Capítulo 32
Continuidade e Convergência em Espaços Topológicos

Conteúdo

Vamos neste capítulo estudar dois assuntos de grande importância no contexto de espaços topológicos, a saber, o conceito geral de convervência (de sequências ou de redes, vide definições adiante) e o conceito geral de continuidade de funções. O conceito de convergência foi introduzido anteriormente para o caso especial de sequências em espaços métricos (vide Capítulo 27, página 1311). Aqui será dada particular atenção aos espaços topológicos do tipo Hausdorff.

Todo estudante possui uma noção mais ou menos clara do conceito usual de continuidade de funções reais da reta real. Aqui, vamos estender este conceito a funções entre espaços topológicos gerais. A possibilidade de se estender o conceito de continuidade das situações mais comuns e familiares, encontradas na topologia usual da reta real, para situações mais gerais é, em verdade, uma das principais razões pelas quais topologias mais gerais que aquelas produzidas por métricas são definidas e estudadas. Percebeu-se que, tomados os devidos cuidados, muitos dos resultados passíveis de demonstração no caso métrico estendem-se também para topologias não deriváveis de uma métrica. Fora isso, aprenderemos, ao elevar o nível de abstração com que o conceito de continuidade é apresentado, que muitas caracterizações distintas, gerais e úteis do mesmo podem ser apresentadas. Uma consequência desse alargamento de horizontes é uma maior facilidade na demonstração de resultados importantes.

O leitor interessado na noção de continuidade pode passar diretamente à Seção 32.5, página 1485. Sua leitura dispensa a leitura das seções que lhe precedem exceto, em parte, pela noção de rede, a qual pode ser colhida na Seção 32.3, página 1478.

32.1 Primeiras Definições

Dado um espaço topológico X, uma sequência $\underline{x}$ é uma função $\underline{x} : \mathbb{N} \to X$. Por vezes estamos interessados em considerar uma sequência apenas através de seu conjunto imagem: $\mathrm{Im}\, \underline{x} = \{\underline{x}(n) \in X, \; n \in \mathbb{N}\}$. Os elementos da sequência são os valores $\underline{x}(n)$, que frequentemente são denotados apenas por x_n. Com um certo abuso de linguagem é costume referir-nos à sequência $\underline{x}$ como sendo $\{\underline{x}(n) \in X, \; n \in \mathbb{N}\}$, ou denotamo-la por $\{x_n, \; n \in \mathbb{N}\}$ ou mesmo por $\{x_n\}$ ou até apenas por x_n. Em geral, essas notações são mais práticas e não causam confusão. A noção tradicional de convergência de uma sequência em um espaço métrico é a seguinte:

Seja M um espaço métrico com métrica d e seja $\{a_n\}$ uma sequência em M. Dizemos que $\{a_n\}$ converge a um elemento $a \in M$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_n, \; a) < \epsilon$ sempre que $n > N$.

Abaixo vamos apresentar uma nova noção de convergência de sequências em espaços topológicos gerais que é equivalente àquela apresentada acima no caso de espaços métricos. Comecemos com duas noções úteis. Seja $\underline{x}$ uma sequência em X e $A \subset X$.

1. Dizemos que a sequência $\underline{x}$ está eventualmente em A se existir um natural $N \equiv N(A)$ (que pode eventualmente depender de A) tal que $x_n \in A$ para todo $n > N$.
2. Dizemos que a sequência $\underline{x}$ está frequentemente em A se houver infinitos valores de n para os quais $x_n \in A$.

Se uma sequência $\underline{x}$ está eventualmente em A, então ela está frequentemente em A, mas a recíproca não é necessariamente verdadeira. Por exemplo, a sequência de números reais $a_n = (-1)^n$ está frequentemente no intervalo $(0,\ 2)$, mas não eventualmente.

Nota. Nas definições aqui apresentadas estamos fazendo uso do ordenamento usual de $\mathbb{N}$. Para o caso geral vide a Seção 32.3, página 1478, sobre *redes* em espaços topológicos. ♣

Definamos agora as noções de ponto de acumulação e ponto limite de uma sequência $\underline{x}$ em X, um conjunto dotado de uma topologia τ.

1. Um ponto x em X é dito ser um *ponto de acumulação* da sequência $\underline{x}$ em relação à topologia τ de X se $\underline{x}$ está frequentemente em todo aberto $A \subset \tau$ que contém x.
2. Um ponto x em X é dito ser um *ponto limite*, ou simplesmente *limite*, da sequência $\underline{x}$ em relação à topologia τ de X se $\underline{x}$ está eventualmente em todo aberto $A \subset \tau$ que contém x.

Note que todo limite é um ponto de acumulação, mas a recíproca não é verdadeira.

E. 32.1 *Exercício*. Mostre que $\{-1,\ +1\}$ são os pontos de acumulação da sequência $x_n := (-1)^n + 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, na topologia usual de $\mathbb{R}$. Essa sequência tem limites nessa topologia? E a sequência $x_n := 1/n^2$, $n \in \mathbb{N}$? ✠

E. 32.2 *Exercício*. Seja uma sequência $\underline{r} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Im}\,\underline{r} = \mathbb{Q}$ (tais sequências existem pois $\mathbb{Q}$ é contável). Mostre que $\mathbb{R}$ é o conjunto de todos os pontos de acumulação de $\underline{r}$ na topologia usual de $\mathbb{R}$. Mostre que $\underline{r}$ não tem limites na topologia usual de $\mathbb{R}$. ✠

E. 32.3 *Exercício*. Seja a sequência do exercício anterior, mas agora tome a topologia discreta $\mathbb{P}(\mathbb{R})$. Mostre que $\underline{r}$ não tem pontos de acumulação nessa topologia se a função $\underline{r}$ for injetora. ✠

Se x é um limite da sequência x_n dizemos que x_n *converge* a x e escrevemos $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

E. 32.4 *Exercício*. Mostre que as duas noções de convergência que apresentamos acima são equivalentes no caso de sequências em espaços métricos. ✠

O último exercício nos afirma a equivalência, no caso de espaços métricos, dos dois conceitos de convergência que apresentamos, mas é importante frisar que a convergência de uma sequência é fortemente dependente da topologia adotada. Isso pode ser claramente visto no exemplo discutido a seguir.

Uma sequência $\{x_n\}$ em X é dita ser *eventualmente constante* se existir $x \in X$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que $x_n = x$ para todo $n > N$.

Seja, então, X um conjunto não-enumerável ($\mathbb{R}$, por exemplo) e seja a topologia co-contável[1] em X: $\tau_{cc}(X)$. Então, nenhuma sequência que não seja eventualmente constante tem limites em X em relação a $\tau_{cc}(X)$. Isso segue do seguinte. Seja $\underline{x}$ uma sequência em X e seja $x \in X$ um ponto qualquer e seja ainda $A := (\mathrm{Im}\,\underline{x})^c \cup \{x\} = (\mathrm{Im}\,\underline{x} \cap \{x\}^c)^c$. Como $\mathrm{Im}\,\underline{x} \cap \{x\}^c$ é contável, então A é aberto em $\tau_{cc}(X)$ e contém x. Porém, $\underline{x}$ não está eventualmente em A se não for eventualmente constante, pois $\mathrm{Im}\,\underline{x} \cap A = \mathrm{Im}\,\underline{x} \cap \{x\}$. Assim, para qualquer $x \in X$ podemos achar um aberto que contém x onde $\underline{x}$ não está eventualmente. Logo, nenhuma sequência $\underline{x}$ tem limites na topologia considerada.

[1] A topologia co-contável foi definida à página 1404.

Um exemplo ilustrativo é o da sequência $x_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, em $\mathbb{R}$. Na topologia co-contável $\tau_{cc}(\mathbb{R})$ essa sequência não converge a zero, ao contrário do que ocorre na topologia usual, pois o conjunto $A := \mathbb{R} \setminus \{1/n, \ n \in \mathbb{N}\}$ é aberto, contém $x = 0$, mas não contém nenhum elemento da sequência x_n.

Em função de exemplos como esses, há geralmente pouca utilidade no conceito de convergência de sequências em certos espaços topológicos não-métricos. O que então normalmente se faz nesses casos é considerar uma generalização do conceito de sequência, conhecido como *rede* ("net" em inglês). Para esse novo conceito há uma definição análoga de convergência que funciona de modo mais efetivo em espaços topológicos gerais. Disso trataremos na Seção 32.3.

32.2 Espaços Hausdorff

Vamos neste momento introduzir um conceito que será retomado na Seção 34.2, página 1559, mas que está intimamente ligado ao discutido acima.

Um espaço topológico H dotado de uma topologia τ é dito possuir a *propriedade de Hausdorff*[2] se para quaisquer pontos distintos $x, y \in H$ existirem dois abertos A_x e A_y em τ tais que $x \in A_x$, $y \in A_y$ mas $A_x \cap A_y = \emptyset$.

Um espaço topológico que tem a propriedade Hausdorff é dito simplesmente ser um *espaço Hausdorff*, ou do *tipo Hausdorff*. Vamos primeiro a alguns exemplos de espaços que não tem a propriedade Hausdorff.

Seja X qualquer com a topologia indiscreta. Esse espaço não tem a propriedade de Hausdorff. Seja X não finito com a topologia co-finita. Esse espaço não tem a propriedade de Hausdorff. Seja X não-contável com a topologia co-contável. Esse espaço não tem a propriedade de Hausdorff. Para esses dois últimos exemplos, vide página 1404.

E. 32.5 *Exercício*. Prove as afirmativas do último parágrafo. ✠

Agora temos a seguinte proposição:

Proposição 32.1 *Todo espaço métrico tem a propriedade de Hausdorff.* □

Demonstração. Seja M espaço métrico com métrica d, sejam $x, y \in M$ distintos e seja $r = d(x, \ y) > 0$. Sejam então os abertos $A_x = B_d(x, \ r/3)$ e $A_y = B_d(y, \ r/3)$. Suponha que exista um ponto $z \in A_x \cap A_y$. Então, como z pertence ao mesmo tempo a $B_d(x, \ r/3)$ e $B_d(y, \ r/3)$, vale que $d(x, \ z) < r/3$ e $d(z, \ y) < r/3$. Agora, pela desigualdade triangular tem-se $r = d(x, \ y) \leq d(x, \ z) + d(z, \ y) < 2r/3$. Porém, a desigualdade $r < 2r/3$ é absurda. Daí, não pode existir qualquer ponto z em $A_x \cap A_y$. ■

Nem todo espaço Hausdorff é métrico. A topologia de Sorgenfrey[3] $\tau[\mathbb{S}]$ de $\mathbb{R}$ (vide Seção 29.2.1.1, página 1406) é Hausdorff (prove isso!) mas não é métrica (vimos isso à página 1424).

Chegamos agora a uma propriedade importante de espaços Hausdorff, sejam eles espaços métricos ou não.

Proposição 32.2 *Uma sequência em um espaço Hausdorff pode ter no máximo um ponto limite.* □

Prova. Suponha que uma sequência $\underline{a}$ em um espaço Hausdorff H com topologia τ tenha dois limites distintos x e y. Sejam $V_x \ni x$ e $V_y \ni y$ dois abertos disjuntos de τ contendo x e y, respectivamente. Que tais abertos sempre existem é garantido pela propriedade de Hausdorff, que está sendo suposta. Então, como $\underline{a}$ converge a x e a y, temos que $a_n \in V_x$ para todo $n > N(V_x)$ e $a_n \in V_y$ para todo $n > N(V_y)$. Logo, $a_n \in V_x \cap V_y$ para todo $n > \max\{N(V_x), \ N(V_x)\}$. Isso contraria a hipótese que $V_x \cap V_y = \emptyset$. ■

Corolário 32.1 *Uma sequência em um espaço métrico pode ter no máximo um limite.* □

Note que sequências em espaços Hausdorff podem ter muitos pontos de acumulação.

[2] Felix Hausdorff (1868-1942).
[3] Robert Henry Sorgenfrey (1915–1996).

E. 32.6 *Exercício*. Seja $\mathcal{A}$ a coleção de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ do tipo $\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2, \text{ com } a < y < b \text{ para } -\infty < a < b < \infty\}$ (faça um desenho de um tal conjunto). Seja $\tau[\mathcal{A}]$ a topologia gerada por tais conjuntos.

1. Mostre que $\tau[\mathcal{A}]$ não é Hausdorff. Para tal, tente ver se é possível encontrar dois abertos nessa topologia que contenham os pontos $x = (0,\ 0)$ e $y = (1,\ 0)$, respectivamente, mas que não se intersectem.
2. Mostre que a sequência $x_n = (0,\ 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, tem por limite todos os pontos da forma $(x,\ 0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (Na topologia usual de $\mathbb{R}^2$ o único limite dessa sequência é o ponto $(0,\ 0)$).

✠

32.3 Redes e o Caso de Espaços Topológicos Gerais

Recordemos a definição de conjunto dirigido introduzida à página 48. Um conjunto I é dito ser um *conjunto dirigido* se for dotado de uma relação de pré-ordenamento que denotaremos por "$\prec$", e se for dotado da seguinte propriedade: para quaisquer dois elementos a e b de I existe pelo menos um terceiro elemento $c \in I$ tal que $a \prec c$ e $b \prec c$.

Como usualmente, denotaremos alternativamente a afirmação que $a \prec b$ por $b \succ a$.

Seja I um conjunto dirigido com respeito à uma relação de pré-ordenamento $\prec$. Se X é um conjunto não-vazio, uma função $f : I \to X$ é denominada uma *rede* baseada no conjunto dirigido I com respeito a $\prec$. O estudante deve observar que uma sequência é uma rede baseada em $\mathbb{N}$, que é um conjunto dirigido com respeito à ordem usual dos naturais.

Redes são, portanto, generalizações da noção de sequências e assumem em espaços topológicos gerais um papel semelhante ao de sequências em espaços métricos. A noção de rede foi introduzida na Topologia por Moore[4] e Smith[5] em 1922[6]. Alguns autores referem-se a redes como *sequências de Moore-Smith*.

De modo análogo ao que costumeiramente se faz com sequências, designaremos uma rede $x : I \to X$ por $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$, por $\{x_\lambda,\ \lambda \in I\}$, ou simplesmente por x_λ, sendo I e $\prec$ subentendidos.

Vamos a algumas definições. Seja uma rede $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ em X com I sendo dirigido por $\prec$.

1. Dizemos que $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ está **frequentemente** em $A \subset X$ se para todo $\lambda \in I$ existir um $\lambda' \in I$ com $\lambda \prec \lambda'$ tal que $x_{\lambda'} \in A$.
2. Dizemos que $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ está **eventualmente** em $A \subset X$ se existe $\lambda_0 \in I$ tal que $x_\lambda \in A$ para todo $\lambda \succ \lambda_0$.
3. Se $(X,\ \tau)$ for um espaço topológico, dizemos que $x \in X$ é um ponto de acumulação de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ com respeito a τ se $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ estiver frequentemente em qualquer τ-aberto que contém x. Nesse caso, dizemos que $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ *acumula-se* em x com respeito a τ.
4. Se $(X,\ \tau)$ for um espaço topológico, dizemos que $x \in X$ é um ponto limite de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ com respeito a τ se $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ estiver eventualmente em qualquer τ-aberto que contém x. Nesse caso, dizemos que $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ *converge* a x com respeito a τ.

O estudante deve notar que essas definições correspondem perfeitamente àquelas introduzidas para sequências à página 1476 e seguinte.

• **Sub-redes**

Seja $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ uma rede em X. Uma outra rede $\{y_\beta\}_{\beta\in J}$ em X é dito ser uma *sub-rede* de $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se existir uma função $h : J \to I$ tal que

1. $y_\beta = x_{h(\beta)}$ para todo $\beta \in J$,
2. para todo $\alpha \in I$ existe $\beta_1 \in J$ tal que $h(\beta) \succ_I \alpha$ para todo $\beta \in J$ que satisfaça $\beta \succ_J \beta_1$.

[4] Eliakim Hastings Moore (1862–1932).
[5] Herman Lyle Smith (?–?).
[6] E. H. Moore and H. L. Smith. "A General Theory of Limits". American Journal of Mathematics **44** (2), 102–121 (1922).

Acima, $\succ_I$ é a relação de pré-ordenamento do conjunto dirigido I e $\succ_J$ é a relação de pré-ordenamento do conjunto dirigido J.

Uma situação de interesse é aquela na qual $J \subset I$. Nesse caso podemos tomar $h : J \to I$ como sendo a identidade $h(\beta) = \beta$ para todo J e as condições acima podem ser fraseadas da seguinte forma: $\{y_\beta\}_{\beta\in J}$ é uma sub-rede de $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se

1. $y_\beta = x_\beta$ para todo $\beta \in J$,
2. para todo $\alpha \in I$ existe $\beta_1 \in J$ tal que $\beta \succ_I \alpha$ para todo $\beta \in J$ que satisfaça $\beta \succ_J \beta_1$.

• Redes e convergência

Se (X, τ) for um espaço topológico e $x \in X$, seja $\mathcal{I}_x$ a coleção de todos os τ-abertos que contêm x. Então, $\mathcal{I}_x$ é um conjunto dirigido pelo ordenamento parcial definido pela inclusão de conjuntos "$\subseteq$" (i.e., $M \succ N$ se e somente se $M \subset N$).

E. 32.7 *Exercício*. Prove essa afirmação. ✠

Seja (X, τ) um espaço topológico, $x \in X$ e $B \subset X$. A coleção $\mathcal{I}_{x,\,B} := \{A \cap B,\ A \in \mathcal{I}_x\}$ é um conjunto dirigido pelo ordenamento parcial definido pela inclusão de conjuntos "$\subseteq$" (i.e., $M \succ N$ se e somente se $M \subset N$).

E. 32.8 *Exercício*. Prove essa afirmação. ✠

Esses dois exercícios nos preparam para as seguintes proposições relevantes.

Proposição 32.3 *Sejam (X, τ) um espaço topológico, $x \in X$ e $\mathcal{I}_x$ a coleção de todos os τ-abertos que contêm x. Seja $\{x_A\}_{A\in\mathcal{I}_x}$ uma rede em X com base no conjunto dirigido $\mathcal{I}_x$. Se a rede $\{x_A\}_{A\in\mathcal{I}_x}$ tiver a propriedade que $x_A \in A$ para cada $A \in \mathcal{I}_x$, então $\{x_A\}_{A\in\mathcal{I}_x}$ converge a x.* □

A prova é quase imediata pelas definições e deixada ao leitor como exercício.

Proposição 32.4 *Se (X, τ) for um espaço topológico e $B \subset X$, então $x \in \overline{B}$ se e somente se existir uma rede em B que converge a x.* □

Prova. Precisamos primeiro provar que se $x \in \overline{B}$ então existe uma rede $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ que converge a x com a propriedade que $x_\lambda \in B$ para todo $\lambda \in I$. Sabemos que todo elemento de $\mathcal{I}_x$ tem intersecção não-vazia com B, pela definição de fecho de um conjunto. Assim o conjunto $\mathcal{I}_{x,\,B}$, definido em exercício acima, é não-vazio, é um subconjunto de B e é um conjunto dirigido pelo ordenamento parcial definido pela inclusão de conjuntos $\subseteq$. Por uma ligeira variação da proposição anterior, é fácil ver que qualquer rede baseada em $\mathcal{I}_{x,\,B}$ e que a cada $A \in \mathcal{I}_{x,\,B}$ associe $x_A \in A$ converge a x e está, claramente, contida em B.

Vamos agora provar que se uma rede $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ com $x_\lambda \in B$ para todo $\lambda \in I$ converge a x, então $x \in \overline{B}$. Se $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ converge a x, então $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ está eventualmente em cada aberto A que contém x. Isso implica que cada aberto A que contém x contém elementos de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$, que estão em B. Logo, $A \cap B \neq \emptyset$, provando que $x \in \overline{B}$. ■

• Sub-redes e pontos de acumulação

O seguinte teorema relaciona sub-redes e o conjunto de todos os pontos de acumulação de uma rede. O mesmo será importante na discussão da propriedade de Bolzano-Weierstrass de espaços topológicos compactos feita na Seção 34.3, página 1577. Vide, em particular, o Teorema 34.7, página 1583.

Teorema 32.1 *Seja $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ uma rede em um espaço topológico (X, τ). Um ponto x é um ponto de acumulação de $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se e somente se for ponto limite de uma sub-rede de $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$.* □

Prova. Para cada $x \in X$ denotemos por τ_x o conjunto de todos abertos de τ que contém x. Se D é um conjunto dirigido denotamos por $\succ_D$ a relação de pré-ordenamento em D.

Parte I: se x é um ponto de acumulação de $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ então x é ponto limite de uma sub-rede de $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Se x é um ponto de acumulação de $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, então para todo aberto $A \in \tau_x$ que contém x vale que $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ está frequentemente em A. Pela definição, isso significa dizer que para todo $\alpha \in I$ existe um $\beta_A(\alpha) \in I$ com $\alpha \prec \beta_A(\alpha)$ e $x_{\beta_A(\alpha)} \in A$.

Seja $J \subset I$ definido por

$$J := \left\{ \beta_A(\alpha) \middle| \quad A \in \tau_x, \ \alpha \in I \right\} .$$

Estabelecemos em J uma relação de pré-ordenamento dizendo que $\beta_A(\gamma) \succ_J \beta_{A'}(\gamma')$ se $\beta_A(\gamma) \succ_I \beta_{A'}(\gamma')$ e $A \subset A'$ (deixamos como exercício ao estudante mostrar que $\succ_J$ é realmente uma relação de pré-ordenamento).

Dados $\beta_A(\gamma)$ e $\beta_B(\gamma') \in J$, seja γ'' tal que $\gamma'' \succ_I \beta_A(\gamma)$ e $\gamma'' \succ_I \beta_B(\gamma')$ (a existência de um tal γ'' é garantida pelo fato de I formar um conjunto dirigido por $\succ_I$). Tem-se que[7] $\beta_{A\cap B}(\gamma'') \succ_J \beta_A(\gamma)$ e $\beta_{A\cap B}(\gamma'') \succ_J \beta_B(\gamma')$. Isso prova que J forma um conjunto dirigido por $\succ_J$. Portanto, $\{x_\beta\}_{\beta \in J}$ é uma rede em X.

Como $J \subset I$, tem-se $\{x_\beta\}_{\beta \in J} \subset \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Além disso, se $\beta_B(\gamma) \in J$ satisfaz $\beta_B(\gamma) \succ_J \beta_A(\alpha)$, então $\beta_B(\gamma) \succ_I \beta_A(\alpha)$ e, como pela definição das funções β_A vale $\beta_A(\alpha) \succ_I \alpha$, segue que $\beta_B(\gamma) \succ_I \alpha$. Isso provou que $\{x_\beta\}_{\beta \in J}$ é uma sub-rede de $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Notemos agora que se $A \in \tau_x$, então se $\lambda_0 := \beta_A(\gamma_0)$ para algum γ_0 fixo, tem-se que se $\beta_B(\gamma) \succ_J \gamma_0$, então $B \subset A$ e $\beta_B(\gamma) \succ_I \gamma_0$. Como, por construção $x_{\beta_B(\gamma)} \in B \subset A$, concluímos que a sub-rede $\{x_\beta\}_{\beta \in J}$ está eventualmente em A. Como essa afirmação vale para todo $A \in \tau_x$, isso provou que essa sub-rede converge a x.

Parte II: se x é ponto limite de uma sub-rede de $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, então x é um ponto de acumulação de $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Vamos agora supor que x é ponto limite de alguma sub-rede $\{y_\beta\}_{\beta \in J}$ de $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Então, para $A \in \tau_x$ existe $\lambda_0 \in J$ tal que $y_\beta \in A$ para todo $\beta \succ_J \lambda_0$.

Como $\{y_\beta\}_{\beta \in J}$ é uma sub-rede de $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, existe para cada $\alpha \in I$ um $\beta_1 \in J$ tal que $h(\beta) \succ_I \alpha$ para todo $\beta \in J$ com $\beta \succ_J \beta_1$ (para a definição de h, vide a definição de sub-rede à página 1478). Fixemos $\alpha \in I$. Como J é um conjunto dirigido por $\succ_J$, existe $\beta' \in J$ tal que *(a)*: $\beta' \succ_J \beta_1$ e *(b)*: $\beta' \succ_J \lambda_0$. Logo, por *(a)*, $h(\beta') \succ_I \alpha$ e, por *(b)*, $y_{\beta'} \in A$.

Lembrando que $y_{\beta'} = x_{h(\beta')}$ (vide definição de sub-rede à página 1478), concluímos que para cada $\alpha \in I$ existe $\alpha' = h(\beta') \in I$ com $\alpha' \succ_I \alpha$ e $x_{\alpha'} \in A$. Ora, isso é precisamente a afirmação que a rede $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ está frequentemente em A. Como essa afirmação vale para todo $A \in \tau_x$ concluímos que a rede $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ acumula-se em x. Isso completa a demonstração. ■

• Redes e espaços Hausdorff

O conceito de rede permite mais uma caracterização de espaços Hausdorff. A proposição abaixo generaliza um fato bem conhecido de espaços métricos.

Proposição 32.5 *Um espaço topológico (X, τ) é do tipo Hausdorff se e somente se toda rede em X que for convergente tiver apenas um ponto limite.* □

Notação. Se X é um espaço topológico Hausdorff, denotamos por $\lim_\lambda x_\lambda$ o limite de uma rede $I \ni \lambda \mapsto x_\lambda \in X$, se o mesmo existir. ◀

Prova da Proposição 32.5. Seja (X, τ) um espaço topológico do tipo Hausdorff e seja $\{x_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma rede em X que converge a a e a b com $a \neq b$. Podemos encontrar $A \in \tau$ contendo a e $B \in \tau$ contendo b tais que $A \cap B = \emptyset$. Mas isso é impossível, pois se $\{x_\lambda\}_{\lambda \in I}$ converge a a e a b, então $\{x_\lambda\}_{\lambda \in I}$ está eventualmente em A e B, o que contradiz $A \cap B = \emptyset$.

Vamos agora supor que o espaço topológico (X, τ) tem a propriedade que toda rede em X que for convergente tem apenas um ponto limite. Se (X, τ) não é do tipo Hausdorff então existem a e b, elementos distintos de X, tais que cada elemento de $\mathfrak{I}_a$ tem intersecção não-vazia com cada elemento de $\mathfrak{I}_b$.

[7] Lembrar que se $A \in \tau_x$ e $B \in \tau_x$ então $A \cap B \in \tau_x$ e é não-vazio, pois x pertence a A e a B e ambos são abertos.

Então, para cada par (A, B) com $A \in \mathcal{I}_a$ e $B \in \mathcal{I}_b$ podemos escolher um elemento em $x_{(A,\, B)} \in A \cap B$ a com isso, construir uma aplicação $\mathcal{I}_a \times \mathcal{I}_b \to X$. Gostaríamos agora de identificar uma relação de pré-ordenamento que faça de $\mathcal{I}_a \times \mathcal{I}_b$ um conjunto dirigido. Essa relação é a seguinte: $(A, B) \prec (A', B')$ se $A \supset A'$ e $B \supset B'$.

E. 32.9 *Exercício*. Verifique que isso faz de $\mathcal{I}_a \times \mathcal{I}_b$ um conjunto dirigido. Para tal, constate que se $a = (A, B)$ e $b = (C, D) \in \mathcal{I}_a \times \mathcal{I}_b$, então $c = (A \cap C,\ B \cap D) \in \mathcal{I}_a \times \mathcal{I}_b$ e valem $a \prec c$ e $b \prec c$. ✠

Note agora que se $A \in \mathcal{I}_a$ então $x_{(A,\, B)} \in A \cap B \subseteq A$ e se $(A', B') \succ (A, B)$ então $x_{(A',\, B')} \in A' \cap B' \subseteq A \cap B \subseteq A$. Isso significa que a rede $\{x_{(A,\, B)},\ (A, B) \in \mathcal{I}_a \times \mathcal{I}_b\}$ está eventualmente em A. Como isso vale para todo $A \in \mathcal{I}_a$, então a rede $\{x_{(A,\, B)},\ (A, B) \in \mathcal{I}_a \times \mathcal{I}_b\}$ converge a a. *Mutatis mutandis*, constata-se analogamente que a rede $\{x_{(A,\, B)},\ (A, B) \in \mathcal{I}_a \times \mathcal{I}_b\}$ converge a b. Como $a \neq b$, isso contradiz a hipótese e, portanto, (X, τ) é do tipo Hausdorff. ■

A noção de rede é também importante por permitir uma caracterização do conceito de continuidade de funções em espaços topológicos. Trataremos disso na Seção 32.5.3 e à página 1491.

32.3.1 Redes em Espaços Métricos

Seja M um conjunto dotado de uma métrica d e seja I um conjunto dirigido com respeito a uma relação de pré-ordenamento $\prec$. Uma rede $f : I \to M$ é dita ser uma *rede de Cauchy* em relação à métrica d se para todo $\epsilon > 0$ existir um $n(\epsilon) \in I$ (possivelmente dependente de ϵ) tal que $d(f(i),\ f(j)) < \epsilon$ para todos i e j tais que $i \succ n(\epsilon)$ e $j \succ n(\epsilon)$.

É bastante claro que essa definição generaliza a noção de sequência de Cauchy encontrada à página 1316. Naquele caso o conjunto dirigido é o conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ com a relação de ordem usual.

Lembremos que um conjunto M dotado de uma métrica d é dito ser *completo* (ou *sequencialmente completo*) em relação a essa métrica se vale a afirmação que uma sequência converge em M se e somente ser for uma sequência de Cauchy.

Para entendermos a relação entre as noções de sequências de Cauchy e redes de Cauchy em espaços métricos completos a seguinte proposição é essencial.

Proposição 32.6 *Seja M completo em relação à métrica d, ou seja, tal que uma sequência converge em M se e somente ser for uma sequência de Cauchy. Então vale a afirmação que uma rede converge em M se e somente ser for uma rede de Cauchy.* □

Prova. Se uma rede $f : I \to M$ é convergente, então existe $m \in M$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $n(\epsilon) \in I$ tal que $d(f(i),\ m) < \epsilon$ para todo $i \in I$ com a propridade $i \succ n(\epsilon)$. Assim, se i e $j \in I$ são tais que $i \succ n(\epsilon)$ e $j \succ n(\epsilon)$, vale pela desigualdade triangular $d(f(i),\ f(j)) \leq d(f(i),\ m) + d(m,\ f(j)) \leq \epsilon + \epsilon$, o que prova que f é uma rede de Cauchy.

Provemos agora a recíproca. Seja $f : I \to M$ uma rede de Cauchy. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $n(1/k) \in I$ tal que $d(f(i),\ f(j)) < 1/k$ para todos i e j tais que $i \succ n(1/k)$ e $j \succ n(1/k)$. Seja definido $z_1 := n(1)$ e escolhamos indutivamente para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, um elemento $z_k \in I$ tal que $z_k \succ z_{k-1}$ **e** $z_k \succ n(1/k)$. É claro que

$$z_1 \prec z_2 \prec z_3 \prec z_4 \prec \cdots \quad \text{com } n(1/k) \prec z_k \text{ para todo } k \in \mathbb{N} .$$

Logo,

$$n(1/k) \prec z_k \prec z_{k+1} \prec z_{k+2} \prec \cdots .$$

Assim, para todos $n > m > k$ vale $d(f(z_m),\ f(z_n)) < 1/k$. Portanto, $\{f(z_l),\ l \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de Cauchy em M e como M é (sequencialmente) completo, segue que $\{f(z_l),\ l \in \mathbb{N}\}$ converge a um certo elemento $m \in M$, o que equivale a dizer que para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(z_n),\ m) < \epsilon$ sempre que $n > N(\epsilon)$.

Seja agora $\epsilon > 0$ fixo e escolhamos $k \in \mathbb{N}$ de forma que $1/k < \epsilon$. Se $i \in I$ satisfaz $i \succ n(1/k)$, vale $d(f(i),\ m) \leq d(f(i),\ f(z_n)) + d(f(z_n),\ m)$. Tomando $n > \max\{N(\epsilon),\ k\}$ teremos $d(f(i),\ f(z_n)) < \epsilon$ pois $i \succ n(1/k)$ e $z_n \succ n(1/k)$ e também teremos $d(f(z_n),\ m) < \epsilon$ pois $n > N(\epsilon)$. Logo, $d(f(i),\ m) \leq 2\epsilon$, provando que f converge (a $m \in M$). Isso completa a prova. ■

32.4 O Limite do Ínfimo e o Limite do Supremo

Seja I um conjunto dirigido e $\alpha : I \to \mathbb{R}$ uma função de I em $\mathbb{R}$. Denotaremos por α_i o valor de α no ponto $i \in I$.

Define-se o *limite do ínfimo* da função α como sendo

$$\liminf_I \alpha \;:=\; \sup_{n\in I}\, \inf_{k\succ n} \alpha_k \;, \tag{32.1}$$

ou, numa notação mais completa (e algo pedante),

$$\liminf_I \alpha \;:=\; \sup\Big(\Big\{\inf\big(\{\alpha_k,\; k\succ n,\; k\in I\}\big)\,,\; n\in I\Big\}\Big) \;. \tag{32.2}$$

Analogamente, define-se o *limite do supremo* da função α como sendo

$$\limsup_I \alpha \;:=\; \inf_{n\in I}\, \sup_{k\succ n} \alpha_k \;, \tag{32.3}$$

ou,

$$\limsup_I \alpha \;:=\; \inf\Big(\Big\{\sup\big(\{\alpha_k,\; k\succ n,\; k\in I\}\big)\,,\; n\in I\Big\}\Big) \;. \tag{32.4}$$

As definições acima indicam que tanto o limite do supremo quanto o do ínfimo dependem da pré-ordenamento adotada $\prec$. Omitiremos essa dependência para não carregar a notação.

É fácil provar que sempre se tem

$$\liminf_I \alpha \;\leq\; \limsup_I \alpha \;. \tag{32.5}$$

Caso $\liminf_I \alpha = \limsup_I \alpha$ o *limite* de α é definido como sendo

$$\lim_I \alpha \;=\; \liminf_I \alpha = \limsup_I \alpha \;. \tag{32.6}$$

• **Invariância por redução inicial do domínio**

Que interesses há nas definições acima? Há vários. Um deles reside na seguinte propriedade. Suponha que I possa ser escrito como uma união $I = I_0 \cup J$ onde I_0 e J têm as seguintes propriedades

1. Para todo $i_0 \in I_0$ existe pelo menos um $j \in J$ tal que $i_0 \prec j$.
2. J é um conjunto dirigido pela mesma relação de pré-ordenamento $\prec$.
3. Para todo $j \in J$ vale que se $k \succ j$ então $k \in J$.

Então, vale que

$$\liminf_J \alpha \;=\; \liminf_I \alpha$$

e que

$$\limsup_J \alpha \;=\; \limsup_I \alpha \;,$$

ou seja, os limites do ínfimo e do supremo de uma função em um conjunto dirigido não mudam se subtrairmos de I um conjunto do "começo" de I (no caso, I_0). Essa propriedade, que é uma das principais razões de ser das definições de limite acima e que tem uma importância fundamental, será denominada aqui *invariância por redução inicial do domínio*.

Vamos prová-la para o limite do ínfimo. O caso do limite do supremo é análogo. Como

$$\sup(A\cup B) \;=\; \max\{\sup(A),\; \sup(B)\} \;,$$

segue que

$$\liminf_I \alpha \;=\; \max\{\alpha,\ \beta\}\ , \qquad \text{onde} \tag{32.7}$$

$$\alpha \;:=\; \sup\left(\left\{\inf\left(\left\{\alpha_k,\ k\succ n,\ k\in I\right\}\right),\ n\in I_0\right\}\right),$$

$$\beta \;:=\; \sup\left(\left\{\inf\left(\left\{\alpha_k,\ k\succ n,\ k\in I\right\}\right),\ n\in J\right\}\right).$$

Pelas hipóteses, existe para todo $i_0\in I_0$ pelo menos um elemento $j(i_0)\in J$ com a propriedade que $j(i_0)\succ i_0$. Logo, para cada $i_0\in I_0$ tem-se

$$\left\{a_k,\ k\succ j(i_0),\ k\in I\right\}\ \subset\ \left\{a_k,\ k\succ i_0,\ k\in I\right\}$$

e, assim,

$$\inf\left(\left\{a_k,\ k\succ j(i_0),\ k\in I\right\}\right)\ \geq\ \inf\left(\left\{a_k,\ k\succ i_0,\ k\in I\right\}\right).$$

Dado que

$$\sup\left(\left\{\inf\left(\left\{\alpha_k,\ k\succ j,\ k\in I\right\}\right),\ j\in J\right\}\right)\ \geq\ \inf\left(\left\{\alpha_k,\ k\succ j(i_0),\ k\in I\right\}\right)$$

segue que para cada $i_0\in I_0$ fixo

$$\sup\left(\left\{\inf\left(\left\{\alpha_k,\ k\succ j,\ k\in I\right\}\right),\ j\in J\right\}\right)\ \geq\ \inf\left(\left\{a_k,\ k\succ i_0,\ k\in I\right\}\right).$$

Assim,

$$\sup\left(\left\{\inf\left(\left\{\alpha_k,\ k\succ j,\ k\in I\right\}\right),\ j\in J\right\}\right)\ \geq\ \sup\left(\left\{\inf\left(\left\{\alpha_k,\ k\succ n,\ k\in I\right\}\right),\ n\in I_0\right\}\right).$$

Como $\liminf_I \alpha$ é o máximo entre os elementos de cada lado da última desigualdade (veja (32.7)), provou-se que

$$\liminf_I \alpha\ =\ \sup\left(\left\{\inf\left(\left\{\alpha_k,\ k\succ n,\ k\in I\right\}\right),\ n\in J\right\}\right).$$

Claramente, para cada $n\in J$,

$$\left\{\alpha_k,\ k\succ n,\ k\in I\right\}\ =\ \left\{\alpha_k,\ k\succ n,\ k\in J\right\},$$

pois se $k\succ n$ com $n\in J$ então tem-se que $k\in J$ (propriedade 3 da definição de I_0 e J). Assim,

$$\liminf_I \alpha\ =\ \sup\left(\left\{\inf\left(\left\{\alpha_k,\ k\succ n,\ k\in J\right\}\right),\ n\in J\right\}\right)\ =\ \liminf_J \alpha\,.$$

■

• Limite do supremo e limite do ínfimo de um conjunto

Recordemos a seguinte definição. Seja X um conjunto com uma topologia τ. Seja A um subconjunto de X. Um ponto $x\in X$ é dito ser um *ponto limite* de A se todo aberto $T\in\tau$ que contiver x contiver pelo menos um ponto de A distinto x. Ou seja, se $x\in T$ então $(T\cap A)\setminus\{x\}\neq\emptyset$.

Denotaremos por $\mathrm{pt}(A)$ o conjunto de pontos limite de A. Vamos supor que X seja parcialmente ordenado. Definimos então

$$\limsup_\tau A\ =\ \sup(\mathrm{pt}(A))$$

e

$$\liminf_\tau A\ =\ \inf(\mathrm{pt}(A)).$$

desde, é claro, que os supremos e ínfimos existam em X. Como antes essa definição depende do ordenamento adotado em X.

• **Advertência**

Seja I como antes um conjunto dirigido e seja uma função $\alpha : I \to \mathbb{R}$. Denotemos por $\mathrm{Im}(\alpha)$ a imagem de α. Adotemos em $\mathbb{R}$ a topologia usual $\tau_{\mathbb{R}}$ e o ordenamento usual.

É então tentador fazermos a seguinte pergunta: será verdade que $\liminf_I \alpha = \liminf_{\tau_{\mathbb{R}}} \mathrm{Im}(\alpha)$ e que $\limsup_I \alpha = \limsup_{\tau_{\mathbb{R}}} \mathrm{Im}(\alpha)$?

A resposta pode ser sim ou não dependendo do tipo de ordenamento adotado em I. Vejamos os seguintes exemplos.

Exemplo 1. Adotemos $I = \mathbb{N}$ e em $\mathbb{N}$ adotemos o ordenamento usual. Tomemos como função a sequência α definida da seguinte forma

$$\alpha_n := \begin{cases} -1 - 1/n, & \text{para } n \text{ par} \\ \\ 1 + 1/n, & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases} .$$

O conjunto $\mathrm{Im}(\alpha)$ tem dois pontos limite, a saber, -1 e $+1$. Assim,

$$\liminf_{\tau_{\mathbb{R}}} \mathrm{Im}(\alpha) = -1 \quad \text{e} \quad \limsup_{\tau_{\mathbb{R}}} \mathrm{Im}(\alpha) = 1 .$$

É também fácil de provar que

$$\liminf_{\mathbb{N}} \alpha = -1 \quad \text{e} \quad \limsup_{\mathbb{N}} \alpha = 1 .$$

E. 32.10 *Exercício*. Verifique isso. ✠

Exemplo 2. Adotemos $X = \mathbb{N}$ e em $\mathbb{N}$ adotemos o seguinte pré-ordenamento $\prec$: se n e m são ambos pares ou ambos ímpares então $n \prec m$ se $n \leq m$. Entanto, se n é par e m é ímpar temos sempre que $n \prec m$.

Esse pré-ordenamento coloca todos os pares como "menores" que todos os ímpares. Entre os pares e entre os ímpares o ordenamento é o usual.

Tomemos a mesma sequência α definida acima. Claramente continuamos tendo

$$\liminf_{\tau_{\mathbb{R}}} \mathrm{Im}(\alpha) = -1 \quad \text{e} \quad \limsup_{\tau_{\mathbb{R}}} \mathrm{Im}(\alpha) = 1 .$$

Porém, com o ordenamento dos naturais adotado, temos que

$$\liminf_{\mathbb{N},\, \prec} \alpha = 1 \quad \text{e} \quad \limsup_{\mathbb{N},\, \prec} \alpha = 1 .$$

E. 32.11 *Exercício*. Verifique isso. ✠

• **Mais sobre o limite do supremo e sobre o limite do ínfimo**

Verificamos acima que não é verdadeira em geral a afirmativa que o limite do supremo de uma sequência coincide com o supremo dos pontos limite de sua imagem. Há porém uma relação entre o limite do supremo e os pontos de acumulação da sequência.

Tomemos I como sendo o conjunto dos naturais com o ordenamento usual e seja $\alpha : I \to \mathbb{R}$ uma sequência. Adotamos em $\mathbb{R}$ a topologia usual e o ordenamento usual.

Seja $\mathrm{Ac}(\alpha)$ o conjunto de todos os pontos de acumulação da sequência α.

Tem-se então que

$$\liminf_I \alpha = \inf(\mathrm{Ac}(\alpha))$$

e que

$$\limsup_{I} \alpha \ = \ \sup(\text{Ac}(\alpha)) \ .$$

Não apresentaremos a prova aqui. Observamos, porém, que esse fato é verdadeiro qualquer que seja o ordenamento adotado em $\mathbb{N}$. Para provar isso precisamos ainda introduzir o conceito de ponto de acumulação para funções definidas em conjuntos dirigidos gerais, o que faremos na Seção 32.3 sobre redes.

E. 32.12 *Exercício*. Seja a sequência $c_n = \text{sen}(1/n)$, $n = 1, \ 2, \ 3, \ldots$. Determine seus pontos de acumulação, $\limsup c_n$ e $\liminf c_n$. ✠

E. 32.13 *Exercício*. Sejam c_n e d_n duas sequências limitadas de números reais. Mostre as seguintes desigualdades.

1. $\limsup_{n\to\infty}(c_n + d_n) \leq \limsup_{n\to\infty} c_n + \limsup_{n\to\infty} d_n$.
2. $\limsup_{n\to\infty}(c_n d_n) \leq \left(\limsup_{n\to\infty} c_n\right)\left(\limsup_{n\to\infty} d_n\right)$.
3. Para todo $a > 0$ vale $\limsup_{n\to\infty}(ac_n) = a\limsup_{n\to\infty} c_n$.
4. Para todo $a < 0$ vale $\limsup_{n\to\infty}(ac_n) = a\liminf_{n\to\infty} c_n$.

✠

O estudante pode estar se perguntando por que não temos sempre simplesmente a igualdade $\limsup(c_n + d_n) = \limsup c_n + \limsup d_n$. Veja o que ocorre no exemplo simples onde $c_n = (-1)^n$ e $d_n = -(-1)^n$. Aqui temos $\limsup(c_n + d_n) = \limsup 0 = 0$, mas $\limsup c_n = +1$ e $\limsup d_n = +1$. Logo, $\limsup(c_n + d_n)0 < 2 = \limsup c_n + \limsup d_n$ e a igualdade, portanto, não é válida nesse caso.

E. 32.14 *Exercício*. Seja a_n uma sequência de números reais. Mostre que

$$\limsup_{n\to\infty}(-a_n) \ = \ -\liminf_{n\to\infty} a_n \ .$$

✠

E. 32.15 *Exercício*. Sejam c_n e d_n duas sequências de números reais tais que $c_n \leq d_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$\limsup_{n\to\infty} c_n \ \leq \ \limsup_{n\to\infty} d_n \quad \text{e} \quad \liminf_{n\to\infty} c_n \ \leq \ \liminf_{n\to\infty} d_n \ .$$

✠

32.5 Continuidade de Funções em Espaços Topológicos

Nesta seção apresentaremos diversas definições do conceito de continuidade de funções em espaços topológicos, discutiremos a equivalência dessas definições e estudaremos suas consequências. Como já dissemos, a possibilidade de definir a noção de continuidade de funções entre espaços topológicos é parte da razão de ser da própria noção de topologia.

Vamos a uma definição de continuidade, que chamaremos de definição de continuidade número 1.

DC 1. *Sejam M e N dois conjuntos não-vazios, o primeiro dotado de uma topologia τ_M e o segundo de uma topologia τ_N. Uma função $f : M \to N$ é dita ser uma função contínua em relação às topologias τ_M e τ_N se $f^{-1}(A) \in \tau_M$ para todo aberto A de τ_N.*

Em outras palavras, uma função é dita ser contínua se a imagem inversa de qualquer conjunto aberto na topologia do seu contradomínio for igualmente um conjunto aberto na topologia do conjunto domínio.

A seguinte afirmação é uma consequência imediata da definição acima.

Proposição 32.7 *Sejam M_1, M_2 e M_3 espaços topológicos com topologias τ_{M_1}, τ_{M_2} e τ_{M_3}, respectivamente. Seja $f : M_1 \to M_2$, contínua em relação às topologias τ_{M_1} e τ_{M_2}, e $g : M_2 \to M_3$, contínua em relação às topologias τ_{M_2} e τ_{M_3}. Então $g \circ f : M_1 \to M_3$ é contínua em relação às topologias τ_{M_1} e τ_{M_3}.* □

Prova. $\longleftrightarrow$ *Exercício.* ■

Uma série de questões vêm à mente de qualquer estudante que se depara com a definição acima pela primeira vez. Por exemplo, as seguintes: 1) No caso de funções reais definidas na reta real o que a definição acima tem a ver com a noção de continuidade tão bem conhecida e ensinada? 2) Na definição acima, o conceito de continuidade parece ser fortemente dependente das topologias τ_M e τ_N escolhidas no domínio e na imagem da função. Pode acontecer de uma função dada ser contínua em relação a algumas topologias mas não em relação a outras? 3) É estranho que na definição acima a noção de continuidade seja apresentada em termos de uma propriedade da imagem inversa f^{-1} da função f. Isso tem mesmo que ser assim? 4) Será possível caracterizar a propriedade de continuidade diretamente em termos de propriedades da f?

Essas questões são muito pertinentes e serão respondidas uma a uma no que segue.

Fazemos notar que, na definição nova de continuidade que apresentamos acima, as topologias τ_M e τ_N são genéricas, não necessitando ser, por exemplo, topologias métricas em M ou N, respectivamente. Vamos, porém, discutir agora o caso tradicional em que M e N são iguais à reta real dotada da topologia métrica usual $\tau_{\mathbb{R}}$.

• A noção usual de continuidade em espaços métricos

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. A noção usual de continuidade diz que f é contínua em $\mathbb{R}$ se e somente se para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo número $\epsilon > 0$ existir um número $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$ (eventualmente dependente de x e ϵ) tal que, sempre que para algum y tivermos $|y - x| < \delta(x, \epsilon)$ então $|f(y) - f(x)| < \epsilon$.

Essa definição pode ser facilmente generalizada para o caso de espaços métricos gerais.

DCEM 1. *Sejam M e N dois conjuntos não-vazios dotados de métricas d_M e d_N, respectivamente. Uma função $f : M \to N$ é dita ser contínua (no sentido usual) em relação às métricas d_M e d_N se para todo $x \in M$ e para todo número $\epsilon > 0$ existir um número $\delta(x, \epsilon) > 0$ tal que se $y \in B_{d_M}(x, \delta(x, \epsilon))$, então $f(y) \in B_{d_N}(f(x), \epsilon)$.*

Acima, $B_d(a, r)$ é a bola aberta de raio r centrada em torno de a segundo a métrica d. Uma outra forma de apresentar a definição acima é:

DCEM 1'. *Sejam M e N dois conjuntos não-vazios dotados de métricas d_M e d_N, respectivamente. Uma função $f : M \to N$ é dita ser contínua (no sentido usual) em relação às métricas d_M e d_N se para todo $x \in M$ e para todo número $\epsilon > 0$ existir um número $\delta(x, \epsilon) > 0$ tal que $f\Big(B_{d_M}\big(x, \delta(x, \epsilon)\big)\Big) \subset B_{d_N}\Big(f(x), \epsilon\Big)$.*

Vejamos um exemplo de uma função real que não é contínua segundo a definição acima. Seja a função

$$H(t) := \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0 , \\ 0, & \text{se } t < 0 . \end{cases} \tag{32.8}$$

Então, para $x = 0$ e para $\epsilon = 1/10$ (por exemplo) não é possível achar um número δ tal que se $|y - x| = |y| < \delta$ tenhamos $|H(y) - H(x)| = |H(y) - 1| < 1/10$. A razão é que para qualquer $y \geq 0$ temos $|H(y) - 1| = 0$ que é menor que $1/10$, mas para qualquer $y < 0$ temos $|H(y) - 1| = 1$ que, obviamente, é sempre maior que $1/10$.

E. 32.16 *Exercício*. Seja a função $g(t) = t^2$. Mostre explicitamente que g é contínua pela definição acima. Como pode ser $\delta(x, \epsilon)$ como função de x e ϵ nesse caso? ✠

As linhas acima recordam-nos a definição usual de continuidade de funções definidas em $\mathbb{R}$, tal como aprendida nos cursos iniciais de Cálculo. Qual a conexão com a nova noção de continuidade **DC 1** que apresentamos acima? Vamos esclarecer este ponto agora, provando que as duas definições são equivalentes.

Seja uma função $f : M \to N$ tal que $f^{-1}(A)$ é um aberto em τ_M para todo $A \in \tau_N$. Sejam um ponto x no domínio da f e $f(x)$ sua imagem. Seja $A = B_{d_N}(f(x), \epsilon)$ (com $\epsilon > 0$) um aberto em τ_N. Pelas hipóteses, o conjunto $f^{-1}(A)$

é um aberto em M que deve conter o ponto x (pois $f(x) \in A$). Deve, portanto, haver uma bola aberta $B_{d_M}(x, \delta)$, centrada em x e de raio de $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$ (em geral, o raio deve depender de A e, portanto, de x e ϵ) inteiramente contida no aberto $f^{-1}(A)$. Como $B_{d_M}(x, \delta) \subset f^{-1}(A)$, segue que $f\big(B_{d_M}(x, \delta)\big) \subset A = B_{d_N}(f(x), \epsilon)$. Isso, finalmente, é exatamente a afirmação que f é contínua no sentido da definição **DCEM 1**.

Vamos agora supor que f seja uma função contínua no sentido da definição **DCEM 1** e provar que ela também é contínua no sentido da definição **DC 1**. Isso, junto com o visto no último parágrafo, mostra que as duas noções são equivalentes.

Seja $A \in \tau_N$ um aberto qualquer em N e vamos supor, sem perder a generalidade, que A contém elementos da imagem de f. Seja $x \in f^{-1}(A)$. Seja, para algum $\epsilon > 0$, $B_{d_N}(f(x), \epsilon)$ a bola aberta de raio ϵ centrada em $f(x)$. Como A é aberto e $f(x) \in A$, teremos $B_{d_N}(f(x), \epsilon) \subset A$ se escolhermos ϵ pequeno o suficiente (ainda com $\epsilon > 0$). Pela hipótese que f é contínua no sentido da definição **DCEM 1**, existe $\delta(x, \epsilon)$ tal que se $y \in B_{d_M}(x, \delta(x, \epsilon))$ então $f(y) \in B_{d_N}(f(x), \epsilon) \subset A$. Logo, $y \in f^{-1}(A)$. Mas isso significa dizer que para todo $x \in f^{-1}(A)$ somos capazes de identificar um raio $\delta = \delta(x, \epsilon)$ (para o ϵ escolhido) tal que todo elemento que dista de x menos que δ é também elemento do conjunto $f^{-1}(A)$. Isso é afirmar que $f^{-1}(A)$ é um conjunto aberto, pela própria definição de conjuntos abertos na topologia métrica de d_M, provando a validade das condições da definição **DC 1**.

Isso provou a equivalência que queríamos estabelecer e, para o caso de funções na reta real com a topologia $\tau_{\mathbb{R}}$ usual, respondeu a pergunta 1) acima.

32.5.1 Outras Noções Associadas à de Continuidade

Além da noção de continuidade de funções entre espaços métricos estabelecida acima existe também a noção de *continuidade uniforme*. Sobre ela falaremos com mais detalhe à página 1591.

• **Funções Lipschitz-contínuas em espaços métricos**

Já nos encontramos anteriormente, por exemplo, no Capítulo 28, página 1368, com a noção de função Lipschitz[8]-contínua, ao menos no caso de funções reais. Essa noção pode ser facilmente generalizada para funções entre espaços métricos gerais.

Definição. Sejam M e N dois conjuntos não-vazios dotados de métricas d_M e d_N, respectivamente. Uma função $f : M \to N$ é dita ser Lipschitz-contínua em relação às métricas d_M e d_N se existir uma constante $L \geq 0$ tal que

$$d_N\big(f(x), f(y)\big) \leq L\, d_M(x, y) , \tag{32.9}$$

para todos $x, y \in M$. ♠

A condição (32.9) é denominada *condição de Lipschitz* e uma constante L que a faça verdadeira é denominada *constante de Lipschitz* para a função f. É elementar provar que toda função Lipschitz-contínua é contínua no sentido usual, caracterizado pela definição **DCEM 1**.

E. 32.17 *Exercício*. Prove isso! ✠

• **Continuidade por partes**

Uma outra noção importante é a de *continuidade por partes*.

Definição. Sejam M e N não-vazios e dotados de topologias τ_M e τ_N, respectivamente. Uma função $f : M \to N$ é dita ser uma função *contínua por partes* em relação às topologias τ_M e τ_N se existir um conjunto finito de abertos disjuntos $A_1, \ldots, A_m$ em M satisfazendo $M = \overline{\bigcup_{k=1}^{m} A_k}$ e tais que:

1. Para todo k vale que $(f \upharpoonright A_k) : A_k \to N$, a restrição de f ao aberto A_k, é contínua, em relação à topologia induzida por τ_M sobre A_k e em relação à τ_N.

[8] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903).

2. Para todo k existe uma extensão de $f \restriction A_k$ sobre o fechado $\overline{A_k}$ a qual é contínua em relação à topologia induzida por τ_M sobre $\overline{A_k}$ e em relação à τ_N.

♠

Alguns autores permitem enfraquecer a condição de que a coleção de abertos A_k seja finita, permitindo que seja contável.

32.5.1.1 Homeomorfismos e Mergulhos Topológicos

Duas noções de grande importância no estudo de espaços topológicos são a de homeomorfismo e a de mergulho topológico.

Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dois espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é dita ser um *homeomorfismo* entre (X, τ_X) e (Y, τ_Y) se for contínua, bijetora e sua inversa também for contínua.

Uma função $f : X \to Y$ é dita ser um *mergulho topológico*, ou simplesmente um *mergulho*, de (X, τ_X) em (Y, τ_Y) se f for um homeomorfismo entre X e sua imagem $f(X)$ (adotando neste conjunto a topologia relativa de τ_Y).

Dizemos que dois espaços topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y) são *espaços homeomorfos* se existir um homeomorfismo $f : X \to Y$. Dizemos que o espaço topológico (X, τ_X) é *mergulhável* no espaço topológico (Y, τ_Y) se existir um mergulho topológico $f : X \to Y$.

Denotamos simbolicamente o fato de (X, τ_X) e (Y, τ_Y) serem homeomorfos por $(X, \tau_X) \simeq (Y, \tau_Y)$ (ou simplesmente por $X \simeq Y$, quando as topologias forem subentendidas).

As noções de homeomorfismo e de mergulho topológico desempenham um papel importante na Topologia Diferencial e na Geometria Diferencial. A noção de homeomorfismo é importante na Topologia em geral devido às seguintes observações.

É claro que todo espaço topológico satisfaz $(X, \tau_X) \simeq (X, \tau_X)$ (adote-se a função identidade). É também claro que se $(X, \tau_X) \simeq (Y, \tau_Y)$, então $(Y, \tau_Y) \simeq (X, \tau_X)$ (pois se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo então sua inversa $f^{-1} : Y \to X$ também é um homeomorfismo). Por fim, se (X, τ_X), (Y, τ_Y) e (Z, τ_Z) são espaços topológicos e $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são homeomorfismos, então $g \circ f : X \to Z$ é um homeomorfismo, o que nos diz que se $(X, \tau_X) \simeq (Y, \tau_Y)$ e $(Y, \tau_Y) \simeq (Z, \tau_Z)$ então $(X, \tau_X) \simeq (Z, \tau_Z)$.

O constatado acima permite entender o fato de dois espaços topológicos serem homeomorfos como uma espécie de relação de equivalência, noção que introduzimos na Seção 1.1.1.3, página 41. Estritamente falando, porém, não se trata de relações de equivalência usuais pois, devido a certas obstruções lógicas presentes na Teoria dos Conjuntos, não faz sentido falar no "conjunto de todos os espaços topológicos" e, portanto, não podemos falar em relações de equivalência no sentido usual entre tais objetos. O quadro onde essa noção pode ser inserida, porém, é a Teoria das Categorias, mas por ora não iremos nos estender nesses comentários. A ideia que homeomorfismos induzem relações de equivalência entre espaços topológicos é, porém, *moralmente* válida e podemos pensar em classificar espaços topológicos (e suas propriedades) de acordo com "classes de homeomorfia". Esse é o principal objetivo de certas áreas da Topologia, como por exemplo a Topologia Algébrica. Remetemos o estudante interessado aos bons livros para uma continuação da discussão sobre esse importante tema.

• A inclusão como um mergulho topológico

Sejam X e Y dois conjuntos não-vazios com $Y \subset X$. A função $i \equiv i_{Y,X} : Y \to X$ definida por $i(y) := y$ para todo $y \in Y$, é denominada *inclusão* de Y em X, ou *função inclusão* de Y em X.

É evidente que a imagem de Y por $i_{Y,X}$ é o próprio conjunto Y: $i_{Y,X}(Y) = Y$ e que $i_{Y,X}$ é uma bijeção de Y em sua imagem. É também trivial que $\left(i_{Y,X}\right)^{-1} : Y \to Y$ é dada por $\left(i_{Y,X}\right)^{-1}(y) = y$.

Seja (X, τ_X) um espaço topológico e seja $Y \subset X$, não-vazio. Seja τ_I a topologia induzida em Y por τ_X, a qual consiste, recordando, na coleção de todos os conjuntos da forma $A \cap Y$ com $A \in \tau_X$.

Temos o seguinte fato, que listamos na forma de uma proposição para futura referência:

Proposição 32.8 *Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dois espaços topológicos, sendo que $Y \subset X$ (assumimos X e Y não-vazios). Então, a função inclusão $i_{Y,X} : Y \to X$ é um mergulho topológico de (Y, τ_Y) em (X, τ_X) se e somente se τ_Y for a topologia induzida em Y pela topologia τ_X.* □

Prova. Já vimos que $i_{Y,X} : Y \to X$ é uma bijeção em sua imagem e que $i_{Y,X}(Y) = Y$.

Já que $\left(i_{Y,X}\right)^{-1}(A) = A$ e $i_{Y,X}(A) = A$ para todo $A \subset Y$ e $i_{Y,X}(Y) = Y$, então, se $\tau_Y = \tau_I$, a inclusão $i_{Y,X}$ será evidentemente um homeomorfismo entre (Y, τ_Y) e $\left(i_{Y,X}(Y), \tau_I\right) = (Y, \tau_I)$. Como $i_{Y,X}(Y) = Y$, isso significa que $i_{Y,X}$ é um mergulho topológico de (X, τ_X) e (Y, τ_Y).

Vamos agora supor que $i_{Y,X}$ seja um mergulho topológico de (Y, τ_Y) em (X, τ_X). Então, por definição, $i_{Y,X}$ é um homeomorfismo entre (Y, τ_Y) e (Y, τ_I) (pois $i_{Y,X}(Y) = Y$). Como $i_{Y,X}$ é contínua, valerá para todo $A \in \tau_I$ que $\left(i_{Y,X}\right)^{-1}(A) \in \tau_Y$. Como $\left(i_{Y,X}\right)^{-1}(A) = A$, isso implica que $A \in \tau_Y$, mostrando que $\tau_I \subset \tau_Y$. Como $\left(i_{Y,X}\right)^{-1}$ é contínua, valerá para todo $A \in \tau_Y$ que $i_{Y,X}(A) \in \tau_I$. Como $i_{Y,X}(A) = A$, isso implica que $A \in \tau_I$, mostrando que $\tau_Y \subset \tau_I$. Isso demonstrou que $\tau_Y = \tau_I$. ■

32.5.2 Outras Caracterizações do Conceito de Continuidade em Espaços Topológicos

A caracterização **DC 1** do conceito de continuidade de uma função entre dois espaços topológicos que apresentamos no início da subseção anterior é equivalente a uma série de outras caracterizações que discutiremos agora, as quais podem, eventualmente, ser mais úteis que a descrita acima.

Vamos a uma outra definição de continuidade, que chamaremos de definição de continuidade número 2.

DC 2. *Sejam M e N dois conjuntos não-vazios, o primeiro dotado de uma topologia τ_M e o segundo de uma topologia τ_N. Uma função $f : M \to N$ é dita ser uma função contínua em relação às topologias τ_M e τ_N se $f^{-1}(F)$ for um conjunto fechado para a topologia τ_M para todo conjunto fechado F segundo τ_N.*

Em outras palavras, uma função é dita ser contínua se a imagem inversa de qualquer conjunto fechado na topologia do conjunto imagem for igualmente um conjunto fechado na topologia do conjunto domínio.

Desejamos provar a equivalência das definições **DC 1** e **DC 2**. Para tal, notemos que, para qualquer conjunto $C \subset N$, vale $f^{-1}(C) = f^{-1}(C^c)^c$, ou seja,

$$f^{-1}(C) = M \setminus f^{-1}(N \setminus C) .$$

E. 32.18 *Exercício (fácil).* Demonstre essa relação. ✠

Com essa relação em mãos fica fácil provar que se f for contínua segundo **DC 1** então a imagem inversa de qualquer conjunto C fechado em N é fechado em M. *Mutatis mutandis*, se f e contínua segundo **DC 2** então a imagem inversa de qualquer aberto C em N é aberto em M. Isso estabelece que as duas definições são equivalentes.

Vamos agora a uma terceira definição de continuidade que será útil quando tratarmos do conceito de continuidade em espaços métricos.

DC 3. *Sejam M e N dois conjuntos não-vazios, o primeiro dotado de uma topologia τ_M e o segundo de uma topologia τ_N. Uma função $f : M \to N$ é dita ser uma função contínua em relação às topologias τ_M e τ_N se $f\left(\overline{D}\right) \subset \overline{f(D)}$ para todo conjunto $D \subset M$. Aqui, $\overline{D}$ é o fecho de D na topologia τ_M e $\overline{f(D)}$ é o fecho de $f(D)$ na topologia τ_N.*

Note-se aqui dois fatos: 1) nesta nova definição a continuidade é caracterizada em termos de propriedades das imagens da função f e não em termos das suas imagens inversas; 2) acima D é um conjunto qualquer de M, não apenas um aberto ou um fechado.

Vamos provar agora que a definição **DC 3** é equivalente à definição **DC 2** (e, portanto, à definição **DC 1**). Para tal, usaremos o fato (vide (1.12), página 35) que para $A \subset M$ e $B \subset N$ então $f(f^{-1}(B)) \subset B$ e $f^{-1}(f(A)) \supset A$. Usaremos também que se $A \subset M$ e $B \subset N$ são tais que $f(A) \subset B$, então $f^{-1}(B) \supset A$.

Seja então f contínua segundo **DC 3** e seja $F \subset N$, fechado. Teremos que

$$f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F ,$$

ou seja,

$$f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right) \subset F .$$

Logo,

$$f^{-1}(F) \supset \overline{f^{-1}(F)} .$$

Como um conjunto qualquer é sempre subconjunto e seu fecho, essa última relação diz que $f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)}$, que é o mesmo que dizer que $f^{-1}(F)$ é fechado. Assim, se f é contínua segundo **DC 3** é também segundo **DC 2**.

Seja agora f contínua segundo **DC 2**. E seja $D \subset M$, qualquer. Tomando $Y = \overline{f(D)}$, vimos acima que

$$f\left(f^{-1}\left(\overline{f(D)}\right)\right) \subset \overline{f(D)} . \tag{32.10}$$

Agora,

$$D \subset f^{-1}(f(D)) \subset f^{-1}\left(\overline{f(D)}\right) .$$

Mas $f^{-1}\left(\overline{f(D)}\right)$ é fechado, pois f é contínua segundo **DC 2** e $\overline{f(D)}$ é fechado. Assim, $\overline{D} \subset f^{-1}\left(\overline{f(D)}\right)$, pois $\overline{D}$ é o menor fechado que contém D. Disso segue que $f\left(\overline{D}\right) \subset f\left(f^{-1}\left(\overline{f(D)}\right)\right)$. Juntando-se isso à (32.10), concluímos que $f\left(\overline{D}\right) \subset \overline{f(D)}$, provando a equivalência desejada.

• **Continuidade em um ponto. Continuidade em termos de vizinhanças**

Vamos a mais uma caracterização útil da noção de continuidade, dessa vez em termos da noção de vizinhança, introduzida à página 1401. Vamos antes definir o que se entente por continuidade de uma função em um ponto.

Continuidade em um ponto. *Sejam M e N dois conjuntos não-vazios, o primeiro dotado de uma topologia τ_M e o segundo de uma topologia τ_N. Seja $x \in M$. Uma função $f : M \to N$ é dita ser uma função contínua em x se para toda vizinhança $V_{f(x)} \subset N$ de $f(x)$ o conjunto $f^{-1}(V_{f(x)}) \subset M$ for uma vizinhança de x.*

A seguinte definição da noção de continudade de funções entre espaços topológicos é equivalente às anteriormente apresentadas.

DC 4. *Sejam M e N dois conjuntos não-vazios, o primeiro dotado de uma topologia τ_M e o segundo de uma topologia τ_N. Uma função $f : M \to N$ é dita ser uma função contínua em relação às topologias τ_M e τ_N se for contínua em todo $x \in M$ (no sentido da definição de acima).*

Vamos estabelecer a equivalência dessa definição com a definição **DC 1**. Suponha $f : M \to N$ contínua segundo **DC 1**. Seja $x \in M$ e seja $V_{f(x)}$ uma vizinhança de $f(x)$ em N. Então existe um aberto $A \in \tau_N$ tal que $f(x) \in A \subset V_{f(x)}$. Mas isso implica que, $x \in f^{-1}(A) \subset f^{-1}(V_{f(x)})$. Como por hipótese $f^{-1}(A) \in \tau_M$, provamos que $f^{-1}(V_{f(x)})$ é uma vizinhança de x. Como $x \in M$ é arbitrário, provou-se que f é contínua em todo $x \in M$.

Vamos estabelecer a recíproca, supondo agora que $f : M \to N$ seja contínua em todo $x \in M$. Seja $A \in \tau_N$. Se $f^{-1}(A) = \emptyset$ não há o que provarmos. Seja então $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ e seja $x \in f^{-1}(A)$. Claramente A é uma vizinhança de $f(x)$. Logo, $f^{-1}(A)$ é uma vizinhança de x, por hipótese. Assim, existe $B_x \in \tau_M$ tal que $x \in B_x \subset f^{-1}(A)$. Ora, essa afirmação é válida para cada $x \in f^{-1}(A)$. Assim, provamos que

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} \{x\} \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} B_x \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} f^{-1}(A) = f^{-1}(A) .$$

Isso provou que $f^{-1}(A) = \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} B_x$, que é um τ_M-aberto, por ser uma união de abertos. Como A é um aberto arbitrário de N, estabelecemos que f é contínua no sentido da definição **DC 1**.

32.5.3 Continuidade e Convergência

• **Continuidade e convergência em espaços métricos**

Vamos agora tratar de mais uma caracterização do conceito de continuidade de funções, caracterização esta especializada ao caso de funções entre espaços métricos. Uma primeira definição do conceito de continuidade de funções entre espaços métricos é a definição **DCEM 1**, que encontra-se à página 1486. O ponto importante da caracterização que aqui descreveremos é que a mesma trata a noção de continuidade em termos de convergência de sequências, sendo por isso de especial importância prática.

Temos a seguinte definição:

DCEM 2. *Sejam M e N dois conjuntos não-vazios dotados de métricas d_M e d_N, respectivamente. Sejam τ_{d_M} e τ_{d_N} as topologias induzidas por essas métricas em M e N, respectivamente. Uma função $f : M \to N$ é contínua em relação às métricas d_M e d_N se para todo $x \in M$ e para toda sequência $\{x_n \in M, \ n \in \mathbb{N}\}$ que converge a x em relação à métrica d_M tivermos*

$$f(x) \ = \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) \ ,$$

ou seja,

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \ = \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) \ ,$$

onde a convergência de $f(x_n) \in N$ se dá em relação à métrica d_N.

Vamos mostrar que esta última definição de continuidade é, no caso de espaços métricos, equivalente às definições **DC 1, 2** e **3**. No caso de espaços topológicos não-métricos tal equivalência pode não ser válida. Lembramos o comentário que fizemos na Seção 32.1 que há espaços topológicos não-métricos nos quais nenhuma sequência é convergente, fora as sequências eventualmente constantes. Um exemplo é o de um conjunto X não contável dotado da topologia co-contável. Essa é a raiz da dificuldade em se estender a definição **DCEM 2** para espaços topológicos não-métricos.

Prova da equivalência. Vamos supor que f seja contínua segundo **DCEM 2** e provar que f é então contínua segundo **DC 3**. Seja $D \subset M$ genérico e não-vazio e seja $x \in \overline{D}$ (o caso $D = \emptyset$ é trivial). Então, como M é um espaço métrico existe uma sequência $x_n \in D$ que converge a x. Pelas hipóteses então, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Como x pode ser qualquer elemento de $\overline{D}$ e como os pontos $f(x_n)$ são elementos do conjunto $f(D)$, isso significa que $f\left(\overline{D}\right) \subset \overline{f(D)}$, o que prova que f é contínua segundo **DC 3**.

Vamos agora supor f contínua segundo **DC 1** e vamos mostrar que ela então o é segundo **DCEM 2**. Suponha que para $x \in M$ haja uma sequência x_n em M convergindo a x segundo d_M e suponha que $f(x_n)$ não converge a $f(x)$. Então existe um aberto A de N contendo $f(x)$ e tal que $f(x_n)$ não está eventualmente em A. Isso significa que x_n não está eventualmente em $f^{-1}(A)$ (por que?). Como pelas hipóteses $f^{-1}(A)$ é um aberto e $x \in f^{-1}(A)$ (por que?), isso diz que x_n não converge a x, uma contradição. Logo $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ e a equivalência está provada. ■

E. 32.19 *Exercício*. Seja a função H definida em (32.8). Adotando a topologia usual de $\mathbb{R}$ tanto na imagem quanto no domínio de H, exiba sequências x_n em $\mathbb{R}$ convergindo a $x = 0$ tais que $\lim_{n\to\infty} H(x_n) \neq H(0)$. ✠

• Continuidade e convergência em espaços topológicos gerais

Como observamos acima, a definição de continuidade **DCEM 2** não pode ser diretamente transposta a espaços topológicos gerais, pois nesses casos ocorrem dificuldades especiais concernentes à convergência de sequências. Como aprendemos e discutimos na Seção 32.3, página 1478, essas dificuldades podem ser superadas com o emprego da noção mais geral de *rede*, como alternativa às sequências. De fato, é possível apresentar mais uma definição do conceito de continuidade, equivalente às anteriores, nas mesmas linhas de **DCEM 2**, mas com a noção de rede substituindo a de sequência.

Para uma melhor compreensão do que segue, recomendamos uma re-leitura da Seção 32.3, página 1478. Temos a seguinte definição:

DC 5. *Sejam M e N dois conjuntos não-vazios, o primeiro dotado de uma topologia τ_M e o segundo de uma topologia τ_N. Uma função $f : M \to N$ é dita ser uma função contínua em relação às topologias τ_M e τ_N se para todo $x \in M$ e para toda rede $\{x_\lambda, \ \lambda \in I\}$ em M que tem x como ponto limite na topologia τ_M, a rede $\{f(x_\lambda), \ \lambda \in I\}$ em N tiver $f(x)$ como ponto limite na topologia τ_N.*

Note que, acima, as redes $\{x_\lambda, \ \lambda \in I\}$ e $\{f(x_\lambda), \ \lambda \in I\}$ podem tem outros pontos limite além de x e $f(x)$, respectivamente, pois M e N não são necessariamente do tipo Hausdorff nas suas respectivas topologias.

Vamos mostrar que esta última definição de continuidade equivale às definições **DC 1, 2** e **3**.

Prova da equivalência. Vamos supor que f seja contínua segundo **DC 5** e provar que f é então contínua segundo **DC 3**. Seja $D \subset M$ genérico e não-vazio e seja $x \in \overline{D}$ (o caso $D = \emptyset$ é trivial). Então, pela Proposição 32.4, página 1479, existe uma rede $\{x_\lambda, \ \lambda \in I\}$ em D tem x como ponto limite em τ_M. Pelas hipóteses então, $f(x)$ é ponto limite de $\{f(x_\lambda), \ \lambda \in I\}$ em τ_N. Como x pode ser qualquer elemento de $\overline{D}$ e como os pontos $f(x_\lambda)$ são elementos do conjunto

$f(D)$, isso significa, também pela Proposição 32.4, página 1479, que $f\left(\overline{D}\right) \subset \overline{f(D)}$, o que prova que f é contínua segundo **DC 3**.

Vamos agora supor f contínua segundo **DC 1** e vamos mostrar que ela, então, o é segundo **DC 5**. Suponha que para $x \in M$ haja uma rede $\{x_\lambda, \ \lambda \in I\}$ em M que tem x como ponto limite em τ_M e suponha que $f(x)$ não é ponto limite de $\{f(x_\lambda), \ \lambda \in I\}$ em τ_N. Então existe um aberto A de N contendo $f(x)$ e tal que $\{f(x_\lambda), \ \lambda \in I\}$ não está eventualmente em A. Isso significa que $\{x_\lambda, \ \lambda \in I\}$ não está eventualmente em $f^{-1}(A)$ (por que?). Como pelas hipóteses $f^{-1}(A)$ é um aberto e $x \in f^{-1}(A)$ (por que?), isso diz que x não é ponto limite de $\{x_\lambda, \ \lambda \in I\}$ em τ_M, uma contradição. Logo $f(x)$ é ponto limite de $\{f(x_\lambda), \ \lambda \in I\}$ em τ_N e a equivalência está provada. ■