \;\leq\; \int_M |f|\, d\mu \;<\; \infty \qquad \text{e} \qquad \int_M |\mathrm{Im}(f)|\, d\mu \;\leq\; \int_M |f|\, d\mu \;<\; \infty\,. \tag{31.33}$$

Com isso, tanto $\mathrm{Re}(f)$ quanto $\mathrm{Im}(f)$ são funções reais e integráveis e podemos aplicar a definição acima e escrever

$$\int_M \mathrm{Re}(f)\, d\mu \;=\; \int_M \big(\mathrm{Re}(f)\big)^+ d\mu - \int_M \big(\mathrm{Re}(f)\big)^- d\mu\,,$$

$$\int_M \mathrm{Im}(f)\, d\mu \;=\; \int_M \big(\mathrm{Im}(f)\big)^+ d\mu - \int_M \big(\mathrm{Im}(f)\big)^- d\mu\,.$$

Com isso, é natural definir a integral de f por

$$\begin{aligned}
\int_M f\, d\mu \;&:=\; \int_M \mathrm{Re}(f)\, d\mu + i\int_M \mathrm{Im}(f)\, d\mu \\
&= \left[\int_M \big(\mathrm{Re}(f)\big)^+ d\mu - \int_M \big(\mathrm{Re}(f)\big)^- d\mu\right] + i\left[\int_M \big(\mathrm{Im}(f)\big)^+ d\mu - \int_M \big(\mathrm{Im}(f)\big)^- d\mu\right]\,.
\end{aligned} \tag{31.34}$$

Todos os quatro termos acima são finitos e a soma dos mesmos é, portanto, bem definida.

Chegamos dessa forma ao propósito de definir a noção de integral para funções mensuráveis e integráveis, reais ou complexas. Recapitulando, nossos passos foram 1) definir a integral de funções simples não-negativas e integráveis; 2) definir a integral de funções reais, mensuráveis e não-negativas a partir da integral de funções simples; 3) definir a integral de funções reais e integráveis a partir da integral de funções reais, mensuráveis e não-negativas ; 4) definir a integral de funções complexas e integráveis a partir da integral de suas partes real e imaginária.

• Propriedades elementares da integração de funções complexas

As seguintes propriedades das integrais de funções integráveis são válidas e podem ser facilmente verificadas:

$$\int_E (\alpha f)\, d\mu \;=\; \alpha \int_E f\, d\mu\;, \tag{31.35}$$

$$\int_E (f_a + f_b)\, d\mu \;=\; \int_E f_a\, d\mu + \int_E f_b\, d\mu\;, \tag{31.36}$$

Acima, f, f_a e f_b são funções integráveis e complexas quaisquer e $\alpha \in \mathbb{C}$, constante.

E. 31.16 *Exercício (recomendado a quem deseja testar se está realmente acompanhando a exposição).* Demonstre as propriedades elementares acima. Sugestão: use a definição (31.28). ✠

A desigualdade (31.32) se deixa generalizar para funções integráveis complexas, mas a prova é mais engenhosa: se $f : M \to \mathbb{C}$ for integrável, então

$$\left|\int_E f\, d\mu\right| \;\leq\; \int_E |f|\, d\mu\;. \tag{31.37}$$

Para provar isso, notemos que, pela Proposição 31.16, página 1503, $|f| = \sqrt{(\mathrm{Re}(f))^2 + (\mathrm{Im}(f))^2}$ é $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável se $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ o forem. Fora isso, já vimos acima que $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ são integráveis se f o for. A integral $\int_E f\, d\mu$ é um número complexo e, portanto, pode ser escrito na forma polar

$$\int_E f\, d\mu \;=\; e^{i\varphi}\left|\int_E f\, d\mu\right| .$$

A função $g := e^{-i\varphi} f$ é mensurável e integrável, como facilmente se vê. Temos que

$$\int_E \mathrm{Re}(g)\, d\mu + i\int_E \mathrm{Im}(g)\, d\mu \;=\; \int_E g\, d\mu \;=\; \int_E e^{-i\varphi} f\, d\mu \;\stackrel{(31.35)}{=}\; e^{-i\varphi}\int_E f\, d\mu \;=\; \left|\int_E f\, d\mu\right| \;\geq\; 0\;.$$

Como $\left|\int_E f\, d\mu\right|$ é um número real, segue que $\int_E \mathrm{Im}(g)\, d\mu = 0$ e que $\int_E \mathrm{Re}(g)\, d\mu \geq 0$. Logo,

$$\left|\int_E f\, d\mu\right| \;=\; \int_E \mathrm{Re}(g)\, d\mu \;=\; \left|\int_E \mathrm{Re}(g)\, d\mu\right| \;\stackrel{(31.32)}{\leq}\; \int_E |\mathrm{Re}(g)|\ d\mu \;\stackrel{(31.33)}{\leq}\; \int_E |g|\ d\mu \;=\; \int_E |f|\ d\mu\;,$$

completando a prova de (31.37).

• Os conjuntos $\mathcal{L}_p(M,\ d\mu)$

Antes de passarmos a exemplos, vamos rapidamente introduzir uma notação importante.

Se $(M,\ \mathcal{M})$ é um espaço mensurável e μ é uma medida em M, denotaremos o conjunto das funções integráveis em M em relação à medida μ por $\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$:

$$\mathcal{L}_1(M,\ d\mu) \;:=\; \left\{ f : M \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ é } [\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{C}}]]\text{-mensurável e } \int_M |f|\, d\mu \;<\; \infty \right\} .$$

Muito importantes são também os espaços $\mathcal{L}_p(M,\ d\mu)$, definidos por

$$\mathcal{L}_p(M,\ d\mu) \;:=\; \left\{ f : M \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ é } [\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{C}}]]\text{-mensurável e } \int_M |f|^p\, d\mu \;<\; \infty \right\} ,$$

onde p, em princípio, é um número real positivo $p > 0$. Os espaços $\mathcal{L}_p(M,\ d\mu)$ com $p \geq 1$ serão discutidos com mais detalhe adiante.

• Exemplos. Integração com a medida delta de Dirac

Vamos a alguns exemplos ilustrativos. Considere $M = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathbb{P}(\mathbb{R})$ e $\mu = \delta_{x_0}$ para $x_0 \in \mathbb{R}$, a medida delta de Dirac definida no item 2 da página 1391.

Seja $s(x)$ uma função simples definida em $\mathbb{R}$ com forma normal $s(x) = \sum_{k=1}^{n} s_k \chi_{A_k}(x)$. Vamos supor que $x_0 \in A_{k_0}$. É claro que $s(x_0) = s_{k_0}$. Teremos também pela definição (28.3), página 1391,

$$\int_{\mathbb{R}} s \, d\delta_{x_0} \ = \ \sum_{k=1}^{n} s_k \, \delta_{x_0}(A_k) \ = \ s_{k_0} \ = \ s(x_0) \ . \tag{31.38}$$

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é mensurável, e f_n é uma sequência de funções simples que converge a f, teremos obviamente que $f_n(x_0) \to f(x_0)$ e, por (31.38), $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\delta_{x_0} = f_n(x_0)$. Assim, por (31.28), segue que

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_{x_0} \ = \ f(x_0) \ . \tag{31.39}$$

O estudante deve constatar que essa expressão corresponde precisamente à bem conhecida propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx \ = \ f(x_0)$$

que comummente se associa em textos de Física à "função" delta de Dirac.

Nota para os estudantes mais avançados. Além da *medida delta de Dirac* existe também a *distribuição delta de Dirac* (vide página 1922). Ainda que muito semelhantes, esses objetos são distintos matematicamente: o primeiro é uma medida, o segundo é uma distribuição, ou seja, um funcional linear contínuo em um certo espaço de Fréchet de funções infinitamente diferenciáveis (e que decaem rápido o suficiente no infinito). Com a medida delta de Dirac podemos integrar qualquer função, como em (31.39). Com a distribuição delta de Dirac podemos integrar funções infinitamente diferenciáveis (e que decaem rápido o suficiente no infinito). Essa aparente limitação é compensada pelo fato de se poder falar em derivadas da distribuição delta de Dirac, mas não da medida delta de Dirac. ♣

• Exemplos. Integração com a medida de contagem. Relação com os espaços ℓ_p

Seja $M = \{m_1,\ \ldots,\ m_n\}$ um conjunto finito e seja $\mathcal{M} = \mathbb{P}(M)$. Toda função $f : M \to \mathbb{R}$ é simples e mensurável em relação a $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$ (por quê?). Seja μ_c a medida de contagem em M, que foi introduzida à página 1391. Tem-se que

$$\int_M f \, d\mu_c \ = \ \sum_{k=1}^{n} f(m_k) \ .$$

Seja $M = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathbb{P}(\mathbb{N})$ e seja μ_c a medida de contagem em $\mathbb{N}$. Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é uma função simples então

$$\int_M f \, d\mu_c \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \ .$$

Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é μ_c-integrável se

$$\int_M |f| \, d\mu_c \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} |f(k)| \ < \ \infty \ ,$$

e sua integral é

$$\int_M f \, d\mu_c \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \ .$$

Observe que o fato de $\sum_{k=1}^{\infty} |f(k)| < \infty$ implica que a série $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ é convergente (por ser uma série absolutamente somável. Vide os bons livros de Cálculo).

E. 31.17 *Exercício*. Demonstre todas as afirmações feitas acima. ✠

O estudante pode convencer-se com o apresentado acima que o conjunto $\mathcal{L}_1(\mathbb{N},\ d\mu_c)$ das funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ integráveis em relação à medida de contagem μ_c coincide com o conjunto de sequências ℓ_1 que introduzimos na Seção 24.5.1, página 1278. Os conjuntos $\mathcal{L}_p(\mathbb{N},\ d\mu_c)$ coincidem com os conjuntos de sequências ℓ_p, também lá introduzidos.

- **Exemplos. A integral de Lebesgue em $\mathbb{R}$**

Um outro importante exemplo é aquele no qual tomamos $M = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$, a σ-álgebra dos conjuntos Borelianos de $\mathbb{R}$ e $\mu = \mu_L$, a medida de Lebesgue. O conjunto $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}\ , \mu_L)$ de funções integráveis inclui também funções contínuas que decaem rapidamente no infinito, tais como e^{-x^2}, $(1 + x^2)^{-1}$ etc. O conjunto $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}\ , \mu_L)$ inclui funções que não são limitadas. Um exemplo a se ter em mente é o da função

$$f(x) \ = \ \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & 0 < |x| \leq 1 \\[2ex] 0, & x = 0 \text{ ou } |x| > 1 \end{cases}$$

Essa função, apesar de divergir para $x \to 0$, é um elemento de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}\ , \mu_L)$, pois a singularidade $1/\sqrt{|x|}$ é integrável em 0.

E. 31.18 *Exercício*. Mostre isso! ✠

Um tanto surpreendentemente, $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}\ , \mu_L)$ também contém funções não-limitadas, mas que são limitadas em qualquer região finita. Um exemplo interessante é o da função

$$f(x) \ = \ \begin{cases} n, & \text{para } x \text{ em cada intervalo } \left[n,\ n + \dfrac{1}{n^3}\right),\ n \in \mathbb{N}\ , \\[2ex] 0, & \text{de outra forma }\ , \end{cases}$$

ou seja,

$$f(x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} n\, \chi_{\left[n,\ n+\frac{1}{n^3}\right)}(x)\ .$$

É claro que f não é limitada em todo $\mathbb{R}$, mas é limitada em qualquer região finita. Tem-se, porém,

$$\int_{\mathbb{R}} |f|\, d\mu_L \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ < \ \infty$$

e, portanto, $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}\ , \mu_L)$.

E. 31.19 *Exercício*. Mostre isso! ✠

E. 31.20 *Exercício*. Construa exemplos análogos de elementos de $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}\ , \mu_L)$, $p \geq 1$, que não são funções limitadas. ✠

31.3.3 A Integral de Lebesgue e sua Relação com a de Riemann

Uma vez desenvolvidos os ingredientes básicos da teoria de integração de Lebesgue, voltemo-nos brevemente à questão de estabelecer sua relação com a integração de Riemann.

- **As integrais de Riemann e Lebesgue em intervalos compactos**

Tratemos primeiramente de funções definidas em conjuntos compactos da reta real. Vale a seguinte afirmação:

Teorema 31.2 *Seja $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ uma função Boreliana e limitada. Então, se f for integrável no sentido de Riemann, f é também integrável no sentido de Lebesgue (para a integral de Lebesgue em $[a,\ b]$) e as duas integrais são idênticas.* □

Esse teorema afirma que em intervalos finitos como $[a,\ b]$ a integral de Lebesgue coincide com a de Riemann, pelo menos para funções integráveis por Riemann e limitadas. Esse resultado é satisfatório pois diz-nos que a teoria da integração de Lebesgue estende a de Riemann, pelo menos nesse sentido. A demonstração do Teorema 31.2 é apresentada no Apêndice 31.I, página 1510, e faz uso do Lema de Fatou e do Teorema da Convergência Dominada, que introduziremos na Seção 31.3.4, logo adiante.

O Teorema 31.2 estabeleceu uma relação entre as integrais de Riemann e de Lebesgue no caso de intervalos finitos da reta real. O que se pode dizer para intervalos não-finitos? Como a integral de Riemann foi definida na Seção 31.2, página 1457, apenas para funções limitadas em intervalos finitos, a primeira questão a resolver é definí-la em intervalos não-finitos, como $\mathbb{R}$. Isso foi discutido na Seção 31.2.1, página 1465, ao introduzirmos a noção de integral de Riemann imprópria.

• A integral de Riemann imprópria e sua relação com a de Lebesgue em $\mathbb{R}$

No caso de f ser também positiva (o que não é necessário para a definição 31.10) também podemos estabelecer uma relação entre as integral de Riemann imprópria e de Lebesgue. Isso é expresso no seguinte

Teorema 31.3 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ uma função positiva e Boreliana e tal que f é integrável no sentido de Riemann em todo intervalo finito $[a,\ b]$. Então, f é integrável no sentido de Lebesgue em $\mathbb{R}$ se e somente se a integral de Riemann imprópria existir e, nesse caso, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ coincide com a integral de Lebesgue $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu_L$.* □

A demonstração desse teorema também encontra-se no Apêndice 31.I, página 1510.

As condições dos Teoremas 31.2 e 31.3 não são ainda as mais gerais possíveis para garantir a igualdade entre a integral de Riemann (normal ou imprópria) e a de Lebesgue, mas não trataremos de generalizações aqui e remetemos o leitor interessado aos bons livros. Nesse contexto, vale fazer o seguinte comentário. O Teorema 31.3 estabeleceu a relação entre a integral de Riemann imprópria e a integral de Lebesgue em $\mathbb{R}$, mas somente para funções não-negativas. Valerá uma relação assim para funções mais gerais? A resposta, infelizmente, pode ser negativa em alguns casos, como mostra o exemplo do qual trataremos a seguir.

• Limitações da integral de Lebesgue

É importante chamar a atenção do leitor para uma limitação da integração de Lebesgue em $\mathbb{R}$, a qual pode ser ilustrada pelo exemplo a seguir (encontrado em vários livros-textos).

Seja a função $f(x) = \frac{\mathrm{sen} x}{x}$. É claro que f é Boreliana (pois é contínua) e limitada. Porém, f não se enquadra no Teorema 31.3, acima, por não ter um sinal definido. Será f integrável em $\mathbb{R}$, ou seja, será $\int_{\mathbb{R}} |f|\,d\mu_L < \infty$? Como f satisfaz $f(x) = f(-x)$ para todo x, é suficiente estudar f para $x \geq 0$. Em cada intervalo $[(n-1)\pi,\ n\pi]$, com $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, vale

$$\frac{|\,\mathrm{sen} x|}{|x|} \;\geq\; \frac{|\,\mathrm{sen} x|}{n\pi}\ .$$

Assim, para todo $N \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|f|(x) \;\geq\; \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\pi}\,|\,\mathrm{sen} x|\ \chi_{[(n-1)\pi,\ n\pi]}(x)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f|\,d\mu_L \;\geq\; \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\pi} \int_{\mathbb{R}_+} |\,\mathrm{sen} x|\ \chi_{[(n-1)\pi,\ n\pi]}(x)\ d\mu_L \;=\; \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\pi} \int_{[(n-1)\pi,\ n\pi]} |\,\mathrm{sen} x|\ d\mu_L\ .$$

É claro que a função $|\,\mathrm{sen} x|$ é Boreliana (pois é contínua) e limitada. Aplicando o Teorema 31.2, tem-se

$$\int_{[(n-1)\pi,\ n\pi]} |\,\mathrm{sen} x|\,d\mu_L \;=\; \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\,\mathrm{sen} x|\,dx\ ,$$

a integral à direita sendo a familiar integral de Riemann. Fazendo a mudança de variáveis $x \to x - (n-1)\pi$, escrevemos

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\,\mathrm{sen} x|\,dx \;=\; \int_0^{\pi} |(-1)^{n-1}\,\mathrm{sen} x|\,dx \;=\; \int_0^{\pi} \mathrm{sen} x\,dx \;=\; 2\ ,$$

pois sen$x$ é não-negativa em $[0, \pi]$. Assim, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f| \, d\mu_L \ \geq \ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \, .$$

Agora, como é bem sabido, a soma do lado direito diverge quando $N \to \infty$. Logo, $\int_{\mathbb{R}_+} |f| \, d\mu_L = \infty$ e, consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\mu_L \ = \ \infty. \tag{31.40}$$

Note que nem mesmo $\int_{\mathbb{R}} f^+, d\mu_L$ ou $\int_{\mathbb{R}} f^- \, d\mu_L$ são finitas (justifique!).

A expressão (31.40) significa que $f \notin \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \ d\mu_L)$ e, portanto, $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_L$ não está definida. Sucede, porém, que a integral de Riemann *imprópria* (vide definição (31.10)),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} \, dx \ := \ \lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} \frac{\text{sen}x}{x} \, dx$$

existe, e vale π.

Esse exemplo ensina-nos que há funções que possuem uma integral de Riemann imprópria, mas não uma integral de Lebesgue em $\mathbb{R}$.

Por que o limite $\int_{-A}^{A} \frac{\text{sen}x}{x} \, dx$ existe mas $\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\text{sen}x}{x} \right| d\mu_L$ não? A resposta reside na observação que a função $\frac{\text{sen}x}{x}$ troca de sinal infinitas vezes e isso produz cancelamentos nas integrais $\int_{-A}^{A} \frac{\text{sen}x}{x} \, dx$ que permitem a convergência do limite $A \to \infty$. A função $\left| \frac{\text{sen}x}{x} \right|$, porém, é cega a essas trocas de sinal, devido à presença do módulo.

Na integração de Lebesgue, ao concentrarmo-nos na integrabilidade do módulo de uma função f, como acima, perdemos informação sobre oscilações e trocas de sinal da mesma que podem ser relevantes para certos propósitos[25]. Esse fato pode ser interpretado como uma deficiência da integração de Lebesgue.

- **A integral de Riemann generalizada, ou integral de Kurzweil-Henstock**

Um outro problema, não totalmente disjunto daquele acima, que a integração de Lebesgue (e de Riemann) enfrenta refere-se a dar sentido a integrais de certas funções que possuam descontinuidades essenciais na região (mesmo compacta) onde estamos interessadas em integrá-la. Um exemplo (histórico) é a função $f(x) = \frac{1}{x} \text{sen}\left(\frac{1}{x^3}\right)$, para $x \neq 0$, com $f(0) = 0$ (ou qualquer outra escolha finita). Tal função não é integrável por Riemann nem por Lebesgue no intervalo $[0, \ 1]$ (Exercício: justifique essas afirmações!). No entanto, parece razoável querer integrá-la nesse intervalo, pois um resultado finito pode ser obtido pelo procedimento de tomada do Valor Principal (que descrevemos na Seção 37.3.2.1, página 1925): realizando primeiramente a integração no intervalo $[\delta, \ 1]$, com $0 < \delta < 1$, e depois tomando-se o limite $\delta \to 0$ (é fácil ver por uma simples mudança de variável que $\int_{\delta}^{1} \frac{1}{x} \text{sen}\left(\frac{1}{x^3}\right) du = \frac{1}{3} \int_{1}^{\delta^{-3}} \frac{\text{sen}y}{y} dy$, cujo limite $\delta \to 0$ é bem definido).

Para levar em conta casos como esses, onde tanto a integração de Riemann como a de Lebesgue falham, diversos autores como Perron[26], Denjoy[27], Luzin[28], Henstock [29] e Kurzweil[30] conceberam uma nova teoria de integração, conhecida como *integração de Henstock-Kurzweil*, muito similar à nossa definição **Ic** da noção de integração de Riemann, e que estende ainda mais a teoria de integração de Lebesgue. Não falaremos sobre essa integral aqui, ainda que sua definição seja muito simples. Infelizmente, ainda que a coleção de todas as funções integrais segundo Henstock-Kurzweil contenha a coleção das funções integrais segundo Lebesgue e formem um espaço vetorial topológico normado, este não é completo e, talvez por isso, de menor interesse para o estudo de espaços de Banach e de Hilbert. Deve-se dizer, porém, que devido à simplicidade de sua definição e das demonstrações de muitas de suas propriedades, muitos advogam que a integral de Henstock-Kurzweil deveria ser a primeira a ser apresentada em cursos introdutórios de Cálculo e Análise.

Para mais detalhes sobre a integral de Henstock-Kurzweil, vide, *e.g.*, [31].

[25] Aos estudantes mais avançados notamos que esse é um dos problemas que têm impedido a definição matematicamente precisa da integração funcional de Feynman da Mecânica Quântica e da Teoria Quântica de Campos (quando formuladas no espaço-tempo de Minkowski). Já a chamada integral funcional de Feynman-Kac, definida no espaço-tempo Euclidiano, pode ser bem definida, por não sofrer desses problemas (vide e.g. [149] ou [336, 337, 338, 339]). Para uma exposição introdutória sobre a integração funcional de Feynman na Mecânica Quântica, vide, por exemplo, [309], ou bons livros de Mecânica Quântica.

[26] Oskar Perron (1880–1975).

[27] Arnaud Denjoy (1884–1974).

[28] Nikolai Nikolaevich Luzin (1883–1950).

[29] Ralph Henstock (1923–2007).

[30] Jaroslav Kurzweil (1926–).

31.3.4 Teoremas Básicos sobre Integração e Convergência

Nesta seção apresentaremos alguns teoremas importantes sobre a integral de Lebesgue e que descrevem o comportamento da mesma relativamente a operações de tomada de limites. De um ponto de vista técnico esses teoremas têm uma importância central e pode-se mesmo dizer que sua validade é uma das principais razões do interesse na integral de Lebesgue, em comparação a outras integrais, como a de Riemann. Historicamente os teoremas de convergência abaixo emergiram de trabalhos de Lebesgue, Levi[31] e Fatou[32].

• O Teorema da Convergência Monótona

Teorema 31.4 (Teorema da Convergência Monótona) *Seja* $(M, \mathcal{M})$ *um espaço mensurável onde encontra-se definida uma medida* μ. *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência não-decrescente de funções não-negativas* $f_n : M \to \mathbb{R}$*, ou seja,* $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \cdots \leq \infty$*, sendo todas* $[\mathcal{M}, \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$*-mensuráveis. Suponhamos também que* $f : M \to \mathbb{R}$ *seja tal que para cada* $x \in M$ *a sequência* $f_n(x)$ *convirja a* $f(x)$.

Então, a função f *é também* $[\mathcal{M}, \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$*-mensurável e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu \; = \; \int_M f \, d\mu \; . \tag{31.41}$$

□

A demonstração é apresentada no Apêndice 31.F, página 1507.

Para apreciarmos a relevância do Teorema da Convergência Monótona, consideremos o seguinte exemplo. Seja $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_k\}$, onde $\mathbb{N} \ni k \to r_k \in \mathbb{Q}$ é uma contagem de $\mathbb{Q}$. Defina-se, para $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) \; = \; \begin{cases} 2, & \text{se } x \in \{r_1, \ldots, r_n\} \\ e^{-x^2}, & \text{de outra forma} \end{cases} \; .$$

É fácil ver que cada função f_n é $[\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}], \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável (faça-o!) e que $f_n \leq f_{n+1}$ para todo n. Essas funções f_n são integráveis por Riemann (pois são contínuas por partes). É também fácil ver que $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu_L = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$.

Agora, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ é dada, para $x \in \mathbb{R}$, por

$$f(x) \; = \; \begin{cases} 2, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ e^{-x^2}, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

e é também mensurável. Tem-se também que $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu_L = \sqrt{\pi}$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu_L \; = \; \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_L \; ,$$

como se vê, e como garante o Teorema da Convergência Monótona. Essa igualdade, porém, não faria sentido para a integral de Riemann, pois f, ao contrário das funções f_n, não é integrável por Riemann.

Condições suficientes para se poder comutar uma integral de Riemann com um limite de uma sequência de funções são geralmente muito mais restringentes que o exigido no Teorema da Convergência Monótona e requerem, por exemplo, convergência uniforme dessa sequência.

• Uma aplicação: troca de limites em sequências

Seja $s_{m,\,n}$, com $m, \; n \in \mathbb{N}$, uma sequência (dupla) de números reais. De acordo com a ideologia dominante em cursos de Física e Engenharia, uma troca de ordem de limites como $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty} s_{m,\,n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{m\to\infty} s_{m,\,n}\right)$ é sempre

[31] Beppo Levi (1875–1961).
[32] Pierre Joseph Louis Fatou (1878–1929).

permitida. Considere-se, porém a sequência $s_{m,\,n} = \exp\big(-2^{m-n}\big)$. Para ela temos

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\exp\big(-2^{m-n}\big)\right) \;=\; \lim_{m\to\infty} 1 \;=\; 1\;, \qquad \text{mas} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\exp\big(-2^{m-n}\big)\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} 0 \;=\; 0\;.$$

Esse exemplo mostrou uma situação muito simples em que a troca de ordem de limites não é admissível.

É relevante, portanto, determinar condições sob as quais seja possível trocar a ordem de limites. Apresentaremos no que segue condições que, pelo Teorema da Convergência Monótona, são suficientes para garantir isso.

Proposição 31.8 *Para $m,\ n \in \mathbb{N}$, seja $s_{m,\,n}$ uma sequência dupla de números reais tais que: 1º para todos $n,\ m \in \mathbb{N}$ vale $s_{m+1,\,n} \geq s_{m,\,n}$; 2º para para todos $n,\ m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, vale $d_{m,\,n+1} \geq d_{m,\,n}$, onde $d_{m,\,n} := s_{m,\,n} - s_{m-1,\,n}$. Então,*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s_{m,\,n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s_{m,\,n}\right)\,.$$

□

Prova. A condição $s_{m+1,\,n} \geq s_{m,\,n}$ significa que $d_{m,\,n} \geq 0$. Para simplificar a notação declaremos também que $s_{0,\,n} = 0$ para todo n.

Consideremos $M = \mathbb{N}$ e a medida de contagem em $\mathbb{N}$. Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função de m dada por $f_n(m) := d_{m,\,n}$. Pelas hipóteses, cada f_n é positiva e $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots$. Assim, aplica-se o Teorema da Convergência Monótona, Teorema 31.4, página 1486, e temos

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m\in\mathbb{N}} d_{m,\,n} \;=\; \sum_{m\in\mathbb{N}}\lim_{n\to\infty} d_{m,\,n}\;.$$

As somas acima são, em verdade, limites de somas finitas, e podemos escrever

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{M\to\infty}\sum_{m=1}^{M} d_{m,\,n} \;=\; \lim_{M\to\infty}\sum_{m=1}^{M}\lim_{n\to\infty} d_{m,\,n} \;=\; \lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{M} d_{m,\,n}\;.$$

Sucede que

$$\sum_{m=1}^{M} d_{m,\,n} \;=\; s_{M,\,n} - s_{0,\,n} \;=\; s_{M,\,n}\;.$$

Logo, estalelecemos que

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{M\to\infty} s_{M,\,n} \;=\; \lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{M,\,n}\;,$$

como desejávamos. ■

• O Lema de Fatou

O seguinte lema, denominado Lema de Fatou, possui várias aplicações, sendo também importante na demonstração do Teorema da Convergência Dominada, do qual trataremos logo adiante, assim como na demonstração do Teorema 31.2, da página 1483, acima, que tratou da relação entre as integrais de Riemann e Lebesgue em intervalos finitos da reta real.

O Teorema da Convergência Monótona, Teorema 31.4, tratava de sequências monótonas não-decrescentes de funções positivas e mensuráveis da reta real e estabelecia a possibilidade de troca de limites com a integração expressa em (31.41). Podemos nos perguntar, e se tivermos uma sequência de funções positivas e mensuráveis mas que não seja monótona não-decrescente? Valerá a inversão de limites com a integral em (31.41)? A resposta, em geral, é não, mas ainda assim, vale o seguinte:

Teorema 31.5 (Lema de Fatou) *Seja $(M,\ \mathcal{M})$ um espaço mensurável onde encontra-se definida uma medida μ. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções não-negativas e $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensuráveis $f_n : M \to \mathbb{R}$. Então,*

$$\int_M \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \;\leq\; \liminf_{n\to\infty}\int_M f_n\, d\mu\;. \tag{31.42}$$

□

A demonstração encontra-se no Apêndice 31.G, página 1508. O Lema de Fatou será usado logo abaixo para demonstrar um outro resultado ainda mais relevante, o Teorema da Convergência Dominada.

Nem sempre vale a igualdade em (31.42). Isso é mostrado nos dois exercícios seguintes.

E. 31.21 *Exercício*. Seja a seguinte sequência de funções Borelianas da reta real

$$f_n(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } x \in [-n,\ n], \\[6pt] 0, & \text{se } x \notin [-n,\ n], \end{cases}$$

para $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ e, portanto,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu_L \;=\; 0 \; .$$

Por outro lado, $\int_{\mathbb{R}} f_n = 2$ para todo n e, portanto,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu_L \;=\; 2 \; .$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \;<\; \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu \; .$$

✠

Em alguns casos pode-se ter uma igualdade em (31.42).

E. 31.22 *Exercício*. Seja a seguinte sequência de funções Borelianas da reta real

$$f_n(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & \text{se } x \in [-n,\ n], \\[6pt] 0, & \text{se } x \notin [-n,\ n], \end{cases}$$

para $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ e, portanto,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu_L \;=\; 0 \; .$$

Porém, $\int_{\mathbb{R}} f_n = 2/n$ para todo n e, portanto,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu_L \;=\; 0 \; .$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \;=\; \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu \; .$$

✠

• O Teorema da Convergência Dominada

Teorema 31.6 (Teorema da Convergência Dominada) *Seja $(M,\ \mathcal{M})$ um espaço mensurável onde encontra-se definida uma medida μ. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{C}}]]$-mensuráveis $f_n : M \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, tais que o limite $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe para todo $x \in M$. Suponha ainda que exista uma função não-negativa $F \in \mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$ tal que $|f_n(x)| \leq F(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in M$. Então:*

1. $f \in \mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$,

2.
$$\lim_{n\to\infty} \int_M |f - f_n| \, d\mu \;=\; 0 \; ,$$

3.

$$\lim_{n\to\infty}\int_M f_n\,d\mu \;=\; \int_M \Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)\,d\mu \;=\; \int_M f\,d\mu\;.$$

□

A demonstração encontra-se na Apêndice 31.H, página 1509.

Para estudar uma situação na qual o do Teorema da Convergência Dominada, Teorema 31.6, se aplica, faça o seguinte exercício.

E. 31.23 *Exercício*. Seja a seguinte sequência de funções Borelianas da reta real

$$f_n(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & \text{se } x\in[-n,\;n],\\[2mm] 0, & \text{se } x\notin[-n,\;n],\end{cases}$$

onde $n\in\mathbb{N}$. Mostre que há uma função $F\in L_1(\mathbb{R}\;d\mu_L)$ tal que $|f_n(x)|\leq F(x)$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e todo $x\in\mathbb{R}$. Justifique então, *com base nesse fato*, se a inversão da integral pelo limite $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\;d\mu_L = \int_{\mathbb{R}}(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)\;d\mu_L$ é possível. Verifique explicitamente que a igualdade é verdadeira. ✠

Para constatar a relevância da condição básica do Teorema da Convergência Dominada, Teorema 31.6, a saber, a existência de uma função não-negativa $F\in\mathcal{L}_1(M,\;d\mu)$ tal que $|f_n(x)|\leq F(x)$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e todo $x\in M$, faça o seguinte exercício.

E. 31.24 *Exercício*. Seja a seguinte sequência de funções Borelianas da reta real

$$f_n(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } x\in[-n,\;n],\\[2mm] 0, & \text{se } x\notin[-n,\;n],\end{cases}$$

para $n\in\mathbb{N}$. Mostre que não há nenhuma função $F\in L_1(\mathbb{R},\;d\mu_L)$ tal que $|f_n(x)|\leq F(x)$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e todo $x\in\mathbb{R}$. Sugestão: construa a menor função F que satisfaz $|f_n(x)|\leq F(x)$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e todo $x\in\mathbb{R}$ e mostre que $\int_{\mathbb{R}}\;|F|\;d\mu_L=\infty$. Verifique explicitamente que a igualdade $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\;d\mu_L = \int_{\mathbb{R}}(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)\;d\mu_L$ não é verdadeira. ✠

31.3.5 Alguns Resultados de Interesse

Os teoremas de convergência que vimos acima têm várias consequências importantes. Trataremos de algumas aqui. A primeira, e muito interessante, é uma generalização (de [348]) do Lema 31.4, página 1478.

Proposição 31.9 *Seja M não-vazio, $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra de M na qual definimos uma medida μ. Seja f uma função não-negativa e $[\mathcal{M},\;\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável. Para $E\in\mathcal{M}$ defina-se*

$$\varphi_f(E)\;:=\;\int_E f\,d\mu\;=\;\int_M f\,\chi_E\,d\mu\;.$$

Então φ_f é uma medida em $\mathcal{M}$. Além disso, para qualquer função não-negativa e $[\mathcal{M},\;\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável g tem-se

$$\int_M g\,d\varphi_f\;=\;\int_M g\,f\,d\mu\;. \tag{31.43}$$

□

A relação, (31.43) diz-nos algo como $d\varphi_f = f\,d\mu$. Essa relação tem apenas sentido simbólico, pois não atribuímos significado aos símbolos $d\varphi_f$ e $d\mu$. Ainda assim, podemos interpretar $d\varphi_f = f\,d\mu$ como estabelecendo uma relação entre as medidas φ_f e μ por uma espécie de mudança de variáveis.

Prova da Proposição 31.9. É claro que $\varphi_f(\emptyset) = 0$, pois $\chi_\emptyset$ é identicamente nula. Seja E_k, $k \in \mathbb{N}$, uma coleção contável e disjunta de elementos de $\mathcal{M}$ e seja $E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Como para todo $x \in M$

$$\chi_E(x) \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\chi_{E_k}(x) \qquad \text{(por quê?), segue que} \qquad (f\,\chi_E)(x) \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(x), \;\forall x \in M\;,$$

onde $f_k := f\,\chi_{E_k}$. A funções $F_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ são não-negativas, $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensuráveis e $F_n \leq F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplica-se, então o Teorema da Convergência Monótona, Teorema 31.4, página 1486, e tem-se

$$
\begin{aligned}
\varphi_f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \quad &= \quad \int_M \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k\right) d\mu \overset{\text{Teor. 31.4}}{=} \lim_{n\to\infty}\int_M \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right) d\mu \\
&\overset{\text{linearidade da integral}}{=} \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_M f_k\,d\mu \\
&= \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_M f\,\chi_{E_k}\,d\mu \\
&= \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\varphi_f(E_k)\;,
\end{aligned}
$$

provando que φ_f é uma medida.

Para provar (31.43), procedemos da seguinte forma. Para $E \in \mathcal{M}$ tem-se pela própria definição de φ_f.

$$\int_M \chi_E\,d\varphi_f \;=\; \varphi_f(E) \;=\; \int_M \chi_E\,f\,d\mu\;.$$

Assim, (31.43) vale pelo menos no caso espacial em que $g = \chi_E$. Logo, vale também no caso em que g é uma função simples. Seja por fim uma função g não-negativa e mensurável geral. Se g_n for uma sequência não-decrescente de funções simples e não-negativas de $S(g)$ que converge a g (que tal existe, garante-nos o Lema 31.3, página 1475), tem-se pela definição (31.28)

$$\int_E g\,d\varphi_f \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_E g_n\,d\varphi_f \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_E g_n\,f\,d\mu\;.$$

Agora, $g_n\,f$ é uma sequência não-decrescente (por quê?) de funções positivas e mensuráveis e que converge a $g\,f$ (por quê?). Aplicando mais uma vez o Teorema da Convergência Monótona, Teorema 31.4, página 1486, ao lado direito da última expressão, segue que

$$\int_E g\,d\varphi_f \;=\; \int_E \left(\lim_{n\to\infty} g_n\,f\right)\,d\mu \;=\; \int_E (g\,f)\,d\mu\;,$$

completando a demonstração. ■

Para entendermos melhor o significado de (31.43), tomemos o caso em que $M = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$, a σ-álgebra de Borel, $\mu = \mu_L$, a medida de Lebesgue e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função Boreliana e limitada em todos os intervalos finitos. Para $E = [a,\ b]$, um intervalo finito, teremos pelo Teorema 31.2, página 1483,

$$\varphi_f([a,\ b]) \;=\; \int_{[a,\ b]} f\,d\mu_L \;=\; \int_a^b f(x)\,dx\;.$$

Se f for tal que existe uma $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $F'(x) = f(x)$, o Teorema Fundamental do Cálculo diz-nos que

$$\varphi_f([a,\ b]) \;=\; F(b) - F(a)\;.$$

Note que $F'(x) = f(x) \geq 0$ e, portanto F é crescente. Isso fornece uma noção do que representa a medida φ_f desses intervalos.

31.4 Os Espaços $\mathcal{L}_p$ e L_p

Daqui por diante M será um conjunto não-vazio com uma σ-álgebra $\mathcal{M}$, para a qual encontra-se definida uma medida μ.

Definimos à página 1481 os conjuntos $\mathcal{L}_p(M,\ d\mu)$, $p > 0$, como sendo o conjunto de todas as funções complexas definidas em M tais que sua p-ésima potência é integrável. O estudo das propriedades desses conjuntos é de grande importância em várias áreas da Matemática e da Física. Na Física Quântica um papel muito especial é reservado aos conjuntos $\mathcal{L}_2(\mathbb{R},\ d\mu_L)$ e $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n,\ d\mu_L)$ (mais precisamente, aos seus parentes próximos, os conjuntos $L_2(\mathbb{R},\ d\mu_L)$ e $L_2(\mathbb{R}^n,\ d\mu_L)$, que serão definidos abaixo), pois os mesmos descrevem os estados puros de sistemas quânticos com um número finito de graus de liberdade.

A razão de os conjuntos $\mathcal{L}_p(M,\ d\mu)$ serem importantes reside no fato que, para $p \geq 1$, todos eles são – menos de uma tecnicalidade que discutiremos abaixo – espaços de Banach. Os espaços $\mathcal{L}_2(M,\ d\mu)$, em particular, são – a menos dessa tecnicalidade – espaços de Hilbert[33]. Nosso objetivo na presente seção é estudar esses fatos de forma precisa e geral.

Por razões pedagógicas começaremos estudando os espaços $\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$ e depois passaremos ao caso $p > 1$.

• **$\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$ é um espaço vetorial complexo**

Se $f : M \to \mathbb{C}$ e $g : M \to \mathbb{C}$ são dois elementos quaisquer de $\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$ e $\alpha,\ \beta$ são números complexos quaisquer, é claro que $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g|$. Esse simples fato tem a seguinte consequência:

$$\int_M |\alpha f + \beta g|\, d\mu \ \leq\ |\alpha| \int_M |f|\, d\mu + |\beta| \int_M |g|\, d\mu\ .$$

Como, por hipótese, $\int_M |f|\, d\mu < \infty$ e $\int_M |g|\, d\mu < \infty$, segue daí que a função obtida pela combinação linear $\alpha f + \beta g$ é também um elemento de $\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$. Como essa afirmação é válida para todos $f,\ g \in \mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$ e $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$, concluímos que $\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$ é um espaço vetorial complexo.

Por essa razão passaremos a nos referir aos conjuntos $\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$, como *espaços* $\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$. O uso da palavra "espaço", aqui, é uma referência ao fato de serem espaços vetoriais. Logo abaixo, veremos que os mesmos são também, a menos de uma tecnicalidade, espaços métricos.

Os conjuntos $\mathcal{L}_p(M,\ d\mu)$ com $p \geq 0$ também são espaços vetoriais complexos e isso será mostrado na Proposição 31.10, logo adiante.

• **Uma pseudométrica em $\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$**

Para $f : M \to \mathbb{C}$ e $g : M \to \mathbb{C}$, dois elementos quaisquer de $\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$, consideremos a expressão

$$d_1(f,\ g) \ :=\ \int_M |f - g|\, d\mu\ .$$

Como $(f - g) \in \mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$, é claro que $0 \leq d_1(f,\ g) < \infty$. É evidente que $d_1(f,\ f) = 0$ e que $d_1(f,\ g) = d_1(g,\ f)$. Como também, para qualquer $h \in \mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$, vale que $f - g = (f - h) + (h - g)$, tem-se $|f - g| \leq |f - h| + |h - g|$ e, portanto,

$$d_1(f,\ g) \ \leq\ d_1(f,\ h) + d_1(h,\ g)\ ,$$

a chamada *desigualdade triangular*. Com isso, estabelecemos que d_1 é uma *pseudométrica* em $\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$. Para a definição geral de pseudométrica, vide Seção 24.3, página 1271.

Por que d_1 não é uma métrica? Pois no conjunto $\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$, o fato de ter-se $\int_M |f - g|\, d\mu = 0$ não implica que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in M$, mas implica apenas que $f = g$ μ-q.t.p. (Proposição 31.7, página 1479). Esse fato em geral[34] impede-nos de fazer de $\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$ um espaço métrico, mas há uma maneira simples de remediar isso: identificando entre si as funções que diferem apenas em um conjunto de medida μ nula. Esse é o nosso próximo passo.

• **Os espaços $L_1(M,\ d\mu)$**

No conjunto das funções $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{C}}]]$-mensuráveis estabelecemos uma relação de equivalência dizendo que funções f e g, são equivalentes, $f \sim g$, se $f = g$ μ-q.t.p., ou seja, se $\mu(\{x \in M|\ f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Constatemos que, de fato,

[33] Espaços de Banach e de Hilbert foram definidos na Seção 24.5, página 1276.

[34] Exceto nos casos especiais em que M e μ são tais que $\emptyset$ é o único conjunto de medida μ nula.

isso define uma relação de equivalência. Que $f \sim f$ é evidente, assim como que $f \sim g$ equivale a $g \sim f$. Para provar a transitividade, consideremos três funções f, g e h. Notemos que se $x \in M$ é tal que $f(x) \neq h(x)$, então ou $f(x) \neq g(x)$ ou $g(x) \neq h(x)$ ou ambas. Logo,

$$\{x \in M|\ f(x) \neq h(x)\} \ = \ \{x \in M|\ f(x) \neq g(x)\} \cup \{x \in M|\ g(x) \neq h(x)\} ,$$

sendo que a união acima não é necessariamente disjunta. Logo,

$$\mu\Big(\{x \in M|\ f(x) \neq h(x)\}\Big) \ \leq \ \mu\Big(\{x \in M|\ f(x) \neq g(x)\}\Big) + \mu\Big(\{x \in M|\ g(x) \neq h(x)\}\Big) .$$

Assim, se $f \sim g$ e $g \sim h$, o lado direito vale zero e, portanto, segue que $f \sim h$, provando a transitividade.

E. 31.25 *Exercício*. Mostre que $\{x \in M|\ f(x) \neq g(x)\} \in \mathbb{M}$. Sugestão: prove e use o fato que $\{x \in M|\ f(x) \neq g(x)\} = \{x \in M|\ f(x) > g(x)\} \cup \{x \in M|\ f(x) < g(x)\}$ e use a Proposição 31.13, da página 1501. ✠

O conjunto $\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$ quebra-se em classes de equivalência pela relação de equivalência acima. Duas funções de uma mesma classe diferem apenas em um conjunto de medida μ igual a zero. Definimos o conjunto $L_1(M,\ d\mu)$ como sendo o conjunto dessas classes de equivalência: em símbolos

$$L_1(M,\ d\mu) \ := \ \mathcal{L}_1(M,\ d\mu)/\sim \ .$$

Uma outra forma mais concreta de encarar $L_1(M,\ d\mu)$ é considerá-lo como o conjunto obtido tomando um e apenas um representante arbitrário de cada classe. Essa forma de ver $L_1(M,\ d\mu)$ tem a vantagem de permitir constatar de modo imediato que $L_1(M,\ d\mu)$ também é um espaço vetorial complexo. Além disso, nessa maneira de ver, $L_1(M,\ d\mu)$ é um subconjunto de $\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$ e, portanto, d_1 está definido em $L_1(M,\ d\mu)$. Agora, porém, vale que se $f,\ g \in L_1(M,\ d\mu)$ e $d_1(f,\ g) = 0$, então $f = g$ μ-q.t.p. Ora, isso só é possível se $f = g$, pois $L_1(M,\ d\mu)$ foi construído tomando-se <u>um e apenas um</u> elemento de cada classe de equivalência de $\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$. Constatamos, assim, que d_1 é agora uma <u>métrica</u> em $L_1(M,\ d\mu)$, não apenas uma pseudométrica.

Resumindo $L_1(M,\ d\mu)$, é um espaço vetorial complexo e também um espaço métrico em relação à métrica d_1.

O leitor que deseja permanecer em um nível mais abstrato e continuar encarando $L_1(M,\ d\mu)$ como uma coleção de classes, poderá proceder da seguinte forma para constatar as afirmações do último parágrafo. Seja $[f]$ a classe a qual pertence um elemento $f \in \mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$. Defina-se para α e $\beta \in \mathbb{C}$ e para duas classes $[f]$ e $[g]$ a operação linear $\alpha[f] + \beta[g] := [\alpha f + \beta g]$. Com essa operação de combinação linear, a coleção de classes $L_1(M,\ d\mu)$ adquire a estrutura de um espaço vetorial complexo, tendo como vetor nulo a classe $[0]$, que contém a função identicamente nula. Para introduzir uma métrica na coleção de classes $L_1(M,\ d\mu)$, defina-se $D_1([f],\ [g]) := d_1(f,\ g)$.

E. 31.26 *Exercício*. Mostre que a combinação linear definida acima, assim como a métrica D_1, estão bem definidas, no sentido de serem independentes dos representantes f e g tomados em cada classe. Mostre que D_1 é de fato uma métrica, e não apenas uma pseudométrica, ou seja, satisfaz todos os postulados da definição de uma métrica. ✠

Optaremos tacitamente daqui por diante pela visão mais concreta de $L_1(M,\ d\mu)$ como o conjunto obtido tomando um e apenas um representante arbitrário de cada classe de equivalência de $\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$. Não há grandes diferenças técnicas entre as duas visões e raramente é necessário recorrer à definição precisa em termos de classes de equivalência. Uma exceção se dará quando discutirmos o problema da completeza dos espaços $L_1(M,\ d\mu)$. A visão concreta tem a vantagem de permitir prosseguir encarando os elementos de $L_1(M,\ d\mu)$ como funções integráveis de M em $\mathbb{C}$ e não como classes abstratas de funções.

Informalmente, a diferença entre $\mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$ e $L_1(M,\ d\mu)$ é que em $L_1(M,\ d\mu)$ identificamos funções que diferem apenas em um conjunto de medida μ nula como se fossem a mesma função.

• A estrutura linear dos espaços $\mathcal{L}_p(M,\ d\mu)$

Proposição 31.10 *Os conjuntos $\mathcal{L}_p(M,\ d\mu)$, com $p > 0$, são espaços vetoriais complexos.* □

A prova é essencialmente idêntica à da Proposição 24.13, página 1280, sobre os conjuntos de sequências ℓ_p e faz uso da Proposição 5.19, página 307, da Seção 5.3.3, página 306.

Prova da Proposição 31.10. Há dois casos a considerar em separado: $0 < p < 1$ e $p \geq 1$.

Caso $0 < p < 1$**.** Sejam $f, \ g \in \mathcal{L}_p(M, \ d\mu)$, arbitrários. Como $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$, a segunda desigualdade em (5.52), página 307, implica

$$|f+g|^p \ \leq \ (|f|+|g|)^p \ \leq \ |f|^p + |g|^p \ .$$

Assim,

$$\int_M |\alpha f + \beta g|^p \, d\mu \ \leq \ |\alpha|^p \int_M |f|^p \, d\mu + |\beta|^p \int_M |g|^p \, d\mu \ < \ \infty$$

para quaisquer $\alpha, \ \beta \in \mathbb{C}$. Isso provou que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_p(M, \ d\mu)$ e, portanto, para $0 < p < 1$ o conjunto $\mathcal{L}_p(M, \ d\mu)$ é um espaço vetorial complexo.

Caso $p \geq 1$**.** Sejam $f, \ g \in \mathcal{L}_p(M, \ d\mu)$, arbitrários. Como $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$, a segunda desigualdade em (5.53), página 308, implica

$$|f+g|^p \ \leq \ (|f|+|g|)^p \ \leq \ 2^{p-1}\left(|f|^p + |g|^p\right) \ .$$

Assim,

$$\int_M |\alpha f + \beta g|^p \, d\mu \ \leq \ 2^{p-1}|\alpha|^p \int_M |f|^p \, d\mu + 2^{p-1}|\beta|^p \int_M |g|^p \, d\mu \ < \ \infty$$

para quaisquer $\alpha, \ \beta \in \mathbb{C}$. Isso provou que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_p(M, \ d\mu)$ e, portanto, para $p \geq 1$ o conjunto $\mathcal{L}_p(M, \ d\mu)$ é um espaço vetorial complexo. Isso é o que queríamos provar. ■

Mais adiante, mostraremos que em $\mathcal{L}_p(M, \ d\mu)$, para $p \geq 1$, a expressão

$$d_p(f, \ g) \ := \ \left[\int_M |f-g|^p \, d\mu\right]^{1/p}$$

define uma pseudométrica. De forma análoga ao que fizemos acima, e usando a mesma relação de equivalência $\sim$ definida acima, o conjunto de classes $L_p(M, \ d\mu)$, definido por

$$L_p(M, \ d\mu) \ := \ \mathcal{L}_p(M, \ d\mu)/\sim \ ,$$

é um espaço vetorial complexo e também um espaço métrico com a métrica induzida por d_p. Também iremos encarar $L_p(M, \ d\mu)$ como o conjunto obtido tomando um e apenas um representante arbitrário de cada classe de equivalência de $\mathcal{L}_p(M, \ d\mu)$.

31.4.1 As Desigualdades de Hölder e de Minkowski

Vamos agora tratar de duas desigualdades de importância primordial no estudo dos espaços $\mathcal{L}_p(M, \ d\mu)$, as desigualdades de Hölder[35] e de Minkowski[36]. Já as encontramos no caso particular de espaços de sequências e, naquele caso, delas tratamos no Teorema 24.4 da página 1282.

Teorema 31.7 (As desigualdades de Hölder e de Minkowski) *Seja M um conjunto não-vazio, $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra em M e seja μ uma medida em $\mathcal{M}$.*

A desigualdade de Hölder é a afirmação que se p e q são tais que $p > 1$, $q > 1$ e satisfazem $1/p + 1/q = 1$, então para quaisquer $f \in \mathcal{L}_p(M, \ d\mu)$ e $g \in \mathcal{L}_q(M, \ d\mu)$ o produto fg pertence a $\mathcal{L}_1(M, \ d\mu)$ e vale

$$\int_M |f|\,|g| \, d\mu \ \leq \ \left[\int_M |f|^p \, d\mu\right]^{1/p} \left[\int_M |g|^q \, d\mu\right]^{1/q} \ . \tag{31.44}$$

A desigualdade de Minkowski é a afirmação que se $p \geq 1$, então para quaisquer $f, \ g \in \mathcal{L}_p(M, \ d\mu)$ tem-se

$$\left[\int_M |f-g|^p \, d\mu\right]^{1/p} \ \leq \ \left[\int_M |f|^p \, d\mu\right]^{1/p} + \left[\int_M |g|^p \, d\mu\right]^{1/p} \ . \tag{31.45}$$

□

[35] Otto Ludwig Hölder (1859–1937).
[36] Hermann Minkowski (1864–1909).

A demonstração é apresentada no Apêndice 31.J, página 1512. Em [347] uma interessante demonstração alternativa da desigualdade de Minkowski, usando a convexidade da função x^p, é apresentada (vide Seção 5.3.3.1, página 309 destas Notas). Aquela demonstração fornece também a versão da desigualdade de Minkowski para o caso $0 < p < 1$:

$$\left[\int_M |f+g|^p \, d\mu\right]^{1/p} \geq \left[\int_M |f|^p \, d\mu\right]^{1/p} + \left[\int_M |g|^p \, d\mu\right]^{1/p} . \tag{31.46}$$

Essa expressão, no entanto, só vale para f e g não-negativas.

A desigualdade de Hölder acima pode ser generalizada.

Corolário 31.3 *Sejam $f \in \mathcal{L}_p(M, \, d\mu)$ e $g \in \mathcal{L}_q(M, \, d\mu)$ onde p e q são tais que $p > 0$ e $q > 0$. Defina-se $r > 0$ por $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Então, o produto fg pertence a $\mathcal{L}_r(M, \, d\mu)$ e vale*

$$\left[\int_M |f|^r \, |g|^r \, d\mu\right]^{1/r} \leq \left[\int_M |f|^p \, d\mu\right]^{1/p} \left[\int_M |g|^q \, d\mu\right]^{1/q} . \tag{31.47}$$

□

A prova do Corolário 31.3 também encontra-se no Apêndice 31.J, página 1512.

As desigualdades de Hölder e Minkowski têm uma série de consequências, em particular sobre a estrutura dos espaços $\mathcal{L}_p(M, \, d\mu)$ e $L_p(M, \, d\mu)$. Vamos explorar algumas.

• $L_p(M, \, d\mu)$, $p \geq 1$, são espaços vetoriais complexos e normados

Já observamos acima (Proposição 31.10) que os conjuntos $\mathcal{L}_p(M, \, d\mu)$ são espaços vetoriais complexos. No caso $p \geq 1$ os mesmos possuem uma pseudonorma definida por

$$\|f\|_p := \left[\int_M |f|^p \, d\mu\right]^{1/p} . \tag{31.48}$$

A propriedade básica de uma pseudonorma, a saber $\|\alpha f + \beta g\|_p \leq |\alpha| \, \|f\|_p + |\beta| \, \|g\|_p$ para todos $f, \; g \in \mathcal{L}_p(M, \, d\mu)$ segue da desigualdade de Minkowski, pois a mesma nos garante que

$$\left[\int_M |\alpha f + \beta g|^p \, d\mu\right]^{1/p} \leq |\alpha| \left[\int_M |f|^p \, d\mu\right]^{1/p} + |\beta| \left[\int_M |g|^p \, d\mu\right]^{1/p} .$$

A propósito, as desigualdades de Hölder e Minkowski (31.44) e (31.45) assumem com a notação de (31.48) a forma

$$\|f\,g\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

e

$$\|f - g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p ,$$

respectivamente.

Por que $\|\cdot\|_p$ é uma pseudonorma e não uma norma em $\mathcal{L}_p(M, \, d\mu)$? Pois, como discutimos no caso $p = 1$, a relação $\|f\|_p = 0$ não implica $f = 0$, mas apenas $f = 0$ μ-q.t.p. Se, no entanto, considerarmos o espaço $L_p(M, \, d\mu)$, definido acima, $\|\cdot\|_p$ será uma norma! Concluímos disso que para $p \geq 1$, os conjuntos $L_p(M, \, d\mu)$ são espaços vetoriais complexos e normados. Por serem normados, são também espaços métricos com as métricas induzidas pelas normas $\|\cdot\|_p$:

$$d_p(f, \; g) := \|f - g\|_p = \left[\int_M |f - g|^p \, d\mu\right]^{1/p} .$$

Como veremos logo adiante, os espaços $L_p(M, \, d\mu)$ com $p \geq 1$ são espaços de Banach, por serem completos em relação à métrica d_p acima.

• **A desigualdade de Cauchy-Schwarz. Um produto escalar em $L_2(M,\ d\mu)$**

A desigualdade de Hölder (31.44) tem um caso particular muito importante, a saber, quando $p = q = 2$: para $f,\ g \in L_2(M,\ d\mu)$ vale

$$\int_M |f|\,|g|\,d\mu \ \leq\ \left[\int_M |f|^2\,d\mu\right]^{1/2}\left[\int_M |g|^2\,d\mu\right]^{1/2} \ <\ \infty\ .$$

Como também $\left|\int_M \overline{f}g\,d\mu\right| \leq \int_M |f|\,|g|\,d\mu$, segue que

$$\left|\int_M \overline{f}g\,d\mu\right| \ \leq\ \left[\int_M |f|^2\,d\mu\right]^{1/2}\left[\int_M |g|^2\,d\mu\right]^{1/2} \ <\ \infty\ .$$

As duas desigualdades acima são denominadas *desigualdades de Cauchy-Schwarz*. A segunda está nos dizendo que para $f,\ g \in L_2(M,\ d\mu)$ a expressão

$$\langle f,\ g\rangle \ :=\ \int_M \overline{f}\,g\,d\mu$$

é um número complexo finito e, como facilmente se verifica, define um produto escalar em $L_2(M,\ d\mu)$.

E. 31.27 *Exercício*. Demonstre as afirmações acima. ✠

É também elementar constatar que a norma associada a esse produto escalar é a norma $\|\cdot\|_2$. Como veremos logo abaixo, $L_2(M,\ d\mu)$ é completo em relação à métrica d_2 que essa norma induz. Consequentemente, $L_2(M,\ d\mu)$ é um espaço de Hilbert.

• **Relações de inclusão entre os conjuntos $\mathcal{L}_p(M,\ d\mu)$ quando $\mu(M) < \infty$**

Se o conjunto M e a medida μ são tais que $\mu(M) < \infty$, então a função $g(x) = 1$ (identicamente igual a 1 para todo $x \in M$) pertence a todo $\mathcal{L}_q(M,\ d\mu)$, $0 < q < \infty$. Isso é evidente, pois $\int_M 1^q\,d\mu = \mu(M) < \infty$. Disso e da desigualdades de Hölder (31.47), extraem-se algumas consequências sobre relações de inclusão entre os vários espaços $\mathcal{L}_p(M,\ d\mu)$.

Para $p > 0$ e $q > 0$ arbitrários, tomando-se $f \in \mathcal{L}_p(M,\ d\mu)$ e $g = 1$, obtem-se de (31.47) que

$$\left[\int_M |f|^r\ d\mu\right]^{1/r} \ \leq\ \left[\int_M |f|^p\,d\mu\right]^{1/p}[\mu(M)]^{1/q} \ <\ \infty\ , \tag{31.49}$$

para $1/r = 1/p + 1/q$. Como $q > 0$, segue que $r < p$. Observe-se que (31.49) pode ser reescrita como

$$\left[\frac{1}{\mu(M)}\int_M |f|^r\ d\mu\right]^{1/r} \ \leq\ \left[\frac{1}{\mu(M)}\int_M |f|^p\,d\mu\right]^{1/p} \ <\ \infty\ , \tag{31.50}$$

válida sempre que $0 < r \leq p$.

Como q é arbitrário, a desigualdade (31.49) diz que se $f \in \mathcal{L}_p(M,\ d\mu)$ então $f \in \mathcal{L}_r(M,\ d\mu)$ para todo $0 < r \leq p$, ou seja, $\mathcal{L}_p(M,\ d\mu) \subset \mathcal{L}_r(M,\ d\mu)$ sempre que $r \leq p$ com $r > 0$ e $p > 0$. Assim, tem-se, por exemplo,

$$\cdots \subset \mathcal{L}_4(M,\ d\mu) \subset \mathcal{L}_3(M,\ d\mu) \subset \mathcal{L}_2(M,\ d\mu) \subset \mathcal{L}_1(M,\ d\mu) \subset \mathcal{L}_{\frac{1}{2}}(M,\ d\mu) \subset \mathcal{L}_{\frac{1}{4}}(M,\ d\mu) \cdots .$$

Essas relações de inclusão não são geralmente válidas caso $\mu(M) = \infty$. Vide próximo exercício.

E. 31.28 *Exercício*. Mostre que a função

$$f(x) \ =\ \begin{cases} 1, & x \in [-1,\ 1] \\ \frac{1}{|x|}, & x \notin [-1,\ 1] \end{cases}$$

pertence a $\mathcal{L}_2(\mathbb{R},\ d\mu_L)$ mas não a $\mathcal{L}_1(\mathbb{R},\ d\mu_L)$. Mostre que a função

$$f(x) \ =\ \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & 0 < |x| \leq 1 \\ 0, & x = 0 \text{ ou } |x| > 1 \end{cases}$$

pertence a $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, d\mu_L)$ mas não a $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, d\mu_L)$. Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 1] \\ \frac{1}{|x|^2}, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

pertence a $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, d\mu_L) \cap \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, d\mu_L)$. ✣

• **O caso de medidas de probabilidade**

Para medidas de probabilidade temos $\mu(M) = 1$ e, assim, (31.49) fica

$$\left[\int_M |f|^r \, d\mu\right]^{1/r} \leq \left[\int_M |f|^p \, d\mu\right]^{1/p} < \infty , \tag{31.51}$$

para $0 < r \leq p$ arbitrários, tomando-se $f \in \mathcal{L}_p(M, d\mu)$. A desigualdade (31.51) diz que se $f \in \mathcal{L}_p(M, d\mu)$ então $f \in \mathcal{L}_r(M, d\mu)$ para todo $0 < r \leq p$, ou seja, $\mathcal{L}_p(M, d\mu) \subset \mathcal{L}_r(M, d\mu)$ sempre que $0 < r \leq p$.

Fazemos notar que a relação (31.51) pode reverter-se caso a medida não seja de probabilidade. Isso ocorre no caso estudado no Teorema 24.5, página 1289, dos espaços $\ell_p(\mathbb{N})$ com a medida de contagem. Vide, (24.58), página 1289.

• **Revisitando a desigualdade de Hölder**

Se p e q são tais que $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ e satisfazem $1/p + 1/q = 1$, então para quaisquer $f \in L_p(M, d\mu)$ e $g \in L_q(M, d\mu)$ a desigualdade de Hölder (31.44) implica que

$$\left|\int_M f\, g \, d\mu\right| \leq \left[\int_M |f|^p \, d\mu\right]^{1/p} \left[\int_M |g|^q \, d\mu\right]^{1/q} < \infty . \tag{31.52}$$

Como facilmente se verifica, a aplicação

$$g \mapsto \int_M f\, g \, d\mu$$

é um funcional linear em $L_q(M, d\mu)$. Mais que isso, (31.52) diz-nos que se trata de um funcional linear contínuo[37] (na topologia de $L_q(M, d\mu)$).

Concluímos disso que se $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ e satisfazem $1/p + 1/q = 1$, então $L_p(M, d\mu)$ é um subconjunto do dual topológico de $L_q(M, d\mu)$ e vice-versa.

E. 31.29 *Exercício*. Justifique as afirmações acima ✣

31.4.2 O Teorema de Riesz-Fischer. Completeza

Vamos agora formular um importante teorema que é uma das principais justificativas do interesse na integral de Lebesgue e, em um certo sentido, coroa nossos esforços neste Capítulo. Trata-se do *Teorema de Riesz*[38]*-Fischer*[39], o qual data de 1907.

Teorema 31.8 (Teorema de Riesz-Fischer) *Para $p \geq 1$ os espaços $L_p(M, d\mu)$ são espaços métricos completos na métrica d_p definida acima.* □

Do Teorema de Riesz-Fischer e das considerações acima concluímos que os espaços $L_p(M, d\mu)$ com $p \geq 1$ são espaços de Banach e o espaço $L_2(M, d\mu)$ é um espaço de Hilbert.

A prova do Teorema de Riesz-Fischer encontra-se no Apêndice 31.K, página 1514.

[37] As noções de funcional linear e funcional linear contínuo foram introduzidas na Seção 2.3.2, página 164.
[38] Frigyes Riesz (1880–1956).
[39] Ernst Sigismund Fischer (1875–1954).

Apêndices

Nos vários apêndices que seguem apresentamos as demonstrações mais técnicas de alguns dos teoremas e proposições da nossa exposição.

31.A Mais sobre a Integral de Darboux

Nesta seção completaremos a discussão sobre a Integral de Darboux e sua relação com a de Riemann. Começamos com a demonstração da Proposição 31.3, página 1463.

Prova da Proposição 31.3. Vamos primeiro supor que F satisfaça a definição II e denotemos sua integral de Darboux por $D(f)$, ou seja, $D(f) := \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Pela definição do que são $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ e $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, existem para cada $\epsilon > 0$ partições $\mathcal{P}_1, \ \mathcal{P}_2 \in \mathfrak{P}([a, \ b])$ tais que

$$D(f) - D_i[\mathcal{P}_1, \ f] \ < \ \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad D_s[\mathcal{P}_2, \ f] - D(f) \ < \ \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Seja $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Pelas afirmações do Exercício E. 31.3, página 1462, temos $D_i[\mathcal{P}_1, \ f] \leq D_i[\mathcal{P}, \ f]$ e $D_s[\mathcal{P}_2, \ f] \geq D_s[\mathcal{P}, \ f]$. Logo,

$$D_s[\mathcal{P}, \ f] \ \leq \ D_s[\mathcal{P}_2, \ f] \ < \ D(f) + \frac{\epsilon}{2} \ = \ \left(D(f) - \frac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon \ < \ D_i[\mathcal{P}_1, \ f] + \epsilon \ \leq \ D_i[\mathcal{P}, \ f] + \epsilon \ ,$$

estabelecendo que $D_s[\mathcal{P}, \ f] - D_i[\mathcal{P}, \ f] < \epsilon$, como desejávamos.

Vamos agora assumir que para todo ϵ exista $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}([a, \ b])$ tal que $D_s[\mathcal{P}, \ f] - D_i[\mathcal{P}, \ f] < \epsilon$ e provar que f é integrável no sentido da definição II.

Por definição, temos $\underline{\int_a^b} f(x) \geq D_i[\mathcal{P}, \ f]$ e $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq D_s[\mathcal{P}, \ f]$. Logo, $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x) \leq D_s[\mathcal{P}, \ f] - D_i[\mathcal{P}, \ f] < \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário e $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)$ (por (31.7)), segue que $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)$. ■

Passemos agora à prova da equivalência das definições I e II, expressa na Proposição 31.4, página 1463:

Prova da Proposição 31.4. Vamos supor que f seja limitada e satisfaça a definição de integrabilidade Ib. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $(\mathcal{P}_\epsilon, \ \chi_\epsilon) \in \mathfrak{X}([a, \ b])$ tal que

$$S(f) - \epsilon \ \leq \ S\big[(\mathcal{P}, \ \chi), \ f\big] \ \leq \ S(f) + \epsilon \tag{31.A.1}$$

para todo $(\mathcal{P}, \ \chi) \in \mathfrak{X}([a, \ b])$ com $(\mathcal{P}, \ \chi) \succ (\mathcal{P}_\epsilon, \ \chi_\epsilon)$, ou seja, tal que $|\mathcal{P}| \leq |\mathcal{P}_\epsilon|$. Agora, em (31.A.1), χ é arbitrário e $S(f) \pm \epsilon$ independem de χ. Logo,

$$S(f) - \epsilon \ \leq \ \inf_{\chi \propto \mathcal{P}} S\big[(\mathcal{P}, \ \chi), \ f\big] \ \leq \ \sup_{\chi \propto \mathcal{P}} S\big[(\mathcal{P}, \ \chi), \ f\big] \ \leq \ S(f) + \epsilon \ .$$

Porém, $D_i[\mathcal{P}, \ f] = \inf_{\chi \propto \mathcal{P}} S\big[(\mathcal{P}, \ \chi), \ f\big]$ e $D_s[\mathcal{P}, \ f] = \sup_{\chi \propto \mathcal{P}} S\big[(\mathcal{P}, \ \chi), \ f\big]$. Assim,

$$S(f) - \epsilon \ \leq \ D_i[\mathcal{P}, \ f] \ \leq \ D_s[\mathcal{P}, \ f] \ \leq \ S(f) + \epsilon \ . \tag{31.A.2}$$

Logo, $D_s[\mathcal{P}, \ f] - D_i[\mathcal{P}, \ f] \leq 2\epsilon$ e a Proposição 31.3 garante-nos que f é integrável segundo a definição II. A relação (31.A.2) nos mostra também (tomando-se $\epsilon \to 0$) que $S(f) = D(f)$.

Vamos agora provar a recíproca e supor f integrável segundo a definição II. Notemos que podemos supor f não-constante, pois se f for constante as afirmações a serem demonstradas são evidentes. Denotemos sua integral de Darboux $D(f)$, ou seja, $D(f) := \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Seja $\epsilon > 0$. Pela Proposição 31.3, existe $\mathcal{P}_1 \in \mathfrak{P}([a, \ b])$ com $\mathcal{P} = \{x_1, \ \ldots, \ x_{p+1}\}$, tal que $D_s[\mathcal{P}_1, \ f] - D_i[\mathcal{P}_1, \ f] \leq \epsilon$. Seja p o número de intervalos em que $\mathcal{P}_1$ decompõe $[a, \ b]$, seja $\Delta_f := \Big(\sup_{y \in [a, \, b]} f(y)\Big) - \big(\inf_{y \in [a, \, b]} f(y)\big)$ e defina-se

$$\delta_\epsilon \ := \ \frac{\epsilon}{p\Delta_f}$$

(notar que $\Delta_f > 0$ pois f foi suposta não-constante). Afirmamos que para toda partição $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}([a,\ b])$ tal que $|\mathcal{P}| < \delta_\epsilon$ vale

$$D_s[\mathcal{P},\ f] - D_i[\mathcal{P},\ f] \ < \ 3\epsilon \ . \tag{31.A.3}$$

Como $D_i[\mathcal{P},\ f] \leq S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] \leq D_s[\mathcal{P},\ f]$ e $D_i[\mathcal{P},\ f] \leq D(f) \leq D_s[\mathcal{P},\ f]$, teremos provado que $\Big|S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] - D(f)\Big| \leq 3\epsilon$, ou seja, teremos provado que para todo $\epsilon > 0$ existe δ_ϵ tal que para todo $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}([a,\ b])$ tal que $|\mathcal{P}| < \delta_\epsilon$ teremos $\Big|S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] - D(f)\Big| \leq 3\epsilon$. Isso prova que f satisfaz a definição Ic de integrabilidade e que $S(f) = D(f)$, completando a prova.

Tudo o que temos ainda a fazer, portanto, é provar (31.A.3). Seja $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}([a,\ b])$ tal que $|\mathcal{P}| < \delta_\epsilon$ (que uma tal partição sempre existe é claro, basta tomar uma cujo maior intervalo tenha largura menor ou igual a δ_ϵ). Tomemos $\mathcal{P}_2 := \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}$ e escrevamos

$$D_s[\mathcal{P},\ f] - D_i[\mathcal{P},\ f] \ = \ \Big(D_s[\mathcal{P},\ f] - D_s[\mathcal{P}_2,\ f]\Big) + \Big(D_s[\mathcal{P}_2,\ f] - D_i[\mathcal{P}_2,\ f]\Big) + \Big(D_i[\mathcal{P}_2,\ f] - D_i[\mathcal{P},\ f]\Big) \ .$$

Pelo Exercício E. 31.3, página 1462, cada um dos três termos entre parênteses ao lado direito é positivo (para o segundo termo entre parênteses isso segue da definição de D_i e D_s). Afirmamos que cada um dos três termos entre parênteses ao lado direito é majorado por ϵ.

Segundo termo entre parênteses: Como $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$, temos pelo Exercício E. 31.5, página 1463, que $D_s[\mathcal{P}_2,\ f] - D_i[\mathcal{P}_2,\ f] \leq D_s[\mathcal{P}_1,\ f] - D_i[\mathcal{P}_1,\ f] \leq \epsilon$.

Primeiro termo entre parênteses: Como $\mathcal{P}_2 := \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_1$ possui $p+1$ elementos, apenas no máximo $q \leq p-1$ intervalos de $\mathcal{P}$ serão subparticionados para compor a partição $\mathcal{P}_2$. Denotemos esses intervalos por $I_1,\ \ldots,\ I_q$ e cada subpartição de I_k em $\mathcal{P}_2$ será denotada por I_{kl}, $k = 1,\ \ldots,\ j_k$, $k = 1,\ \ldots,\ q$. É claro que $|I_k| = |I_{k1}| + \cdots + |I_{kj_k}|$ sendo que $|I_k| \leq |\mathcal{P}| \leq \delta_\epsilon$. É também claro que

$$D_s[\mathcal{P},\ f] - D_s[\mathcal{P}_2,\ f] \ = \ \sum_{k=1}^{q}\left[\left(\sup_{y\in I_k} f(y)\right)|I_k| - \sum_{l=1}^{j_k}\left(\sup_{y\in I_{kl}} f(y)\right)|I_{kl}|\right]$$

$$= \ \sum_{k=1}^{q}\left\{\sum_{l=1}^{j_k}\left[\left(\sup_{y\in I_k} f(y)\right) - \left(\sup_{y\in I_{kl}} f(y)\right)\right]|I_{kl}|\right\} \ \leq \ \Delta_f \sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{j_k}|I_{kl}| \ = \ \Delta_f \sum_{k=1}^{q}|I_k|$$

$$= \ \Delta_f q|\mathcal{P}| \ \leq \ \Delta_f p|\mathcal{P}| \ < \ \Delta_f p\delta_\epsilon \ = \ \epsilon \ .$$

Terceiro termo entre parênteses: análogo ao primeiro termo entre parênteses. ■

31.A.1 Equivalência das Definições II e III da Integrabilidade de Riemann

Demonstraremos aqui equivalência das definições II e III da noção de integrabilidade de Riemann. Recordamos que as noções de lim inf e lim sup de conjuntos dirigidos, as quais usaremos abaixo, são introduzidas na Seção 30.4, página 1444.

Consideremos em $\mathfrak{P}([a,\ b])$ o pré-ordenamento definido pela inclusão, definindo $\mathcal{P} \prec_o \mathcal{P}'$ se $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$. Com relação a esse pré-ordenamento $\prec_o$ as coleções $\mathfrak{P}([a,\ b])$ e $\mathfrak{X}([a,\ b])$ são também conjuntos dirigidos e a aplicação $\mathfrak{X}([a,\ b]) \ni (\mathcal{P},\ \chi) \mapsto S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] \in \mathbb{R}$ é também uma rede, dita por alguns autores ser uma *rede de Riemann-Darboux*. No que segue consideraremos essa rede em relação a esse pré-ordenamento.

Pelo exercício E. 31.3 da página 1462, a rede $\mathfrak{P}([a,\ b]) \ni \mathcal{P} \mapsto D_i[\mathcal{P},\ f] \in \mathbb{R}$ é crescente, enquanto que a rede $\mathfrak{P}([a,\ b]) \ni \mathcal{P} \mapsto D_s[\mathcal{P},\ f] \in \mathbb{R}$ é decrescente. Assim,

$$\liminf_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}([a,\ b])} D_i[\mathcal{P},\ f] \ = \ \sup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}([a,\ b])} D_i[\mathcal{P},\ f] \ = \ \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

e

$$\limsup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}([a,\ b])} D_s[\mathcal{P},\ f] \ = \ \inf_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}([a,\ b])} D_s[\mathcal{P},\ f] \ = \ \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \ .$$

(Vide definições (30.1)-(30.2) e (30.3)-(30.4)). Temos obviamente que

$$D_i[\mathcal{P},\ f] \ \leq\ S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] \ \leq\ D_s[\mathcal{P},\ f]$$

para todo $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}([a,\ b])$ e todo $\chi \propto \mathcal{P}$. Porém, vê-se pelas definições de D_i e D_s que

$$D_i[\mathcal{P},\ f] \ =\ \inf_{\chi\propto\mathcal{P}} S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] \qquad \text{e} \qquad D_s[\mathcal{P},\ f] \ =\ \sup_{\chi\propto\mathcal{P}} S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big]$$

e, portanto,

$$\liminf_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}([a,\ b])} D_i[\mathcal{P},\ f] \ =\ \liminf_{(\mathcal{P},\ \chi)\in\mathfrak{X}([a,\ b])} S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] \quad \text{e} \quad \limsup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}([a,\ b])} D_s[\mathcal{P},\ f] \ =\ \limsup_{(\mathcal{P},\ \chi)\in\mathfrak{X}([a,\ b])} S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] \ .$$

Logo,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \ =\ \liminf_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}([a,\ b])} D_i[\mathcal{P},\ f] \ =\ \liminf_{(\mathcal{P},\ \chi)\in\mathfrak{X}([a,\ b])} S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big]$$

$$\leq\ \limsup_{(\mathcal{P},\ \chi)\in\mathfrak{X}([a,\ b])} S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] \ =\ \limsup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}([a,\ b])} D_s[\mathcal{P},\ f] \ =\ \overline{\int_a^b} f(x)\, dx \ ,$$

onde a única desigualdade que ocorre acima segue da propriedade (30.5), página 1444. Dessa expressão, vê-se que $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$ <u>se e somente se</u>

$$\liminf_{(\mathcal{P},\ \chi)\in\mathfrak{X}([a,\ b])} S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big] \ =\ \limsup_{(\mathcal{P},\ \chi)\in\mathfrak{X}([a,\ b])} S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big]$$

e, portanto, por (30.6), se e somente se existe $\lim\limits_{(\mathcal{P},\ \chi)\in\mathfrak{X}([a,\ b])} S\big[(\mathcal{P},\ \chi),\ f\big]$. Isso prova a equivalência das definições II e III da noção de integrabilidade de Riemann.

31.B Caracterizações e Propriedades de Funções Mensuráveis

Vamos aqui estudar com mais detalhe e profundidade caracterizações e propriedades elementares das funções mensuráveis. Advertimos que a presente seção é, infelizmente, mas inevitavelmente, um pouco técnica. Sugerimos a um estudante iniciante dispensar a leitura das demonstrações e concentrar-se apenas nas definições e enunciados.

• **<u>Uma condição para mensurabilidade de funções</u>**

O próximo teorema (de [177]) é de importância fundamental e será usado em vários lugares mais abaixo. A noção de σ-álgebra gerada por uma coleção de conjuntos foi introduzida no Capítulo 27.

Teorema 31.9 *Sejam* $(M,\ \mathcal{M})$ *e* $(N,\ \mathcal{N})$ *dois espaços mensuráveis e suponhamos que* $\mathcal{N}$ *seja a* σ*-álgebra gerada por uma coleção* $\mathcal{A}$ *de subconjuntos de* N*:* $\mathcal{N} = \mathcal{M}[\mathcal{A}]$*. Então, uma função* $f : M \to N$ *é* $[\mathcal{M},\ \mathcal{N}]$*-mensurável, ou seja,* $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\mathcal{A}]]$*-mensurável, se e somente se*

$$f^{-1}(A) \ \in\ \mathcal{M} \tag{31.B.4}$$

para todo $A \in \mathcal{A}$. □

Prova. Se $A \in \mathcal{A}$ segue que $A \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$. Logo, se f é mensurável em relação a $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N} = \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, então, pela definição de função mensurável, $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$.

Vamos provar a recíproca, ou seja, vamos supor que (31.B.4) valha para todo $A \in \mathcal{A}$ e mostrar que f mensurável em relação a $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N} = \mathcal{M}[\mathcal{A}]$. Seja

$$\mathcal{A}' \ :=\ \{A' \subset N \mid f^{-1}(A') \in \mathcal{M}\} \ .$$

Por (31.B.4) é claro que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. Mostremos agora que $\mathcal{A}'$ é uma σ-álgebra em N. Que $\emptyset$ e N pertencem a $\mathcal{A}'$ é claro, pois $f^{-1}(N) = M$ (isso segue de $f(M) \subset N$). Se $A' \in \mathcal{A}'$, então $f^{-1}((A')^c) = f^{-1}(N \setminus A') = f^{-1}(N) \setminus f^{-1}(A') = M \setminus f^{-1}(A') = (f^{-1}(A'))^c$. (Vide Proposições 1.2–1.4, página 45). Por hipótese, $f^{-1}(A') \in \mathcal{M}$. Logo, como $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra, $(f^{-1}(A'))^c \in \mathcal{M}$.

Resta-nos provar que uma união contável de elementos de $\mathcal{A}'$ é também elemento de $\mathcal{A}'$. Para isso, sejam conjuntos $A'_k \in \mathcal{A}'$, $k \in \mathbb{N}$. Sabemos que (vide Proposições 1.2–1.4, página 45)

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A'_k\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}\left(A'_k\right) .$$

Por hipótese, cada $f^{-1}\left(A'_k\right)$ pertence a $\mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra, uma união contável de seus elementos também pertence a $\mathcal{M}$. Logo, $f^{-1}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A'_k\right) \in \mathcal{M}$. provando que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A'_k \in \mathcal{A}'$.

Como, por definição, $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ é a <u>menor</u> σ-álgebra contendo $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ também é uma σ-álgebra contendo $\mathcal{A}$, segue que $\mathcal{M}[\mathcal{A}] \subset \mathcal{A}'$. Ora, pela definição de $\mathcal{A}'$, isso diz que a pré-imagem por f de qualquer elemento de $\mathcal{N} = \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ é um elemento de $\mathcal{M}$. Isso significa precisamente que f é mensurável em relação a $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, completando a prova. ■

• Funções mensuráveis entre espaços topológicos

Já observamos acima a semelhança entre as definições de funções contínuas e funções mensuráveis. As duas noções combinam-se elegantemente nos resultados que seguem.

O Teorema 31.9 tem uma aplicação imediata para funções contínuas definidas em espaços topológicos. Sejam M e N dois conjuntos não-vazios dotados de topologias τ_M e τ_N, respectivamente, e sejam $\mathcal{M}[\tau_M]$ e $\mathcal{M}[\tau_M]$ as σ-álgebras geradas por essas topologias. Afirmamos que se $f : M \to N$ é contínua com respeito às topologias τ_M e τ_N, então f é mensurável em relação às σ-álgebras $\mathcal{M}[\tau_M]$ e $\mathcal{M}[\tau_N]$, ou seja, é $[\mathcal{M}[\tau_M],\ \mathcal{M}[\tau_N]]$-mensurável. De fato, pelo Teorema 31.9 basta provar que $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}[\tau_M]$ para todo $A \in \tau_N$. Agora, por f ser <u>contínua</u>, vale que $f^{-1}(A) \in \tau_M$ se $A \in \tau_N$. Como obviamente $\tau_M \subset \mathcal{M}[\tau_M]$, a afirmação está provada.

Note que se em M adotarmos uma σ-álgebra $\mathcal{M}$ que contém a σ-álgebra $\mathcal{M}[\tau_M]$, a mesma afirmação é verdadeira: uma função $f : M \to N$ contínua com respeito às topologias τ_M e τ_N é mensurável em relação às σ-álgebras $\mathcal{M}[\tau_M]$ e $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}[\tau_M]$.

Disso segue que toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em relação à topologia $\tau_\mathbb{R}$ é $[\mathcal{M}[\tau_\mathbb{R}],\ \mathcal{M}[\tau_\mathbb{R}]]$-mensurável e também $[\mathcal{M}[\tau_\mathbb{R}],\ \mathcal{M}_{\mu_L}]$-mensurável.

A proposição adiante é um mero corolário das observações acima.

Proposição 31.11 *Sejam X, Y e Z três conjuntos não-vazios, sendo o conjunto X dotado de uma σ-álgebra $\mathcal{M}_X$ e os conjuntos Y e Z dotados de topologias τ_Y e τ_Z, respectivamente. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ duas funções tais que f é $[\mathcal{M}_X,\ \mathcal{M}[\tau_Y]]$-mensurável e g é contínua em relação às topologias τ_Y e τ_Z. Então, $g \circ f : X \to Z$ é $[\mathcal{M}_X,\ \mathcal{M}[\tau_Z]]$-mensurável.* □

Prova. Pelo que acabamos de comentar, g é $[\mathcal{M}[\tau_Y],\ \mathcal{M}[\tau_Z]]$-mensurável. Assim, $g \circ f$ é uma função $[\mathcal{M}_X,\ \mathcal{M}[\tau_Z]]$-mensurável por ser a composição de uma função $[\mathcal{M}_X,\ \mathcal{M}[\tau_Y]]$-mensurável com uma função $[\mathcal{M}[\tau_Y],\ \mathcal{M}[\tau_Z]]$-mensurável. ■

• Aplicação para funções numéricas

Notemos que o Teorema 31.9 é aplicável ao caso de funções $f : M \to \mathbb{R}$, onde M dotada de uma σ-álgebra $\mathcal{M}$ e $\mathbb{R}$ da σ-álgebra de Borel $\mathcal{M}[\tau_\mathbb{R}]$. Nesse caso $\mathcal{A} = \tau_\mathbb{R}$. Em verdade, provamos no Capítulo 27, mais especificamente na expressão (27.16), página 1385, que $\mathcal{M}[\tau_\mathbb{R}] = \mathcal{M}[\mathcal{R}]$, onde $\mathcal{R}$ é a coleção de todos os intervalos abertos $(a,\ b)$, com a e b <u>racionais</u>. Podemos, portanto, tomar $\mathcal{A} = \mathcal{R}$, nesse caso. Consequentemente, para provar que uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é mensurável em relação a $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}[\tau_\mathbb{R}]$, é suficiente, pelo Teorema 31.9, provar que $f^{-1}((a,\ b)) \in \mathcal{M}$ para todo intervalo aberto $(a,\ b)$, com a e b racionais.

Observemos agora, que

$$(a,\ b) = (-\infty,\ b) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(-\infty,\ a + \frac{1}{n}\right)^c\right) .$$

E. 31.30 *Exercício.* Prove isso! Sugestão: use $(a,\ b) = (-\infty,\ b) \setminus (-\infty,\ a]$ e escreva $(-\infty,\ a] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\infty,\ \ a + \frac{1}{n}\right)$. ✠

Isso significa que

$$f^{-1}((a,\ b)) \ = \ f^{-1}((-\infty,\ b)) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(f^{-1}\left(-\infty,\ \ a + \frac{1}{n}\right)\right)^c \right) .$$

(Vide Proposições 1.2–1.4, página 45). Logo, pelos raciocínios usuais sobre uniões contáveis, intersecções finitas e complementos de elementos de uma σ-álgebras, segue que se $f^{-1}((-\infty,\ c)) \in \mathcal{M}$ para todo $c \in \mathbb{R}$, então $f^{-1}((a,\ b)) \in \mathcal{M}$ para todos com a e b racionais, provando que f é mensurável em relação a $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$.

Um raciocínio idêntico nos leva a concluir que se $f^{-1}\big((c,\ \infty)\big) \in \mathcal{M}$ para todo $c \in \mathbb{R}$, então f é mensurável em relação a $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$.

Resumimos essas considerações na seguinte proposição, que usaremos logo abaixo:

Proposição 31.12 *Consideremos uma função numérica $f : M \to \mathbb{R}$, sendo M dotada de uma σ-álgebra $\mathcal{M}$ e $\mathbb{R}$ da σ-álgebra de Borel $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$. Uma condição necessária e suficiente para que f seja $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável é que para todo $a \in \mathbb{R}$ valha*

$$\{x \in M |\ f(x) < a\} = f^{-1}\big((-\infty,\ a)\big) \in \mathcal{M} . \tag{31.B.5}$$

Equivalentemente, podemos substituir o conjunto de (31.B.5) por qualquer um dos seguintes três conjuntos:

$$\{x \in M |\ f(x) \leq a\} \ = \ f^{-1}\big((-\infty,\ a]\big) \ \in \ \mathcal{M} , \tag{31.B.6}$$

$$\{x \in M |\ f(x) > a\} \ = \ f^{-1}\big((a,\ \infty)\big) \ \in \ \mathcal{M} , \tag{31.B.7}$$

$$\{x \in M |\ f(x) \geq a\} \ = \ f^{-1}\big([a,\ \infty)\big) \ \in \ \mathcal{M} . \tag{31.B.8}$$

□

Prova. Que as condições são necessárias é evidente, pois os quatro conjuntos (31.B.5)-(31.B.8) são a pré-imagem por f dos conjuntos Borelianos $(-\infty,\ a)$, $(-\infty,\ a]$, $(a,\ \infty)$ e $[a,\ \infty)$.

Acima, já provamos a recíproca para os conjuntos (31.B.5) e (31.B.7). Os dois casos restantes são consequência desses dois se lembrarmos que $f^{-1}\big((-\infty,\ a]\big) = \Big(f^{-1}\big((a,\ \infty)\big)\Big)^c$ e que $f^{-1}\big([a,\ \infty)\big) = \Big(f^{-1}\big((-\infty,\ a)\big)\Big)^c$. ■

Nosso próximo resultado é o seguinte:

Proposição 31.13 *Se $f : M \to \mathbb{R}$ e $g : M \to \mathbb{R}$ são ambas $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensuráveis, então*

$$\{x \in M |\ f(x) < g(x)\} \ \in \ \mathcal{M} , \tag{31.B.9}$$

$$\{x \in M |\ f(x) \leq g(x)\} \ \in \ \mathcal{M} , \tag{31.B.10}$$

$$\{x \in M |\ f(x) > g(x)\} \ \in \ \mathcal{M} , \tag{31.B.11}$$

$$\{x \in M |\ f(x) \geq g(x)\} \ \in \ \mathcal{M} . \tag{31.B.12}$$

□

Prova. Para demonstrar a primeira linha, notemos que

$$\{x \in M |\ f(x) < g(x)\} \ = \ \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \Big(\{x \in M |\ f(x) < r\} \cap \{x \in M |\ g(x) > r\}\Big) .$$

E. 31.31 *Exercício.* Mostre isso! Sugestão: lembre-se que $f(x) < g(x)$ se e somente se existir pelo menos um racional r tal que $f(x) < r < g(x)$, ou seja, $f(x) < r$ <u>e</u> $r < g(x)$. ✠

Como observamos acima, tanto $\{x \in M|\ f(x) < r\}$ quanto $\{x \in M|\ g(x) > r\}$ são elementos de $\mathcal{M}$. Pelas propriedades de σ-álgebras, sua intersecção também o é. Por fim, a união acima também o é, por ser uma união contável de elementos de $\mathcal{M}$ (essa é uma das propriedades definidoras de uma σ-álgebras). A prova que $\{x \in M|\ f(x) > g(x)\} \in \mathcal{M}$ é análoga:

$$\{x \in M|\ f(x) > g(x)\} \ = \ \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \Big(\{x \in M|\ f(x) > r\} \cap \{x \in M|\ g(x) < r\} \Big)$$

e não requer mais comentários. Por fim, notemos que $\{x \in M|\ f(x) \leq g(x)\} = \{x \in M|\ f(x) > g(x)\}^c$ e que $\{x \in M|\ f(x) \geq g(x)\} = \{x \in M|\ f(x) < g(x)\}^c$. Como uma σ-álgebra é fechada pelo complemento, segue do que já foi provado que $\{x \in M|\ f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{M}$ e $\{x \in M|\ f(x) \geq g(x)\} \in \mathcal{M}$. ■

• **A álgebra das funções mensuráveis**

Vamos aqui provar a seguinte afirmativa, a qual coroa os resultados obtidos até aqui sobre funções numéricas mensuráveis: o conjunto das funções numéricas mensuráveis forma uma álgebra. Mais precisamente, tem-se

Proposição 31.14 *Se $f : M \to \mathbb{R}$ e $g : M \to \mathbb{R}$ são ambas $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensuráveis, então*

1. *Para todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ vale que $\alpha f + \beta g$ é $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável.*
2. *O produto $f \cdot g$ é $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável.* □

Prova. Para simplificar a linguagem, usaremos nesta prova a expressão *função mensurável* no sentido de $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Afirmamos que αf é igualmente mensurável. Se $\alpha = 0$ a afirmativa é trivial. Se $\alpha \neq 0$, notemos que para todo $a \in \mathbb{R}$

$$\{x \in M|\ \ \alpha f(x) < a\} \ = \ \{x \in M|\ \ f(x) < a/\alpha\} \ \in \ \mathcal{M}$$

por (31.B.5), já que, por hipótese, f é mensurável. Como isso vale para todo $a \in \mathbb{R}$, segue pela mesma Proposição 31.12 que αf é igualmente mensurável.

O mesmo tipo de argumento tem outra consequência semelhante. Se $h : M \to \mathbb{R}$ é mensurável, então que para todo $b \in \mathbb{R}$ vale

$$\{x \in M|\ \ b + h(x) < a\} \ = \ \{x \in M|\ \ h(x) < a - b\} \ .$$

Como h é mensurável, $\{x \in M|\ \ h(x) < a - b\} \in \mathcal{M}$. Como isso vale para todo $a \in \mathbb{R}$, concluímos da igualdade acima que $b + h$ é mensurável.

Observe-se agora que

$$\{x \in M|\ \ f(x) + g(x) < a\} \ = \ \{x \in M|\ \ f(x) < a - g(x)\} \ .$$

Definindo-se $h(x) = a - g(x)$, constatamos pelas considerações acima que se trata de uma função mensurável. Assim, pela Proposição 31.13, segue que $\{x \in M|\ \ f(x) + g(x) < a\} \in \mathcal{M}$ para todo a, o que implica que $f + g$ e mensurável.

Concluímos disso tudo que para todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ a função $\alpha f + \beta g$ é mensurável em relação a $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$. Resta-nos ainda mostrar que o produto $f \cdot g$ é mensurável. Provemos primeiro que se f é mensurável então f^2 também o é. De fato, para $a < 0$

$$\{x \in M|\ \ f(x)^2 < a\} \ = \ \emptyset \ \in \ \mathcal{M}$$

mas para $a \geq 0$,

$$\{x \in M|\ \ f(x)^2 < a\} \ = \ \left\{x \in M|\ \ f(x) < \sqrt{a}\right\} \cup \left\{x \in M|\ \ f(x) < -\sqrt{a}\right\} \ .$$

Como f é mensurável, segue que $\{x \in M|\ \ f(x) < \pm\sqrt{a}\} \in \mathcal{M}$. Logo $\{x \in M|\ \ f(x)^2 < a\} \in \mathcal{M}$ e como isso vale para todo $a \in \mathbb{R}$, segue que f^2 é mensurável.

A prova que $f \cdot g$ é mensurável segue da relação

$$f \cdot g \ = \ \frac{1}{4}\left[(f + g)^2 - (f - g)^2\right]$$

e reunindo tudo o que vimos. ■

A seguinte proposição também é relevante:

Proposição 31.15 *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in M$, então $\sqrt{f}$ é também $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável.* □

Prova. Para $f : M \to \mathbb{R}$, basta observar que para $a < 0$ vale $\{x \in M|\ \sqrt{f(x)} < a\} = \emptyset \in \mathcal{M}$ e para $a \geq 0$,

$$\{x \in M|\ \sqrt{f(x)} < a\} \ = \ \{x \in M|\ f(x) < a^2\} \ \in \ \mathcal{M} ,$$

pois f é mensurável. Isso provou que $\sqrt{f}$ é $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável. ■

• **Funções complexas mensuráveis**

O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é um espaço topológico métrico completo com a métrica $d(z,\ w) = |w - z|$, $z,\ w \in \mathbb{C}$. Denotaremos por $\tau_{\mathbb{C}}$ a topologia que essa métrica induz, a topologia usual de $\mathbb{C}$. A essa topologia vem associada a σ-álgebra Boreliana $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{C}}]$.

Vamos demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 31.16 *Seja $(M,\ \mathcal{M})$ um espaço mensurável e $f : M \to \mathbb{C}$ uma função complexa $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{C}}]]$-mensurável definida em M. Então Re(f), Im(f) e $|f|$ são funções reais $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensuráveis.* □

Prova. Comecemos por observar que a função $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por $\mathrm{Re}(z) = (z + \overline{z})/2$ é contínua, assim como a função $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por $\mathrm{Im}(z) = (z - \overline{z})/(2i)$.

E. 31.32 *Exercício simples.* Prove isso! ✠

Com isso em mente, podemos entender a função $\mathrm{Re}(f) : M \to \mathbb{R}$ como a composição $\mathrm{Re} \circ f$ da função $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{C}}]]$-mensurável f com a função Re que é contínua em relação às topologias $\tau_{\mathbb{C}}$ e $\tau_{\mathbb{R}}$. Assim, pela Proposição 31.11, página 1500, segue que $\mathrm{Re}(f) : M \to \mathbb{R}$ é $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável. A prova para $\mathrm{Im}(f)$ é idêntica.

A função módulo $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ é também uma função contínua entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$. (Isso é totalmente óbvio, pois a métrica em $\mathbb{C}$ é definida por essa função!). Assim o mesmo argumento se aplica novamente.

Outra maneira de provar que $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ é $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável é lembrar que $(\mathrm{Re}(f))^2 + (\mathrm{Im}(f))^2$ é $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável pela Proposição 31.14 e, portanto, pela Proposição 31.15, $|f| = \sqrt{(\mathrm{Re}(f))^2 + (\mathrm{Im}(f))^2}$ é $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável. ■

A Proposição 31.16 tem parcialmente uma recíproca:

Proposição 31.17 *Se $u : M \to \mathbb{R}$ e $v : M \to \mathbb{R}$ são $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensuráveis então $f : u + iv : M \to \mathbb{C}$ é $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{C}}]]$-mensurável.* □

Prova. (De [348]). Seja I_1 um intervalo aberto do eixo real e I_2 um intervalo aberto do eixo imaginário. Então $R = I_1 \times I_2$ é um retângulo aberto em $\mathbb{C}$. Agora, é fácil ver que $f^{-1}(R) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2)$. Pelas hipóteses, $u^{-1}(I_1)$ e $v^{-1}(I_2)$ pertencem à σ-álgebra $\mathcal{M}$. Logo, $f^{-1}(R)$ também. Lembremos que todo aberto A de $\mathbb{C}$ pode ser ser escrito como união contável de tais retângulos: $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$. Agora, por (1.25), página 45,

$$f^{-1}(A) \ = \ f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n\right) \ = \ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(R_n) \ .$$

Mas como vimos $f^{-1}(R_n) \in \mathcal{M}$ para todo n e, como a união acima é contável, segue que $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$. Pela Proposição 31.9, isso prova que f é $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{C}}]]$-mensurável. ■

Para as funções complexas mensuráveis vale a mesma afirmação feita sobre as funções reais: elas formam uma álgebra. Mais precisamente, tem-se

Proposição 31.18 *Se $f : M \to \mathbb{C}$ e $g : M \to \mathbb{C}$ são ambas $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{C}}]$-mensuráveis, então*

1. *Para todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ vale que $\alpha f + \beta g$ é $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{C}}]]$-mensurável.*
2. *O produto $f \cdot g$ é $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{C}}]]$-mensurável.* □

Prova. A prova é elementar com o que acumulamos até aqui, pois é fácil provar (usando as Proposições 31.14 e 31.16) que as partes reais e imaginárias de $\alpha f + \beta g$ e de $f \cdot g$ são $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensuráveis. Daí, pela Proposição 31.17, $\alpha f + \beta g$ e $f \cdot g$ são $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{C}}]]$-mensuráveis. ■

31.C Prova do Lema 31.3

A prova (extraída com modificações de [177]) consiste em exibir uma sequência f_n de funções simples mensuráveis e não-negativas e verificar as propriedades. A sequência é

$$f_n(x) \ := \ \sum_{k=1}^{n2^n} \left(\frac{k-1}{2^n}\right) \chi_{F_{n,\,k}}(x) + n\chi_{G_n}(x) \ ,$$

onde

$$F_{n,\,k} \ := \ f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n},\ \frac{k}{2^n}\right)\right) \ = \ \left\{x \in M \,\middle|\, \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\right\} \ ,$$

e

$$G_n \ := \ f^{-1}\left([n,\ \infty]\right) \ = \ \{x \in M |\ n \leq f(x) \leq \infty\} \ .$$

Como por hipótese f é Boreliana, é imediato que $F_{n,\,k}$ e G_n são mensuráveis (ou seja, elementos de $\mathcal{M}$), já que os intervalos $\left[\frac{k-1}{2^n},\ \frac{k}{2^n}\right)$ e $[n,\ \infty]$ são Borelianos. Assim, cada f_n é uma função simples e mensurável.

Queremos provar que f_n é não-decrescente e que converge a f. Para isso, é preciso entender melhor como a sequência f_n está definida. Para cada n, divide-se o intervalo semiaberto $[0,\ n)$ em $n2^n$ subintervalos semiabertos menores de tamanho $\frac{1}{2^n}$, que são os intervalos $\left[\frac{k-1}{2^n},\ \frac{k}{2^n}\right)$ com k variando entre 1 e $n2^n$. Os conjuntos $F_{n,\,k}$ são as pré-imagens por f desses subintervalos semiabertos. A divisão de $[0,\ n)$ em $n2^n$ subintervalos semiabertos de tamanho $\frac{1}{2^n}$ significa que cada intervalo semiaberto $[l,\ l+1)$, com $l = 0,\ \ldots,\ n-1$, é dividido em 2^n intervalos semiabertos de igual tamanho, a saber, $\frac{1}{2^n}$.

Se x é tal que $f(x)$ cai em $\left[\frac{k-1}{2^n},\ \frac{k}{2^n}\right)$, então $f_n(x)$ é definido como sendo $\frac{k-1}{2^n}$. Se x é tal que $f(x) \geq n$, então $f_n(x)$ é definido como sendo n. Assim, para todo x, $f_n(x)$ é sempre menor o igual a $f(x)$.

Se passarmos de n para $n+1$, cada intervalo passa a ter tamanho $\frac{1}{2^{n+1}}$, que é a <u>metade</u> do anterior. Assim cada intervalo semiaberto $\left[\frac{k-1}{2^n},\ \frac{k}{2^n}\right)$ passa a ser dividido em dois intervalos semiabertos disjuntos: $\left[\frac{k-1}{2^n},\ \frac{k}{2^n}\right) = \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}},\ \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) \cup \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}},\ \frac{2k}{2^{n+1}}\right)$. Como as novas subdivisões estão contidas nas anteriores, o valor de cada $f_{n+1}(x)$ só pode aumentar em relação ao de f_n. Mais precisamente, para $x \in F_{n,\,k}$ a função f_n vale $\frac{k-1}{2^n}$. Após a primeira subdivisão (ao passarmos de n a $n+1$) o conjunto $F_{n,\,k}$ passa a ser a união dos dois conjuntos disjuntos $F_{n+1,\,2k-1}$ e $F_{n+1,\,2k}$. No primeiro $f_{n+1}(x)$ vale $\frac{2k-2}{2^{n+1}} = \frac{k-1}{2^n} = f_n(x)$ e no segundo $f_{n+1}(x) = \frac{2k-1}{2^{n+1}} > \frac{k-1}{2^n} = f_n(x)$, o que prova o que afirmamos.

Para ver que f_n converge a f, observe-se que se $f(x)$ é finito, então para todo $n > f(x)$ tem-se obviamente que $f(x) \in [0,\ n)$ e, portanto, vale que $f(x) \in \left[\frac{k-1}{2^n},\ \frac{k}{2^n}\right)$ para algum k entre 1 e $n2^n$. Teremos então, pela definição, que $f_n(x) = \frac{k-1}{2^n}$ e, portanto, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}$, o que prova que $f_n(x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$. Se $f(x)$ não é finito, $f_n(x) = n$ para todo n, pela definição e, portanto, $f_n(x) \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Resta apenas provar que se f é finito a convergência é uniforme. Se $A > 0$ é tal que $0 \leq f(x) < A$ para todo $x \in M$, então é certo que se $n > A$ teremos que para cada x haverá um k entre 1 e $n2^n$ tal que $f(x) \in \left[\frac{k-1}{2^n},\ \frac{k}{2^n}\right)$. Nesse caso $f_n(x) = \frac{k-1}{2^n}$ e $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}$, Ora, o lado direito dessa desigualdade não depende de x, o que mostra que a mesma é uniforme em todo M, completando a prova do Lema 31.3, página 1475. ■

31.D Demonstração de (31.26)

Provemos a relação (31.26). Temos que, para todo B_k vale

$$B_k \;=\; B_k \cap M \;=\; B_k \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_q) \;=\; (B_k \cap C_1) \cup \cdots \cup (B_k \cap C_q)$$

sendo que a união do lado direito é disjunta, pois $(B_k \cap C_i) \cap (B_k \cap C_j) = (C_i \cap C_j) \cap B_k = \emptyset$ para $i \neq j$. Com isso, se μ é uma medida,

$$\mu(B_k) \;=\; \mu\Big((B_k \cap C_1) \cup \cdots \cup (B_k \cap C_q)\Big) \;=\; \sum_{l=1}^{q} \mu(B_k \cap C_l) \; . \tag{31.D.13}$$

Analogamente, para todo C_l vale

$$C_l \;=\; C_l \cap M \;=\; C_l \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_p) \;=\; (C_l \cap B_1) \cup \cdots \cup (C_l \cap B_p)$$

também uma união disjunta e também tem-se

$$\mu(C_l) \;=\; \mu\Big((C_l \cap B_1) \cup \cdots \cup (C_l \cap B_p)\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{p} \mu(C_l \cap B_k) \; . \tag{31.D.14}$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{p} \beta_k \, \mu(B_k) \;\stackrel{(31.D.13)}{=}\; \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} \beta_k \, \mu(B_k \cap C_l) \;=\; \sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} \gamma_l \, \mu(B_k \cap C_l) \;\stackrel{(31.D.14)}{=}\; \sum_{l=1}^{q} \gamma_l \, \mu(C_l) \; ,$$

o que prova (31.26). Na segunda igualdade, acima, trocamos β_k por γ_l e a razão de podermos fazer isso é a seguinte. Se $B_k \cap C_l = \emptyset$ então $\mu(B_k \cap C_l) = 0$, o que autoriza a substituição. Se $B_k \cap C_l \neq \emptyset$, então $\beta_k = \gamma_l$, pois se $x \in B_k \cap C_l$, vale pelas representações normais de (31.25) que $s(x) = \beta_k$ e que $s(x) = \gamma_k$.

31.E A Equivalência das Definições (31.27) e (31.28)

Vamos aqui mostrar a equivalência das duas definições (31.27) e (31.28) da integral de Lebesgue. Nosso tratamento segue [177], com ligeiras adaptações e melhorias. Vamos supor que $s \in S(f)$ e que f_n é uma sequência monótona crescente de funções simples mensuráveis de $S(f)$ que converge a f (que tal existe, garante-nos o Lema 31.3). Vamos primeiramente mostrar que

$$\int_M s \, d\mu \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu \; .$$

Há dois casos a tratar, **I** quando $\int_M s\, d\mu = \infty$ e **II** quando $\int_M s\, d\mu < \infty$.

I. No primeiro caso desejamos provar que $\int_M f_n \, d\mu$ diverge quando $n \to \infty$. Façamos isso. Se s tem representação normal curta $s(x) = \sum_{k=1}^{n} s_k \chi_{S_k}(x)$, então o fato de $\int_M s\, d\mu = \infty$ implica que existe um k_0 com $s_{k_0} > 0$ e $\mu(S_{k_0}) = \infty$. Fixemos um ϵ tal que $0 < \epsilon < s_{k_0}$ e definamos os conjuntos

$$A_n \;:=\; \{ \, x \in M | \;\; f_n(x) + \epsilon > s(x) \, \} \; .$$

É fácil ver que $A_m \subset A_n$ para todos $m \leq n$, pois f_n é uma sequência crescente. Fora isso,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \;=\; M \; .$$

Isso se deve ao seguinte. Se $x \in M$ então, como $f_n(x)$ converge a $f(x) \leq s(x)$, segue que para algum n grande o suficiente teremos $f_n(x) + \epsilon > s(x)$. Assim, todo $x \in M$ pertence a algum A_n.

Temos, com isso, que

$$S_{k_0} \;=\; S_{k_0} \cap M \;=\; S_{k_0} \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \;=\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap S_{k_0})$$

Como $A_m \cap S_{k_0} \subset A_n \cap S_{k_0}$ para todos $m \leq n$, podemos evocar a propriedade geral de medidas 3 da página 1393 e escrever $\mu(S_{k_0}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n \cap S_{k_0})$, o que nos diz que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n \cap S_{k_0}) = \infty$. Agora,

$$
\begin{aligned}
\int_M f_n \, d\mu > \int_M f_n \, \chi_{A_n \cap S_{k_0}} d\mu &> \int_M (s-\epsilon) \, \chi_{A_n \cap S_{k_0}} d\mu \\
&= \int_M (s_{k_0}-\epsilon) \, \chi_{A_n \cap S_{k_0}} d\mu \\
&= (s_{k_0}-\epsilon) \int_M \chi_{A_n \cap S_{k_0}} d\mu \\
&= (s_{k_0}-\epsilon)\mu(A_n \cap S_{k_0}) \; .
\end{aligned}
$$

A segunda desigualdade (primeira linha) se deve aí fato que em A_n tem-se $f_n(x) > s(x) - \epsilon$. A primeira igualdade (segunda linha) se deve ao fato que em S_{k_0} a função s vale s_{k_0}.

Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu > (s_{k_0} - \epsilon) \left[\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n \cap S_{k_0}) \right] = \infty$, como queríamos mostrar.

II. Consideremos agora o caso $\int_M s \, d\mu < \infty$. Seja $s(x) = \sum_{k=1}^n s_k \chi_{S_k}(x)$ a representação normal curta de s. Como $\int_M s \, d\mu = \sum_{k=1}^n s_k \mu(S_k) < \infty$, segue que $\mu(S_k) < \infty$ para todo k com $s_k > 0$.

Seja $T := \{x \in M | \; s(x) > 0\}$. É fácil ver que

$$
T = \bigcup_{\substack{k=1, \ldots, n \\ s_k > 0}} S_k \; .
$$

Tem-se então $\mu(T) = \sum\limits_{\substack{k \\ s_k>0}} \mu(S_k) < \infty$. Vamos escolher um ϵ fixo tal que $0 < \epsilon < \min_{s_k>0}\{s_k\}$. Segue que

$$
\begin{aligned}
\int_M f_n \, d\mu &\geq \int_M f_n \, \chi_{A_n \cap T} \, d\mu \\
&> \int_M (s-\epsilon) \, \chi_{A_n \cap T} \, d\mu \\
&= \int_M s \, \chi_{A_n \cap T} \, d\mu - \epsilon \int_M \chi_{A_n \cap T} \, d\mu \\
&= \int_M s \, \chi_{A_n \cap T} \, d\mu - \epsilon\mu(A_n \cap T) \\
&\geq \int_M s \, \chi_{A_n \cap T} \, d\mu - \epsilon\mu(T) \\
&= \int_M s \, \chi_{A_n \cap T} \, \chi_T \, d\mu - \epsilon\mu(T) \\
&= \int_M s \, \chi_T \, d\mu - \int_M s \, (1 - \chi_{A_n \cap T}) \, \chi_T \, d\mu - \epsilon\mu(T) \\
&= \int_M s \, d\mu - \int_M s \, (\chi_T - \chi_{A_n \cap T}) \, d\mu - \epsilon\mu(T) \; .
\end{aligned}
$$

Acima, usamos em vários lugares que $\chi_{A_n \cap T} = \chi_{A_n \cap T}\chi_T$. Na última igualdade usamos que $\int_M s \, \chi_T \, d\mu = \int_M s \, d\mu$. Agora, se definirmos $s_m = \sup_{x \in M} s(x) = \max\{s_1, \ldots, s_n\} \geq 0$, teremos

$$
\int_M s \, (\chi_T - \chi_{A_n \cap T}) \, d\mu \leq s_m \int_M (\chi_T - \chi_{A_n \cap T}) \, d\mu = s_m \Big(\mu(T) - \mu(A_n \cap T) \Big) \; .
$$

Pelo mesmo argumento usado na parte **I**, vale $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n\cap T)=\mu(T)$. Com isso, teremos que $s_m\left(\mu(T)-\mu(A_n\cap T)\right)\leq \epsilon$ para todos os n's grandes o suficiente. Assim, para todos os n's grandes o suficiente,

$$\int_M f_n\,d\mu \;>\; \int_M s\,d\mu-\epsilon-\epsilon\mu(T)\;.$$

O lado direito não depende de n. Logo,

$$\lim_{n\to\infty}\int_M f_n\,d\mu \;>\; \int_M s\,d\mu-\epsilon-\epsilon\mu(T)\;.$$

Como essa desigualdade vale para ϵ arbitrário, segue que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_M f_n\,d\mu \;\geq\; \int_M s\,d\mu$, completando a prova para o caso **II**.

A desigualdade $\lim\limits_{n\to\infty}\int_M f_n\,d\mu \geq \int_M s\,d\mu$ mostra que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_M f_n\,d\mu \geq \sup\limits_{s\in S(f)}\int_M s\,d\mu$. Agora, como $f_n\in S(f)$, é claro que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_M f_n\,d\mu \leq \sup\limits_{s\in S(f)}\int_M s\,d\mu$. Isso mostra que se f_n é qualquer sequência monótona crescente de funções simples mensuráveis de $S(f)$ que converge a f vale

$$\lim_{n\to\infty}\int_M f_n\,d\mu \;=\; \sup_{s\in S(f)}\int_M s\,d\mu\;,$$

provando a equivalência das duas definições (31.27) e (31.28).

31.F Prova do Teorema da Convergência Monótona

Apresentamos aqui a demonstração do Teorema 31.4, o Teorema da Convergência Monótona.

Prova do Teorema 31.4.[40] Pelas hipóteses $f=\sup_{n\in\mathbb{N}}f_n$, assim, pela discussão da página 1473 sobre funções definidas pelo supremo de sequências, f é mensurável.

Pelas hipóteses, a sequência $\int_M f_n\,d\mu$ ou converge a algum número finito não-negativo ou diverge. Assim, seja $F:=\lim_{n\to\infty}\int_M f_n\,d\mu$ com $F\in\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}$. Como $f_n(x)<f(x)$ para todo x, segue que $\int_M f_n\,d\mu\leq\int_M f\,d\mu$. Logo,

$$F\;\leq\;\int_M f\,d\mu\;. \tag{31.F.15}$$

Seja agora $s\in S(f)$, ou seja, s é simples, $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável e $0\leq s\leq f$. Tomando-se uma constante c fixa no intervalo $(0,\ 1)$, definamos para cada $n\in\mathbb{N}$ os conjuntos

$$E_n\;:=\;\{x\in M|\ f_n(x)\geq cs(x)\}\;.$$

Pela Proposição 31.13, página 1501, os conjuntos E_n são todos mensuráveis (ou seja, pertencem a $\mathcal{M}$). Como $\{f_n\}$ é crescente, é também imediato que $E_n\subset E_{n+1}$ para todo n.

Se $x\in M$ e $f(x)=0$, então $x\in E_1$, pois nesse caso $f_1(x)=s(x)=f(x)=0$. Se $x\in M$ e $f(x)>0$, então $cs(x)<f(x)$, pois c foi escolhido menor que 1. Como $f_n(x)\to f(x)$, haverá algum n para o qual $f_n(x)\geq cs(x)$ e, portanto, $x\in E_n$. Isso provou que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n=M$. Pelo Lema 31.4, página 1478, e pela propriedade geral de medidas do item 3, página 1393, isso implica que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}s\,d\mu\;=\;\int_M s\,d\mu\;.$$

Como $f_n\geq f_n\chi_{E_n}$, vale que

$$\int_M f_n\,d\mu\;\geq\;\int_M f_n\chi_{E_n}\,d\mu\;=\;\int_{E_n}f_n\,d\mu\;\geq\;\int_{E_n}c\,s\,d\mu\;=\;c\int_{E_n}s\,d\mu\;.$$

[40] A demonstração abaixo é encontrada de forma quase idêntica em vários textos, por exemplo, em [348]

para todo n. Tomando o limite $n \to \infty$ em ambos os lados, concluímos que $F \geq c \int_M s\, d\mu$. Como isso vale para todo c entre 0 e 1, segue que $F \geq \int_M s\, d\mu$. Agora, recordando que, pela definição, $\int_M f d\mu = \sup_{s \in S(f)} \int_M s\, d\mu$, concluímos que $F \geq \int_M f, d\mu$. Por (31.F.15), segue que $\int_M f\, d\mu = F = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n\, d\mu$. Isso completa a demonstração do Teorema 31.4. ■

31.G Prova do Lema de Fatou

Prova do Lema de Fatou. Sejam as funções $g_n : M \to \mathbb{R}$ definidas da seguinte forma: para cada $x \in M$ tem-se $g_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x)$. É claro que cada g_n é não-negativa e, pelos comentários da página 1473, $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]]$-mensurável. É também claro que $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ para todo n e para todo $x \in M$ e que $f_n(x) \geq g_n(x)$, também para todo n e para todo $x \in M$. Agora, para cada $x \in M$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) \;=\; \sup_{n\geq 1} g_n(x) \;=\; \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} f_k(x) \;=\; \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \,. \tag{31.G.16}$$

(A última igualdade é a definição de lim inf). Como $f_n(x) \geq g_n(x)$ tem-se

$$\int_M f_n\, d\mu \;\geq\; \int_M g_n\, d\mu$$

para todo n, e assim,

$$\inf_{k\geq n} \int_M f_k\, d\mu \;\geq\; \inf_{k\geq n} \int_M g_k\, d\mu \,.$$

Como $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ para todo n, tem-se que

$$\inf_{k\geq n} \int_M g_k\, d\mu \;=\; \int_M g_n\, d\mu$$

e, portanto,

$$\inf_{k\geq n} \int_M f_k\, d\mu \;\geq\; \int_M g_n\, d\mu \,.$$

Consequentemente,

$$\sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} \int_M f_k\, d\mu \;\geq\; \sup_{n\geq 1} \int_M g_n\, d\mu \,.$$

Agora, por definição

$$\liminf_n \int_M f_n\, d\mu \;=\; \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} \int_M f_k\, d\mu$$

e, além disso,

$$\sup_{n\geq 1} \int_M g_n\, d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_M g_n\, d\mu \,,$$

pois $\displaystyle\int_M g_n\, d\mu$ é crescente. Portanto, provamos que

$$\liminf_n \int_M f_n\, d\mu \;\geq\; \lim_{n\to\infty} \int_M g_n\, d\mu \,.$$

Como g_n satisfaz os requisitos do Teorema da Convergência Monótona, Teorema 31.4, página 1486, vale que

$$\lim_{n\to\infty} \int_M g_n\, d\mu \;=\; \int_M \lim_{n\to\infty} g_n\, d\mu$$

e, assim,

$$\liminf_n \int_M f_n\, d\mu \;\geq\; \int_M \lim_{n\to\infty} g_n\, d\mu \,. \tag{31.G.17}$$

Por fim, sabemos por (31.G.16) que $\lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ e, assim, (31.G.17) estabeleceu que

$$\liminf_n \int_M f_n\, d\mu \ \geq \ \int_M \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \ ,$$

que é o que queríamos provar. ■

31.H Prova do Teorema da Convergência Dominada

Seguiremos aqui [348].

Prova do Teorema da Convergência Dominada. É claro que se $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x)$ e $|f_n(x)| \leq F(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in M$, então $|f(x)| \leq F(x)$ para todo $x \in M$. Como f é também $[\mathcal{M},\ \mathcal{M}[\tau_\mathbb{C}]]$-mensurável (por ser o limite de funções mensuráveis), então $\int_M |f|\, d\mu < \int_M F\, d\mu < \infty$ e, portanto, $f \in \mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$. Isso provou o item 1 do Teorema 31.6.

Em segundo lugar, notemos que $|f - f_n| \leq |f| + |f_n| \leq 2F$. Assim, as funções $g_n = 2F - |f - f_n|$ são não-negativas e podemos aplicar o Lema de Fatou, Lema 31.5, que diz-nos que

$$\int_M \liminf_{n\to\infty}(2F - |f - f_n|)\, d\mu \ \leq \ \liminf_{n\to\infty} \int_M (2F - |f - f_n|)\, d\mu \ .$$

Por um lado, temos que

$$\liminf_{n\to\infty}(2F - |f - f_n|) \ = \ 2F - \limsup_{n\to\infty} |f - f_n| \ = \ 2F \ ,$$

pois $\liminf_{n\to\infty} -|f - f_n| = -\limsup_{n\to\infty} |f - f_n| = 0$. (Justifique!) Por outro lado,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_M (2F - |f - f_n|)\, d\mu \ = \ \int_M 2F\, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_M -|f - f_n|\, d\mu \ .$$

Porém, vale que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_M -|f - f_n|\, d\mu \ = \ -\limsup_{n\to\infty} \int_M |f - f_n|\, d\mu \ .$$

(Justifique!) Assim, provamos que

$$2\int_M F\, d\mu \ \leq \ 2\int_M F\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_M |f - f_n|\, d\mu \ .$$

Como $\int_M F\, d\mu \leq \infty$ (pois $F \in \mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$), podemos subtrair o termo $2\int_M F\, d\mu$ de ambos os lados da expressão acima e concluir que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_M |f - f_n|\, d\mu \ \leq \ 0 \ .$$

Como $\int_M |f - f_n|\, d\mu \geq 0$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_M |f - f_n|\, d\mu \ = \ 0 \ .$$

Isso provou o item 2 do Teorema 31.6. Como $|f - f_n| \leq 2F$, segue que $(f - f_n) \in \mathcal{L}_1(M,\ d\mu)$ e podemos aplicar (31.37) e concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_M (f - f_n)\, d\mu \right| \ = \ 0 \ ,$$

ou seja,

$$\int_M f\, d\mu \ = \ \lim_{n\to\infty} \int_M f_n\, d\mu \ .$$

Isso provou o item 3 do Teorema 31.6. ■

31.I Prova dos Teoremas 31.2 e 31.3

Aqui apresentamos a demonstração dos Teoremas 31.2 e 31.3, os quais tratam da relação entre as integrais de Riemann e Lebesgue. Seguiremos essencialmente [177], que por sua vez segue [35]. Para uma outra demonstração ligeiramente diferente do Teorema 31.2 vide, por exemplo, [127].

Prova do Teorema 31.2. A prova que apresentamos requer o Lema de Fatou e o Teorema da Convergência Dominada, tratados na Seção 31.3.4, página 1486.

Dada uma função real limitada e integrável por Riemann f, definida em $[a,\ b]$, e dada uma partição $\mathcal{P}_n = \{x_1,\ \ldots,\ x_n\}$ de $[a,\ b]$ com $a = x_1 < \ldots < x_n = b$, sejam as somas de Darboux

$$D_i[\mathcal{P}_n,\ f] \ := \ \sum_{k=1}^{n-1}\left(\inf_{y\in I_k} f(y)\right)\ |I_k| \qquad \text{e} \qquad D_s[\mathcal{P}_n,\ f] \ := \ \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sup_{y\in I_k} f(y)\right)\ |I_k| \ ,$$

onde $I_k = [x_k,\ x_{k+1})$ e $|I_k| = x_{k+1} - x_k = \mu_L(I_k)$.

Definamos também as funções simples

$$\sigma_n \ := \ \sum_{k=1}^{n-1}\left(\inf_{y\in I_k} f(y)\right)\ \chi_{I_k} \qquad \text{e} \qquad \Sigma_n \ := \ \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sup_{y\in I_k} f(y)\right)\ \chi_{I_k} \ . \tag{31.I.18}$$

É bastante claro que σ_n e Σ_n são funções mensuráveis Borelianas, pois os intervalos $I_k = [x_k,\ x_{k+1})$ são Borelianos. É também evidente que

$$D_i[\mathcal{P}_n,\ f] \ = \ \int_{[a,\ b]}\sigma_n\, d\mu_L \qquad \text{e} \qquad D_s[\mathcal{P}_n,\ f] \ = \ \int_{[a,\ b]}\Sigma_n\, d\mu_L \ .$$

Se f é integrável por Riemann então existe uma sequência de partições $\mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_2,\ \mathcal{P}_3, \ldots$, com $\mathcal{P}_{n+1}$ mais fina que $\mathcal{P}_n$ para todo n e tais que $D_i[\mathcal{P}_n,\ f] \to \rho$ e $D_s[\mathcal{P}_n,\ f] \to \rho$ para algum $\rho \in \mathbb{R}$. Esse ρ é, por definição, a integral de Riemann de f em $[a,\ b]$, ou seja, $\rho = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,\ b]}\sigma_n\, d\mu_L \ = \ \lim_{n\to\infty}\int_{[a,\ b]}\Sigma_n\, d\mu_L \ = \ \rho \ ,$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,\ b]}(\Sigma_n - \sigma_n)\, d\mu_L \ = \ 0 \ .$$

A sequência $q_n = \Sigma_n - \sigma_n$ é não-crescente, pois Σ_n é não-crescente e σ_n é não-decrescente (certo?). Assim, a função $q = \inf\limits_n q_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$ é Boreliana (vide discussão à página 1473). Pelo Lema de Fatou (Lema 31.5, página 1487),

$$\int_{[a,\ b]} q\, d\mu_L \ = \ \int_{[a,\ b]}\lim_{n\to\infty} q_n\, d\mu_L \ = \ \int_{[a,\ b]}\liminf_{n\to\infty} q_n\, d\mu_L \ \le \ \liminf_{n\to\infty}\int_{[a,\ b]} q_n\, d\mu_L \ = \ \lim_{n\to\infty}\int_{[a,\ b]}(\Sigma_n - \sigma_n)\, d\mu_L \ = \ 0 \ .$$

Como $q_n = \Sigma_n - \sigma_n \ge 0$ (certo?), segue pela Proposição 31.7, página 1479, que $q = 0$ μ_L-q.t.p. em $[a,\ b]$.

Como $\sigma_n \le f \le \Sigma_n$ para todo n, segue que $f = \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$ μ_L-q.t.p. em $[a,\ b]$. Como f é limitada, existe $M > 0$ tal que $|f| < M$. Mas isso implica também que $|\sigma_n| < M$ pois, por (31.I.18), vale

$$|\sigma_n| \ \le \ \sum_{k=1}^{n-1}\left|\inf_{y\in I_k} f(y)\right|\ \chi_{I_k} \ \le \ M\sum_{k=1}^{n-1}\chi_{I_k} \ = \ M \ .$$

A função constante igual a M é integrável em $[a,\ b]$ (pois $\int_{[a,\ b]} M\, d\mu_L = M(b-a) < \infty$). Logo, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada, Teorema 31.6, página 1488, e concluir do fato que $f = \lim_{n\to\infty}\sigma_n$ que f é integrável e que,

$$\int_{[a,\ b]} f\, d\mu_L \ = \ \lim_{n\to\infty}\int_{[a,\ b]}\sigma_n\, d\mu_L \ = \ \lim_{n\to\infty} D_i[\mathcal{P}_n,\ f] \ = \ \rho \ = \ \int_a^b f(x)\, dx \ .$$

provando a igualdade da integral de Riemann e a de Lebesgue no caso tratado. Isso encerra a prova do Teorema 31.2. ■

Passemos agora à prova do Teorema 31.3.

Prova do Teorema 31.3. (De [177], com aperfeiçoamentos). A prova que apresentamos requer o Teorema da Convergência Monótona, tratado na Seção 31.3.4, página 1486.

Seja a integral de Riemann $\int_{-n}^{n} f(x)\,dx$, a qual existe para todo para $n \in \mathbb{N}$, por hipótese. Pelo Teorema 31.2,

$$\int_{-n}^{n} f(x)\,dx \;=\; \int_{[-n,\,n]} f\,d\mu_L \;,$$

a integral à direita sendo a de Lebesgue. Podemos escrever

$$\int_{[-n,\,n]} f\,d\mu_L \;=\; \int_{\mathbb{R}} f\,\chi_{[-n,\,n]} d\mu_L \;.$$

Agora, as funções $f_n = f\,\chi_{[-n,\,n]}$ são Borelianas, são não-negativas e formam uma sequência não-decrescente, pois $f_n \leq f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, já que $[-n,\ n] \subset [-(n+1),\ n+1]$. Assim, podemos aplicar o Teorema da Convergência Monótona, Teorema 31.4, página 1486, e obter

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\mu_L \;=\; \int_{\mathbb{R}} \Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)\,d\mu_L \;=\; \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu_L \;. \tag{31.I.19}$$

Acima, o fato que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ é consequência de que $[-n,\ n] \to (-\infty,\ \infty)$ quanto $n \to \infty$.

Assim, concluímos da igualdade em (31.I.19) que se f possuir uma integral de Riemann imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ (definida na Seção 31.2.1, página 1465), então o limite $\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(x)\,dx$, existe e é igual a $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ e, com isso concluímos que $\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu_L$ é finita e, portanto, f é integrável no sentido de Lebesgue (como f é não-negativa, é óbvio que $f = |f|$).

Por outro lado, se f for integrável no sentido de Lebesgue, então $F := \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu_L < \infty$ e, pela igualdade em (31.I.19), o limite $\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(x)\,dx$ existe e é igual a F. Portanto, para qualquer $\epsilon > 0$ existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\int_{-n_0}^{n_0} f(x)\,dx - F\right| \;<\; \epsilon \;. \tag{31.I.20}$$

Para <u>todo</u> intervalo finito $[a,\ b]$ com $[a,\ b] \supset [-n_0,\ n_0]$ vale $f\chi_{[-n_0,\,n_0]} \leq f\chi_{[a,\,b]} \leq f$ pois f é não-negativa. Isso implica $\int_{[-n_0,\,n_0]} f\,d\mu \leq \int_{[a,\,b]} f\,d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu$, ou seja,

$$\int_{-n_0}^{n_0} f(x)\,dx \;\leq\; \int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; F \;. \tag{31.I.21}$$

Consequentemente, por (31.I.20) e (31.I.21),

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - F\right| \;<\; \epsilon \;.$$

Esse fato diz-nos que a rede $[\alpha,\ \beta] \to \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ está eventualmente em qualquer intervalo aberto $(F-\epsilon,\ F+\epsilon)$. (Para a definição de "estar eventualmente", vide Seção 30.3, página 1440). Isso diz-nos que F é um ponto limite dessa rede, o qual, se existe, é único, pois $\mathbb{R}$ é um espaço Hausdorff (vide Proposição 30.5, página 1442). Assim, pela definição da Seção 31.2.1, página 1465, f possui uma integral de Riemann imprópria e essa é igual a $F := \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu_L$. ■

31.J Prova das Desigualdades de Hölder e Minkowski

Prova do Teorema 31.7. Provaremos primeiro a desigualdade de Hölder e dela extrairemos a de Minkowski.

A prova da desigualdade de Hölder (31.44) segue os mesmos passos daquela do Teorema 24.4, página 24.4. Lembremos, em primeiro lugar a desigualdade de Young (5.51), página 307, que estabelece que

$$a^{1/p}\, b^{1/q} \;\leq\; \frac{a}{p}+\frac{b}{q}, \tag{31.J.22}$$

para $a \geq 0$, $b \geq 0$ e p e q ambos tais que $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$, e que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Em (31.J.22), a igualdade se dá se e apenas se $a = b$.

Notemos primeiramente que no caso de termos $\int_M |f|^p \, d\mu = 0$, a desigualdade (31.44) é automaticamente satisfeita, pois valerá $|f| = 0$ μ-q.t.p. e, portanto, $|fg| = 0$ μ-q.t.p., o que implica que o lado esquerdo de (31.44) é nulo. O mesmo se dá caso $\int_M |g|^q \, d\mu = 0$. No caso de termos $\int_M |f|^p \, d\mu = \infty$ a desigualdade em (31.44) e também trivial. Com isso, podemos supor que

$$0 \;<\; \int_M |f|^p \, d\mu \;<\; \infty \qquad \text{e} \qquad 0 \;<\; \int_M |g|^q \, d\mu \;<\; \infty \; .$$

Para $x \in M$, tomemos

$$a \;=\; \frac{|f(x)|^p}{\displaystyle\int_M |f|^p \, d\mu} \qquad \text{e} \qquad b \;=\; \frac{|g(x)|^q}{\displaystyle\int_M |g|^q \, d\mu} \; .$$

A relação (31.J.22) diz-nos que

$$\frac{|f(x)|}{\left[\displaystyle\int_M |f|^p \, d\mu\right]^{1/p}} \frac{|g(x)|}{\left[\displaystyle\int_M |g|^q \, d\mu\right]^{1/q}} \quad\leq\quad \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\displaystyle\int_M |f|^p \, d\mu}+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\displaystyle\int_M |g|^q \, d\mu} \; .$$

Tomando a integral $\int_M (\cdots)\, d\mu$ da expressão acima, tem-se

$$\frac{\displaystyle\int_M |f||g| \, d\mu}{\left[\displaystyle\int_M |f|^p \, d\mu\right]^{1/p}\left[\displaystyle\int_M |g|^q \, d\mu\right]^{1/q}} \quad\leq\quad \frac{1}{p}\frac{\displaystyle\int_M |f|^p \, d\mu}{\displaystyle\int_M |f|^p \, d\mu}+\frac{1}{q}\frac{\displaystyle\int_M |g|^q \, d\mu}{\displaystyle\int_M |g|^q \, d\mu} \quad=\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \quad=\quad 1 \, ,$$

o que demonstra a desigualdade de Hölder (31.44).

Provemos agora a desigualdade de Minkowski (31.45). O caso $p = 1$, é evidente, pois $|f-g| \leq |f|+|g|$ implica $\int_M |f-g| \, d\mu \leq \int_M |f| \, d\mu + \int_M |g| \, d\mu$. Podemos então tomar $p > 1$.

Comecemos observando que para $p > 1$ a função x^p é contínua e convexa para $x > 0$. Logo,

$$\left(\frac{|f|+|g|}{2}\right)^p \;\leq\; \frac{1}{2}\left(|f|^p+|g|^p\right) \; .$$

como $|f-g| \leq |f|+|g|$, segue que

$$\left(\frac{|f-g|}{2}\right)^p \;\leq\; \frac{1}{2}\left(|f|^p+|g|^p\right) \; . \tag{31.J.23}$$

Disso concluímos que se f e g pertencem a $\mathcal{L}_p(M, \, d\mu)$, então

$$f-g \;\in\; \mathcal{L}_p(M, \, d\mu) \; . \tag{31.J.24}$$

Também de (31.J.23), extraímos que se $\int_M |f-g|^p \, d\mu = \infty$, então $\int_M |f|^p \, d\mu + \int_M |g|^p \, d\mu = \infty$ e a desigualdade de Minkowski (31.45) é satisfeita. Também no caso $\int_M |f-g|^p \, d\mu = 0$ (31.45) é satisfeita, pois aí o lado esquerdo de (31.45) é nulo. Podemos então supor

$$0 \;<\; \int_M |f-g|^p \, d\mu \;<\; \infty \; . \tag{31.J.25}$$

Escrevamos agora

$$|f-g|^p \;=\; |f-g|\,|f-g|^{p-1} \;\leq\; (|f|+|g|)\,|f-g|^{p-1} \;=\; |f|\,|f-g|^{p-1}+|g|\,|f-g|^{p-1} \; .$$

Isso diz-nos que

$$\int_M |f-g|^p\,d\mu \;\leq\; \int_M |f|\,|f-g|^{p-1}\,d\mu+\int_M |g|\,|f-g|^{p-1}\,d\mu \; . \tag{31.J.26}$$

A desigualdade de Hölder (31.44) diz-nos que

$$\int_M |f|\,|f-g|^{p-1}\,d\mu \leq \left[\int_M |f|^p\,d\mu\right]^{1/p}\left[\int_M |f-g|^{(p-1)q}\,d\mu\right]^{1/q} \; .$$

onde q é tal que $1/q+1/p=1$, ou seja, $q=p/(p-1)$. Por isso, $|f-g|^{(p-1)q}=|f-g|^p$ e a expressão acima faz sentido por (31.J.24). Assim,

$$\int_M |f|\,|f-g|^{p-1}\,d\mu \leq \left[\int_M |f|^p\,d\mu\right]^{1/p}\left[\int_M |f-g|^{p}\,d\mu\right]^{1/q} \; .$$

e, analogamente

$$\int_M |g|\,|f-g|^{p-1}\,d\mu \leq \left[\int_M |g|^p\,d\mu\right]^{1/p}\left[\int_M |f-g|^{p}\,d\mu\right]^{1/q} \; .$$

Inserindo essas duas relações em (31.J.26), segue que

$$\int_M |f-g|^p\,d\mu \;\leq\; \left(\left[\int_M |f|^p\,d\mu\right]^{1/p}+\left[\int_M |g|^p\,d\mu\right]^{1/p}\right)\left[\int_M |f-g|^p\,d\mu\right]^{1/q} \; .$$

Como estamos sob a suposição (31.J.25), podemos dividir ambos os lados acima por $\left[\int_M |f-g|^p\,d\mu\right]^{1/q}$ e, como $1-1/q=1/p$, obtemos a desigualdade de Minkowski (31.45). ■

Prova do Corolário 31.3. Mostraremos que a desigualdade de Hölder generalizada (31.47) é consequência do seu caso particular para $r=1$, a desigualdade de Hölder (31.44), que suporemos válida.

Definindo-se $p'=p/r$ e $q'=q/r$, tem-se

$$\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'} \;=\; \frac{r}{p}+\frac{r}{q} \;=\; 1 \; .$$

Definindo-se $F=|f|^r$, $G=|g|^r$, valerá

$$\int_M F^{p'}\,d\mu \;=\; \int_M |f|^p\,d\mu \;<\;\infty \qquad \text{e} \qquad \int_M G^{q'}\,d\mu \;=\; \int_M |g|^q\,d\mu \;<\;\infty$$

e, portanto, $F\in\mathcal{L}_{p'}(M,\;d\mu)$ e $G\in\mathcal{L}_{q'}(M,\;d\mu)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\left[\int_M |f|^r\,|g|^r\,d\mu\right]^{1/r} \;&=\; \left[\int_M F\,G\,d\mu\right]^{1/r}\\
&\overset{(31.44)}{\leq}\; \left[\left(\int_M F^{p'}\,d\mu\right)^{1/p'}\left(\int_M G^{q'}\,d\mu\right)^{1/q'}\right]^{1/r}\\
&=\; \left[\left(\int_M |f|^p\,d\mu\right)^{1/p'}\left(\int_M |g|^q\,d\mu\right)^{1/q'}\right]^{1/r}\\
&=\; \left(\int_M |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int_M |g|^q\,d\mu\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

que é a desigualdade de Hölder (31.47). ■

31.K Prova do Teorema de Riesz-Fischer

Seja $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ uma sequência em $L_p(M,\ d\mu)$ e que seja de Cauchy na norma $\|\cdot\|_p$, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$ para todos m e n maiores que $N(\epsilon)$.

Vamos primeiramente mostrar que $\{f_n\}$ possui uma subsequência $\{g_n\}$ com a propriedade que

$$\|g_{l+1} - g_l\|_p \ < \ \frac{1}{2^l} \ . \tag{31.K.27}$$

para todos $l \in \mathbb{N}$. Vamos definir uma sequência crescente de números inteiros e positivos N_k, $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ com $N_{k+1} > N_k$, da seguinte forma: N_k é tal que $\|f_m - f_n\|_p < 1/2^k$ para todos $m,\ n > N_k$. Note que uma tal sequência N_k sempre pode ser encontrada pois, por hipótese, f_m é uma sequência de Cauchy em $\|\cdot\|_p$ (basta tomar $N_k := N(1/2^k)$). Vamos agora escolher uma sequência crescente de índices $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} < n_k < \cdots$ tais que $n_k > N_k$ para todo k. A essa sequência está associada a subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Para simplificar a notação, denotaremos $g_k \equiv f_{n_k}$, $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. Disso é imediato que (31.K.27) vale, como queríamos mostrar, pois n_l e n_{l+1} são maiores que N_l.

Defina-se

$$h_k \ = \ \sum_{l=1}^{k} |g_{l+1} - g_l| \qquad \text{e} \qquad h \ = \ \sum_{l=1}^{\infty} |g_{l+1} - g_l| \ .$$

Pela desigualdade de Minkowski e por (31.K.27), vale para cada k que

$$\|h_k\|_p \ = \ \left\| \sum_{l=1}^{k} |g_{l+1} - g_l| \right\|_p \ \le \ \sum_{l=1}^{k} \|g_{l+1} - g_l\|_p \ \le \ \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{2^l} \ .$$

Logo,

$$\int_M (h_k)^p \, d\mu \ \le \ \left(\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{2^l} \right)^p \ .$$

Pelo Lema de Fatou, segue que

$$\int_M \liminf_{k\to\infty} (h_k)^p \, d\mu \ \le \ \liminf_{k\to\infty} \int_M (h_k)^p \, d\mu \ \le \ \liminf_{k\to\infty} \left(\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{2^l} \right)^p \ = \ 1 \ .$$

Agora, como $\{h_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência não-decrescente, $\{(h_k)^p,\ k \in \mathbb{N}\}$ também o é e converge a h^p. Logo, $\liminf\limits_{k\to\infty} (h_k)^p = h^p$ e concluímos que

$$\int_M h^p \, d\mu \ \le \ 1,$$

o que implica que $\|h\|_p \le 1$. Disso segue que $h(x) < \infty$ μ-q.t.p. Assim, provamos que a série

$$g_1(x) + \sum_{l=1}^{n} \big(g_{l+1}(x) - g_l(x)\big)$$

converge absolutamente para μ-quase todo x (ou seja, só não converge absolutamente em um conjunto de medida μ nula). Note-se agora que

$$g_1(x) + \sum_{l=1}^{n-1} \big(g_{l+1}(x) - g_l(x)\big) \ = \ g_n(x) \ .$$

Assim, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ existe μ-q.t.p.

Vamos denotar por G o conjunto dos x's em M onde esse limite existe (como vimos $\mu(M \setminus G) = 0$) e definamos uma função $f : M \to \mathbb{C}$ da seguinte forma:

$$f(x) \ := \ \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x), & \text{para } x \in G \\[2ex] 0, & \text{para } x \in M \setminus G \end{cases} \ .$$

Queremos provar que $\|f - f_n\|_p \to 0$ para $n \to \infty$, ou seja, que a função f definida acima é o limite em $L_p(M,\ d\mu)$ da sequência $\{f_n\}$. Fixando $\epsilon > 0$, sabemos que se m e n forem maiores que $N(\epsilon)$ valerá $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$. Logo, o Lema de Fatou diz-nos que se $m > N(\epsilon)$,

$$\int_M |f - f_m|^p \, d\mu \ \le \ \int_M \liminf_{l\to\infty} |g_l - f_m|^p \, d\mu \ \le \ \liminf_{l\to\infty} \int_M |g_l - f_m|^p \, d\mu \ = \ \liminf_{l\to\infty} \left(\|g_l - f_m\|_p\right)^p \ \le \ \epsilon^p \ . \tag{31.K.28}$$

Isso provou que $f - f_m \in \mathcal{L}_p(M,\ d\mu)$. Como $f = f_m + (f - f_m)$, isso implica que $f \in \mathcal{L}_p(M,\ d\mu)$, pois $\mathcal{L}_p(M,\ d\mu)$ é um espaço vetorial. Sem perda de generalidade, podemos tomar $f \in L_p(M,\ d\mu)$ também (certo?). Ao mesmo tempo, (31.K.28) afirma que $\|f - f_m\| \to 0$ para $m \to \infty$.

Assim, mostramos que a sequência de Cauchy $\{f_n\}$ de $L_p(M,\ d\mu)$ possui um limite na norma $\|\cdot\|_p$ que é também elemento de $L_p(M,\ d\mu)$. Isso provou que $L_p(M,\ d\mu)$ é um espaço métrico completo na norma de $L_p(M,\ d\mu)$, completando a demonstração. ■