Capítulo 37

Aproximação de Funções. Aproximações Polinomiais e Séries de Fourier

Sumário

37.1 Noções de Convergência para Sequências de Funções . . . 1938
37.1.1 Importância da Convergência Uniforme . . . 1939
37.1.1.1 Troca de Ordem entre Limites e Integrais . . . 1940
37.1.1.2 Troca de Ordem entre Limites e Derivadas . . . 1942
37.1.1.3 Troca de Ordem entre Derivadas e Integrais . . . 1942
37.2 Sequências Delta de Dirac . . . 1944
37.3 Aproximação de Funções por Polinômios . . . 1950
37.3.1 O Teorema de Weierstrass . . . 1950
37.3.2 O Teorema de Taylor . . . 1957
37.4 Aproximação de Funções por Polinômios Trigonométricos . . . 1964
37.4.1 Preliminares . . . 1965
37.4.2 A Série de Fourier de Funções Periódicas de Período T . . . 1968
37.4.3 Polinômios Trigonométricos e Funções Contínuas e Periódicas . . . 1969
37.4.4 Convergência de Séries de Fourier . . . 1974
37.4.4.1 Séries de Fourier em Senos ou Cossenos para Funções Definidas em Intervalos Compactos 1980
37.4.5 Revisitando a Aproximação Uniforme de Funções Contínuas e Periódicas por Polinômios Trigonométricos . . . 1983
37.4.6 Somas de Cesàro . . . 1983
37.4.6.1 O Núcleo de Fejér . . . 1985
37.4.7 Séries de Fourier e o Espaço de Hilbert $L^2\big([-\pi,\,\pi],\,dx\big)$ . . . 1987
37.5 O Teorema de Stone-Weierstrass . . . 1988
37.6 Exercícios Adicionais . . . 1993
APÊNDICES . . . 2001
37.A Prova do Teorema de Weierstrass Usando Polinômios de Bernstein . . . 2001
37.B A Demonstração de Weierstrass do Teorema de Weierstrass . . . 2005

Na Física e também em diversas áreas da Matemática Aplicada, estamos muitas vezes interessados em resolver problemas cuja solução não pode ser obtida exatamente. No caso de equações diferenciais, por exemplo, são muito raras as situações nas quais uma solução pode ser expressa em termos de funções "elementares", tais como polinômios, exponenciais, logaritmos, senos, cossenos ou combinações finitas das mesmas. Na grande maioria dos casos apresentam-se métodos de solução em termos de aproximações que, sob hipóteses adequadas, podem estar tão próximas quanto se queira da solução correta. É, portanto, uma questão importante desenvolver métodos de aproximar funções com certas propriedades e é disso, basicamente, que trataremos neste capítulo. Não pretendemos aqui esgotar o assunto, o que ademais seria impossível, dada a sua extensão, mas tratar de dois tipos fundamentais de aproximações de funções: as aproximações por polinômios e as aproximações por polinômios trigonométricos. Este último tópico é o domínio das chamadas séries de Fourier e suporemos que o leitor já possua alguma familiaridade com seus aspectos mais elementares e suas aplicações. Como veremos, aproximações por polinômios e por polinômios trigonométricos são dois assuntos relacionados. Ambos os métodos de aproximação estão também na raiz de muitos outros desenvolvimentos, como na teoria dos espaços de Hilbert, e mesmo em temas mais abstratos, como na Álgebra de Operadores. Sua utilização prática é enorme e ambos os assuntos têm dominado boa parte das aplicações da Matemática a problemas de Física e de Engenharia desde o século XVIII.

37.1 Noções de Convergência para Sequências de Funções

Em benefício do estudante, vamos recordar brevemente na corrente seção algumas das noções e resultados básicos sobre convergência de sequências de funções definidas em $\mathbb{R}$ (ou em subconjuntos de $\mathbb{R}$), noções e resultados esses que utilizaremos no que segue. Presumimos que o estudante já tenha sido exposto a esses temas e um tratamento mais detalhado que o nosso pode ser encontrado em quaisquer bons livros de Cálculo ou Análise real. Algumas das noções aqui tratadas são também desenvolvidas com muito mais detalhe no Capítulo 24, página 1304, mas a leitura prévia desse capítulo, ainda que útil, é dispensável para o que segue.

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$. As seguintes noções de convergência são de fundamental importância:

a. *Convergência pontual.* Diz-se que uma sequência de funções $f_n : D \to \mathbb{C}$, definidas em D, *converge pontualmente* a uma função $f : D \to \mathbb{C}$ se para cada $x \in D$ valer $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

b. *Convergência uniforme.* Diz-se que uma sequência de funções $f_n : D \to \mathbb{C}$ *converge uniformemente* a uma função $f : D \to \mathbb{C}$ se $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$.

Se uma sequência f_n converge pontualmente a uma função f, então f é dita ser o *limite pontual* da sequência f_n. Se uma sequência f_n converge uniformemente a uma função f, então f é dita ser o *limite uniforme* da sequência f_n.

Além da convergência uniforme e pontual, há diversas outras noções de convergência para sequências de funções, das quais destacamos as duas seguintes. Sejam a e $b \in \mathbb{R}$ com $-\infty < a < b < \infty$.

c. *Convergência no sentido de $L^1\big([a,\ b],\ dx\big)$.* Seja $f_n : [a,\ b] \to \mathbb{C}$ uma sequência de funções tais que $\displaystyle\int_a^b |f_n(x)|dx < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja também $f : [a,\ b] \to \mathbb{C}$ com $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx < \infty$. Dizemos que a sequência f_n converge a f *no sentido de $L^1\big([a,\ b],\ dx\big)$* se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx = 0$.

d. *Convergência no sentido de $L^2\big([a,\ b],\ dx\big)$.* Seja $f_n : [a,\ b] \to \mathbb{C}$ uma sequência de funções tais que $\displaystyle\int_a^b |f_n(x)|^2dx < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja também $f : [a,\ b] \to \mathbb{C}$ com $\displaystyle\int_a^b |f(x)|^2dx < \infty$. Dizemos que a sequência f_n converge a f *no sentido de $L^2\big([a,\ b],\ dx\big)$* se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2dx} = 0$.

Definições análogas existem para o caso de sequências definidas, não em um intervalo finito $[a,\ b]$, mas em intervalos não-finitos, como a reta real $\mathbb{R}$ ou a semirreta $\mathbb{R}_+$.

Antes de falarmos sobre a importância da convergência uniforme, apresentemos um critério importante para que se tenha convergência uniforme de séries de funções.

• **O teste M de Weierstrass**

Em muitas situações lidamos com séries de funções, ou seja, com sequências da forma $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$, onde f_k são funções reais definidas em um certo domínio comum $D \subset \mathbb{R}$. É muito importante nesses casos ter em mãos critérios que permitam saber se a sequência s_n converge uniformemente em D a alguma função. De particular utilidade nesse contexto é um pequeno resultado devido a Weierstrass[1], conhecido como *teste M de Weierstrass*, o qual fornece condições suficientes para a convergência uniforme de uma série:

Proposição 37.1 (Teste M de Weierstrass) *Seja $D \subset \mathbb{R}$, D não-vazio, e seja $f_n : D \to \mathbb{C}$ uma sequência de funções definidas em D e tais que para cada k exista uma constante $M_k \geq 0$ tal que $|f_k(x)| \leq M_k$ para todo $x \in D$. Então, se a*

[1] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897).

série $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ *for convergente, a sequência de funções* $s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ *converge uniformemente em* D. □

Prova. Como a série $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ é convergente, a sequência de somas parciais $\mathcal{M}_n := \sum_{k=0}^{n} M_k$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, para cada $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{M}_n - \mathcal{M}_m| \leq \epsilon$ sempre que n e m forem maiores que $N(\epsilon)$. Como os M_k's são positivos, para $m < n$ tem-se $|\mathcal{M}_n - \mathcal{M}_m| = \mathcal{M}_n - \mathcal{M}_m = \sum_{k=m+1}^{n} M_k$. Assim, vale $\sum_{k=m+1}^{n} M_k \leq \epsilon$ sempre que n e m forem maiores que $N(\epsilon)$.

Provemos primeiramente que a sequência s_n converge pontualmente. Fixemos $x \in D$ e consideremos, para $m < n$, a diferença $s_n(x) - s_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)$. Naturalmente, vale $|s_n(x) - s_m(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k \leq \epsilon$ sempre que n e m forem maiores que $N(\epsilon)$. Isso provou que a sequência $s_n(x)$ é uma sequência de Cauchy de números reais e, portanto, converge a um número que denotamos por $s(x)$. Como isso se dá para cada $x \in D$, concluímos que existe uma função $s : D \to \mathbb{C}$ à qual a sequência s_n converge pontualmente.

Provemos agora que a sequência s_n converge uniformemente a essa função s. Para cada $x \in D$ vale, como vimos, $|s_n(x) - s_m(x)| \leq \epsilon$ sempre que n e m forem maiores que $N(\epsilon)$. Logo, tomando nessa desigualdade o limite $n \to \infty$, teremos $|s(x) - s_m(x)| \leq \epsilon$ sempre que $m > N(\epsilon)$. Como isso vale para qualquer $x \in D$, concluímos que $\sup_{x \in D} |s(x) - s_m(x)| \leq \epsilon$ sempre que $m > N(\epsilon)$ e isso estabelece que a sequência s_n converge uniformemente a s em D. ■

O leitor pode facilmente perceber que a Proposição 37.1 e sua demonstração se deixam generalizar sem problemas para séries de funções complexas definidas em domínios complexos $D \subset \mathbb{C}$. Em verdade, a Proposição 37.1 e sua demonstração se deixam facilmente generalizar ainda mais para séries de funções definidas em $D \subset \mathbb{C}$ assumindo valores em um espaço de Banach.

37.1.1 Importância da Convergência Uniforme

Vamos discutir brevemente algumas das razões da importância da noção de convergência uniforme. Como consequência dessa discussão, obteremos uma série de resultados muito úteis que garantem condições suficientes para que se possa trocar a ordem de operações envolvendo a tomada de limites, o cálculo de derivadas e o cálculo de integrais definidas, trocas essas empregadas amiúde em manipulações em Física e Matemática.

• **Convergência uniforme e outras convergências**

É evidente que em qualquer D a convergência uniforme de uma sequência f_n a uma função f implica a convergência pontual dessa sequência à mesma função. No caso de intervalos $[a,\ b]$ finitos, a convergência uniforme implica também a convergência no sentido de $L^1\big([a,\ b],\ dx\big)$, pois vale, evidentemente,

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \ \leq \ \sup_{x \in [a,\ b]} |f_n(x) - f(x)| \big(b - a\big) \tag{37.1}$$

e analogamente para a convergência no sentido de $L^2\big([a,\ b],\ dx\big)$. A recíproca dessas duas afirmações, porém, não é necessariamente verdadeira. Por exemplo, a sequência de funções definidas no intervalo $[-1,\ 1]$ por

$$f_n(x) \ := \begin{cases} 1 & 0 \leq |x| \leq \frac{1}{n}\ , \\ 0\ , & \frac{1}{n} < |x| \leq 1\ , \end{cases}$$

para $n \geq 1$, converge à função nula no sentido de $L^1\big([a,\ b],\ dx\big)$ e no sentido de $L^2\big([a,\ b],\ dx\big)$ (justifique!), mas não converge uniformemente a essa função (justifique!).

• **Limites uniformes de funções contínuas em intervalos compactos**

Um importante resultado que mencionamos é uma propriedade de grande relevância de limites uniformes de funções contínuas:

Proposição 37.2 *Seja $D \subset \mathbb{R}$, não-vazio, e seja $f_n : D \to \mathbb{C}$ uma sequência de funções contínuas que converge uniformemente a uma função $f : D \to \mathbb{C}$. Então, f é também contínua.* □

Prova. Para $x,\ y \in D$ quaisquer e $n \in \mathbb{N}$ qualquer, podemos escrever $f(x) - f(y) = \big(f(x) - f_n(x)\big) + \big(f_n(x) - f_n(y)\big) + \big(f_n(y) - f(y)\big)$, do que se extrai $\big|f(x) - f(y)\big| \leq \big|f(x) - f_n(x)\big| + \big|f_n(x) - f_n(y)\big| + \big|f_n(y) - f(y)\big|$. Como a sequência f_n converge uniformemente a f, existe para cada $\epsilon > 0$ um $N(\epsilon/3) \in \mathbb{N}$ tal que $\big|f(x) - f_n(x)\big| < \epsilon/3$ e $\big|f(y) - f_n(y)\big| < \epsilon/3$ desde que escolhamos n com $n > N(\epsilon/3)$. Tomemos um tal n. Como a função f_n é contínua, existe $\delta(\epsilon/3)$ tal que $\big|f_n(x) - f_n(y)\big| < \epsilon/3$ desde que $|x - y| < \delta(\epsilon/3)$. Assim, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon/3)$ tal que $\big|f(x) - f(y)\big| < \epsilon$ desde que $|x - y| < \delta(\epsilon/3)$, provando a continuidade de f. ■

Resultados ainda mais fortes são demonstrados na Proposição 24.8, página 1317.

37.1.1.1 Troca de Ordem entre Limites e Integrais

No caso de intervalos finitos $[a,\ b]$, a noção de convergência uniforme é importante por fornecer condições suficientes para garantir a inversão de ordem de limites e integrais. Mais especificamente, tem-se a seguinte afirmação:

Proposição 37.3 *Seja uma sequência $f_n : [a,\ b] \to \mathbb{C}$ de funções contínuas definidas em um intervalo compacto $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$ que converge uniformemente nesse intervalo a uma função $f : [a,\ b] \to \mathbb{C}$ (a qual, pela Proposição 37.2, é também contínua), então vale*

$$\lim_{n\to\infty} \int_b^a f_n(x)\,dx \;=\; \int_b^a \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\,dx \;=\; \int_b^a f(x)\,dx \tag{37.2}$$

ou seja, é possível inverter o limite pela integral definida. □

Prova. A demonstração segue facilmente da observação que

$$\left|\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)dx\right| \;\leq\; \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \;\overset{(37.1)}{\leq}\; \left(\sup_{x\in[a,\ b]} |f_n(x) - f(x)|\right)\big(b - a\big)\ ,$$

o que implica que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = 0$ se $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[a,\ b]} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0.$ ■

Fazemos notar que a condição de convergência uniforme da sequência f_n é suficiente, mas não necessária para validar a inversão de limites em intervalos compactos descrita em (37.2). Citamos o importante exemplo de séries de Fourier de funções periódicas, contínuas e diferenciáveis por partes. De acordo com o Teorema 37.13, página 1979, as condições do Teorema de Fourier (Teorema 37.12, página 1978) são suficientes para que a inversão de (37.2) seja válida para uma série de Fourier, mesmo que não impliquem em convergência uniforme dessa série.

A troca de limites por integrais definidas é uma operação frequentemente realizada em manipulações matemáticas e, não raro, conduz à solução de diversos problemas em Física. É, portanto, útil conhecermos condições sob as quais tal inversão seja permitida. Alguns dos teoremas mais fortes nessa direção (com a integração entendida no sentido de Lebesgue) são o Teorema da Convergência Monótona e o Teorema da Convergência Dominada, que apresentamos e demonstramos na Seção 31.3.4, página 1554.

• **Contraexemplos a se ter em mente**

Caso a sequência de funções não seja uniformemente convergente, então não é sempre possível garantir a validade da inversão entre a integral definida e a tomada do limite e essa inversão pode, em alguns casos, ser falsa. Um exemplo bem

conhecido é o da sequência de funções contínuas

$$f_n(x) \;:=\; \begin{cases} n^2 x \;, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \;, \\ -n^2 x + 2n \;, & \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n} \;, \\ 0 \;, & \frac{2}{n} \le x \le 1 \;, \end{cases} \tag{37.3}$$

com $n \ge 2$, funções essas definidas no intervalo $[0,\ 1]$. Vide Figura 37.1, página 1941. É fácil constatar que para cada $x \in [0,\ 1]$ vale $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, sendo que esse limite não é uniforme, já que $f_n(1/n) = n$ para cada n. Ocorre, porém, que $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ para todo n. Logo, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_b^a f_n(x)\,dx \ne \int_b^a \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\,dx$, pois o lado esquerdo vale 1 e o lado direito vale 0.

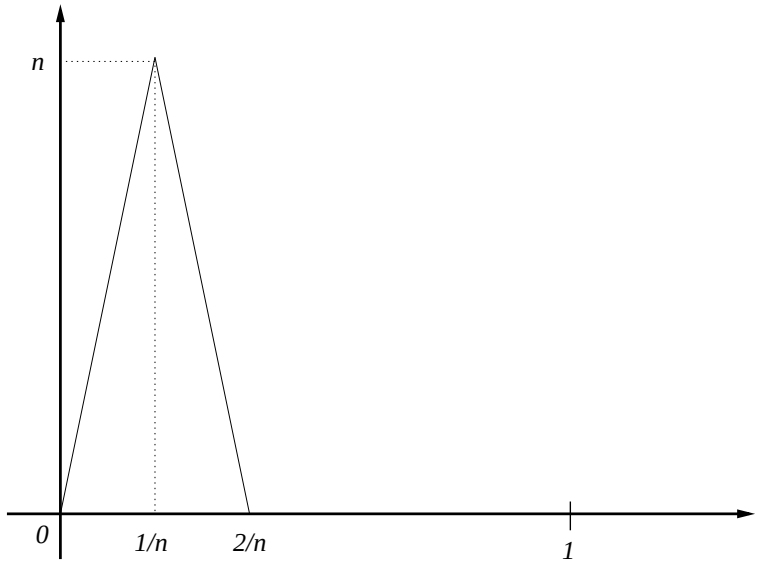

Figura 37.1: Gráfico de uma função f_n definida em (37.3). Observe que a área do triângulo vale 1 para todo n.

A hipótese feita na Proposição 37.3 de que a sequência f_n converge uniformemente em um intervalo *compacto* também não é gratuita, como mostra o seguinte (contra-)exemplo: Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sequência de funções definidas por

$$f_n(x) \;:=\; \begin{cases} \frac{1}{2n} \;, & -n \le x \le n \;, \\ 0 \;, & \text{de outra forma} \;, \end{cases} \tag{37.4}$$

com $n \ge 1$. Então, f_n converge uniformemente em toda $\mathbb{R}$ à função identicamente nula (justifique!), mas $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = 1$ para todo n, mostrando que $1 \;=\; \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx\right) \;\ne\; \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\,dx \;=\; 0$.

E. 37.1 *Exercício*. Considere a sequência de funções $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-x/n}$, com $n \in \mathbb{N}$, definidas no intervalo $[0,\ \infty)$. Mostre que essa sequência de funções converge uniformemente à função que é identicamente nula no intervalo $[0,\ \infty)$. Mostre, calculando explicitamente ambos os lados, que vale $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx \ne \int_0^{\infty}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\,dx$.

Ainda que difiram, os limites $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_0^{\infty}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\,dx$ são finitos no exemplo acima. Considere, porém, o que ocorre no caso da sequência de funções $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}e^{-x/n}$, com $n \in \mathbb{N}$, definidas no intervalo $[0,\ \infty)$. Mostre que essa sequência

de funções também converge uniformemente, à função identicamente nula, mas constate que, nesse caso, o limite $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx$ sequer existe. ✠

37.1.1.2 Troca de Ordem entre Limites e Derivadas

A Proposição 37.3 tem uma outra consequência útil referente à possibilidade de inversão de limites por derivadas.

Proposição 37.4 *Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções contínuas e diferenciáveis com derivadas f_n' também contínuas. Suponhamos que a sequência f_n convirja pontualmente a uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e que a sequência de derivadas f_n' convirja uniformemente em cada intervalo compacto $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$ a uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Então, g é contínua e f é diferenciável, com $f' = g$.*

Assim, em outras palavras, vale, sob as hipóteses acima, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{df_n}{dx}(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$. □

Nota. Observamos que as conclusões da Proposição 37.4 podem ser obtidas com hipóteses ainda menos restritivas. Vide, e.g., [320]. ♣

Provada Proposição 37.4. A sequência de funções contínuas f_n' converge uniformemente a g em cada intervalo compacto $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$ e, assim, pela Proposição 37.2, g é contínua em todos esses intervalos e, portanto, é contínua em todo $\mathbb{R}$.

Tomemos um intervalo compacto $[a,\ x] \subset \mathbb{R}$, com $x \in (a,\ b]$. Como a sequência de funções contínuas f_n' converge uniformemente nesse intervalo à função g, vale pela Proposição 37.3 que $\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(y)dy = \int_a^x g(y)dy$. A integral do lado esquerdo é $f_n(x) - f_n(a)$. Como a sequência f_n converge pontualmente à função f, teremos que $\lim_{n\to\infty}\big(f_n(x) - f_n(a)\big) = f(x) - f(a)$. Assim, estabelecemos que $\int_a^x g(y)dy = f(x) - f(a)$. O lado esquerdo é contínuo e diferenciável em x em todo intervalo $[a,\ b]$, a derivada sendo a função contínua $g(x)$ (pelo Teorema Fundamental do Cálculo). Logo, o lado direito é também contínuo e diferenciável em x e sua derivada é $f'(x) = g(x)$. ■

37.1.1.3 Troca de Ordem entre Derivadas e Integrais

Tanto na Física quanto na Matemática em geral, é muito comum encontrarmos situações nas quais temos uma função $\phi(x,\ t)$ sendo integrada na variável x em um certo domínio, digamos de $-\infty$ e $+\infty$, resultando em uma função apenas da variável t, e desejarmos calcular a derivada dessa função resultante da integral em relação à variável t, usando para tal a expressão $\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,\ t)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ t)dx$, na qual, em um sentido formal, a derivação na variável t é trocada de ordem com a integração em x. Tal troca de ordem é por vezes de grande utilidade em manipulações, por exemplo, na teoria das equações diferenciais ordinárias e parciais. Na proposição que segue apresentaremos condições suficientes para garantir que tal troca seja válida.

Proposição 37.5 *Seja $\phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua e suponhamos que a derivada parcial $\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ t)$ exista para todos $(x,\ t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e seja igualmente continua.*

Parte I. *Para todo intervalo compacto $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$ a função de t definida por $\int_a^b \phi(x,\ t)dx$ é diferenciável e vale*

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \phi(x,\ t)\,dx \;=\; \int_a^b \frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ t)\,dx\,. \tag{37.5}$$

Parte II. *Vamos adicionalmente supor que valham as seguintes hipóteses:*

a. $\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(x,\ t)|dx$ *existe para todo* $t \in \mathbb{R}$*;*

b. $\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ t)\right|dx$ *existe para todo* $t \in \mathbb{R}$*;*

c. *a sequência de funções* $F_n(t) := \displaystyle\int_{|x|>n} \left|\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ t)\right| dx$ *converge quando* $n \to \infty$ *à função identicamente nula, uniformemente para* t *em qualquer intervalo compacto* $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$.

Então, a função de t *definida por* $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,\ t)dx$ *é diferenciável e vale*

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,\ t)\, dx \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ t)\, dx\ . \tag{37.6}$$

□

Prova da Parte I. Para evitar confusões na notação, vamos no que segue denotar a derivada parcial $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ por ϕ_1 e a derivada parcial $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ por ϕ_2.

Como $\phi_2(x,\ t)$ é contínua, podemos escrever

$$\int_0^t \left(\int_a^b \phi_2(x,\ \tau)\, dx\right) d\tau \ = \ \int_a^b \left(\int_0^t \phi_2(x,\ \tau)\, d\tau\right) dx\ ,$$

trocando a ordem das integrais. Agora, $\int_0^t \phi_2(x,\ \tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ \tau)\, d\tau = \phi(x,\ t) - \phi(x,\ 0)$ e o lado direito claramente vale $\int_a^b \phi(x,\ t)dx - \int_a^b \phi(x,\ 0)dx$. Com isso, estabelecemos que

$$\int_a^b \phi(x,\ t)\, dx \ = \ \int_0^t \Phi(\tau)\, d\tau + C\ , \tag{37.7}$$

onde

$$\Phi(\tau) \ := \ \int_a^b \phi_2(x,\ \tau)\, dx \qquad \text{e} \qquad C \ := \ \int_a^b \phi(x,\ 0)\, dx\ .$$

Note-se que C é constante, ou seja, independente de t.

É importante agora provarmos que $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é contínua. Vamos provisoriamente restringir τ ao intervalo compacto $[-T,\ T]$ para algum $T > 0$. Por hipótese, a função $\phi_2(x,\ \tau)$ é contínua e, portanto, uniformemente contínua no domínio compacto $[a,\ b] \times [-T,\ T] \subset \mathbb{R}^2$. Logo, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta(x)$ tal que $|\phi_2(x,\ \tau) - \phi_2(x',\ \tau')| < \epsilon$ sempre que $|x - x'| < \delta(\epsilon)$ e $|\tau - \tau'| < \delta(\epsilon)$. Em particular, vale que $|\phi_2(x,\ \tau) - \phi_2(x,\ \tau')| < \epsilon$ sempre que $|\tau - \tau'| < \delta(\epsilon)$. Logo, se $|\tau - \tau'| < \delta(\epsilon)$, valerá

$$\Big|\Phi(\tau) - \Phi(\tau')\Big| \ = \ \left|\int_a^b \phi_2(x,\ \tau)\, dx - \int_a^b \phi_2(x,\ \tau')\, dx\right| \ \leq \ \int_a^b \Big|\phi_2(x,\ \tau) - \phi_2(x,\ \tau')\Big| dx \ < \ (b-a)\epsilon\ ,$$

o que prova que $\Phi : [-T,\ T] \to \mathbb{C}$ é contínua. Como $T > 0$ é arbitrário, concluímos que $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é contínua, como desejávamos. A continuidade de Φ permite afirmar que $\int_0^t \Phi(\tau)\, d\tau$ é diferenciável como função de t e de (37.7) concluímos que $\int_a^b \phi(x,\ t)\, dx$ é também diferenciável como função de t e vale

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \phi(x,\ t)\, dx \ = \ \Phi(t) \ = \ \int_a^b \frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ t)\, dx\ ,$$

como queríamos estabelecer. Isso termina a prova da Parte I.

Prova da Parte II. A hipótese **a** garante a existência da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por $f(t) := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,\ t)\, dx$. Para $n \in \mathbb{N}$, defina-se também a sequência de funções $f_n(t) := \displaystyle\int_{-n}^{n} \phi(x,\ t)\, dx$. Se provarmos que f_n converge pontualmente a f e que f_n é diferenciável e a sequência de derivadas f_n' converge <u>uniformemente</u> a $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ t)\, dx$ para t em compactos $[a,\ b]$ (sendo que essa integral existe pela hipótese hipótese **b**), então poderemos evocar a Proposição 37.4, página 1942 e obter que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} \phi(x,\ t)\, dx$ é diferenciável como função de t e que vale

$$\frac{d}{dt}\left(\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} \phi(x,\ t)\, dx\right) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ t)\, dx\ ,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,\ t)\,dx\ =\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ t)\,dx\ ,$$

como desejamos.

Provemos então que f_n converge pontualmente a f. Tem-se $|f_n(t)-f(t)| = \left|\int_{|x|>n}\phi(x,\ t)dx\right| \leq \int_{|x|>n}|\phi(x,\ t)|\,dx$. Pela hipótese **a**, tem-se para cada t que $\lim_{n\to\infty}\int_{|x|>n}|\phi(x,\ t)|\,dx = 0$ (doutra forma $\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(x,\ t)|\,dx$ não existiria), provando que para cada t vale $\lim_{n\to\infty}|f_n(t)-f(t)|$, o que diz que f_n converge a f pontualmente.

Por fim, provemos que f_n é diferenciável e a sequência de derivadas f_n' converge uniformemente a $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ t)\,dx$ para t em compactos $[a,\ b]$. Que cada f_n é diferenciável é garantido pela Parte I, que garante também que $f_n'(t) = \int_{-n}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ t)dx$. Assim,

$$\left|f_n'(t)-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ t)\,dx\right| \ =\ \left|\int_{|x|>n}\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ t)\,dx\right| \ \leq\ \int_{|x|>n}\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ t)\right|dx\ .$$

Agora, pela hipótese **c**, $\int_{|x|>n}\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ t)\right|dx$ converge a zero uniformemente em compactos quanto $n\to\infty$. Logo, $\left|f_n'(t)-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\ t)\,dx\right|$ converge a zero uniformemente em compactos quanto $n\to\infty$, completando a prova. ■

37.2 Sequências Delta de Dirac

Uma noção importante para o estudo de certas aproximações de funções é a noção de *sequência delta de Dirac* pois, como será ilustrado em diversos exemplos no que segue, muitos aproximantes de funções são produzidos por tais sequências ou por sequências análogas. Sequências delta de Dirac são muito usadas em Física, assim como na Teorias das Distribuições (vide Capítulo 38, página 2007) e no estudo de equações diferenciais.

Dirac[2] introduziu essas sequências no contexto da Mecânica Quântica, mas a ideia subjacente já podia ser encontrada na demonstração original de Weierstrass, datada de 1885, do teorema que leva seu nome sobre aproximação polinomial de funções contínuas em intervalos compactos (Teorema 37.3, página 1950), assim como no trabalho de Fejér[3] de 1900 sobre o problema de convergência uniforme de polinômios trigonométricos associados a funções contínuas e periódicas (vide Teorema 37.9, página 1972). Essas ideias originam-se provavelmente do trabalho de Dirichlet[4] de 1828, também sobre o problema de convergência das séries de Fourier (vide Proposição 37.9, página 1974).

• **Sequências delta de Dirac. Definição formal e propriedades**

A noção de sequência delta de Dirac, que introduziremos agora, é de importância central na discussão de métodos de aproximação de funções. Isso será explicitado quando apresentarmos e demonstrarmos o Teorema 37.1 à página 1947. A noção de sequência delta de Dirac é também intimamente ligada à noção de *medida delta de Dirac* (vide página 1449) e à noção de *distribuição delta de Dirac* (vide página 2062).

Definição 37.1 (Sequências delta de Dirac) *Uma sequência de funções $K_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, é dita ser uma* sequência delta de Dirac *em $\mathbb{R}$ centrada em 0 se satisfizer:*

1. *Para cada $n\in\mathbb{N}$, a função K_n é integrável, ou seja,* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|K_n(x)|\,dx<\infty$.
2. *Existe uma constante $\mathcal{K}>0$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ vale*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|K_n(x)|\,dx\ \leq\ \mathcal{K}\ . \tag{37.8}$$

[2] Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984).
[3] Lipót Fejér (1880–1959).
[4] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859).

3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, vale*

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x)\, dx \;=\; 1\;. \tag{37.9}$$

4. *Para todo $\delta > 0$ vale*

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_{-\infty}^{-\delta} |K_n(x)|\, dx + \int_{\delta}^{\infty} |K_n(x)|\, dx \right] \;=\; 0\;. \tag{37.10}$$

Uma sequência de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é dita ser uma *sequência delta de Dirac em* $\mathbb{R}$ *centrada em* $x_0 \in \mathbb{R}$ se for da forma $\mathcal{T}_{x_0} K_n$, onde K_n é uma sequência delta de Dirac em $\mathbb{R}$ centrada em 0. Aqui, $\mathcal{T}_{x_0}$ é o operador de translação por x_0, o qual associa a cada função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à função $\mathcal{T}_{x_0} f$ definida por

$$\big(\mathcal{T}_{x_0} f\big)(x) \;:=\; f(x - x_0) \tag{37.11}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. As funções K_n de uma sequência delta de Dirac são também denominadas *núcleos de Dirac*.

As condições 3 e 4 exigem que as funções K_n tornem-se mais e mais "concentradas" em torno do ponto 0 à medida em que n cresce, eventualmente com $\lim\limits_{n\to\infty} K_n(0) = \infty$. O estudante deve atentar, porém, que esse último limite nem sempre é verdadeiro, pois podemos ter $\lim\limits_{n\to\infty} K_n(0) = 0$ e mesmo $\lim\limits_{n\to\infty} K_n(0) = -\infty$! Essas diversas situações são ilustradas nos exemplos que seguem.

• **Exemplos de sequências delta de Dirac**

Vamos a alguns exemplos elementares ilustrativos de sequências delta de Dirac segundo a definição 37.1.

1. *A sequência delta de Dirac Gaussiana.* Este é talvez o exemplo mais importante e mais encontrado na "prática". Seja a família de funções Gaussianas dadas por (vide (38.171))

$$g_n(x) \;:=\; \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2 x^2} \tag{37.12}$$

para $n \in \mathbb{N}$. É bem sabido que $\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\, dx = 1$ (integral de Laplace). Como g_n é positiva e simétrica (i.e. $g_n(x) = g_n(-x)$ para todo x) resta provar, para mostrar que g_n forma uma sequência delta de Dirac segundo a definição 37.1, que para todo $\delta > 0$ vale $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{\delta}^{\infty} g_n(x)\, dx = 0$. De fato, para todo $\alpha \geq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-n^2 x^2}\, dx \;&\overset{y=x-\alpha}{=}\; \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-n^2 (y+\alpha)^2}\, dy \\
&=\; e^{-n^2\alpha^2} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-n^2 y^2 - 2n^2 \alpha y}\, dy \\
&\leq\; e^{-n^2\alpha^2} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-n^2 y^2}\, dy \\
&\overset{s=ny}{=}\; e^{-n^2\alpha^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-s^2}\, ds \;=\; \frac{e^{-n^2\alpha^2}}{2}
\end{aligned} \tag{37.13}$$

e, portanto, para todo $\delta > 0$ vale

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-n^2 x^2}\, dx \;\leq\; \frac{e^{-n^2\delta^2}}{2} \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0\;. \tag{37.14}$$

É interessante notar que para $x \neq 0$ tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ mas para $x = 0$ o limite não existe (diverge), pois $g_n(0) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}$.

Esse exemplo será generalizado mais abaixo.

2. *Uma sequência tipo degrau.* Um exemplo mais elementar é dado pela sequência

$$ {}_1K_n(x) \;=\; \begin{cases} n\,, & \text{se } x \in \left(-\frac{1}{2n},\, \frac{1}{2n}\right)\,, \\[2ex] 0\,, & \text{de outra forma,} \end{cases} \tag{37.15} $$

com $n \in \mathbb{N}$. Todas as propriedades da definição 37.1 são evidentes nesse caso. É interessante notar que para $x \neq 0$ tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} {}_1K_n(x) = 0$ mas para $x = 0$ o limite não existe (diverge), pois ${}_1K_n(0) = n$.

3. *Outra sequência tipo degrau.* Esse exemplo difere ligeiramente do anterior. Seja a sequência

$$ {}_2K_n(x) \;=\; \begin{cases} n\,, & \text{se } x \in \left(0,\, \frac{1}{n}\right)\,, \\[2ex] 0\,, & \text{de outra forma,} \end{cases} $$

com $n \in \mathbb{N}$. Todas as propriedades da definição 37.1 são evidentes nesse caso. É interessante notar que, em contraste com os exemplos anteriores, vale para <u>todo</u> $x \in \mathbb{R}$ que $\lim\limits_{n\to\infty} {}_2K_n(x) = 0$.

4. *Mais uma outra sequência tipo degrau.* Esse exemplo difere ligeiramente do anterior. Seja a sequência

$$ {}_3K_n(x) \;=\; \begin{cases} n\,, & \text{se } x \in \left(\frac{1}{n^2},\, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\,, \\[2ex] 0\,, & \text{de outra forma,} \end{cases} $$

com $n \in \mathbb{N}$. Todas as propriedades da definição 37.1 são evidentes nesse caso. É interessante notar que, em contraste com os exemplos anteriores, o ponto $x = 0$ não faz parte do suporte de ${}_3K_n$. Também vale aqui que $\lim\limits_{n\to\infty} {}_3K_n(x) = 0$ para <u>todo</u> $x \in \mathbb{R}$.

5. *Sequências obtidas por re-escalonamento de funções de suporte compacto.* Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável, cujo suporte seja compacto e tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)ds \neq 0$. Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$ {}_4K_n(x) \;:=\; \frac{n\,\varphi(nx)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)ds}\,. $$

É fácil provar que ${}_4K_n$ satisfaz as propriedades da definição 37.1 (faça!). A propriedade (37.8), por exemplo, é satisfeita com $\mathcal{K} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(s)|ds\right) \Big/ \left(\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)ds\right|\right)$, a propriedade (37.9) é evidente pela definição e a propriedade (37.10) segue do fato de o suporte de ${}_4K_n$ ser compacto, sendo igual ao suporte de φ re-escalonado por um fator $1/n$ (por exemplo, se $\operatorname{supp}\varphi = [a,\ b]$ então $\operatorname{supp} {}_4K_n = [a/n,\ b/n]$). Note que ${}_4K_n(0) = n\varphi(0) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)ds$. Portanto, ${}_4K_n(0)$ pode ser positivo e ou negativo (ou até mesmo nulo!). Note que o suporte de φ não precisa necessariamente conter o ponto $x = 0$!. Esse exemplo generaliza o das sequências ${}_1K_n$ e ${}_2K_n$, acima.

6. *Sequências obtidas por re-escalonamento de funções de Schwartz.* Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ (para a definição das funções de Schwartz, vide Seção 38.1, página 2008) e tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds \neq 0$. Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$ {}_5K_n(x) \;:=\; \frac{n\,f(nx)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds}\,. $$

É fácil provar que ${}_5K_n$ satisfaz as propriedades da definição 37.1 (Exercício!). Note que ${}_5K_n(0) = nf(0) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds$. Portanto, como no caso da sequência ${}_4K_n$, o valor de ${}_5K_n(0)$ pode ser positivo e ou negativo ou até mesmo nulo. O caso da sequência Gaussiana g_n, acima, é o caso particular onde $f(x) = e^{-x^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

• **Aproximando funções por meio de sequências delta de Dirac**

O fato importante sobre as sequências delta de Dirac é o seguinte teorema:

Teorema 37.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função satisfazendo as seguintes condições:*

1. *f é uniformemente contínua*[5] *em todo $\mathbb{R}$, ou seja, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $|f(z) - f(z')| \leq \epsilon$ sempre que $|z - z'| \leq \delta(\epsilon)$.*
2. *f é limitada em todo $\mathbb{R}$, ou seja, $\sup\{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}\} < \infty$.*

Seja K_n uma sequência delta de Dirac centrada em 0 em $\mathbb{R}$. Defina-se, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) \ := \int_{-\infty}^{\infty} K_n(y) f(x-y)\, dy \ = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x-y) f(y)\, dy \ .$$

Então, a sequência F_n é uma sequência de funções uniformemente contínuas e converge uniformemente a f em $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - F_n\|_\infty \ = \ \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - F_n(x)| \right) \ = \ 0 \ .$$

□

Antes de provarmos o teorema, façamos alguns comentários. A condição de continuidade uniforme implica, evidentemente, a continuidade da função f. Uma condição suficiente para que f seja uniformemente contínua é que f satisfaça a *condição de Hölder*[6]: existem constantes $C_1 > 0$ e $\gamma > 0$ tais que para todos x e $y \in \mathbb{R}$ vale

$$|f(x) - f(y)| \ \leq \ C_1\, |x-y|^\gamma \ . \tag{37.16}$$

Dela estabelece-se facilmente a continuidade uniforme tomando $\delta(\epsilon) = (C_1)^{-1}\epsilon^{\frac{1}{\gamma}}$. É útil mencionar que se f for diferenciável em todo $\mathbb{R}$ e f' for limitada, ou seja, $\sup\{|f'(x)|,\ x \in \mathbb{R}\} < \infty$, então f satisfaz a condição de Hölder (37.16) com $\gamma = 1$ (nesse caso, f é dita ser Lipschitz[7]-contínua). De fato, nesse caso, para $x \geq y$, arbitrários, vale

$$|f(x) - f(y)| \ \leq \ \left| \int_y^x f'(s)\, ds \right| \ \leq \ \int_y^x |f'(s)|\, ds \ \leq \ \sup\Big\{ |f'(s)|,\ s \in \mathbb{R} \Big\}\, |x - x'| \ ,$$

desigualdade essa também válida se $x \leq y$. Portanto, vale a condição de Hölder (37.16) com $\gamma = 1$ e $C_1 = \sup\{|f'(s)|,\ s \in \mathbb{R}\}$. Com isso vemos que as funções do espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (vide Seção 38.1, página 2008) satisfazem as hipóteses do Teorema 37.1.

Para certas sequências delta de Dirac específicas é possível enfraquecer algumas restrições sobre as funções f mencionadas no Teorema 37.1, eventualmente com perda da uniformidade da convergência da sequência F_n à função f. Por exemplo, para a sequência de funções Gaussianas de (38.171) (que formam uma sequências delta de Dirac, como veremos mais adiante) a restrição que f seja limitada pode ser substituída pela restrição de que f não cresça mais rápido no infinito do que algum polinômio. Nesse caso F_n ainda convergirá (eventualmente de forma não-uniforme) à f. Deixamos a prova dessa afirmação como exercício ao leitor.

Prova do Teorema 37.1. Observemos primeiramente que, como f é limitada, definindo $C_0 := \sup\{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}\}$, teremos

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} K_n(y) f(x-y)\, dy \right| \ \leq \ \int_{-\infty}^{\infty} |K_n(y)|\, |f(x-y)|\, dy \ \leq \ C_0 \int_{-\infty}^{\infty} |K_n(y)|\, dy \ \overset{(37.8)}{\leq} \ C_0 \mathcal{K} \ .$$

Isso mostra que as integrais que definem as funções F_n estão bem definidas.

Que cada F_n é uniformemente contínua prova-se da seguinte forma. Usando a continuidade uniforme de f, sabemos que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon)$ tal que $|f(z) - f(z')| < \epsilon$ sempre que para z e z' reais quaisquer tivermos $|z - z'| < \delta(\epsilon)$.

[5] A noção de continuidade uniforme de funções em espaços métricos é tratada com mais detalhe na página 1624 e seguintes.
[6] Otto Ludwig Hölder (1859–1937).
[7] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903).

Seja, então $\epsilon > 0$ e $x,\ x' \in \mathbb{R}$ quaisquer tais que $|x - x'| < \delta(\epsilon)$. Teremos,

$$|F_n(x) - F_n(x')| \ = \ \left|\int_{-\infty}^{\infty} K_n(y)\Big(f(x-y) - f(x'-y)\Big)\, dy\right| \ \leq \ \int_{-\infty}^{\infty} |K_n(y)| \Big|f(x-y) - f(x'-y)\Big|\, dy$$

$$\leq \ \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} |K_n(y)|\, dy \ \overset{(37.8)}{\leq} \ \epsilon\mathcal{K}\ ,$$

pois $|(x-y) - (x'-y)| = |x - x'| < \delta(\epsilon)$. Como isso vale para todo $\epsilon > 0$ e $\delta(\epsilon)$ independe de x, estabeleceu-se a continuidade uniforme de F_n.

Vamos agora escrever, usando (37.9),

$$f(x) - F_n(x) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\, dy\ .$$

Para cada $\delta > 0$ podemos quebrar a última integral em três intervalos:

$$\int_{-\infty}^{-\delta} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\, dy + \int_{-\delta}^{\delta} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\, dy + \int_{\delta}^{\infty} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\, dy \tag{37.17}$$

e denominaremos essas integrais I, II e III, respectivamente. Comecemos estudando a integral II. Para cada $\epsilon > 0$ teremos pela continuidade uniforme $|f(x) - f(x-y)| \leq \epsilon$ sempre que $|y| \leq \delta(\epsilon)$ e, portanto, escolhendo $\delta = \delta(\epsilon)$

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\, dy\right| \ \leq \ \int_{-\delta}^{\delta} \big|f(x) - f(x-y)\big|\, |K_n(y)|\, dy$$

$$\leq \ \epsilon \int_{-\delta}^{\delta} |K_n(y)|\, dy \ \leq \ \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} |K_n(y)|\, dy \ \overset{(37.8)}{\leq} \ \mathcal{K}\epsilon\ .$$

Passemos agora às integrais I e III. Como f é limitada, vale para a integral I,

$$\left|\int_{-\infty}^{-\delta} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\, dy\right| \ \leq \ \int_{-\infty}^{-\delta} \big|f(x) - f(x-y)\big|\, |K_n(y)|\, dy \ \leq \ 2C_0 \int_{-\infty}^{-\delta} |K_n(y)|\, dy$$

e, analogamente, para a integral III,

$$\left|\int_{\delta}^{\infty} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\, dy\right| \ \leq \ 2C_0 \int_{\delta}^{\infty} |K_n(y)|\, dy\ ,$$

Logo, por (37.10), podemos obter

$$\left|\int_{-\infty}^{-\delta} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\, dy + \int_{\delta}^{\infty} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\, dy\right| \ \leq \ \epsilon$$

escolhendo n grande o suficiente, digamos $n > N(\epsilon)$, <u>independente de x</u>. Dessa forma, juntando as estimativas para as integrais I, II e III concluímos que $|f(x) - F_n(x)| \leq (2 + \mathcal{K})\epsilon$ para $n > N(\epsilon)$, independente de x. Logo, $\|f - F_n\|_\infty = \sup\{\|f(x) - F_n(x)\|,\ x \in \mathbb{R}\} \leq (2 + \mathcal{K})\epsilon$ para $n > N(\epsilon)$. Como isso vale para $\epsilon > 0$ arbitrário a demonstração está completa. ■

E. 37.2 <u>*Exercício (fácil)*</u>. Seja ${}_1K_n$ a sequência delta de Dirac definida em (37.15) e seja $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Mostre que

$$F_n(x) \ := \ \int_{-\infty}^{\infty} {}_1K_n(x-y)\, \operatorname{sen}(y)\, dy \ = \ n\left[\cos\left(x - \frac{1}{2n}\right) - \cos\left(x + \frac{1}{2n}\right)\right] \ \overset{(37.69)}{=} \ \operatorname{sen}(x)\, \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{2n}}\ .$$

Usando o fato bem-conhecido que $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\operatorname{sen}\epsilon}{\epsilon} = 1$, mostre explicitamente que essa sequência de funções F_n converge uniformemente em $\mathbb{R}$ à função seno quando $n \to \infty$. ✠

• **Generalização para mais dimensões**

As ideias acima podem ser facilmente estendidas para mais dimensões.

Definição 37.2 (Sequências delta de Dirac em $\mathbb{R}^m$) *Uma sequência de funções $K_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, é dita ser uma* sequência delta de Dirac *em $\mathbb{R}^m$ centrada em $0 \in \mathbb{R}^m$ se satisfizer:*

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função K_n é integrável, ou seja, $\int_{\mathbb{R}^m} |K_n(x)|\, d^m x < \infty$.*
2. *Existe uma constante $\mathcal{K} > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale*
$$\int_{\mathbb{R}^m} |K_n(x)|\, d^m x \;\leq\; \mathcal{K}\,. \tag{37.18}$$
3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, vale*
$$\int_{\mathbb{R}^m} K_n(x)\; d^m x \;=\; 1\,. \tag{37.19}$$
4. *Para todo $\delta > 0$ vale*
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_\delta} |K_n(x)|\, d^m x \;=\; 0\,, \tag{37.20}$$
onde $B_\delta := \{x \in \mathbb{R}^m,\ \|x\| < \delta\}$ é a bola aberta de raio $\delta > 0$ centrada em $0 \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 37.2 *Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ uma função satisfazendo as seguintes condições:*

1. *f é uniformemente contínua em todo $\mathbb{R}^m$, ou seja, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $|f(z) - f(z')| \leq \epsilon$ sempre que $\|z - z'\| \leq \delta(\epsilon)$.*
2. *f é limitada em todo $\mathbb{R}^m$, ou seja, $\sup\{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}^m\} < \infty$.*

Seja K_n uma sequência delta de Dirac centrada em 0 em $\mathbb{R}^m$. Defina-se, para cada $n \in \mathbb{N}$,
$$F_n(x) \;:=\; \int_{R^m} K_n(y) f(x-y)\; d^m y \;=\; \int_{\mathbb{R}^m} K_n(x-y) f(y)\; d^m y\,.$$
Então, a sequência F_n é uma sequência de funções uniformemente contínuas e converge uniformemente a f em $\mathbb{R}^m$:
$$\lim_{n\to\infty} \|f - F_n\|_\infty \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^m} |f(x) - F_n(x)| \right) \;=\; 0\,.$$

□

Prova do Teorema 37.2. Observemos primeiramente que, como f é limitada, definindo $C_0 := \sup\{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}^m\}$, teremos
$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} K_n(y) f(x-y)\; d^m y \right| \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^m} |K_n(y)|\, |f(x-y)|\; d^m y \;\leq\; C_0 \int_{\mathbb{R}^m} |K_n(y)|\; d^m y \overset{(37.18)}{\leq} C_0 \mathcal{K}\,.$$
Isso mostra que as integrais que definem as funções F_n estão bem definidas.

Que cada F_n é uniformemente contínua prova-se da seguinte forma. Usando a continuidade uniforme de f, sabemos que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon)$ tal que $|f(z) - f(z')| < \epsilon$ sempre que $\|z - z'\| < \delta(\epsilon)$. Seja, então $\epsilon > 0$ e $x,\ x' \in \mathbb{R}^m$ quaisquer tais que $\|x - x'\| < \delta(\epsilon)$. Teremos,
$$|F_n(x) - F_n(x')| \;=\; \left| \int_{\mathbb{R}^m} K_n(y) \Big(f(x-y) - f(x'-y) \Big)\; d^m y \right| \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^m} |K_n(y)| \Big| f(x-y) - f(x'-y) \Big|\; d^m y$$
$$\leq\; \epsilon \int_{\mathbb{R}^m} |K_n(y)|\; d^m y \overset{(37.18)}{\leq} \epsilon \mathcal{K}\,,$$

pois $\|(x-y)-(x'-y)\| = \|x-x'\| < \delta(\epsilon)$. Como isso vale para todo $\epsilon > 0$ e $\delta(\epsilon)$ independe de x, estabeleceu-se a continuidade uniforme de F_n.

Vamos agora escrever, usando (37.19),

$$f(x) - F_n(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^m} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\; d^m y\;.$$

Para cada $\delta > 0$ podemos quebrar a última integral em duas regiões:

$$\int_{\mathbb{R}^m \setminus B_\delta} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\; d^m y + \int_{B_\delta} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\; d^m y \tag{37.21}$$

e denominaremos essas integrais I, II , respectivamente. Comecemos estudando a integral II. Para cada $\epsilon > 0$ teremos pela continuidade uniforme $|f(x) - f(x-y)| \leq \epsilon$ sempre que $\|y\| \leq \delta(\epsilon)$ e, portanto, escolhendo $\delta = \delta(\epsilon)$

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_\delta} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\; d^m y \right| \;&\leq\; \int_{B_\delta} \big|f(x) - f(x-y)\big|\, |K_n(y)|\; d^m y \\ &\leq\; \epsilon \int_{B_\delta} |K_n(y)|\; d^m y \;\leq\; \epsilon \int_{B_\delta} |K_n(y)|\; d^m y \;\overset{(37.18)}{\leq}\; \mathcal{K}\epsilon\;. \end{aligned}$$

Passemos agora à integral I. Como f é limitada, vale para a integral I,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_\delta} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\; d^m y \right| \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_\delta} \big|f(x) - f(x-y)\big|\, |K_n(y)|\; d^m y \;\leq\; 2C_0 \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_\delta} |K_n(y)|\; d^m y\;.$$

Logo, por (37.20), podemos obter

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_\delta} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\; d^m y \right| \;\leq\; \epsilon$$

escolhendo n grande o suficiente, digamos $n > N(\epsilon)$, independente de x. Dessa forma, juntando as estimativas para as integrais I e II concluímos que $|f(x) - F_n(x)| \leq (2 + \mathcal{K})\epsilon$ para $n > N(\epsilon)$, independente de x. Logo, $\|f - F_n\|_\infty = \sup\{\|f(x) - F_n(x)\|,\; x \in \mathbb{R}^m\} \leq (2 + \mathcal{K})\epsilon$ para $n > N(\epsilon)$. Como isso vale para $\epsilon > 0$ arbitrário a demonstração está completa. ■

37.3 Aproximação de Funções por Polinômios

37.3.1 O Teorema de Weierstrass

Um dos teoremas fundamentais da Análise é o chamado Teorema de Weierstrass[8] que afirma que toda função contínua definida em um intervalo fechado e limitado $[a,\, b]$ da reta real pode ser *uniformemente* aproximada nesse intervalo por polinômios, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar um polinômio p_ϵ tal que $|p_\epsilon(x) - f(x)| \leq \epsilon$ para todo $x \in [a,\, b]$. Neste texto, fazemos uso desse importante teorema em diversas ocasiões. Para futura referência enunciamos o teorema da seguinte forma:

Teorema 37.3 (Teorema de Weierstrass) *Seja f uma função real ou complexa, contínua em um intervalo fechado e limitado $[a,\, b] \subset \mathbb{R}$. Então, f pode ser aproximada uniformemente por polinômios nesse intervalo, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ existe um polinômio p_ϵ tal que $\|p_\epsilon - f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [a,\, b]} |p_\epsilon(x) - f(x)| \leq \epsilon$.* □

[8] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897). O Teorema de Weierstrass data de 1885. A referência original pode ser encontrada em [109].

Há inúmeras demonstrações do Teorema 37.3 na literatura. No Apêndice 37.A, página 2001, apresentamos uma prova usando os chamados *aproximantes de Bernstein*, dados, para uma função contínua f, definida no intervalo $[0,\ 1]$, pelos polinômios de grau n

$$\begin{aligned} b_f^{[n]}(x) &:= \sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)\binom{n}{p} x^p(1-x)^{n-p} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{p=0}^{k}(-1)^{k-p} f\left(\frac{p}{n}\right)\binom{n}{p}\binom{n-p}{n-k}\right] x^k\ . \end{aligned} \tag{37.22}$$

O estudante pode interessar-se em saber que os aproximantes de Bernstein para funções contínuas e os polinômios de Bernstein (que definiremos no Apêndice 37.A, página 2001) estão intimamente ligados às *curvas de Bézier*[9] e às *splines de Bézier*, de ampla aplicação atual em Computação Gráfica (as fontes que produziram as letras que o caro leitor lê neste mesmo momento foram geradas com tais curvas).

No Apêndice 37.B, página 2005, apresentamos outra demonstração instrutiva do Teorema 37.3 e que segue as ideias originais de Weierstrass. Também muito interessante é a demonstração encontrada em [181], talvez a mais elementar, e que aparentemente é devida a Lebesgue[10]. Vide também [548]. Na referência [291] diversas demonstrações do Teorema 37.3 podem ser encontradas.

Como discutiremos na Proposição 37.8, página 1974, o Teorema de Weierstrass é equivalente a um outro Teorema importante, o Teorema de Fejér (Teorema 37.9, página 1972), o qual é fundamental para a Teoria das Séries de Fourier e afirma que funções contínuas e periódicas podem ser aproximadas uniformemente por polinômios trigonométricos.

Muito importante também é o fato de o Teorema 37.3 poder ser generalizado ainda mais, a saber, de intervalos compactos da reta como $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$ para subconjuntos compactos da reta (como os conjuntos de Cantor, discutidos na Seção 29.3, página 1483). Esse é o conteúdo do Teorema 37.18, página 1992 o qual é consequência do importante Teorema de Stone-Weierstrass, Teorema 37.16, página 1989, que também generaliza fortemente o Teorema 37.3. A Seção 37.5, página 1988, é dedicada ao Teorema de Stone-Weierstrass e suas algumas de suas consequências.

O Teorema 37.3 também é válido para funções contínuas de várias variáveis. Vide Teorema 37.5, página 1955.

No que segue, iremos provar uma forma mais forte do Teorema 37.3, a saber:

Teorema 37.4 (Teorema de Weierstrass) *Seja f uma função real ou complexa, contínua em um intervalo fechado $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$ e tal que suas k primeiras derivadas existam e sejam contínuas nesse intervalo. Então, f pode ser aproximada uniformemente por polinômios nesse intervalo e suas k primeiras derivadas podem ser aproximadas uniformemente pelas derivadas desses polinômios, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ existe um polinômio p_ϵ tal que*

$$\left\| p_\epsilon^{(l)} - f^{(l)} \right\|_\infty = \sup_{x\in[a,\,b]} |p_\epsilon^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| \le \epsilon$$

para todo $0 \le l \le k$. □

Como o leitor pode perceber essa generalização do Teorema 37.3 afirma que não apenas é possível aproximar uniformemente funções contínuas em intervalos compactos por polinômios mas, no caso de a função ser k vezes diferenciável, é possível encontrar aproximantes polinomiais cujas k primeiras derivadas também aproximam uniformemente as respectivas derivadas da função a ser aproximada.

Adiante, apresentaremos uma prova do teorema mais geral, Teorema 37.4. Seguiremos muito proximamente a demonstração apresentada em [109], demonstração essa aparentemente devida a Landau[11] mas, para a facilidade do estudante, acrescentaremos alguns detalhes[12].

Antes de iniciarmos a prova do Teorema 37.4 precisamos fazer um comentário sobre um fato que usaremos a respeito de extensões contínuas de funções.

[9] Pierre Étienne Bézier (1910–1999).
[10] Henri Léon Lebesgue (1875–1941).
[11] Edmund Georg Hermann Landau (1877–1938).
[12] Nossa prova é também ligeiramente mais precisa que a de [109], pois lá o parâmetro δ (vide abaixo) é tomado na forma $0 < \delta < 1$ mas, para evitar problemas em certos limites de integração, o correto é tomá-lo como faremos adiante.

• **Certas extensões contínuas de funções**

Seja f uma função contínua definida em um intervalo fechado limitado $[a,\ b]$ assumindo valores reais ou complexos e que tenha suas k primeiras derivadas igualmente contínuas nesse intervalo. Seja um intervalo fechado limitado $[\alpha,\ \beta]$ que contém $[a,\ b]$ no seu interior, ou seja, com $-\infty < \alpha < a < b < \beta < \infty$. Então, existe pelo menos uma função $\tilde{f}$ definida em $[\alpha,\ \beta]$ com as seguintes propriedades:

1. $\tilde{f}$ coincide com f no intervalo $[a,\ b]$.
2. $\tilde{f}$ e suas k primeiras derivadas são contínuas em $[\alpha,\ \beta]$.
3. $\tilde{f}$ e suas k primeiras derivadas anulam-se nos extremos α e β do intervalo $[\alpha,\ \beta]$.

A função $\tilde{f}$ é, assim, uma extensão de contínua de f ao intervalo $[\alpha,\ \beta]$ cujas k primeiras derivadas são extensões contínuas das respectivas k primeiras derivadas de f ao intervalo $[\alpha,\ \beta]$. Além disso, $\tilde{f}$ e suas k primeiras derivadas anulam-se nos extremos do intervalo $[\alpha,\ \beta]$ em que estão definidas.

Há infinitas funções $\tilde{f}$ com tais propriedades. Uma maneira de construir uma tal função é escolhê-la de modo que seja idêntica a f no intervalo $[a,\ b]$, seja infinitamente diferenciável nos intervalos $[\alpha,\ a)$ e $(b,\ \beta]$ mas de modo que $\lim_{x\to a}\tilde{f}^{(l)}(x) = f^{(l)}(a)$ no intervalo $[\alpha,\ a)$ e $\lim_{x\to b}\tilde{f}^{(l)}(x) = f^{(l)}(b)$ no intervalo $(b,\ \beta]$, para todo $0 \leq l \leq k$.

Exemplo 37.1 Uma possível escolha de uma função $\tilde{f}$ com as propriedades acima é a seguinte:

$$\tilde{f}(x) \;=\; \begin{cases} f(x)\ , & a \leq x \leq b \\[2ex] \left(\displaystyle\sum_{l=0}^{k}\frac{f^{(k)}(a)}{l!}(x-a)^l\right)F_{\alpha,\,a}(x)\ , & \alpha \leq x < a \\[2ex] \left(\displaystyle\sum_{l=0}^{k}\frac{f^{(k)}(b)}{l!}(x-b)^l\right)(1-F_{b,\,\beta}(x))\ , & b < x \leq \beta \end{cases}\ ,$$

onde, para $u < v$, a função $F_{u,\,v} : [u,\ v] \to [0,\ 1]$ é definida por

$$F_{u,\,v}(x) \;:=\; \frac{1}{N_{u,\,v}}\int_u^x \exp\left(-\frac{1}{(y-u)^2}-\frac{1}{(y-v)^2}\right)dy\ ,\qquad u \leq x \leq v\ ,$$

$N_{u,\,v}$ sendo a constante de normalização

$$N_{u,\,v} \;:=\; \int_u^v \exp\left(-\frac{1}{(y-u)^2}-\frac{1}{(y-v)^2}\right)dy\ .$$

Essa função $F_{u,\,v}$ é contínua, estritamente crescente, infinitamente diferenciável no intervalo $u < x < v$ e satisfaz

$$\lim_{x\to u}F_{u,\,v}(x) \;=\; 0,\qquad \lim_{x\to v}F_{u,\,v}(x) \;=\; 1,\qquad \text{e}\qquad \lim_{x\to u}F^{(l)}_{u,\,v}(x) \;=\; \lim_{x\to v}F^{(l)}_{u,\,v}(x) \;=\; 0,\quad \forall\, l \geq 1\ .$$

Com isso, é fácil ver que $\tilde{f}$ satisfaz as propriedades requeridas: é contínua e k-vezes diferenciável em $[\alpha,\ \beta]$ e satisfaz

$$\begin{gathered} \tilde{f}(\alpha) \;=\; 0 \;=\; \tilde{f}(\beta)\ ,\qquad \tilde{f}^{(l)}(\alpha) \;=\; 0 \;=\; \tilde{f}^{(l)}(\beta)\ ,\quad \forall\, l \geq 1\ , \\[2ex] \tilde{f}^{(l)}(a) \;=\; f^{(l)}(a)\qquad \text{e}\qquad \tilde{f}^{(l)}(b) \;=\; f^{(l)}(b)\ ,\qquad \forall\, 0 \leq l \leq k\ , \end{gathered} \tag{37.23}$$

além de, obviamente, ser uma extensão de f. ♦

E. 37.3 *Exercício*. Verifique as afirmações feitas acima. ✠

Para o que segue, a forma específica de $\tilde{f}$, como aquela do exemplo acima, não será relevante, apenas suas propriedades.

• **Prova do Teorema de Weierstrass, Teorema 37.4**

Daqui por diante, consideraremos sem perda de generalidade que $[a,\ b] \subset (0,\ 1)$, ou seja, tomamos $0 < a \leq b < 1$, e consideraremos $\tilde{f}$ uma extensão de f a todo o intervalo $[0,\ 1]$ com as propriedades acima (adotando $\alpha = 0$ e $\beta = 1$). Com uma tal função podemos definir os polinômios

$$p_n(x) \ := \ \frac{1}{2D_n(0)} \int_0^1 \tilde{f}(u) \left[1 - (u-x)^2\right]^n \, du \tag{37.24}$$

com $x \in [a,\ b]$, onde, para $\gamma \in [0,\ 1]$, definimos

$$D_n(\gamma) \ := \ \int_\gamma^1 \left[1 - v^2\right]^n \, dv \ .$$

A expressão $D_n(0)$ pode ser calculada explicitamente repetindo-se o procedimento de integração por partes (vide (16.69), página 885) e tem-se

$$D_n(0) \ = \ \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \ , \tag{37.25}$$

mas não faremos uso dessa expressão aqui. Uma outra prova de (37.25), por uma mudança de variáveis e com uso do binômio de Newton, pode ser encontrada em (37.79), página 1972.

A sequência de funções $K_n(x) = \dfrac{\left[1 - x^2\right]^n}{2D_n(0)}$, definidas no intervalo $[-1,\ 1]$, não forma exatamente uma sequência delta de Dirac como na Definição 37.1, página 1944, mas a demonstração que segue é muito próxima à do Teorema 37.1, página 1947.

Os p_n são claramente polinômios de grau menor ou igual a $2n$. Como veremos, esses polinômios aproximam f com as propriedades requeridas. Para mostrar isso, fixemos $x \in [a,\ b]$ e comecemos observando que

$$p_n(x) \ = \ \frac{1}{2D_n(0)} \int_0^1 \tilde{f}(u) \left[1 - (u-x)^2\right]^n \, du \ \overset{v=u-x}{=} \ \frac{1}{2D_n(0)} \int_{-x}^{1-x} \tilde{f}(v+x) \left[1 - v^2\right]^n \, dv \ = \ A_1 + A_2 + A_3 \ ,$$

com

$$\begin{aligned} A_1 \ &:= \ \frac{1}{2D_n(0)} \int_{-x}^{-\delta} \tilde{f}(v+x) \left[1 - v^2\right]^n dv, \quad A_2 \ := \ \frac{1}{2D_n(0)} \int_{-\delta}^{\delta} \tilde{f}(v+x) \left[1 - v^2\right]^n dv \ , \\ A_3 \ &:= \ \frac{1}{2D_n(0)} \int_{\delta}^{1-x} \tilde{f}(v+x) \left[1 - v^2\right]^n dv \ , \end{aligned} \tag{37.26}$$

onde δ satisfaz $0 < \delta < \min\{a,\ 1-b\}$ e será convenientemente fixado mais adiante[13]. Vamos tratar de estimar cada uma das três expressões A_j acima. Como $\tilde{f}$ é contínua no intervalo $[0,\ 1]$, seu módulo assume um valor máximo, que denotaremos por F, ou seja, em símbolos, $F := \sup\limits_{x \in [0,\ 1]} \left|\tilde{f}(x)\right|$. Com isso podemos escrever que

$$\begin{aligned} |A_3| \ \leq \ \frac{1}{2D_n(0)} \int_\delta^{1-x} |\tilde{f}(v+x)| \left[1 - v^2\right]^n dv \ \leq \ \frac{F}{2D_n(0)} \int_\delta^{1-x} \left[1 - v^2\right]^n dv \\ \leq \frac{F}{2D_n(0)} \int_\delta^1 \left[1 - v^2\right]^n dv \ = \ F \frac{D_n(\delta)}{2D_n(0)} \ , \end{aligned} \tag{37.27}$$

onde, na última desigualdade, usamos que $1 - x \leq 1$. De forma totalmente análoga, prova-se que vale também

$$|A_1| \ \leq \ F \frac{D_n(\delta)}{2D_n(0)} \ . \tag{37.28}$$

[13] Como $0 < \delta < \min\{a,\ 1-b\}$ e $x \in [a,\ b]$, segue que $-\delta > -x$ e $\delta < 1 - x$. Assim, os três intervalos de integração em (37.26) são crescentes.

O termo A_2 pode ser manipulado da seguinte forma. Usando a identidade

$$1 \;=\; \frac{D_n(0)}{D_n(0)} \;=\; \frac{\int_0^\delta \left[1-v^2\right]^n dv + D_n(\delta)}{D_n(0)} \;=\; \frac{\int_{-\delta}^\delta \left[1-v^2\right]^n dv + 2D_n(\delta)}{2D_n(0)} \;,$$

escrevemos

$$\begin{aligned} A_2 \;&:=\; \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x)\times 1 + \frac{1}{2D_n(0)}\int_{-\delta}^{\delta} \tilde{f}(v+x)\left[1-v^2\right]^n dv \\ &=\; \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x)\frac{D_n(\delta)}{D_n(0)} + \frac{1}{2D_n(0)}\int_{-\delta}^{\delta}\left(\tilde{f}(v+x)-\tilde{f}(x)\right)\left[1-v^2\right]^n dv \;. \end{aligned}$$

De (37.27), (37.28) e (37.29) extraímos, assim, que para $x\in[a,\,b]$,

$$|p_n(x)-\tilde{f}(x)| \;\le\; \frac{FD_n(\delta)}{D_n(0)} + \left|\tilde{f}(x)\right|\frac{D_n(\delta)}{D_n(0)} + \frac{1}{2D_n(0)}\int_{-\delta}^{\delta}\left|\tilde{f}(v+x)-\tilde{f}(x)\right|\left[1-v^2\right]^n dv \;.$$

Como $x\in[a,\,b]$, podemos substituir $\tilde{f}$ por f no lado esquerdo. Fora isso, $\left|\tilde{f}(x)\right|\le F$ e, assim, chegamos a

$$|p_n(x)-f(x)| \;\le\; 2F\frac{D_n(\delta)}{D_n(0)} + \frac{1}{2D_n(0)}\int_{-\delta}^{\delta}\left|\tilde{f}(v+x)-\tilde{f}(x)\right|\left[1-v^2\right]^n dv \;.$$

Observemos neste ponto que uma função que seja contínua em um intervalo compacto, como $\tilde{f}$, é uniformemente contínua nesse intervalo (Teorema 32.12, página 1625). Assim, para cada $\epsilon>0$ dado podemos encontrar um $\delta>0$, pequeno o suficiente e <u>independente de x</u> de forma que $\left|\tilde{f}(v+x)-\tilde{f}(x)\right|<\epsilon$ desde que $|v|<\delta$. Temos, portanto,

$$\begin{aligned} |p_n(x)-f(x)| \;&\le\; 2F\frac{D_n(\delta)}{D_n(0)} + \frac{\epsilon}{2D_n(0)}\int_{-\delta}^{\delta}\left[1-v^2\right]^n dv \\ &=\; 2F\frac{D_n(\delta)}{D_n(0)} + \frac{\epsilon}{D_n(0)}\int_{0}^{\delta}\left[1-v^2\right]^n dv \\ &=\; 2F\frac{D_n(\delta)}{D_n(0)} + \frac{\epsilon}{D_n(0)}\left(D_n(0)-D_n(\delta)\right) \\ &=\; (2F-\epsilon)\frac{D_n(\delta)}{D_n(0)} + \epsilon \\ &\le\; 2F\frac{D_n(\delta)}{D_n(0)} + \epsilon \;. \end{aligned}$$

Para fechar a demonstração dessa parte, precisamos agora mostrar que para qualquer δ fixo com $0<\delta\le 1$ a razão $D_n(\delta)/D_n(0)$ pode ser feita tão pequena quanto se queira, fazendo-se n crescer. Como em [109], notamos que para $v\in[0,\,1]$ vale $v^2<v$. Assim,

$$D_n(0) \;=\; \int_0^1 (1-v^2)^n\,dv \;\ge\; \int_0^1 (1-v)^n\,dv \;=\; \frac{1}{n+1}\;,$$

calculando explicitamente a última integral. Paralelamente,

$$D_n(0) \;=\; \int_\delta^1 (1-v^2)^n\,dv \;\le\; (1-\delta^2)^n\int_\delta^1 dv \;=\; (1-\delta^2)^n(1-\delta) \;\le\; (1-\delta^2)^n$$

e, portanto,

$$\frac{D_n(\delta)}{D_n(0)} \;\le\; (n+1)(1-\delta^2)^n \;. \tag{37.29}$$

Como $0 < 1 - \delta^2 < 1$, o limite para $n \to \infty$ do lado direito, acima, é zero. Assim, concluímos que para n grande o suficiente, independente de x, tem-se $|p_n(x) - f(x)| \leq 2\epsilon$. Isso estabelece que a sequência de polinômios p_n converge uniformemente a f no intervalo $[a,\ b]$. Com isso provou-se o Teorema 37.3.

Vamos provar agora que para cada l com $1 \leq l \leq k$ as derivadas $p_n^{(l)}$ também convergem uniformemente às derivadas $f^{(l)}$ quando $n \to \infty$. Notemos que, pela definição de p_n,

$$p_n^{(l)}(x) \ = \ \frac{1}{2D_n(0)} \int_0^1 \tilde{f}(u) \frac{\partial^l}{\partial x^l} \left[1 - (u-x)^2\right]^n \, du \ .$$

Agora, devido ao fato de a função $\left[1 - (u-x)^2\right]^n$ ser simétrica pela troca $u \leftrightarrow x$, vale

$$\frac{\partial^l}{\partial x^l} \left[1 - (u-x)^2\right]^n \ = \ (-1)^l \frac{\partial^l}{\partial u^l} \left[1 - (u-x)^2\right]^n \ .$$

Assim,

$$\begin{aligned} p_n^{(l)}(x) \quad &= \quad \frac{(-1)^l}{2D_n(0)} \int_0^1 \tilde{f}(u) \frac{\partial^l}{\partial u^l} \left[1 - (u-x)^2\right]^n du \\ &\overset{\text{int. por partes}}{=} \quad \underbrace{(-1)^l \tilde{f}(u) \frac{\partial^{l-1}}{\partial u^{l-1}} \left[1 - (u-x)^2\right]^n \Big|_{u=0}^{u=1}}_{=\,0\,,\ \text{pois } \tilde{f}(0)=\tilde{f}(1)=0} + \frac{(-1)^{l-1}}{2D_n(0)} \int_0^1 \tilde{f}^{(1)}(u) \frac{\partial^{l-1}}{\partial u^{l-1}} \left[1 - (u-x)^2\right]^n du \ . \end{aligned}$$

Repetindo-se l vezes o processo de integração por partes e usando o fato que $\tilde{f}$ e suas derivadas anulam-se em 0 e em 1, por construção, obtemos,

$$p_n^{(l)}(x) \ = \ \frac{1}{2D_n(0)} \int_0^1 \tilde{f}^{(l)}(u) \left[1 - (u-x)^2\right]^n du \ .$$

Já vimos, porém, que essa igualdade implica que $p_n^{(l)}$ converge uniformemente a $\tilde{f}^{(l)}$ no intervalo $[a,\ b]$ para $n \to \infty$. Isso completa a prova do Teorema de Weierstrass, Teorema 37.4. ■

• **O Teorema de Weierstrass em várias variáveis**

O Teorema 37.4 pode ser estendido para funções contínuas definidas em retângulos compactos em $\mathbb{R}^m$ (em verdade, em qualquer conjunto compacto em $\mathbb{R}^m$). Faremos uso desse fato mais adiante. A demonstração é muito semelhante à do Teorema 37.4 mas há algumas passagens delicadas e, por isso, reproduzimos a demonstração com certo detalhe.

Teorema 37.5 (Teorema de Weierstrass) *Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ uma função real ou complexa, contínua em um retângulo fechado $\mathcal{R} := [a_1,\ b_1] \times \cdots \times [a_m,\ b_m] \subset \mathbb{R}^m$ e tal que suas K primeiras derivadas parciais existam e sejam contínuas nesse retângulo. Então, f pode ser aproximada uniformemente por polinômios nesse retângulo e suas K primeiras derivadas parciais podem ser aproximadas uniformemente pelas derivadas desses polinômios, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ existe um polinômio p_ϵ tal que para todo n-multi-índice α com $0 \leq |\alpha| \leq K$ vale*

$$\|D^\alpha p_\epsilon - D^\alpha f\|_\infty \ = \ \sup_{x \in \mathcal{R}} |D^\alpha p_\epsilon(x) - D^\alpha f(x)| \ \leq \ \epsilon \ .$$

□

Prova. Daqui por diante, consideraremos sem perda de generalidade que $\mathcal{R} := [a_1,\ b_1] \times \cdots \times [a_m,\ b_m] \subset (0,\ 1)^m$, ou seja, tomamos $0 < a_k \leq b_k < 1$ para cada k, e consideraremos $\tilde{f}$ uma extensão de f a todo o retângulo $[0,\ 1]^m$ com a propriedade de anular-se junto com suas K primeiras derivadas parciais na fronteira de $[0,\ 1]^m$.

Generalizando (37.24), definimos os polinômios em m variáveis

$$\begin{aligned} p_n(x_1,\ \ldots,\ x_m) &:= \frac{\displaystyle\int_0^1 \cdots \int_0^1 \tilde{f}(u_1,\ \ldots,\ u_m) \prod_{k=1}^m \left[1-(u_k-x_k)^2\right]^n\ du_1 \cdots du_m}{2^m D_n(0)^m} \\ &= \frac{\displaystyle\int_{-x_1}^{1-x_1} \cdots \int_{-x_m}^{1-x_m} \tilde{f}\big(v_1+x_1,\ \ldots,\ v_m+x_m\big) \prod_{k=1}^m \left[1-v_k^2\right]^n\ dv_1 \cdots dv_m}{2^m D_n(0)^m} \end{aligned} \tag{37.30}$$

com D_n definido como na prova do Teorema 37.4, com $(x_1,\ \ldots,\ x_m) \in \mathcal{R}$, onde na segunda linha fizemos a óbvia mudança de variáveis $v_k = u_k - x_k$ para todo k.

Tomando um $\delta > 0$ pequeno o suficiente ($\delta < \min\Big\{a_1,\ \ldots,\ a_m, 1-b_1,\ \ldots,\ 1-b_m\Big\}$), a ser precisado adiante, podemos escrever a última expressão em (37.30) na forma $A_1 + A_2$ onde

$$A_2 = \frac{\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} \cdots \int_{-\delta}^{\delta} \tilde{f}\big(v_1+x_1,\ \ldots,\ v_m+x_m\big) \left[1-v_1^2\right]^n \cdots \left[1-v_m^2\right]^n\ dv_1 \cdots dv_m}{2^m D_n(0)^m}$$

e A_2 é a mesma integral, mas no conjunto complementar $R = \Big([-x_1,\ 1-x_1] \times [-x_m,\ 1-x_m]\Big) \setminus [-\delta,\ \delta]^m$. A integral A_1 pode ser majorada por

$$A_1 \ \le\ F\ \frac{\displaystyle\int_R \left[1-v_1^2\right]^n \cdots \left[1-v_m^2\right]^n\ dv_1 \cdots dv_m}{2^m D_n(0)^m}\ ,$$

onde $F := \sup\limits_{x\in[0,\ 1]^m} |\tilde{f}(x)|$. A integral em R pode ser quebrada como soma de produtos de integrais unidimensionais, algumas da forma

$$\frac{\int_{-x_k}^{1-x_k} \left[1-v_k^2\right]^n\ dv_k}{2D_n(0)} = \frac{\int_0^{x_k} \left[1-v_k^2\right]^n\ dv_k + \int_0^{1-x_k} \left[1-v_k^2\right]^n\ dv_k}{2D_n(0)} \le \frac{2\int_0^1 \left[1-v_k^2\right]^n\ dv_k}{2D_n(0)} = 1$$

e sempre ocorrerá ao um fator da forma $\frac{\int_\delta^{1-x_k}\left[1-v_k^2\right]^n dv_k}{2D_n(0)}$ ou $\frac{\int_{-\delta}^{-x_k}\left[1-v_k^2\right]^n dv_k}{2D_n(0)}$ as quais podem ser estimadas por $\frac{D_n(\delta)}{2D_n(0)}$, como provamos na demonstração do Teorema 37.4, acima (vide (37.27)). Assim,

$$A_1 \ \le\ KF\frac{D_n(\delta)}{2D_n(0)} \overset{(37.29)}{\le} KF(n+1)\big(1-\delta^2\big)^n$$

sendo K uma constante dependente apenas da dimensão m.

O termo A_2 pode ser manipulado analogamente à demonstração do Teorema 37.4.

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} \cdots \int_{-\delta}^{\delta} \tilde{f}\big(v_1+x_1,\ \ldots,\ v_m+x_m\big) \prod_{k=1}^m \left[1-v_k^2\right]^n\ dv_1 \cdots dv_m}{2^m D_n(0)^m} \\ &= \tilde{f}\big(x_1,\ \ldots,\ x_m\big)\left(1-\frac{D_n(\delta)}{D_n(0)}\right)^m \\ &\quad + \frac{\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} \cdots \int_{-\delta}^{\delta} \Big(\tilde{f}\big(v_1+x_1,\ \ldots,\ v_m+x_m\big) - \tilde{f}\big(x_1,\ \ldots,\ x_m\big)\Big) \prod_{k=1}^m \left[1-v_k^2\right]^n\ dv_1 \cdots dv_m}{2^m D_n(0)^m}\ . \end{aligned} \tag{37.31}$$

Por (37.29), sabemos que $\frac{D_n(\delta)}{D_n(0)} \to 0$ para $n \to \infty$ e, portanto, para qualquer $\epsilon > 0$ podemos achar n grande o suficiente para que tenhamos

$$\left| \tilde{f}(x_1, \ldots, x_m) - \tilde{f}(x_1, \ldots, x_m) \left(1 - \frac{D_n(\delta)}{D_n(0)}\right)^m \right| \leq \epsilon \, .$$

Uma função que seja contínua em um conjunto compacto, como $\tilde{f}$, é uniformemente contínua nesse intervalo (Teorema 32.12, página 1625). Assim, para cada $\epsilon > 0$ dado podemos encontrar um $\delta > 0$, pequeno o suficiente e independente de x de forma que $\left|\tilde{f}(v_1 + x_1, \ldots, v_m + x_m) - \tilde{f}(x_1, \ldots, x_m)\right| < \epsilon$ desde que $|v_k| < \delta$ para todo k. Assim, a integral do lado direito de (37.31) pode ser majorada por $\epsilon \left(1 - \frac{D_n(\delta)}{D_n(0)}\right)^m \leq \epsilon$.

Concluímos disso que

$$\left| p_n(x_1, \ldots, x_m) - \tilde{f}(x_1, \ldots, x_m) \right| \leq KF(n+1)\left(1 - \delta^2\right)^n + 2\epsilon \, .$$

Como $|1 - \delta| < 1$, isso completa a demonstração de que f é uniformemente aproximável por polinômios.

Vamos provar agora que para cada n-multi-índice α, com $1 \leq |\alpha| \leq K$, as derivadas $D^\alpha p_n$ também convergem uniformemente às derivadas $D^\alpha f$ quando $n \to \infty$. Notemos que, pela definição de p_n,

$$D^\alpha p_n(x_1, \ldots, x_m) = \frac{\displaystyle\int_0^1 \cdots \int_0^1 \tilde{f}(u_1, \ldots, u_m) D_x^\alpha \left(\prod_{k=1}^n \left[1 - (u_k - x_k)^2\right]^n \right) du_1 \cdots du_m}{2^m D_n(0)^m}$$

Agora, devido ao fato de a função $\left[1 - (u - x)^2\right]^n$ ser simétrica pela troca $u \leftrightarrow x$, vale

$$D_x^\alpha \prod_{k=1}^n \left[1 - (u_k - x_k)^2\right]^n = (-1)^{|\alpha|} D_u^\alpha \prod_{k=1}^n \left[1 - (u_k - x_k)^2\right]^n \, .$$

Assim,

$$D^\alpha p_n(x_1, \ldots, x_m) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{2^m D_n(0)^m} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \tilde{f}(u_1, \ldots, u_m) D_u^\alpha \prod_{k=1}^n \left[1 - (u_k - x_k)^2\right]^n du_1 \cdots du_m \, .$$

Repetindo-se $|\alpha|$ vezes o processo de integração por partes e usando o fato que $\tilde{f}$ e suas derivadas anulam-se nas fronteiras da integral múltipla acima, obtemos,

$$D^\alpha p_n(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{2^m D_n(0)^m} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(D_u^\alpha \tilde{f}\right)(u_1, \ldots, u_m) \prod_{k=1}^n \left[1 - (u_k - x_k)^2\right]^n du_1 \cdots du_m \, .$$

Já vimos, porém, que essa igualdade implica que $D^\alpha p_n$ converge uniformemente a $D^\alpha p_n \tilde{f}$ no intervalo $[a, b]$ para $n \to \infty$. Isso completa a prova do Teorema de Weierstrass, Teorema 37.5. ■

37.3.2 O Teorema de Taylor

Nesta seção apresentaremos o Teorema de Taylor, um dos teoremas básicos do Cálculo Diferencial, o qual enuncia condições que permitem aproximar certas funções infinitamente diferenciáveis por séries de potências absoluta e uniformemente convergentes em intervalos limitados da reta real. Se a função que estamos interessados em aproximar não for infinitamente diferenciável ou não satisfizer as condições enunciadas abaixo, tem-se como alternativa o Teorema de Weierstrass, que garante a possibilidade de se obter uma aproximação uniforme por polinômios. O Teorema de Weierstrass é estudado na Seção 37.3.1, página 1950. A demonstração do Teorema de Taylor segue de um simples raciocínio iterativo que ora iniciamos.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função K-vezes diferenciável, com $K > 0$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo podemos escrever

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(s_1) \, ds_1 \, , \tag{37.32}$$

para todos x e $x_0 \in \mathbb{R}$. Para $K > 1$ vale também para $f'(s_1)$ a mesma relação $f'(s_1) = f'(x_0) + \int_{x_0}^{s_1} f''(s_2)\, ds_2$. Daí, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{s_1} f''(s_2)\, ds_2 \right) ds_1 \\ &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x - t) f''(t)\, dt \ , \end{aligned} \tag{37.33}$$

pois, invertendo a ordem das integrais,

$$\int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{s_1} f''(s_2)\, ds_2 \right) ds_1 \ = \ \int_{x_0}^{x} f''(s_2) \left(\int_{s_2}^{x} ds_1 \right) ds_2 \ = \ \int_{x_0}^{x} (x - s_2) f''(s_2)\, ds_2 \ .$$

Usando indução, esse resultado pode ser generalizado, conduzindo ao seguinte teorema:

Teorema 37.6 (Teorema de Taylor) *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função K vezes diferenciável ($K \geq 1$) em um domínio conexo $\Omega \subset \mathbb{R}$, então para todo $N < K$ vale*

$$f(x) \ = \ \sum_{a=0}^{N} \frac{(x - x_0)^a}{a!} f^{(a)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\, dt \ , \tag{37.34}$$

para todos x e $x_0 \in \Omega$. Essa expressão pode ser reescrita na forma

$$f(x) \ = \ \sum_{a=0}^{N} \frac{(x - x_0)^a}{a!} f^{(a)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1 - s)^N f^{(N+1)}\big(x_0 + s(x - x_0)\big)\, ds \ . \tag{37.35}$$

As relações (37.34) e (37.35) são denominadas identidades de Taylor. *Os polinômios*

$$T_N[f](x,\ x_0) \ = \ \sum_{a=0}^{N} \frac{(x - x_0)^a}{a!} f^{(a)}(x_0)$$

são denominados polinômios de Taylor *de ordem N centrados em x_0 da função f e a expressão*

$$R_N[f](x,\ x_0) \ = \ \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\, dt \ = \ \frac{(x - x_0)^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1 - s)^N f^{(N+1)}\big(x_0 + s(x - x_0)\big)\, ds$$

é denominada resto da expansão de Taylor *de f, ou* fórmula do resto da expansão de Taylor *de f.*

Suponhamos agora que f seja infinitamente diferenciável e que exista um intervalo compacto $I(x_0,\ \beta) = [x_0 - \beta\ , x_0 + \beta]$, $\beta \geq 0$, tal que existem constantes $M \geq 0$, $C > 0$ e γ com $0 \leq \gamma < 1$, tais que para todo $y \in I(x_0,\ \beta)$ e todo $k \geq 0$ valha

$$\left| f^{(k)}(y) \right| \ \leq \ M\, C^k \big(k!\big)^{\gamma} \ . \tag{37.36}$$

Então, para todo $x \in I(x_0,\ \beta)$ tem-se

$$f(x) \ = \ \sum_{a=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^a}{a!} f^{(a)}(x_0) \ , \tag{37.37}$$

sendo que a série do lado direito converge absoluta e uniformemente em $I(x_0,\ \beta)$. A série (37.37) é denominada série de Taylor real *de f centrada em x_0.* □

As origens do Teorema 37.6 remontam aos trabalhos de Taylor[14] nos primórdios do Cálculo Diferencial e Integral. Taylor descobriu a série que leva seu nome entre 1712 e 1715, mas a importância desse resultado só foi reconhecida por Lagrange[15] em 1772. A expressão "série de Taylor" para designar a expansão (37.37) data de 1786, tendo sido cunhada

[14] Brook Taylor (1685–1731).
[15] Joseph-Louis Lagrange (1736–1813).

por Lhuilier[16]. Séries de Taylor para funções específicas (como a função arco-tangente) eram conhecidas antes de Taylor. Sua contribuição foi a de ter encontrado uma expansão válida para uma grande classe de funções. Taylor, um discípulo de Newton[17], inventou também o método de integração por partes, entre outras contribuições seminais.

Prova do Teorema 37.6. Já provamos essa afirmação para $K = 1$ (relação (37.32)) e para o caso $K > 1$ já tratamos o caso $N = 0$ e $N = 1$ (relações (37.33) e (37.32)). Para efetuarmos a prova por indução, suponhamos que a relação

$$f(x) \;=\; \sum_{a=0}^{M} \frac{(x-x_0)^a}{a!} f^{(a)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s_1)^M}{M!} f^{(M+1)}(s_1)\, ds_1$$

valha para todo M com $M < K-1$. Como $f^{(M+1)}(s_1) = f^{(M+1)}(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{s_1} f^{(M+2)}(s_2)\, ds_2$, obtemos

$$\begin{aligned}
f(x) \;&=\; \sum_{a=0}^{M} \frac{(x-x_0)^a}{a!} f^{(a)}(x_0) + \left(\int_{x_0}^{x} \frac{(x-s_1)^M}{M!}\, ds_1\right) f^{(M+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s_1)^M}{M!} \left(\int_{x_0}^{s_1} f^{(M+2)}(s_2)\, ds_2\right)\, ds_1 \\
&=\; \sum_{a=0}^{M} \frac{(x-x_0)^a}{a!} f^{(a)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{M+1}}{(M+1)!} f^{(M+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s_1)^M}{M!} \left(\int_{x_0}^{s_1} f^{(M+2)}(s_2)\, ds_2\right)\, ds_1 \\
&=\; \sum_{a=0}^{M+1} \frac{(x-x_0)^a}{a!} f^{(a)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s_1)^M}{M!} \left(\int_{x_0}^{s_1} f^{(M+2)}(s_2)\, ds_2\right)\, ds_1 \\
&=\; \sum_{a=0}^{M+1} \frac{(x-x_0)^a}{a!} f^{(a)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \left(\int_{s_2}^{x} \frac{(x-s_1)^M}{M!}\, ds_1\right) f^{(M+2)}(s_2)\, ds_2 \\
&=\; \sum_{a=0}^{M+1} \frac{(x-x_0)^a}{a!} f^{(a)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s_2)^{M+1}}{(M+1)!} f^{(M+2)}(s_2)\, ds_2\ ,
\end{aligned}$$

sendo que na passagem da terceira para a quarta linha trocamos a ordem das integrações. Isso prova, por indução, a validade de (37.34) para todo $N < K$.

Escrevamos agora $t = x_0 + s(x-x_0)$ na integral de (37.34). Ficamos com $x - t = (x-x_0)(1-s)$, $dt = (x-x_0)ds$ e obtemos,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\, dt \;=\; \frac{(x-x_0)^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1-s)^N f^{(N+1)}\big(x_0 + s(x-x_0)\big)\, ds\ .$$

Isso provou (37.35).

Suponhamos agora que f seja infinitamente diferenciável e que exista um intervalo compacto $I(x_0,\ \beta) = [x_0 - \beta\ , x_0 + \beta]$, $\beta \geq 0$, tal que existem constantes $M \geq 0$, $C > 0$ e γ com $0 \leq \gamma < 1$, tais que para todo $y \in I(x_0,\ \beta)$ e todo $k \geq 0$ valha

$$\left| f^{(k)}(y) \right| \;\leq\; M\, C^k \big(k!\big)^\gamma\ .$$

Teremos,

$$\left| \int_0^1 (1-s)^N f^{(N+1)}\big(x_0 + s(x-x_0)\big)\, ds \right| \;\leq\; M\, C^{N+1} \big((N+1)!\big)^\gamma \int_0^1 (1-s)^N\, ds \;\leq\; M\, \frac{C^{N+1}\big((N+1)!\big)^\gamma}{N+1}\ .$$

Logo, para $x \in I(x_0,\ \beta)$, ou seja, para $|x - x_0| < \beta$, tem-se

$$\left| f(x) - \sum_{a=0}^{N} \frac{(x-x_0)^a}{a!} f^{(a)}(x_0) \right| \;\leq\; M\, \frac{|x-x_0|^{N+1}}{N!} \frac{C^{N+1}\big((N+1)!\big)^\gamma}{(N+1)} \;\leq\; \frac{M\,(\beta C)^{N+1}}{\Big((N+1)!\Big)^{1-\gamma}}\ .$$

[16] Simon Antoine Jean Lhuilier (1750–1840).
[17] Isaac Newton (1643–1727).

Como $1-\gamma>0$, segue que o limite $N\to\infty$ do lado direito da última expressão é zero, provando (37.37). Como o lado direito da última expressão independe de x no intervalo $I(x_0,\ \beta)$, a convergência é uniforme. Que a convergência é absoluta segue também facilmente das mesmas desigualdades acima pois, pelas hipóteses, $\left|\frac{(x-x_0)^a}{a!}f^{(a)}(x_0)\right|\leq M\,\frac{(\beta C)^a}{(a!)^{1-\gamma}}$, que é somável. ■

• **A expansão de Taylor da função exponencial**

A seguinte proposição será usada na discussão sobre a relação entre o Teorema de Weierstrass e o de Fejér (Proposição 37.8, página 1974):

Proposição 37.6 *A bem-conhecida expansão em série de Taylor centrada em $x_0=0$ da função $f(x)=e^{\alpha x}$, com $\alpha\in\mathbb{C}$, dada por $e^{\alpha x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n x^n}{n!}$, converge uniformemente e absolutamente em cada intervalo $[-\beta,\ \beta]$ da reta real, com $\beta\geq 0$.*

Assim, podemos afirmar que em todo intervalo $[-\beta,\ \beta]$ da reta real, com $\beta\geq 0$, a função $e^{\alpha x}$ pode ser aproximada uniformemente por uma sequência de polinômios, a saber, por seus polinômios de Taylor. □

Prova. A função $f(x)=e^{\alpha x}$ com $\alpha\in\mathbb{C}$, constante, é infinitamente diferenciável e sua k-ésima derivada é $\alpha^k e^{\alpha x}$. Como f é contínua, ela é limitada em cada intervalo compacto da reta real. No intervalo $[-\beta,\ \beta]$, $\beta\geq 0$, temos evidentemente $|e^{\alpha x}|\leq e^{\beta|\mathrm{Re}\,(\alpha)|}$. Assim, a condição (37.36) é satisfeita em cada intervalo $[-\beta,\ \beta]$, $\beta\geq 0$, com $M=e^{\beta|\mathrm{Re}\,(\alpha)|}$, $C=|\alpha|$ e $\gamma=0$. A proposição segue, portanto, do Teorema de Taylor, Teorema 37.6, página 1958. ■

• **Alguns casos a se ter em mente**

Para uma melhor compreensão do Teorema de Taylor é importante estudar alguns casos especiais. Considere-se a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x)\ =\ \begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ , & x\neq 0\ ,\\[2ex] 0\ , & x=0\ .\end{cases}$$

É fácil verificar que essa função é contínua e, mais que isso, que é infinitamente diferenciável. De fato, em $x\neq 0$ a n-ésima derivada de f é da forma $\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ vezes um polinômio em $1/x$ (verifique!). Esse polinômio diverge quando $x\to 0$ mas o pré-fator $\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ vai a zero muito mais fortemente. Como consequência, f e todas as suas derivadas anulam-se em $x=0$. Assim, se calcularmos a série de Taylor (37.37) dessa função em $x_0=0$ a mesma seria identicamente nula (!), pois $f^{(n)}(0)=0$ para todo $n\geq 0$. Isso significa que a relação (37.37) não vale para essa função se $x_0=0$, pois f é não-nula, mas a série do lado direito é identicamente nula. O que se passa é que não existe para essa função nenhum intervalo $I(\beta,\ 0)$, ou seja, da forma $[-\beta,\ \beta]$, $\beta>0$, no qual valha a condição (37.36) para todo k e todo $x\in I(\beta,\ 0)$.

Esse exemplo ensina-nos que uma função infinitamente diferenciável pode ter uma série de Taylor centrada em um ponto x_0 e convergente em uma região em torno de x_0, mas essa série não necessariamente converge à função em outros pontos que não x_0. Para que a convergência à função se dê é necessário que sejam válidas condições como (37.36), que limitam o crescimento das derivadas da função em uma vizinhança de x_0.

• **Dois corolários úteis**

Os corolários seguintes do Teorema de Taylor serão utilizados neste texto.

Corolário 37.1 *Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ for K vezes diferenciável e $f^{(a)}(x_0)=0$ para todo $a=0,\ \ldots,\ N$ com $N<K$, então f tem um zero de ordem $N+1$ em x_0 e podemos escrever*

$$f(x)\ =\ (x-x_0)^{N+1}F(x)\ ,$$

onde F é $(K-N-1)$-vezes diferenciável. Em particular, se f for uma função infinitamente diferenciável, então F também o será. □

Prova. As afirmações seguem diretamente de (37.35), notando que, pelas hipóteses, podemos diferenciar em x a expressão $\int_0^1 (1-s)^N f^{(N+1)}\big(x_0 + s(x-x_0)\big)\, ds$ sob o símbolo de integral. ■

Corolário 37.2 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ uma função infinitamente diferenciável de n variáveis reais $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e suponhamos que $f(y) = 0$ em algum ponto $y = \big(y_1, \ldots, y_n\big) \in \mathbb{R}^n$. Então, podemos escrever*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - y_k\big) F_k(x)\ , \tag{37.38}$$

onde as funções F_k são infinitamente diferenciáveis. □

Prova. Como $f(y_1, \ldots, y_n) = 0$, vale

$$f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \Big[f(x_1, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n)\Big] + \Big[f(y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n)\Big]$$
$$+ \cdots + \Big[f(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n) - f(y_1, \ldots, y_n)\Big]\ , \tag{37.39}$$

ou seja,

$$f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \Big[f(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k, \ldots x_n) - f(y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots x_n)\Big]\ . \tag{37.40}$$

Para cada $k = 1, \ldots, n$ a função $f(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k, \ldots x_n) - f(y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots x_n)$ é infinitamente diferenciável como função de x_k e anula-se em $x_k = y_k$. Portanto, pelo Corolário 37.1, podemos escrevê-la na forma

$$f(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k, \ldots x_n) - f(y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots x_n) \;=\; (x_k - y_k) F_k(x_k, \ldots, x_n)\ , \tag{37.41}$$

onde F_k é uma função infinitamente diferenciável de x_k. Como o lado esquerdo é uma função infinitamente diferenciável das demais variáveis, F_k também o será. Logo, (37.38) segue de (37.40) e de (37.41). ■

• O Teorema de Taylor e o de Weierstrass

Os seguintes comentários sobre a relação entre as afirmativas do Teorema de Weierstrass e do Teorema de Taylor são de interesse para o estudante.

Ambos os teoremas estabelecem condições para que uma função possa ser uniformemente aproximada por polinômios em intervalos compactos. As hipótese do Teorema de Weierstrass são, porém, mais fracas, pois nele requer-se apenas que a função a ser aproximada seja contínua, enquanto que no Teorema de Taylor requer-se que a função seja contínua e infinitamente diferenciável.

Assim, o Teorema de Weierstrass garante, por exemplo, a possibilidade de se aproximar a função $f(x) = \big|x - \frac{1}{2}\big|$ por polinômios uniformemente no intervalo $[0,\ 1]$, por exemplo, pelos polinômios de Bernstein (vide (37.22))

$$\sum_{p=0}^{n} \left|\frac{p}{n} - \frac{1}{2}\right| \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p}\ . \tag{37.42}$$

Essa função f, contudo, não possui uma expansão de Taylor centrada em $x_0 = 1/2$ (pois não é diferenciável nesse ponto) nem outra expansão de Taylor centrada em outro ponto do mesmo intervalo $[0,\ 1]$ convergirá à função em <u>todo</u> intervalo (a expansão de Taylor de $|x - 1/2|$ centrada em, digamos, $x_0 = 3/4$ é $1/4 + (x - 3/4) = x - 1/2$, que só é igual a $|x - 1/2|$ para $x \geq 1/2$).

Uma diferença notável entre os polinômios de Taylor e os polinômios aproximantes cuja existência o Teorema de Weierstrass garante, é que os coeficientes dos primeiros são fixos, não dependendo do grau do polinômio aproximante. O k-ésimo coeficiente do polinômio de Taylor de grau N centrado em $x_0 = 0$ de uma função f é $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$, que <u>não</u>

depende do grau N do polinômio. Já os coeficientes dos polinômios aproximantes de Bernstein (37.22) ou dos polinômios aproximantes de Landau (37.24) dependem em geral de k e de N. O k-ésimo coeficiente do polinômio (37.22), por exemplo, que aproxima uma função f no intervalo $[0,\ 1]$, é dado por $\sum_{p=0}^{k}(-1)^{k-p} f\left(\frac{p}{N}\right)\binom{N}{p}\binom{N-p}{N-k}$ e depende de k e de N.

Dessa forma, quando desejamos melhorar a aproximação de uma função por meio de seu polinômio de Taylor só precisamos acrescentar mais termos ao mesmo, aumentando seu grau mas sem alterar os coeficientes já utilizados. Em contraste, se quisermos melhorar a aproximação de uma função usando os polinômios aproximantes cuja existência é garantida pelo Teorema de Weierstrass devemos aumentar o grau do polinômio e eventualmente modificar todos os coeficientes do mesmo.

Comentamos, por fim, que o polinômio de Taylor, ou mesmo os polinômios de Bernstein ou de Landau, nem sempre produzem o melhor aproximante polinomial uniforme de uma função f (contínua e infinitamente diferenciável) em um intervalo compacto. A existência de um melhor aproximante uniforme polinomial único em um intervalo compacto de uma função contínua f é um teorema devido a Haar[18] (vide [118], [510], [442] ou [344]) mas, infelizmente, não há uma fórmula fechada conhecida que o determine.

• O Teorema de Taylor em várias variáveis

Se $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ é uma função de n variáveis reais, K-vezes diferenciável em um certo domínio $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, podemos obter o análogo do Teorema de Taylor por meio do seguinte procedimento. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definida por $f(t):=g(y+th)$, com $y,\ h\in\mathbb{R}^n$ de modo que y e $x\equiv y+h$ pertencem a algum aberto convexo $\Omega_0\subset\Omega$ (a convexidade é necessária para que se possa garantir que $y+th$ pertença a Ω_0 para todo $t\in[0,\ 1]$). Para a a-ésima ($a\leq K$) derivada $f^{(a)}(t)$, vale

$$\frac{f^{(a)}(t)}{a!} \;=\; \sum_{\substack{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n=0\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=a}}^{a} \frac{h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n}}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\frac{\partial^a g}{\partial y_1^{\alpha_1}\cdots\partial y_n^{\alpha_n}}\big(y+th\big) \;=\; \sum_{\alpha\in\mathbf{N}_a^n}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\left(D_y^\alpha g\right)\big(y+th\big)\ , \tag{37.43}$$

sendo que, acima, usamos a notação de multi-índices introduzida à página 951. Essa expressão segue facilmente, pela regra da cadeia, de $\dfrac{d}{dt} \;=\; \displaystyle\sum_{k=1}^{n} h_k\frac{\partial}{\partial y_k}$, igualdade válida quando aplicada a $f(t)=g(y+th)$. Disso temos

$$\frac{d^a}{dt^a}f(t) \;=\; \left(\sum_{k=1}^{n} h_k\frac{\partial}{\partial y_k}\right)^a g(y+th) \;=\; \sum_{\substack{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n=0\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=a}}^{a} \frac{a!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\,h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n}\,\frac{\partial^a}{\partial y_1^{\alpha_1}\cdots\partial y_n^{\alpha_n}}g\big(y+th\big)\ .$$

O Teorema de Taylor, Teorema 37.6, página 1958, vale para a função f na variável t e se considerarmos o caso em que $t=1$ e $t_0=0$ obteremos o seguinte:

Teorema 37.7 (Teorema de Taylor em n variáveis) *Se $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ é uma função K vezes diferenciável ($K\geq 1$) em um domínio conexo $\Omega_0\subset\mathbb{R}^n$, então para todo $N<K$ vale para $y,\ x\in\Omega_0$, com $x=y+h$,*

$$g(x) \;=\; g(y+h) \;=\; \sum_{a=0}^{N}\sum_{\alpha\in\mathbf{N}_a^n}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\left(D^\alpha g\right)(y) + \sum_{\alpha\in\mathbf{N}_{N+1}^n}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\,(N+1)\int_0^1(1-s)^N\left(D_y^\alpha g\right)\big(y+sh\big)\,ds\ , \tag{37.44}$$

ou seja,

$$g(x) \;=\; g(y+h) \;=\; \sum_{a=0}^{N}\sum_{\substack{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n=0\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=a}}^{a} \frac{h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n}}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\frac{\partial^a g}{\partial y_1^{\alpha_1}\cdots\partial y_n^{\alpha_n}}(y)$$

$$+\sum_{\substack{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n=0\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=N+1}}^{N+1}\frac{h^{\alpha_1}\cdots h^{\alpha_n}}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\,(N+1)\int_0^1(1-s)^N\frac{\partial^{N+1}g}{\partial y_1^{\alpha_1}\cdots\partial y_n^{\alpha_n}}\big(y+sh\big)\,ds\ , \tag{37.45}$$

com $h\equiv x-y$.

[18] Alfréd Haar (1885–1933).

A relação (37.45) é denominada identidade de Taylor*. Os polinômios*

$$\begin{aligned} T_N[g](x,\ y) &= \sum_{a=0}^{N} \sum_{\alpha\in\mathbf{N}_a^n} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!}\,(D^\alpha g)\,(y) \\ &= \sum_{a=0}^{N} \sum_{\substack{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n=0\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=a}}^{a} \frac{\big(x_1-y_1\big)^{\alpha_1}\cdots\big(x_n-y_n\big)^{\alpha_n}}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\,\frac{\partial^a g}{\partial y_1^{\alpha_1}\cdots\partial y_n^{\alpha_n}}(y) \end{aligned}$$

são denominados polinômios de Taylor *de ordem N centrados em y da função g e a expressão*

$$\begin{aligned} R_N[g](x,\ y) &= \sum_{\alpha\in\mathbf{N}_{N+1}^n} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!}\,(N+1)\int_0^1 (1-s)^N\,(D^\alpha g)\big(y+sh\big)\,ds \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n=0\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=N+1}}^{N+1} \frac{\big(x_1-y_1\big)^{\alpha_1}\cdots\big(x_n-y_n\big)^{\alpha_n}}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\,(N+1)\int_0^1 (1-s)^N\,\frac{\partial^{N+1} g}{\partial y_1^{\alpha_1}\cdots\partial y_n^{\alpha_n}}\big(y+sh\big)\,ds\,, \end{aligned} \tag{37.46}$$

com $h\equiv x-y$ é denominada resto da expansão de Taylor *de g, ou* fórmula do resto da expansão de Taylor *de g. Podemos, portanto, reescrever (37.45) e (37.44) na forma*

$$g(x) \;=\; T_N[g](x,\ y) + R_N[g](x,\ y)\,. \tag{37.47}$$

Suponhamos agora que g seja infinitamente diferenciável e que exista uma bola compacta centrada em y e de raio $\beta\geq 0$ $B(y,\ \beta)=\Big\{x\in\mathbb{R}^n\Big|\ \|x-y\|\leq\beta\Big\}$ tal que existem constantes $M\geq 0$, $C>0$ e γ com $0\leq\gamma<1$, tais que para todo $w\in B(y,\ \beta)$ e todo n-multi-índice $\alpha=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ valha

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial w_1^{\alpha_1}\cdots\partial w_n^{\alpha_n}}(w)\right| \;\leq\; M\,C^{|\alpha|}\,\frac{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}{\Big|\mathbf{N}_{|\alpha|}^n\Big|\ |\alpha|^{1-\gamma}} \;\overset{(18.3)}{=}\; M\,C^{|\alpha|}\,\frac{\alpha_1!\cdots\alpha_n!(n-1)!}{(n+|\alpha|-1)!}\,|\alpha|^\gamma\,, \tag{37.48}$$

com $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$. Então, para todo $x\in B(y,\ \beta)$ tem-se

$$g(x) \;=\; \sum_{a=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\mathbf{N}_a^n} \frac{\big(x-y\big)^\alpha}{\alpha!}\,(D^\alpha g)\,(y) \;=\; \sum_{a=0}^{\infty}\sum_{\substack{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n=0\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=a}}^{a} \frac{\big(x_1-y_1\big)^{\alpha_1}\cdots\big(x_n-y_n\big)^{\alpha_n}}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\,\frac{\partial^a g}{\partial y_1^{\alpha_1}\cdots\partial y_n^{\alpha_n}}(y)\,, \tag{37.49}$$

sendo que a série do lado direito converge absoluta e uniformemente em $B(y,\ \beta)$. A série (37.49) é denominada série de Taylor real *de g centrada em y.* □

Prova. As primeiras afirmações seguem de (37.43) e do Teorema de Taylor para uma variável, Teorema 37.6, página 1958. É fácil verificar que, sob (37.48), o termo de resto (37.46) converge a zero para $N\to\infty$ e a série (37.49) converge absolutamente. ■

Como ilustração, os primeiros termos da série de Taylor centrada em y de uma função infinitamente diferenciável g

de duas variáveis são

$$
\begin{aligned}
g(x) &= g(y) + \Big(x_1 - y_1\Big)\frac{\partial g}{\partial y_1}(y) + \Big(x_2 - y_2\Big)\frac{\partial g}{\partial y_2}(y) \\
&+ \frac{\Big(x_1 - y_1\Big)^2}{2!}\frac{\partial^2 g}{\partial y_1^2}(y) + \frac{\Big(x_2 - y_2\Big)^2}{2!}\frac{\partial^2 g}{\partial y_2^2}(y) + \Big(x_1 - y_1\Big)\Big(x_2 - y_2\Big)\frac{\partial^2 g}{\partial y_1 \partial y_2}(y) \\
&+ \frac{\Big(x_1 - y_1\Big)^3}{3!}\frac{\partial^3 g}{\partial y_1^3}(y) + \frac{\Big(x_2 - y_2\Big)^3}{3!}\frac{\partial^3 g}{\partial y_2^3}(y) \\
&+ \frac{\Big(x_1 - y_1\Big)^2\Big(x_2 - y_2\Big)}{2!\,1!}\frac{\partial^3 g}{\partial y_1^2 \partial y_2}(y) + \frac{\Big(x_1 - y_1\Big)\Big(x_2 - y_2\Big)^2}{1!\,2!}\frac{\partial^3 g}{\partial y_1 \partial y_2^2}(y) + \cdots .
\end{aligned}
$$

37.4 Aproximação de Funções por Polinômios Trigonométricos

Em um dos trabalhos mais influentes da história da Física e da Matemática, "Théorie Analytique de la Chaleur", publicado em 1822, Fourier[19] lançou as bases da teoria da difusão do calor e, de maior interesse aqui, da teoria das séries trigonométricas, posteriormente denominada, com mais generalidade, Análise Harmônica.

A possibilidade de expandir certas funções em séries trigonométricas data dos trabalhos de Euler[20] e de Daniel Bernoulli[21] sobre o problema da corda vibrante (vide Seção 43.5, página 2469), na primeira metade do século XVIII.

Os primeiros trabalhos de Fourier sobre o problema da propagação de calor e sobre o uso das séries de Fourier datam do período entre 1804 e 1807. Em dezembro desse último ano Fourier apresentou ao Instituto Nacional de Paris uma nota intitulada "Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides", onde propunha que toda função periódica poderia ser expandida em uma série trigonométrica, ideia inicialmente rejeitada, não totalmente sem razão, por um comitê formado por Lagrange, Laplace, Monge e Lacroix. Parte do problema com a argumentação de Fourier era causado por uma certa confusão existente à época quanto ao que se entende por uma função e pela ausência de demonstrações matematicamente convincentes da parte de Fourier. O primeiro tratamento matematicamente correto da convergência de séries de Fourier para uma certa classe de funções só foi fornecida por Dirichlet[22] em 1828. Desde então o estudo das séries de Fourier engendrou um sem-número de desenvolvimentos matemáticos importantes. Como exemplo, citamos o desenvolvimento na noção de integral de Riemann[23], a qual foi motivada pela necessidade de controle mais preciso do decaimento dos coeficientes de séries de Fourier. Vide comentários da Seção 31.1, página 1524.

Fourier chegou às expansões que levam seu nome procurando soluções de certas equações diferenciais ligadas ao problema de propagação de calor em sólidos[24]. Essa associação entre séries de Fourier e equações diferenciais é de interesse em diversas outras áreas da Física e o leitor poderá encontrar exemplos de seu uso nos problemas do Capítulo 43, página 2416. Nesta seção apresentaremos os resultados básicos da teoria da aproximação de funções por séries trigonométricas.

Para o leitor interessado em um texto mais aprofundado, a referência clássica sobre séries trigonométricas é [553]. Recomendamos também [275], [427], [413], [109] e [548]. Uma leitura muito estimulante é [291]. Para um excelente texto em português, vide [158].

A Seção 37.6, página 1993, contém diversos exercícios sobre as séries de Fourier. Aplicações diversas da teoria podem ser encontradas no Capítulo 43, página 2416.

[19] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).
[20] Leonhard Euler (1707–1783).
[21] Daniel Bernoulli (1700–1782).
[22] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859).
[23] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866).
[24] Fourier atuou também na política e na administração pública e dedicou-se a problemas de propagação de calor em função de seus interesses em Metalurgia, em parte com o propósito de melhorar o processo de produção de canhões (Fourier foi um partidário oportunista de Napoleão) e em parte movido por um legítimo interesse científico. Quando jovem participou da aventura napoleônica no Egito, tendo trabalhado na edição da célebre "Description de l'Egypte", o livro-mãe da Egiptologia, completada em 1810.

37.4.1 Preliminares

• **Funções T-periódicas**

Se $T > 0$, uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é dita ser T-periódica, ou periódica de período T, se $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, se f é T-periódica, vale $\mathcal{T}_{-T} f = f$, sendo $\mathcal{T}$ definida em (37.11). Evidentemente, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é T-periódica vale para todo $x \in \mathbb{R}$ que $f(x+nT) = f(x)$, onde $n \in \mathbb{Z}$, ou seja, vale $\mathcal{T}_{-nT} f = f$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Se uma função $f : [-T/2,\, T/2) \to \mathbb{C}$ é definida apenas em um intervalo $[-T/2,\, T/2)$, podemos sempre definir uma sua extensão[25] T-periódica à toda reta real $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por $\tilde{f}(x+nT) = f(x)$ para todo $x \in [-T/2,\, T/2)$ e todo $n \in \mathbb{Z}$. Por essa razão sempre consideraremos aqui funções definidas em todo $\mathbb{R}$. Note que se $f : [-T/2,\, T/2) \to \mathbb{C}$ é contínua, sua extensão $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ só o será se $f(-T/2) = \lim_{t \to T/2} f(t)$, de outra forma será apenas contínua por partes, com descontinuidades nos pontos $x = T/2 + nT$ com $n \in \mathbb{Z}$.

É também útil recordar que se $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é T_0-periódica, então $f_1(x) = f_0\left(\frac{T_0}{T_1}\, x\right)$ é T_1-periódica. Por essa razão, convencionamos só considerar aqui funções 2π-periódicas. Os resultados que seguirão podem ser estendidos a funções T-periódicas por um simples re-escalonamento dos argumentos das funções.

Os seguintes resultados elementares serão usados algumas vezes no que segue:

Lema 37.1 *Sejam P e f duas funções contínuas e 2π-periódicas. Então,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} P(x-y) f(y)\, dy \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} P(y) f(x-y)\, dy \tag{37.50}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, vale

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, dy \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, dy \;=\; \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(y)\, dy\;, \tag{37.51}$$

também para todo $x \in \mathbb{R}$. □

Prova.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} P(x-y) f(y)\, dy \quad &\overset{y \to x-y}{=} \quad \int_{x-\pi}^{x+\pi} P(y) f(x-y)\, dy \\
&= \quad \int_{-\pi}^{\pi} P(y) f(x-y)\, dy - \int_{-\pi}^{x-\pi} P(y') f(x-y')\, dy' + \int_{\pi}^{x+\pi} P(y'') f(x-y'')\, dy'' \\
&\overset{y' \to y'-2\pi}{=} \quad \int_{-\pi}^{\pi} P(y) f(x-y)\, dy - \int_{\pi}^{x+\pi} P(y'-2\pi) f(x-y'+2\pi)\, dy' + \int_{\pi}^{x+\pi} P(y'') f(x-y'')\, dy'' \\
&\overset{\text{periodicidade}}{=} \quad \int_{-\pi}^{\pi} P(y) f(x-y)\, dy - \int_{\pi}^{x+\pi} P(y') f(x-y')\, dy' + \int_{\pi}^{x+\pi} P(y'') f(x-y'')\, dy'' \\
&= \quad \int_{-\pi}^{\pi} P(y) f(x-y)\, dy\;.
\end{aligned}$$

Isso provou (37.50). A primeira igualdade em (37.51) é um caso particular de (37.50) para P constante igual a 1. A segunda igualdade em (37.51) vem de uma mudança de variáveis evidente ($y \to x-y$). ■

• **Polinômios trigonométricos**

Uma função definida em $\mathbb{R}$ que seja da forma

$$p(x) \;=\; \sum_{m=-n}^{n} A_m e^{imx}\;,$$

[25] Para a definição da noção de extensão de uma função, vide página 67.

com $A_m \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$, é dita ser um *polinômio trigonométrico* de período 2π. Usando a bem conhecida fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$, todo polinômio trigonométrico no intervalo $[-\pi,\ \pi]$ pode ser escrito na forma alternativa equivalente

$$p(x) \ = \ \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos(mx) + \sum_{m=1}^{n} b_m \,\mathrm{sen}(mx) \ ,$$

com $a_m,\ b_m \in \mathbb{C}$, a qual envolve as funções seno e cosseno.

No que segue, estabeleceremos, sob diversas hipóteses, resultados sobre convergência (pontual, uniforme ou no sentido de $L^2\big((-\pi,\ \pi),\ dx\big)$) de sequências de polinômios trigonométricos.

• **Séries trigonométricas, ou séries de Fourier**

Dado um polinômio trigonométrico de período 2π

$$p(x) \ = \ \sum_{k=-n}^{n} p_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \tag{37.52}$$

é fácil constatar, usando as *relações de ortogonalidade*

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx \ = \ 2\pi\delta_{m,n} \ , \quad m,\ n \in \mathbb{Z} \ , \tag{37.53}$$

que os coeficientes p_k podem ser expressos em termos de p por

$$p_k \ = \ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}\, p(x)\, dx \ =: \ \langle e_k,\ p\rangle \ , \tag{37.54}$$

com $e_k(x) := \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$.

A relação (37.54) tem o seguinte corolário evidente:

Corolário 37.3 *Um polinômio trigonométrico é identicamente nulo se e somente se todos os seus coeficientes forem nulos.* □

Uma questão natural é saber sob quais circunstâncias uma função 2π-periódica f pode ser expressa como limite (em um sentido a ser precisado) de uma sequência de polinômios trigonométricos:

$$f(x) \ = \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \ =: \ \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \ , \tag{37.55}$$

com os coeficientes f_k independentes de n e dados por

$$f_k \ = \ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}\, f(x)\, dx \ =: \ \langle e_k,\ f\rangle \ . \tag{37.56}$$

Uma série como (37.55)–(37.56), caso o limite exista, é denominada *série de Fourier*.

Os coeficientes f_k são denominados *coeficientes de Fourier* da função f. De (37.56) vê-se que para que todos os coeficientes de Fourier f_k de uma função f existam basta que f seja integrável em $[-\pi,\ \pi]$. Para f integrável e $n \in \mathbb{N}_0$ as somas parciais

$$S_n(f,\ x) \ := \ \sum_{k=-n}^{n} f_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \ = \ \sum_{k=-n}^{n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-iky}}{\sqrt{2\pi}}\, f(y)\, dy \right) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \tag{37.57}$$

são denominadas *somas parciais de Fourier* da função f. A *série de Fourier* da função f se escreve então como o limite

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,\ x) \ := \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \ =: \ \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

caso esse limite exista em algum sentido a ser precisado.

Observemos que alguns autores preferem escrever $S_n(f,\ x)$ na forma

$$S_n(f,\ x)\ :=\ \sum_{k=-n}^{n} F_k e^{ikx}\ , \qquad \text{com} \qquad F_k\ :=\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky}\, f(y)\, dy\ , \quad k\in\mathbb{Z}\ .$$

Como já mencionamos, foi Fourier o primeiro a propor expressões como (37.55)–(37.56). Coube a seus sucessores estudar sobre quais hipóteses e em que sentido (37.55)–(37.56) são válidas. Uma questão que então se coloca é identificar condições sobre f sob as quais a sequência de polinômios trigonométricos $S_n(f,\ x)$ convirja pontualmente à função f, ou seja, para que o limite $\lim_{n\to\infty} S_n(f,\ x)$ de (37.55) exista e seja igual a f para todo $x\in[-\pi,\ \pi]$ ou quase em toda parte. Devido ao largo emprego de séries de Fourier na resolução de equações diferenciais, essa não é apenas uma questão acadêmica. No que seguirá, empenharemo-nos em apresentar respostas, ainda que parciais, a essa questão e a outras congêneres.

• **Um outro encontro com as séries de Fourier: a expansão de Laurent**

Antes de prosseguirmos observemos que séries de Fourier convergentes ocorrem naturalmente no contexto da teoria das funções analíticas de uma variável complexa.

Se $g(z)$ é uma função analítica no interior de um anel $\mathcal{A}_{ab}=\{z\in\mathbb{C},\ a<|z|<b\}\subset\mathbb{C}$, com $0\le a<b$, é bem sabido da teoria das funções de variável complexa que g pode ser representada em $\mathcal{A}_{ab}$ por uma série de Laurent[26] centrada em $z_0=0$:

$$g(z)\ =\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n z^n\ ,$$

a qual é absolutamente convergente para $z\in\mathcal{A}_{ab}$, sendo os coeficientes g_n dados por

$$g_n\ =\ \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{g(w)}{w^{n+1}}\, dw$$

para todo $n\in\mathbb{Z}$, com C sendo uma curva suave e fechada em $\mathcal{A}_{ab}$ que dá uma volta em torno de $z_0=0$ no sentido anti-horário. Se tivermos $a<1<b$, o círculo unitário $S^1=\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}$ estará inteiramente contido em $\mathcal{A}_{ab}$. Nesse caso, se escolhermos z no círculo unitário $|z|=1$, podemos escrever $z=e^{i\theta}$ com $-\pi<\theta\le\pi$. Definindo $f(\theta):=g(e^{i\theta})$, a expansão de Laurent fica

$$f(\theta)\ =\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{in\theta}\ ,$$

que é uma expansão de f em termos de uma série trigonométrica. Tomando a curva C como sendo também o círculo unitário (ou seja, tomando $w=e^{i\varphi}$ com $-\pi<\varphi\le\pi$), a expressão para os coeficientes g_n fica

$$g_n\ =\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)e^{-in\varphi}\, d\varphi\ .$$

Assim, obtemos para f a representação

$$f(\theta)\ =\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-in\varphi}}{\sqrt{2\pi}}f(\varphi)\, d\varphi\right)\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}\ . \tag{37.58}$$

Concluímos assim que se $f(\theta)$ é a restrição ao círculo unitário de uma função analítica em $\mathcal{A}_{ab}$ com $0\le a<1<b$ (no caso, da função g), então f possui a representação em série de Fourier (37.58), a qual, sob as hipóteses, converge absoluta e uniformemente para todo $-\pi<\theta\le\pi$. Note que, sob essas hipóteses, f é não apenas contínua, mas infinitamente diferenciável em relação a θ.

No que seguirá, veremos que condições mais fracas sobre f podem ser impostas, com resultados análogos.

[26] Pierre Alphonse Laurent (1813–1854).

37.4.2 A Série de Fourier de Funções Periódicas de Período T

A expressão (37.57) apresenta a série de Fourier de uma função f integrável e periódica de período 2π. Se f for integrável e T-periódica (com $T > 0$), as somas parciais de Fourier serão dadas para $n \in \mathbb{N}_0$ por

$$S_n(f,\, x) \;:=\; \sum_{k=-n}^{n} f_k \frac{e^{i\frac{2\pi k}{T}x}}{\sqrt{T}} \qquad \text{com} \qquad f_k \;=\; \int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{-i\frac{2\pi k}{T}y}}{\sqrt{T}}\, f(y)\, dy\;, \tag{37.59}$$

com $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f,\, x)$ representando a *série de Fourier* de f, caso esse limite exista em algum sentido a ser precisado.

E. 37.4 *Exercício*. Obtenha (37.59) a partir de (37.57). Sugestão: se f é T-periódica, então $F(x) := f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ é 2π-periódica e a ela se aplica (37.57). ✠

A série de Fourier de uma função T-periódica também pode ser expressa em termos de uma série de senos e cossenos. Para as somas parciais de Fourier, tem-se

$$S_n(f,\, x) \;=\; \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} \left[A_m \cos\left(\frac{2m\pi}{T}x\right) + B_m \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi}{T}x\right)\right]\;, \tag{37.60}$$

com

$$A_m \;=\; \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2m\pi}{T}y\right) f(y)\, dy\;, \quad m \geq 0 \qquad \text{e} \qquad B_m \;=\; \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi}{T}y\right) f(y)\, dy\;, \quad m \geq 1\;. \tag{37.61}$$

Essas expressões podem ser obtidas diretamente de (37.59) com uso da fórmula de Euler $e^{i\frac{2\pi k}{T}x} = \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)$, sendo que os coeficientes A_m e B_m relacionam-se com os coeficientes f_k por

$$A_0 \;=\; \frac{2f_0}{\sqrt{T}}\;, \qquad A_m \;=\; \frac{f_m + f_{-m}}{\sqrt{T}} \qquad \text{e} \qquad B_m \;=\; i\frac{f_m - f_{-m}}{\sqrt{T}}\;, \quad m \geq 1\;,$$

do que obtemos também

$$f_0 \;=\; \frac{\sqrt{T}A_0}{2}\;, \qquad f_m \;=\; \frac{\sqrt{T}}{2}\Big(A_m - iB_m\Big) \qquad \text{e} \qquad f_{-m} \;=\; \frac{\sqrt{T}}{2}\Big(A_m + iB_m\Big)\;, \quad m \geq 1\;.$$

E. 37.5 *Exercício*. Obtenha as expressões acima. ✠

As expressões (37.60)–(37.61) podem também ser obtidas pór meio das *relações de ortogonalidade das funções seno e cosseno*:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2n\pi}{T}y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi}{T}y\right)\, dy \;=\; 0\;, \qquad n,\, m \in \mathbb{N}_0\;. \tag{37.62}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2n\pi}{T}y\right) \cos\left(\frac{2m\pi}{T}y\right)\, dy \;=\; \begin{cases} \frac{T}{2}\,\delta_{n,\,m}\;, & n,\, m \in \mathbb{N}\;, \\ T\,\delta_{0,\,m}\;, & n = 0,\, m \in \mathbb{N}_0\;, \end{cases} \tag{37.63}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi}{T}y\right)\, dy \;=\; \frac{T}{2}\,\delta_{n,\,m}\;, \qquad n,\, m \in \mathbb{N}_0\;, \tag{37.64}$$

válidas para todo $T > 0$. Acima, $\mathbb{N}_0 = \{0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \ldots\}$ e $\mathbb{N} = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \ldots\}$.

E. 37.6 *Exercício importante.* Demonstre as relações de ortogonalidade (37.62)–(37.64). Para tal use, por exemplo, as bem-conhecidas identidades, conhecidas como *fórmulas de prostaférese*[27]:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a) , \tag{37.65}$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) , \tag{37.66}$$

$$\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\Big) , \tag{37.67}$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big) , \tag{37.68}$$

$$\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big) , \tag{37.69}$$

$$\operatorname{sen}(a) + \operatorname{sen}(b) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) , \tag{37.70}$$

$$\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) , \tag{37.71}$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) , \tag{37.72}$$

$$\cos(a) - \cos(b) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{b-a}{2}\right) , \tag{37.73}$$

válidas para todos $a,\ b \in \mathbb{C}$. ✠

E. 37.7 *Exercício.* Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função T-periódica. Mostre que se f é real, então

$$f_k = \overline{f_{-k}} \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{Z} .$$

Conclua disso que f é real, então sua série de Fourier é também real. Note que isso é evidente por (37.60)–(37.61). ✠

37.4.3 Polinômios Trigonométricos e Funções Contínuas e Periódicas

• **Sequências delta de Dirac periódicas**

A definição que segue é naturalmente relacionada à definição de sequência delta de Dirac à página 1944.

Definição 37.3 (Sequências delta de Dirac periódicas) *Uma sequência de funções 2π-periódicas $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, é dita ser uma* sequência delta de Dirac 2π-periódica *centrada em* 0 *se satisfizer:*

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função K_n é 2π-periódica e integrável no intervalo $[-\pi,\ \pi]$, ou seja, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|\, dx < \infty$.*
2. *Existe uma constante $\mathcal{K} > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale*
$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|\, dx < \mathcal{K} . \tag{37.74}$$
3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, vale*
$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\, dx = 1 . \tag{37.75}$$

[27] Do grego "prosthesis" ("soma") e "aphaeresis" ("subtração"). Nessa forma, essas relações foram apresentadas pela primeira vez por Johann Werner ("Vernerus") (1468–1522), mas provavelmente eram conhecidas de muito antes. Elas podem ser facilmente demonstradas, mesmo para argumentos complexos, com uso da fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, $\theta \in \mathbb{C}$.

4. Para todo δ com $0 < \delta < \pi$ vale

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_{-\pi}^{-\delta}|K_n(x)|\,dx + \int_{\delta}^{\pi}|K_n(x)|\,dx\right] \;=\; 0\,. \tag{37.76}$$

Uma sequência de funções $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dita ser uma *sequência delta de Dirac periódica em* $\mathbb{R}$ *centrada em* $x_0\in\mathbb{R}$ se for da forma $\mathcal{T}_{x_0}K_n$, onde K_n é uma sequência delta de Dirac em $\mathbb{R}$ centrada em 0 (com $\mathcal{T}_{x_0}$ definida em (37.11)).

O seguinte fato sobre sequências delta de Dirac 2π-periódicas é de fundamental importância para o que segue:

Teorema 37.8 *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ uma função contínua e 2π-periódica. Seja K_n uma sequência delta de Dirac 2π-periódica. Defina-se*

$$F_n(x) \;:=\; \int_{-\pi}^{\pi}K_n(x-y)f(y)\,dy \;\overset{(37.50)}{=}\; \int_{-\pi}^{\pi}K_n(y)f(x-y)\,dy$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. Então, a sequência F_n é uma sequência de funções contínuas e 2π-periódicas e converge uniformemente a f em $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty}\|f-F_n\|_\infty \;=\; \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-F_n(x)| \;=\; 0\,.$$

□

Prova. Como f é contínua no intervalo compacto $[-\pi,\ \pi]$ ela é uniformemente contínua nesse intervalo (Teorema 32.12, página 1625) e, como é também periódica, em todo $\mathbb{R}$. Isso permite-nos reproduzir a demonstração do Teorema 37.1, página 1947.

Observemos primeiramente que, como f é contínua, ela é limitada e definindo $C_0 := \sup\{|f(x)|,\ x\in[-\pi,\ \pi]\}$, teremos

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}K_n(y)f(x-y)\,dy\right| \;\le\; \int_{-\pi}^{\pi}|K_n(y)|\,|f(x-y)|\,dy \;\le\; C_0\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(y)|\,dy \;\overset{(37.74)}{\le}\; C_0\mathcal{K}\,.$$

Isso mostra que as integrais que definem as funções F_n estão bem definidas. Que cada F_n é 2π-periódica é evidente (se não for $\to$ Exercício!).

Que cada F_n é contínua prova-se da seguinte forma. Usando a continuidade uniforme de f, sabemos que para cada $\epsilon>0$ existe $\delta(\epsilon)$ tal que $|f(z)-f(z')|<\epsilon$ sempre que $|z-z'|<\delta(\epsilon)$. Seja, então $\epsilon>0$ e $x,\ x'\in\mathbb{R}$ quaisquer tais que $|x-x'|<\delta(\epsilon)$. Teremos,

$$\begin{aligned}|F_n(x)-F_n(x')| \;&=\; \left|\int_{-\pi}^{\pi}K_n(y)\Big(f(x-y)-f(x'-y)\Big)\,dy\right| \;\le\; \int_{-\pi}^{\pi}|K_n(y)|\,\Big|f(x-y)-f(x'-y)\Big|\,dy\\ &\le\; \epsilon\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(y)|\,dy \;\overset{(37.74)}{\le}\; \epsilon\mathcal{K}\,,\end{aligned}$$

pois $|(x-y)-(x'-y)|=|x-x'|<\delta(\epsilon)$. Como isso vale para todo $\epsilon>0$, estabeleceu-se a continuidade de F_n.

Vamos agora escrever, usando (37.75),

$$f(x)-F_n(x) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)-f(x-y)\big)K_n(y)\,dy\,.$$

Para cada δ com $0<\delta<\pi$ podemos quebrar a última integral em três intervalos:

$$\int_{-\pi}^{-\delta}\big(f(x)-f(x-y)\big)K_n(y)\,dy + \int_{-\delta}^{\delta}\big(f(x)-f(x-y)\big)K_n(y)\,dy + \int_{\delta}^{\pi}\big(f(x)-f(x-y)\big)K_n(y)\,dy \tag{37.77}$$

e denominaremos essas integrais I, II e III, respectivamente.

Comecemos estudando a integral II. Para cada $\epsilon > 0$ teremos pela continuidade uniforme $|f(x) - f(x-y)| \leq \epsilon$ sempre que $|y| \leq \delta(\epsilon)$ e, portanto, escolhendo $\delta = \delta(\epsilon)$

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\delta}^{\delta} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\, dy \right| &\leq \int_{-\delta}^{\delta} \big|f(x) - f(x-y)\big|\, |K_n(y)|\, dy \\ &\leq \epsilon \int_{-\delta}^{\delta} |K_n(y)|\, dy \leq \epsilon \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(y)|\, dy \overset{(37.74)}{\leq} \mathcal{K}\epsilon \,. \end{aligned}$$

Passemos agora às integrais I e III. Como f é limitada, vale para a integral I,

$$\left| \int_{-\pi}^{-\delta} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\, dy \right| \leq \int_{-\pi}^{-\delta} \big|f(x) - f(x-y)\big|\, |K_n(y)|\, dy \leq 2C_0 \int_{-\pi}^{-\delta} |K_n(y)|\, dy$$

e, analogamente, para a integral III,

$$\left| \int_{\delta}^{\pi} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\, dy \right| \leq 2C_0 \int_{\delta}^{\pi} |K_n(y)|\, dy \,,$$

Logo, por (37.76), podemos obter

$$\left| \int_{-\pi}^{-\delta} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\, dy + \int_{\delta}^{\pi} \big(f(x) - f(x-y)\big) K_n(y)\, dy \right| \leq \epsilon$$

escolhendo n grande o suficiente, digamos $n > N(\epsilon)$, independente de x. Dessa forma, juntando as estimativas para as integrais I, II e III concluímos que $|f(x) - F_n(x)| \leq (2 + \mathcal{K})\epsilon$ para $n > N(\epsilon)$, independente de x. Logo, $\|f - F_n\|_\infty = \sup\{\|f(x) - F_n(x)\|,\ x \in \mathbb{R}\} \leq (2 + \mathcal{K})\epsilon$ para $n > N(\epsilon)$. Como isso vale para $\epsilon > 0$ arbitrário a demonstração está completa. ■

• Aproximação de funções continuas 2π-periódicas por polinômios trigonométricos. O Teorema de Fejér

A proposição que segue e sua demonstração são extraídas do tratamento de [427].

Proposição 37.7 *Para $m \in \mathbb{N}$ defina-se*

$$K_m(x) := \frac{1}{N_m} \left(\frac{1 + \cos(x)}{2} \right)^m = \frac{1}{N_m} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)^{2m} ,$$

onde

$$N_m := \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(y)}{2} \right)^m dy = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos\left(\frac{y}{2}\right) \right)^{2m} dy \,.$$

Então, a sequência K_m é uma sequência delta de Dirac de período 2π.

As constantes N_m são dadas por

$$N_m = 2\pi \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} = 2\pi \frac{(2m-1)!!}{2^m m!} \,, \tag{37.78}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. □

Prova. É evidente que $K_m(x) \geq 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, que $K_m(x) = K_m(-x)$ para todo x e que cada K_m é contínua e 2π-periódica. Que $\int_{-\pi}^{\pi} K_m(x)dx = 1$ é também evidente pela definição do fator de normalização N_m. Precisamos apenas provar a propriedade 4 da definição de sequência delta de Dirac de período 2π.

A primeira coisa a fazer é obter uma estimativa para o fator de normalização N_m. Como $K_m(x)$ é uma função par, vale $1 = 2\int_0^\pi K_m(x)dx$. Assim, usando o fato que $1 \geq \operatorname{sen}(x)$, vale

$$1 \;=\; \frac{2}{N_m}\int_0^\pi \left(\frac{1+\cos(y)}{2}\right)^m dy \;\geq\; \frac{2}{N_m}\int_0^\pi \left(\frac{1+\cos(y)}{2}\right)^m \operatorname{sen}(y)\, dy$$

$$\stackrel{u=1+\cos(y)}{=} \frac{2}{2^m N_m}\int_0^2 u^m\, du \;=\; \frac{4}{(m+1)N_m}\;,$$

o que implica $\frac{1}{N_m} \leq \frac{m+1}{4}$. A segunda observação é que

$$K_m'(x) \;=\; -\frac{m}{2^m N_m}\,(1+\cos(x))^{m-1}\,\operatorname{sen}(x)\;,$$

que nos informa que K_m é decrescente no intervalo $[0,\ \pi]$. Portanto, se $0 < \delta \leq \pi$ vale para todo $x \in [\delta,\ \pi]$

$$K_m(x) \;\leq\; K_m(\delta) \;=\; \frac{1}{N_m}\left(\frac{1+\cos(\delta)}{2}\right)^m \;\leq\; \frac{(m+1)}{4}\left(\frac{1+\cos(\delta)}{2}\right)^m\;.$$

Logo, $\sup\{K_m(x),\ x \in [\delta,\ \pi]\} \leq \frac{(m+1)}{4}\left(\frac{1+\cos(\delta)}{2}\right)^m$ e, como $1+\cos(\delta) < 2$ para $0 < \delta \leq \pi$, segue que $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\{K_m(x),\ x \in [\delta,\ \pi]\} = 0$. Isso implica que $\lim\limits_{m\to\infty}\int_\delta^\pi |K_m(x)|dx = 0$ e completa a demonstração que K_m forma uma sequência delta de Dirac 2π-periódica.

Para provar (37.78), notamos que pelo binômio de Newton

$$\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{2m} \;=\; \frac{1}{2^{2m}}\left(e^{it/2}+e^{-it/2}\right)^{2m} \;=\; \frac{1}{2^{2m}}\sum_{p=0}^{2m}\binom{2m}{p}e^{i(p-m)t}\;. \tag{37.79}$$

Com isso, (37.78) segue facilmente das relações de ortogonalidade (37.53). Uma outra prova de (37.78) por uma mudança de variáveis e repetindo-se o procedimento de integração por partes pode ser encontrada em (16.69), página 885. ■

Chegamos agora ao importante

Teorema 37.9 (Teorema de Fejér) *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é contínua e 2π-periódica, então f pode ser aproximada uniformemente em $\mathbb{R}$ por polinômios trigonométricos de período 2π, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ existe um polinômio trigonométrico 2π-periódico p_ϵ tal que $\|f - p_\epsilon\|_\infty < \epsilon$, onde $\|f - p_\epsilon\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - p_\epsilon(x)|$.* □

Esse teorema foi primeiramente demonstrado por Fejér[28] em 1900 em uma forma ligeiramente diferente, da qual falaremos mais adiante. Conforme exposto na Seção 17.3, página 939, o Teorema 37.9, acima, tem por implicação a convergência da série de Fourier de (37.55) para funções $f \in L^2([-\pi,\ \pi],\ dx)$, com a convergência se dando no sentido da norma de $L^2\big([-\pi,\ \pi],\ dx\big)$. Isso não necessariamente implica a validade de (37.55) para todo ponto $x \in [-\pi,\ \pi]$ (convergência pontual). Em seguida apresentamos uma demonstração independente do Teorema de Fejér, mas adiante (Proposição 37.8, página 1974) provaremos que o mesmo é equivalente ao Teorema de Weierstrass, Teorema 37.3, página 1950.

Prova do Teorema 37.9. Unindo o Teorema 37.8 à Proposição 37.7, concluímos que a sequência de funções contínuas e 2π-periódicas definida por

$$E_m(f,\ x) \;:=\; \frac{1}{N_m}\int_{-\pi}^\pi \left(\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)^{2m} f(y)\, dy\;,$$

$m \in \mathbb{N}$, aproxima uniformemente f em $\mathbb{R}$. Por (37.79), segue que

$$E_m(f,\ x) \;=\; \sum_{p=0}^{2m}\frac{\sqrt{2\pi}}{2^{2m}N_m}\binom{2m}{p}f_{p-m}e^{i(p-m)x}\;, \tag{37.80}$$

[28] Lipót Fejér (1880–1959).

onde

$$f_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky} f(y)\, dy\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{37.81}$$

são os coeficientes de Fourier de f. Com (37.78), obtemos

$$E_m(f,\ x) = \sum_{p=-m}^{m} \frac{(m!)^2}{(m-p)!(m+p)!}\, f_p\, \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}}\,. \tag{37.82}$$

As expressões (37.80) e (37.82) mostram que $E_m(f,\ x)$ é um polinômio trigonométrico. ■

A afirmação a seguir é consequência do Teorema 37.9 e de (37.82).

Corolário 37.4 *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é contínua e 2π-periódica, então f é univocamente determinada por seus coeficientes de Fourier $f_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky} f(y)\, dy$, $k \in \mathbb{Z}$.* □

Prova. Por (37.82) vemos que f pode ser recuperada a partir do conhecimento dos coeficientes f_k. Também pela mesma expressão, vemos que se f e g são contínuas, 2π-periódicas e têm os mesmos coeficientes de Fourier, então $E_m(f,\ x) = E_m(g,\ x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $m \in \mathbb{N}$. Assim, pelo Teorema 37.9, vale para todo $x \in \mathbb{R}$ que $f(x) = \lim_{m\to\infty} E_m(f,\ x) = \lim_{m\to\infty} E_m(g,\ x) = g(x)$. ■

• Comentários sobre convergência pontual. Teoremas de Du Bois-Reymond e Carleson

O Teorema 37.9 afirma que f pode ser aproximada uniformemente por polinômios trigonométricos de período 2π. Surpreendentemente, porém, isso não implica que a série de Fourier $S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ikx}$ de uma função contínua f seja convergente em todo ponto x.

O estudante deve atentar para o fato que, por (37.57) e (37.82), $S_m(f,\ x)$ e $E_m(f,\ x)$ são polinômios trigonométricos distintos. Assim, a aproximação de $f(x)$ contínua e 2π-periódica pela sequência $E_m(f,\ x)$, implicada pelo Teorema 37.9, não necessariamente implica a aproximação de $f(x)$ por sua série de Fourier $S_m(f,\ x)$.

De fato, em 1873 Du Bois-Reymond[29] exibiu um exemplo de uma função contínua e 2π-periódica (e, portanto, para a qual o Teorema 37.9 se aplica) cuja série de Fourier diverge em $x = 0$. Apesar de contínua, a função de Du Bois-Reymond não é diferenciável em $x = 0$ (ou mesmo Hölder-contínua). Esse comentário é importante pois, como veremos no Teorema 37.12, página 1978, continuidade e diferenciabilidade são suficientes para garantir a convergência pontual da série de Fourier.

Os passos da construção de Du Bois-Reymond podem ser acompanhados na referência [291] ou em [275]. O leitor interessado que tenha algum conhecimento de Teoria Quântica de Campos poderá deleitar-se em reconhecer que a construção de Du Bois-Reymond prenuncia certas ideias associadas a transformações de escala e de grupo de renormalização.

O exemplo de Du Bois-Reymond pode ser aguçado ainda mais. Em 1966 Kahane[30] e Katznelson[31] provaram que: *dado um conjunto de medida nula E em $[-\pi,\ \pi]$, existe uma função f contínua e 2π-periódica tal que* $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |S_n(f,\ x)| = \infty$ *para todo $x \in E$.* Uma demonstração dessa afirmação pode ser encontrada em [275][32].

O resultado mais importante sobre a questão da convergência pontual da série de Fourier de funções de quadrado integrável é devido a Carleson[33]: *se f é uma função de quadrado integrável em $[-\pi,\ \pi]$, sua série de Fourier converge quase em toda parte*, ou seja, pode divergir apenas em um conjunto de medida nula.

Como mencionamos, para que possamos garantir convergência da série de Fourier de uma função f em todo ponto $x \in [-\pi,\ \pi]$ não basta requerer continuidade, sendo a adição da condição de diferenciabilidade suficiente para tal. A afirmação precisa será apresentada nas páginas que seguem (Teorema 37.12, página 1978).

[29] Paul David Gustav Du Bois-Reymond (1831–1889).
[30] Jean-Pierre Kahane (1926–).
[31] Yitzhak Katznelson (1934–).
[32] A referência original é: J-P Kahane and Y. Katznelson, "Sur les ensembles de divergence des séries trignométriques", *Studia Mathematica*, **26** 305-306, (1966).
[33] Lennart Axel Edvard Carleson (1923–). A referência original é: L. Carleson, "On convergence and growth of partial sums of Fourier series". *Acta Math.*, **116**, 135-157 (1966).

• **O Teorema de Fejér e o Teorema de Weierstrass**

Os teoremas de Fejér e de Weierstrass afirmam que uma função contínua pode ser uniformemente aproximada quer por polinômios quer por polinômios trigonométricos (se for também periódica). Talvez um tanto surpreendentemente esses dois teoremas são equivalentes.

Proposição 37.8 *O Teorema de Weierstrass, Teorema 37.3, página 1950, e o Teorema de Fejér, Teorema 37.9, página 1972, são equivalentes.* □

Prova. Pelo Teorema de Fejér, Teorema 37.9, página 1972, os polinômios trigonométricos são densos (na topologia uniforme, i.e., na topologia da norma do supremo $\|\cdot\|_\infty$) no conjunto das funções contínuas 2π-periódicas. Pela Proposição 37.6, página 1960, os monômios trigonométricos e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$, podem ser aproximados uniformemente no intervalo $[-\pi,\ \pi]$ por polinômios (mais especificamente, por seus polinômios de Taylor). Concluímos disso que os polinômios são densos nas funções contínuas no intervalo $[-\pi,\ \pi]$. Por uma translação, combinada a um re-escalonamento (operações que levam polinômios em polinômios, vide a discussão que antecede o Teorema 37.20, página 2004), isso prova que os polinômios são densos nas funções contínuas em qualquer intervalo compacto $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$. Portanto, o Teorema de Weierstrass (ao menos na versão do Teorema 37.3, página 1950) segue do Teorema de Fejér.

A recíproca é também verdadeira. Para prová-la seja $f(\theta)$ uma função contínua e 2π-periódica definida no intervalo $[-\pi,\ \pi]$. Temos, naturalmente que $f(-\pi) = f(\pi)$, devido à continuidade e à periodicidade. No retângulo fechado $\mathcal{R} = [-1,\ 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ defina-se a função $F(x_1,\ x_2) = \rho f(\theta)$, sendo $1 \leq x_1 \leq 1$ e $1 \leq x_2 \leq 1$, com $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e $\theta = \arctan(x_2/x_1)$, ou seja, $x_1 = \rho\cos\theta$ e $x_2 = \rho\,\mathrm{sen}\theta$. É claro que F é contínua e, pelo Teorema 37.5, página 1955, F pode ser uniformemente aproximada em $\mathcal{R}$ por polinômios em x_1 e x_2, ou seja, por polinômios em $\rho\cos\theta$ e $\rho\,\mathrm{sen}\theta$. O círculo unitário $\rho = 1$ está inteiramente contido no retângulo fechado $\mathcal{R}$ e nele a função F é igual a f. Concluímos disso que f pode ser uniformemente aproximada por polinômios em $\cos\theta$ e $\mathrm{sen}\theta$, ou seja, por polinômios trigonométricos, provando que o Teorema de Fejér segue do de Weierstrass. ■

37.4.4 Convergência de Séries de Fourier

• **Os núcleos de Dirichlet**

Dado um polinômio trigonométrico p, vimos em (37.52)–(37.54) que podemos escrever

$$p(x) \;=\; \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky} p(y)\, dy \right) e^{ikx} \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y)\, p(y)\, dy \;,$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, definimos

$$D_n(x) \;:=\; \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \;. \tag{37.83}$$

Essas funções D_n são denominadas *núcleos de Dirichlet*. Perceba-se que expressões como (37.55), (37.57) ou (37.58) podem ser re-escritas na forma

$$S_m(f,\ x) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} D_m(x-y) f(y)\, dy \;, \qquad f(x) \;=\; \lim_{m\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(x-y) f(y)\, dy \;.$$

As questões que colocamos acima a respeito das séries de Fourier podem ser respondidas com um melhor conhecimento dos núcleos de Dirichlet. Suas propriedades básicas encontram-se enunciadas na proposição que segue.

Proposição 37.9 *Definindo*

$$D_n(x) \;:=\; \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \;, \tag{37.84}$$

$n \in \mathbb{N}_0$, *valem as seguintes afirmações: cada D_n é uma função contínua, par e 2π-periódica. Vale*

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\, dx \;=\; 1 \tag{37.85}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e vale a expressão mais explícita

$$D_n(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\big((n+\frac{1}{2})x\big)}{\operatorname{sen}\big(\frac{x}{2}\big)}\;,\;\; x\neq 0\;,\qquad \textit{com}\qquad D_n(0)\;=\;\frac{2n+1}{2\pi}\;, \tag{37.86}$$

também para todo $n \in \mathbb{N}_0$. □

Prova. Que cada D_n é contínua e 2π-periódica é evidente. Que cada D_n é uma função par é evidente por (37.86), que provaremos abaixo. A relação (37.85) segue facilmente das relações de ortogonalidade (37.53), pois

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx \;=\; \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,dx \;=\; \sum_{k=-n}^{n}\delta_{k,\,0} \;=\; 1\;.$$

Para provar (37.86), escrevemos, para $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} D_n(x) \;&=\; \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \;=\; \frac{e^{-inx}}{2\pi}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} \\ &=\; \frac{e^{-inx}}{2\pi}\left[\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}\right] \\ &=\; \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-inx}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} \;=\; \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-i(n+1/2)x}-e^{i(n+1/2)x}}{e^{-ix/2}-e^{ix/2}} \;=\; \frac{1}{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\big((n+\frac{1}{2})x\big)}{\operatorname{sen}\big(\frac{x}{2}\big)}\;. \end{aligned}$$

Acima, na passagem da primeira para a segunda linha, usamos a bem-conhecida expressão da *soma de uma progressão geométrica*

$$\sum_{k=0}^{m} a^k \;=\; \frac{1-a^{m+1}}{1-a}\;, \tag{37.87}$$

válida para $m \in \mathbb{N}$ e $a \neq 1$. Que $D_n(0) = (2n+1)/2\pi$ é evidente pela definição (37.84). ■

Apesar de os núcleos de Dirichlet não serem uma sequência delta de Dirac 2π-periódica, tal como definido à página 1969 (falta-lhe a propriedade 2 da definição daquelas), é possível provar que, sob hipóteses convenientes sobre a função f, seus efeitos são semelhantes àqueles descritos no Teorema 37.8, página 1970. As próximas páginas tratam disso.

• O Lema de Riemann-Lebesgue

Proposição 37.10 *Sejam f_k os coeficientes de Fourier de uma função contínua e 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Então, $\lim\limits_{k\to\pm\infty} f_k = 0$.* □

Prova. Se f é contínua e 2π-periódica e $\epsilon > 0$, existe, pelo Teorema 37.9, um polinômio trigonométrico 2π-periódico p_ϵ tal que $|f(x) - p_\epsilon(x)| \leq \epsilon$ para todo $x \in [-\pi,\ \pi]$. Como p_ϵ é um polinômio trigonométrico, seus coeficientes de Fourier $(p_\epsilon)_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} p_\epsilon(x)e^{-ikx}dx$ anulam-se para todo $|k|$ maior que um dado $K(\epsilon) \in \mathbb{N}$. Assim, para $|k| > K(\epsilon)$ tem-se

$$|f_k| \;=\; \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx\right| \;=\; \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-p_\epsilon(x))e^{-ikx}dx\right| \;\leq\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-p_\epsilon(x)|dx \;\leq\; \sqrt{2\pi}\epsilon\;.$$

Logo, provamos que para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) := K(\epsilon/\sqrt{2\pi}) > 0$ tal que $|f_k| \leq \epsilon$ para todo $|k| > N(\epsilon)$. Por definição, isso significa que $\lim\limits_{k\to\pm\infty} f_k = 0$. ■

Essa proposição pode ser fortemente generalizada.

Teorema 37.10 (Lema de Riemann-Lebesgue) *Seja $f : [-\pi,\ \pi] \to \mathbb{C}$ uma função integrável (no sentido de Lebesgue). Então,* $\lim\limits_{k\to\pm\infty} f_k = 0$. □

Prova. Toda função integrável pode ser aproximada por uma função contínua e 2π-periódica na norma L^1, ou seja, para cada $\epsilon > 0$ existe uma função contínua e 2π-periódica f_ϵ tal que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_\epsilon(x)| dx \leq \epsilon$. Assim, de $\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iky}\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} (f(y) - f_\epsilon(y))\, e^{-iky}\, dy + \int_{-\pi}^{\pi} f_\epsilon(y)\, e^{-iky}\, dy$, obtemos

$$\sqrt{2\pi}|f_k| \ = \ \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iky}\, dy\right| \ \leq \ \int_{-\pi}^{\pi} |f(y) - f_\epsilon(y)|\, dy + \left|\int_{-\pi}^{\pi} f_\epsilon(y)\, e^{-iky}\, dy\right| \ \leq \ \epsilon + \sqrt{2\pi}\, |(f_\epsilon)_k| \ .$$

Pela Proposição 37.10, podemos obter $|(f_\epsilon)_k| \leq \epsilon$ tomando $|k|$ grande o suficiente e, assim, para tais k's vale $|f_k| \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\epsilon$, completando a prova. ■

Nota. O Lema de Riemann-Lebesgue tem uma história interessante. Sua primeira demonstração foi obtida por Riemann em uma tese, apresentada à Universidade de Göttingen em 1854 e publicada em 1867, intitulada "Sobre a representabilidade de uma função por uma série trigonométrica"[34], tese essa requerida para a obtenção do título de *Privatdozent* que lhe permitiria dar aulas na universidade (e cobrar por elas dos alunos. À época, na Alemanha, somente professores titulares eram contratados das universidades e recebiam salários das mesmas). As regras exigiam que o candidato redigisse uma tese e apresentasse um seminário sobre um tema diferente diante de uma banca. O candidato propunha quatro temas para o seminário dos quais um era escolhido pelo decano da instituição. Riemann propôs três temas sobre Eletromagnetismo e um sobre Geometria. No caso de Riemann o decano era ninguém menos que Gauss, que escolheu o tema de Geometria, pois soubera que Riemann tinha ideias bastante originais a respeito. A escolha não poderia ter sido melhor, pois o seminário de Riemann fez História[35] e lançou as bases do que hoje se denomina Geometria Riemanniana (vide Capítulo 33, página 1678, espacialmente a Seção 34.1, página 1748), cuja importância à Teoria da Relatividade Geral é bem-conhecida. Mas a tese escrita versava sobre a teorias das séries de Fourier e para a obtenção dos seus resultados, em particular, do que hoje é conhecido como Lema de Riemann-Lebesgue, Riemann percebeu a necessidade de apresentar uma definição mais precisa da noção de integral da que era empregada até então. Nascia aí a chamada integral de Riemann. O estudante poderá acompanhar em [158] uma demonstração do Lema de Riemann-Lebesgue próxima à linha original de Riemann e aperceber-se da necessidade de precisão da noção de integral naquele contexto. Nossa demonstração acima seguiu outras linhas. Posteriormente, Lebesgue estendeu a noção de integral de Riemann e reobteve uma prova do Teorema 37.10 para a classe das funções integráveis segundo Lebesgue. ♣

• A condição de Dini

O seguinte teorema, devido a Dini[36], generaliza resultados anteriores de Dirichlet e desempenha um papel importante no estudo da convergência de séries de Fourier. Suas consequências mais relevantes serão enunciadas após sua demonstração.

Teorema 37.11 (Condição de Dini) *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrável e 2π-periódica e seja $x \in \mathbb{R}$ tal que*

1. *Existem os dois limites laterais $\lim\limits_{t\to 0_+} f(x+t)$ e $\lim\limits_{t\to 0_-} f(x+t)$, que denotamos por $f(x_+)$ e $f(x_-)$, respectivamente.*
2. *Existe $\kappa > 0$ tal que*
$$\int_0^\kappa \frac{|\mathscr{D}_f(x,\ y)|}{y}\, dy \ < \ \infty \ , \tag{37.88}$$
onde
$$\mathscr{D}_f(x,\ y) \ := \ f(x+y) + f(x-y) - (f(x_+) + f(x_-)) \ .$$

Então,
$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,\ x) \ = \ \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} \ .$$

□

[34] O título original é "Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe".

[35] O conteúdo do seminário foi publicado sob o título "Sobre as hipóteses que fundamentam a Geometria" ("Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen").

[36] Ulisse Dini (1845–1918).

Prova. Usando (37.50) podemos escrever $S_n(f,\ x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) f(x-y)dy$. Como D_n é uma função par, a última integral pode também ser escrita como $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(-y) f(x-y)dy = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) f(x+y)dy$. Assim, podemos escrever,

$$S_n(f,\ x) \ = \ \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y)\left(f(x+y)+f(x-y)\right)\,dy$$

Usando também (37.85), obtemos

$$S_n(f,\ x) - \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2} \ = \ \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y)\mathscr{D}_f(x,\ y)\,dy \ = \ \int_0^{\pi} D_n(y)\mathscr{D}_f(x,\ y)\,dy\ , \tag{37.89}$$

A última igualdade provém do fato que $\mathscr{D}_f(x,\ y) = \mathscr{D}_f(x,\ -y)$. Para $0<\delta<\pi$ podemos escrever

$$S_n(f,\ x) - \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2} \ = \ \int_0^{\delta} D_n(y)\mathscr{D}_f(x,\ y)\,dy + \int_{\delta}^{\pi} D_n(y)\mathscr{D}_f(x,\ y)\,dy\ . \tag{37.90}$$

Comecemos nossa análise pela primeira integral em (37.90). O integrando é

$$D_n(y)\mathscr{D}_f(x,\ y) \ = \ \frac{1}{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}\right)}\mathscr{D}_f(x,\ y) \ = \ \operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)\left[\frac{\frac{y}{2}}{\pi\operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}\right)}\right]\frac{\mathscr{D}_f(x,\ y)}{y}\ .$$

A função $\frac{\frac{y}{2}}{\pi\operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}\right)}$ é crescente em todo intervalo $[0,\ \pi]$ (mostre isso!) e, portanto, limitada superiormente por $\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}$. Assim, naquele intervalo, $|D_n(y)\mathscr{D}_f(x,\ y)| \ \leq \ \frac{1}{2}\frac{|\mathscr{D}_f(x,\ y)|}{y}$. Logo, para primeira integral em (37.90) temos

$$\left|\int_0^{\delta} D_n(y)\mathscr{D}_f(x,\ y)\,dy\right| \ \leq \ \frac{1}{2}\int_0^{\delta}\frac{|\mathscr{D}_f(x,\ y)|}{y}\,dy$$

Escolhendo δ pequeno o suficiente podemos obter $\int_0^{\delta}\frac{|\mathscr{D}_f(x,\ y)|}{y}\,dy \leq \epsilon$ em função da condição (37.88).

Com esse δ assim fixado, passemos agora à segunda integral em (37.90). Usando (37.86), a mesma fica

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iny}\,\chi_{[\delta,\ \pi]}(y)\left(\frac{e^{iy/2}\mathscr{D}_f(x,\ y)}{2i\operatorname{sen}(y/2)}\right)\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny}\,\chi_{[\delta,\ \pi]}(y)\left(\frac{e^{-iy/2}\mathscr{D}_f(x,\ y)}{2i\operatorname{sen}(y/2)}\right)\,dy \tag{37.91}$$

onde $\chi_{[\delta,\ \pi]}$ é a função característica do intervalo $[\delta,\ \pi]$:

$$\chi_{[\delta,\ \pi]}(y) \ = \ \begin{cases} 1, & y\in[\delta,\ \pi]\ , \\ 0, & y\notin[\delta,\ \pi]\ . \end{cases}$$

Agora, as funções $\chi_{[\delta,\ \pi]}(y)\left(\frac{e^{\pm iy/2}\mathscr{D}_f(x,\ y)}{2i\operatorname{sen}(y/2)}\right)$ são integráveis (note que a singularidade de $\frac{1}{\operatorname{sen}(y/2)}$ em $y=0$ é eliminada pelo fator $\chi_{[\delta,\ \pi]}(y)$). Assim, aplica-se o Lema de Riemann-Lebesgue, Teorema 37.10, e as integrais em (37.91) podem ser feitas menores que qualquer $\epsilon>0$ prescrito, tomando $|n|$ grande o suficiente. Isso completa a demonstração. ■

• Condições de convergência pontual de séries de Fourier

Após o Teorema 37.11 a questão que naturalmente se coloca é saber para quais tipos de funções f a condição de Dini é satisfeita. Há duas classes de funções de maior interesse (especialmente no contexto de aplicações a equações diferenciais): as contínuas e as contínuas por partes. As proposições que seguem reúnem esses casos.

Proposição 37.11 I. *Suponha que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ seja Hölder[37]-contínua em um ponto $x\in[-\pi,\ \pi]$, ou seja, satisfaça*

$$|f(x)-f(y)| \ \leq \ \alpha|x-y|^{\beta} \tag{37.92}$$

[37] Otto Ludwig Hölder (1859–1937).

para todo y em um intervalo $[x-\kappa,\ x+\kappa]$, para algum $\kappa > 0$, algum $\alpha \geq 0$ e algum $\beta > 0$. Então, f satisfaz a condição de Dini (37.88) em x.

II. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ não for contínua em x mas existirem os limites laterais $\lim_{t\to 0_+} f(x+t) =: f(x_+)$ e $\lim_{t\to 0_-} f(x+t) =: f(x_-)$ e de sorte que existam constantes $\kappa > 0$, $M_+ \geq 0$ e $M_- \geq 0$ tais que*

$$\left|\frac{f(x+y)-f(x_+)}{y}\right| \leq M_+ \qquad e \qquad \left|\frac{f(x-y)-f(x_-)}{y}\right| \leq M_- \tag{37.93}$$

para todo $0 < y \leq \kappa$, então a condição de Dini (37.88) é satisfeita em x. □

Prova. **I.** Por (37.92), f é contínua em x e, portanto, $\mathscr{D}_f(x,\ y) = f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)$. Assim, para $y \in [-\kappa,\ \kappa]$ valerá

$$|\mathscr{D}_f(x,\ y)| = \Big|\big(f(x+y)-f(x)\big) + \big(f(x-y)-f(x)\big)\Big| \leq \big|f(x+y)-f(x)\big| + \big|f(x-y)-f(x)\big| \overset{(37.92)}{\leq} 2\alpha|y|^\beta\ .$$

Logo,

$$\int_0^\kappa \frac{|\mathscr{D}_f(x,\ y)|}{y}\,dy \leq 2\alpha\int_0^\kappa y^{\beta-1}\,dy = \frac{2\alpha\kappa^\beta}{\beta} < \infty\ .$$

II. Para todo $y \in (0,\ \kappa]$,

$$\frac{|\mathscr{D}_f(x,\ y)|}{y} = \frac{\Big|\big(f(x+y)-f(x_+)\big) + \big(f(x-y)-f(x_-)\big)\Big|}{y}$$

$$\leq \frac{\big|f(x+y)-f(x_+)\big|}{y} + \frac{\big|f(x-y)-f(x_-)\big|}{y} \overset{(37.93)}{\leq} M_+ + M_-\ ,$$

o que claramente implica a condição de Dini (37.88). ■

Chegamos às consequências mais relevantes da Condição de Dini:

Teorema 37.12 (Teorema de Fourier) A. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é contínua, diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}$ e 2π-periódica, então*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,\ x) = f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, a série de Fourier de f converge pontualmente a f.

B. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é contínua por partes e 2π-periódica e as derivadas laterais*

$$f'(x_+) := \lim_{s\to 0+} \frac{f(x+s)-f(x_+)}{s} \qquad e \qquad f'(x_-) := \lim_{s\to 0-} \frac{f(x+s)-f(x_-)}{s}$$

existirem para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,\ x) = \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. □

Prova. **A.** Se f é contínua e diferenciável em x, então f é Hölder-contínua com $\beta = 1$[38] (justifique!). **B.** Se existem $f'(x_\pm)$, como definidos acima, então valem as relações em (37.93) (justifique!). ■

Que a série de Fourier de uma função contínua por partes converge ao valor médio $(f(x_+)+f(x_-))/2$ foi sugerido pelo próprio Fourier, com base em diversos exemplos, em seu trabalho de 1822 "Théorie Analytique de la Chaleur" . A

[38] Ou seja, f é Lipschitz-contínua.

primeira demonstração correta foi obtida por Dirichlet em 1828. Antes de Dirichlet, Poisson[39] e Cauchy[40] apresentaram demonstrações falhas. A natureza não-trivial dos erros desses autores é discutida em [291].

• **Inversão de integrais definidas com a série de Fourier**

Na Seção 37.1, página 1938, mencionamos o fato básico que se tivermos uma sequência de funções f_n que converge uniformemente a uma função f em um intervalo finito $[a,\ b]$, então valerá $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right) = \int_a^b \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$ (se as integrais existirem), ou seja, podemos inverter a tomada do limite da sequência pela integração. Um ponto muito interessante, e importante, sobre as séries de Fourier, é que, sobre condições adequadas, é possível inverter a tomada do limite por integrais definidas em intervalos finitos, mesmo quando as mesmas séries não são uniformemente convergentes. Mas precisamente, mostraremos no que segue que as condições do Teorema de Fourier, Teorema 37.12, página 1978, são suficientes para garantir a possibilidade de se inverter a tomada do limite de séries de Fourier por integrais definidas em intervalos finitos.

Teorema 37.13 *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ uma função 2π-periódica satisfazendo as condições* **A** *ou* **B** *do Teorema de Fourier, Teorema 37.12. Seja $S_n(f,\ x)$ sua série de Fourier:*

$$S_n(f,\ x)\ :=\ \sum_{k=-n}^{n} f_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\ , \qquad \text{com} \quad f_k\ :=\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} f(x)\ dx\ .$$

Então, para quaisquer $a,\ b$ com $-\infty < a \le b < \infty$ vale $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b S_n(f,\ x)\,dx$, ou seja,

$$\int_a^b f(x)\ dx\ =\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} f_k \int_a^b \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\ dx\ =\ \frac{(b-a)f_0}{\sqrt{2\pi}} + \lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{k=-n\\ k\neq 0}}^{n} \frac{f_k\big(e^{ikb}-e^{ika}\big)}{ik\sqrt{2\pi}}\ .$$

□

Comentamos que o teorema acima pode ser generalizado de modo a abarcar não apenas as funções f que satisfaçam do Teorema de Fourier, mas também todas as funções $f\in L^2\big([-\pi,\ \pi],\ dx\big)$ (vide Teorema 37.15, página 1988). Nesse caso, a demonstração é ainda mais simples que a que apresentamos a seguir, mas os pré-requisitos para sua elaboração são mais avançados, pois faz-se uso da propriedade de completeza dos polinômios trigonométricos.

Prova do Teorema 37.13. Seja a função $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definida por $F(s)\ :=\ \int_0^s \left(f(x)-\frac{f_0}{\sqrt{2\pi}}\right)dx$. Essa integral está bem definida pois f é contínua ou contínua por partes, com limites laterais finitos, pela hipótese que f satisfaz as condições **A** ou **B** do Teorema de Fourier, Teorema 37.12. Pelas mesmas razões F é, para todo $s\in R$, contínua e diferenciável, com

$$F'(s)\ =\ f(s)-\frac{f_0}{\sqrt{2\pi}}\ . \tag{37.94}$$

Além disso, é fácil provar que F é periódica de período 2π. De fato, para todo $s\in\mathbb{R}$ vale

$$F(s+2\pi)-F(s)\ =\ \int_s^{s+2\pi}\left(f(x)-\frac{f_0}{\sqrt{2\pi}}\right)dx\ =\ \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\frac{f_0}{\sqrt{2\pi}}\right)dx\ =\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx-\sqrt{2\pi}f_0\ =\ 0\ ,$$

sendo que na segunda igualdade usamos (37.51) (já que o integrando é 2π-periódico) e na última igualdade usamos a definição de f_0.

Com isso, estabelecemos que também a função F satisfaz as hipóteses do Teorema de Fourier, e podemos escrever

$$F(s)\ =\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} F_k\frac{e^{iks}}{\sqrt{2\pi}}\ , \qquad \text{com} \quad F_k\ :=\ \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-iks}}{\sqrt{2\pi}}F(s)\ ds\ ,$$

[39] Siméon Denis Poisson (1781–1840).
[40] Augustin Louis Cauchy (1789–1857).

com a série de Fourier de F convergindo pontualmente a F para todo s, já que F é contínua.

Observemos agora que, por integração por partes, vale para todo $k \neq 0$,

$$F_k = \frac{1}{-ik\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{de^{-iks}}{ds} \right) F(s)\, ds = \frac{(-1)^k}{-ik\sqrt{2\pi}} \underbrace{\big(F(\pi) - F(-\pi)\big)}_{=0} - \frac{1}{-ik\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iks} F'(s)\, ds$$

$$\overset{(37.94)}{=} \frac{1}{ik\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iks} \left(f(s) - \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} \right) ds = \frac{f_k}{ik} .$$

Para calcular o coeficiente F_0 usamos o fato evidente que $F(0) = 0$. Como F é contínua, sua série de Fourier converge a F em toda parte (novamente pelo Teorema de Fourier). Calculando-a em $s = 0$, segue que $0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-n}^{n} F_k$, donde concluímos que

$$F_0 = -\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} F_k = -\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \frac{f_k}{ik} .$$

Como $\int_0^s f(x)dx = \frac{sf_0}{\sqrt{2\pi}} + F(s)$, provamos que

$$\int_0^s f(x)dx = \frac{sf_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{F_0}{\sqrt{2\pi}} + \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \frac{f_k}{ik} \frac{e^{iks}}{\sqrt{2\pi}}$$

e como $\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx$, concluímos que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)f_0}{\sqrt{2\pi}} + \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \frac{f_k\big(e^{ikb} - e^{ika}\big)}{ik\sqrt{2\pi}} ,$$

como queríamos demonstrar. ■

37.4.4.1 Séries de Fourier em Senos ou Cossenos para Funções Definidas em Intervalos Compactos

Aqui trataremos de um resultado da teoria das séries de Fourier que se refere a expansões em séries de senos ou cossenos de funções definidas em intervalos compactos, como o intervalo $[0,\ L]$, $L > 0$. Esses resultados têm aplicações na resolução de problemas de valor inicial de certas equações diferenciais parciais, como o problema da corda vibrante ou da equação de difusão, das quais trataremos no Capítulo 43, página 2416. O principal resultado é a

Proposição 37.12 *Para $L > 0$, seja $f : [0,\ L] \to \mathbb{C}$ uma função contínua e diferenciável ou contínua por partes e tal que as derivadas laterais*

$$f'(x_+) := \lim_{s\to 0+} \frac{f(x+s) - f(x_+)}{s} \qquad e \qquad f'(y_-) := \lim_{s\to 0-} \frac{f(y+s) - f(y_-)}{s}$$

existam para todo $x \in [0,\ L)$ e todo $y \in (0,\ L]$, respectivamente. Então, tem-se

I. Série de Fourier de senos. *Para todo $x \in [0,\ L]$ vale*

$$\underline{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L} x \right) ,$$

onde, para $x \in [0,\ L]$,

$$\underline{f}(x) := \begin{cases} \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2} , & se\ x \in (-L,\ L) , \\ 0 , & se\ x = 0\ ou\ x = L . \end{cases}$$

e onde

$$A_k \;:=\; \frac{2}{L}\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{L}y\right)\, f(y)\, dy\ .$$

II. Série de Fourier de cossenos. *Para todo* $x \in [0,\ L]$ *vale*

$$\underset{\sim}{f}(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\ , \tag{37.95}$$

onde, para $x \in [0,\ L]$,

$$\underset{\sim}{f}(x) \;:=\; \begin{cases} f(0_+)\ , & \text{se } x = 0\ , \\ \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\ , & \text{se } x \in (0,\ L)\ , \\ f(L_-)\ , & \text{se } x = L\ , \end{cases} \tag{37.96}$$

e onde

$$B_0 \;:=\; \frac{1}{L}\int_0^L f(y)\, dy \quad \text{e} \quad B_k \;:=\; \frac{2}{L}\int_0^L \cos\left(\frac{\pi k}{L}y\right) f(y)\, dy\ , \quad \text{para } k \in \mathbb{N}\ . \tag{37.97}$$

□

Prova. **Parte I.** Para a demonstração necessitamos considerar uma extensão $2L$-periódica <u>ímpar</u> da função f. Defina-se primeiramente $f_1 : [-L,\ L] \to \mathbb{C}$ por

$$f_1(x) \;:=\; \begin{cases} f(x)\ , & \text{se } x \in (0,\ L)\ , \\ 0\ , & \text{se } x = 0 \text{ ou se } x = \pm L\ , \\ -f(-x)\ , & \text{se } x \in (-L,\ 0)\ , \end{cases}$$

e defina-se $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por $\tilde{f}(x) := f_1\big(x \mod 2L\big)$, $x \in \mathbb{R}$, o que equivale a dizer que se $y \in \mathbb{R}$ é da forma $y = x + 2kL$ com $x \in [-L,\ L]$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $\tilde{f}(y) = f_1(x)$.

A função $\tilde{f}$ é ímpar (i.e., $\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$), $2L$-periódica e, em função das propriedades supostas de continuidade e diferenciabilidade por partes da função f, satisfaz as condições do Teorema de Fourier, Teorema 37.12, página 1978. Justifique! Concluímos daquele teorema e de (37.59) que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\frac{\tilde{f}(x_+)+\tilde{f}(x_-)}{2} \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} \tilde{f}_k \frac{e^{i\frac{\pi k}{L}x}}{\sqrt{2L}}\ , \quad \text{com} \quad \tilde{f}_k \;=\; \int_{-L}^{L} \frac{e^{-i\frac{\pi k}{L}y}}{\sqrt{2L}}\, \tilde{f}(y)\, dy\ . \tag{37.98}$$

Agora, é evidente pela definição de $\tilde{f}$, e pelo fato de ser uma função ímpar, que

$$\tilde{f}_k \;=\; \int_{-L}^{L} \frac{e^{-i\frac{\pi k}{L}y}}{\sqrt{2L}}\, \tilde{f}(y)\, dy \;=\; \frac{-i}{\sqrt{2L}}\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{L}y\right) \tilde{f}(y)\, dy \;=\; -i\sqrt{\frac{2}{L}}\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{L}y\right) f(y)\, dy\ . \tag{37.99}$$

Disso extrai-se também que $\tilde{f}_{-k} = -\tilde{f}_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Com isso, a primeira equação em (37.98) escreve-se

$$\frac{\tilde{f}(x_+)+\tilde{f}(x_-)}{2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2L}}\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k \left(e^{i\frac{\pi k}{L}x} - e^{-i\frac{\pi k}{L}x}\right) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{L}x\right)\ ,$$

onde, para $k \in \mathbb{N}$,

$$A_k \;:=\; i\sqrt{\frac{2}{L}}\tilde{f}_k \;=\; \frac{2}{L}\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{L}y\right) f(y)\, dy\ .$$

O interesse por (37.98) se dá para $x \in [0,\ L]$, em cujo caso temos

$$\tilde{f}(x_+) \ = \ \begin{cases} f(0_+)\ , & \text{se } x = 0\ , \\ f(x_+)\ , & \text{se } x \in (-L,\ L)\ , \\ -f(L_-)\ , & \text{se } x = L\ , \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \tilde{f}(x_-) \ = \ \begin{cases} -f(0_+)\ , & \text{se } x = 0\ , \\ f(x_-)\ , & \text{se } x \in (-L,\ L)\ , \\ f(L_-)\ , & \text{se } x = L\ , \end{cases}$$

de onde obtemos, para $x \in [0,\ L]$,

$$\frac{\tilde{f}(x_+) + \tilde{f}(x_-)}{2} \ = \ \begin{cases} \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\ , & \text{se } x \in (-L,\ L)\ , \\ 0\ , & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = L\ . \end{cases}$$

Isso provou a parte I.

Parte II. Para a demonstração necessitamos considerar uma extensão $2L$-periódica <u>par</u> da função f. Defina-se primeiramente $f_1 : [-L,\ L] \to \mathbb{C}$ por

$$f_1(x) \ := \ \begin{cases} f(x)\ , & \text{se } x \in [0,\ L]\ , \\ f(-x)\ , & \text{se } x \in [-L,\ 0)\ , \end{cases}$$

e defina-se $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por $\tilde{f}(x) := f_1\big(x \mod 2L\big)$, $x \in \mathbb{R}$, o que equivale a dizer que se $y \in \mathbb{R}$ é da forma $y = x + 2kL$ com $x \in [-L,\ L]$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $\tilde{f}(y) = f_1(x)$.

A função $\tilde{f}$ é par (i.e., $\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$), $2L$-periódica e, em função das propriedades supostas de continuidade e diferenciabilidade por partes da função f, satisfaz as condições do Teorema de Fourier, Teorema 37.12, página 1978. Justifique! Concluímos daquele teorema e de (37.59) que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\frac{\tilde{f}(x_+) + \tilde{f}(x_-)}{2} \ = \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \tilde{f}_k \frac{e^{i\frac{\pi k}{L}x}}{\sqrt{2L}}\ , \qquad \text{com} \qquad \tilde{f}_k \ = \ \int_{-L}^{L} \frac{e^{-i\frac{\pi k}{L}y}}{\sqrt{2L}}\, \tilde{f}(y)\, dy\ . \tag{37.100}$$

Agora, é evidente pela definição de $\tilde{f}$, e pelo fato de ser uma função par, que

$$\tilde{f}_k \ = \ \int_{-L}^{L} \frac{e^{-i\frac{\pi k}{L}y}}{\sqrt{2L}}\, \tilde{f}(y)\, dy \ = \ \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{\pi k}{L} y\right)\, \tilde{f}(y)\, dy \ = \ \sqrt{\frac{2}{L}} \int_{0}^{L} \cos\left(\frac{\pi k}{L} y\right)\, f(y)\, dy\ . \tag{37.101}$$

Disso extrai-se também que $\tilde{f}_{-k} = \tilde{f}_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Com isso, a primeira equação em (37.100) escreve-se

$$\frac{\tilde{f}(x_+) + \tilde{f}(x_-)}{2} \ = \ \frac{\tilde{f}_k}{\sqrt{2L}} + \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k \left(e^{i\frac{\pi k}{L}x} + e^{-i\frac{\pi k}{L}x}\right) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos\left(\frac{\pi k}{L} x\right)\ ,$$

onde

$$B_0 \ := \ \frac{\tilde{f}_0}{\sqrt{2L}} \ = \ \frac{1}{L} \int_0^L f(y)\, dy\ ,$$

e onde, para $k \in \mathbb{N}$,

$$B_k \ := \ \sqrt{\frac{2}{L}} \tilde{f}_k \ = \ \frac{2}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{\pi k}{L} y\right)\, f(y)\, dy\ .$$

O interesse por (37.100) se dá para $x \in [0,\ L]$, em cujo caso temos

$$\tilde{f}(x_+) \ = \ \begin{cases} f(0_+)\ , & \text{se } x = 0\ , \\ f(x_+)\ , & \text{se } x \in (-L,\ L)\ , \\ f(L_-)\ , & \text{se } x = L\ , \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \tilde{f}(x_-) \ = \ \begin{cases} f(0_+)\ , & \text{se } x = 0\ , \\ f(x_-)\ , & \text{se } x \in (-L,\ L)\ , \\ f(L_-)\ , & \text{se } x = L\ , \end{cases}$$

de onde obtemos, para $x \in [0,\ L]$,

$$\frac{\tilde{f}(x_+) + \tilde{f}(x_-)}{2} = \begin{cases} f(0_+)\ , & \text{se } x = 0\ , \\ \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\ , & \text{se } x \in (-L,\ L)\ , \\ f(L_-)\ , & \text{se } x = L\ . \end{cases}$$

Isso provou a parte II. ■

E. 37.8 *Exercício*. Seja $L > 0$. Usando, por exemplo, as fórmulas de prostaférese (37.67)–(37.69), demonstre as relações seguintes relações:

$$\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}y\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\,dy = \begin{cases} 0\ , & \text{se } n \neq m\ , \\ L\ , & \text{se } n = m = 0\ , \\ \frac{L}{2}\ , & \text{se } n = m \neq 0\ , \end{cases} \qquad m,\ n \in \mathbb{N}_0\ , \tag{37.102}$$

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\,dy = \frac{L}{2}\,\delta_{m,\,n}\ , \qquad m,\ n \in \mathbb{N}\ , \tag{37.103}$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\,dy = \begin{cases} 0\ , & \text{se } n = m\ , \\ \frac{L}{\pi}\frac{n}{n^2-m^2}\Big(1-(-1)^{m+n}\Big)\ , & \text{se } n \neq m\ , \end{cases} \qquad m,\ n \in \mathbb{N}_0\ . \tag{37.104}$$

A expressão (37.102) informa-nos que conjunto de funções $\left\{N_m \cos\left(\frac{m\pi}{L}y\right),\ m \in \mathbb{N}_0\right\}$, com $N_m = \sqrt{\frac{2}{L}}$ para $m \neq 0$ e $N_0 = \sqrt{\frac{1}{L}}$, é um conjunto ortonormal em $L^2\big([0,\ L],\ dx\big)$. A expressão (37.103) informa-nos que conjunto de funções $\left\{\sqrt{\frac{2}{L}}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}y\right),\ m \in \mathbb{N}\right\}$ é um conjunto ortonormal em $L^2\big([0,\ L],\ dx\big)$. De (37.104) vemos que as funções $\cos\left(\frac{m\pi}{L}y\right)$, $m \in \mathbb{N}_0$, não são sempre ortogonais a todas as funções $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$, $n \in \mathbb{N}$, no intervalo $[0,\ L]$, pois o lado direito de (37.104) anula-se se e somente quando $m+n$ for par.

É interessante ao estudante comparar as relações (37.102)–(37.104), acima, com as relações (37.62)–(37.64), da página 1968.

Tanto o conjunto de funções $\left\{\sqrt{\frac{2}{L}}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}y\right),\ m \in \mathbb{N}\right\}$ quanto o conjunto de funções $\left\{N_m \cos\left(\frac{m\pi}{L}y\right),\ m \in \mathbb{N}_0\right\}$, com $N_m = \sqrt{\frac{2}{L}}$ para $m \neq 0$ e $N_0 = \sqrt{\frac{1}{L}}$, são conjuntos ortonormais completos em $L^2\big([0,\ L],\ dx\big)$, ou seja, compõem bases ortonormais completas nesse espaço. ✱

37.4.5 Revisitando a Aproximação Uniforme de Funções Contínuas e Periódicas por Polinômios Trigonométricos

37.4.6 Somas de Cesàro

Se $a_m,\ m \in \mathbb{N}$ é uma sequência de números complexos a expressão $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, onde A_n é a sequência das somas parciais $A_n := \sum\limits_{m=0}^{n} a_m$, caso o limite exista, define, como bem sabido, o que se denomina uma *série*, a *série associada à sequência* a_m. Assim, uma série convergirá se e somente se o limite da sequência formada pelas somas parciais acima convergir. Notacionalmente, uma série é também denotada por $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m$, caso o limite $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=0}^{n} a_m$ exista.

A *soma de Cesàro*[41] da sequência a_m (também denominada *série de Cesàro*, ou *média de Cesàro*, associada à sequência a_m), é definida por

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} A_m \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{p=0}^{m} a_p \;.$$

caso o limite exista. Como se vê, a série de Cesàro de uma sequência a_m é formada pelo limite (caso exista) da <u>média</u> das somas parciais da sequência a_m.

É fácil demonstrar que se uma série converge a um valor a, então o limite de sua série de Cesàro também existe e também vale a. De fato, se A_m converge a a, então para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que $|A_m - a| < \epsilon$ para todo $m > N(\epsilon)$. Tomando $n > N(\epsilon)$, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} A_m - a \;&=\; \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{N(\epsilon)} A_m + \frac{1}{n+1} \sum_{m=N(\epsilon)+1}^{n} A_m - a \\
&=\; \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{N(\epsilon)} A_m + \frac{1}{n+1} \sum_{m=N(\epsilon)+1}^{n} (A_m - a) + \left(\frac{N(\epsilon)+1}{n+1}\right) a \;.
\end{aligned}$$

Para ϵ fixo, o termo $\displaystyle\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{N(\epsilon)} A_m$ vai a zero quando $n \to \infty$, pois o número de termos somados é fixo. O termo $\left(\frac{N(\epsilon)+1}{n+1}\right) a$ claramente também vai a zero quando $n \to \infty$. Por fim, para a soma $\displaystyle\frac{1}{n+1} \sum_{m=N(\epsilon)+1}^{n} (A_m - a)$ temos a majoração

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{m=N(\epsilon)+1}^{n} (A_m - a) \right| \;\le\; \frac{1}{n+1} \sum_{m=N(\epsilon)+1}^{n} |A_m - a| \;\le\; \frac{1}{n+1} \sum_{m=N(\epsilon)+1}^{n} \epsilon \;=\; \frac{n - N(\epsilon)}{n+1} \epsilon \;<\; \epsilon \;.$$

Logo,

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{m=N(\epsilon)+1}^{n} (A_m - a) \right| \;<\; \epsilon$$

Assim, $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} A_m - a \right| < \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, estabelecemos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} A_m = a$, como queríamos provar.

O interessante sobre as séries de Cesàro é que existem sequências cujas séries não possuem limite, mas cujas séries de Cesàro convergem. Um exemplo básico é a sequência $a_m = (-1)^m$. Suas somas parciais valem $A_n = ((-1)^n + 1)/2$, ou seja, $A_n = 1$ se n é par e $A_n = 0$ se n é ímpar. Claramente $\lim_{n\to\infty} A_n$ não existe. Porém, sua série de Cesàro existe, com

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} A_m \;=\; \frac{1}{2} \;,$$

como é fácil constatar.

Há diversos outros tipos de séries como a de Cesàro, que podem produzir somas convergentes para séries não-convergentes. O livro clássico sobre esse assunto é "Divergent Series", de G. H. Hardy[42] [211], um estimulante texto, de rara elegância de estilo na literatura matemática.

[41] Ernesto Cesàro (1859–1906).
[42] Godfrey Harold Hardy (1877–1947).

37.4.6.1 O Núcleo de Fejér

Vamos agora redemonstrar o Teorema 37.9, lançando outra luz sobre seu significado.

Seja $F_n(x)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$F_n(x) \ := \ \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} D_m(x) \ . \tag{37.105}$$

Como se vê, trata-se da média da soma parcial das sequência dos núcleos de Dirichlet, ao estilo das supracitadas médias de Cesàro. Cada função F_n é denominada *núcleo de Fejér*[43].

Para o que segue é importante estabelecer algumas propriedades dos núcleos de Fejér, o que é feito na próxima proposição, a qual estabelece que as funções F_n formam uma sequência delta de Dirac 2π-periódica.

Proposição 37.13 *Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ os núcleos de Fejér F_n definidos em (37.105) satisfazem:*

1. *F_n é contínua, par e 2π-periódica.*
2. *$F_n(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*
3. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)\, dy \ = \ 1.$
4. *Valem as fórmulas mais explícitas*

$$F_n(x) \ = \ \frac{1}{2\pi(n+1)} \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)}{2}\, x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2 \ , \quad x \neq 0 \ , \qquad F_n(0) \ = \ \frac{n+1}{2\pi} \ . \tag{37.106}$$

5. *Para todo δ com $0 < \delta < \pi$ vale*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \Big\{ F_n(x), \ \delta \leq |x| \leq \pi \Big\} \ = \ 0 \ . \tag{37.107}$$

Ou seja, para todo δ com $0 < \delta < \pi$ a sequência de funções F_n converge uniformemente à função nula na região $[-\pi, \ -\delta] \cup [\delta, \ \pi]$. □

Prova. O item 1 é evidente pelas propriedades correspondentes do núcleo de Dirichlet (Proposição 37.9, página 1974). O item 3 é evidente por (37.85).

[43] Lipót Fejér (1880–1959).

Por (37.86), vale $F_n(0) = \dfrac{1}{2\pi(n+1)}\displaystyle\sum_{m=0}^{n}(2m+1) = \dfrac{n+1}{2\pi}$ (prove isso!) e para $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
F_n(x) &:= \frac{1}{2\pi(n+1)}\sum_{m=0}^{n}\frac{\operatorname{sen}\left((m+\frac{1}{2})x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{4\pi i(n+1)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\sum_{m=0}^{n}\left[e^{ix/2}e^{imx} - e^{-ix/2}e^{-imx}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi i(n+1)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\left[e^{ix/2}\sum_{m=0}^{n}e^{imx} - e^{-ix/2}\sum_{m=0}^{n}e^{-imx}\right] \\
&\overset{(37.87)}{=} \frac{1}{4\pi i(n+1)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\left[e^{ix/2}\left(\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right) - e^{-ix/2}\left(\frac{1-e^{-i(n+1)x}}{1-e^{-ix}}\right)\right] \\
&= \frac{-1}{8\pi(n+1)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\left[e^{i(n+1)x} - 2 + e^{-i(n+1)x}\right] \\
&= \frac{-1}{8\pi(n+1)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\left[e^{i(n+1)x/2} - e^{-i(n+1)x/2}\right]^2 \\
&= \frac{1}{2\pi(n+1)}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 .
\end{aligned}$$

Isso estabeleceu o item 4 e, por conseguinte, o item 2. Para demonstrar o item 5, consideremos $x \in [\delta,\ \pi]$ para algum $0 < \delta < \pi$. Por (37.106),

$$|F_n(x)| \ \leq\ \frac{1}{2\pi(n+1)}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 . \tag{37.108}$$

Agora, no intervalo $[\delta,\ \pi]$ tem-se $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 = -\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3} < 0$ o que significa dizer que a função do lado direito de (37.108) é decrescente e, portanto, assume seu valor máximo em $x = \delta$, o início do intervalo $[\delta,\ \pi]$. Logo,

$$|F_n(x)| \ \leq\ \frac{1}{2\pi(n+1)}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right)^2 . \tag{37.109}$$

Essa desigualdade vale também no intervalo $[-\pi,\ -\delta]$, pois F_n é par. A desigualdade (37.109) implica que $\lim\limits_{n\to\infty}|F_n(x)| = 0$ uniformemente em $[-\pi,\ -\delta] \cup [\delta,\ \pi]$. ■

Estabelecemos que F_n é uma sequência delta de Dirac 2π-periódica e, se f é uma função contínua e 2π-periódica sabemos pelo Teorema 37.8, página 1970, que

$$F_n(f,\ x) \ :=\ \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-y)\, f(y)\, dy$$

converge uniformemente a f em $\mathbb{R}$. Claro está que

$$F_n(f,\ x) \ =\ \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} D_m(x-y)\, f(y)\, dy \ =\ \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} S_m(f,\ x)\ ,$$

mostrando que $F_n(f,\ x)$ é a média de Cesàro das somas parciais de Fourier. A afirmação que toda função contínua e 2π-periódica pode ser aproximada uniformemente pela média de Cesàro de suas somas de Fourier parciais é conhecida

como Teorema de Fejér, resultado provado por aquele autor no ano de 1900. Naturalmente, isso diz que toda função contínua e 2π-periódica pode ser aproximada uniformemente por um polinômio trigonométrico, fato que já estudamos sob a forma do Teorema 37.9, página 1972. A distinção entre o Teorema de Fejér e aquele teorema é o tipo de núcleo de Dirac usado em ambos os casos e o fato de o Teorema de Fejér trazer uma relação com as médias de Cesàro.

37.4.7 Séries de Fourier e o Espaço de Hilbert $L^2\big([-\pi,\,\pi],\,dx\big)$

• **Completeza dos polinômios trigonométricos. Identidade de Parseval**

A teoria das séries de Fourier é intimamente ligada à teoria dos espaços de Hilbert, que desenvolvemos no Capítulo 39, página 2122. Nesse contexto desempenha um papel fundamental o fato de as funções $e_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, $n \in \mathbb{Z}$, formarem um conjunto ortonormal completo em $L^2\big([-\pi,\,\pi],\,dx\big)$ (para a definição da noção de conjunto ortonormal completo e suas e propriedades, vide página 2141 e seguintes). Esse é o conteúdo do seguinte teorema:

Teorema 37.14 *Seja $\mathcal{H} = L^2([-\pi,\,\pi],\,dx)$ o espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável em $[-\pi,\,\pi]$ em relação à medida de Lebesgue dx e cujo produto escalar é $\langle f,\,g\rangle = \int_{[-\pi,\,\pi]} \overline{f(x)}g(x)\,dx$, $f,\,g \in \mathcal{H}$. Então, as funções $e_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, $n \in \mathbb{Z}$, compõem um conjunto ortonormal completo em $\mathcal{H}$. Assim, para todo $g \in \mathcal{H}$ vale*

$$g \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle e_n,\,g\rangle\, e_n \tag{37.110}$$

e

$$\|g\|^2 \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|\langle e_n,\,g\rangle\big|^2\,, \tag{37.111}$$

sendo $\|g\| := \sqrt{\langle g,\,g\rangle}$ a norma de g em $\mathcal{H}$. A convergência da série em (37.110) se dá em relação à norma $\|\cdot\|$ de $\mathcal{H}$, ou seja, tem-se

$$\lim_{N\to\infty} \left\| g - \sum_{n=-N}^{N} \langle e_n,\,g\rangle\, e_n \right\| \;=\; 0\,.$$

□

A demonstração é apresentada na Seção 17.3, página 939, como caso particular da Proposição 17.8, página 941, e com uso de resultados do Capítulo 39, página 2122. Vide comentários que sucedem o enunciado da Proposição 17.8.

A identidade (37.111) é denominada *identidade de Parseval*[44], que a deduziu em 1805. Se, por exemplo, g for uma função contínua ou contínua por partes em $[-\pi,\,\pi]$ (situações essas encontradas em muitas aplicações da teoria das séries de Fourier, por exemplo, à solução de equações diferenciais), teremos $g \in L^2\big([-\pi,\,\pi],\,dx\big)$ e, portanto,

$$g(x) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \qquad \text{com} \qquad g_n \;:=\; \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}}\, g(x)\,dx\,, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}\,,$$

com a série convergindo no sentido da norma de $L^2\big([-\pi,\,\pi],\,dx\big)$, sendo que pela identidade de Parseval valerá

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big|g(x)\big|^2\,dx \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_n|^2\,.$$

Nos exercícios da Seção 37.6, página 1993, apresentamos alguns usos dessa identidade.

• **Inversão de integrais definidas com a série de Fourier. Generalização para $L^2\big([-\pi,\,\pi],\,dx\big)$**

Vamos agora apresentar um resultado que garante a possibilidade de inverter integrais de Lebesgue em intervalos compactos de uma função de $L^2\big([-\pi,\,\pi],\,dx\big)$ com sua série de Fourier, generalizando o Teorema 37.13, página 1979.

[44] Marc-Antoine Parseval de Chênes (1755–1836).

Teorema 37.15 *Seja* $f \in L^2\big([-\pi,\ \pi],\ dx\big)$ *e sejam* $f_k := \displaystyle\int_{[-\pi,\ \pi]} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} f(x)dx$, $k \in \mathbb{Z}$, *seus coeficientes de Fourier. Então, para quaisquer* $a,\ b$ *com* $[a,\ b] \subset [-\pi,\ \pi]$ *vale*

$$\int_{[a,\ b]} f\, dx \ = \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f_k \int_a^b \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\, dx \ = \ \frac{(b-a)f_0}{\sqrt{2\pi}} + \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \frac{f_k\big(e^{ikb} - e^{ika}\big)}{ik\sqrt{2\pi}}\ , \tag{37.112}$$

a integração do lado esquerdo sendo entendida no sentido de Lebesgue. Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *for uma periodização de período* 2π *de uma função* f *de* $L^2\big([-\pi,\ \pi],\ dx\big)$, *então* $\int_{[a,\ b]} g\, dx$ *é também dada pelo lado direito de (37.112), mas agora para qualquer intervalo* $[a,\ b]$ *com* $-\infty < a \leq b < \infty$. □

Prova. Pelo Teorema 37.14, página 1987, o conjunto $e_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, $n \in \mathbb{Z}$, forma um conjunto ortonormal completo em $L^2\big([-\pi,\ \pi],\ dx\big)$ e podemos escrever $f = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f_k\, e_k$ com a convergência se dando no sentido da norma de $L^2\big([-\pi,\ \pi],\ dx\big)$, onde $f_k := \langle e_k,\ f\rangle = \displaystyle\int_{[-\pi,\ \pi]} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} f(x)dx$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Seja $\chi_{[a,\ b]}$ a função característica do intervalo $[a,\ b]$ (ou seja, $\chi_{[a,\ b]}(x) = 1$ e $x \in [a,\ b]$ e $\chi_{[a,\ b]}(x) = 0$ e $x \notin [a,\ b]$). É evidente que $\chi_{[a,\ b]} \in L^2([-\pi,\ \pi],\ dx)$ e que o produto escalar $\langle \chi_{[a,\ b]},\ f\rangle$ é igual à integral de Lebesgue de f em $[a,\ b]$: $\langle \chi_{[a,\ b]},\ f\rangle = \int_{[a,\ b]} f dx$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{[a,\ b]} f\, dx \ = \ \langle \chi_{[a,\ b]},\ f\rangle \ = \ \left\langle \chi_{[a,\ b]},\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f_k\, e_k \right\rangle \ &= \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f_k\, \big\langle \chi_{[a,\ b]},\ e_k\big\rangle \\
&= \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f_k \int_a^b \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\, dx \\
&= \ \frac{(b-a)f_0}{\sqrt{2\pi}} + \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \frac{f_k\big(e^{ikb} - e^{ika}\big)}{ik\sqrt{2\pi}}\ ,
\end{aligned}$$

provando (37.112) para $f \in L^2\big([-\pi,\ \pi],\ dx\big)$. Na terceira igualdade acima usamos a continuidade e a linearidade do produto escalar.

Seja agora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ for uma periodização de período 2π de uma função f de $L^2\big([-\pi,\ \pi],\ dx\big)$, e seja $[a,\ b]$ um intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Podemos escrever $[a,\ b] = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Big([a,\ b] \cap [n\pi,\ (n+2)\pi]\Big)$, uma união disjunta finita (pois $[a,\ b]$ é compacto) de conjuntos Borelianos (por serem intervalos fechados). Assim, $\displaystyle\int_{[a,\ b]} g\, dx \ = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{A_n} g\, dx$ com $A_n := [a,\ b] \cap [n\pi,\ (n+2)\pi]$, sendo a soma acima, *ipso facto*, finita. Em cada intervalo $[n\pi,\ (n+2)\pi]$ a função g é o transladado de f. Assim, para cada n, devido à invariância translacional da medida de Lebesgue, $\displaystyle\int_{A_n} g\, dx = \int_{B_n} f\, dx$, com B_n sendo o conjunto A_n transladado de $-(n+1)\pi$: $B_n := [a-(n-1)\pi,\ b-(n-1)\pi] \cap [-\pi,\ \pi]$. Ao lado direito aplica-se agora (37.112) e disso segue facilmente a validade de (37.112) também para g. ■

37.5 O Teorema de Stone-Weierstrass

A primeira versão do Teorema de Weierstrass, Teorema 37.3, acima, afirma que qualquer função contínua f, real ou complexa, definida em um intervalo compacto $[a,\ b]$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios definidos nesse

intervalo. Em muitas aplicações (como na demonstração do Teorema Espectral. Vide Seção 40.9, página 2316) estamos interessados em aproximar funções contínuas definidas em conjuntos compactos outros que não simples intervalos, por exemplo, em conjuntos de Cantor (vide Seção 29.3, página 1483). Uma generalização do Teorema 37.3 se faz, portanto, necessária. Uma forte generalização daquele teorema foi obtida por Stone[45] em 1937 e dedicamo-nos agora a apresentá-la.

Se X é um espaço topológico compacto, denotamos por $C(X,\ \mathbb{R})$ (ou por $C(X,\ \mathbb{C})$) o conjunto de todas as funções contínuas em X assumindo valores em $\mathbb{R}$ (respectivamente, em $\mathbb{C}$).

É bastante claro que uma combinação linear complexa de funções continuas em X assumindo valores em $\mathbb{C}$ é novamente uma função contínua assumindo valores em $\mathbb{C}$, assim como é claro que o produto usual de duas funções contínuas em X assumindo valores em $\mathbb{C}$ é novamente uma função contínua em X assumindo valores em $\mathbb{C}$. Isso significa que $C(X,\ \mathbb{C})$ é uma álgebra complexa (por ser um espaço vetorial complexo) em relação ao produto usual de funções. Analogamente, $C(X,\ \mathbb{R})$ é uma álgebra real em relação ao produto usual de funções.

As álgebras $C(X,\ \mathbb{R})$ e $C(X,\ \mathbb{C})$ são álgebras Abelianas (pois o produto usual de funções é comutativo) e também são *álgebras unitais*, pois a função constante igual a 1 pertence a $C(X,\ \mathbb{R})$ e a $C(X,\ \mathbb{C})$ e age como elemento neutro da multiplicação. Denotamos a função constante igual a 1 também por 1. Que 1 é contínua segue da observação que a pré-imagem de qualquer aberto em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pela função constante ou é o conjunto vazio ou é todo X, que é aberto por definição.

Sabemos pelo Corolário 24.2, página 1334, que os conjuntos $C(X,\ \mathbb{R})$ e $C(X,\ \mathbb{C})$ são completos na métrica uniforme d_∞, definida por

$$d_\infty(f,\ g)\ :=\ \sup\Big\{\big|f(x)-g(x)\big|,\ x\in X\Big\}$$

para todas $f,\ g\in C(X,\ \mathbb{R})$ ou $C(X,\ \mathbb{C})$. Observe que $\|f-g\|_\infty := d_\infty(f,\ g)$ é uma norma em $C(X,\ \mathbb{R})$ ou em $C(X,\ \mathbb{C})$. Tudo isso significa que $C(X,\ \mathbb{R})$ e $C(X,\ \mathbb{C})$ são álgebras de Banach (para a norma $\|\cdot\|_\infty$) Abelianas e unitais.

Uma subálgebra B de $C(X,\ \mathbb{R})$ (de $C(X,\ \mathbb{C})$) é um subespaço vetorial real de $C(X,\ \mathbb{R})$ (complexo de $C(X,\ \mathbb{C})$) que é por si só uma álgebra com relação ao produto usual de funções. B é dita ser *unital* se $1\in B$. Dizemos que B *separa pontos* se para cada par $x_1,\ x_2\in\ X$ com $x_1\neq x_2$ existir uma função $b\in B$ tal que $b(x_1)\neq b(x_2)$.

Se B é uma subálgebra complexa de $C(X,\ \mathbb{C})$, dizemos que B é conjugada se a função complexo-conjugada $\overline{b}$ pertencer a B sempre que $b\in B$.

Teorema 37.16 (Teorema de Stone-Weierstrass) I. *Seja X compacto e B uma subálgebra de $C(X,\ \mathbb{R})$ que seja unital e que separe pontos. Então, $\overline{B}=C(X,\ \mathbb{R})$, onde $\overline{B}$ é o fecho de B na topologia métrica definida pela norma $\|\cdot\|_\infty$.*

Assim, se $c\in C(X,\ \mathbb{R})$ então para todo $\epsilon>0$ existe $b\in B$ tal que $\sup\limits_{x\in X}|c(x)-b(x)|<\epsilon$.

II. *Seja X compacto e B uma subálgebra <u>complexa</u> de $C(X,\ \mathbb{C})$ que seja unital, <u>conjugada</u> e que separe pontos. Então, $\overline{B}=C(X,\ \mathbb{C})$, onde $\overline{B}$ é o fecho de B na topologia métrica definida pela norma $\|\cdot\|_\infty$.*

Assim, se $c\in C(X,\ \mathbb{C})$ então para todo $\epsilon>0$ existe $b\in B$ tal que $\sup\limits_{x\in X}|c(x)-b(x)|<\epsilon$. □

Depois de apresentarmos a demonstração desse importante teorema mostraremos como ele generaliza alguns resultados que provamos anteriormente.

Prova do Teorema de Stone-Weierstrass. A parte **II** segue da parte **I** e por isso trataremos da parte **I** (o caso real) primeiro.

Prova da parte **I**. *O caso real.*

A primeira observação a fazer é que $\overline{B}$ é uma subálgebra de $C(X,\ \mathbb{R})$. Isso se deve ao seguinte. Primeiramente do fato que $B\subset C(X,\ \mathbb{R})$ e $C(X,\ \mathbb{R})$ é completa e, portanto, fechada (Proposição 27.12, página 1441) segue que

$$\overline{B}\ \subset\ C(X,\ \mathbb{R})\ . \tag{37.113}$$

Que $\overline{B}$ é uma álgebra, segue da observação que se f_n e g_n são sequências de B que convergem a f e g, respectivamente, na norma $\|\cdot\|_\infty$, então

$$\Big\|(\alpha f+\beta g)-(\alpha f_n+\beta g_n)\Big\|_\infty\ \leq\ |\alpha|\Big\|f-f_n\Big\|_\infty+|\beta|\Big\|g-g_n\Big\|_\infty\ \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\ 0\ ,$$

[45] Marshall Harvey Stone (1903–1989). Para comentários sobre a gênese do Teorema de Stone-Weierstrass, vide M. Stone, "A reminiscence on the extension of the Weierstrass approximation theorem", Historia Math. **3** (1976), 328.

provando que $\alpha f + \beta g \in \overline{B}$ para todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Fora isso, $fg - f_n g_n = f(g - g_n) + g(f - f_n) + (g_n - g)(f - f_n)$ e, portanto,

$$\Big\| fg - f_n g_n \Big\|_\infty \ \leq\ \|f\|_\infty \|g - g_n\|_\infty + \|g\|_\infty \|f - f_n\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty \|f - f_n\|_\infty \ \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\ 0\ ,$$

provando que $fg \in \overline{B}$.

A segunda observação a fazer é que se $h \in \overline{B}$, então $|h| \in \overline{B}$. Como $h \in \overline{B} \subset C(X,\ \mathbb{R})$, a função $X \ni x \mapsto |h(x)| \in \mathbb{R}_+$ é contínua (por ser a composição das funções contínuas h e $|\cdot|$) e, portanto, pelo Teorema 32.16, página 1628, assume um máximo H em X.

Lembremos agora que pelo Teorema de Weierstrass, Teorema 37.3, a função $|t|$ pode ser aproximada no intervalo $[0,\ H]$ uniformemente por polinômios, ou seja, existe para cada $\epsilon > 0$ um polinômio p_ϵ tal que $\sup\limits_{t\in[0,\ H]} \Big| |t| - p_\epsilon(t) \Big| < \epsilon$. Logo, para cada $x \in X$ vale $\Big| |h(x)| - p_\epsilon(h(x)) \Big| < \epsilon$ e, portanto, $\Big\| |h| - p_\epsilon(h) \Big\|_\infty \leq \epsilon$. É claro que $p_\epsilon(h) \in \overline{B}$ (pois $\overline{B}$ é uma álgebra). Isso estabeleceu que $|h| \in \overline{B}$, como queríamos.

Vamos agora introduzir para $f,\ g \in \overline{B}$ os elementos $f \vee g$ e $f \wedge g$ de $\overline{B}$ definidos por

$$f \wedge g \ :=\ \min\{f,\ g\} \ =\ \frac{1}{2}\Big(f + g - \big|f - g\big|\Big)\ , \qquad f \vee g \ :=\ \max\{f,\ g\} \ =\ \frac{1}{2}\Big(f + g + \big|f - g\big|\Big)\ , \tag{37.114}$$

com os quais $\overline{B}$ adquire a estrutura de um reticulado. Vide Seção 2.1.2, página 115 e, em particular, o Exemplo 2.3, página 116.

Seja $h \in C(X,\ \mathbb{R})$ e sejam r e $s \in X$ dois pontos distintos quaisquer de X. Afirmamos que existe uma função $f_{r,\,s} \in B$ que é igual a h nesses dois pontos, ou seja, tal que

$$f_{r,\,s}(r) \ =\ h(r) \qquad \text{e} \qquad f_{r,\,s}(s) \ =\ h(s)\ .$$

Para provar isso, lembremos que, como B separa pontos, existe uma função $g \in B$ tal que $g(r) \neq g(s)$. Tomando

$$f_{r,\,s}(x) \ =\ \frac{1}{g(r) - g(s)} \Big[\Big(h(r) - h(s)\Big) g(x) + \Big(h(s)g(r) - h(r)g(s)\Big) 1 \Big]\ ,$$

vemos facilmente que $f_{r,\,s}$ satisfaz as propriedades desejadas e é um elemento de B, pois esse é um espaço linear e contém a função constante.

Desejamos provar que $h \in C(X,\ \mathbb{R})$ pode ser uniformemente aproximada por elementos de B. Para tal procedemos da seguinte forma. Seja $\epsilon > 0$, arbitrário.

Como $f_{r,\,s}$ e h coincidem no ponto s e ambas são contínuas, existe uma vizinhança aberta V_s de s tal que $|f_{r,\,s}(x) - h(x)| < \epsilon$ para todo $x \in V_s$. Isso significa, que vale $-\epsilon < f_{r,\,s}(x) - h(x) < \epsilon$ para todo $x \in V_s$ e, em particular, obtém-se disso que

$$f_{r,\,s}(x) \ >\ h(x) - \epsilon$$

vale para todo $x \in V_s$.

É claro que a família de abertos $\{V_s,\ s \in X\}$ cobre todo o conjunto X (pois, para cada $s \in X$ tem-se $s \in V_s$, por construção). Como X é compacto, existe (pela definição de compacidade, vide Seção 32.3, página 1610) uma família <u>finita</u> $\{V_{s_1},\ \ldots,\ V_{s_n}\}$ que também cobre X. Naturalmente os pontos $s_1,\ \ldots,\ s_n \in X$ são distintos.

Ora, para cada $k = 1,\ \ldots,\ n$ tem-se, pela construção,

$$f_{r,\,s_k}(x) \ >\ h(x) - \epsilon \tag{37.115}$$

para todo $x \in V_{s_k}$. Segue disso que a função f_r definida por

$$f_r \ :=\ \max\Big\{ f_{r,\,s_1},\ \ldots,\ f_{r,\,s_n} \Big\} \ =\ f_{r,\,s_1} \vee \ldots \vee f_{r,\,s_n}$$

satisfaz

$$f_r(x) \ >\ h(x) - \epsilon \tag{37.116}$$

para <u>todo</u> $x \in X$. De fato, em cada V_{s_k} vale $f_r(x) \geq f_{r,\,s_k}(x) \stackrel{(37.115)}{>} h(x) - \epsilon$ e como os V_{s_k} cobrem todo X a afirmação é válida.

Pelos comentários ao início da demonstração sabemos que a função f_r é um elemento de $\overline{B} \subset C(X,\ \mathbb{R})$ e, portanto, é uma função contínua.

O que faremos agora é imitar aos passos acima para obter uma desigualdade oposta. Observemos primeiramente que no ponto r vale $f_r(r) = h(r)$, pois

$$f_r(r) \ = \ \max\big\{f_{r,\,s_1}(r),\ \ldots,\ f_{r,\,s_n}(r)\big\} \ = \ \max\big\{h(r),\ \ldots h(r),\ \big\} \ = \ h(r)\ .$$

Isso implica que existe uma vizinhança aberta U_r do ponto r tal que $|f_r(x) - h(x)| < \epsilon$ para todo $x \in U_r$, ou seja, $-\epsilon < f_r(x) - h(x) < \epsilon$ para todo $x \in U_r$, o que, em particular, afirma que

$$f_r(x) \ < \ h(x) + \epsilon$$

para todo $x \in U_r$. É claro que a família de abertos $\{U_r,\ r \in X\}$ cobre todo o conjunto X (pois, para cada $r \in X$ tem-se $r \in U_r$, por construção). Como X é compacto, existe uma família <u>finita</u> $\{U_{r_1},\ \ldots,\ U_{r_m}\}$ que também cobre X. Naturalmente os pontos $r_1,\ \ldots,\ r_m \in X$ são distintos.

Ora, para cada $k = 1,\ \ldots,\ m$ tem-se, pela construção,

$$f_{r_k}(x) \ < \ h(x) + \epsilon \tag{37.117}$$

para todo $x \in U_{r_k}$. Segue disso que a função f definida por

$$f \ := \ \min\big\{f_{r_1},\ \ldots f_{r_m}\big\} \ = \ f_{r_1} \wedge \ldots \wedge f_{r_m}$$

satisfaz

$$f(x) \ < \ h(x) + \epsilon \tag{37.118}$$

para <u>todo</u> $x \in X$. De fato, em cada U_{r_k} vale $f(x) \leq f_{r_k}(x) \overset{(37.117)}{<} h(x) + \epsilon$ e como os U_{r_k} cobrem todo X a afirmação é válida.

Pelos comentários ao início da demonstração sabemos que a função f é um elemento de $\overline{B} \subset C(X,\ \mathbb{R})$ e, portanto, é uma função contínua.

Notemos agora que, (37.116) implica também que

$$f(x) \ > \ h(x) - \epsilon \tag{37.119}$$

para todo $x \in X$, pois cada $f_{r_1}(x),\ \ldots f_{r_m}(x)$ satisfaz essa desigualdade e $f(x)$ é o mínimo deles. Provamos então que

$$h(x) - \epsilon \overset{(37.118)}{<} f(x) \overset{(37.119)}{<} h(x) + \epsilon$$

para todo $x \in X$, o que implica $\big|f(x) - h(x)\big| < \epsilon$ para <u>todo</u> $x \in X$, o que implica $\|f - h\|_\infty < \epsilon$.

Coletando nossos resultados, provamos que dado $\epsilon > 0$ existe $f \in \overline{B}$ tal que $\|f - h\|_\infty < \epsilon$. Isso provou que todo elemento de $C(X,\ \mathbb{R})$ é uniformemente aproximável por um elemento de B. Pela Proposição 27.11, página 1440 segue que $C(X,\ \mathbb{R})$ está contido no fecho de $\overline{B}$ (que já é fechado), ou seja, $C(X,\ \mathbb{R}) \subset \overline{B}$. Por (37.113), isso implica $C(X,\ \mathbb{R}) = \overline{B}$, completando a prova da parte **I**.

Prova da parte **II**. *O caso complexo.*

Pelo mesmo raciocínio do caso **II**, temos também aqui que

$$\overline{B} \ \subset \ C(X,\ \mathbb{C})\ . \tag{37.120}$$

Como B é conjugada, se $b \in B$ então $\bar{b} \in B$ e, portanto, $\mathrm{Re}\,(b) = \frac{1}{2}(b + \bar{b})$ e $\mathrm{Im}\,(b) = \frac{1}{2i}(b - \bar{b})$ são também elementos de B, já que B é um espaço vetorial complexo. Note-se que tanto $\mathrm{Re}\,(b)$ quanto $\mathrm{Im}\,(b)$ são funções com valores em $\mathbb{R}$ e, portanto, elementos de $C(X,\ \mathbb{R})$. Vamos denotar por B_R o conjunto de todas as funções $\mathrm{Re}\,(b)$ ou $\mathrm{Im}\,(b)$ para todos os elementos $b \in B$. Como $\mathrm{Im}\,(b) = -\mathrm{Re}\,(ib)$, podemos alternativamente definir $B_R := \{\mathrm{Re}\,(b),\ b \in B\}$. É evidente que $B_R \subset B$ e que $B_R \subset C(X,\ \mathbb{R})$.

Se b_1 e b_2 são elementos de B e $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, teremos que $\alpha\mathrm{Re}\,(b_1) + \beta\mathrm{Re}\,(b_2) = \mathrm{Re}\,(\alpha b_1 + \beta b_2) \in B_R$. Além disso, $\mathrm{Re}\,(b_1)\mathrm{Re}\,(b_1) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Re}\,(b_1 b_2) + \mathrm{Re}\,(b_1\overline{b_2})\Big) \in B_R$. Isso provou que B_R é uma álgebra real. Naturalmente $1 \in B_R$, de modo

que B_R é também unital. Agora, se x_1 e x_2 são dois pontos distintos de X sabemos que existe $b \in B$ tal que $b(x_1) \neq b(x_2)$ pois, por hipótese, B separa pontos. Mas isso implica ou que $\mathrm{Re}\,(b)(x_1) \neq \mathrm{Re}\,(b)(x_2)$ ou que $\mathrm{Im}\,(b)(x_1) \neq \mathrm{Im}\,(b)(x_2)$ (ou ambos). Lembremos que $\mathrm{Im}\,(b)(x_1) \neq \mathrm{Im}\,(b)(x_2)$ significa $\mathrm{Re}\,(ib)(x_1) \neq \mathrm{Re}\,(ib)(x_2)$. Isso mostrou que B_R também separa pontos.

Como vemos, B_R satisfaz as hipóteses da parte **I** e concluímos que toda função de $C(X,\ \mathbb{R})$ pode ser uniformemente aproximada por elementos de B_R. Seja agora $h \in C(X,\ \mathbb{C})$. Podemos escrever $h = \mathrm{Re}\,(h) + i\mathrm{Im}\,(h)$, com $\mathrm{Re}\,(h)$ e $\mathrm{Im}\,(h)$ sendo funções reais e contínuas e, portanto, elementos de $C(X,\ \mathbb{R})$.

Escolhamos $\epsilon > 0$. Pela parte **I** e pelas considerações acima, existem, b_1 e $b_2 \in B_R$ tais que $\big\|\mathrm{Re}\,(h) - b_1\big\|_\infty < \epsilon/2$ e $\big\|\mathrm{Im}\,(h) - b_2\big\|_\infty < \epsilon/2$. Logo, definindo $b \in B$ por $b = b_1 + ib_2$, teremos

$$\big\|h - b\big\|_\infty \;=\; \Big\|\Big(\mathrm{Re}\,(h) - b_1\Big) + i\Big(\mathrm{Im}\,(h) - b_2\Big)\Big\|_\infty \;\leq\; \|\mathrm{Re}\,(h) - b_1\|_\infty + \|\mathrm{Im}\,(h) - b_2\|_\infty \;<\; \epsilon\,.$$

Isso provou que todo elemento de $C(X,\ \mathbb{C})$ é uniformemente aproximável por um elemento de B, ou seja, que $C(X,\ \mathbb{C}) \subset \overline{B}$. Com (37.120) isso completa a demonstração ■

O seguinte teorema, devido a Kakutani[46] e Krein[47], possui hipóteses ligeiramente diferentes das do Teorema de Stone-Weierstrass para o caso real.

Teorema 37.17 (Teorema de Kakutani-Krein) *Seja X compacto e B um subconjunto de $C(X,\ \mathbb{R})$ com as seguintes propriedades:* 1. *B é um espaço vetorial real,* 2. *B contém a unidade.* 3. *B separa pontos,* 4. *se f e $g \in B$ então $f \wedge g = \min\{f,\ g\}$ e $f \vee g = \max\{f,\ g\}$ (vide (37.114)) são também elementos de B. Então, $\overline{B} = C(X,\ \mathbb{R})$, onde $\overline{B}$ é o fecho de B na topologia métrica definida pela norma $\|\cdot\|_\infty$.*

Assim, se $c \in C(X,\ \mathbb{R})$ então para todo $\epsilon > 0$ existe $b \in B$ tal que $\sup\limits_{x\in X} |c(x) - b(x)| < \epsilon$. □

Prova. As hipóteses acima diferem das da parte I do Teorema 37.16 pois não supomos aqui que B forma uma álgebra real, mas apenas que seja um espaço linear real e um reticulado com as operações binárias $f \wedge g = \min\{f,\ g\}$ e $f \vee g = \max\{f,\ g\}$. Contudo, observando a demonstração da parte I do Teorema 37.16, notamos que a hipótese de B ser uma álgebra é usada apenas para justificar a existência de $f \wedge g$ e de $f \vee g$ em $\overline{B}$. Portanto, se assumirmos que tais $f \wedge g = \min\{f,\ g\}$ e $f \vee g = \max\{f,\ g\}$ são elementos de B, o resto da demonstração segue sem modificações. ■

• Generalizando o Teorema de Weierstrass para conjuntos compactos

Se $\alpha \neq 0$ o polinômio $p(x) = \alpha x$, $x \in \mathbb{R}$, é bijetor e, portanto, separa pontos. Essa simples observação mostra que se $C \subset \mathbb{R}$ é compacto, então a álgebra B de todos os polinômios em $\mathbb{R}$ restritos a C satisfaz as hipóteses do Teorema de Stone-Weierstrass, Teorema 37.16, página 1989. Concluímos que uma das consequências do Teorema de Stone-Weierstrass é a seguinte generalização do Teorema de Weierstrass, Teorema 37.3, página 1950:

Teorema 37.18 (Teorema de Weierstrass) *Seja f uma função real ou complexa, contínua em um conjunto compacto $C \subset \mathbb{R}$. Então, f pode ser aproximada uniformemente em C por polinômios, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ existe um polinômio p_ϵ tal que $\|p_\epsilon - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in C} |p_\epsilon(x) - f(x)| \leq \epsilon$.* □

[46] Shizuo Kakutani (1911–2004).
[47] Mark Grigorievich Krein (1097–1989).

37.6 Exercícios Adicionais

Sugestões gerais. Em vários exercícios abaixo deseja-se calcular integrais como $\int_0^{2\pi} x^m \operatorname{sen}(2\pi nx)dx$ ou $\int_0^{2\pi} x^m \cos(2\pi nx)dx$, para n, $m \in \mathbb{N}$. Integrais assim podem ser calculadas usando-se repetidamente o método de integração por partes, explorando o fato que, para $n \neq 0$, $\operatorname{sen}(2\pi nx) = -\frac{1}{2\pi n}\,\frac{d}{dx}\cos(2\pi nx)$ e $\cos(2\pi nx) = \frac{1}{2\pi n}\,\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(2\pi nx)$. Para integrais envolvendo a função exponencial recomenda-se usar as fórmulas de Euler para os senos e cossenos: $\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$, $\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$.

Nos exercícios que seguem, evocaremos também o Teorema de Fourier, Teorema 37.12, página 1978.

E. 37.9 *Exercício*. Seja f a função periódica de período 2π definida de forma que para $0 \leq x \leq 2\pi$ tenhamos

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{\pi}\,, & \text{para } 0 \leq x \leq \pi\,, \\ 2 - \dfrac{x}{\pi}\,, & \text{para } \pi \leq x \leq 2\pi\,. \end{cases}$$

Faça um esboço do gráfico dessa função e determine sua expansão em série de Fourier. ✠

E. 37.10 *Exercício*. Sejam $L > 0$ e x_0 tal que $0 < x_0 < L$. Seja f a função periódica de período L definida de forma que para $0 \leq x \leq L$ tenhamos

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{x_0}\,, & \text{para } 0 \leq x \leq x_0\,, \\ \dfrac{L-x}{L-x_0}, & \text{para } x_0 \leq x \leq L\,. \end{cases}$$

Faça um esboço do gráfico dessa função e determine sua expansão em série de Fourier. ✠

E. 37.11 *Exercício*. Seja f a função periódica de período 1 definida de forma que para $0 \leq x \leq 1$ tenhamos

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{para } 0 \leq x \leq 1/2\,, \\ 0, & \text{para } 1/2 < x \leq 1\,. \end{cases}$$

Faça um esboço do gráfico dessa função e determine sua expansão em série de Fourier. Segundo o Teorema de Fourier, a qual valor a série deveria convergir no ponto $x = 1/2$? Verifique se tal é verdade. ✠

E. 37.12 *Exercício*. Seja f a função periódica de período 2π definida de forma que para $0 \leq x < 2\pi$ tenhamos $f(x) = x^2$. Faça um esboço do gráfico dessa função e determine sua expansão em série de Fourier. Segundo o Teorema de Fourier, a qual valor a série deveria convergir no ponto $x = 2\pi$? Verifique se tal é verdade. ✠

E. 37.13 *Exercício*. Seja f a função periódica de período 2π definida de forma que para $0 \leq x \leq 2\pi$ tenhamos $f(x) = (x-\pi)^2$. Faça um esboço do gráfico dessa função e determine sua expansão em série de Fourier. Essa série converge mais rapidamente que aquela da função do Exercício E. 37.12? por quê? ✠

E. 37.14 *Exercício*. Seja f a função periódica de período 2π definida de forma que para $0 \leq x \leq 2\pi$ tenhamos

$$f(x) := \begin{cases} \operatorname{sen}(x), & \text{para } 0 \leq x \leq \pi\,, \\ 0, & \text{para } \pi \leq x \leq 2\pi\,. \end{cases}$$

Faça um esboço do gráfico dessa função e determine sua expansão em série de Fourier. ✠

E. 37.15 *Exercício*. Determine a expansão em série de Fourier da função periódica de período 2π definida no intervalo $[0,\ 2\pi)$ da seguinte forma:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \cos(x)\ , & \text{se } 0 \le x \le \pi\ , \\ 0\ , & \text{se } \pi < x < 2\pi\ . \end{cases}$$

Faça um esboço do gráfico da função e dos primeiros aproximantes da série. ✠

E. 37.16 *Exercício*. Calcule a série de Fourier da função $f(x) = (\operatorname{sen}(x))^2$, que é periódica de período π.

Essa função é também periódica de período 2π. Haverá alguma mudança na série de Fourier se adotarmos seu período como sendo 2π ao invés de π? Justifique. ✠

E. 37.17 *Exercício*. Determine a expansão em série de Fourier da função periódica de período 2π definida no intervalo $[0,\ 2\pi]$ da seguinte forma:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \big(\operatorname{sen}(x)\big)^2\ , & \text{se } 0 \le x \le \pi\ , \\ 0\ , & \text{se } \pi < x \le 2\pi\ . \end{cases}$$

Faça um esboço do gráfico da função e dos primeiros aproximantes da série. ✠

E. 37.18 *Exercício*. Determine a expansão em série de Fourier da função periódica de período 2π definida no intervalo $[0,\ 2\pi)$ da seguinte forma:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \big(\cos(x)\big)^2\ , & \text{se } 0 \le x \le \pi\ , \\ 0\ , & \text{se } \pi < x < 2\pi\ . \end{cases}$$

Faça um esboço do gráfico da função e dos primeiros aproximantes da série. ✠

E. 37.19 *Exercício*. As chamadas *funções de Fresnel*[48], $C(x)$ e $S(x)$, são definidas por

$$C(x) \;:=\; \int_0^x \cos\left(t^2\right)\, dt \qquad \text{e} \qquad S(x) \;:=\; \int_0^x \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt\ ,$$

respectivamente[49], para todo $x \in \mathbb{R}$. As integrais acima são ditas *transcendentes* por não poderem ser expressas em termos de somas, produtos ou composições finitas de funções "elementares", como polinômios, funções trigonométricas, exponenciais e logaritmos. Outro exemplo de uma integral transcendente é a chamara *função erro*, denotada por $\operatorname{erf}(x)$ e definida por

$$\operatorname{erf}(x) \;:=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt\ , \qquad x \in \mathbb{R}\ .$$

a. Mostre que

$$\int_0^\infty \cos\left(t^2\right)\, dt \;=\; \int_0^\infty \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ . \tag{37.121}$$

Sugestão: Integre a função de variável complexa e^{-z^2} ao longo da fronteira do setor circular $0 \le \theta \le \pi/4$, $0 \le r \le R$, faça R tender ao infinito e use o fato que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

b. Mostre que

$$\int_0^x t^2 \cos\left(t^2\right)\, dt \;=\; \frac{1}{2}\left(x \operatorname{sen}\left(x^2\right) - S(x)\right)$$

e que

$$\int_0^x t^2 \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt \;=\; -\frac{1}{2}\left(x \cos\left(x^2\right) - C(x)\right)\ .$$

Sugestão: integração por partes.

[48] Augustin-Jean Fresnel (1788–1827).

[49] As funções de Fresnel são também denominadas *integrais de Fresnel*.

c. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período 2π e definida de sorte que no intervalo $[-\pi,\ \pi)$ tenhamos

$$f(y) \ := \begin{cases} 0\ , & -\pi \leq y \leq 0\ , \\ \sqrt{y}\ , & 0 < y < \pi\ . \end{cases}$$

Determine sua série de Fourier $S(f,\ x) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$, expressando os coeficientes de Fourier f_k em termos das funções de Fresnel C e S.

d. Expresse a série de Fourier obtida acima como uma série de senos e cossenos, ou seja, na forma

$$S(f,\ x) \ = \ \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(nx)\ .$$

Escreva os coeficientes A_n, $n \geq 0$ e B_n, $n \geq 1$, em termos das funções de Fresnel C e S.

e. Mostre que a função f, acima, não satisfaz as condições do Teorema de Fourier, Teorema 37.12, página 1978, mas satisfaz a *condição de Dini* (vide Teorema 37.11, página 1976), ou seja, existe $\kappa > 0$, pequeno o suficiente, tal que

$$\int_0^{\kappa} \frac{|\mathscr{D}_f(x,\ y)|}{y}\, dy < \infty\ ,$$

onde $\mathscr{D}_f(x,\ y) := f(x+y) + f(x-y) - f(x_+) - f(x_-)$. Explicite, com base nesse fato, a quais valores a série de Fourier de f deve convergir em cada ponto.

f. Usando (37.121), obtenha o comportamento assintótico dos coeficientes de Fourier de f.

✠

E. 37.20 *Exercício*. Seja $M > 0$ e seja f a função periódica de período $2M$ definida de forma que para $-M \leq x \leq M$ tenhamos

$$f(x) \ := \begin{cases} M + x, & \text{para } -M \leq x \leq 0\ , \\ M - x, & \text{para } 0 \leq x \leq M\ . \end{cases}$$

Faça um esboço do gráfico dessa função e determine sua expansão em série de Fourier.

Usando o Teorema de Fourier e calculando a série no ponto $x = 0$, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \ = \ \frac{\pi^2}{8}\ . \tag{37.122}$$

Você saberia como obter essa identidade por outros meios? ✠

E. 37.21 *Exercício*. Seja $M > 0$ e seja f a função periódica de período $2M$ definida de forma que para $-M \leq x < M$ tenhamos $f(x) = x^2$. Faça um esboço do gráfico dessa função e determine sua expansão em série de Fourier.

Usando o Teorema de Fourier e calculando a série no ponto $x = M$, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ = \ \frac{\pi^2}{6}\ . \tag{37.123}$$

Essa célebre identidade foi obtida por Euler em 1735. Essa expressão também pode ser obtida com uso dos chamados *números de Bernoulli* (definidos na Seção 6.1.3, página 361.). Vide expressão (6.18), página 362. ✠

E. 37.22 *Exercício*. Seja f a função periódica de período 2π definida de forma que para $0 \leq x < 2\pi$ tenhamos $f(x) = e^{x/2\pi}$.

a. Faça um esboço do gráfico dessa função e determine sua expansão em série de Fourier.

b. Usando o Teorema de Fourier e calculando a série no ponto $x = 2\pi$, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 n^2} \ = \ \frac{3-e}{4(e-1)}\ . \tag{37.124}$$

c. Usando o Teorema de Fourier e calculando a série no ponto $x = \pi$, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+4\pi^2 n^2} \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{e}}{e-1} - 1\right) .$$

✠

E. 37.23 *Exercício-dirigido.* Seja f a função periódica de período 2π definida de forma que para $-\pi \leq x \leq \pi$ tenhamos

$$f(x) \;:=\; \cos(\alpha x) ,$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

a. Determine a expansão em série de Fourier de f.

b. Usando a expansão obtida, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2} \;=\; \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \pi \operatorname{cotg}(\pi\alpha)\right) . \tag{37.125}$$

Essa importante identidade vale para todo α não-inteiro. Ela é denominada *fórmula da cotangente de Euler*, ou *expansão em frações parciais da função cotangente*, e foi obtida pela primeira vez por Euler em 1749, usando outros métodos. Para uma outra elegante demonstração (devida a Herglotz[50]) de (37.125) , vide Exercício E. 6.18, página 384. Para uma demonstração usando a chamada *representação produto da função seno*, vide Exercício E. 7.5, página 401.

c. Usando a identidade (37.125), mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \;=\; \frac{1}{2} .$$

Sugestão. Tome $\alpha = 1/2$.

d. Usando a mesma identidade (37.125), mostre também que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2-1} \;=\; \frac{4-\pi}{8} .$$

Sugestão. Tome $\alpha = 1/4$.

e. Usando a identidade (37.125), mostre que para $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\beta^2} \;=\; \frac{1}{2\beta}\left(\pi \coth(\pi\beta) - \frac{1}{\beta}\right) . \tag{37.126}$$

e obtenha disso que

$$\frac{1}{2a\tanh(a/2)} \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+(2\pi n)^2} , \tag{37.127}$$

com $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. *Sugestão.* Tome $\alpha = i\beta$ na identidade (37.125). O que justifica podermos fazer isso?

f. Reobtenha a identidade (37.124) tomando para tal $\beta = (2\pi)^{-1}$.

g. Usando os fatos acima, mostre que, para β não-inteiro,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4-\beta^4} \;=\; \frac{\pi}{4\beta}\left(\coth(\pi\beta) - \operatorname{cotg}(\pi\beta)\right) .$$

Sugestão. Explore o fato que

$$\frac{1}{n^2-\beta^2} + \frac{1}{n^2+\beta^2} \;=\; \frac{2n^2}{n^4-\beta^4}.$$

h. Mostre que, para β não-inteiro,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4-\beta^4} \;=\; \frac{1}{2\beta^3}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{\pi}{2}\left(\coth(\pi\beta) + \operatorname{cotg}(\pi\beta)\right)\right) .$$

Sugestão. Explore o fato que

$$\frac{1}{n^2-\beta^2} - \frac{1}{n^2+\beta^2} \;=\; \frac{2\beta^2}{n^4-\beta^4} .$$

[50] Gustav Ferdinand Maria Herglotz (1881–1953).

✠

E. 37.24 *Exercício*. Para $a > 0$, fixo, seja g_a a função contínua e periódica de período 1 que no intervalo $0 \leq x < 1$ vale

$$g_a(x) \;=\; \cosh\left(a\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \;. \tag{37.128}$$

Determine sua série de Fourier e obtenha

$$g_a(x) \;=\; 2a\,\mathrm{senh}\left(\frac{a}{2}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m x}}{a^2 + (2\pi m)^2} \;. \tag{37.129}$$

No Exercício E. 38.40, página 2050, a identidade (37.129) é obtida a partir da chamada *fórmula de soma de Poisson*. Compare também (37.129)–(37.128) com os resultados do Exercício E. 37.23, página 1996. ✠

E. 37.25 *Exercício*. Seja $M > 0$ e seja f a função periódica de período $2M$ definida de forma que para $-M \leq x \leq M$ tenhamos

$$f(x) \;:=\; x^2 - \frac{M^2}{3} \;.$$

a. Mostre que sua expansão em série de Fourier é dada por

$$\frac{4M^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \;.$$

Tomando $x = 0$, obtenha a identidade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \;=\; \frac{\pi^2}{12} \;. \tag{37.130}$$

b. Aplicando a identidade de Parseval para essa expansão mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \;=\; \frac{\pi^4}{90} \;.$$

Essa célebre identidade foi obtida por Euler em 1735 e também pode ser obtida com uso dos chamados *números de Bernoulli* (definidos na Seção 6.1.3, página 361.). Vide expressão (6.18), página 362.

c. Esta última identidade pode ser usada para determinar o valor de π. Com o uso, por exemplo, de uma calculadora estime a série da esquerda calculando a soma dos seus, digamos, 10 primeiros termos e verifique se a aproximação é boa.

✠

E. 37.26 *Exercício*. Seja $M > 0$ e seja f a função periódica de período $2M$ definida de forma que para $-M \leq x \leq M$ tenhamos $f(x) = x^3 - M^2 x$.

a. Mostre que sua expansão em série de Fourier é dada por

$$\frac{12M^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \;.$$

b. Aplicando a identidade de Parseval para essa expansão mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \;=\; \frac{\pi^6}{945} \;.$$

Essa célebre identidade foi obtida por Euler em 1735 e também pode ser obtida com uso dos chamados *números de Bernoulli* (definidos na Seção 6.1.3, página 361.). Vide expressão (6.18), página 362.

c. Esta última identidade (assim como outras acima) pode ser usada para determinar o valor de π. Com o uso, por exemplo, de uma calculadora estime a série da esquerda calculando a soma dos seus, digamos, 10 primeiros termos e verifique se a aproximação é boa.

✠

E. 37.27 *Exercício*. Algumas identidades trigonométricas.

a. Mostre que para todo número complexo a e para todo $n \in \mathbb{N}_0$ vale

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \;=\; \frac{1-a^{n+1}}{1-a}\;.$$

b. Usando a fórmula de Euler $\cos(y) = \dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$ e a identidade do item **a**, mostre que

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \;=\; \frac{1}{2}\left[1+\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\right]\;.$$

c. Usando a fórmula de Euler $\operatorname{sen}(y) = \dfrac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$ e a identidade do item **a**, mostre que

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}(kx) \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(nx)-\operatorname{sen}((n+1)x)}{1-\cos(x)}\right]\;.$$

d. Usando a identidade do item **b**, mostre que a sequência

$$r_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} k\operatorname{sen}(kx)$$

converge quando $n \to \infty$ apenas para $x = m\pi$, onde m é um inteiro. Nesses pontos tem-se, claramente, $r_n(x) = 0$.

✠

E. 37.28 *Exercício*. Considere a sequência

$$s_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \cos(2\pi k!\,x)\;.$$

Mostre que essa sequência diverge sempre que x é um número racional. *Sugestão.* Lembre-se que todo número racional é da forma p/q com p e q inteiros e note que $k!(p/q)$ é um inteiro sempre que $k \geq q$ (por quê?).

Usando o *teste M de Weierstrass*, mostre que a sequência de funções

$$t_n(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\operatorname{sen}(2\pi k!\,x)$$

é uniformemente convergente. O limite é

$$t(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\operatorname{sen}(2\pi k!\,x)$$

e t deve ser, portanto, contínua. Note que, pelo visto acima, a sequência de derivadas $t_n{}' = 2\pi s_n$ não é convergente. Isso sugere que t, ainda que contínua, não seja diferenciável em parte alguma e, de fato, isso é correto. A prova que t não é diferenciável em parte alguma é um tanto complexa e, interessantemente, usa ideias muito semelhantes às do grupo de renormalização! A referência [291] contém uma demonstração de não-diferenciabilidade para uma função muito semelhante à nossa t e recomendamos fortemente sua leitura ao estudante interessado. Outro tratamento análogo de séries de Fourier conduzindo a funções não-diferenciáveis pode ser encontrado em [478]. ✠

E. 37.29 *Exercício dirigido.* O propósito deste exercício é o de determinar a série de Fourier da função periódica de período 2π dada por $f(\theta) = \big(\cos\theta\big)^{\beta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, onde $\beta \in \mathbb{C}$ satisfaz $\operatorname{Re}(\beta) > -1$. Como $\cos\theta$ é negativa nos intervalos $(\pi/2 + 2\pi j,\ 3\pi/2 + 2\pi j)$, $j \in \mathbb{Z}$, é necessário definir essa função mais precisamente, indicando-se uma das ramificações de $(-1)^{\beta}$ na sua definição.

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como sendo a função periódica de período 2π dada no intervalo $(-\pi/2,\ 3\pi/2]$ por

$$f(\theta) \;=\; \begin{cases} \big(\cos\theta\big)^{\beta}, & \theta \in (-\pi/2,\ \pi/2]\;, \\ \phi\big|\cos\theta\big|^{\beta}, & \theta \in (\pi/2,\ 3\pi/2]\;, \end{cases}$$

onde $\phi := e^{i(2l+1)\pi\beta}$, $l \in \mathbb{Z}$. Diferentes escolhas de $l \in \mathbb{Z}$ correspondem a diferentes escolhas para $(-1)^\beta$ no plano complexo. Note-se que para $\mathrm{Re}\,(\beta) > -1$ a função f é integrável (e até contínua caso $\mathrm{Re}\,(\beta) > 0$). Seus coeficientes de Fourier são dados por

$$f_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-in\theta}\big(\cos\theta\big)^\beta\, d\theta + \frac{\phi}{\sqrt{2\pi}}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-in\theta}\big|\cos\theta\big|^\beta\, d\theta\,.$$

Com a mudança de variável $\theta' = \theta - \pi$ a segunda integral fica $\dfrac{(-1)^n\phi}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-in\theta'}\big(\cos\theta'\big)^\beta\, d\theta'$. Logo,

$$f_n \;=\; \frac{1+(-1)^n\phi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-in\theta}\big(\cos\theta\big)^\beta\, d\theta \;=\; \Big(1+(-1)^n\phi\Big)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi/2}\big(\cos\theta\big)^\beta\,\cos(n\theta)\, d\theta\,.$$

A integral do lado direito foi determinada no Exercício E. 7.27, página 424. No caso presente, é mais conveniente usarmos a expressão (7.128), e teremos

$$f_n \;=\; \Big(1+(-1)^n\phi\Big)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\pi}{2^{\beta+1}(\beta+1)}\;\frac{1}{B\left(\frac{n+\beta+2}{2},\,\frac{\beta-n+2}{2}\right)}\,.$$

Essa expressão evidencia que $f_n = f_{-n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e, por isso, podemos escrever a representação de Fourier de f como

$$f(\theta) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty} f_n\cos(n\theta)\,. \tag{37.131}$$

Pela definição da função beta, temos

$$\frac{1}{B\left(\frac{n+\beta+2}{2},\,\frac{\beta-n+2}{2}\right)} \;=\; \frac{\Gamma\left(\beta+2\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\beta+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta-n+2}{2}\right)}\,.$$

Assim,

$$f_n \;=\; \Big(1+(-1)^n\phi\Big)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{2^\beta}\,\mathsf{T}_n\,, \qquad \text{onde} \qquad \mathsf{T}_n \;:=\; \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+\beta+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta-n+2}{2}\right)}\,. \tag{37.132}$$

Nota. Antes de prosseguirmos façamos uma observação relevante sobre a expressão (37.132). Caso $\beta = 1$, tem-se, naturalmente $\phi = -1$ e o fator $\big(1+(-1)^n\phi\big)$ será nulo para todo n par. Fora isso, alguns dos fatores $\mathsf{T}_n = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-n}{2}\right)}$ também serão nulos. De fato, a função $1/\Gamma(z)$ anula-se nos inteiros não-negativos. Assim, T_n será nulo sempre que $n = \pm(2k+3)$, $k \in \mathbb{N}_0$, ou seja, para $n \in \{\ldots,\,-7,\,-5,\,-3,\,3,\,5,\,7,\,\ldots\}$, isto é, para n ímpar e $|n| \geq 3$. Conclui-se disso que só serão não-nulos os coeficientes f_{-1} e f_1. Usando (37.132), é elementar constatar que $f_{\pm 1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, implicando que a representação de Fourier da função $f(\theta) = \cos\theta$ seja $\frac{1}{2}\big(e^{-i\theta} + e^{i\theta}\big)$, como esperado. Esse teste indica a correção de (37.132). Não é difícil provar, seguindo a mesma análise, que para $\beta \in \mathbb{N}$ geral os coeficientes f_n dados em (37.132) são todos nulos para $|n| > \beta$ e fornecem a representação esperada para a expansão de Fourier de $f(\theta) = \big(\cos\theta\big)^\beta$, a saber, $\big(\cos\theta\big)^\beta = \dfrac{1}{2^\beta}\displaystyle\sum_{p=0}^{\beta}\binom{\beta}{p}e^{i(2p-\beta)\theta}$. Isso pode ser visto usando (37.132) ou usando o resultado final (37.133), abaixo. Faça-o! ♣

Vamos agora analisar mais detalhadamente a expressão para T_n dada em (37.132) no caso de um β geral. Por (7.41), página 399, podemos escrever

$$\mathsf{T}_n \;=\; -\frac{\left(\frac{n-\beta-2}{2}\right)\,\mathrm{sen}\left(\pi\left(\frac{n-\beta-2}{2}\right)\right)}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n-\beta-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\beta+2}{2}\right)}\,.$$

Como $f_n = f_{-n}$ e $\mathsf{T}_n = \mathsf{T}_{-n}$ é suficiente tomarmos $n \in \mathbb{N}_0$. Há dois casos a tratar: n par e n ímpar.

1. Caso n par. Para $n = 0$, temos $\mathsf{T}_0 = \Gamma\left(\frac{\beta+2}{2}\right)^{-2}$. Para $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, mostre, usando a bem conhecida relação $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ e a identidade (7.41), que

$$\mathsf{T}_{2k} \;=\; \Gamma\left(\frac{\beta+2}{2}\right)^{-2}\frac{(2k+\beta+2)}{(\beta+2)}\prod_{a=0}^{k}\frac{\beta+2-2a}{\beta+2+2a}\,.$$

   Note que esta fórmula é também correta para $k = 0$.

2. Caso n ímpar. Para $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$, mostre, usando a bem conhecida relação $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ e a identidade (7.41), que

$$\mathsf{T}_{2k+1} \;=\; \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)^{-2}\frac{2}{(\beta+1)}\prod_{a=0}^{k}\frac{\beta+1-2a}{\beta+1+2a}\,.$$

Reunindo os resultados acima, a representação de Fourier de f pode ser escrita como

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{\big(1+\phi\big)\Gamma\left(\beta+1\right)}{2^{\beta+1}\Gamma\left(\frac{\beta+2}{2}\right)^2} + \frac{\big(1+\phi\big)\Gamma\left(\beta+1\right)}{2^{\beta}(\beta+2)\Gamma\left(\frac{\beta+2}{2}\right)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\big(2k+\beta+2\big)\left[\prod_{a=0}^{k}\frac{\beta+2-2a}{\beta+2+2a}\right]\cos\big(2k\theta\big) \\ &+ \frac{\big(1-\phi\big)\Gamma\left(\beta+1\right)}{2^{\beta-1}\left(\beta+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\prod_{a=0}^{k}\frac{\beta+1-2a}{\beta+1+2a}\right]\cos\big((2k+1)\theta\big)\ . \end{aligned} \tag{37.133}$$

Verifique! ✠

Apêndices

37.A Prova do Teorema de Weierstrass Usando Polinômios de Bernstein

Nesta seção demonstraremos o Teorema de Weierstrass, Teorema 37.3, página 1950, fazendo uso dos chamados polinômios de Bernstein.

• **Polinômios de Bernstein**

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, os chamados *polinômios de Bernstein*[51] de grau n são definidos por

$$B_0^{[0]}(x) := 1 , \qquad B_p^{[n]}(x) := \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} , \quad n > 0 , \ 0 \leq p \leq n , \ p \in \mathbb{N}_0 . \tag{37.A.1}$$

O fato importante estabelecido na proposição que segue diz respeito à independência linear dos $n+1$ polinômios $B_p^{[n]}(x)$, $0 \leq p \leq n$ para cada $n \geq 0$.

Proposição 37.14 *Para $n > 0$ as raízes de $B_p^{[n]}(x)$ são 0, 1, ou ambas, sendo que $B_p^{[n]}(x)$ tem um zero de ordem p em $x = 0$ e um zero de ordem $n - p$ em $x = 1$.*

Para cada n, os $n + 1$ polinômios $B_p^{[n]}(x)$, com $0 \leq p \leq n$, são linearmente independentes. □

Prova. As afirmações sobre as raízes são evidentes e não requerem demonstração. Passemos à prova da independência linear. Para $n = 0$ não há o que provar, pois $B_0^{[0]}(x) \neq 0$. Seja então $n > 0$. Vamos supor que existam constantes α_p, $0 \leq p \leq n$, com

$$\sum_{p=0}^{n} \alpha_p B_p^{[n]}(x) = 0 . \tag{37.A.2}$$

Como $B_0^{[n]}(0) \neq 0$ e $B_p^{[n]}(0) = 0$ se $p > 0$, tomar $x = 0$ em (37.A.2) fornece $\alpha_0 = 0$, de modo que (37.A.2) reduz-se a

$$\sum_{p=1}^{n} \alpha_p B_p^{[n]}(x) = 0 . \tag{37.A.3}$$

Tomando a primeira derivada dessa expressão, calculando-a em $x = 0$ e lembrando que cada $B_p^{[n]}(x)$ tem um zero de ordem p em $x = 0$, obtemos $\alpha_1 = 0$. Prosseguindo dessa forma, obtém-se após $n + 1$ passos que $\alpha_p = 0$ para todo $0 \leq p \leq n$. ■

A proposição acima permite afirmar que para cada n, os polinômios $B_p^{[n]}$, com $0 \leq p \leq n$, formam uma base no espaço de polinômios de grau n, ou seja, que todo polinômio de grau n pode ser escrito na forma $\sum_{p=0}^{n} \theta_p B_p^{[n]}(x)$, onde θ_p, $0 \leq p \leq n$, são constantes. Essa é a chamada *forma de Bernstein*, ou *representação de Bernstein*, de polinômios de grau n.

• **Um resultados preliminar**

O resultado a seguir é um tanto técnico, mas será utilizado adiante em uma demonstração importante.

Lema 37.2 *Sejam os polinômios de Bernstein definidos em (37.A.1). Então, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ vale a seguinte identidade:*

$$\sum_{p=0}^{n} (p - nx)^2 \, B_p^{[n]}(x) = nx(1-x) . \tag{37.A.4}$$

[51] Sergi Natanovich Bernstein (1880–1968). Bernstein introduziu os polinômios que levam seu nome em trabalho de 1911 sobre o Teorema de Weierstrass e interpolações polinomiais.

□

Prova. Pelo binômio de Newton, vale

$$(x+y)^n \;=\; \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p} \tag{37.A.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e todos $x,\ y \in \mathbb{R}$. Para provar (37.A.4), apliquemos o operador diferencial

$$D_x \;:=\; x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x(1-2nx)\frac{\partial}{\partial x} + n^2 x^2$$

a ambos os lados de (37.A.5). Para o lado esquerdo de (37.A.5), temos

$$D_x\Big((x+y)^n\Big) \;=\; nx\Big[y + nx\big(1-(x+y)\big)^2\Big](x+y)^{n-2}$$

(verifique!) e para o lado direito de (37.A.5), temos

$$D_x\left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p}\right) \;=\; \sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2 \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$$

(verifique!). Igualando as expressões acima, obtemos a identidade

$$nx\Big[y + nx\big(1-(x+y)\big)^2\Big](x+y)^{n-2} \;=\; \sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2 \binom{n}{p} x^p y^{n-p}\ .$$

Tomando nesta expressão $y = 1-x$, obtemos

$$nx(1-x) \;=\; \sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2 \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \;=\; \sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2\, B_p^{[n]}(x)\ ,$$

como queríamos provar. ■

• **Outras propriedades básicas dos polinômios de Bernstein**

A proposição que segue estabelece mais alguns fatos básicos sobre os polinômios de Bernstein $B_p^{[n]}(x)$. O estudante deve observar que alguns dos fatos listados abaixo permitem perceber que os polinômios de Bernstein $B_p^{[n]}(x)$ assemelham-se, em um certo sentido, a sequências delta de Dirac.

Proposição 37.15 *Os polinômios de Bernstein $B_p^{[n]}$ têm as seguintes propriedades:*

1. $B_p^{[n]}(x) \geq 0$ *para todo* $x \in [0,\ 1]$.
2. *Para todo* $n \geq 0$ *vale*

$$\sum_{p=0}^{n} B_p^{[n]}(x) \;=\; 1\ . \tag{37.A.6}$$

3. *Para* $n > 0$ *cada polinômio* $B_p^{[n]}(x)$ *tem no intervalo* $[0,\ 1]$ *um máximo absoluto em* $x = \frac{p}{n}$.
4. *Para todo* $\delta > 0$ *e todo* $n > 0$ *vale a desigualdade*

$$\sum_{\substack{p=0 \\ |\frac{p}{n}-x|>\delta}}^{n} B_p^{[n]}(x) \;\leq\; \frac{1}{4\delta^2\, n}\ . \tag{37.A.7}$$

□

Prova. O item 1 é evidente. Tomando-se $y = 1 - x$, o binômio de Newton (37.A.5) fica

$$1 \;=\; \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \;=\; \sum_{p=0}^{n} B_p^{[n]}(x) \;,$$

provando (37.A.6) e o item 2. O item 3 prova-se facilmente calculando a derivada de $B_p^{[n]}(x)$.

Passemos à prova do item 4. Se para algum $\delta > 0$ vale $|\frac{p}{n} - x| > \delta$, então $n^2\delta^2 < (p - nx)^2$, Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p=0 \\ |\frac{p}{n}-x|>\delta}}^{n} B_p^{[n]}(x) \quad &= \quad \frac{1}{n^2\delta^2} \sum_{\substack{p=0 \\ |\frac{p}{n}-x|>\delta}}^{n} \left(n^2\delta^2\right) B_p^{[n]}(x) \\
&< \quad \frac{1}{n^2\delta^2} \sum_{\substack{p=0 \\ |\frac{p}{n}-x|>\delta}}^{n} (p-nx)^2 B_p^{[n]}(x) \\
&\leq \quad \frac{1}{n^2\delta^2} \sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2 B_p^{[n]}(x) \\
&\overset{(37.A.4)}{=} \quad \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \;\leq\; \frac{1}{4n\delta^2} \;,
\end{aligned}$$

completando a prova. Na última desigualdade usamos o fato que a função $x(1-x)$ tem um máximo absoluto em toda reta real para $x = 1/2$, quando vale $1/4$. ■

• **Prova do Teorema de Weierstrass no intervalo** $[0,\ 1]$

Passemos agora à demonstração do Teorema de Weierstrass, Teorema 37.3, página 1950, no intervalo $[0,\ 1]$ usando polinômios de Bernstein.

Teorema 37.19 *Seja uma função contínua $f : [0,\ 1] \to \mathbb{C}$. Então, os polinômios de grau n*

$$b_f^{[n]}(x) \;:=\; \sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right) B_p^{[n]}(x) \;=\; \sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right) \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \;,$$

ditos aproximantes de Bernstein *da função f, aproximam uniformemente f no intervalo* $[0,\ 1]$*, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que*

$$\left\| f - b_f^{[n]} \right\|_\infty \;:=\; \sup_{x\in[0,\ 1]} \left| f(x) - b_f^{[n]}(x) \right| \;\leq\; \epsilon$$

para todo $n \geq N(\epsilon)$. □

Prova. Usando (37.A.6), podemos escrever

$$f(x) - b_f^{[n]}(x) \;=\; \sum_{p=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right) \right] B_p^{[n]}(x) \;,$$

implicando

$$\left| f(x) - b_f^{[n]}(x) \right| \;\leq\; \sum_{p=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right) \right| B_p^{[n]}(x) \;. \tag{37.A.8}$$

Por ser contínua, f é uniformemente contínua no intervalo compacto $[0,\ 1]$ (Teorema 32.12, página 1625), ou seja, Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta \equiv \delta(\epsilon)$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$ sempre que $|x - y| < \delta$. Assim, fixando $\epsilon > 0$ teremos que $\left|f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right)\right| < \epsilon/2$ sempre que $\left|x - \frac{p}{n}\right| < \delta$.

Vamos então quebrar a soma em p no lado direito de (37.A.8) em dois pedaços: para p tais que $\left|\frac{p}{n}-x\right|\leq\delta$ e para p tais que $\left|\frac{p}{n}-x\right|>\delta$. Para a primeira soma, vale

$$\sum_{\substack{p=0\\ |\frac{p}{n}-x|\leq\delta}}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{p}{n}\right)\right|B_p^{[n]}(x)\;\leq\;\frac{\epsilon}{2}\sum_{\substack{p=0\\ |\frac{p}{n}-x|\leq\delta}}^{n}B_p^{[n]}(x)\;\leq\;\frac{\epsilon}{2}\sum_{p=0}^{n}B_p^{[n]}(x)\;\overset{(37.A.6)}{=}\;\frac{\epsilon}{2}\,. \tag{37.A.9}$$

Para a segunda soma teremos

$$\sum_{\substack{p=0\\ |\frac{p}{n}-x|>\delta}}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{p}{n}\right)\right|B_p^{[n]}(x)\;\leq\;2M\sum_{\substack{p=0\\ |\frac{p}{n}-x|>\delta}}^{n}B_p^{[n]}(x)\;\overset{(37.A.7)}{\leq}\;\frac{M}{2n\delta^2}\,, \tag{37.A.10}$$

onde $M:=\sup\limits_{x\in[0,\,1]}|f(x)|$. Assim, provamos que

$$\left|f(x)-b_f^{[n]}(x)\right|\;<\;\frac{\epsilon}{2}+\frac{M}{2n\delta^2}\,.$$

Portanto, para todo n tal que $n\geq\frac{M}{\epsilon\delta^2}$, teremos $\left\|f-b_f^{[n]}\right\|_\infty<\epsilon$, completando a prova. ■

• **Generalizando para intervalos** $[a,\,b]$

O Teorema 37.19 estabeleceu o Teorema de Weierstrass no intervalo $[0,\,1]$. Para passar a um intervalo $[a,\,b]$, com $b>a$, basta notar que a aplicação

$$[0,\,1]\;\ni\;x\;\mapsto\;h(x)\;:=\;(b-a)x+a\;\in\;[a,\,b]$$

é contínua e bijetora, tendo como inversa

$$[a,\,b]\;\ni\;y\;\mapsto\;h^{-1}(y)\;:=\;\frac{y-a}{b-a}\;\in\;[0,\,1]\,,$$

que é igualmente contínua. Fora isso, se p é um polinômio, $(p\circ h^{-1})(x)=p\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ é também um polinômio.

Com isso, se f é contínua em $[a,\,b]$, a função $f\circ h$ é contínua em $[0,\,1]$ podendo, pelo Teorema 37.19, ser uniformemente aproximada nesse intervalo pelos polinômios $b_{f\circ h}^{[n]}$. Logo, f pode ser uniformemente aproximada em $[a,\,b]$ pelos polinômios $c_f^{[n]}:=b_{f\circ h}^{[n]}\circ h^{-1}$. Assim, o Teorema 37.19 se generaliza para

Teorema 37.20 *Seja uma função contínua $f:[a,\,b]\to\mathbb{C}$. Então, os polinômios de grau n*

$$\begin{aligned}c_f^{[n]}(x)\;&:=\;\left(b_{f\circ h}^{[n]}\circ h^{-1}\right)(x)\;=\;\sum_{p=0}^{n}f\left((b-a)\frac{p}{n}+a\right)B_p^{[n]}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\\ &=\;\sum_{p=0}^{n}f\left((b-a)\frac{p}{n}+a\right)\binom{n}{p}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^p\left(1-\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right)^{n-p}\,,\end{aligned}$$

aproximam uniformemente f no intervalo $[a,\,b]$, ou seja, para todo $\epsilon>0$ existe $N(\epsilon)$ tal que

$$\left\|f-c_f^{[n]}\right\|_\infty\;:=\;\sup_{x\in[a,\,b]}\left|f(x)-c_f^{[n]}(x)\right|\;\leq\;\epsilon$$

para todo $n\geq N(\epsilon)$. □

37.B A Demonstração de Weierstrass do Teorema de Weierstrass

Vamos nesta breve seção apresentar mais uma demonstração do Teorema de Weierstrass, Teorema 37.3, página 1950. Esta demonstração segue essencialmente as mesmas ideias da demonstração original de Weierstrass, obtida em 1885 quando seu autor completava 70 anos de idade, contrariando a noção de que contribuições importantes à Matemática são privilégio de jovens.

Consideramos a prova abaixo instrutiva pela simplicidade de recursos e pelo uso que a mesma faz de uma sequência delta de Dirac de funções Gaussianas. Nos restringiremos a funções contínuas definidas no intervalo compacto $[-1,\ 1]$ mas, como anteriormente, a generalização para intervalos compactos gerais do tipo $[a,\ b]$, com $a < b$ não apresenta nenhuma dificuldade.

Seja $f : [-1,\ 1] \to \mathbb{C}$ contínua. Definindo $g(x) := f(x) - l(x)$ com $l(x) = \frac{f(1)-f(-1)}{2}x - \frac{f(1)+f(-1)}{2}$, temos, naturalmente, que g é também contínua. Como l é um polinômio, é suficiente provar que g pode ser uniformemente aproximada por polinômios no intervalo $[-1,\ 1]$. Note-se agora que, pela definição, $g(-1) = g(1) = 0$ e, devido a isso, g possui uma extensão $\tilde{g}$ contínua e periódica de período 2 para toda $\mathbb{R}$ dada por $\tilde{g}\big(2n + x\big) := g(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in [-1,\ 1]$.

Para uso futuro, definamos $\mathcal{G} := \sup\big\{|g(x)|,\ x \in [-1,\ 1]\big\}$. É evidente que $\big|\tilde{g}(x)\big| \leq \mathcal{G}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por ser contínua no intervalo compacto $[-1,\ 1]$, g é uniformemente contínua (Teorema 32.12, página 1625) e, consequentemente, $\tilde{g}$ também o é, por ser uma extensão contínua e periódica de g. Assim, aplica-se para $\tilde{g}$ o Teorema 37.1, página 1947, para qualquer sequência delta de Dirac (segundo a Definição 37.1, página 1944). Escolhemos considerar a sequência delta de Dirac Gaussiana, definida em (37.12): $K_n(x) := \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Do Teorema 37.1 concluímos que a sequência de funções

$$G_n(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(y) K_n(x-y)\, dy \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(y) \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2(y-x)^2}\, dy$$

converge uniformemente a $\tilde{g}$ em toda reta real. Vamos agora restringir x ao intervalo $[-1,\ 1]$ e escrever a integral acima como

$$\int_{-\infty}^{-1-\delta} \tilde{g}(y) \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2(y-x)^2}\, dy + \int_{1+\delta}^{\infty} \tilde{g}(y) \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2(y-x)^2}\, dy + \int_{-1-\delta}^{1+\delta} \tilde{g}(y) \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2(y-x)^2}\, dy \tag{37.B.11}$$

com $0 < \delta < 1$, fixo. A primeira integral em (37.B.11) pode ser majorada em módulo por

$$\mathcal{G} \int_{-\infty}^{-1-\delta} \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2(y-x)^2}\, dy \overset{w=x-y}{=} \mathcal{G} \int_{x+1+\delta}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2w^2}\, dw \overset{(37.13)}{\leq} \frac{e^{-n^2(x+1+\delta)^2}}{2} \leq \frac{e^{-n^2\delta^2}}{2}\,,$$

sendo que na última desigualdade usamos que $x \geq -1$. A segunda integral em (37.B.11) pode ser majorada em módulo por

$$\mathcal{G} \int_{1+\delta}^{\infty} \tilde{g}(y) \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2(y-x)^2}\, dy \overset{w=y-x}{=} \mathcal{G} \int_{1+\delta-x}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2w^2}\, dw \overset{(37.13)}{\leq} \frac{e^{-n^2(1+\delta-x)^2}}{2} \leq \frac{e^{-n^2\delta^2}}{2}\,,$$

sendo que na última desigualdade usamos que $x \leq 1$. Como $\frac{e^{-n^2\delta^2}}{2}$ converge a zero para $n \to \infty$ independente de x, concluímos que as duas primeiras integrais em (37.B.11) convergem a zero para $n \to \infty$ uniformemente para todo x no intervalo $[-1,\ 1]$. Logo, a terceira integral em (37.B.11),

$$H_n(x) \;:=\; \int_{-1-\delta}^{1+\delta} \tilde{g}(y) \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2(y-x)^2}\, dy\,,$$

converge uniformemente em $[-1,\ 1]$ à função $\tilde{g}$ (e, portanto, à função g).

Sabemos (Proposição 37.6, página 1960) que a série de Taylor centrada em zero da função exponencial converge uniformemente à mesma em intervalos compactos como $[0,\ (2+\delta)^2]$ (onde os valores de $(y-x)^2$ se encontram quando $y \in [-1-\delta,\ 1+\delta]$ e $x \in [-1,\ 1]$). Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ as funções H_n podem ser uniformemente aproximadas por

$$H_{n,\,m}(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k n^{2k}}{k!} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-1-\delta}^{1+\delta} \tilde{g}(y)\,(y-x)^{2k}\, dy\,, \qquad m \in \mathbb{N}\,.$$

Agora, é bastante claro (expandindo $(y-x)^{2k}$ pelo binômio de Newton) que $H_{n,\,m}$ é um polinômio em x. Assim, concluímos do raciocínio acima que cada função H_n é uniformemente aproximável por polinômios no intervalo $[-1,\ 1]$ e que a função g é uniformemente aproximável pelas funções H_n no mesmo intervalo. Isso prova que g é uniformemente aproximável no intervalo $[-1,\ 1]$ pelos polinômios $H_{n,\,m}$:

$$g(x) \;=\; \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} H_{n,\,m}(x) \;=\; \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k n^{2k+1}}{k!\sqrt{\pi}}\int_{-1-\delta}^{1+\delta}\tilde{g}(y)\,(y-x)^{2k}\,dy$$

(notar que a ordem dos limites não pode ser trocada!) e a demonstração do Teorema de Weierstrass, Teorema 37.3, página 1950, está completa. ■