Capítulo 38
Introdução às Distribuições e às Transformadas de Fourier

Sumário

38.1 Funções de Schwartz e Funções de Teste . . . 2008
38.1.1 Funções Gaussianas . . . 2019
38.2 Transformadas de Fourier . . . 2022
38.2.1 Transformadas de Fourier no Espaço de Schwartz . . . 2025
38.2.1.1 As Relações de Weyl e a Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff . . . 2028
38.2.1.2 A Transformada de Fourier de Funções Gaussianas . . . 2031
38.2.1.3 Invertibilidade da Transformada de Fourier no Espaço de Schwartz . . . 2034
38.2.1.4 Transformadas de Fourier, Produtos de Convolução e Identidade de Plancherel . . . 2037
38.2.1.5 "Relações de Incerteza" para Transformadas de Fourier . . . 2039
38.2.2 A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n,\, dx)$ . . . 2041
38.2.2.1 Mais Algumas Transformadas de Fourier Relevantes em Aplicações . . . 2044
38.2.2.2 A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n,\, dx)$ e suas Propriedades Espectrais . . . 2046
38.2.3 Transformadas de Fourier: Tópicos Suplementares . . . 2049
38.2.3.1 A Fórmula de Soma de Poisson . . . 2049
38.2.3.2 Usos da Fórmula de Soma de Poisson. A Função θ de Jacobi . . . 2051
38.2.3.3 Transformadas de Fourier e Médias Angulares . . . 2052
38.3 Distribuições e Distribuições Temperadas . . . 2058
38.3.1 Primeiros Exemplos de Distribuições . . . 2060
38.3.2 Outros Exemplos de Distribuições . . . 2065
38.3.2.1 A Distribuição Valor Principal . . . 2065
38.3.2.2 Distribuições do Tipo Parte Finita de Hadamard . . . 2067
38.3.3 Algumas Relações Úteis Envolvendo Distribuições . . . 2070
38.3.4 Derivadas de Distribuições . . . 2074
38.3.4.1 Alguns Exemplos de Derivadas de Distribuições . . . 2077
38.3.4.2 Cálculo da Derivada de Algumas Distribuições de Interesse . . . 2078
38.3.5 Alguns Resultados Estruturais sobre Distribuições . . . 2080
38.3.6 Transformadas de Fourier de Distribuições Temperadas . . . 2081
38.3.6.1 Cálculo de Transformadas de Fourier de Algumas Distribuições Temperadas . . . 2081
38.3.7 Produtos de Distribuições . . . 2085
38.3.7.1 Produto de Convolução de Distribuições . . . 2090
38.4 Equações Diferenciais Distribucionais, Soluções Fundamentais e Funções de Green . . . 2091
38.4.1 Soluções Fundamentais . . . 2094
38.4.1.1 Soluções Fundamentais como Funções Generalizadas . . . 2095
38.4.1.2 O Caso de Operadores Lineares a Coeficientes Constantes . . . 2097
38.4.1.3 Alguns Exemplos Fisicamente Relevantes . . . 2102
38.5 Exercícios Adicionais . . . 2106
APÊNDICES . . . 2113
38.A Prova de (38.21) . . . 2113
38.B Prova da Proposição 38.16 . . . 2114
38.C Prova da Regra de Leibniz (38.6) . . . 2118

COLOCADA no devido contexto a noção de distribuição é tão natural que parece ter sido descoberta, não inventada. Em abstrato, uma distribuição é um funcional linear contínuo em um certo espaço topológico que possua uma estrutura diferenciável, mas por trás dessa abstração encontram-se ideias muito simples, originárias do desejo (ou necessidade) de estender a noção de função, ou melhor, a noção intuitiva de densidade, de modo a incluir, por exemplo, densidades concentradas em pontos (e outros conjuntos de medida nula), permitindo ainda o emprego de pelo menos parte da estrutura do cálculo diferencial.

A noção de *distribuição*, foi introduzida em 1935 por Sobolev[1] sob o nome de "*função generalizada*" e foi estudada sistematicamente por Schwartz[2] a partir de 1948. Essa noção desempenha um papel central em toda discussão moderna sobre a teoria das equações diferenciais (lineares, ao menos). As ideias físicas e matemáticas subjacentes à teoria das distribuições originam-se dos trabalhos de Green[3], Heaviside[4], Dirac[5], Weil[6] e possivelmente muitos outros.

Como a teoria das distribuições é intimamente ligada à teoria das transformadas de Fourier, dedicamos a Seção 38.2, página 2022, ao seu estudo. Na Seção 38.3, página 2058, introduziremos a noção de distribuição em $\mathbb{R}^n$ após alguma preparação breve. Em seguida trataremos de alguns exemplos. Após isso, discutiremos a noção de derivada de uma distribuições para então discutirmos equações diferenciais distribucionais. Isso nos remeterá ao método da função de Green.

Para uma introdução pedagógica e rica em exemplos à Teoria das Distribuições, vide [75]. Para um tratamento de nível intermediário, vide [412]. Uma introdução acessível (direcionada a aplicações na Teoria Quântica de Campos) pode ser encontrada nos primeiros capítulos de [488]. Para um texto clássico, vide [449]. Para textos mais avançados, vide [185] ou o enciclopédico [246].

Omitiremos na presente versão o tratamento da noção de produto de distribuições, de conjuntos de frente de onda e outros itens próprios a uma discussão mais avançada. Também com o intuito de manter a discussão tão simples quanto possível, omitiremos quase toda a discussão topológica sobre a natureza das distribuições no contexto da teoria dos espaços localmente convexos. Para isso remetemos o estudante interessado aos textos supracitados.

38.1 Funções de Schwartz e Funções de Teste

• **Funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$**

Diz-se que uma função[7] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, é infinitamente diferenciável em um domínio aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se for contínua em Ω e se todas suas as suas derivadas parciais de ordem finita existirem e forem contínuas em Ω, ou seja, se existirem e forem contínuas para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ as funções $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x_1, \ldots, x_n)$ para todos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0$, sendo $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

O estudante deve ser alertado a não confundir a noção de diferenciabilidade infinita com a de analiticidade. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{se } x = 0\,, \\ e^{-1/x^2}\,, & \text{se } x \neq 0\,, \end{cases}$$

é infinitamente diferenciável, enquanto função da variável real x, mas não é analítica em $x = 0$. A função de uma variável complexa $z = x + iy$ definida por $g(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ possui uma singularidade essencial em $z = 0$. Para $z = x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, g é idêntica a f, mas para $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, tem-se $g(iy) = e^{+\frac{1}{y^2}}$ que diverge para $y \to 0$.

O conjunto de todas as funções infinitamente diferenciáveis em Ω é frequentemente denotado por $C^\infty(\Omega)$. É elementar constatar que $C^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial: combinações lineares finitas de funções infinitamente diferenciáveis produzem

[1] Sergei Lvovich Sobolev (1908–1989).
[2] Laurent-Moïse Schwartz (1915–2002).
[3] George Green (1793–1841).
[4] Oliver Heaviside (1850–1925).
[5] Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984).
[6] André Weil (1906–1998).
[7] Em toda a presente seção trataremos, salvo menção explícita, de funções que assumem valores complexos, mas o tratamento de funções que assumem valores reais é idêntico, com resultados idênticos.

novamente funções infinitamente diferenciáveis.

• **O espaço de Schwartz em $\mathbb{R}$**

O conjunto $C^\infty(\mathbb{R})$ das funções infinitamente diferenciáveis definidas em $\mathbb{R}$ e assumindo valores em $\mathbb{C}$ possui um subconjunto que merece particular atenção. Trata-se do conjunto das funções de $C^\infty(\mathbb{R})$ que, assim como suas derivadas, decaem a zero no infinito mais rápido do que qualquer polinômio, ou seja, é o conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tais que

$$\lim_{|x|\to\infty} p(x) f^{(q)}(x) \;=\; 0 \tag{38.1}$$

para todo polinômio p e todo $q \in \mathbb{N}_0$. É fácil ver que essa condição equivale à condição

$$\lim_{|x|\to\infty} (1+|x|)^m \left| f^{(q)}(x) \right| \;=\; 0 \tag{38.2}$$

para todo $m \in \mathbb{N}_0$ e todo $q \in \mathbb{N}_0$.

É um exercício elementar provar que o conjunto das funções com a propriedade (38.1) é um espaço vetorial, ou seja, se f e g satisfazem (38.1) para todo polinômio p e todo $q \in \mathbb{N}_0$, então para todos os números complexos a e b a função $af + bg$ também satisfaz (38.1) para todo polinômio p e todo $q \in \mathbb{N}_0$. Esse espaço vetorial é denominado *espaço de Schwartz* em $\mathbb{R}$ e é denotado por $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Funções como e^{-x^2}, $\operatorname{sen}(x)e^{-2x^8}$, $(1-x^5)e^{\cos(x)^2 - x^4}$ são elementos de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (verifique!).

* ** *** ** *

E. 38.1 *Exercício*. Para $a > 0$, fixo, considere a função

$$h_a(x) \;:=\; \frac{1}{\Big(\cosh\big(x\big)\Big)^a}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Mostre que h_a é uma função de Schwartz em $\mathbb{R}$: $h_a \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $a > 0$. ✠

E. 38.2 *Exercício*. A função $f(x) = e^{-x^2}\cos\left(e^{x^4}\right)$ é infinitamente diferenciável e decai a zero mais rápido que qualquer polinômio (ou seja, satisfaz $\lim_{|x|\to\infty} p(x)f(x) = 0$ para qualquer polinômio p), mas já a sua primeira derivada, f', não satisfaz essa condição, ou seja, não decai a zero mais rápido que qualquer polinômio quando $x \to \pm\infty$. Justifique essa afirmação. Isso implica que essa f não é uma função de Schwartz. ✠

E. 38.3 *Exercício*. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} 1\,, & \text{para } x = 0\,, \\ 1 - e^{-1/x^2}, & \text{para } x \neq 0\,. \end{cases}$$

Mostre que f é infinitamente diferenciável, decai a zero quando $x \to \pm\infty$, mas não o faz mais rápido que qualquer polinômio e, portanto não é uma função de Schwartz em $\mathbb{R}$. ✠

E. 38.4 *Exercício*. As funções $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} 1 - e^{-1}\,, & \text{para } x = 0\,, \\ e^{-e^{-1/x^2}} - e^{-1}, & \text{para } x \neq 0\,, \end{cases} \qquad g(x) \;:=\; \begin{cases} -e^{-1}\,, & \text{para } x = 0\,, \\ e^{-e^{1/x^2}} - e^{-1}, & \text{para } x \neq 0\,, \end{cases}$$

são funções de Schwartz em $\mathbb{R}$? ✠

• **Convergência no espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R})$**

Devido à propriedade (38.2), vale para toda função $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ que as quantidades definidas para cada m e $q \in \mathbb{N}_0$ por

$$\|f\|_{m,\,q} := \sup\left\{(1+|x|)^m \left|f^{(q)}(x)\right|,\ x \in \mathbb{R}\right\} \tag{38.3}$$

são finitas e anulam-se todas se e somente se f for identicamente igual a zero. Para cada m, q a expressão (38.3) define uma seminorma em $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (a noção de seminorma é definida à página 274).

Esse fato permite introduzir uma noção de convergência no espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Dizemos que uma sequência de funções $f_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, converge a uma função $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ se $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{m,\,q} = 0$ para todos m e $q \in \mathbb{N}_0$. Essas ideias de convergência podem ser aprofundadas por meio da introdução de noções topológicas apropriadas (introduzindo as noções de espaço localmente convexo e de espaço de Fréchet[8]), mas aqui iremos nos limitar a uma discussão elementar. Vide referências citadas no início do presente capítulo.

Logo abaixo vamos indicar como o espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ generaliza-se em mais dimensões. Para tal faremos uso da notação de multi-índices, introduzida à página 951, e que aqui recordamos.

• **Notação de multi-índices**

Devido à frequente ocorrência de derivadas parciais mistas na teoria das distribuições é conveniente introduzir algumas notações simplificadoras. Um n-multi-índice, ou simplesmente *multi-índice*, é uma n-upla $\alpha = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ onde cada α_j é um número natural maior ou igual a zero. A coleção de todos os n-multi-índices é, portanto, $\mathbb{N}_0^n$. A *ordem de um multi-índice* α, denotada por $|\alpha|$, é definida por $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. O multi-índice $(0,\ \ldots,\ 0)$ é denominado multi-índice nulo e denotado por 0. Dados dois n-multi-índices $\alpha = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n)$ denotamos por $\alpha + \beta$ o n-multi-índice $(\alpha_1 + \beta_1,\ \ldots,\ \alpha_n + \beta_n)$.

Seja u um a função de n variáveis $x_1,\ \ldots,\ x_n$. Dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, denotamos por $D^\alpha u$ ou por $\partial^\alpha u$ a derivada parcial mista de u univocamente definida por

$$D^\alpha u \equiv \partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}\ ,$$

sendo que, se $0 = (0,\ \ldots,\ 0)$ for o multi-índice nulo, define-se $D^0 u := u$. Note-se também que $D^\alpha D^\beta u = D^{\alpha+\beta} u$.

Dado um operador diferencial D^α o valor de $|\alpha|$ é dito ser o *grau* de D^α.

Neste texto denotaremos por $\mathbf{M}_m^n$ o conjunto de todos os n-multi-índices de ordem menor ou igual a $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbf{M}_m^n := \left\{(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n,\ 0 \le |\alpha| \le m\right\} = \left\{(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n,\ 0 \le \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \le m\right\} \tag{38.4}$$

e denotaremos por $\mathbf{N}_m^n$ o conjunto de todos os n-multi-índices de ordem igual a $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbf{N}_m^n := \left\{(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n,\ |\alpha| = m\right\} = \left\{(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n,\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m\right\}. \tag{38.5}$$

É de se notar a validade da relação

$$D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta} = D^\beta D^\alpha\ ,$$

onde, se $\alpha = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n)$, denotamos $\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1,\ \ldots,\ \alpha_n + \beta_n) = \beta + \alpha$.

Para um n-multi-índice $\alpha = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ definimos o símbolo $\alpha!$ como sendo o produto

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!\,.$$

Para $z \in \mathbb{C}^n$ (ou $\mathbb{R}^n$) da forma $z = (z_1,\ \ldots,\ z_n)$ e um n-multi-índice $\alpha = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ definimos o símbolo z^α como sendo o produto

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}\ .$$

Há uma relação de ordem parcial entre n-multi-índices. Se α e β são n-multi índices, escrevemos $\alpha < \beta$ caso $\alpha_j < \beta_j$ para todo $j \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ e, analogamente, escrevemos $\alpha \le \beta$ caso $\alpha_j \le \beta_j$ para todo $j \in \{1,\ \ldots,\ n\}$. Dados dois

[8] Maurice René Fréchet (1878-1973).

n-multi índices α e β definimos $\min\{\alpha,\,\beta\}$ como sendo o n-multi-índice cuja j-ésima componente é o mínimo entre a j-ésima de α e a de β:

$$\min\{\alpha,\,\beta\} \;:=\; \Big(\min\{\alpha_1,\,\beta_1\},\;\ldots,\min\{\alpha_n,\,\beta_n\}\Big)\;.$$

O n-multi índice $\max\{\alpha,\,\beta\}$ é definido analogamente.

A notação de multi-índices permite expressar a *regra de Leibniz*[9], para derivadas parciais múltiplas de produtos de duas funções, de uma forma elegante e econômica. Se γ é um n-multi-índice e f e g são duas funções de n variáveis que sejam ao menos $|\gamma|$ vezes diferenciáveis, então vale

$$D^\gamma(fg) \;=\; \sum_{0\leq\alpha\leq\gamma}\frac{\gamma!}{\alpha!(\gamma-\alpha)!}\,D^\alpha(f)D^{\gamma-\alpha}(g)\;. \tag{38.6}$$

onde γ e α, acima, são n-multi índices. Essa relação pode ser demonstrada por indução e uma prova[10] pode ser encontrada no Apêndice 38.C, página 2118.

• O espaço de Schwartz em $\mathbb{R}^n$

O conjunto $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções infinitamente diferenciáveis definidas em $\mathbb{R}^n$ e assumindo valores em $\mathbb{C}$ possui um subconjunto que merece particular atenção. Trata-se do conjunto das funções de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que, assim como suas derivadas, decaem a zero no infinito mais rápido do que qualquer polinômio, ou seja, é o conjunto das funções $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ tais que

$$\lim_{\|x\|\to\infty} p(x)D^\beta f(x) \;=\; 0\;. \tag{38.7}$$

para todo polinômio $p(x)\equiv p(x_1,\;\ldots,\;x_n)$ e todo multi-índice β. Acima $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ é a norma de $x\in\mathbb{R}^n$. É fácil ver que essa condição equivale à condição

$$\lim_{\|x\|\to\infty}(1+\|x\|)^m\left|D^\beta f(x)\right| \;=\; 0 \tag{38.8}$$

para todo $m\in\mathbb{N}_0$ e todo multi-índice β.

É um exercício elementar provar que o conjunto das funções com a propriedade (38.7) é um espaço vetorial, ou seja, se f e g satisfazem (38.7) para todo polinômio p e todo multi-índice β, então para todos os números complexos a e b a função $af+bg$ também satisfaz (38.1) para todo polinômio p e todo multi-índice β. Esse espaço vetorial é denominado *espaço de Schwartz* em $\mathbb{R}^n$ e é denotado por $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

• Convergência no espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

Devido à propriedade (38.7), vale para toda função $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ que as quantidades definidas para cada $m\in\mathbb{N}_0$ e cada multi-índice β por

$$\|f\|_{m,\,\beta} \;:=\; \sup\Big\{(1+\|x\|)^m\left|D^\beta f(x)\right|,\;x\in\mathbb{R}^n\Big\} \tag{38.9}$$

são finitas e anulam-se todas se e somente se f for identicamente igual a zero.

Esse fato permite introduzir uma noção de convergência no espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que uma sequência de funções $f_k\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $k\in\mathbb{N}$, converge a uma função $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{m,\,\beta}=0$ para todos $m\in\mathbb{N}_0$ e multi-índice β. Como no caso do espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, comentamos que essa noção de convergência nos espaços $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ está ligada a noções topológicas mais profundas, mas aqui iremos nos limitar a uma discussão elementar.

• Uma desigualdade útil

Devido à definição (38.9) vale, para cada $q\in\mathbb{N}_0$, e cada multi-índice β, a desigualdade $(1+\|x\|)^q|D^\beta f(x)|\leq\|f\|_{q,\,\beta}$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$, o que implica

$$|D^\beta f(x)| \;\leq\; \frac{\|f\|_{q,\,\beta}}{(1+\|x\|)^q} \tag{38.10}$$

para cada $x\in\mathbb{R}^n$. Usaremos a desigualdade (38.10) de diversas formas no que segue.

[9] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716).

[10] Devida a Victor Hugo Marques Ramos, a quem agradecemos.

• **Funções infinitamente diferenciáveis de suporte compacto**

Define-se o *suporte de uma função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, denotado por $\operatorname{supp} f$, como sendo o fecho do conjunto de todos os pontos onde f não se anula:

$$\operatorname{supp} f \ := \ \overline{\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0 \right\}}$$

(a barra horizontal denota o fecho do conjunto).

Funções que sejam infinitamente diferenciáveis e tenham suporte compacto são importantes na Teoria das Distribuições. Um exemplo de uma função desse tipo é a função

$$f(x) \ := \ \begin{cases} 0 \ , & \text{se } x \leq a \text{ ou se } x \geq b \ , \\ \exp\left(-\dfrac{1}{(x-a)^2} - \dfrac{1}{(x-b)^2} \right) \ , & \text{se } a < x < b \ , \end{cases} \tag{38.11}$$

onde $-\infty < a < b < \infty$. O suporte dessa função é $[a, \ b]$, um conjunto compacto, e a mesma é infinitamente diferenciável (verifique!). Para um gráfico esquemático dessa função, vide o lado esquerdo da Figura 38.1, página 2012. Outro exemplo é a função

$$g(x) \ := \ \begin{cases} 0 \ , & \text{se } x \leq -\beta \text{ ou se } x \geq \beta \ , \\ 1 \ , & \text{se } -\alpha \leq x \leq \alpha \ , \\ \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{(x^2-\beta^2)^2}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{(x^2-\alpha^2)^2}\right)\right]}{\exp\left(-\frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)^2}\right)} \ , & \text{se } \alpha < x < \beta \text{ ou se } -\beta < x < -\alpha \ , \end{cases} \tag{38.12}$$

para $0 < \alpha < \beta < \infty$. Observe que o suporte dessa função é o intervalo $[-\beta, \ \beta]$, que a função g é igual a 1 no intervalo $[-\alpha, \ \alpha]$ (um subconjunto próprio de $[-\beta, \ \beta]$). Para um gráfico esquemático dessa função, vide o lado direito da Figura 38.1, página 2012.

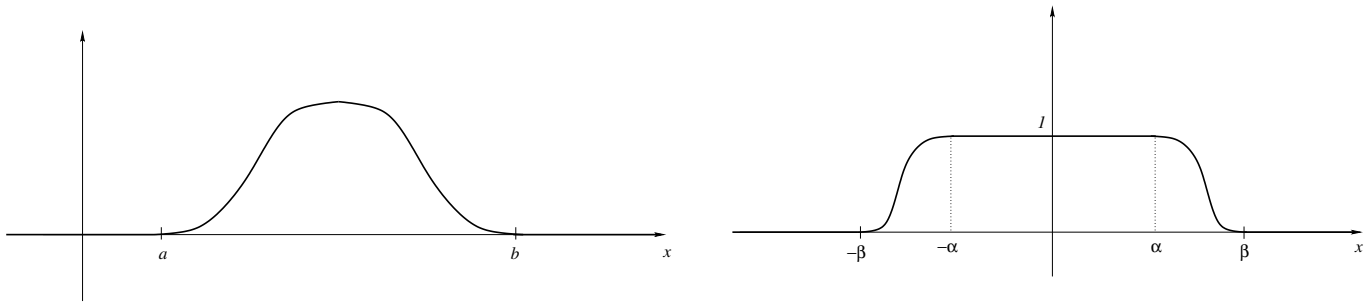

Figura 38.1: À esquerda, gráfico esquemático da função f definida em (38.11). À direita, gráfico esquemático da função g definida em (38.12).

E. 38.5 *Exercício*. Prove que a função g definida em (38.12) satisfaz $0 \leq g \leq 1$ em toda a reta $\mathbb{R}$. *Sugestão*: mostre que a função $h(x) = \left(x^2 - \beta^2\right)^{-2}$ é crescente para $0 < x < \beta$, o que implica $\left(\alpha^2 - \beta^2\right)^{-2} < \left(x^2 - \beta^2\right)^{-2}$ para $\alpha < x < \beta$. ✠

E. 38.6 *Exercício*. Prove que as funções f e g de (38.11) e (38.12), acima, são infinitamente diferenciáveis. *Sugestão*: no caso da função f mostre que as derivadas de funções como $\exp\left(-\frac{1}{(x-a)^2}\right)$ são sempre da forma $\exp\left(-\frac{1}{(x-a)^2}\right)$ vezes um polinômio em $\frac{1}{(x-a)}$. Esse polinômio diverge quando $x \to a$ mas o fator exponencial $\exp\left(-\frac{1}{(x-a)^2}\right)$ vai a zero mais rapidamente. Para g tem-se algo análogo. ✠

O conjunto de todas as funções infinitamente diferenciáveis de suporte compacto definidas em $\mathbb{R}^n$ é frequentemente denotado por $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

É fácil constatar que o conjunto de todas funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ de suporte compacto forma um espaço vetorial: combinações lineares finitas de funções infinitamente diferenciáveis de suporte compacto produzem novamente funções infinitamente diferenciáveis de suporte compacto. Esse espaço vetorial é frequentemente denotado por $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou por $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Os elementos de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, as funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ de suporte compacto, são frequentemente denominadas *funções de teste*[11].

É bastante claro pela definição que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Como veremos na Seção 38.2, página 2022, transformadas de Fourier de funções do espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ são novamente funções do espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, fato esse de importância em certos desenvolvimentos. Transformadas de Fourier de funções de funções de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ não são, em geral, elementos de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

• **Convergência no espaço $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$**

É também possível introduzir uma noção de convergência em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que uma sequência φ_k, $k \in \mathbb{N}$, de funções de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ converge a uma função φ de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ se as seguintes condições forem satisfeitas: *1.* existe um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ grande o suficiente o suporte da diferença $\varphi_k - \varphi$ está contido dentro de K; *2.* para todo multi-índice β a diferença $D^\beta\varphi_k - D^\beta\varphi$ converge uniformemente à função nula em K, o que equivale a dizer que $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\left\{ \left|D^\beta(\varphi_k - \varphi)(x)\right|,\ x \in K\right\} = 0$.

Por exemplo, a sequência de funções de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ dada por

$$
{}_1\varphi_k(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{k}\exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right), & \text{para } x \in (-1,\ 1)\,, \\[2ex] 0\,, & \text{para } x \notin (-1,\ 1)\,, \end{cases}
$$

$k \in \mathbb{N}$, converge à função nula no sentido de convergência do espaço $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, definido acima, mas a sequência de funções de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ dada por

$$
{}_2\varphi_k(x) \;=\; \begin{cases} e^{-k^2}\exp\left(-\dfrac{1}{1-(x/k)^2}\right), & \text{para } x \in (-k,\ k)\,, \\[2ex] 0\,, & \text{para } x \notin (-k,\ k)\,, \end{cases} \tag{38.13}
$$

$k \in \mathbb{N}$, não converge à função nula no sentido de convergência do espaço $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, definido acima (pois a condição *1* é violada).

O estudante deve observar, porém, que tanto a sequência ${}_1\varphi_k$ quanto a sequência ${}_2\varphi_k$ convergem à função nula no sentido de convergência definido no espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Vide Exercício E. 38.7. Esses exemplos mostram que as noções de convergência no sentido do espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ e no sentido do espaço $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ são diferentes!

E. 38.7 *Exercício*. Usando (38.3), mostre que $\lim\limits_{k\to\infty} \|{}_1\varphi_k\|_{m,\,q} = 0$ e $\lim\limits_{k\to\infty} \|{}_2\varphi_k\|_{m,\,q} = 0$ para todos $m,\ q \in \mathbb{N}_0$. Isso diz-nos que tanto a sequência ${}_1\varphi_k$ quanto a sequência ${}_2\varphi_k$ convergem à função nula no sentido da convergência em $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. ✠

E. 38.8 *Exercício*. Mostre que a sequência de funções de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ definidas por ${}_3\varphi_k(x) := \phi(x-k)$, $k \in \mathbb{N}$, onde

$$
\phi(x) \;=\; \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right), & \text{para } x \in (-1,\ 1)\,, \\[2ex] 0\,, & \text{para } x \notin (-1,\ 1)\,, \end{cases}
$$

não converge à função nula no sentido de convergência do espaço $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ e não converge à função nula no sentido de convergência do espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. ✠

[11] Infelizmente, alguns autores também denominam funções de teste as funções de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Como no caso do espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, comentamos que a noção de convergência nos espaços $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ está associada a noções topológicas mais profundas, mas aqui iremos nos limitar a uma discussão elementar. Vide referências citadas no início da presente seção.

Importante nessa discussão é a seguinte afirmação:

Proposição 38.1 *Se φ_k é uma sequência de elementos de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ que converge a uma função $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ no sentido de convergência de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, então φ_k também converge a φ no sentido de convergência de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.* □

O exemplo da sequência ${}_2\varphi_k$ de (38.13), acima, mostra que a recíproca da afirmação dessa proposição não é verdadeira, pois ${}_2\varphi_k$ converge à função nula segundo $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ mas não segundo $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ (vide Exercício E. 38.7).

Prova da Proposição 38.1. Considere-se uma sequência φ_k de elementos de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ que converge a uma função $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ no sentido de convergência de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Então, existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi_k - \varphi$ tem suporte contido em K para todo k grande o suficiente. Para tais k's e para valerá

$$\|\varphi_k - \varphi\|_{m,\,\beta} := \sup\Big\{(1+\|x\|)^m \left|D^\beta(\varphi_k-\varphi)(x)\right|,\ x\in\mathbb{R}^n\Big\} = \sup\Big\{(1+\|x\|)^m \left|D^\beta(\varphi_k-\varphi)(x)\right|,\ x\in K\Big\}$$

$$= \sup\Big\{(1+\|x\|)^m,\ x\in K\Big\}\sup\Big\{\left|D^\beta(\varphi_k-\varphi)(x)\right|,\ x\in K\Big\},$$

sendo $m \in \mathbb{N}_0$ e β um multi-índice, ambos arbitrários. O fator $\sup\Big\{(1+\|x\|)^m,\ x\in K\Big\}$ é finito (pois K é compacto) e é independente do índice k. Já o fator $\sup\Big\{\left|D^\beta(\varphi_k-\varphi)(x)\right|,\ x\in K\Big\}$ converge a zero para $k\to\infty$ pois, por hipótese, $D^\beta\varphi_k$ converge uniformemente a $D^\beta\varphi$. Isso provou que $\lim\limits_{k\to\infty}\|\varphi_k-\varphi\|_{m,\,\beta}=0$ para todo $m\in\mathbb{N}_0$ e todo multi-índice β, estabelecendo que φ_k também converge a φ no sentido de convergência de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. ■

• **Uma proposição útil**

A proposição a seguir será usada no que segue, por exemplo na discussão sobre a transformada de Fourier no espaço de Schwartz.

Proposição 38.2 *Se $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz $f(a)=0$ para algum $a=(a_1,\ \ldots,\ a_n)\in\mathbb{R}^n$, então f pode ser escrita na forma $f(x)=\sum\limits_{k=1}^n(x_k-a_k)f_k(x)$, onde as funções f_k são também elementos de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.* □

Prova. Pelo Corolário 37.2, página 1961, sabemos que podemos escrever

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (x_k-a_k)h_k(x)\ ,$$

onde as funções h_k são infinitamente diferenciáveis. Isso não implica, todavia, que sejam funções de Schwartz. Sabemos, por outro lado, que as funções g_k definidas por $g_k(x):=f(x)\dfrac{(x_k-a_k)}{\|x-a\|^2}$ são infinitamente diferenciáveis exceto em $x=a$, e decaem, assim como suas derivadas, mais rápido que qualquer polinômio em x, pois f o faz. Fora isso, vale

$$\sum_{k=1}^n (x_k-a_k)g_k(x) = f(x)\,\frac{\sum\limits_{k=1}^n (x_k-a_k)^2}{\|x-a\|^2} = f(x)\ .$$

Seja agora uma função infinitamente diferenciável e de suporte compacto χ escolhida de modo que $\chi(x)=1$ para todo x em uma vizinhança de a. Um exemplo seria a função $\chi(x)=g\left(\|x-a\|^2\right)$, onde g é a função definida em (38.12). Defina-se para cada k

$$f_k(x) := \big(1-\chi(x)\big)g_k(x)+\chi(x)h_k(x)\ .$$

Como comentamos acima, g_k só não é diferenciável em $x = a$, mas $1 - \chi$ anula-se em uma vizinhança de a. No suporte de $1 - \chi$ as funções g_k decaem, assim como suas derivadas, mais rápido que qualquer polinômio em x. Assim, o produto $(1 - \chi)g_k$ é uma função de Schwartz. Já h_k é infinitamente diferenciável e o produto $\chi(x)h_k(x)$ é infinitamente diferenciável e de suporte compacto sendo, portanto, uma função de Schwartz. Isso provou que as funções f_k são de Schwartz. Note-se agora que

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)f_k(x) \;=\; \chi(x)\sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)h_k(x) + (1-\chi(x))\sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)g_k(x) \;=\; \chi(x)f(x) + (1-\chi(x))f(x) \;=\; f(x)\;,$$

completando a prova. ■

• Operadores diferenciais lineares em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

Sejam $a_1, \ldots, a_N$ funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ e sejam $\alpha^1, \ldots, \alpha^N$ multi-índices distintos, que escrevemos em termos de suas componentes como $\alpha^k = (\alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k) \in \mathbb{N}_0^n$ para cada $k = 1, \ldots, N$. A expressão que a cada $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ associa uma função $\mathcal{L}\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\big(\mathcal{L}\varphi\big)(x) \;=\; \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\left(D^{\alpha^k}\varphi\right)(x) \;=\; \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\,\frac{\partial^{|\alpha^k|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1^k}\cdots\partial x_n^{\alpha_n^k}}(x)\;,$$

define um *operador diferencial linear* em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Simbolicamente, denotamos o operador diferencial linear $\mathcal{L}$ por

$$\mathcal{L} \;=\; \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\,D^{\alpha^k} \;=\; \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\,\frac{\partial^{|\alpha^k|}}{\partial x_1^{\alpha_1^k}\cdots\partial x_n^{\alpha_n^k}}\;.$$

Podemos definir, o chamado *operador diferencial linear dual* de $\mathcal{L}$, denotado por $\mathcal{L}^T$ como sendo o operador diferencial linear que a cada $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ associa uma função $\mathcal{L}^T\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\big(\mathcal{L}^T\varphi\big)(x) \;:=\; \sum_{k=1}^{N}(-1)^{|\alpha^k|}\Big(D^{\alpha^k}(a_k\varphi)\Big)(x) \;=\; \sum_{k=1}^{N}(-1)^{|\alpha^k|}\frac{\partial^{|\alpha^k|}(a_k\varphi)}{\partial x_1^{\alpha_1^k}\cdots\partial x_n^{\alpha_n^k}}(x)\;. \tag{38.14}$$

É importante notar que, com as definições acima, vale para todas as funções $\varphi,\ \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ a seguinte relação:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,\big(\mathcal{L}\psi\big)(x)\,d^nx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}^T\varphi\big)(x)\,\psi(x)\,d^nx\;. \tag{38.15}$$

(Verifique! Sugestão: integração por partes). A validade dessa relação é a razão de ser da definição do operador dual $\mathcal{L}^T$.

Simbolicamente, denotamos o operador diferencial linear $\mathcal{L}^T$ por

$$\mathcal{L}^T \;=\; \sum_{k=1}^{N}(-1)^{|\alpha^k|}D^{\alpha^k}(a_k\star)(x) \;=\; \sum_{k=1}^{N}(-1)^{|\alpha^k|}\frac{\partial^{|\alpha^k|}(a_k\star)}{\partial x_1^{\alpha_1^k}\cdots\partial x_n^{\alpha_n^k}}(x)\;, \tag{38.16}$$

onde o símbolo "$\star$" indica a posição ocupada pela função de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ sobre a qual $\mathcal{L}^T$ atua.

Operadores diferenciais lineares podem ser definidos em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sob condições mais restritivas. Para descrevê-los precisamos introduzir a noção de função de crescimento polinomialmente limitado.

E. 38.9 *Exercício*. Prove, usando a definição (38.14) ou usando (38.15), que $\big(\mathcal{L}^T\big)^T = \mathcal{L}$. ✠

• Funções de crescimento polinomialmente limitado

Uma breve definição: uma função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é dita ser uma *função de crescimento polinomialmente limitado* se existirem uma constante $C \geq 0$ e um inteiro não negativo m tais que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, vale

$$|g(x)| \;\leq\; C(1 + \|x\|)^m\;. \tag{38.17}$$

Façamos a observação que se g é uma função infinitamente diferenciável e de crescimento polinomialmente limitado, então suas derivadas não são necessariamente de crescimento polinomialmente limitado. Um exemplo a se ter em mente é a função de uma variável real $g(x) := \operatorname{sen}\left(e^{x^2}\right)$, que é de crescimento polinomialmente limitado (pois $|g(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$), mas sua derivada é $g'(x) := 2xe^{x^2}\cos\left(e^{x^2}\right)$ que não é de crescimento polinomialmente limitado (devido ao fator e^{x^2}).

• **O espaço $\mathcal{O}_M$**

Denotaremos por $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ a coleção de todas as funções infinitamente diferenciáveis que, junto com todas as suas derivadas, sejam de crescimento polinomialmente limitado:

$$\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n) := \Big\{ g \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Big| \text{ para todo } n\text{-multi-índice } \alpha \text{ existem } C_\alpha \geq 0 \text{ e } m_\alpha \in \mathbb{N}_0$$
$$\text{tais que para cada } x \in \mathbb{R}^n \text{ vale } |D^\alpha g(x)| \leq C_\alpha (1 + \|x\|)^{m_\alpha} \Big\} .$$

É um exercício simples provar que se $g \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ então o produto gf é também uma função de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, o mesmo valendo para produtos como $(D^\alpha g)(D^\alpha f)$, para quaisquer n-multi-índices α e β. Essa observação conduz à noção de operador diferencial linear em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, da qual trataremos logo adiante.

• **Operadores diferenciais lineares em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$**

Sejam $a_1, \ldots, a_N$ elementos de $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ e sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ n-multi-índices distintos que escrevemos em termos de suas componentes como $\alpha^k = (\alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k) \in \mathbb{N}_0^n$ para cada $k = 1, \ldots, N$. A expressão que a cada $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ associa uma função $\mathcal{L}f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\big(\mathcal{L}f\big)(x) = \sum_{k=1}^N a_k(x)\, D^{\alpha^k} f(x) = \sum_{k=1}^N a_k(x)\, \frac{\partial^{|\alpha^k|} f}{\partial x_1^{\alpha_1^k} \cdots \partial x_n^{\alpha_n^k}}(x) ,$$

define um *operador diferencial linear* em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Simbolicamente, denotamos o operador diferencial linear $\mathcal{L}$ por

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^N a_k(x)\, D^{\alpha^k} = \sum_{k=1}^N a_k(x)\, \frac{\partial^{|\alpha^k|}}{\partial x_1^{\alpha_1^k} \cdots \partial x_n^{\alpha_n^k}} .$$

Com $a_1, \ldots, a_N$ elementos de $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ podemos definir também o chamado *operador diferencial dual* de $\mathcal{L}$, denotado por $\mathcal{L}^T$ como sendo o operador diferencial que a cada $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ associa uma função $\mathcal{L}^T f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\big(\mathcal{L}^T f\big)(x) := \sum_{k=1}^N (-1)^{|\alpha^k|} D^{\alpha^k}(a_k f)(x) = \sum_{k=1}^N (-1)^{|\alpha^k|} \frac{\partial^{|\alpha^k|}(a_k f)}{\partial x_1^{\alpha_1^k} \cdots \partial x_n^{\alpha_n^k}}(x) . \tag{38.18}$$

É importante notar que, com as definições acima, vale para todas as funções $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ a seguinte relação:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, \big(\mathcal{L}\psi\big)(x)\, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \big(\mathcal{L}^T\varphi\big)(x)\, \psi(x)\, d^n x . \tag{38.19}$$

(Verifique! Sugestão: integração por partes). A validade dessa relação é a razão de ser da definição do operador dual $\mathcal{L}^T$.

Simbolicamente, denotamos o operador diferencial linear $\mathcal{L}^T$ por

$$\mathcal{L}^T = \sum_{k=1}^N (-1)^{|\alpha^k|} D^{\alpha^k}(a_k \star)(x) = \sum_{k=1}^N (-1)^{|\alpha^k|} \frac{\partial^{|\alpha^k|}(a_k \star)}{\partial x_1^{\alpha_1^k} \cdots \partial x_n^{\alpha_n^k}}(x) ,$$

onde o símbolo "$\star$" indica a posição ocupada pela função de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sobre a qual $\mathcal{L}^T$ atua.

E. 38.10 *Exercício*. Prove, usando a definição (38.18) ou usando (38.19), que $\left(\mathcal{L}^T\right)^T = \mathcal{L}$. ✠

• **Duas estruturas algébricas em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. O produto pontual e o produto de convolução**

Se f e g são dois elementos do espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ seu produto usual $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$, também denominado *produto pontual*, é igualmente um elemento do espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Para ver isso, sejam dois n-multi-índices α e β. Pela regra de Leibniz (38.6), página 2011,

$$\begin{aligned}
\left|x^\alpha D^\beta(fg)(x)\right| &\leq \sum_{\substack{\beta_1,\ \beta_2 \in \mathbf{M}^n_{|\beta|} \\ \beta_1+\beta_2=\beta}} \frac{\beta!}{\beta_1!\beta_2!} \left|x^\alpha D^{\beta_1}(f)(x) D^{\beta_2}(g)(x)\right| \\
&\overset{(38.10)}{\leq} \frac{|x^\alpha|}{(1+\|x\|)^{q_1}(1+\|x\|)^{q_2}} \sum_{\substack{\beta_1,\ \beta_2 \in \mathbf{M}^n_{|\beta|} \\ \beta_1+\beta_2=\beta}} \frac{\beta!}{\beta_1!\beta_2!} \|f\|_{q_1,\,\beta_1} \|g\|_{q_2,\,\beta_2} \ .
\end{aligned}$$

Escolhendo q_1 e q_2 grandes o suficiente ($q_1 + q_2 > |\alpha|$), segue que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta(fg)(x)\right| < \infty$, para todos α e β, estabelecendo, como se desejava, que $f \cdot g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Isso demonstra também que o espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra com o produto pontual de funções. Trata-se de uma álgebra Abeliana e associativa (para as definições, vide Seção 2.1.6.3, página 139).

Existe uma segunda maneira de fazer de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ uma álgebra Abeliana e associativa, a saber, por meio do chamado produto de convolução. Se f e g são dois elementos do espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ define-se seu *produto de convolução*, denotado por $f * g$, pela expressão

$$(f * g)(x) \ := \ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, d^n y \ . \tag{38.20}$$

O estudante deve ser advertido do fato que alguns autores (notadamente na Teoria das Probabilidades, vide comentário à página 2021) definem o produto de convolução sem o fator $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$ na expressão acima. Cuidado é, portanto, necessário ao se comparar expressões de textos diferentes.

Provemos primeiramente que o lado direito de (38.20) existe e define um elemento de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. De (38.10) (com $\beta = 0$) tem-se que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x-y)g(y)\right| d^n y &\leq \|f\|_{q_1,\,0} \|g\|_{q_2,\,0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x-y\|)^{q_1}(1+\|y\|)^{q_2}}\, d^n y \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|f\|_{q_1,\,0} \|g\|_{q_2,\,0} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x-y\|)^{2q_1}}\, d^n y} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|y\|)^{2q_2}}\, d^n y} \\
&= \|f\|_{q_1,\,0} \|g\|_{q_2,\,0} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|y\|)^{2q_1}}\, d^n y} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|y\|)^{2q_2}}\, d^n y} \\
&< \infty \ ,
\end{aligned}$$

escolhendo q_1 e q_2 grandes o suficiente. Isso prova que a integral do lado direito de (38.20) converge absolutamente. Notemos agora que para dois n-multi-índices α e β

$$\begin{aligned}
\left|x^\alpha D^\beta(f*g)(x)\right| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \Big(D^\beta_x f(x-y)\Big) g(y)\right| d^n y \\
&\overset{(38.10)}{\leq} \frac{\|f\|_{2q,\,\beta} \|g\|_{2q,\,0}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x^\alpha|}{(1+\|x-y\|)^{2q}(1+\|y\|)^{2q}}\, d^n y \\
&\leq \frac{M\|f\|_{2q,\,\beta} \|g\|_{2q,\,0}}{(2\pi)^{n/2}} \frac{|x^\alpha|}{(1+\|x\|)^q} \ ,
\end{aligned}$$

onde, na última passagem, usamos a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x-y\|)^{2q}(1+\|y\|)^{2q}}\, d^n y \;\leq\; \frac{M}{(1+\|x\|)^q}\;, \tag{38.21}$$

válida para todo q grande o suficiente (a saber, $q > n$), onde $M > 0$ é uma constante. A demonstração de (38.21) encontra-se no Apêndice 38.A, página 2113. Concluímos que, tomando q grande o suficiente ($q > |\alpha|$) que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta (f*g)(x)\right| < \infty$ para todo α e β, o que demonstra que $f*g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

E. 38.11 *Exercício*. Alternativamente, prove as afirmações feitas acima com o uso da desigualdade (3.2), página 282. ✠

Essas considerações provaram que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra com o produto de convolução. Para provarmos que a álgebra é Abeliana, ou seja, que $f*g = g*f$ para todos $f,\ g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, notamos que

$$(f*g)(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, d^n y \;\overset{y\to x-y}{=}\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\, d^n y \;=\; (g*f)(x)\;.$$

Para provarmos que a álgebra é associativa, ou seja, que $(f*g)*h = f*(g*h)$ para todos $f,\ g,\ h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, notamos que

$$\begin{aligned}
\Big((f*g)*h\Big)(x) \quad &= \quad \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x-y)\; h(y)\, d^n y \\
&= \quad \frac{1}{(2\pi)^{n}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y-w)g(w)\, d^n w \right) h(y)\, d^n y \\
&\overset{w\to w-y}{=} \quad \frac{1}{(2\pi)^{n}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-w)g(w-y)\, d^n w \right) h(y)\, d^n y \\
&= \quad \frac{1}{(2\pi)^{n}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-w) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(w-y)h(y)\, d^n y \right) d^n w \\
&= \quad \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-w)(g*h)(w)\, d^n w \\
&= \quad \Big(f*(g*h)\Big)(x)\;.
\end{aligned}$$

A inversão da ordem das integrações na passagem da terceira para a quarta linha, acima, é justificada pelo rápido decaimento do integrando.

Vemos, então, que o espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra Abeliana e associativa para o produto pontual e para o produto de convolução. Denotamos essas duas álgebras por $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\ \cdot)$ e $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\ *)$, respectivamente. Como veremos adiante (Proposição 38.10, página 2037), essas duas álgebras são isomorfas, com isomorfismos sendo dado pela transformada de Fourier ou sua inversa.

Os seguintes fatos serão usados no que seguirá.

Proposição 38.3 *Seja $R : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ definida por $(Rf)(x) = f(-x)$ para toda $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Então, $R^2 = \mathbb{1}$, onde $\mathbb{1}$ é o operador identidade agindo em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $\mathbb{1}f = f$ para toda $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $R(a*b) = (Ra)*(Rb)$ e $R(a\cdot b) = (Ra)\cdot(Rb)$ para duas funções de Schwartz a e b quaisquer.* □

Prova. Exercício! ■

*

O espaço das funções de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e o espaço das funções de teste $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ são de fundamental importância para o tratamento de dois objetos de grande interesse, particularmente para o estudo de equações diferenciais: as transformadas de Fourier e as distribuições.

38.1.1 Funções Gaussianas

Uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que seja da forma $g(x) = \gamma e^{-a(x-\beta)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $\gamma,\ \beta \in \mathbb{C}$, é dita ser uma *função Gaussiana*[12] (em uma variável). Funções Gaussianas são, naturalmente, funções de Schwartz. Elas desempenham um papel especial na Teoria de Probabilidades (distribuições normais. Vide (38.27), página 2021), na Mecânica Quântica (o problema do oscilador harmônico, estados coerentes) e na Mecânica Estatística. Suas propriedades são também de interesse na teoria das transformadas de Fourier e na Teoria das Distribuições, como veremos. As transformadas de Fourier de funções Gaussianas serão estudadas na Seção 38.2.1.2, página 2031.

E. 38.12 *Exercício*. Mostre que uma função da forma $\gamma e^{-a(x-\beta)^2+\theta x}$, $x \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $\gamma,\ \beta,\ \theta \in \mathbb{C}$, também é uma função Gaussiana. *Sugestão: completar quadrados.* ✠

• **A integral Gaussiana**

Mencionemos aqui um resultado importante, e muito bem conhecido, sobre integrais de funções Gaussianas. Para $a > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$, vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(y-\beta)^2}\, dy \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,. \tag{38.22}$$

A integral do lado direito é frequentemente denominada *integral Gaussiana*.

Uma demonstração elementar de (38.22) é a seguinte. Observemos primeiramente que, para β real, o lado esquerdo de (38.22) independe de β, o que facilmente se vê pela mudança de variáveis $y \mapsto y+\beta$. Seja agora $I(a) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy$. Então,

$$I(a)^2 \;=\; \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2}\, dy\right) \;=\; \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)}\, dxdy \;=\; \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-ar^2}\, rdrd\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-ar^2}\, rdr \;\overset{u=r^2}{=}\; \pi \int_0^{\infty} e^{-au}\, du \;=\; \frac{\pi}{a}\,,$$

de onde concluímos que $I(a) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, como desejávamos. Na terceira igualdade, acima, passamos a integração em $\mathbb{R}^2$ de coordenadas Cartesianas a coordenadas polares, com $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\varphi = \arctan(y/x)$.

Uma interessante demonstração distinta da relação (38.22), que não usa o truque de transformar para coordenadas polares a integração em $\mathbb{R}^2$, pode ser encontrada em [473].

O resultado (38.22) pode ser estendido ao plano complexo: para $a \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}\,(a) > 0$ e para $\beta \in \mathbb{C}$, vale também

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(y-\beta)^2}\, dy \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,, \tag{38.23}$$

onde $\sqrt{a}$ é o ramo principal da função raiz quadrada na região $a \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}\,(a) > 0$, ou seja, escrevendo a na forma polar como $a = \rho e^{i\phi}$, com $\rho > 0$ e $\phi \in\ (-\pi/2,\ \pi/2)$, tem-se $\sqrt{a} := \sqrt{\rho} e^{i\phi/2}$.

Apresentemos uma demonstração dessa afirmação. Primeiramente, observemos que, para cada $y \in \mathbb{R}$, o integrando $e^{-a(y-\beta)^2}$ é uma função analítica de a e de β em todo o plano complexo. Segundamente, para $y \in \mathbb{R}$, a parte real de $-a(y-\beta)^2$ é $-\mathrm{Re}\,(a)y^2 + 2\mathrm{Re}\,(a\beta)y - \mathrm{Re}\,\big(a\beta^2\big)$. Logo,

$$\left|e^{-a(y-\beta)^2}\right| \;=\; \exp\Big(-\mathrm{Re}\,(a)y^2 + 2\mathrm{Re}\,(a\beta)y - \mathrm{Re}\,\big(a\beta^2\big)\Big)\,.$$

Isso torna evidente que para $\mathrm{Re}\,(a) > 0$ a integral do lado esquerdo de (38.23) é *absolutamente convergente*. Por ser uma integral absolutamente convergente de uma função analítica na região $a \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}\,(a) > 0$ e $\beta \in \mathbb{C}$, concluímos que o lado esquerdo de (38.23) é uma função analítica de a e β nessa região. Finalmente, observemos que para $a \in \mathbb{C}$, fixo, e com $\mathrm{Re}\,(a) > 0$, a função de $\beta \in \mathbb{C}$ dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(y-\beta)^2}\, dy - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2}\, dy$$

[12] Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855).

é nula sobre o eixo real (por (38.22), como já comentamos) e, por ser analítica, é nula[13] para todo $\beta \in \mathbb{C}$. Analogamente, no domínio $a \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}\,(a) > 0$ a função de a definida por

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2}\, dy - \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

anula-se no semieixo real onde $a > 0$. Logo, por analiticidade, anula-se também em toda o domínio $a \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}\,(a) > 0$. Isso estabelece a validade de (38.23) para $a \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}\,(a) > 0$ e para $\beta \in \mathbb{C}$.

Com a substituição $\beta \to -i\beta/(2a)$, é fácil verificar que podemos reescrever (38.23) como

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2 - i\beta y}\, dy \;=\; \frac{\exp\Big(-\beta^2/4a\Big)}{\sqrt{2a}}\,. \tag{38.24}$$

Como veremos, o lado esquerdo de (38.24) representa a transformada de Fourier da função Gaussiana e^{-ay^2}. Obteremos essa mesma transformada de Fourier de diversas outras formas no que segue, mesmo para funções Gaussianas de várias variáveis. No Exercício E. 38.60, página 2106, apresentamos uma demonstração de (38.24) fazendo uso de integração complexa.

E. 38.13 *Exercício*. Para $m \in \mathbb{N}$, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-\alpha x^2}\, dx \;=\; \begin{cases} 0\,, & m \text{ ímpar,} \\ \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{m+1} 2^m}}\,(m-1)!!\,, & m \text{ par.} \end{cases}$$

Sugestão: Para m ímpar o resultado é óbvio. Para m par da forma $m = 2n$, com $n \in \mathbb{N}$, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2}\, dx \;=\; (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{d\alpha^n} e^{-\alpha x^2}\, dx \;=\; (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \sqrt{\pi}(-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} \alpha^{-1/2} \;=\; \sqrt{\pi}\alpha^{-1/2-n} 2^{-n} (2n-1)!!\,.$$

Justifique a inversão de ordem da integral pelas derivadas na segunda igualdade. ✠

• A convolução de funções Gaussianas

Denotaremos por $\mathscr{G}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial composto por combinações lineares finitas de funções Gaussianas. Naturalmente, $\mathscr{G}(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Como o produto de duas funções Gaussianas é novamente uma função Gaussianas (justifique!), segue que $\mathscr{G}(\mathbb{R})$ é também uma álgebra em relação ao produto usual de funções. Essa álgebra é denotada por $(\mathscr{G}(\mathbb{R}), \cdot)$. O exercício a seguir revela que $\mathscr{G}(\mathbb{R})$ é também uma álgebra em relação ao produto de convolução.

E. 38.14 *Exercício*. Sejam $f(x) := e^{-a(x-b)^2}$ e $g(x) := e^{-c(x-d)^2}$, onde a, b, c e d são constantes reais, sendo $a > 0$ e $c > 0$. Mostre que

$$(f * g)(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2(a+c)}}\, \exp\left(-\frac{ac}{a+c}(x-b-d)^2\right)\,, \tag{38.25}$$

ou seja, a convolução de duas funções Gaussianas é novamente uma função Gaussiana. *Sugestão. Complete quadrados no integrando do lado esquerdo e use o resultado da integral Gaussiana (38.22).*

A expressão (38.25) é também válida para b e d complexos arbitrários. Isso pode ser provado com métodos de integração complexa ou com os métodos que desenvolveremos adiante. Uma argumentação talvez mais simples consiste em observar que, para a e c positivos e fixos, ambos os lados de (38.25) são funções analíticas inteiras de b e d e, portanto, devem ser iguais em toda parte, pois são iguais quando b e d são reais. Que o lado direito de (38.25) é uma função analítica inteira de b e d é evidente. Que o lado esquerdo de (38.25) é uma função analítica inteira de b e d segue do fato que o integrando é analítico nessas variáveis e do fato que a integral converge absolutamente. Verifique! ✠

[13] A argumentação é a seguinte. Seja f uma função analítica em um domínio aberto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ que intercepta a reta real em um intervalo não vazio aberto $I = \Omega \cap \mathbb{R}$ e suponha que f seja nula em I. Então, f é nula em todo Ω. Para ver isso, note que as derivadas reais de $f\restriction_I$ são todas nulas, por hipótese. Como f é analítica em Ω, as derivadas complexas de f coincidem em I com suas derivadas reais, todas nulas. Logo a série de Taylor de f centrada em qualquer ponto de I é identicamente nula e, portanto, existe um aberto em $\mathbb{C}$ contendo I onde f é identicamente nula. Isso implica que f é identicamente nula em todo Ω.

Concluímos do exercício E. 38.14 que $(\mathscr{G}(\mathbb{R}),\ \cdot)$ e $(\mathscr{G}(\mathbb{R}),\ *)$ são subálgebras de $(\mathscr{S}(\mathbb{R}),\ \cdot)$ e $(\mathscr{S}(\mathbb{R}),\ *)$, respectivamente.

Todas essas afirmações sobre funções Gaussianas generalizam-se de forma imediata para funções Gaussianas de várias variáveis.

E. 38.15 *Exercício*. Demonstre a identidade

$$\big(f_\lambda * f_\lambda\big)^2 \ = \ f_\lambda \ , \tag{38.26}$$

onde, para $\lambda > 0$, a função f_λ é definida por $f_\lambda(x) := (4\lambda)^{1/3} e^{-\lambda x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. ✠

• A distribuição normal de probabilidades

A expressão (38.25) contém uma informação importante para o contexto da Teoria das Probabilidades. Para $\sigma > 0$, e $\mu \in \mathbb{R}$, seja $N[\mu,\ \sigma^2]$ a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$N\big[\mu,\ \sigma^2\big](x) \ := \ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \ , \quad x \in \mathbb{R} \ . \tag{38.27}$$

Essa função Gaussiana satisfaz $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} N\big[\mu,\ \sigma^2\big](x)dx = 1$ (verifique!). Assim, como a função $N\big[\mu,\ \sigma^2\big]$ é não negativa, ela representa uma (importante) distribuição de probabilidades, denominada *distribuição normal*, ou *distribuição Gaussiana*. Sua média (ou *valor esperado*) $\mathbb{E}_{N[\mu,\ \sigma^2]}$ e sua variância $\mathrm{Var}_{N[\mu,\ \sigma^2]}$ são dadas, respectivamente, por

$$\mathbb{E}_{N[\mu,\ \sigma^2]} \ := \ \int_{-\infty}^{\infty} x N\big[\mu,\ \sigma^2\big](x)\ dx \ = \ \mu \ , \qquad \mathrm{Var}_{N[\mu,\ \sigma^2]} \ := \ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 N\big[\mu,\ \sigma^2\big](x)\ dx \ = \ \sigma^2 \ .$$

E. 38.16 *Exercício importante*. Prove essas duas igualdades! ✠

O *desvio padrão* de uma distribuição de probabilidades é definido como sendo a raiz quadrada de sua variância e, portanto, o desvio padrão da distribuição normal $N\big[\mu,\ \sigma^2\big]$ é σ. Uma distribuição normal é, consequentemente, definida univocamente por sua média e por seu desvio padrão (ou, equivalentemente, por sua variância).

E. 38.17 *Exercício*. Mostre que os pontos de inflexão da função $N\big[\mu,\ \sigma^2\big]$, definida em (38.27), são $\mu \pm \sigma$. Recordando, os pontos de inflexão de uma função são aqueles onde sua derivada segunda anula-se e, portanto, são os pontos onde a derivada segunda da função troca de sinal e a função passa de côncava a convexa, ou vice-versa. Vide Figura 38.2, página 2022. ✠

Ao aplicarmos relação (38.25), página 2020, para a convolução de duas distribuições normais, $N\big[\mu_1,\ \sigma_1^2\big]$ e $N\big[\mu_2,\ \sigma_2^2\big]$, obtemos a seguinte relação:

$$N\big[\mu_1,\ \sigma_1^2\big] * N\big[\mu_2,\ \sigma_2^2\big] \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N\big[\mu_1+\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2\big] \ . \tag{38.28}$$

E. 38.18 *Exercício muito importante*. Verifique a validade disso a partir de (38.25)! ✠

Assim, se ignorarmos o fator $1/\sqrt{2\pi}$ do lado direito, reconhecemos o fato importante que a convolução de duas distribuições normais é novamente uma distribuição normal cuja média e variância são dadas pela soma das médias e das variâncias das distribuições anteriores.

Comentário. O fator $1/\sqrt{2\pi}$ do lado direito de (38.28) merece um comentário. Se tivéssemos omitido os fatores $1/\sqrt{2\pi}$ na definição do produto de convolução em (38.20), página 2017, a relação (38.28) ficaria simplesmente, e mais elegantemente,

$$N\big[\mu_1,\ \sigma_1^2\big] * N\big[\mu_2,\ \sigma_2^2\big] \ = \ N\ \big[\mu_1+\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2\big] \ . \tag{38.29}$$

Essa é a razão de por que a definição de produtos de convolução na Teoria de Probabilidades frequentemente omite os fatores $1/\sqrt{2\pi}$ adotados em (38.20). A definição em (38.20) é mais adequada ao tratamento de transformadas de Fourier, pois ela faz da transformada de Fourier um homomorfismo algébrico entre o produto pontual e o de convolução, como veremos. ♣

Para $a > 0$, seja

$$P(a,\ \sigma) \ := \ \int_{\mu-a}^{\mu+a} N\big[\mu,\ \sigma^2\big] dx \ . \tag{38.30}$$

É bastante claro que $P(a,\ \sigma)$ independe de μ. A grandeza $P(a,\ \sigma)$ representa a probabilidade de um evento descrito pela distribuição normal de probabilidades $N\big[\mu,\ \sigma^2\big]$ ocorrer no intervalo $[\mu - a,\ \mu + a]$, ou seja, ocorrer no intervalo de largura $2a$ centrado no valor médio μ. É possível determinar, calculando-se numericamente a integral em (38.30), que

$$P(\sigma,\ \sigma)\ \approxeq\ 0,682689492\,, \qquad P(2\sigma,\ \sigma)\ \approxeq\ 0,954499736\,, \qquad P(3\sigma,\ \sigma)\ \approxeq\ 0,99.7300204\,,$$

$$P(4\sigma,\ \sigma)\ \approxeq\ 0,99993666\,, \qquad P(5\sigma,\ \sigma)\ \approxeq\ 0,999999426697\,.$$

Em palavras, isso significa que, em uma distribuição normal, eventos que se desviem da média por no máximo um, dois, três, quatro ou cinco desvios padrão têm uma frequência de ocorrência de aproximadamente $68,27\%$, $95,45\%$, $99,73\%$, $99,994\%$ e $99,9999426697\%$, respectivamente.

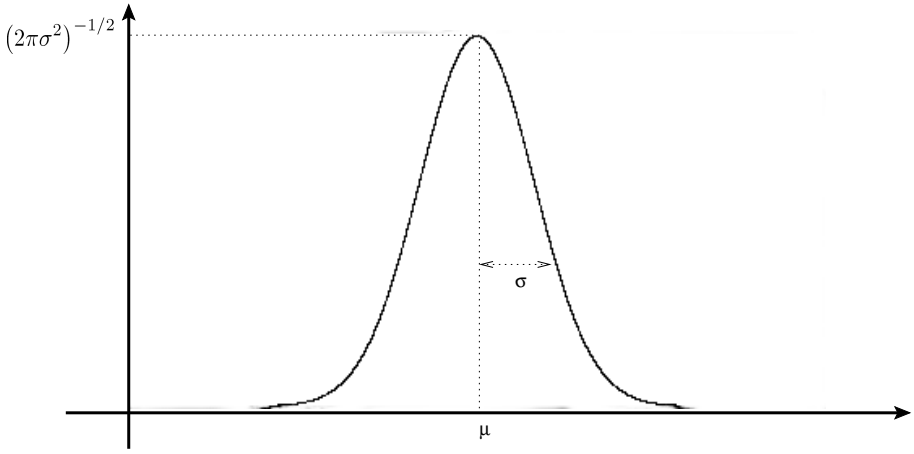

Figura 38.2: Gráfico da distribuição normal de probabilidades $N\big[\mu,\ \sigma^2\big]$, sendo indicados o valor médio μ e o desvio padrão σ. O máximo da função é $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$. O ponto de máximo da função coincide com o valor médio da função: μ. A "largura" da curva é proporcional a σ e sua altura a $1/\sigma$. A área sob a curva é 1 para qualquer valor de μ e de σ. Os pontos $\mu \pm \sigma$ são os pontos de inflexão da curva.

38.2 Transformadas de Fourier

Nesta seção apresentamos as definições e os resultados mais relevantes sobre as transformadas de Fourier no espaço de Schwartz. As transformadas de Fourier revelam toda a sua importância e todo seu poder quando, aliadas à Teoria das Distribuições, são inseridas no contexto da teoria das equações diferenciais. Seu estudo é relevante também na Teoria dos Espaços de Hilbert e na Teoria de Grupos, mas as mesmas têm interesse por si só. No obituário que escreveu em homenagem a G. H. Hardy[14], notório por sua paixão pela matemática pura, em detrimento de suas aplicações, Titchmarsh[15] escreve[16], não sem uma ponta de ironia: *"Hardy had singularly little appreciation of science for one who was sufficiently nearly a scientist to be Fellow of the Royal Society. [...] I worked on the theory of Fourier integrals under his guidance for a good many years before I discovered for myself that this theory has applications in applied mathematics, if the solution of certain differential equations can be called "applied". I never heard him refer to these applications"*[17].

A teoria das transformadas de Fourier é quase tão antiga quanto a teoria das séries de Fourier (das quais tratamos na Seção 37.4, página 1964) e, em verdade, derivou daquela. A relação entre ambas, porém, nem sempre é iluminante e por isso não iremos nos ater à mesma aqui. Para um excelente texto, rico em comentários históricos e aplicações, vide [291]. Para uma introdução elementar em língua portuguesa, vide o também excelente [158].

[14] Godfrey Harold Hardy (1877–1947).
[15] Edward Charles Titchmarsh (1899–1963).
[16] E. C. Titchmarsh. "Godfrey Harold Hardy". The Journal of the London Mathamatical Society, **25**, 81–101 (1950).
[17] Op. cit., pag. 85.

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é dita ser uma *função integrável* em $\mathbb{R}^n$ se satisfizer $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx < \infty$. Denotaremos por $L^1(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções integráveis (em $\mathbb{R}^n$)[18].

Se f é uma função integrável (real ou complexa) definida em $\mathbb{R}^n$, define-se a *transformada de Fourier*[19] de f como sendo a função definida em $\mathbb{R}^n$, denotada por $\mathcal{F}[f]$, dada por

$$\mathcal{F}[f](y) \;:=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-iy\cdot x}\, d^n x \;, \tag{38.31}$$

onde $x = (x_1,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (x_1,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y \cdot x \equiv x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \langle y,\, x\rangle_{\mathbb{R}}$. A *transformada de Fourier conjugada* de f, denotada por $\mathcal{F}^c[f]$, é definida por

$$\mathcal{F}^c[f](y) \;:=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{+iy\cdot x}\, d^n x \;. \tag{38.32}$$

Se denotarmos por R o operador que a cada função $g(x)$ associa a função $g(-x)$ (ou seja $(Rg)(x) = g(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$) é evidente que para toda f integrável

$$\mathcal{F}^c[f] \;=\; R(\mathcal{F}[f]) \;. \tag{38.33}$$

É também evidente pelas definições que para toda f integrável

$$\overline{(\mathcal{F}^c[f])} \;=\; \mathcal{F}\left[\overline{f}\right] \;. \tag{38.34}$$

Advertência. O estudante deve ser advertido quanto ao fato que a convenção que adotamos para a definição de transformada de Fourier não é, infelizmente, universal na literatura física e matemática. Alguns autores definem a transformada de Fourier por $\mathcal{F}[f](p) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ip\cdot x}\, d^n x$, omitindo o fator $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$, o qual reaparece elevado ao quadrado na definição da transformada de Fourier conjugada: $\mathcal{F}^c[f](p) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{+ip\cdot x}\, d^n x$. Nessa convenção, $\mathcal{F}^c[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} R(\mathcal{F}[f])$. Outros autores omitem os pré-fatores $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$, mas inserem um fator 2π no expoente $e^{-ip\cdot x}$ do integrando, que fica $e^{-i2\pi p\cdot x}$. Em livros de Física, especialmente nos de Mecânica Quântica e Teoria de Campos, é comum também introduzir-se um fator $\hbar$ no expoente, que fica $e^{-ip\cdot x/\hbar}$. Cuidado é, portanto, necessário ao comparar-se textos diferentes[20].

• Transformadas de Fourier. Propriedades elementares

Antes de nos aprofundarmos na teoria das transformadas de Fourier é importante listarmos algumas de suas propriedades elementares.

A transformada de Fourier e a transformada de Fourier conjugada são lineares: se f e g são duas funções integráveis quaisquer e α e β são números complexos quaisquer, valem

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] \;=\; \alpha\mathcal{F}[f] + \beta\mathcal{F}[g] \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}^c[\alpha f + \beta g] \;=\; \alpha\mathcal{F}^c[f] + \beta\mathcal{F}^c[g] \;.$$

Isso pode ser facilmente constatado pela definição e é deixado como exercício. Note que $\alpha f + \beta g$ também é integrável se f e g o forem.

Seja $a \in \mathbb{R}^n$. Se g é uma função integrável definida em $\mathbb{R}^n$, denotemos por g_a a função $g_a(x) := g(x-a)$, $x \in \mathbb{R}^n$, que consiste na função g transladada por a. Para $a \in \mathbb{R}^n$ defina-se também a função e_a por $e_a(x) := e^{-ia\cdot x}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

É elementar constatar pelas definições que para toda g integrável valem

$$\mathcal{F}[g_a](y) \;=\; e_a(y)\,\mathcal{F}[g](y) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}^c[g_a](y) \;=\; e_{-a}(y)\,\mathcal{F}^c[g](y) \;, \tag{38.35}$$

assim como

$$\mathcal{F}[e_a g](y) \;=\; \mathcal{F}[g](y+a) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}^c[e_a g](y) \;=\; \mathcal{F}^c[g](y-a) \;. \tag{38.36}$$

Um outro fato importante sobre transformadas de Fourier de funções integráveis que mencionamos sem demonstração é o seguinte:

[18] Tecnicamente, é preciso requerer antes que uma função integrável f seja mensurável em relação à medida de Lebesgue e a integral considerada na definição de função integrável é a integral de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ foram introduzidos na Seção 31.4, página 1560, mas para manter a discussão em um nível simples evitaremos ao máximo evocar resultados gerais da Teoria da Medida e Integração neste capítulo.

[19] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).

[20] Alguns autores chegam a usar as diversas convenções acima no mesmo texto!

Teorema 38.1 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se $\mathcal{F}[f](y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, então $f(x) = 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$.* □

A demonstração desse teorema encontra-se, por exemplo, em [427]. Esse teorema afirma que a transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$ é injetiva. Afirmação semelhante será demonstrada adiante para funções do espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

• Cálculo de algumas transformadas de Fourier elementares

Transformadas de Fourier podem ser explicitamente calculadas em diversos casos. O exercício que segue ilustra as situações mais simples.

E. 38.19 *Exercício*. Reunimos aqui alguns poucos casos de funções cujas transformadas de Fourier podem ser calculadas por métodos elementares. O caso de funções Gaussianas será tratado mais adiante.

a. Para $a > 0$, constante, seja $\chi_{[-a,\, a]}$ a função característica do intervalo $[-a,\, a]$:

$$\chi_{[-a,\, a]} := \begin{cases} 1\,, & \text{se } x \in [-a,\, a]\,, \\ 0\,, & \text{se } x \notin [-a,\, a]\,. \end{cases}$$

Mostre que $\chi_{[-a,\, a]}$ é integrável em $\mathbb{R}$ para todo $a > 0$ e mostre que

$$\mathcal{F}\big[\chi_{[-a,\, a]}\big](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{sen}(ay)}{y}\,. \tag{38.37}$$

b. Seja $h_a(x) = e^{-a|x|}$ com $a > 0$, constante. Mostre que h_a é integrável em $\mathbb{R}$ para todo $a > 0$ e mostre que

$$\mathcal{F}[h_a](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{y^2 + a^2}\,.$$

c. Seja $f_a(x) := \frac{1}{a^2+x^2}$, com $x \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, constante. Mostre que f_a é integrável em $\mathbb{R}$ para todo $a > 0$ e mostre que

$$\mathcal{F}[f_a](y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-a|y|}}{a}\,.$$

Sugestão. Método dos resíduos.

d. Considere a função $f(x)$ definida por

$$f(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0\,, \\ e^{-x}\,, & \text{se } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Mostre que f é integrável em $\mathbb{R}$. Mostre que

$$\mathcal{F}[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+iy}$$

e mostre que $\mathcal{F}[f]$ não é integrável em $\mathbb{R}$.

e. A transformada de Fourier das funções de Bessel J_m, $m \in \mathbb{N}_0$, foi determinada por meios elementares em (16.201), página 915, resultando em

$$\mathcal{F}[J_m](u) = (-i)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{T_m(u)}{\sqrt{1-u^2}}\,\chi_{[-1,\, 1]}(u)\,, \tag{38.38}$$

onde T_m é o m-ésimo polinômio de Tchebychev (vide página 812) e $\chi_{[-1,\, 1]}$ é a função característica do intervalo $[-1,\, 1]$:

$$\chi_{[-1,\, 1]}(u) := \begin{cases} 1\,,\ u \in [-1,\, 1]\,, \\ 0\,,\ u \notin [-1,\, 1]\,. \end{cases}$$

A relação (38.38) deve ser entendida no sentido de transformadas de Fourier de distribuições temperadas, tal como discutido na Seção 38.3.6, página 2081. Outras transformadas de Fourier envolvendo funções de Bessel foram obtidas em (16.202) e (16.204), página 915.

Todas as expressões acima serão usadas neste texto. ✠

Em todos os exemplos acima, assim como no caso de transformadas de Fourier de funções Gaussianas, que trataremos logo adiante, é possível observar a seguinte regra qualitativa: se uma função concentra-se em uma região "estreita", sua transformada de Fourier espalha-se por uma região "larga", e vice-versa. O significado preciso dessa afirmação será apresentado na Seção 38.2.1.5, página 2039, quando discutirmos a "relação de incerteza" para transformadas de Fourier. Vide (38.101) e (38.102).

• **Transformadas de Fourier e integrabilidade**

É importante observar que se f é uma função integrável, sua transformada de Fourier nem sempre o é. Um exemplo a se ter em mente é o da função $f(x)$ definida como sendo 1 no intervalo $[-1,\ 1]$ e 0 fora desse intervalo. Como facilmente se constata, sua transformada de Fourier é $\mathcal{F}[f](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen} y}{y}$ (Exercício E. 38.19, item **a**) que não é uma função integrável (vide discussão à página 1552). Outro exemplo (mais simples) é encontrado no item **d** do Exercício E. 38.19, página 2024. Assim, a transformada de Fourier pode ser definida no espaço das funções integráveis, mas ela não mapeia esse espaço em si mesmo. Por razões que serão apreciadas no correr da nossa discussão, é fundamental para certos propósitos definir a transformada de Fourier em certos espaços convenientes de funções, de sorte que $\mathcal{F}$ seja um isomorfismo desses espaços, ou seja, uma aplicação linear bijetora desses espaços em si mesmos. Há pelo menos duas maneira de fazer isso. Uma é restringindo a definição das transformadas de Fourier ao espaço das funções de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, o qual é um subespaço do espaço das funções integráveis. A outra é estendendo a definição da transformada de Fourier ao espaço das funções de quadrado integrável, onde a transformada de Fourier pode ser definida como um operador linear unitário. O primeiro procedimento atrairá mais nossa atenção neste capítulo. Para alguns comentários sobre a transformada de Fourier no espaço das funções de quadrado integrável, vide Seção 38.2.2, página 2041.

38.2.1 Transformadas de Fourier no Espaço de Schwartz

Como toda função de Schwartz é integrável, as definições (38.31) e (38.32) (assim como (38.33)) valem naturalmente para funções $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. O ponto fundamental dessa restrição às funções de Schwartz é que, como veremos logo adiante, a transformada de Fourier leva bijetivamente funções de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ em funções de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Como comentamos e exemplificamos acima, isso não é sempre verdadeiro no espaço das funções integráveis. Além disso, estabeleceremos que a transformada de Fourier é uma aplicação contínua na topologia de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, um fato relevante na Teorias das Distribuições. O primeiro resultado que precisamos para provar essas afirmações é o seguinte:

Proposição 38.4 *Se $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\mathcal{F}[f]$ e $\mathcal{F}^c[f]$ são infinitamente diferenciáveis, ou seja, são elementos de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e vale*

$$D_p^\alpha\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ip\cdot x}\,d^nx\right) \;=\; \frac{(-i)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x)e^{-ip\cdot x}\,d^nx\,, \tag{38.39}$$

para todo n-multi-índice α. □

Prova. A demonstração para $\mathcal{F}^c[f]$ é idêntica à demonstração para $\mathcal{F}[f]$, de modo que trataremos apenas da segunda. $\mathcal{F}[f](p)$ é dada pela integral $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ip\cdot x}d^nx$. O integrando $f(x)e^{-ip\cdot x}$ é uma função infinitamente diferenciável de p e tem-se $D_p^\alpha\big(f(x)e^{-ip\cdot x}\big) = (-i)^{|\alpha|}x^\alpha f(x)e^{-ip\cdot x}$. Como $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, a função $x^\alpha f(x)e^{-ip\cdot x}$ é também um elemento do espaço de Schwartz (como função de x), decaindo rapidamente a zero quando $\|x\| \to \infty$. Com isso, é elementar constatar que as condições da Proposição 37.5, II, página 1942, são satisfeitas e, por aquela proposição, (38.39) vale para todo n-multi-índice α. ■

A aplicação R definida para cada $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ por $(RF)(x) = f(-x)$ é, evidentemente, uma aplicação linear e inversível de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ em si mesmo, a inversa sendo $R^{-1} = R$. No espaço $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções infinitamente diferenciáveis podemos definir outras duas aplicações lineares que usaremos, as quais são definidas para cada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ por

$$(P_af)(x) \;:=\; -i\frac{\partial f}{\partial x_a}(x) \qquad \text{e} \qquad (Q_af)(x) \;:=\; x_af(x) \tag{38.40}$$

para $a = 1, \ldots, n$. Claro está que, para cada $a = 1, \ldots, n$,

$$P_a = -iD_a \,. \tag{38.41}$$

Naturalmente, P_a e Q_a agem também nos elementos de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (pois $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$) e é evidente pelas definições que a imagem de P_a e Q_a por um elemento de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é novamente um elemento de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (Exercício!). Portanto, os operadores P_a e Q_a são, para cada a, operadores lineares agindo em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

E. 38.20 *Exercício*. Prove que os operadores P_a e Q_a são, para cada a, operadores lineares e contínuos agindo em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, na topologia desse espaço. ✠

É muito fácil constatar que os operadores P_a e Q_a satisfazem em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ as seguintes relações algébricas de comutação:

$$\begin{aligned} P_aQ_b - Q_bP_a &= -i\delta_{a,b} \,, \\ Q_aQ_b - Q_bQ_a &= 0 \,, \\ P_aP_b - P_bP_a &= 0 \,, \end{aligned} \tag{38.42}$$

para todos $a, b \in \{1, \ldots, n\}$.

E. 38.21 *Exercício fácil*. Prove isso usando as definições (38.40). ✠

Como antes, para um n-multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, definimos $Q^\alpha := \prod_{j=1}^n Q_j^{\alpha_j}$ e $P^\alpha := \prod_{j=1}^n P_j^{\alpha_j}$.

Com essa notação as importantes relações de comutação (38.42) podem ser generalizadas de uma forma que será usada adiante sendo, independentemente disso, de interesse geral. Afirmamos que para n-multi-índices arbitrários α e β vale, fazendo-se uso da regra de Leibniz (38.6), página 2011,

$$P^\alpha Q^\beta - Q^\beta P^\alpha = \sum_{0<\gamma\leq\min\{\alpha,\,\beta\}} \frac{(-i)^{|\gamma|}\alpha!\beta!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!(\beta-\gamma)!}\, Q^{\beta-\gamma}P^{\alpha-\gamma} \,. \tag{38.43}$$

De fato, para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned} \big(P^\alpha Q^\beta f\big)(x) &= (-i)^{|\alpha|} D^\alpha\big(x^\beta f(x)\big) \overset{(38.6)}{=} (-i)^{|\alpha|} \sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}\, D^\gamma\big(x^\beta\big)\big(D^{\alpha-\gamma}f\big)(x) \\ &= \sum_{0\leq\gamma\leq\min\{\alpha,\,\beta\}} \frac{(-i)^{|\gamma|}\alpha!\beta!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!(\beta-\gamma)!}\Big(Q^{\beta-\gamma}P^{\alpha-\gamma}f\Big)(x) \\ &= \big(Q^\beta P^\alpha f\big)(x) + \sum_{0<\gamma\leq\min\{\alpha,\,\beta\}} \frac{(-i)^{|\gamma|}\alpha!\beta!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!(\beta-\gamma)!}\Big(Q^{\beta-\gamma}P^{\alpha-\gamma}f\Big)(x) \,. \end{aligned}$$

Acima usamos o fato que $D^\gamma\big(x^\beta\big) = \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!}\, x^{\beta-\gamma}$ caso $\gamma \leq \beta$ sendo, de outra forma, igual a zero.

Retornando às transformadas de Fourier, a seguinte proposição enuncia propriedades importantes que serão usadas adiante.

Proposição 38.5 *Com as definições acima, valem as relações*

$$\mathcal{F}P_a = Q_a\mathcal{F} \qquad e \qquad \mathcal{F}Q_a = -P_a\mathcal{F} \tag{38.44}$$

para todo $a = 1, \ldots, n$, como aplicações de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso, vale a relação

$$\mathcal{F}R = R\mathcal{F} \tag{38.45}$$

e também as relações

$$RQ_a \;=\; -Q_aR \qquad e \qquad RP_a \;=\; -P_aR \tag{38.46}$$

para todo $a = 1, \ldots, n$. □

Prova. Para $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ vale, pela definição, e usando integração por partes,

$$\mathcal{F}[P_af](y) \;=\; -i\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_a}(x)\right)e^{-iy\cdot x}\,d^nx \;=\; i\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\frac{\partial\, e^{-iy\cdot x}}{\partial x_a}\,d^nx$$

$$=\; y_a\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-iy\cdot x}\,d^nx \;=\; \big(Q_a\mathcal{F}[f]\big)(y)\;,$$

provando que $\mathcal{F}P_a = Q_a\mathcal{F}$. Analogamente,

$$\mathcal{F}[Q_af](y) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}x_af(x)e^{-iy\cdot x}\,d^nx \;\overset{(38.39)}{=}\; i\frac{\partial}{\partial y_a}\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-iy\cdot x}\,d^nx\right) \;=\; -\big(P_a\mathcal{F}[f]\big)(y)\;,$$

provando que $\mathcal{F}Q_a = -P_a\mathcal{F}$. Para provar (38.45), notemos que para toda $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}[Rf](y) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(-x)e^{-iy\cdot x}\,d^nx \;\overset{x\to -x}{=}\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{+iy\cdot x}\,d^nx \;=\; \mathcal{F}^c[f](y) \;=\; \big(R\mathcal{F}[f]\big)(y)\;.$$

A prova das relações (38.46) é elementar. ■

Podemos agora provar a afirmação feita acima de que a transformada de Fourier leva funções de Schwartz em funções de Schwartz.

Proposição 38.6 *A transformada de Fourier* $\mathcal{F}$ *e a transformada de Fourier conjugada* $\mathcal{F}^c$ *mapeiam* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *em* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$*. Por consequência, as relações estabelecidas na Proposição 38.5 são válidas enquanto aplicações de* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *sobre si mesmo.* □

Mais adiante, no Teorema 38.3, página 2036, provaremos que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^c$ mapeiam bijetivamente $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sobre si mesmo e que $\mathcal{F}^c$ é a inversa de $\mathcal{F}$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Prova da Proposição 38.6. Como $\mathcal{F}^c = R\mathcal{F}$, é suficiente tratar de $\mathcal{F}$. Seja $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Consideremos a expressão $y^\alpha D_y^\beta\mathcal{F}[f](y) = i^{|\beta|}Q^\alpha P^\beta\mathcal{F}[f](y)$, onde α e β são n-multi-índices. Usando (38.44), temos

$$y^\alpha D_y^\beta\mathcal{F}[f](y) \;=\; \mathcal{F}\left[(-i)^{|\beta|}P^\alpha Q^\beta f\right](y)\;.$$

A função $g := (-i)^{|\beta|}P^\alpha Q^\beta f$ é um elemento de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, vale $|g(x)| \le \dfrac{\|g\|_{q,\,0}}{(1+\|x\|)^q}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $q \ge 0$. Assim, escolhendo q grande o suficiente ($q > n$),

$$\left|y^\alpha D_y^\beta\mathcal{F}[f](y)\right| \;=\; \left|\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}g(x)e^{-iy\cdot x}\,d^nx\right| \;\le\; \frac{\|g\|_{q,\,0}}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+\|x\|)^q}\,d^nx \;<\; \infty\;.$$

Isso estabeleceu que $\sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n}\left|y^\alpha D_y^\beta\mathcal{F}[f](y)\right| < \infty$ para todos os n-multi-índices α e β, o que prova que $\mathcal{F}[f] \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. ■

Chegamos agora a mais uma importante propriedade da transformada de Fourier no espaço de Schwartz.

Proposição 38.7 *A aplicações* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{F}^c$ *são aplicações lineares contínuas de* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *sobre si mesmo.* □

Prova. Como $\mathcal{F}^c = R\mathcal{F}$ e $R : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínua (justifique!), é suficiente considerarmos $\mathcal{F}$. Por (38.43) e (38.44), temos para quaisquer n-multi-índices α e β,

$$Q^\alpha P^\beta \mathcal{F} \overset{(38.44)}{=} (-1)^{|\beta|}\mathcal{F}P^\alpha Q^\beta \overset{(38.43)}{=} (-1)^{|\beta|} \sum_{0\leq\gamma\leq\min\{\alpha,\,\beta\}} \frac{(-i)^{|\gamma|}\alpha!\beta!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!(\beta-\gamma)!}\, \mathcal{F}Q^{\beta-\gamma}P^{\alpha-\gamma} \ .$$

Aplicando essa igualdade a uma função $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, arbitrária, temos

$$\begin{aligned} x^\alpha D_x^\beta \mathcal{F}[f](x) \ &= \ x^\alpha D_x^\beta \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-iy\cdot x}\, d^n y \right) \\ &= \ (-i)^{|\beta|+|\alpha|} \sum_{0\leq\gamma\leq\min\{\alpha,\,\beta\}} \frac{\alpha!\beta!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!(\beta-\gamma)!} \int_{\mathbb{R}^n} y^{\beta-\gamma}\big(D_y^{\alpha-\gamma}f\big)(y)\, e^{-iy\cdot x}\, d^n y \ . \end{aligned} \tag{38.47}$$

Agora, por (38.10), temos $|y^{\beta-\gamma}D^{\alpha-\gamma}f(y)| \leq \|f\|_{q,\,\alpha-\gamma}\frac{|y^{\beta-\gamma}|}{(1+\|y\|)^q}$ para todo $q \in \mathbb{N}_0$. Escolhendo-se $q \equiv q_{\beta-\gamma}$ grande o suficiente para que $\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|y^{\beta-\gamma}|}{(1+\|y\|)^{q_{\beta-\gamma}}}\, d^n y < \infty$, obtemos facilmente que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left| x^\alpha D_x^\beta \mathcal{F}[f](x)\right| \ \leq \sum_{0\leq\gamma\leq\min\{\alpha,\,\beta\}} C_{\alpha,\,\beta,\,\gamma}\|f\|_{q_{\beta-\gamma},\,\alpha-\gamma} \ ,$$

onde $C_{\alpha,\,\beta,\,\gamma} = \frac{\alpha!\beta!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!(\beta-\gamma)!}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|y^{\beta-\gamma}|}{(1+\|y\|)^{q_{\beta-\gamma}}}\, d^n y$ são constantes positivas finitas. Conclui-se que as seminormas $\|\mathcal{F}f\|_{m,\,\beta}$ são limitadas por uma soma envolvendo um número finito de seminormas de f, com coeficientes positivos. Isso implica a continuidade da transformada de Fourier $\mathcal{F}$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. ■

E. 38.22 *Exercício*. Seja o operador $H : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$, definido por $H := \frac{1}{2}\big(P^2 + Q^2\big)$. Mostre, como consequência das relações (38.44), que a transformada de Fourier $\mathcal{F}$ e H comutam: $\mathcal{F}H = H\mathcal{F}$. O estudante familiarizado com a Mecânica Quântica haverá de perceber que, com uma certa escolha de sistema de unidades, o operador H identifica-se com o operador Hamiltoniano do oscilador harmônico quântico unidimensional. ✠

38.2.1.1 As Relações de Weyl e a Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

As relações de comutação entre os operadores Q e P, estabelecidas anteriormente (vide (38.42)), podem ser expressas de uma forma "exponencial", devida a Weyl[21]. Essas expressões são muito relevantes em certos desenvolvimentos, notadamente na definição das chamadas *álgebras CCR* (veja, *e.g.*, [77, 78]).

E. 38.23 *Exercício*. **[Relações de Weyl]** Para cada $a \equiv (a_1,\,\ldots,\,a_n) \in \mathbb{R}^n$ sejam $U(a) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $V(a) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ os operadores lineares definidos por

$$\big(U(a)f\big)(x) \ := \ f(x-a) \ , \tag{38.48}$$

$$\big(V(a)f\big)(x) \ := \ e^{i\langle a,\,x\rangle}f(x) \ , \tag{38.49}$$

onde $\langle a,\,x\rangle$ denota o produto escalar usual entre vetores $a = (a_1,\,\ldots,\,a_n)$ e $x = (x_1,\,\ldots,\,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$: $\langle a,\,x\rangle := a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$. Mostre que valem as seguintes relações:

$$U(a)V(b) \ = \ e^{-i\langle a,\,b\rangle}V(b)U(a) \ , \tag{38.50}$$

$$U(a)U(a') \ = \ U(a+a') \ = \ U(a')U(a) \ , \tag{38.51}$$

$$V(b)V(b') \ = \ V(b+b') \ = \ V(b')V(b) \ , \tag{38.52}$$

$$U(a)\mathcal{F} \ = \ \mathcal{F}V(a) \ , \tag{38.53}$$

$$V(a)\mathcal{F} \ = \ \mathcal{F}U(-a) \ , \tag{38.54}$$

[21] Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955).

para todos $a,\ b,\ a',\ b' \in \mathbb{R}^n$. As relações (38.50) são por vezes denominadas *relações de Weyl*. ✠

E. 38.24 *Exercício*. Prove também a validade das seguintes relações:

$$Q_j U(a) = U(a)\big(Q_j + a_j \mathbb{1}\big) \ , \tag{38.55}$$

$$P_j V(a) = V(a)\big(P_j + a_j \mathbb{1}\big) \ , \tag{38.56}$$

$$Q_j V(a) = V(a) Q_j \ , \tag{38.57}$$

$$P_j U(a) = U(a) P_j \ , \tag{38.58}$$

para todos $a \in \mathbb{R}^n$ e $j \in \{1,\ \ldots,\ n\}$. ✠

• **A forma exponencial dos operadores U e V**

Os operadores definidos em (38.48) e (38.49) e podem ser informalmente expressos em uma forma exponencial, envolvendo os operadores Q e P.

De (38.49) podemos escrever $V(a) = \exp\big(ia \cdot Q\big)$ para $a \in \mathbb{R}^n$, onde $a \cdot Q \equiv a_1 Q_1 + \cdots + a_n Q_n$. Para encontrarmos expressão similar para $U(a)$, façamos algumas observações elementares.

Para $a \in \mathbb{R}^n$ fixo, defina-se $\mathcal{U}_A(t) = U(-ta)$, com $t \in \mathbb{R}$. É elementar por (38.51) que $\mathcal{U}_A(t)\mathcal{U}_A(t') = \mathcal{U}_A(t+t')$ para todos $t,\ t' \in \mathbb{R}$. Além disso, é claro que $\mathcal{U}_A(0) = \mathbb{1}$. Assim, $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathcal{U}_A(t)$ é um grupo uniparamétrico. Seu gerador agindo em uma função $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é, por definição,

$$\left(\frac{d}{dt}\mathcal{U}_a(t) f\right)(x)\bigg|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt} f(x+ta)\right)(x)\bigg|_{t=0} = \Big(\big(a \cdot D\big) f\Big)(x) \ ,$$

onde $a \cdot D \equiv a_1 D_1 + \cdots + a_n D_n$. Na última igualdade usou-se a regra de cadeia. Disso obtemos a relação formal $\mathcal{U}_a(t) = \exp\big(ta \cdot D\big) \overset{(38.41)}{=} \exp\big(ita \cdot P\big)$, com $a \cdot P \equiv a_1 P_1 + \cdots + a_n P_n$. Assim, tomando-se $t = 1$, temos

$$U(a) = \exp\big(-ia \cdot P\big) \ , \qquad a \in \mathbb{R}^n \ . \tag{38.59}$$

Uma argumentação totalmente similar confirma a identidade

$$V(a) = \exp\big(ia \cdot Q\big) \ , \qquad a \in \mathbb{R}^n \ . \tag{38.60}$$

Comentário. Uma outra argumentação para (38.59) é a seguinte. Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ real analítica e seja, para $x,\ a \in \mathbb{R}^n$, fixos, a função $H(t) := F(x+ta)$. Sabemos pela regra da cadeia que

$$\frac{dH}{dt}(t) = \frac{d}{dt} F(x+ta) = \Big(\big(a \cdot D\big)F\Big)(x+ta) \ ,$$

onde $a \cdot D \equiv a_1 D_1 + \cdots + a_n D_n$. Com isso a série de Taylor centrada em $t = 0$ de H pode ser escrita como

$$F(x+ta) = H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} F(x+ta)\bigg|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(\big(a \cdot D\big)^n F\Big)(x) = \Big(\exp\big(a \cdot D\big)F\Big)(x) \overset{(38.41)}{=} \Big(\exp\big(ia \cdot P\big)F\Big)(x) \ ,$$

novamente com $a \cdot P \equiv a_1 P_1 + \cdots + a_n P_n$. Com isso, podemos identificar $U(a) = \exp\big(-ia \cdot P\big)$. ♣

Com essa notação, as relações (38.50)–(38.54) e (38.55)–(38.58) ficam

$$e^{-ia\cdot P} e^{ib\cdot Q} = e^{-i\langle a,\ b\rangle} e^{ib\cdot Q} e^{-ia\cdot P} \ , \tag{38.61}$$

$$e^{-ia\cdot P} e^{-ia'\cdot P} = e^{-i(a+a')\cdot P} = e^{-ia'\cdot P} e^{-ia\cdot P} \ , \tag{38.62}$$

$$e^{ib\cdot Q} e^{ib'\cdot Q} = e^{i(b+b')\cdot Q} = e^{i'\cdot Q} e^{ib\cdot Q} \ , \tag{38.63}$$

$$e^{-ia\cdot P}\mathcal{F} = \mathcal{F} e^{ia\cdot Q} \ , \tag{38.64}$$

$$e^{ia\cdot Q}\mathcal{F} = \mathcal{F} e^{ia\cdot P} \ , \tag{38.65}$$

para todos $a,\ b,\ a',\ b' \in \mathbb{R}^n$, e

$$Q_j e^{-ia\cdot P} = e^{-ia\cdot P}\big(Q_j + a_j\mathbb{1}\big) \ , \tag{38.66}$$

$$P_j e^{ia\cdot Q} = e^{ia\cdot Q}\big(P_j + a_j\mathbb{1}\big) \ , \tag{38.67}$$

$$Q_j e^{ia\cdot Q} = e^{ia\cdot Q} Q_j \ , \tag{38.68}$$

$$P_j e^{-ia\cdot P} = e^{-ia\cdot P} P_j \ , \tag{38.69}$$

para todos $a \in \mathbb{R}^n$ e $j \in \{1,\ \ldots,\ n\}$.

Nota. Fazemos notar que, no momento, as relações (38.59) e (38.60) são formais (*i.e.*, não rigorosas), pois não apresentamos a definição precisa da exponenciação dos operadores P e Q como operadores definidos no espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. A melhor forma de fazer isso, em verdade, é no contexto do espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n,\ d^n x)$, que tem o espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ como subespaço denso. Lá, os operadores P_j e Q_j são autoadjuntos e suas exponenciais podem ser definidas com uso do Teorema Espectral e as relações (38.61)–(38.65) e (38.66)–(38.69) são justificadas com o Teorema de Stone e com o Teorema de Stone-von Neumann. ♣

• A fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff para os operadores Q e P

Vamos agora apresentar uma dedução informal para a chamada *fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff* para os operadores Q e P. Essa fórmula é empregada no contexto da Mecânica Quântica.

Para $a,\ b \in \mathbb{R}^n$ fixos, defina-se

$$\mathscr{W}_{a,\,b}(t) \ := \ \exp\Big(it^2\langle a,\ b\rangle/2\Big)\, V(ta)U(-tb) \ , \qquad t \in \mathbb{R} \ .$$

Afirmamos que valem as duas propriedades que caracterizam um grupo uniparamétrico:

1. $\mathscr{W}_{a,\,b}(0) = \mathbb{1}$ e
2. $\mathscr{W}_{a,\,b}(t_1)\mathscr{W}_{a,\,b}(t_2) = \mathscr{W}_{a,\,b}(t_1+t_2)$ para todos $t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$.

A primeira afirmação é óbvia e a segunda segue do seguinte cômputo: para $t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{W}_{a,\,b}(t_1)\mathscr{W}_{a,\,b}(t_2) &= \exp\Big(i\big(t_1^2+t_2^2\big)\langle a,\ b\rangle/2\Big)V(t_1a)U(-t_1b)V(t_2a)U(-t_2b) \\
&\overset{(38.50)-(38.52)}{=} \exp\Big(i\big(t_1+t_2\big)^2\langle a,\ b\rangle/2\Big)V\big((t_1+t_2)a\big)U\big(-(t_1+t_2)b\big) \\
&= \mathscr{W}_{a,\,b}\big(t_1+t_2\big) \ .
\end{aligned}$$

Verifique! Acima usamos que $U(-t_1b)V(t_2a) = \exp\Big(it_1t_2\langle a,\ b\rangle\Big)V(t_2a)U(-t_1b)$, devido a (38.50).

A ação de $\mathscr{W}_{a,\,b}(t)$ sobre uma função $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é (verifique!)

$$\Big(\mathscr{W}_{a,\,b}(t)f\Big)(x) \ = \ \exp\Big(i3t^2\langle a,\ b\rangle/2 + it\langle a,\ x\rangle\Big)f(x+tb) \ .$$

Com isso, vemos que o gerador do grupo uniparamétrico $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathscr{W}_{a,\,b}(t)$ agindo em $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathscr{W}_{a,\,b}(t)f\Big)(x)\Big|_{t=0} \ = \ i\langle a,\ x\rangle f(x) + \big(b\cdot Df\big)(x) \ = \ i\Big(\big(a\cdot Q + b\cdot P\big)f\Big)(x) \ ,$$

onde $a\cdot Q \equiv a_1Q_1 + \cdots + a_nQ_n$, $b\cdot D \equiv b_1D_1 + \cdots + b_nD_n$ e $b\cdot P \equiv b_1P_1 + \cdots + b_nP_n$.

Disso obtemos a relação formal

$$\mathscr{W}_{a,\,b}(t) \ = \ \exp\Big(it\big(a\cdot Q + b\cdot P\big)\Big) \ .$$

Usando as relações (38.59)–(38.60), isso fica

$$\exp\Big(it^2\langle a,\ b\rangle/2\Big)\, e^{ita\cdot Q}e^{itb\cdot P} \ = \ \exp\Big(it\big(a\cdot Q + b\cdot P\big)\Big) \ .$$

ou seja,

$$e^{ita\cdot Q}e^{-itb\cdot P} \;=\; \exp\Big(it\big(a\cdot Q+b\cdot P\big)-it^2\langle a,\,b\rangle/2\Big)\;,$$

que para $t=1$ fica simplesmente

$$e^{ia\cdot Q}e^{ib\cdot P} \;=\; \exp\Big(i\big(a\cdot Q+b\cdot P\big)-i\langle a,\,b\rangle/2\Big)\;. \tag{38.70}$$

De maneira totalmente similar (ou, alternativamente, usando-se (38.61)), demonstra-se também que

$$e^{ib\cdot P}e^{ia\cdot Q} \;=\; \exp\Big(i\big(a\cdot Q+b\cdot P\big)+i\langle a,\,b\rangle/2\Big)\;. \tag{38.71}$$

Cada uma das expressões (38.70)–(38.71) é por vezes denominada *fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff*[22] para os operadores Q e P. A justificativa para essa denominação será dada logo adiante.

Pelas razões que apontamos, a demonstração de (38.70)–(38.71) que apresentamos acima é informal no contexto dos operadores Q e P agindo no espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. A demonstração rigorosa de (38.70)–(38.71) é feita no contexto do espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n,\,d^nx)$, com emprego dos Teoremas de Stone e de Stone-von Neumann.

No caso de matrizes a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff foi detalhadamente discutida na Seção 11.5, página 659. Vide (11.4), (11.69) ou a fórmula mais geral (11.68). Naquele caso, a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff consiste na afirmação que se A e B são matrizes de ordem n (e de norma suficientemente pequena), então vale

$$e^Ae^B \;=\; \exp\left(A+B+\frac{1}{2}\big[A,\,B\big]+\text{ soma de comutadores de ordem superior em }A\text{'s e }B\text{'s}\right)\;.$$

Se admitirmos informalmente a validade da versão matricial dessa relação no presente contexto, com as matrizes A e B substituídas pelos operadores $ia\cdot Q$ e $ib\cdot P$, respectivamente, teríamos

$$e^{ia\cdot Q}e^{ib\cdot P} \;=\; \exp\left(ia\cdot Q+ib\cdot P+\frac{1}{2}\big[ia\cdot Q,\,ib\cdot P\big]+\text{ soma de comutadores de ordem superior em }Q\text{'s e }P\text{'s}\right)\;.$$

Agora, como facilmente se vê, $\Big[ia\cdot Q,\;ib\cdot P\Big]=-ia\cdot b\mathbb{1}$. Devido a essa mesma relação, os comutadores de ordem superior em Q's e P's são nulos. Com isso, a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff para matrizes, se fosse aplicável aqui, forneceria

$$e^{ia\cdot Q}e^{ib\cdot P} \;=\; \exp\Big(i\big(a\cdot Q+b\cdot P\big)-i\langle a,\,b\rangle/2\Big)\;,$$

que é precisamente a relação (38.70). É importante, porém, notar que não há justificativa para se empregar a versão matricial da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff no presente contexto: conforme discutido na mencionada Seção 11.5, página 659, a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff matricial é válida para matrizes de norma suficientemente pequena. Os operadores Q e P, em contraste, não são operadores limitados enquanto operadores agindo no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n,\,d^nx)$.

38.2.1.2 A Transformada de Fourier de Funções Gaussianas

As relações (38.44) são úteis também por permitirem calcular facilmente a transformada de Fourier de algumas funções, notadamente das funções Gaussianas. Exemplos relevantes são exibidos nas proposições e nos exercícios que seguem.

Começamos exibindo o fato de que uma particular função Gaussiana tem a propriedade de ser invariante pela transformada de Fourier.

Proposição 38.8 *Seja $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ a função $g(x)=\exp\left(-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^n x_j^2\right)$. Então, $\mathcal{F}g=g$ e $\mathcal{F}^cg=g$.* □

[22] Henry Frederick Baker (1866–1956). John Edward Campbell (1862–1924). Felix Hausdorff (1868–1942).

Prova. Pela definição de g, é fácil constatar que para todo $j = 1, \ldots, n$ vale $\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = -x_j g(x)$, ou seja, $(P_j - iQ_j)g = 0$. Aplicando o operador $\mathcal{F}$ a essa igualdade e usando as relações (38.44), obtemos $(Q_j + iP_j)\hat{g} = 0$, onde $\hat{g} \equiv \mathcal{F}g$. Isso significa que

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial y_j}(y) + y_j \hat{g}(y) \;=\; 0$$

para todo $j = 1, \ldots, n$. A solução dessas equações é (justifique!)

$$\hat{g}(y) \;=\; \lambda \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) \;,$$

onde λ é uma constante. Assim, estabelecemos que $\mathcal{F}g = \lambda g$. Para determinar λ calculemos ambos os lados dessa igualdade em um ponto específico. Como $g(0) = 1$, temos que

$$\lambda \;=\; \lambda g(0) \;=\; \mathcal{F}[g](0) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) d^n x \;\overset{x=\sqrt{2}y}{=}\; \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) d^n y \;=\; 1 \;.$$

Isso provou que $\mathcal{F}g = g$. Como $Rg = g$, segue também que $\mathcal{F}^c g = R\mathcal{F}g = Rg = g$. ■

E. 38.25 *Exercício*. A igualdade $\mathcal{F}[g] = g$ para $g(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)$ pode também ser demonstrada usando integração no plano complexo e o Teorema de Cauchy. Faça-o! Vide Exercício dirigido E. 38.60, página 2106. ✠

Antes de estendermos os resultados da Proposição 38.8, façamos um comentário sobre a mesma.

• **Comentário sobre funções invariantes pela transformada de Fourier**

A função Gaussiana g da Proposição 38.8 não é a única função não-nula que é invariante pela transformada de Fourier e há alguns exemplos bastante simples de funções com essa propriedade. Na Seção 38.2.2, página 2041, mostramos que todas as funções de Hermite[23] da forma h_{4n}, $n \in \mathbb{N}_0$, são invariantes pela transformada de Fourier. No exercício dirigido E. 38.66, página 2110, mostramos explicitamente que para a função de uma variável

$$h(x) \;=\; \frac{1}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, x\right)}$$

vale $\mathcal{F}[h] = h$, ou seja, essa função h também tem a si mesmo como transformada de Fourier.

Como veremos adiante (Exercício E. 38.35, página 2046), se $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, então $h := f + \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}^2[f] + \mathcal{F}^3[f]$ também satisfaz $\mathcal{F}[h] = h$. Em verdade, veremos que $h(x) = f(x) + f(-x) + \mathcal{F}[f](x) + \mathcal{F}[f](-x)$ e, portanto, se f for uma função ímpar, h será identicamente nula mas, se f for par, teremos $h(x) = 2f(x) + 2\mathcal{F}[f](x)$, que não é necessariamente a função nula. Por exemplo, para qualquer $\alpha > 0$ a função

$$f_\alpha(x) \;:=\; \exp\left(-\alpha x^2\right) + \frac{\exp\left(-\frac{1}{4\alpha}x^2\right)}{\sqrt{2\alpha}}$$

é exatamente desse tipo (pela Proposição 38.9, página 2033) e, portanto, vale para a mesma $\mathcal{F}[f_\alpha] = f_\alpha$. Outro exemplo é a função

$$h_\beta(x) \;:=\; \frac{1}{\cosh\left(\beta\, x\right)} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\beta\cosh\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{\beta}\right)} \;,$$

$\beta > 0$, que também é a soma de uma função par com sua transformada de Fourier (vide Exercício E. 38.66, página 2110) e, portanto, também satisfaz $\mathcal{F}[h_\beta] = h_\beta$. No caso de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, pode-se provar que a função Gaussiana g da Proposição 38.8 é a única função simultaneamente invariante pela transformada de Fourier e pela ação do grupo de rotações $\mathrm{SO}(n)$.

[23] As chamadas *funções de Hermite* (Charles Hermite (1822–1901)), denotadas por h_m, $m \in \mathbb{N}_0$, foram introduzidas na Seção 16.2.3.1, página 895. Vide (16.110).

• **A transformada de Fourier de funções Gaussianas**

O resultado contido na proposição que segue é muito importante e refere-se a transformadas de Fourier de funções Gaussianas gerais em $\mathbb{R}$.

Proposição 38.9 (Transformada de Fourier de Gaussianas em $\mathbb{R}$) *Sejam $\alpha > 0$ e $\gamma \in \mathbb{C}$, constantes. Então, para a função*

$$h(x) \ := \ \exp\left(-\alpha x^2 + \gamma x\right) \ , \quad x \in \mathbb{R} \ , \qquad \textit{tem-se} \qquad \mathcal{F}[h](y) \ = \ \frac{\exp\left(-\frac{1}{4\alpha}\left(y+i\gamma\right)^2\right)}{\sqrt{2\alpha}} \ . \tag{38.72}$$

A relação (38.72) diz-nos que a transformada de Fourier de uma função Gaussiana é novamente uma função Gaussiana. □

Comentário. A expressão (38.72) pode ser demonstrada com uso de integração complexa (vide Exercício E. 38.60, página 2106)[24], mas apresentaremos aqui uma demonstração alternativa, talvez mais simples, sem o uso dessa técnica. Em ambas as demonstrações, no entanto, faz-se uso do seguinte comentário. Para y real tem-se, por definição,

$$\mathcal{F}[h](y) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - i(y+i\gamma)x} \, dx \tag{38.73}$$

e o integrando, ou seja, a função $\exp\Big(-\alpha x^2 - i(y+i\gamma)x\Big)$, é uma função inteira da variável y, ou seja, é uma função de y que é analítica em todo o plano complexo. A integral do lado direito é absolutamente convergente devido ao fator $e^{-\alpha x^2}$. Por isso, aquela integral é igualmente uma função inteira de y. ♣

Demonstração da Proposição 38.9. Seja $\hat{h} \equiv \mathcal{F}[h]$. É fácil constatar que a função h satisfaz $\Big(\frac{d}{dx} + 2\alpha x - \gamma\Big)h(x) = 0$ e, portanto, satisfaz $\big(P - 2i\alpha Q + i\gamma\big)h = 0$. Usando (38.44), segue disso que $\hat{h}$ satisfaz $\big(iP + \frac{1}{2\alpha}(Q+i\gamma)\big)\,\hat{h} = 0$, ou seja, $\hat{h}$ satisfaz a equação diferencial $\frac{\partial}{\partial y}\hat{h}(y) = -\frac{1}{2\alpha}\big(y+i\gamma\big)\hat{h}(y)$. A solução dessa equação é

$$\hat{h}(y) \ = \ Ce^{-\frac{1}{4\alpha}\left(y+i\gamma\right)^2} \ ,$$

onde C é uma constante de integração a ser determinada. Para isso, lembremos (38.73) e escrevamos

$$Ce^{-\frac{1}{4\alpha}\left(y+i\gamma\right)^2} \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - i(y+i\gamma)x} \, dx \ .$$

Notemos que o lado esquerdo é também uma função inteira de y e, portanto, a igualdade acima vale para todo $y \in \mathbb{C}$. Calculando ambos os lados da igualdade em $y = -i\gamma$, teremos

$$C \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \, dx \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \ , \qquad \text{provando que} \qquad \hat{h}(y) \ = \ \frac{e^{-\frac{1}{4\alpha}\left(y+i\gamma\right)^2}}{\sqrt{2\alpha}} \ ,$$

que é o que desejávamos estabelecer. ■

Comentário. A relação (38.72) pode também ser obtida por integração complexa. Vide Exercício E. 38.60, página 2106. No Exercício E. 38.61, página 2108, mostramos como reobter (38.72) por outros meios, a saber, usando a expansão de Taylor da função exponencial e propriedades da Função Gama de Euler.

No Exercício E. 38.63, página 2109, mostramos como as ideias da prova acima podem ser usadas para calcular a transformada de Fourier da função $e^{-\gamma x^4}$, $\gamma > 0$, em termos de uma expansão em série de potências. ♣

Comentário. Vemos em (38.72) (para o caso $\gamma = 0$) que a transformada de Fourier da função Gaussiana $h(x) = \exp\left(-\alpha x^2\right)$ é a função Gaussiana $\mathcal{F}[h](y) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\exp\left(-\frac{1}{4\alpha}y^2\right)$. A "largura" da Gaussiana h é proporcional a $1/\sqrt{\alpha}$, enquanto que a "largura" da Gaussiana $\mathcal{F}h$ é proporcional a $\sqrt{4\alpha}$. Isso ilustra mais uma vez a já mencionada propriedade qualitativa das transformadas de Fourier: a de transformar funções "largas" em "estreitas" e vice-versa. Essa importante propriedade será justificada e discutida de forma mais aprofundada na Seção 38.2.1.5, página 2039, quando discutirmos o "principio de incerteza" para transformadas de Fourier. Vide (38.101) e (38.102). ♣

A afirmação da Proposição 38.9 pode ser ainda estendida para incluir o caso em que α é uma constante complexa, mas com $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$.

[24] Um terceiro método distinto será apresentado no Exercício E. 38.61, página 2108, usando a expansão de Taylor da função exponencial e propriedades da Função Gama de Euler.

Corolário 38.1 *Sejam $\alpha,\ \gamma \in \mathbb{C}$, constantes, com $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$. Então, para a função*

$$h(x) \ := \ \exp\left(-\alpha x^2 + \gamma x\right), \quad x \in \mathbb{R}\,, \qquad \textit{tem-se} \qquad \mathcal{F}[h](y) \ = \ \frac{\exp\left(-\frac{1}{4\alpha}\left(y+i\gamma\right)^2\right)}{\sqrt{2\alpha}}\,, \tag{38.74}$$

sendo que, para $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ com $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, temos acima $\sqrt{\alpha} = |\alpha|^{1/2}e^{i\theta/2}$. □

Prova. Vamos denotar por Ω_+ o subconjunto de $\mathbb{C}$ composto pelos números complexos de parte real positiva: $\Omega_+ := \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$. A igualdade que desejamos estabelecer é

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - i(y+i\gamma)x}\, dx \ = \ \frac{\exp\left(-\frac{1}{4\alpha}\left(y+i\gamma\right)^2\right)}{\sqrt{2\alpha}}\,. \tag{38.75}$$

Notemos que, se $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$, então tem-se $|e^{-\alpha x^2}| = e^{-\mathrm{Re}\,(\alpha)x^2}$, o que é suficiente para provar que a integral do lado esquerdo em (38.75) é uma função analítica em α na região Ω_+, pois o integrando é uma função inteira de α e a integral é absolutamente convergente para $\alpha \in \Omega_+$. Agora, o lado direito de (38.75) é igualmente uma função analítica de α na mesma região Ω_+ com $\sqrt{\alpha} = |\alpha|^{1/2}e^{i\theta/2}$ para $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ com $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Portanto, como a igualdade (38.75) foi estabelecida (na Proposição 38.9) para o caso em que α é real e positivo, ela é válida também em toda a região comum de analiticidade Ω_+. ■

No Exercício dirigido E. 38.60, página 2106, demonstramos o Corolário 38.1 (ou seja, a igualdade (38.75) para $\alpha,\ \gamma \in \mathbb{C}$, constantes, com $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$) usando integração no plano complexo e o Teorema de Cauchy.

O resultado apresentado no exercício a seguir generaliza a Proposição 38.9. É também importante, por ser empregado na Mecânica Quântica, na Teoria Quântica de Campos e na Teoria de Probabilidades.

E. 38.26 *Exercício importante.* Seja $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{R},\ n)$ uma matriz real, autoadjunta e positiva (isto é, tal que seus autovalores sejam números positivos). Seja também $\gamma = (\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_n) \in \mathbb{C}^n$. Considere a função $h(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, definida por

$$h(x) \ := \ \exp\Big(-\left\langle x,\ Ax\right\rangle + \left\langle \gamma,\ x\right\rangle\Big)\,,$$

onde $\langle a,\ b\rangle$ denota a forma bilinear usual entre vetores $a = (a_1,\ \ldots,\ a_n)$ e $b = (b_1,\ \ldots,\ b_n)$ de $\mathbb{C}^n$: $\langle a,\ b\rangle := a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$. Prove que a transformada de Fourier de h,

$$\mathcal{F}[h](y) \ := \ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x,\ Ax\rangle - i\langle (y+i\gamma),\ x\rangle}\, d^n x\,, \tag{38.76}$$

com $y = (y_1,\ \ldots,\ y_n) \in \mathbb{R}^n$, é dada por

$$\mathcal{F}[h](y) \ := \ \frac{1}{\sqrt{2^n\det(A)}}\exp\left(-\frac{1}{4}\Big\langle (y+i\gamma),\ A^{-1}(y+i\gamma)\Big\rangle\right)\,. \tag{38.77}$$

Sugestão. Use o seguinte fato. Como A é real e autoadjunta, A pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal: $TAT^{-1} = D$, com D sendo diagonal e T ortogonal. Os elementos da diagonal de D são os autovalores de A (todos positivos). Faça na integral em (38.76) a mudança de variável $y = Tx$. Use também o resultado da Proposição 38.9. ✠

38.2.1.3 Invertibilidade da Transformada de Fourier no Espaço de Schwartz

Nesta seção apresentaremos alguns resultados que culminarão com a demonstração da existência da inversa da transformada de Fourier no espaço de Schwartz e a identificação dessa inversa com a transformada de Fourier conjugada.

• **O comutante de P_a e Q_a**

O teorema estrutural que segue é de importância central na teoria das transformadas de Fourier. Ele estabelece que se um operador linear L agindo no espaço de Schwartz comuta com as derivadas parciais e com as multiplicações pelas coordenadas, então esse operador L é um múltiplo do operador identidade.

Teorema 38.2 *Seja $L : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ um operador linear e contínuo de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ que comute com todos os P_a's e com todos os Q_a's, ou seja, que satisfaça $LQ_a = Q_aL$ e $LP_a = P_aL$ para todo $a = 1, \ldots, n$. Então, L é um múltiplo da identidade, ou seja, existe uma constante $\ell \in \mathbb{C}$ tal que $L = \ell\mathbb{1}$.* □

Nota. O estudante conhecedor da Teoria de Representação de Grupos pode interessar-se em saber que há uma ligação profunda entre o Teorema 38.2 e o Lema de Schur, Teorema 23.2, página 1273. ♣

Prova do Teorema 38.2 (Adaptada de [266]). Tomemos um ponto $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Se f é uma função de Schwartz que se anula em a, a Proposição 38.2, página 2014, afirma que $f(x) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)f_k(x)$, com as f_k sendo também funções de Schwartz. Temos, portanto, do fato que L é linear e comuta com Q_k que $L(Q_k - a_k) = (Q_k - a_k)L$. Logo,

$$(Lf)(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)(Lf_k)(x) \;.$$

e essa relação diz-nos que $(Lf)(a) = 0$.

Para $a \in \mathbb{R}^n$, defina-se H_a como o elemento de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dado por $H_a(x) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)^2\right)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Naturalmente, $H_a(a) = 1$. Note-se que H_a é a translação por a da função gaussiana H_0 e, portanto, a aplicação $\mathbb{R}^n \ni a \mapsto H_a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínua.

Para $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, arbitrária, a função $f(x) := g(x) - g(a)H_a(x)$ é uma função de Schwartz e anula-se em $x = a$. Logo, pelas considerações acima, tem-se $(Lf)(a) = 0$, o que implica que

$$(Lg)(a) \;=\; \ell(a)g(a) \;, \tag{38.78}$$

onde $\ell(a) := L\left(H_a\right)(a)$. É claro pela definição que ℓ não depende da função g. É importante notar também que (38.78) é válida para todo $a \in \mathbb{R}^n$.

Igualmente importante é a observação que a continuidade de L implica que ℓ é diferenciável. De fato, para $a,\ b \in \mathbb{R}^n$ defina-se $\tilde{\ell}(a,\ b) := L\left(H_a\right)(b)$. Para tornar claro o argumento, tomemos $n = 1$. É claro que $\tilde{\ell}$ é diferenciável na variável b, pois $LH_a \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Mas $\tilde{\ell}$ também é diferenciável na dependência em a, pois o limite $\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\Big(LH_{a+\epsilon} - LH_a\Big) = L\Big(\lim_{\epsilon\to 0}\left(H_{a+\epsilon} - H_a\right)\Big)$ existe e é igual a $L\big(\partial_a H_a\big)$, devido à continuidade de L. Agora, $\ell(a) = \tilde{\ell}(a,\ a)$ e, portanto, $\ell'(a) = \Big(\partial_a\tilde{\ell}(a,\ b)\Big)_{b=a} + \Big(\partial_b\tilde{\ell}(a,\ b)\Big)_{b=a}$, que está bem definida.

Vamos provar agora que ℓ independe de a. A relação (38.78) vale para toda função g do espaço de Schwartz. Assim, (38.78) vale para g e para suas derivadas D_jg, $j = 1, \ldots, n$. Logo, para todo $a \in \mathbb{R}^n$ valem as relações

$$(Lg)(a) \;=\; \ell(a)g(a) \tag{38.79}$$

e

$$\big(L(D_jg)\big)(a) \;=\; \ell(a)(D_jg)(a) \;, \tag{38.80}$$

essa última para todo $j = 1, \ldots, n$. Pela hipótese que L e D_j comutam, teremos

$$\ell(a)(D_jg)(a) \overset{(38.80)}{=} \big(L(D_jg)\big)(a) \overset{LD_j=D_jL}{=} \big(D_j(Lg)\big)(a) \overset{(38.79)}{=} \big(D_j(\ell g)\big)(a) \overset{\text{regra de Leibniz}}{=} \ell(a)(D_jg)(a) + g(a)(D_j\ell)(a) \;.$$

Essa igualdade diz-nos que $g(a)(D_j\ell)(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}^n$. Como g é arbitrária, isso diz-nos que $D_j\ell$ anula-se em toda parte, provando que ℓ é constante. Assim, por (38.78), que vale para toda $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, segue que $L = \ell\mathbb{1}$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, completando a prova. ■

Nota. Uma outra prova mais direta de que ℓ é constante é a seguinte. Tomemos por simplicidade $n = 1$. Como $H_a(x) = \exp\left(-(x-a)^2\right)$, tem-se $\partial_aH_a(x) = -\partial_xH_a(x)$. Logo, como por hipótese a diferenciação em x e L comutam (pois L e P comutam), tem-se $\partial_a\tilde{\ell}(a,\ b) = \partial_aL(H_a)(b) = L(\partial_aH_a)(b) = \big(L(-iPH_a)\big)(b) = -i\big(PL(H_a)\big)(b) = -\partial_bL(H_a)(b) = -\partial_b\tilde{\ell}(a,\ b)$. Assim, $\ell'(a) = \Big(\partial_a\tilde{\ell}(a,\ b)\Big)_{b=a} + \Big(\partial_b\tilde{\ell}(a,\ b)\Big)_{b=a} = -\Big(\partial_b\tilde{\ell}(a,\ b)\Big)_{b=a} + \Big(\partial_b\tilde{\ell}(a,\ b)\Big)_{b=a} = 0$. O caso $n > 1$ é análogo. ♣

• **A transformada de Fourier inversa**

Na Proposição 38.6, página 2027, provamos que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^c$ são operadores de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ em si mesmo. Vamos agora provar que esses operadores são sobrejetores (sua imagem é todo $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$) e injetores (um-a-um). Mais que isso, provaremos que um é o operador inverso do outro. Além disso, provaremos que $\mathcal{F}^2 = R$ e $\mathcal{F}^4 = \mathbb{1}$.

Teorema 38.3 *$\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^c$ são isomorfismos de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, são aplicações lineares bijetoras de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Mais especificamente, temos $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^c$, relação essa válida em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Valem também em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ as relações*

$$\mathcal{F}^2 \;=\; R \qquad e \qquad \mathcal{F}^4 \;=\; \mathbb{1}\,. \tag{38.81}$$

Essas duas expressões implicam também que $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}^{-1}$. □

Prova. Das relações (38.44) segue imediatamente que

$$\mathcal{F}^2 P_a \;=\; -P_a\mathcal{F}^2 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}^2 Q_a \;=\; -Q_a\mathcal{F}^2 \tag{38.82}$$

Temos também que $RQ_a = -Q_aR$ e $RP_a = -P_aR$ (vide (38.46)). Logo,

$$R\mathcal{F}^2Q_a \;=\; -RQ_a\mathcal{F}^2 \;=\; Q_aR\mathcal{F}^2 \quad \text{e} \quad R\mathcal{F}^2P_a \;=\; -RP_a\mathcal{F}^2 \;=\; P_aR\mathcal{F}^2\,.$$

Isso estabeleceu que o operador linear e contínuo $R\mathcal{F}^2$ comuta com os operadores Q_a e P_a para todo a. Pelo Teorema 38.2, página 2035, concluímos que $R\mathcal{F}^2$ é um múltiplo da identidade, como operador agindo em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$: $R\mathcal{F}^2 = \ell\mathbb{1}$ para alguma constante ℓ. Provemos agora que $\ell = 1$. Para tal basta calcular $R\mathcal{F}^2$ sobre uma função $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ específica e ver o que disso resulta. Escolhemos para g a função $g(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)$. Como vimos na Proposição 38.8, página 2031, tem-se $\mathcal{F}g = g$. Fora isso, é evidente que $Rg = g$. Logo, $R\mathcal{F}^2g = g$, estabelecendo que $\ell = 1$.

Provamos, portanto, que $R\mathcal{F}^2 = \mathbb{1}$. Como $R^2 = \mathbb{1}$, isso implica $\mathcal{F}^2 = R$ e isso, por sua vez, implica que $\mathcal{F}^4 = \mathbb{1}$ e também que $\mathcal{F}R\mathcal{F} \overset{(38.45)}{=} \mathcal{F}^2R = \mathbb{1}$. Mais importante, porém é o fato que $R\mathcal{F}^2 = \mathbb{1}$ diz-nos que $(R\mathcal{F})\mathcal{F} = \mathcal{F}(R\mathcal{F}) = \mathbb{1}$. Essas relações provam que $\mathcal{F}^{-1}$ existe e vale $\mathcal{F}^{-1} = R\mathcal{F} = \mathcal{F}^c$, completando a prova. ■

• **A transformada de Fourier e a distribuição delta de Dirac**

Podemos nesse ponto antecipar alguns comentários a respeito do papel das transformadas de Fourier na Teoria das Distribuições. Se escrita explicitamente, a relação $\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f]\big] = f$, válida para toda $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, induz as seguintes manipulações:

$$\begin{aligned} f(y) \;=\; \mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f]\big](y) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}[f](x)e^{+iy\cdot x}\,d^nx \;&=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(w)e^{-ix\cdot w}\,d^nw\right)e^{+iy\cdot x}\,d^nx \\ &=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(w)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(w-y)\cdot x}\,d^nx\right)d^nw\,, \end{aligned}$$

sendo que a troca de ordem de integração acima tem, em princípio, significado apenas simbólico. A igualdade

$$f(y) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(w)\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(w-y)\cdot x}\,d^nx\right)d^nw\,,$$

obtida formalmente acima, diz-nos que

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(w-y)\cdot x}\,d^nx \;=\; \delta(w-y)\,, \tag{38.83}$$

onde δ é a distribuição delta de Dirac em $\mathbb{R}^n$. Como discutiremos, apesar de (38.83) ter sido obtida acima por um procedimento formal (o estudante há de observar que a integral do lado esquerdo de (38.83) não é convergente, tendo, portanto, apenas um significado simbólico), ela é correta se interpretada no sentido de distribuições. A expressão (38.83) é muito útil, sendo empregada em diversas áreas da Física, como na resolução de equações diferenciais, em cálculos de seções de choque na Física Quântica etc.

38.2.1.4 Transformadas de Fourier, Produtos de Convolução e Identidade de Plancherel

• **Transformadas de Fourier e produtos de convolução**

Vamos agora estudar a relação entre a transformada de Fourier e o produto de convolução em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Pelas definições, vale

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](y) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)e^{-iy\cdot x}\,d^nx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(x-w)g(w)\,d^nw\right)e^{-iy\cdot x}\,d^nx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(x-w)e^{-iy\cdot x}\,d^nx\right)g(w)\,d^nw \\
&\overset{x\to x+w}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-iy\cdot x}\,d^nx\right)e^{-iy\cdot w}g(w)\,d^nw \\
&= \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-iy\cdot x}\,d^nx\right)\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-iy\cdot w}g(w)\,d^nw\right) \\
&= \mathcal{F}[f](y)\,\mathcal{F}[g](y)\,.
\end{aligned}$$

Provamos, portanto, que

$$\mathcal{F}[f*g] \;=\; \mathcal{F}[f]\cdot\mathcal{F}[g]$$

Como $R(a\cdot b)=(Ra)\cdot(Rb)$ para duas funções de Schwartz a e b quaisquer (Proposição 38.3, página 2018), segue disso e de $\mathcal{F}^{-1}=R\mathcal{F}$ que

$$\mathcal{F}^{-1}[f*g] \;=\; \mathcal{F}^{-1}[f]\cdot\mathcal{F}^{-1}[g]\,,$$

Como essa relação vale para todos $f,\ g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, podemos substituir $f\to\mathcal{F}[f]$ e $g\to\mathcal{F}[g]$, obtendo $\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f]*\mathcal{F}[g]\big]=f\cdot g$ e disso segue que

$$\mathcal{F}[f\cdot g] \;=\; \mathcal{F}[f]*\mathcal{F}[g]\,.$$

Como $R(a*b)=(Ra)*(Rb)$ para duas funções de Schwartz a e b quaisquer (Proposição 38.3, página 2018), segue disso e de $\mathcal{F}^{-1}=R\mathcal{F}$ que

$$\mathcal{F}^{-1}[f\cdot g] \;=\; \mathcal{F}^{-1}[f]*\mathcal{F}^{-1}[g]\,.$$

Para futura referência, reunimos os fatos provados acima na seguinte proposição:

Proposição 38.10 *Seja o produto de convolução definido em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ por*

$$(f*g)(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)\,d^ny \tag{38.84}$$

com $f,\ g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e sejam a transformada de Fourier $\mathcal{F}$ e sua inversa $\mathcal{F}^{-1}$ dadas por

$$\mathcal{F}[f](y) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-iy\cdot x}\,d^nx \qquad e \qquad \mathcal{F}^{-1}[f](y) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{+iy\cdot x}\,d^nx\,, \tag{38.85}$$

para toda $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Então, para todas $f,\ g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ valem as relações

$$\mathcal{F}[f*g] \;=\; \mathcal{F}[f]\cdot\mathcal{F}[g]\,, \tag{38.86}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f*g] \;=\; \mathcal{F}^{-1}[f]\cdot\mathcal{F}^{-1}[g]\,, \tag{38.87}$$

$$\mathcal{F}[f\cdot g] \;=\; \mathcal{F}[f]*\mathcal{F}[g]\,, \tag{38.88}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f\cdot g] \;=\; \mathcal{F}^{-1}[f]*\mathcal{F}^{-1}[g]\,. \tag{38.89}$$

Essas relações estabelecem que as álgebras $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\ \cdot)$ *e* $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\ *)$ *(vide página 2018) são isomorfas, o isomorfismo sendo dado pela transformada de Fourier.* □

E. 38.27 *Exercício para o estudante que conheça a distribuição de Dirac.* Obtenha formalmente a relação $\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g] = \mathcal{F}[f \cdot g]$ fazendo uso de (38.83). ✱

• **A identidade de Plancherel**

Em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ podemos definir um produto escalar por

$$\langle f,\ g\rangle_{\mathbb{C}} := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(y)}\, g(y)\, d^n y\ . \tag{38.90}$$

É fácil constatar (faça-o!) que

$$\langle f,\ g\rangle_{\mathbb{C}} = (2\pi)^{n/2}\Big(\overline{(Rf)} * g\Big)(0) = (2\pi)^{n/2}\Big(\overline{f} * (Rg)\Big)(0)$$

e que

$$\langle f,\ g\rangle_{\mathbb{C}} = (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}\left[\overline{f}\cdot g\right](0)\ . \tag{38.91}$$

Logo,

$$\langle \mathcal{F}[f],\ \mathcal{F}[g]\rangle_{\mathbb{C}} = (2\pi)^{n/2}\Big(\overline{(R\mathcal{F}[f])} * (\mathcal{F}[g])\Big)(0) = (2\pi)^{n/2}\Big(\overline{(\mathcal{F}^{-1}[f])} * (\mathcal{F}[g])\Big)(0) = (2\pi)^{n/2}\Big(\mathcal{F}\big[\overline{f}\big] * \mathcal{F}[g]\Big)(0)$$

$$\stackrel{(38.88)}{=} (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}\left[\overline{f}\cdot g\right](0) \stackrel{(38.91)}{=} \langle f,\ g\rangle_{\mathbb{C}}\ ,$$

onde, na terceira igualdade, usamos que $\overline{(\mathcal{F}^{-1}[f])} = \mathcal{F}\left[\overline{f}\right]$, que segue de (38.34) e do fato que $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^c$.

A igualdade assim estabelecida $\langle \mathcal{F}[f],\ \mathcal{F}[g]\rangle_{\mathbb{C}} = \langle f,\ g\rangle_{\mathbb{C}}$, válida para todos $f,\ g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, é denominada *identidade de Plancherel*[25], ou *teorema de Plancherel*, para as transformadas de Fourier. Ela contém a importante informação que $\mathcal{F}$ é um operador isométrico em relação ao produto escalar acima.

Substituindo $f \to \mathcal{F}^{-1}[f]$ e $g \to \mathcal{F}^{-1}[g]$ na identidade de Plancherel, obtemos $\langle f,\ g\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \mathcal{F}^{-1}[f],\ \mathcal{F}^{-1}[g]\rangle_{\mathbb{C}}$. Substituindo apenas $f \to \mathcal{F}^{-1}[f]$ na identidade de Plancherel, obtemos que $\langle f,\ \mathcal{F}[g]\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \mathcal{F}^{-1}[f],\ g\rangle_{\mathbb{C}}$, que afirma que $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ (na linguagem de operadores duais (adjuntos) em espaços de Hilbert). Substituindo apenas $g \to \mathcal{F}^{-1}[g]$ na identidade de Plancherel, obtemos que $\langle \mathcal{F}[f],\ g\rangle_{\mathbb{C}} = \langle f,\ \mathcal{F}^{-1}[g]\rangle_{\mathbb{C}}$.

Para futura referência reunimos os resultados provados acima na seguinte proposição:

Teorema 38.4 (Teorema de Plancherel) *Seja o produto escalar definido em* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *por*

$$\big\langle f,\ g\big\rangle_{\mathbb{C}} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(y)}\, g(y)\, d^n y$$

para todas $f,\ g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *e sejam a transformada de Fourier* $\mathcal{F}$ *e sua inversa* $\mathcal{F}^{-1}$ *dadas por*

$$\mathcal{F}[f](y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-iy\cdot x}\, d^n x \qquad e \qquad \mathcal{F}^{-1}[f](y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{+iy\cdot x}\, d^n x\ ,$$

para toda $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$*. Então, para todas* $f,\ g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *valem as relações*

$$\big\langle \mathcal{F}[f],\ \mathcal{F}[g]\big\rangle_{\mathbb{C}} = \big\langle f,\ g\big\rangle_{\mathbb{C}}\ , \tag{38.92}$$

$$\big\langle \mathcal{F}^{-1}[f],\ \mathcal{F}^{-1}[g]\big\rangle_{\mathbb{C}} = \big\langle f,\ g\big\rangle_{\mathbb{C}}\ , \tag{38.93}$$

$$\big\langle f,\ \mathcal{F}[g]\big\rangle_{\mathbb{C}} = \big\langle \mathcal{F}^{-1}[f],\ g\big\rangle_{\mathbb{C}}\ , \tag{38.94}$$

$$\big\langle \mathcal{F}[f],\ g\big\rangle_{\mathbb{C}} = \big\langle f,\ \mathcal{F}^{-1}[g]\big\rangle_{\mathbb{C}}\ . \tag{38.95}$$

[25] Michel Plancherel (1885–1967). O trabalho original de Plancherel sobre a identidade que leva seu nome é: Michel Plancherel, "Contribution a l'etude de la representation d'une fonction arbitraire par les integrales définies" Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. **30**, p. 298–335 (1910).

Essas relações estabelecem que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ são operadores isométricos para o produto escalar acima e que vale $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$. A relação (38.92) é denominada identidade de Plancherel. □

O Teorema de Plancherel, Teorema 38.4, indica que a extensão da transformada de Fourier a $L^2(\mathbb{R}^n,\ d^n x)$, que discutiremos adiante, é um operador unitário nesse espaço de Hilbert.

E. 38.28 *Exercício para o estudante que conheça a distribuição de Dirac.* Obtenha formalmente a relação $\langle \mathcal{F}[f],\ \mathcal{F}[g]\rangle_{\mathbb{C}} = \langle f,\ g\rangle_{\mathbb{C}}$ fazendo uso de (38.83). ✠

Façamos ainda um comentário elementar que utilizaremos posteriormente em nossa discussão sobre transformadas de Fourier de distribuições. Considere-se a forma bilinear ω em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ que a cada par $f,\ g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ associa

$$\omega(f,\ g) \ := \ \langle \overline{f},\ g\rangle_{\mathbb{C}} \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(y)\ d^n y\ .$$

Temos que $\omega\big(f,\ \mathcal{F}[g]\big) \ = \ \langle \overline{f},\ \mathcal{F}[g]\rangle_{\mathbb{C}} \overset{(38.94)}{=} \langle \mathcal{F}^{-1}\big[\overline{f}\big],\ g\rangle_{\mathbb{C}} \overset{(38.34)}{=} \langle \overline{\mathcal{F}[f]},\ g\rangle_{\mathbb{C}}$, estabelecendo que

$$\omega\big(f,\ \mathcal{F}[g]\big)] \ = \ \omega\big(\mathcal{F}[f],\ g\big)\ . \tag{38.96}$$

• **Os operadores P e Q como operadores simétricos**

Para futuro uso, demonstremos as seguintes propriedades importantes que relacionam os operadores P e Q e o produto escalar (38.90) no espaço de Schwartz: para todos $f,\ g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^a)$ e todo $a \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ valem

$$\big\langle f,\ Q_a g\big\rangle_{\mathbb{C}} \ = \ \big\langle Q_a f,\ g\big\rangle_{\mathbb{C}}\ , \tag{38.97}$$

$$\big\langle f,\ P_a g\big\rangle_{\mathbb{C}} \ = \ \big\langle P_a f,\ g\big\rangle_{\mathbb{C}}\ . \tag{38.98}$$

A prova de (38.97) é elementar:

$$\big\langle f,\ Q_a g\big\rangle_{\mathbb{C}} \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} x^a g(x)\ d^n x \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} \overline{x^a f(x)} g(x)\ d^n x \ = \ \big\langle Q_a f,\ g\big\rangle_{\mathbb{C}}\ .$$

A relação (38.98) pode ser facilmente provada via integração por partes, mas vamos fazê-lo de uma forma mais elegante, usando (38.44) e a identidade de Plancherel (38.92):

$$\big\langle f,\ P_a g\big\rangle_{\mathbb{C}} \overset{(38.92)}{=} \big\langle \mathcal{F}f,\ \mathcal{F}P_a g\big\rangle_{\mathbb{C}} \overset{(38.44)}{=} \big\langle \mathcal{F}f,\ Q_a \mathcal{F}g\big\rangle_{\mathbb{C}} \overset{(38.97)}{=} \big\langle Q_a \mathcal{F}f,\ \mathcal{F}g\big\rangle_{\mathbb{C}} \overset{(38.44)}{=} \big\langle \mathcal{F}P_a f,\ \mathcal{F}g\big\rangle_{\mathbb{C}} \overset{(38.92)}{=} \big\langle P_a f,\ g\big\rangle_{\mathbb{C}}\ ,$$

estabelecendo (38.98).

Na linguagem da Análise Funcional, (38.97) e (38.98) informam que Q_a e P_a são operadores simétricos em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Seguindo as definições (38.48)–(38.49) é trivial estabelecer que

$$\big\langle U(a)f,\ U(a)g\big\rangle_{\mathbb{C}} \ = \ \big\langle f,\ g\big\rangle_{\mathbb{C}} \qquad \text{e que} \qquad \big\langle V(a)f,\ V(a)g\big\rangle_{\mathbb{C}} \ = \ \big\langle f,\ g\big\rangle_{\mathbb{C}}\ , \tag{38.99}$$

também para todos $f,\ g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^a)$ e todo $a \in \mathbb{R}^n$.

E. 38.29 *Exercício.* Prove isso! ✠

38.2.1.5 "Relações de Incerteza" para Transformadas de Fourier

Já comentamos, ao contemplar anteriormente alguns exemplos, que a transformada de Fourier de uma função "estreita" é, em muitos casos, uma função "larga" e vice-versa. Vamos aqui tornar essa ideia mais precisa apresentando um resultado similar às relações de incerteza, bem conhecidas da Mecânica Quântica, e que discutimos no Capítulo 48, página 2752. Para um tratamento dessa questão com métodos similares, também no contexto das Transformadas de Fourier, vide [17] ou [478].

Seja $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ uma função não nula escolhida de sorte que $\langle f,\ f\rangle_{\mathbb{C}} = 1$ (o que sempre pode ser alcançado entre funções não nulas multiplicando-as por uma constante adequada). Por (38.92), segue também que $\langle \mathcal{F}f,\ \mathcal{F}f\rangle_{\mathbb{C}} = 1$.

De (38.42), segue que $-i = \langle f,\ (PQ-QP)f\rangle_{\mathbb{C}}$. Por (38.97) e (38.98), isso implica $-i = \langle QPf,\ f\rangle_{\mathbb{C}} - \langle f,\ QPf\rangle_{\mathbb{C}}$. Tomando o módulo de ambos os lados dessa igualdade, temos

$$1 \leq \Big|\langle QPf,\ f\rangle_{\mathbb{C}}\Big| + \Big|\langle f,\ QPf\rangle_{\mathbb{C}}\Big| = 2\Big|\langle f,\ QPf\rangle_{\mathbb{C}}\Big| \overset{(38.97)}{=} 2\Big|\langle Qf,\ Pf\rangle_{\mathbb{C}}\Big| \leq 2\Big|\langle Qf,\ Qf\rangle_{\mathbb{C}}\Big|^{1/2}\Big|\langle Pf,\ Pf\rangle_{\mathbb{C}}\Big|^{1/2}, \tag{38.100}$$

sendo que a última desigualdade é uma decorrência imediata da desigualdade de Cauchy-Schwarz (vide, *e.g.*, (3.11), página 268). Pela identidade de Plancherel (38.92) e pelas relações (38.44), temos $\langle Pf,\ Pf\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \mathcal{F}Pf,\ \mathcal{F}Pf\rangle_{\mathbb{C}} = \langle Q\mathcal{F}f,\ Q\mathcal{F}f\rangle_{\mathbb{C}}$. Assim, (38.100) diz-nos que

$$\Big|\langle Qf,\ Qf\rangle_{\mathbb{C}}\Big|^{1/2}\Big|\langle Q\mathcal{F}f,\ Q\mathcal{F}f\rangle_{\mathbb{C}}\Big|^{1/2} \geq \frac{1}{2}\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad \Big|\langle f,\ Q^2f\rangle_{\mathbb{C}}\Big|\,\Big|\langle \mathcal{F}f,\ Q^2\mathcal{F}f\rangle_{\mathbb{C}}\Big| \geq \frac{1}{4}\,. \tag{38.101}$$

Essa relação expressa uma versão da "*relação de incerteza*" procurada para transformadas de Fourier. Ela afirma que

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2\big|f(x)\big|^2\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} p^2\big|\hat{f}(p)\big|^2\,dp\right) \geq \frac{1}{4}\,, \tag{38.102}$$

onde $\hat{f}(p) \equiv \mathcal{F}[f](p)$. Passemos à sua interpretação.

Como $\int_{-\infty}^{\infty}\big|f(x)\big|^2\,dx = 1$ e $\int_{-\infty}^{\infty}\big|\hat{f}(p)\big|^2\,dp = 1$, podemos interpretar as funções não negativas $\big|f(x)\big|^2$ e $\big|\hat{f}(p)\big|^2$ como distribuições de probabilidade em $\mathbb{R}$. Dessa forma, as grandezas $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\big|f(x)\big|^2\,dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\big|\hat{f}(x)\big|^2\,dx$ expressam as médias da variável aleatória x^2 nessas duas distribuições. Portanto, (38.102) diz-nos que o produto dessas duas médias sempre excede 1/4. Logo, se uma for "pequena" a outra deverá ser suficientemente "grande" de sorte a não violar a desigualdade (38.102).

Essa é a forma precisa de expressar essa propriedade qualitativa das transformadas de Fourier: se uma função f torna-se mais "estreita", ou seja, se o valor médio $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\big|f(x)\big|^2\,dx$ diminui, então $\hat{f}$ deve tornar-se "larga", ou seja, o valor médio $\int_{-\infty}^{\infty} p^2\big|\hat{f}(p)\big|^2\,dp$ deve crescer e vice-versa.

A relação (38.101) pode ser ainda mais generalizada e sua interpretação aperfeiçoada. Se nela realizarmos a substituição $f \to V(-b)U(-a)f$, onde U e V são os operadores definidos em (38.48) e (38.49), respectivamente, com $a,\ b \in \mathbb{R}$, obtém-se

$$\Big|\langle f,\ (Q-a\mathbb{1})^2 f\rangle_{\mathbb{C}}\Big|\,\Big|\langle \mathcal{F}f,\ (Q-b\mathbb{1})^2\mathcal{F}f\rangle_{\mathbb{C}}\Big| \geq \frac{1}{4}\,. \tag{38.103}$$

E. 38.30 *Exercício*. Prove isso. Utilize para tal relações de comutação como (38.44) e (38.55)–(38.58), assim como as relações (38.99). ✱

Assim, obtemos

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2\big|f(x)\big|^2\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} (p-b)^2\big|\hat{f}(p)\big|^2\,dp\right) \geq \frac{1}{4}\,. \tag{38.104}$$

Essa desigualdade é válida para todos $a,\ b \in \mathbb{R}$, mas é elementar constatar (faça-o!) que o lado esquerdo atinge seu mínimo quando a e b igualam os valores médios de x nas distribuições de probabilidades definida por $|f(x)|^2$ e por $|\hat{f}(x)|^2$, respectivamente: $a_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x\big|f(x)\big|^2\,dx$ e $b_0 = \int_{-\infty}^{\infty} p\big|\hat{f}(p)\big|^2\,dp$. Isso pode ser visto constatando, por exemplo, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2\big|f(x)\big|^2\,dx = \left[a - \int_{-\infty}^{\infty} x\big|f(x)\big|^2\,dx\right]^2 + \int_{-\infty}^{\infty} x^2\big|f(x)\big|^2\,dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\big|f(x)\big|^2\,dx\right)^2$$

e analogamente para $\int_{-\infty}^{\infty}(p-b)^2\big|\hat{f}(p)\big|^2\,dp$. Assim, para essa escolha de a e de b, cada fator do lado esquerdo de (38.104) iguala-se à variância de x na respectiva distribuição de probabilidades. A equação (38.104) afirma, portanto, que o produto dessas duas variâncias sempre excede 1/4.

Para futura referência capturamos as afirmações provadas acima na seguinte proposição:

Proposição 38.11 (Relações de Incerteza em Transformadas de Fourier) *Seja $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ uma função não-nula escolhida de sorte que $\langle f,\ f\rangle_{\mathbb{C}} = \int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big|^2\, dx = 1$. Seja $\hat{f} \equiv \mathcal{F}[f]$ sua transformada de Fourier. Então, para todos $a,\ b \in \mathbb{R}$, vale*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \big|f(x)\big|^2\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} (p-b)^2 \big|\hat{f}(p)\big|^2\, dp\right) \ \geq\ \frac{1}{4}\ , \tag{38.105}$$

sendo que o mínimo do lado esquerdo é alcançado em $a_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x\big|f(x)\big|^2\, dx$ e $b_0 = \int_{-\infty}^{\infty} p\big|\hat{f}(p)\big|^2\, dp$. □

E. 38.31 *Exercício*. Generalize o tratamento acima para transformadas de Fourier em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. ✠

* ** *** *** ** *

Relações de Incerteza, no contexto da Física Quântica, são apresentadas (em várias versões) e discutidas na Seção 48.4, página 2759. O estudante deve comparar as similaridades e dissimilaridades dos métodos lá empregados com os usados acima.

38.2.2 A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$

Esta breve seção, cuja leitura é dispensável para o material que lhe segue no corrente capítulo, é melhor compreendida por estudantes familiarizados com a noção de espaço de Hilbert e com alguns fatos relativos a operadores agindo em espaços de Hilbert. Vide Capítulo 39, página 2122 e Capítulo 40, página 2169.

• **A transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$**

As chamadas *funções de Hermite* foram introduzidas na Seção 16.2.3.1, página 895, e são definidas por $h_m(x) := c_m H_m(x) e^{-x^2/2}$, com $x \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}_0$, onde

$$c_m \ :=\ \frac{1}{\sqrt{2^m m! \sqrt{\pi}}} \tag{38.106}$$

e H_m são os *polinômios de Hermite*. É bastante evidente que todas as funções de Hermite h_m são elementos do espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Na Seção 17.2, página 938, provamos também que essas funções formam uma base ortonormal completa no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R},\ dx)$. Desse fato e do Teorema 39.8, página 2144, concluímos que $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ é um subespaço denso do espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R},\ dx)$. A mesma afirmação se estende facilmente a mais dimensões: $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço denso do espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$.

A identidade de Plancherel informa-nos que a transformada de Fourier $\mathcal{F}$ é um operador unitário no espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Como esse subespaço de funções é denso em $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$, segue do Teorema BLT, Teorema 40.1, página 2175, que $\mathcal{F}$ pode ser univocamente estendida como operador unitário a todo $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$. Denotaremos essa extensão também por $\mathcal{F}$. É importante notar que essa argumentação aplica-se também sem mudanças à transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}$ e, portanto, também esta possui uma extensão unitária a todo $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$, a qual também denotamos por $\mathcal{F}^{-1}$. Como ambos os operadores são o inverso um do outro no subespaço denso $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, concluímos que a extensão $\mathcal{F}^{-1}$ é também a inversa da extensão $\mathcal{F}$ em $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ e vice-versa. Como $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ são unitárias, temos evidentemente $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ em $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$.

Há um ponto sutil na definição da extensão de $\mathcal{F}$ a todo $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ que deve ser compreendido pelo estudante. Se $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ podemos, pelas considerações acima, definir $\mathcal{F}\psi$ univocamente como um vetor de $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$. Isso, porém, não garante que $\mathcal{F}\psi$ possa ser expressa pela representação integral usual da transformada de Fourier

$$\mathcal{F}[\psi](p) \ =\ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) e^{-ip\cdot x}\, d^n x\ , \tag{38.107}$$

pois a integral do lado direito pode não estar definida (no sentido de Lebesgue). Lembrar que a integral do lado direito só estará definida se $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n,\ dx)$. Assim, se $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ mas $\psi \notin L^1(\mathbb{R}^n,\ dx)$ teremos $\mathcal{F}\psi$ definida, mas a representação integral acima não existirá (no sentido de Lebesgue). Tal é o caso, da função definida em $\mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x) \ :=\ \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{1}{x+i}\ , \qquad \text{para a qual tem-se} \qquad \mathcal{F}[\psi](y) \ =\ \begin{cases} e^{-y}\ , & \text{para } y > 0\ , \\ 0\ , & \text{para } y < 0\ , \end{cases}$$

com $\mathcal{F}[\psi](0)$ arbitrária.

Mais adiante descreveremos uma forma de representar $\mathcal{F}\psi$ para qualquer $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ em termos de uma série (convergente em $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$) envolvendo as funções de Hermite.

• **A transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ e algumas de suas relações algébricas**

Comecemos com algumas definições que serão úteis no que segue.

Para $a \in \mathbb{R}^n$ definimos o operador $\mathcal{T}_a : L^2(\mathbb{R}^n,\ dx) \to L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ por $(\mathcal{T}_a h)(x) := h(x-a)$, com $h \in L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$. Não é difícil constatar que cada $\mathcal{T}_a$ é unitário e $\mathcal{T}_a^* = \mathcal{T}_a^{-1} = \mathcal{T}_{-a}$. O operador $\mathcal{T}_a$ implementa uma translação por a nos elementos de $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$.

Para $a \in \mathbb{R}^n$ definimos o operador de multiplicação $e_a : L^2(\mathbb{R}^n,\ dx) \to L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ por $(e_a h)(x) = e^{-ia\cdot x} h(x)$. Não é difícil constatar que cada e_a é unitário e $e_a^* = e_a^{-1} = e_{-a}$.

Definimos também o operador $R : L^2(\mathbb{R}^n,\ dx) \to L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ por $(Rh)(x) = h(-x)$. É trivial constatar que R é unitário e $R^* = R^{-1} = R$. O operador R implementa nos elementos de $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ uma reflexão sobre a origem em $\mathbb{R}^n$.

Por fim, definamos o operador antilinear $C : L^2(\mathbb{R}^n,\ dx) \to L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ por $(Ch)(x) = \overline{h(x))}$. O operador C é antiunitário, o que significa que

$$\big\langle f,\ Cg \big\rangle_{\mathbb{C}} \ = \ \big\langle g,\ Cf \big\rangle_{\mathbb{C}}$$

para todos $f,\ g \in L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$.

É evidente pelas definições que valem as seguintes relações:

$$R^2 \ = \ \mathbb{1}\,, \tag{38.108}$$

$$C^2 \ = \ \mathbb{1}\,, \tag{38.109}$$

$$Re_a \ = \ e_{-a}R\,, \tag{38.110}$$

$$Ce_a \ = \ e_{-a}C\,, \tag{38.111}$$

$$C\mathcal{T}_{-a} \ = \ \mathcal{T}_{-a}C\,, \tag{38.112}$$

$$CR \ = \ RC\,. \tag{38.113}$$

Afirmamos que valem também as seguintes relações algébricas entre esses operadores e a transformada de Fourier:

$$C\mathcal{F} \ = \ \mathcal{F}^{-1}C\,, \tag{38.114}$$

$$\mathcal{F}\mathcal{T}_a \ = \ e_a\,\mathcal{F}\,, \tag{38.115}$$

$$\mathcal{F}\,e_a \ = \ \mathcal{T}_{-a}\,\mathcal{F}\,, \tag{38.116}$$

$$\mathcal{F}\,R \ = \ R\,\mathcal{F} \ = \ \mathcal{F}^{-1}\,, \tag{38.117}$$

$$\mathcal{F}^2 \ = \ R\,, \tag{38.118}$$

$$\mathcal{F}^4 \ = \ \mathbb{1}\,, \tag{38.119}$$

para todo $a \in \mathbb{R}^n$. As relações acima já foram estabelecidas para $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$: (38.114) foi estabelecida em (38.34); (38.115) e (38.116) foram estabelecidas em (38.35)–(38.36); (38.117) foi estabelecida em (38.45) e, por fim, (38.118) e (38.119) foram estabelecidas em (38.81). Cada uma delas se estende a todo $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ pois $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ e pois todos os operadores envolvidos são limitados.

• **A transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ e produtos de convolução**

Se f e g são elementos de $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ podemos definir seu produto de convolução por

$$\big(f*g\big)(a)\ :=\ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\big\langle Cf,\ R\mathcal{T}_{-a}g\big\rangle_{\mathbb{C}}\ ,\qquad a\in\mathbb{R}^n\ . \tag{38.120}$$

Essa definição pode parecer estranha e artificial, mas escrevendo-se explicitamente o lado direito de (38.120), temos

$$\big(f*g\big)(a)\ =\ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(a-x)\,dx\ ,$$

como facilmente se verifica. De fato, $(R\mathcal{T}_{-a}g)(x)=(\mathcal{T}_{-a}g)(-x)=g(-x+a)$, donde segue facilmente a afirmação. É fácil constatar outrossim que

$$\big(f*g\big)(a)\ =\ \big(g*f\big)(a)$$

para todas $f,\ g\in L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ e para todo $a\in\mathbb{R}^n$. De fato, usando as relações (38.108)–(38.113), a unitariedade de R, a antiunitariedade de C e o fato que $\mathcal{T}_a^*=\mathcal{T}_{-a}$, segue que

$$(2\pi)^{n/2}\big(f*g\big)(a)\ =\ \big\langle Cf,\ R\mathcal{T}_{-a}g\big\rangle_{\mathbb{C}}\ =\ \big\langle \mathcal{T}_aRCf,\ g\big\rangle_{\mathbb{C}}\ =\ \big\langle CR\mathcal{T}_{-a}f,\ g\big\rangle_{\mathbb{C}}$$
$$=\ \big\langle Cg,\ R\mathcal{T}_{-a}f\big\rangle_{\mathbb{C}}\ =\ (2\pi)^{n/2}\big(g*f\big)(a)\ .$$

É relevante notar, todavia, que $f*g$ não é necessariamente um elemento de $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ se f e g o forem.

Coloquemo-nos a seguinte questão: podem os resultados da Proposição 38.10, página 2037, ser diretamente estendidos do espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ao espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$? Uma evidente dificuldade reside no fato de que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra tanto com relação ao produto pontual quanto em relação ao produto de convolução, enquanto que o espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ não o é em relação a nenhum dos produtos. Assim, se $f,\ g$ são funções de $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$, os produtos fg e $f*g$ não necessariamente o são e, portanto, não é evidente sequer se a transformada de Fourier e sua inversa podem ser aplicadas a ambas as funções.

Recordemos, porém, que se f e g são duas funções de $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ seu produto pontual é certamente um elemento de $L^1(\mathbb{R}^n,\ dx)$ pois, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $\big(\int_{\mathbb{R}}|f(x)g(x)|dx\big)^2\leq\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx\int_{\mathbb{R}}|g(x)|^2dx<\infty$. Assim, se $f,g\in L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ a transformada de Fourier e a transformada de Fourier conjugada do produto pontual fg existem e são dadas por $\mathcal{F}[fg](y)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)e^{-ix\cdot y}dx$ e $\mathcal{F}^c[fg](y)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)e^{ix\cdot y}dx$, respectivamente. Temos o seguinte resultado:

Proposição 38.12 *Para todos $f,\ g\in L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ tem-se*

$$\big(f*g\big)(y)\ =\ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}^{-1}[f](x)\,\mathcal{F}^{-1}[g](x)\,e^{-iy\cdot x}\,dx\ . \tag{38.121}$$

A integral à direita está bem definida pois, como já comentamos, $\mathcal{F}^{-1}[f]\cdot\mathcal{F}^{-1}[g]\in L^1(\mathbb{R}^n,\ dx)$. A igualdade acima estabelece que se $f,\ g\in L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$, então $f*g$ é a transformada de Fourier de uma função de $L^1(\mathbb{R}^n,\ dx)$ (observar que o lado direito de (38.121) é a transformada de Fourier de um elemento de $L^1(\mathbb{R}^n,\ dx)$). Como a transformada de Fourier é invertível em $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$, segue de (38.121) que

$$\mathcal{F}[f]*\mathcal{F}[g]\ =\ \mathcal{F}[fg]\ . \tag{38.122}$$

Note-se que a transformada de Fourier do lado direito, $\mathcal{F}[fg]$, é entendida como a transformada de Fourier de um elemento de $L^1(\mathbb{R}^n,\ dx)$. Segue disso também que

$$\mathcal{F}^{-1}[f]*\mathcal{F}^{-1}[g]\ =\ \mathcal{F}^c[fg]\ , \tag{38.123}$$

sempre para $f,\ g\in L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$. □

Incidentalmente, (38.121) fornece uma prova alternativa de que $f * g = g * f$ para $f,\ g \in L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$.

Prova da Proposição 38.12. Fazendo uso da unitariedade da transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ e das relações (38.108)–(38.113) e (38.114)–(38.119), obtém-se

$$(2\pi)^{n/2}\big(f * g\big)(y) \overset{(38.120)}{:=} \big\langle Cf,\ R\mathcal{T}_{-y}g\big\rangle_{\mathbb{C}} \overset{\text{unitariedade}}{=} \big\langle \mathcal{F}Cf,\ \mathcal{F}R\mathcal{T}_{-y}g\big\rangle_{\mathbb{C}} = \big\langle C\mathcal{F}^{-1}f,\ e_y\mathcal{F}^{-1}g\big\rangle_{\mathbb{C}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}[f](x)\ \mathcal{F}^{-1}[g](x)\ e^{-iy\cdot x}\ dx\ .$$

Verifique! Na última igualdade nos limitamos a escrever explicitamente o produto escalar. A relação (38.122) segue disso substituindo-se f e g por $\mathcal{F}[f]$ e $\mathcal{F}[g]$, respectivamente, que também são elementos de $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$. A relação (38.123) é obtida tomando-se a conjugação complexa ou aplicando-se o operador R a ambos os lados de (38.121) ou de (38.122). ■

38.2.2.1 Mais Algumas Transformadas de Fourier Relevantes em Aplicações

Nosso propósito nesta seção é justificar a validade de algumas identidades utilizadas com frequência em problemas de Física, no cômputo de certas soluções fundamentais (funções de Green) associadas a certas equações diferenciais lineares não-homogêneas:

O primeiro exemplo é o seguinte. Seja ω_* um número complexo com $\mathrm{Im}\,(\omega_*) > 0$. Então, vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_*}\, d\omega \ = \ 2\pi i H(t) e^{i\omega_* t}\ , \tag{38.124}$$

onde H é a chamada função de Heaviside, que vale $H(t) = 1$ para $t \geq 0$ e $H(t) = 0$ para $t < 0$.

O integrando do lado esquerdo não é uma função integrável (ou seja, não é um elemento de $L^1(\mathbb{R},\ dx)$) e a integral do lado esquerdo deve ser entendida no sentido de integrais de Riemann indefinidas, ou seja, como $\lim\limits_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_*}\, d\omega$.

Analogamente, para $\omega_* \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Im}\,(\omega_*) < 0$, vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_*}\, d\omega \ = \ -2\pi i H(-t) e^{i\omega_* t}\ , \tag{38.125}$$

expressão esta que pode ser facilmente obtida de (38.124) tomando-se o complexo conjugado daquela (faça-o!). As relações (38.124) e (38.125) podem ser conjuntamente escritas na forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_*}\, d\omega \ = \ 2\pi i\, \mathrm{sgn}\,\big(\mathrm{Im}\,(\omega_*)\big) H\Big(\mathrm{sgn}\,\big(\mathrm{Im}\,(\omega_*)\big)t\Big) e^{i\omega_* t}\ , \tag{38.126}$$

onde $\mathrm{sgn}\,\big(\mathrm{Im}\,(\omega_*)\big)$ é o sinal de $\mathrm{Im}\,(\omega_*)$.

A relação (38.124) pode ser obtida com uso do chamado "método dos resíduos", da teoria das funções de variável complexa, mas seguiremos aqui um procedimento diferente. Considere-se a função $f(t) := H(t)e^{i\omega_* t}$, $t \in \mathbb{R}$. É elementar constatar que, devido ao fato de f anular-se na semirreta real negativa (decorrência do fator H na definição de f) e decair exponencialmente para $t \to \infty$ (decorrência de ter-se $\mathrm{Im}\,(\omega_*) > 0$), vale que $f \in L^1(\mathbb{R},\ dx)$ e que $f \in L^2(\mathbb{R},\ dx)$, ou seja, $\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(t)\big| dt$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(t)\big|^2 dt$ são ambas finitas. Consequentemente, a transformada de Fourier de f, que denotamos por $\hat{f}(\omega) \equiv \mathcal{F}[f](\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, é dada por

$$\hat{f}(\omega) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{i\omega_* t} e^{-i\omega t}\ dt \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_*)t}\ dt \ = \ \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega - \omega_*}\ . \tag{38.127}$$

Verifique! Por ser a transformada de Fourier de uma função em $L^2(\mathbb{R},\ dx)$, $\hat{f}$ é igualmente uma função de $L^2(\mathbb{R},\ dx)$, mas não necessariamente de $L^1(\mathbb{R},\ dx)$.

E. 38.32 *Exercício*. Constate explicitamente que para a função $\hat{f}$ dada em (38.127) tem-se $\int_{-\infty}^{\infty}\big|\hat{f}(\omega)\big|^2 d\omega < \infty$, mas que $\int_{-\infty}^{\infty}\big|\hat{f}(\omega)\big|d\omega$ diverge. Sugestão: use o fato que, escrevendo-se $\omega_* = \alpha_* + i\beta_*$, com $\alpha_*,\ \beta_* \in \mathbb{R}$, tem-se $|\omega - \omega_*| = \sqrt{(\omega-\alpha_*)^2 + \beta_*^2}$ e conclua que $1/\,|\omega-\omega_*|$ decai como $1/|\omega|$ para $|\omega| \to \infty$. ✠

Assim, temos que $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}\big](t) = f(t)$ (no sentido de $L^2(\mathbb{R},\ dx)$). Formalmente, essa igualdade se escreve como $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = f(t)$, ou seja,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega-\omega_*}e^{i\omega t}\,d\omega \;=\; H(t)e^{i\omega_* t}\;.$$

Essa já é a identidade desejada (38.124), mas como $\hat{f}$ não é integrável, é necessário dar um sentido mais preciso à integração do lado esquerdo. Isso pode ser feito aproximando-se $\hat{f}$ em $L^2(\mathbb{R},\ dx)$ por funções em $L^1(\mathbb{R},\ dx)\cap L^2(\mathbb{R},\ dx)$, o que pode ser feito de diversas formas.

Uma possibilidade é considerar-se as funções $F_A(\omega) = \chi_{[-A,\,A]}(\omega)\hat{f}(\omega)$, para $A>0$, onde $\chi_{[-A,\,A]}$ é a função característica do intervalo $[-A,\ A]$. É evidente que $F_A \in L^1(\mathbb{R},\ dx)\cap L^2(\mathbb{R},\ dx)$ para todo $A>0$ e é fácil ver que F_A converge na norma de $L^2(\mathbb{R},\ dx)$ à função $\hat{f}$.

E. 38.33 *Exercício*. Verifique essas afirmações. ✠

Mais adiante, à página 2084, quando tratarmos de transformadas de Fourier de distribuições temperadas regulares, vamos encontrar uma outra justificativa, de natureza distribucional, para a identidade (38.124).

Uma outra situação importante em aplicações envolve o cômputo de integrais como

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\omega^2+\beta\omega+\gamma}\,d\omega \tag{38.128}$$

com $\beta,\ \gamma \in \mathbb{C}$ satisfazendo $\beta^2 \neq 4\gamma$. Escrevemos

$$\frac{1}{\omega^2+\beta\omega+\gamma} \;=\; \frac{1}{(\omega-\omega_+)(\omega-\omega_-)} \;=\; \frac{1}{\omega_+-\omega_-}\left[\frac{1}{(\omega-\omega_+)}-\frac{1}{(\omega-\omega_-)}\right]\;,$$

onde $\omega_\pm$ são as raízes do polinômio $\omega^2+\beta\omega+\gamma$, ou seja, $\omega_\pm = \frac{1}{2}\big(-\beta \pm \sqrt{\beta^2-4\gamma}\big)$ (aqui e no que segue as raízes quadradas são tomadas no ramo principal). Inserindo isso em (38.128), teremos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2+\beta\omega+\gamma}\,d\omega \quad &= \quad \frac{1}{\omega_+-\omega_-}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_+}\,d\omega - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_-}\,d\omega\right]\\ &\overset{(38.126)}{=} \quad \frac{2\pi i}{\omega_+-\omega_-}\Big[\sigma_+H\big(\sigma_+t\big)e^{i\omega_+t}-\sigma_-H\big(\sigma_-t\big)e^{i\omega_-t}\Big]\;,\end{aligned} \tag{38.129}$$

onde $\sigma_\pm := \mathrm{sgn}\big(\mathrm{Im}\,(\omega_\pm)\big)$, o sinal da parte imaginária de $\omega_\pm$. É fácil constatar que o lado direito de (38.129) pertence a $L^1(\mathbb{R},\ dt)\cap L^2(\mathbb{R},\ dt)$.

• **Exemplos de aplicações de (38.129)**

Vamos aqui apresentar alguns usos de (38.129). A integral $J_{+,\,\epsilon}(t)$, abaixo, aparece no cômputo do chamado *propagador de Feynman* de campos escalares relativísticos e as integrais $K_{\pm,\,\epsilon}(t)$ aparecem no cômputo de funções de Green retardadas e avançadas, também no contexto de Teorias Quânticas de Campos relativísticas, ou no Eletromagnetismo.

Exemplo I. Um problema de interesse em aplicações é o cômputo da integral

$$J_{+,\,\epsilon}(t) \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\omega^2-\omega_0^2+i\epsilon}\,d\omega\;, \tag{38.130}$$

onde $\omega_0>0$ e $\epsilon>0$. Nesse caso $\beta=0$, $\gamma=-\omega_0^2+i\epsilon$ e $\omega_\pm = \pm\sqrt{\omega_0^2-i\epsilon}$. Claramente, $\mathrm{sgn}\big(\mathrm{Im}\,(\omega_\pm)\big) = \mp 1$ e teremos

$$J_{+,\,\epsilon}(t) \;=\; \frac{\pi i}{\sqrt{\omega_0^2-i\epsilon}}\left[-H(-t)e^{i\sqrt{\omega_0^2-i\epsilon}\,t}-H(t)e^{-i\sqrt{\omega_0^2-i\epsilon}\,t}\right]\;.$$

Analogamente, é fácil ver que

$$J_{-,\epsilon}(t) \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2-\omega_0^2-i\epsilon}\,d\omega \;=\; \frac{\pi i}{\sqrt{\omega_0^2+i\epsilon}}\Big[H(t)e^{i\sqrt{\omega_0^2+i\epsilon}t}+H(-t)e^{-i\sqrt{\omega_0^2+i\epsilon}t}\Big]\;.$$

E. 38.34 *Exercício*. Verifique! ✠

Definindo-se $J_\pm(t) := \lim_{\epsilon\to 0_+} J_{\pm,\epsilon}(t)$, teremos:

$$J_+(t) \;=\; -\frac{\pi i}{\omega_0}\Big[H(-t)e^{i\omega_0 t}+H(t)e^{-i\omega_0 t}\Big] \qquad \text{e} \qquad J_-(t) \;=\; \frac{\pi i}{\omega_0}\Big[H(t)e^{i\omega_0 t}+H(-t)e^{-i\omega_0 t}\Big]\;. \tag{38.131}$$

Exemplo II. Outro problema de interesse em aplicações é o cômputo da integral

$$K_{+,\epsilon}(t) \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega+i\epsilon)^2-\omega_0^2}\,d\omega\;, \tag{38.132}$$

onde $\omega_0>0$ e $\epsilon>0$. Nesse caso $\beta=2i\epsilon$ e $\gamma=-\omega_0^2-\epsilon^2$. Aqui $\omega_\pm=\pm\omega_0-i\epsilon$. Claramente, $\operatorname{sgn}\big(\operatorname{Im}(\omega_\pm)\big)=-1$ e, portanto, segue de (38.129) que

$$K_{+,\epsilon}(t) \;:=\; \frac{2\pi}{\omega_0}H(-t)\operatorname{sen}\big(\omega_0 t\big)e^{\epsilon t}\;. \tag{38.133}$$

Verifique! De forma totalmente análoga, demonstra-se que

$$K_{-,\epsilon}(t) \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega-i\epsilon)^2-\omega_0^2}\,d\omega \;=\; -\frac{2\pi}{\omega_0}H(t)\operatorname{sen}\big(\omega_0 t\big)e^{-\epsilon t}\;. \tag{38.134}$$

Verifique!

De particular interesse são os limites $K_\pm(t) := \lim_{\epsilon\to 0_+} K_{\pm,\epsilon}(t)$. Teremos:

$$K_+(t) \;=\; \frac{2\pi}{\omega_0}H(-t)\operatorname{sen}\big(\omega_0 t\big) \qquad \text{e} \qquad K_-(t) \;=\; -\frac{2\pi}{\omega_0}H(t)\operatorname{sen}\big(\omega_0 t\big)\;. \tag{38.135}$$

38.2.2.2 A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n,\,dx)$ e suas Propriedades Espectrais

• **A transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n,\,dx)$. Representação espectral**

No exercício e nas considerações que seguem estabelecemos que o espectro da transformada de Fourier no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n,\,dx)$ é composto pelas raízes quárticas da unidade: $\sigma(\mathcal{F})=\{1,\,-i,\,-1,\,i\}$ (vide também Teorema 40.15, página 2226 e comentários que se lhe seguem). Em seguida, exibimos uma base ortonormal completa de autofunções em $L^2(\mathbb{R},\,dx)$: as funções de Hermite, introduzidas na Seção 16.2.3.1, página 895. Esse exercício é melhor apreciado pelo leitor familiarizado com o Teorema Espectral, quer na versão para matrizes (Teorema 10.7, página 539), quer na versão para operadores limitados em espaços de Hilbert (vide Teorema 40.46, página 2330, para o caso de operadores autoadjuntos).

E. 38.35 *Exercício*. Seja $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Usando o fato que $\mathcal{F}^4=\mathbb{1}$ (vide Teorema 38.3, página 2036), mostre que as funções g_a, $a\in\mathbb{Z}$, definidas por

$$g_a \;:=\; \sum_{j=0}^{3} i^{(j+1)a}\,\mathcal{F}^j[f] \;=\; i^a f+(-1)^a\mathcal{F}[f]+(-i)^a\mathcal{F}^2[f]+\mathcal{F}^3[f]$$

satisfazem $\mathcal{F}[g_a]=(-i)^a g_a$ para todo $a\in\mathbb{Z}$ (em verdade, como $i^4=1$, só os casos $a=0,\,1,\,2,\,3$ são independentes). Mostre também que

$$f \;=\; \frac{1}{4}\sum_{a=0}^{3}(-i)^a g_a \;=\; \frac{1}{4}\Big(g_0-ig_1-g_2+ig_3\Big)\;.$$

Isso prova que toda função de Schwartz pode ser escrita como combinação linear de quatro funções de Schwartz, as quais são autofunçonas da transformada de Fourier com autovalores $(-i)^a$ com $a=0,\,1,\,2,\,3$. Essa é uma versão do chamado *Teorema Espectral* para as transformadas de Fourier em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Mostre, usando as expressões acima, que

$$\mathcal{F} \;=\; \sum_{a=0}^{3}(-i)^a\mathcal{E}_a \;, \qquad \text{onde} \qquad \mathcal{E}_a \;:=\; \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^{(j+1)a}\,\mathcal{F}^{j+1} \;,$$

$a = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. Prove que

$$\sum_{a=0}^{3}\mathcal{E}_a \;=\; \mathbb{1} \qquad \text{e que} \qquad \mathcal{E}_a\mathcal{E}_b \;=\; \delta_{a,\,b}\mathcal{E}_a$$

para todos $a,\ b = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, e conclua disso que os $\mathcal{E}_a$'s são os projetores espectrais de $\mathcal{F}$.

É de se observar que as propriedades e relações estabelecidas acima valem não apenas para a transformada de Fourier $\mathcal{F}$ agindo em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, mas também para sua extensão agindo em $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$. Justifique! ✠

• A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ e as funções de Hermite

Como dissemos acima, as chamadas *funções de Hermite* foram introduzidas na Seção 16.2.3.1, página 895, e são definidas por $h_m(x) := c_m H_m(x)e^{-x^2/2}$, com $x \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}_0$, onde c_m é dado em (38.106) e H_m são os *polinômios de Hermite*. Em (16.117) provamos que podemos expressar cada h_n, $n \in \mathbb{N}_0$, na forma

$$h_n(x) \;=\; c_n\left(x - \frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2} \;, \tag{38.136}$$

com $x \in \mathbb{R}$. Como $h_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, e usando os operadores P e Q, podemos escrever (38.136) na forma

$$h_n \;=\; c_n\Big(Q - iP\Big)^n h_0$$

com $h_0(x) \equiv e^{-x^2/2}$. É claro por essa expressão, com uso de (38.44), que

$$\mathcal{F}[h_n] \;=\; c_n\Big(-P - iQ\Big)^n\mathcal{F}[h_0] \;=\; (-i)^n c_n\Big(Q - iP\Big)^n h_0 \;,$$

onde usamos o fato já provado que $\mathcal{F}[h_0] = h_0$ (Proposição 38.8, página 2031). Portanto, provamos que

$$\mathcal{F}[h_n] \;=\; (-i)^n h_n \;, \tag{38.137}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e com isso estabelecemos que cada função de Hermite h_n é autofunção da transformada de Fourier com autovalor $(-i)^n$. De acordo com (16.111), página 896, essas funções satisfazem $\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)h_m(x)\ dx = \delta_{n,m}$ para todos $n,\ m \in \mathbb{N}_0$. Na Seção 17.2, página 938, provamos também que essas funções formam uma base ortonormal completa no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R},\ dx)$.

Nota. A equação (38.137) não deve surpreender o leitor familiarizado com a Mecânica Quântica pois, devido a (38.44), é fácil ver que $\mathcal{F}$ comuta com o "operador Hamiltoniano" do problema do oscilador harmônico: $H = \frac{1}{2}\big(P^2 + Q^2\big)$. Vide Exercício E. 38.22, página 2028. Sendo as funções de Hermite h_n autofunções de H, elas devem ser também autofunções de $\mathcal{F}$. ♣

As observações acima permitem-nos exprimir a transformada de Fourier sobre elementos de $L^2(\mathbb{R},\ dx)$ da seguinte forma. Seja $\psi = \sum_{n=0}^{\infty}\langle h_n,\ \psi\rangle_{\mathbb{C}}\, h_n$ a decomposição de $\psi \in L^2(\mathbb{R},\ dx)$ na base ortonormal completa composta pelas funções de Hermite, com $\langle f,\ g\rangle_{\mathbb{C}} := \int_{\mathbb{R}}\overline{f(x)}g(x)dx$ sendo o produto escalar usual em $L^2(\mathbb{R},\ dx)$. Obtemos, então, por (38.137),

$$\mathcal{F}\psi \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\langle h_n,\ \psi\rangle_{\mathbb{C}}\, h_n \;=\; \sum_{a=0}^{3}(-i)^a\sum_{n=0}^{\infty}\langle h_{4n+a},\ \psi\rangle_{\mathbb{C}}\, h_{4n+a} \;, \tag{38.138}$$

onde usamos o fato que as funções de Hermite h_{4n+k} têm autovalores $(-i)^k$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e todo $k \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$. A convergência das séries acima se dá no sentido da norma de $L^2(\mathbb{R},\ dx)$. A relação (38.138) permite exprimir a transformada de Fourier de uma função ψ arbitrária de $L^2(\mathbb{R},\ dx)$ e é válida mesmo quando a integral (38.107), página 2041, não está definida.

Essa abordagem da teoria das transformadas de Fourier no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R},\ dx)$ fazendo uso das funções de Hermite é empregada no estudo de *séries temporais* e foi introduzida por Wiener[26] (vide, *e.g.*, [541]).

[26] Norbert Wiener (1894–1964).

Vemos do exposto acima que os projetores espectrais $\mathcal{E}_a$, $a = 0, \ldots, 3$, de $\mathcal{F}$ são dados, na notação de Dirac[27], por

$$\mathcal{E}_a \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \big|h_{4n+a}\big\rangle\big\langle h_{4n+a}\big|$$

e que podemos escrever

$$\mathcal{F} \;=\; \sum_{a=0}^{3}(-i)^a\mathcal{E}_a \;=\; \sum_{a=0}^{3}(-i)^a\sum_{n=0}^{\infty} \big|h_{4n+a}\big\rangle\big\langle h_{4n+a}\big| \;.$$

Essa á a *representação espectral da transformada de Fourier*. Com a notação de Dirac podemos igualmente escrever

$$\mathcal{F} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\big|h_n\big\rangle\big\langle h_n\big|$$

que é por vezes denominada *representação de Wiener da transformada de Fourier*.

Com a posse dessas expressões, abrem-se diversas possibilidades, como por exemplo, a de se definir potências arbitrárias de transformadas de Fourier (também denominadas *transformadas de Fourier fracionárias*), dadas para $\gamma \in \mathbb{C}$ por

$$\mathcal{F}^\gamma \;:=\; \sum_{a=0}^{3} e^{-i\frac{\pi a\gamma}{2}}\mathcal{E}_a \;=\; \sum_{a=0}^{3} e^{-i\frac{\pi a\gamma}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} \big|h_{4n+a}\big\rangle\big\langle h_{4n+a}\big| \;.$$

* * *

E. 38.36 *Exercício*. Considere-se a função de Schwartz dada por

$$h(x) \;=\; \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/4}\frac{1}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x\right)} \;.$$

Mostre que essa função tem norma 1 no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R},\, dx)$, ou seja, mostre que

$$\big\langle h,\, h\big\rangle_{L^2(\mathbb{R},\, dx)} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} h(x)^2\, dx \;=\; 1 \;.$$

Sugestão: use a expressão (38.297) do Exercício dirigido E. 38.67, página 2111, e tome o limite $y \to 0$. Não esqueça o fator $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ da transformada de Fourier!

No Exercício dirigido E. 38.66, página 2110, demonstramos que a função h tem a si mesmo como transformada de Fourier: $\mathcal{F}h = h$. Conclua disso que h é um elemento do fecho do subespaço de $L^2(\mathbb{R},\, dx)$ gerado pelas funções de Hermite cuja ordem é um múltiplo de 4, ou seja, $\{h_{4n},\, n \in \mathbb{N}_0\}$.

Isso implica que a projeção de h sobre as demais funções de Hermite é nula. Assim, vale $\big\langle h,\, h_k\big\rangle_{L^2(\mathbb{R},\, dx)} = 0$ para todo k ímpar, o que implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x\right)}H_k(x)e^{-x^2/2}\, dx \;=\; 0$$

para todo k ímpar (o que é trivial, pois h é uma função par mas h_k é uma função ímpar para todo k ímpar) mas vale também que $\big\langle h,\, h_{2+4n}\big\rangle_{L^2(\mathbb{R},\, dx)} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, o que implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x\right)}H_{2+4n}(x)e^{-x^2/2}\, dx \;=\; 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$, uma relação que, aparentemente, não se deixa demonstrar facilmente por meios diretos!

Segue das considerações acima que podemos escrever

$$\left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/4}\frac{1}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x\right)} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\big\langle h_{4n},\, h\big\rangle_{L^2(\mathbb{R},\, dx)}\, h_{4n}(x) \;,$$

como a expansão de h na base ortonormal completa definida pelas funções de Hermite em $L^2(\mathbb{R},\, dx)$. Obtenha de forma explícita os coeficientes

$$\big\langle h_{4n},\, h\big\rangle_{L^2(\mathbb{R},\, dx)} \;=\; \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/4} c_{4n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x\right)}H_{4n}(x)e^{-x^2/2}\, dx$$

como função de n (obs.: isso não é uma tarefa simples!). Os coeficientes c_m são os dados em (38.106). ✠

[27] Nessa notação $|\psi\rangle\langle\psi|$ denota o projetor ortonormal sobre um vetor normalizado $\psi \in L^2(\mathbb{R},\, dx)$.

E. 38.37 *Exercício*. No Exercício dirigido E. 38.66, página 2110, demonstramos que a função do espaço de Schwartz

$$h(x) \;=\; \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/4} \frac{1}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x\right)}$$

tem a si mesmo como transformada de Fourier: $\mathcal{F}h = h$. Mostre que as funções

$$r_n(x) \;:=\; \Big(Q - iP\Big)^n h(x) \;=\; \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/4} \left(x - \frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x\right)}\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

e

$$s_n(x) \;:=\; \Big(Q + iP\Big)^n h(x) \;=\; \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/4} \left(x + \frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x\right)}\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

satisfazem

$$\mathcal{F}r_n \;=\; (-i)^n r_n \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}s_n \;=\; i^n s_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ ✠

38.2.3 Transformadas de Fourier: Tópicos Suplementares

Esta seção trata de alguns temas especiais envolvendo transformadas de Fourier. Nem todo o material dela será utilizado no presente capítulo (ainda que seja útil alhures) e seu estudo possivelmente pode ser dispensado em uma primeira leitura.

38.2.3.1 A Fórmula de Soma de Poisson

Vamos aqui apresentar uma interessante conexão entre séries e transformadas de Fourier e alguns de seus usos. Trata-se de uma relação notável e de grande utilidade denominada *fórmula de soma de Poisson*[28].

Proposição 38.13 (Fórmula de Soma de Poisson) *Para cada $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ vale a identidade*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(x+n) \;=\; \sqrt{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[g]\big(2\pi m\big) e^{i2\pi m x} \tag{38.139}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, vale a identidade

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) \;=\; \sqrt{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[g]\big(2\pi m\big)\,. \tag{38.140}$$

Ambas as expressões (38.139) e (38.140) são denominadas fórmula de soma de Poisson. □

As hipóteses sobre a função g podem ser ainda mais enfraquecidas. Vide Exercício E. 38.38, logo adiante.

Prova da Proposição 38.13. Em primeiro lugar, observemos que, devido ao rápido decaimento de g, a série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(x+n)$ converge absolutamente e uniformemente em compactos e, portanto, define uma função contínua em $\mathbb{R}$, que denotaremos por G:

$$G(x) \;:=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(x+n)\,.$$

É evidente pela definição que G é uma função periódica e de período 1. Paralelamente, como $\mathcal{F}[g] \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, podemos afirmar também que a série $\sqrt{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[g](2\pi m)e^{i2\pi m x}$ converge absolutamente e uniformemente em compactos e, portanto, define uma função contínua em $\mathbb{R}$, que denotaremos por H:

$$H(x) \;:=\; \sqrt{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[g]\big(2\pi m\big) e^{i2\pi m x}\,.$$

[28] Siméon Denis Poisson (1781–1840).

É também evidente que H é uma função periódica e de período 1, pois as funções $e^{i2\pi mx}$ o são.

Para provarmos, como desejamos, que $G = H$, é suficiente, pelo Corolário 37.4, página 1973, provarmos que os coeficientes de Fourier de G coincidem com os de H, que são obviamente dados por $\sqrt{2\pi}\mathcal{F}[g](2\pi m)$ (vide (37.59), página 1968). De acordo com (37.59), o m-ésimo coeficiente de Fourier de G é dado por

$$\begin{aligned}
G_m &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi my}\, G(y)\, dy \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi my} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(y+n) \right) dy \\
&\overset{(37.2)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi my}\, g(y+n)\, dy \\
&\overset{p=y+n}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n-1/2}^{n+1/2} e^{-i2\pi m(p-n)}\, g(p)\, dp \\
&\overset{e^{i2\pi mn}=1}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n-1/2}^{n+1/2} e^{-i2\pi mp}\, g(p)\, dp \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi mp}\, g(p)\, dp \quad = \quad \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[g]\big(2\pi m\big) \ ,
\end{aligned}$$

completando a prova. ■

E. 38.38 *Exercício*. Mostre que as identidades (38.139) e (38.140) valem também para funções g que sejam diferenciáveis e satisfaçam a seguinte propriedade: existe $K > 0$ tal que $|g(x)| + |g'(x)| \leq \frac{K}{1+x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. *Sugestão:* constate que todas as manipulações da prova da Proposição 38.13 são válidas sob a hipótese acima. Vide [158]. ✠

• Alguns usos da fórmula de soma de Poisson

E. 38.39 *Exercício*. Usando a fórmula de soma de Poisson (38.140) e o resultado do Exercício E. 38.19, itens **b** e **c**, página 2024, prove que para $a > 0$ vale

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + (2\pi n)^2} \ = \ \frac{1}{2a\tanh(a/2)} \ . \tag{38.141}$$

Compare (38.141) com (37.127). ✠

O resultado do Exercício E. 38.39 pode ainda ser generalizado.

E. 38.40 *Exercício*. Usando a fórmula de soma de Poisson (38.139) e o resultado do Exercício E. 38.19, itens **b** e **c**, página 2024, prove que para $a > 0$ vale

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi imx}}{a^2 + (2\pi m)^2} \ = \ h_a(x) \ , \tag{38.142}$$

onde h_a é a função contínua e periódica de período 1 que no intervalo $[0,\ 1)$ vale

$$h_a(x) \ = \ \frac{1}{2a} \frac{\cosh\big(a\,(x - \frac{1}{2})\big)}{\operatorname{senh}\big(\frac{a}{2}\big)} \ . \tag{38.143}$$

Sugestão: A somatória $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-a|m+x|}$ pode ser calculada da seguinte forma. Trata-se claramente de uma função periódica de período

1. Podemos, portanto, restringir x ao intervalo $[0,\ 1)$ e escrever

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-a|m+x|} &= \sum_{m=-\infty}^{-1} e^{-a|m+x|} + e^{-a|x|} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-a|m+x|} &= \sum_{m=-\infty}^{-1} e^{a(m+x)} + e^{-ax} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-a(m+x)} \\ &= e^{-ax} + \left(e^{ax} + e^{-ax}\right) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-am} \\ &= e^{-ax} + \left(e^{ax} + e^{-ax}\right) \frac{e^{-a}}{1-e^{-a}} \\ &= \frac{\cosh\left(a\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{a}{2}\right)} \ . \end{aligned} \tag{38.144}$$

Na segunda igualdade em (38.144) usamos que para $0 \leq x < 1$ vale $|m+x| = -(m+x)$ sempre que $m \leq -1$, que vale $|m+x| = m+x$ sempre que $m \geq 1$ e que $e^{-a|x|} = e^{-ax}$. A última igualdade em (38.144) envolve apenas manipulações simples. Complete todos os detalhes. ✠

E. 38.41 *Exercício*. A identidade (38.142)–(38.143) pode também ser obtida computando-se a série de Fourier da função h lá definida. Faça-o! (Exercício E. 37.24, página 1997). ✠

38.2.3.2 Usos da Fórmula de Soma de Poisson. A Função θ de Jacobi

E. 38.42 *Exercício*. A chamada *Função θ de Jacobi*[29], denotada por θ, é definida por

$$\theta(z,\ t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n z - \pi n^2 t} \ , \tag{38.145}$$

com $z \in \mathbb{C}$ e $t \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(t) > 0$.

a. Usando a fórmula de soma de Poisson (38.140) e também (38.72), mostre que θ satisfaz a seguinte relação:

$$\theta(z,\ t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{t}(z-n)^2} \ . \tag{38.146}$$

Constate pela definição da função θ que

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{t}(z-n)^2} = \frac{e^{-\frac{\pi z^2}{t}}}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{-iz}{t},\ \frac{1}{t}\right)$$

e conclua de (38.146) que vale a identidade

$$\theta(z,\ t) = \frac{e^{-\frac{\pi z^2}{t}}}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{-iz}{t},\ \frac{1}{t}\right) \ , \tag{38.147}$$

para $z \in \mathbb{C}$ e $t \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(t) > 0$. Essa expressão é denominada *identidade funcional da função θ de Jacobi*, ou *relação funcional da função θ de Jacobi*.

b. Observe que para $z \in \mathbb{C}$ e $t \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(t) > 0$ podemos escrever

$$\theta(z,\ t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \cos\left(2\pi n z\right) \ . \tag{38.148}$$

Disso vê-se facilmente que $\theta(z+1,\ t) = \theta(z,\ t)$ e que $\theta(-z,\ t) = \theta(z,\ t)$. É também evidente por (38.148) que $\theta(z,\ t)$ é real se $z \in \mathbb{R}$ e $t > 0$. Prove que para todo $z \in \mathbb{C}$ vale

$$\lim_{t\to\infty} \theta(z,\ t) = 1 \ , \qquad (t \in \mathbb{R}) \ .$$

De (38.145) ou de (38.148) vê-se que, para cada $t \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(t) > 0$ fixo, a função $\theta(z,\ t)$ é uma função inteira de z, pois as séries de (38.145) ou de (38.148) são séries de funções analíticas que convergem absoluta e uniformemente em compactos.

[29] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851).

c. Consideremos agora $z \in \mathbb{R}$ e $t > 0$. Mostre que

$$\int_{-1/2}^{1/2} \theta(z,\ t)\, dz \ = \ 1 \tag{38.149}$$

para todo $t > 0$. Usando a periodicidade de $\theta(z,\ t)$ com relação a z e o fato que $\theta(z,\ t) = \theta(-z,\ t)$, mostre que para todo δ com $0 < \delta < 1/2$ vale

$$\int_{-1/2}^{-\delta} \theta(z,\ t)\, dz + \int_{\delta}^{1/2} \theta(z,\ t)\, dz \ = \ \int_{\delta}^{1-\delta} \theta(z,\ t)\, dz \ ,$$

e usando (38.146), mostre que

$$\lim_{t\to 0} \int_{\delta}^{1-\delta} \theta(z,\ t)\, dz \ = \ 0 \ . \tag{38.150}$$

Conclua disso que para $t \to 0$ a função $\theta(z,\ t)$ comporta-se como uma sequência delta de Dirac de período 1 centrada em $z = 0$.

A Função θ de Jacobi desempenha um papel em diversas áreas da Matemática (Teoria de Números, Teoria de Grupos, teoria das funções elípticas etc.) e da Física (teoria da difusão do calor, Mecânica Quântica, Teoria Quântica de Campos etc.). Há uma extensa literatura sobre a Função θ de Jacobi. Mais propriedades elementares e aplicações dessa função podem ser estudadas, entre outros, em [539], [109] e [213]. No Exercício E. 43.46, página 2525, exibimos um problema físico, o problema de difusão de calor no círculo, no qual a Função θ de Jacobi surge naturalmente. ✠

Notas. Frequentemente denota-se $\theta(0,\ t)$ por $\theta(t)$, $t \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}\,(t) > 0$. Assim, tem-se,

$$\theta(t) \ := \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \qquad \text{e vale} \qquad \theta(t) \ = \ \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right) \ = \ \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{t}} \ , \tag{38.151}$$

pela identidade funcional (38.147). Alguns autores definem a Função θ de Jacobi por

$$\vartheta(z,\ \tau) \ := \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n z + i\pi n^2 \tau} \ , \tag{38.152}$$

com $z,\ \tau \in \mathbb{C}$ mas $\mathrm{Im}(\tau) > 0$. Tem-se, portanto, $\vartheta(z,\ \tau) = \theta(z,\ -i\tau)$ e a relação (38.146) fica

$$\vartheta(z,\ \tau) \ = \ \frac{e^{-i\frac{\pi z^2}{\tau}}}{\sqrt{-i\tau}}\vartheta\left(\frac{z}{\tau},\ -\frac{1}{\tau}\right) \ . \tag{38.153}$$

Alguns textos denotam $\vartheta(z,\ \tau)$ por $\vartheta_{00}(z,\ \tau)$, por $\theta_{00}(z,\ \tau)$ ou ainda por $\theta_3(z,\ \tau)$. ♣

38.2.3.3 Transformadas de Fourier e Médias Angulares

Um tema especial relevante é o da transformada de Fourier de funções definidas em $\mathbb{R}^n$ que sejam invariantes por rotações. Como veremos no que segue, surge no tratamento desse tema uma insuspeita conexão com a teoria das funções de Bessel, introduzidas na Seção 15.2.3, página 828, sendo suas propriedades básicas desenvolvidas na Seção 16.2.7, página 906, e na Seção 17.4, página 942.

• **Transformadas de Fourier de funções radialmente simétricas**

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é dita ser *radialmente simétrica*, ou *esfericamente simétrica*, se para todo $\mathsf{R} \in \mathrm{O}(n)$ (o grupo ortogonal em $\mathbb{R}^n$. Vide Seção 21.3.3.1, página 1114) valer $f(\mathsf{R}x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma função radialmente simétrica, é fácil ver que sua transformada de Fourier também o é. De fato, sabemos que para todo $\mathsf{R} \in \mathrm{O}(n)$ vale $(\mathsf{R}p)\cdot x = p \cdot (\mathsf{R}^T x)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\mathsf{R}p) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(\mathsf{R}p)\cdot x}\, d^n x \quad &= \quad \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ip\cdot(\mathsf{R}^T x)}\, d^n x \\
&\overset{y:=\mathsf{R}^T x}{=} \quad \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathsf{R}y) e^{-ip\cdot y}\, d^n(\mathsf{R}y) \\
&= \quad \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ip\cdot y}\, d^n y \ = \ \mathcal{F}[f](p) \ ,
\end{aligned}$$

provando que $\mathcal{F}[f]$ é radialmente simétrica. Na penúltima igualdade usamos o fato que f é radialmente simétrica e o fato que a medida $d^n x$ é invariante por $\mathrm{O}(n)$.

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é uma função radialmente simétrica, então pode ser escrita na forma[30] $f(x) = f\big(\|x\|\big)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Em diversas situações temos interesse em calcular a transformada de Fourier de uma função radialmente simétrica f em termos apenas de sua dependência radial. Esse cálculo é dependente da dimensão n e exemplificaremos isso no que segue nos casos $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$. Em seguida trataremos do caso de $n \in \mathbb{N}$ geral.

Caso $n = 1$. Se $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ é radialmente simétrica, vale $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois o grupo $O(1)$ consiste nos elementos ± 1. Assim, uma função radialmente simétrica em uma dimensão é uma função par, e nesse caso, vale

$$\mathcal{F}[f](p) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos\big(|p|x\big)\, dx \;\overset{(15.122)}{=}\; \sqrt{|p|} \int_0^\infty f(x) J_{-1/2}\big(|p|x\big)\, \sqrt{x}\, dx \;,$$

como facilmente se constata, onde $J_{-1/2}$ é a função de Bessel de ordem $-1/2$ (vide Seção 15.2.3, página 828 e Seção 16.2.7, página 906). A razão de expressarmos $\mathcal{F}[f](p)$ em termos de uma função de Bessel ficará mais clara com os casos que seguem e com o Exercício E. 38.43.

Caso $n = 2$. Seja $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ uma função radialmente simétrica, ou seja, tal que $f(x) = f\big(\|x\|\big)$. Sua transformada de Fourier $\mathcal{F}[f]$ é dada por

$$\mathcal{F}[f](p) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} f\big(\|x\|\big) e^{-ip\cdot x}\, d^2x \;.$$

Para $p \neq 0$ a integral do lado direito pode ser mais facilmente calculada em coordenadas polares $(\rho,\ \varphi)$, adotando-se o eixo horizontal na direção de $p \in \mathbb{R}^2$, com o que escrevemos $p \cdot x = \|p\|\|x\| \cos\varphi = \|p\|\rho\cos\varphi$ e obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](p) \quad &= \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho) e^{-i\|p\|\rho\cos\varphi}\, \rho\, d\rho d\varphi \\
&= \quad \int_0^\infty f(\rho) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\|p\|\rho\cos\varphi}\, d\varphi \right) \rho\, d\rho \\
&\overset{(16.190)}{=} \quad \int_0^\infty f(\rho) J_0\big(\|p\|\rho\big) \rho\, d\rho \;,
\end{aligned}$$

onde J_0 é a função de Bessel de ordem 0.

Resumindo, para $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ radialmente simétrica com $f(x) = f\big(\|x\|\big)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$, vale

$$\mathcal{F}[f](p) \;=\; \int_0^\infty f(\rho)\, J_0\big(\|p\|\rho\big)\, \rho\, d\rho \;. \tag{38.154}$$

Caso $n = 3$. Seja $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ uma função radialmente simétrica, ou seja, tal que $f(x) = f\big(\|x\|\big)$. Sua transformada de Fourier $\mathcal{F}[f]$ é dada por

$$\mathcal{F}[f](p) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} f\big(\|x\|\big) e^{-ip\cdot x}\, d^3x \;.$$

Para $p \neq 0$ a integral do lado direito pode ser mais facilmente calculada em coordenadas esféricas $(r,\ \theta,\ \phi)$, adotando-se o eixo "z" na direção de $p \in \mathbb{R}^3$, com o que escrevemos $p \cdot x = \|p\|\|x\| \cos\theta = \|p\| r \cos\theta$ e obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](p) \quad &= \quad \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r) e^{-i\|p\| r\cos\theta}\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr d\theta d\varphi \\
&= \quad \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty f(r) \left(\int_0^\pi e^{-i\|p\| r\cos\theta}\, \operatorname{sen}\theta d\theta \right) r^2 dr \\
&\overset{u\cos\theta}{=} \quad \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty f(r) \left(\int_{-1}^{1} e^{-i\|p\| r u}\, du \right) r^2\, dr \\
&= \quad \frac{2}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty f(r) \frac{\operatorname{sen}\big(\|p\| r\big)}{\|p\| r}\, r^2\, dr \;.
\end{aligned}$$

[30] Com um certo abuso, mas tencionando evitar uma sobrecarga na notação, utilizamos a mesma letra f para designar as funções $f(x)$ e $f\big(\|x\|\big)$, ainda que a primeira seja, estritamente falando, uma função de n variáveis e a segunda de uma variável.

Resumindo, para $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ radialmente simétrica com $f(x) = f\big(\|x\|\big)$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$, vale

$$\mathcal{F}[f](p) \;=\; \int_0^\infty f(r)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen}\big(\|p\|r\big)}{\|p\|r}\,r^2\right)dr \;=\; \int_0^\infty f(r)\left(\frac{J_{1/2}\big(\|p\|r\big)}{\sqrt{\|p\|r}}\right)r^2\,dr\;, \tag{38.155}$$

com $J_{1/2}$ sendo a função de Bessel de ordem $1/2$.

O estudante é estimulado a comparar (38.154) a (38.155), observando as semelhanças entre ambas. O exercício dirigido que segue obtém a expressão geral da transformada de Fourier de uma função radial em n dimensões, $n \geq 2$.

E. 38.43 *Exercício dirigido.* Prove que em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, a transformada de Fourier de uma função radialmente simétrica $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$\mathcal{F}[f](p) \;=\; \frac{1}{\|p\|^{\frac{n}{2}-1}}\int_0^\infty f(r)\;J_{\frac{n}{2}-1}\big(\|p\|r\big)\;r^{n/2}\;dr\;, \tag{38.156}$$

$p \in \mathbb{R}^n$, onde J_k é a função de Bessel de ordem k.

Trataremos especialmente do caso em que $n > 3$, pois os dois casos anteriores já foram discutidos. Comecemos escrevendo a transformada de Fourier $\mathcal{F}[f](p) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f\big(\|x\|\big)e^{-ip\cdot x}d^nx$ em termos de coordenadas esféricas n-dimensionais, as quais foram introduzidas na Seção 4.4, página 311. Estas são: uma coordenada radial $r \in [0,\ \infty)$ e $n-1$ coordenadas angulares $\varphi,\ \theta_3,\ \ldots,\theta_n$, onde $\varphi \in (-\pi,\ \pi]$ e $\theta_3,\ \ldots,\theta_n \in [0,\ \pi]$. Vide discussão da Seção 4.4, página 311. O elemento de volume de integração é $r^{n-1}\big(\operatorname{sen}\theta_n\big)^{n-2}\big(\operatorname{sen}\theta_{n-1}\big)^{n-3}\cdots\big(\operatorname{sen}\theta_3\big)drd\varphi d\theta_1\cdots d\theta_n$. Vide (4.45), página 314. Como fizemos no caso $n = 3$, escolhemos o eixo principal na direção do vetor p (que assumimos ser não nulo), de sorte que θ_n é o ângulo entre x e o eixo principal positivo (no caso $n = 3$, acima. esse papel foi desempenhado pelo ângulo θ). Com isso, $p\cdot x = \|p\|\,\|x\|\cos\theta_n =$. Sabendo que $r \equiv \|x\|$ e $f\big(\|x\|\big)e^{-ip\cdot x} = f(r)e^{-i\|p\|r\cos\theta_n}$ depende apenas das variáveis r e θ_n, obtenha

$$\mathcal{F}[f](p) \;=\; F_n\int_0^\infty\left(\int_0^\pi e^{-i\|p\|r\cos\theta_n}\big(\operatorname{sen}\theta_n\big)^{n-2}\,d\theta_n\right)f(r)r^{n-1}\;dr\;, \tag{38.157}$$

onde

$$F_n \;:=\; (2\pi)^{-n/2+1}\left(\int_0^\pi\big(\operatorname{sen}\theta_{n-1}\big)^{n-3}d\theta_{n-2}\right)\left(\int_0^\pi\big(\operatorname{sen}\theta_{n-2}\big)^{n-4}d\theta_{n-2}\right)\cdots\left(\int_0^\pi\big(\operatorname{sen}\theta_3\big)d\theta_3\right)\;.$$

O integrando da transformada de Fourier não depende de φ e a integração nessa variável produz o fator 2π extra observado em F_n.

Vamos prosseguir determinando primeiro a integral em θ_n em (38.157). Com a mudança de variáveis $u = \cos\theta_n$, temos

$$\int_0^\pi e^{-i\|p\|r\cos\theta_n}\big(\operatorname{sen}\theta_n\big)^{n-2}\,d\theta_n \;=\; \int_{-1}^1 e^{-i\|p\|ru}\big(1-u^2\big)^{n-2}du\;.$$

Essa última integral pode ser extraída, com as devidas identificações, de (16.203), página 915. Obtenha

$$\int_{-1}^1 e^{-i\|p\|ru}\big(1-u^2\big)^{n-2}du \;=\; \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2}{\|p\|r}\right)^{n/2-1}J_{n/2-1}\big(\|p\|r\big)\;.$$

Com isso, escreva

$$\mathcal{F}[f](p) \;=\; G_n\int_0^\infty f(r)\;\frac{J_{n/2-1}\big(\|p\|r\big)}{\big(\|p\|r\big)^{n/2-1}}\;r^{n-1}\;dr\;, \tag{38.158}$$

onde $G_n := \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{n/2-1}F_n$.

Para o cálculo de F_m e G_m, recordemos que, por (7.125), página 424, vale para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\pi\big(\operatorname{sen}\theta\big)^m d\theta \;=\; 2\frac{\sqrt{\pi}}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\;.$$

Assim, obtenha

$$G_n \;=\; \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{n/2-1}(2\pi)^{-n/2+1}\frac{\big(2\sqrt{\pi}\big)^{n-3}}{(n-3)!}\underbrace{\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}}_{=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

$$= \;\frac{1}{(n-3)!}\left[\frac{2^{n-3}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]\overset{(7.53)}{=}\;\frac{1}{(n-3)!}\Gamma(n-2)\;=\;1\;.$$

Na penúltima igualdade usamos a fórmula de duplicação da função Legendre, relação (7.53), página 402, com a identificação $z = n/2-1$. Acima, usamos também que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Assim, obtenha finalmente de (38.158)

$$\mathcal{F}[f](p) \;=\; \frac{1}{\|p\|^{n/2-1}} \int_0^\infty f(r)\; J_{n/2-1}\big(\|p\| r\big)\; r^{n/2}\; dr \;,$$

que é a prometida expressão (38.156). Constate que para $n = 2$ e $n = 3$ essa expressão coincide com as expressões previamente obtidas (38.154) e (38.155), respectivamente. ✠

• Transformadas de Fourier e médias angulares

Seja $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Como é bem sabido, podemos expressar f na forma $f(x_1, \ldots, x_n)$ como função de n coordenadas Cartesianas de $\mathbb{R}^n$ ou na forma $f(r, \Omega)$ em função de coordenadas esféricas em $\mathbb{R}^n$, onde $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ e onde Ω é um conjunto de $n-1$ coordenadas angulares que coordenatizam a superfície esférica de raio 1 em $\mathbb{R}^n$, que denotamos por $\mathbb{S}^{n-1}$. No caso $n = 2$, por exemplo, podemos adotar $\Omega = \varphi$, com $-\pi < \varphi \leq \pi$ e no caso $n = 3$ podemos adotar $\Omega = (\theta, \varphi)$, com $0 \leq \theta \leq \pi$ e $-\pi < \varphi \leq \pi$ (coordenadas esféricas). Para coordenadas esféricas em $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$, vide Seção 4.4, página 311.

Em $\mathbb{S}^{n-1}$ existe uma medida de integração invariante pela ação do grupo de rotações $\mathrm{O}(n)$, a qual denotamos por $d\Omega_{n-1}$, e que é normalizada de sorte que $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\Omega_{n-1} = |\mathbb{S}^{n-1}|$, onde $|\mathbb{S}^{n-1}|$ denota a medida de área (ou volume, como queira) de $\mathbb{S}^{n-1}$. Usando os exemplos acima, no caso $n = 2$ temos $d\Omega_1 = d\varphi$ e $|\mathbb{S}^1| = 2\pi$ e no caso $n = 3$ temos $d\Omega_2 = \mathrm{sen}\theta d\theta d\varphi$ e $|\mathbb{S}^2| = 4\pi$. A expressão geral de $d\Omega_{n-1}$ em coordenadas esféricas é dada em (4.46), página 314.

Sabemos também do Lema 4.1, página 311, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vale

$$|\mathbb{S}^{n-1}| \;=\; \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \;, \tag{38.159}$$

onde Γ é a *Função Gama de Euler* (vide Capítulo 7, página 386).

Com o uso da medida invariante $d\Omega_{n-1}$ podemos definir uma média invariante (por $\mathrm{O}(n)$) de funções de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$M[f](r) \;:=\; \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r, \Omega)\; d\Omega_{n-1} \;, \tag{38.160}$$

$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. $M[f]$ é denominada *média esférica* de f, ou *média angular* de f. É bastante claro que $M[f](r)$ pode ser interpretada como a média de f sobre a superfície da esfera de $\mathbb{R}^n$ de raio r centrada em 0.

Note-se que $M[f](r) = M[f]\big(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\big)$ e, portanto, $M[f]$ pode ser também encarada como uma função definida em $\mathbb{R}^n$.

É útil notar que a transformada de Fourier e sua inversa podem ser escritas em termos da média angular. De fato, se $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é uma função integrável, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x_1, \ldots, x_n)\, d^n x \;=\; \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(r, \Omega)\; d\Omega_{n-1}\, r^{n-1} dr \;=\; |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^\infty M[h](r)\; r^{n-1} dr \;.$$

Consequentemente, podemos escrever, para toda $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{F}[f](p) \;=\; \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty M[f e_p](r)\; r^{n-1} dr \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}^{-1}[f](p) \;=\; \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty M[f e_{-p}](r)\; r^{n-1} dr \;, \tag{38.161}$$

onde $e_p(x) \equiv e^{-ip\cdot x}$. Note-se que $e_p(x) = e_x(p)$. Acima, $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$.

Como veremos, é útil considerarmos a expressão $M[e_p]\big(\|x\|\big)$ e afirmamos que a mesma é uma função apenas do produto $\|p\|\,\|x\|$. Esse fato é evidente se observamos que

$$M[e_p]\big(\|x\|\big) \;=\; \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-ip\cdot x}\; d\Omega_{n-1}(x) \;=\; \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-i\|p\|\,\|x\|\cos\theta}\; d\Omega_{n-1}(x) \;,$$

onde escrevemos $p \cdot x = \|p\|\,\|x\| \cos\theta$ e com θ sendo o ângulo entre p e x. O ângulo θ pode ser expresso em termos das variáveis angulares $\Omega_{n-1}(x)$ de x e, com isso, vemos que $M[e_p]\big(\|x\|\big)$ depende apenas do produto $\|p\|\,\|x\|$. Tendo isso em

mente, definamos $E(\|p\|\,\|x\|)$ por

$$E\big(\|p\|\,\|x\|\big) \;:=\; \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{(2\pi)^{n/2}} M[e_p]\big(\|x\|\big)\;.$$

Para uma função H de duas variáveis $x,\ y\in\mathbb{R}^n$ podemos tomar as médias M tanto com relação à variável x quanto em relação a y. Denotaremos por $M_x[H]$ a média em relação à dependência em x e por $M_y[H]$ a média em relação à dependência em y. Para a função $e_p(x)=e^{-ip\cdot x}$ temos que

$$M_x[e_p]\big(\|x\|\big) \;=\; \frac{(2\pi)^{n/2}}{|\mathbb{S}^{n-1}|} E\big(\|p\|\,\|x\|\big) \;=\; M_p[e_x]\big(\|p\|\big)\;. \tag{38.162}$$

Note-se que se f é uma função radial, ou seja, $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)=f\big(\|x\|\big)$, teremos

$$\mathcal{F}[f](p) \;=\; \int_0^\infty f(r)\,E\big(\|p\|r\big)\,r^{n-1}dr \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}^{-1}[f](p) \;=\; \int_0^\infty f(r)\,E\big(\|p\|r\big)\,r^{n-1}dr\;.$$

Como vemos em (38.154) e (38.155), temos

$$E\big(\|p\|\,\|x\|\big) \;=\; J_0\big(\|p\|\,\|x\|\big) \quad \text{para } n=2 \quad \text{e} \quad E\big(\|p\|\,\|x\|\big) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{sen}\big(\|p\|\,\|x\|\big)}{\|p\|\,\|x\|} \;=\; \frac{J_{1/2}\big(\|p\|\,\|x\|\big)}{\sqrt{\|p\|\,\|x\|}} \quad \text{para } n=3$$

e, portanto,

$$M[e_p]\big(\|x\|\big) \;=\; J_0\big(\|p\|\,\|x\|\big) \quad \text{para } n=2 \quad \text{e} \quad M[e_p]\big(\|x\|\big) \;=\; \frac{\operatorname{sen}\big(\|p\|\,\|x\|\big)}{\|p\|\,\|x\|} \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{J_{1/2}\big(\|p\|\,\|x\|\big)}{\sqrt{\|p\|\,\|x\|}} \quad \text{para } n=3\;. \tag{38.163}$$

No caso geral ($n\in\mathbb{N},\ n>1$), vemos de (38.156) que

$$E\big(\|p\|\,\|x\|\big) \;=\; \frac{J_{n/2-1}\big(\|p\|\,\|x\|\big)}{\big(\|p\|\,\|x\|\big)^{n/2-1}} \qquad \text{e} \qquad M[e_p]\big(\|x\|\big) \;=\; 2^{n/2-1}\Gamma(n/2)\,\frac{J_{n/2-1}\big(\|p\|\,\|x\|\big)}{\big(\|p\|\,\|x\|\big)^{n/2-1}}\;. \tag{38.164}$$

E. 38.44 *Exercício*. Mostre que para toda $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ vale $M\big[\mathcal{F}[f]\big]=\mathcal{F}\big[M[f]\big]$. ✠

• Uma identidade importante

Vamos a seguir provar uma proposição (Proposição 38.14) de importância no estudo da propagação de ondas em $d=3$ dimensões espaciais e da qual faremos uso na Seção 43.4.4.1, página 2466. Antes precisamos do seguinte resultado:

Lema 38.1 *Seja $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e, para $y\in\mathbb{R}^n$ fixo, seja $M_p[e_y]\big(\|p\|\big)$. Então, a função de $p\in\mathbb{R}^n$ definida pelo produto $G(p):=g(p)M_p[e_y]\big(\|p\|\big)$ é também uma função de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.* □

Prova. Por (38.162) escrevemos

$$G(p) \;=\; g(p)M_p[e_y]\big(\|p\|\big) \;\overset{(38.162)}{=}\; g(p)M_y[e_p]\big(\|y\|\big) \;=\; g(p)\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-ip\cdot y}\,d\Omega_{n-1}(y)\;.$$

A expressão $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-ip\cdot y}\,d\Omega_{n-1}(y)$ é infinitamente diferenciável em relação às variáveis p, pois envolve a integral de uma função infinitamente diferenciável em um conjunto compacto (cf. Teorema 37.5, página 1942). Além disso, tem-se (usando a notação de multi-índices. Vide página 2010)

$$D^\beta\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-ip\cdot y}\,d\Omega_{n-1}(y) \;=\; \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Big(D_p^\beta e^{-ip\cdot y}\Big)\,d\Omega_{n-1}(y) \;=\; (-i)^{|\beta|}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} y^\beta e^{-ip\cdot y}\,d\Omega_{n-1}(y)\;,$$

onde D representa derivações em relação às variáveis p. Como $\big|(-i)^{|\beta|}\big|=1$, $|e^{-ip\cdot y}|=1$ e $|y^\beta|\le\|y\|^{|\beta|}$ (pois $|y_k|\le\|y\|$ para todo $k=1,\ \ldots,\ n$), segue que a última expressão pode ser limitada em módulo por $\|y\|^{|\beta|}\,|\mathbb{S}^{n-1}|$.

É evidente, portanto, que $G(p)$ é infinitamente diferenciável em p e, pela regra de Leibniz, tem-se (usando a notação de multi-índices)

$$D^\alpha G(p) \;=\; \sum_{\substack{\alpha_1,\,\alpha_2\\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha}} \Big(D^{\alpha_1} g(p)\Big)(-i)^{|\alpha_2|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} y^{\alpha_2} e^{-ip\cdot y}\, d\Omega_{n-1}(y)\;.$$

É elementar constatar disso e dos comentários acima que

$$|D^\alpha G(p)| \;\leq\; |\mathbb{S}^{n-1}| \sum_{\substack{\alpha_1,\,\alpha_2\\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha}} |D^{\alpha_1} g(p)|\, \|y\|^{|\alpha_2|}\;.$$

Como $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, segue que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $C^N_{|\beta|}$ tal que $|D^{\alpha_1} g(p)| \leq C^N_{|\alpha_1|}\big(1+\|p\|\big)^{-N}$, $\forall\, p \in \mathbb{R}^n$, implicando que para todo $N \in \mathbb{N}$

$$|D^\alpha G(p)| \leq |\mathbb{S}^{n-1}| \left(\sum_{\substack{\alpha_1,\,\alpha_2\\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha}} \|y\|^{|\alpha_2|} C^N_{|\alpha_1|} \right) \big(1+\|p\|\big)^{-N}\;, \qquad \forall\, p \in \mathbb{R}^n$$

provando que $G \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. ■

Proposição 38.14 *Seja $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e consideremos a expressão $\mathcal{F}^{-1}\Big[\mathcal{F}[v]M[e_y]\Big](x)$ com $x,\ y \in \mathbb{R}^n$. Então, para cada $y \in \mathbb{R}^n$ a função de x definida por $\mathcal{F}^{-1}\Big[\mathcal{F}[v]M[e_y]\Big](x)$ é um elemento de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Essa expressão depende de y apenas por meio de $\|y\|$ e (o ponto mais importante) é igual à média da função v na superfície da esfera em $\mathbb{R}^n$ de raio $\|y\|$ centrada em x:*

$$\mathcal{F}^{-1}\Big[\mathcal{F}[v]M[e_y]\Big](x) \;=\; \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} v(x-y)\, d\Omega_{n-1}(y)\;, \tag{38.165}$$

onde $d\Omega_{n-1}(y)$ é a medida de integração invariante nas variáveis angulares que descrevem $y \in \mathbb{R}^n$. □

Prova. Para cada $y \in \mathbb{R}^n$ tem-se pelo Lema 38.1, acima, que $\mathcal{F}[v]M[e_y] \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, sua transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}\Big[\mathcal{F}[v]M[e_y]\Big]$ está bem definida e é também uma função de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

De forma mais explícita, $\mathcal{F}^{-1}\Big[\mathcal{F}[v]M[e_y]\Big](x)$ é dada por

$$\mathcal{F}^{-1}\Big[\mathcal{F}[v]M[e_y]\Big](x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[v](p)\, M_p[e_y]\big(\|p\|\big)\, e^{ip\cdot x}\, d^n p$$

e, claramente, o lado direito depende de y apenas por meio da função $M[e_y]\big(\|p\|\big) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{|\mathbb{S}^{n-1}|} E\big(\|p\|\,\|y\|\big)$, a qual depende de y apenas por meio de seu módulo $\|y\|$. Assim, $\mathcal{F}^{-1}\Big[\mathcal{F}[v]M[e_y]\Big](x)$ é uma função de x e de $\|y\|$. Vamos, por isso, denotar $\mathcal{F}^{-1}\Big[\mathcal{F}[v]M[e_y]\Big](x)$ por $\mathcal{K}[v](x,\ \|y\|)$. Teremos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}[v](x,\ \|y\|) \;:=\; \mathcal{F}^{-1}\Big[\mathcal{F}[v]M[e_y]\Big](x) \quad &= \quad \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[v](p)\, M_p[e_y]\big(\|p\|\big)\, e^{ip\cdot x}\, d^n p \\
&\overset{(38.162)}{=} \quad \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[v](p)\, M_y[e_p]\big(\|y\|\big)\, e^{ip\cdot x}\, d^n p \\
&= \quad M_y\left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[v](p)\, e_p(y)\, e^{ip\cdot x}\, d^n p\right]\big(\|y\|\big) \\
&= \quad M_y\left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[v](p)\, e^{ip\cdot(x-y)}\, d^n p\right]\big(\|y\|\big)\;.
\end{aligned}$$

Como, evidentemente, $\dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}[v](p)\,e^{ip\cdot(x-y)}\,d^np = v(x-y)$, concluímos que

$$\mathcal{K}[v](x,\ \|y\|)\ =\ M_y\big[v(x-y)\big]\big(\|y\|\big)\ =\ \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} v(x-y)\,d\Omega_{n-1}(y)\ .$$

Assim, contemplando essa última expressão, vemos que $\mathcal{K}[v](x,\ \|y\|)$ é a média da função v tomada na superfície da esfera em $\mathbb{R}^n$ de raio $\|y\|$ centrada em x. ■

38.3 Distribuições e Distribuições Temperadas

• **Funcionais lineares**

Um *funcional linear* ℓ, definido em um espaço vetorial complexo V, é uma aplicação $\ell : V \to \mathbb{C}$ que satisfaz

$$\ell(\alpha u + \beta v)\ =\ \alpha\ell(u) + \beta\ell(v)$$

para todos $u,\ v \in V$ e todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$. Se V for um espaço vetorial real a definição é análoga.

O conjunto de todos os funcionais lineares de um espaço vetorial V é frequentemente dito ser o *dual* de V. É importante observar que o dual de um espaço vetorial é também um espaço vetorial. Se ℓ_1 e ℓ_2 são funcionais lineares em V então, para todos $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{C}$ a aplicação de V em $\mathbb{C}$ denotada por $\alpha_1\ell_1 + \alpha_2\ell_2$ e definida para cada $v \in V$ por

$$(\alpha_1\ell_1 + \alpha_2\ell_2)(v)\ :=\ \alpha_1\ell_1(v) + \alpha_2\ell_2(v)$$

é igualmente um funcional linear em V (verifique!).

Se $v \in V$ e ℓ é um funcional linear em V, é muito conveniente denotar $\ell(v)$ pelo símbolo $\langle \ell,\ v\rangle$. Essa notação é útil por evidenciar a simetria da associação entre os elementos de V e de seu dual. As relações de linearidade, por exemplo, se escrevem

$$\langle \ell,\ \alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_2\rangle\ =\ \alpha_1\langle \ell,\ v_1\rangle + \alpha_2\langle \ell,\ v_2\rangle$$

com $v_1,\ v_2 \in V$, ℓ no dual de V e e $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{C}$, arbitrários, e

$$\langle \alpha_1\ell_1 + \alpha_2\ell_2,\ v\rangle\ =\ \alpha_1\langle \ell_1,\ v\rangle + \alpha_2\langle \ell_2,\ v\rangle$$

também com $\ell_1,\ \ell_2$ no dual de V, $v \in V$ e $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{C}$, arbitrários.

No que segue, usaremos tanto a notação $\ell(v)$ quanto a notação $\langle \ell,\ v\rangle$. A expressão $\langle \ell,\ v\rangle$ é por vezes dita ser o "*pairing*", ou *emparelhamento*, do funcional linear ℓ com o vetor v.

Os espaços vetoriais $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ possuem, naturalmente, funcionais lineares. Os que nos irão interessar são aqueles que são contínuos, como definiremos adiante.

É importante observar que, como $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, todo funcional linear em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é um funcional linear em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. A recíproca, porém, não é verdadeira. Por exemplo, a expressão

$$\ell(\varphi)\ =\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{+x^4}\varphi(x)\,dx \tag{38.166}$$

está definida para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ (pois a integral do lado direito pode ser restrita ao suporte de φ, que é compacto, e a função e^{+x^4} é limitada em qualquer compacto) e define um funcional linear em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Todavia, a integral do lado direito não pode ser definida para toda função $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Por exemplo, ela não está definida para a função $\varphi(x) = e^{-x^2}$, que é um elemento de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

• **Definindo a noção de distribuição. O espaço $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$**

Um funcional linear T definido no espaço $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ que seja contínuo é dito ser uma *distribuição*.

Dizer que funcional linear T definido no espaço $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ é contínuo significa dizer que para toda a sequência φ_k de elementos de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ que convirja, no sentido definido na Seção 38.1, página 2008, a uma função $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ vale $\lim\limits_{k\to\infty} T(\varphi_k) = T(\varphi)$, ou seja, $\lim\limits_{k\to\infty} T(\varphi_k) = T\left(\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k\right)$.

O conjunto de todos os funcionais lineares contínuos definidos em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, de todas as distribuições, é denotado por $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

É importante observar que $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial. Se U e V são elementos de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ então, para todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ a aplicação de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathbb{C}$ denotada por $\alpha U + \beta V$ e definida para cada $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ por

$$(\alpha U + \beta V)(\varphi) \ := \ \alpha U(\varphi) + \beta V(\varphi)$$

é igualmente um elemento de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, ou seja, é um funcional linear contínuo no sentido da convergência em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

E. 38.45 *Exercício*. Verifique as afirmações acima. ✠

No que segue, usaremos tanto a notação $T(\varphi)$ quanto a notação $\langle T,\ \varphi\rangle$. A expressão $\langle T,\ \varphi\rangle$ é por vezes dita ser o "*pairing*", ou *emparelhamento*, da distribuição T com a função φ.

• Definindo a noção de distribuição temperada. O espaço $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

Um funcional linear T definido no espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ que seja contínuo é dito ser uma *distribuição temperada*.

Dizer que funcional linear T definido no espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínuo significa dizer que para toda a sequência φ_k de elementos de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ que convirja, no sentido definido na Seção 38.1, página 2008, a uma função $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ vale $\lim\limits_{k\to\infty} T(\varphi_k) = T(\varphi)$, ou seja, $\lim\limits_{k\to\infty} T(\varphi_k) = T\left(\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k\right)$.

O conjunto de todos os funcionais lineares contínuos definidos em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, de todas as distribuições temperadas, é denotado por $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

É importante observar que $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial. Se U e V são elementos de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ então, para todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ a aplicação de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathbb{C}$ denotada por $\alpha U + \beta V$ e definida para cada $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ por

$$(\alpha U + \beta V)(\varphi) \ := \ \alpha U(\varphi) + \beta V(\varphi)$$

é igualmente um elemento de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, ou seja, é um funcional linear contínuo no sentido da convergência em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

E. 38.46 *Exercício*. Verifique as afirmações acima. ✠

No que segue usaremos tanto a notação $T(\varphi)$ quanto a notação $\langle T,\ \varphi\rangle$. A expressão $\langle T,\ \varphi\rangle$ é por vezes dita ser o "*pairing*", ou *emparelhamento*, da distribuição temperada T com a função φ.

• A relação de continência entre $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$

Antes de passarmos a exemplos façamos a seguinte observação.

Proposição 38.15 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, *ou seja, toda distribuição temperada é também uma distribuição.* □

Prova. Já comentamos acima que se T é um funcional linear de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ então é também um funcional linear de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Vamos supor que T seja um elemento de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e seja φ_k uma sequência de elementos de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ que converge a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ no sentido de convergência de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Então, pela Proposição 38.1, página 2014, φ_k também converge a φ no sentido de convergência de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Como T é contínua em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, isso significa que $\lim\limits_{k\to\infty} T(\varphi_k) = T(\varphi)$. Mas isso está dizendo que T é contínua em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, provando que $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Isso estabeleceu que $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. ■

Devido a essa proposição distribuições temperadas são muitas vezes denominadas simplesmente distribuições, especialmente quando não houver necessidade de distinguir as duas noções. Tratemos agora de exemplos.

38.3.1 Primeiros Exemplos de Distribuições

Vamos começar com um exemplo básico de distribuição.

• **Distribuições regulares**

Nosso primeiro exemplo trata de distribuições que não são necessariamente temperadas. Para ele precisamos de uma definição. Uma função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é dita ser uma *função localmente integrável* se para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ valer $\int_K |h(x)|\, d^n x < \infty$. Naturalmente, funções contínuas são localmente integráveis, mas há outros exemplos a se ter em mente, como a função $\ln|x|$ e como as funções $(\ln x)_+$ e $(\ln|x|)_-$, definidas por

$$(\ln x)_+ := \begin{cases} \ln x\,, & \text{para } x > 0\,, \\ 0\,, & \text{para } x \leq 0\,, \end{cases} \qquad (\ln|x|)_- := \begin{cases} 0\,, & \text{para } x \geq 0\,, \\ \ln|x|\,, & \text{para } x < 0\,. \end{cases} \tag{38.167}$$

Do fato que, para $a > 0$ tem-se $\int_0^a \ln x dx = a(\ln a - 1)$ é elementar constatar (faça-o!) que essas três funções são localmente integráveis.

Exemplo 38.1 [Distribuições regulares] Se h é uma função localmente integrável, a expressão

$$\langle \mathsf{T}_h,\, \varphi\rangle \;\equiv\; \mathsf{T}_h(\varphi) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\varphi(x)\, d^n x \tag{38.168}$$

para $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ define uma distribuição. Distribuições desse tipo são denominadas *distribuições regulares*. Que (38.168) está bem definida para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ segue do seguinte argumento. Pelo fato de o suporte de φ ser compacto podemos restringir a integral de (38.168) a esse suporte. Como φ é limitado, segue que $\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\,|\varphi(x)|\, d^n x \leq \sup\{|\varphi(x)|,\, x \in \mathbb{R}^n\} \int_{\operatorname{supp}\varphi} |h(x)|\, d^n x$, que é finito por hipótese.

Com isso, (38.168) define um funcional linear em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Provemos que esse funcional linear é contínuo. Para tal seja $\varphi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ uma sequência de funções que converge a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ no sentido de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Então, existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi - \varphi_k) \subset K$ para todo k grande o suficiente e $\sup\{|\varphi(x) - \varphi_k(x)|,\, x \in \mathbb{R}^n\} \to 0$ para $k \to \infty$. Portanto, para todo k grande o suficiente, vale

$$\begin{aligned} |\mathsf{T}_h(\varphi - \varphi_k)| \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\,|\varphi(x) - \varphi_k(x)|\, d^n x \;=\; \int_K |h(x)|\,|\varphi(x) - \varphi_k(x)|\, d^n x \\ \leq\; \sup\Big\{|\varphi(x) - \varphi_k(x)|,\; x \in \mathbb{R}^n\Big\} \int_K |h(x)|\, d^n x\,. \end{aligned}$$

Como a integral do lado direito é finita, concluímos que $|\mathsf{T}_h(\varphi - \varphi_k)| \to 0$ para $k \to \infty$ e isso estabelece que T_h é contínua em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, que é um elemento de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Como mostra o exemplo de (38.166), nem toda distribuição desse tipo é temperada. ♦

O conjunto de todas as distribuições regulares em $\mathbb{R}^n$ será denotado por $\mathscr{D}_{\text{reg}}(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathscr{D}'_{\text{reg}}(\mathbb{R}^n) \;:=\; \big\{\mathsf{T}_h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),\ \text{com } h \text{ localmente integrável}\ \big\}\,.$$

Defina-se também

$$\mathscr{D}'_{\text{reg},\,k}(\mathbb{R}^n) \;:=\; \big\{\mathsf{T}_h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),\ \text{com } h \text{ localmente integrável e } k\text{-vezes diferenciável}\big\}$$

e

$$\mathscr{D}'_{\text{reg},\,\infty}(\mathbb{R}^n) \;:=\; \big\{\mathsf{T}_h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),\ \text{com } h \text{ localmente integrável e infinitamente diferenciável}\big\} \;=\; \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{D}'_{\text{reg},\,k}(\mathbb{R}^n)\,.$$

• **Distribuições temperadas regulares**

A noção de distribuição regular pode ser adaptada ao espaço de Schwartz.

Exemplo 38.2 [Distribuições temperadas regulares] Se g é uma função (mensurável) de crescimento polinomialmente limitado, satisfazendo (38.17) para algum $C > 0$ e algum $m \in \mathbb{N}_0$, a expressão

$$\langle \mathsf{T}_g,\ f\rangle \ \equiv\ \mathsf{T}_g(f)\ :=\ \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x)\,d^nx \tag{38.169}$$

para $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ define uma distribuição temperada (e, portanto, uma distribuição). Distribuições desse tipo são denominadas *distribuições temperadas regulares* e empregamos para as mesmas a mesma notação usada na definição das distribuições regulares em (38.168), pois em ambos os casos a distribuição é definida como uma integral de um produto de uma função de teste com uma função conveniente.

Que (38.169) está bem definida para todo $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ vê-se pelo seguinte argumento. Escrevemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\,|f(x)|\,d^nx \overset{(38.17)}{\leq} C\int_{\mathbb{R}^n}(1+\|x\|)^m\,|f(x)|\,d^nx \overset{(38.10)}{\leq} C\|f\|_{q,\,0}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+\|x\|)^{q-m}}\,d^nx\ , \tag{38.170}$$

onde, na segunda desigualdade, usamos (38.10) com $\beta = 0$. Escolhendo q grande o suficiente (a saber, $q \geq n+m+1$), a integral do lado direito de (38.170) é finita, provando que o lado direito de (38.169) é uma integral absolutamente convergente para todo $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Assim, (38.169) define um funcional linear em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Provemos agora que é contínuo em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Para tal seja $f_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ uma sequência de funções que converge a $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ no sentido de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Teremos

$$\begin{aligned}|\mathsf{T}_g(f-f_k)| \ \leq\ \int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|\,|f(x)-f_k(x)|\,d^nx &\overset{(38.17)}{\leq} C\int_{\mathbb{R}^n}(1+\|x\|)^m\,|f(x)-f_k(x)|\,d^nx\\ &\overset{(38.10)}{\leq} C\|f-f_k\|_{q,\,0}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+\|x\|)^{q-m}}\,d^nx\ ,\end{aligned}$$

onde, na segunda desigualdade, usamos (38.10) com $\beta = 0$. Novamente escolhendo q grande o suficiente (a saber, $q \geq n+m+1$) a integral do lado direito fica finita e concluímos que existe uma constante C_0, independente de k, tal que $|\mathsf{T}_g(f-f_k)| \leq C_0\|f-f_k\|_{q,\,0}$. Por hipótese, $\|f-f_k\|_{q,\,0} \to 0$ para $k \to \infty$ e isso estabelece que T_g é contínua em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. ♦

Nessa linha, outro exemplo que será importante no que segue é fornecido pelas funções

$$g_n(x)\ =\ \frac{n}{\sqrt{\pi}}\,e^{-n^2x^2}, \tag{38.171}$$

com $n \in \mathbb{N}$. Essas funções são contínuas e limitadas e, portanto, são de crescimento polinomialmente limitado. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle \mathsf{T}_{g_n},\ f\rangle \ \equiv\ \mathsf{T}_{g_n}(f)\ =\ \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)f(x)\,dx \tag{38.172}$$

define uma distribuição em $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

• **A distribuição de Heaviside**

Considere-se a chamada *função degrau* (também denominada *função de Heaviside*[31]):

$$H(x)\ :=\ \begin{cases}1, & \text{se } x \geq 0\ ,\\ 0, & \text{se } x < 0\ .\end{cases} \tag{38.173}$$

Como H é mensurável e de crescimento polinomialmente limitada, podemos com ela definir uma distribuição temperada regular, denominada *distribuição de Heaviside* e denotada por T_H, dada por

$$\mathsf{T}_H(f)\ :=\ \int_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x)\,dx\ =\ \int_0^{\infty} f(x)\,dx\ . \tag{38.174}$$

$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

[31] Oliver Heaviside (1850–1925).

Denotaremos $H^{\pm}(y) = H(\pm y)$, $y \in \mathbb{R}$. De maneira análoga podemos definir as distribuições regulares $\mathsf{T}_{H^{\pm}}$. Claro está que $\mathsf{T}_{H^+} = \mathsf{T}_H$ e que

$$\mathsf{T}_{H^+}(f) \;=\; \int_0^{\infty} f(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \mathsf{T}_{H^-}(f) \;=\; \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx\;,$$

$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

• **A distribuição sinal**

A chamada *função sinal*, denotada por "sgn" ou por "sinal", é definida em $\mathbb{R}$ por

$$\operatorname{sgn}(x) \;:=\; \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0\;, \\ 0, & \text{se } x = 0\;, \\ -1, & \text{se } x < 0\;. \end{cases} \tag{38.175}$$

Com a mesma podemos definir a distribuição regular, denominada *distribuição sinal*, por

$$\mathsf{T}_{\operatorname{sgn}}(f) \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x) f(x)\,dx \;=\; \int_0^{\infty} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx \;=\; \big(\mathsf{T}_{H^+} - \mathsf{T}_{H^-}\big)(f)\;. \tag{38.176}$$

$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Essa relação

$$\mathsf{T}_{\operatorname{sgn}} \;=\; \mathsf{T}_{H^+} - \mathsf{T}_{H^-}$$

será usada adiante, assim como a relação

$$\operatorname{sgn}(x) \;=\; \pm\big(2H^{\pm}(x) - 1\big)\;, \quad x \neq 0\;,$$

que implica

$$\mathsf{T}_{\operatorname{sgn}} \;=\; \pm 2\mathsf{T}_{H^{\pm} - 1/2}\;.$$

Teremos diversos encontros com a distribuição de Heaviside e com a distribuição sinal no que segue, mas passemos agora a uma outra distribuição de importância central na teoria das distribuições e suas aplicações.

• **A distribuição delta de Dirac**

A *distribuição delta de Dirac* centrada em $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ou simplesmente *distribuição de Dirac* centrada em $x_0 \in \mathbb{R}^n$, denotada por δ_{x_0} é definida como sendo a distribuição temperada que a cada $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ associa seu valor $f(x_0)$ no ponto x_0, ou seja,

$$\langle \delta_{x_0},\, f\rangle \;\equiv\; \delta_{x_0}(f) \;=\; f(x_0)\;. \tag{38.177}$$

É óbvio que a δ_{x_0}, assim definida, é um funcional linear em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Que é contínua é facilmente visto pelo seguinte argumento. Se f_k é uma sequência de funções de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ que converge a $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ no sentido de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, então, vale, em particular, que $\|f - f_k\|_{0,\,0} \to 0$ para $k \to \infty$. Logo,

$$|\delta_{x_0}(f - f_k)| \;=\; |f(x_0) - f_k(x_0)| \;\overset{(38.10)}{\leq}\; \|f - f_k\|_{0,\,0}\;,$$

mostrando que $|\delta_{x_0}(f - f_k)| \to 0$ para $k \to \infty$, o que estabelece a continuidade de δ_{x_0} em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Nota para os estudantes mais avançados. Deve-se observar que a distribuição delta de Dirac, definida acima, e a medida delta de Dirac, definida à página 1449 (vide página 1550 para a integração em relação a essa medida), são objetos matematicamente distintos, mas com efeitos semelhantes. Compare (31.39), página 1550, à definição (38.177), acima. Como veremos em breve, é possível definir derivadas da distribuição delta de Dirac, mas não da medida delta de Dirac. Em compensação, a medida delta de Dirac permite integrar uma classe de funções muito maior que o espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Vide comentário à página 1550. A restrição da integral sobre a medida de Dirac a uma classe especial de funções infinitamente diferenciáveis (como $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$) define a distribuição de Dirac. ♣

• **"Funções generalizadas". Uma notação integral para distribuições**

Distribuições da forma

$$\mathsf{T}_g(f) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x)\; d^n x \tag{38.178}$$

para uma função g como descrita acima, podem ser interpretadas como representando uma "média" da função $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ ponderada pela função g. Nem todas as distribuições são dessa forma, mas é costume representar diversas delas usando uma notação integral. Assim, uma distribuição $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ calculada em uma função $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ pode ser também representada na forma

$$T(f) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} t(x) f(x)\, d^n x \,. \tag{38.179}$$

Essa notação é simbólica, pois pode não existir uma função $t(x)$ que a faça verdadeira, nem a integral do lado direito pode ser entendida nos sentidos usuais de integração, como na integral de Riemann ou de Lebesgue. Apesar de ser conceitualmente incorreta (devido às ressalvas acima e ao fato de distribuições não serem funções), essa notação é útil e largamente empregada por permitir expressar certas propriedades de distribuições de modo relativamente simples (por exemplo, a linearidade e, como veremos na Seção 38.3.4, a diferenciabilidade). Essa notação é muito popular em textos de Física, mesmo aqueles matematicamente rigorosos, sendo usada para a distribuição de Dirac (vide abaixo), ou para as funções de n-pontos da Teoria Quântica de Campos (para tal, vide, *e.g.*, [488], [267] ou [20]).

Não raro, a "função" $t(x)$ é usada para denotar a própria distribuição da qual se origina e as duas noções frequentemente se confundem. A "função" $t(x)$ é denominada *função generalizada*, denominação com que foi introduzida por Sobolev, como mencionado no início deste capítulo. Essas "funções generalizadas" assim definidas representam, como o nome diz, uma espécie de extensão da noção de função, pois a forma (38.179) parece representar uma generalização das distribuições da forma (38.178), definidas com funções g legítimas.

Muitas distribuições (a delta de Dirac é um exemplo, como veremos) podem ser obtidas como limite de distribuições da forma T_{h_n} para certas sequências de funções h_n. A "função generalizada" que representa a distribuição limite pode, assim, ser entendida como um limite (em um sentido a ser precisado) da sequência de funções h_n.

Um exemplo onde esse tipo de notação é frequentemente empregado é a distribuição de Dirac. É costume denotar $\delta_{x_0}(f)$ por

$$\delta_{x_0}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x - x_0) f(x)\, d^n x \tag{38.180}$$

e, assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x - x_0) f(x)\, d^n x = f(x_0)$$

para toda $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. A "função generalizada" $\delta(x - x_0)$ representa a distribuição de Dirac centrada em x_0. Como é fácil de se ver, se $\delta(x - x_0)$ fosse uma verdadeira função teria que ser nula em toda parte, exceto em $x = x_0$ (pois $\delta_{x_0}(f)$ deve ser nula para toda função de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ cujo suporte não contém x_0). Com isso, porém, a integral lado direito de (38.180) seria identicamente nula e não igual a $f(x_0)$, como desejado. Assim, o lado direito de (38.180) tem um significado apenas simbólico.

Essa simbologia permite, porém, discutir a noção intuitiva que reside por trás da distribuição delta de Dirac (e da medida delta de Dirac). Essa intuição é a de que a mesma representa a densidade de uma grandeza concentrada em um único ponto. Assim, se temos, por exemplo, um ponto material de massa m localizado na posição $x_0 \in \mathbb{R}^3$ podemos dizer que a densidade de massa desse ponto é dada por

$$\rho(x) = m\delta(x - x_0), \qquad x,\, x_0 \in \mathbb{R}^3 \,. \tag{38.181}$$

De fato, desejamos nesse caso que $\rho(x) = 0$ se $x \neq x_0$ (pois o ponto material está concentrado apenas no ponto x_0) e que $\int_{\mathbb{R}^3} \rho(x) d^3x = m$ (pois a massa total é m). Assim, se interpretada como uma função, $\delta(x - x_0)$ deveria satisfazer à hipótese de ser nula para todo $x \neq x_0$ e divergir em $x = x_0$, pois nesse ponto teríamos de ter uma densidade infinita. Essa interpretação é legítima e permite justificar intuitivamente muitas das manipulações efetuadas com a distribuição de Dirac.

Um outro subproduto dessa interpretação da "função generalizada" $\delta(x - x_0)$ como uma densidade infinita concentrada no ponto x_0 é que a mesma pode ser obtida como limite (em um sentido a ser definido) de uma sequências de funções que representem densidades que vão concentrando-se sucessivamente no ponto x_0. Essa ideia é capturada pelas chamadas *sequências delta de Dirac* às quais dedicamos a Seção 37.2.

• **Translações em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$**

Podemos definir o operador de translação por $y \in \mathbb{R}^n$, agindo no conjunto das funções definidas em $\mathbb{R}^n$ com valores

em $\mathbb{C}$, como sendo o operador linear que a cada função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ associa a função $\mathcal{T}_y h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definida por

$$(\mathcal{T}_y h)(x) := h(x-y) . \tag{38.182}$$

A aplicação $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto \mathcal{T}_y$ implementa a ação do grupo de translações no conjunto das funções definidas em $\mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{C}$.

Se T é uma distribuição em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ (ou em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$), é fácil provar que, para cada $y \in \mathbb{R}^n$, a composição $T \circ \mathcal{T}_y$ definida por

$$T \circ \mathcal{T}_y(f) := T(\mathcal{T}_y f) , \tag{38.183}$$

é também uma distribuição em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ (ou em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$). Denotaremos também $T \circ \mathcal{T}_y$ por $\mathcal{T}^*_{-y} T$, ou seja, definimos

$$\mathcal{T}^*_y T := T \circ \mathcal{T}_{-y} \tag{38.184}$$

e, portanto,

$$\big(\mathcal{T}^*_y T\big)(f) := T\big(\mathcal{T}_{-y}(f)\big) \tag{38.185}$$

para toda $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ (ou em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$) e todo $y \in \mathbb{R}^n$. Na notação de emparelhamento,

$$\langle \mathcal{T}^*_y T,\ f\rangle := \langle T \circ \mathcal{T}_{-y},\ f\rangle = \langle T,\ \mathcal{T}_{-y} f\rangle \tag{38.186}$$

e na notação integral

$$\mathcal{T}^*_y T(f) := T \circ \mathcal{T}_{-y}(f) := \int_{\mathbb{R}^n} t(x) f(x+y)\, d^n x =: \int_{\mathbb{R}^n} t(x-y) f(x)\, d^n x .$$

Assim, se $t(x)$ é a "função generalizada" que representa a distribuição T então $t(x-y)$ é a "função generalizada" que representa a distribuição $\mathcal{T}^*_y T$.

A definição de $\mathcal{T}^*_y T$, acima, é talhada de forma que valha, na notação de emparelhamento, a seguinte propriedade de invariância por translações:

$$\langle \mathcal{T}^*_y T,\ \mathcal{T}_y f\rangle = \langle T,\ f\rangle \tag{38.187}$$

De fato, $\langle \mathcal{T}^*_y T,\ \mathcal{T}_y f\rangle \overset{(38.186)}{=} \big\langle T,\ \mathcal{T}_{-y}\big(\mathcal{T}_y f\big)\big\rangle = \langle T,\ f\rangle$.

A propriedade (38.187) indica ser adequada a interpretação de $\mathcal{T}^*_y$ como sendo a *ação do grupo de translações no espaço de distribuições*.

Pelas definições e propriedades acima, é fácil ver (verifique!) que, para distribuições regulares, tenha-se

$$\mathcal{T}^*_y \mathsf{T}_g = \mathsf{T}_{(\mathcal{T}_y g)} \tag{38.188}$$

e que para a distribuição de Dirac vale

$$\mathcal{T}^*_y \delta_0 = \delta_y . \tag{38.189}$$

• **Sequências Delta de Dirac**

As distribuições T_{g_n}, com g_n dada em (38.171), permitem mostrar outra caracterização de δ_0. Mostraremos mais abaixo que para toda f de $\mathscr{S}$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{T}_{g_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) f(x)\, dx = f(0) = \delta_0(f) \tag{38.190}$$

e, analogamente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x-x_0) f(x)\, dx = f(x_0) = \delta_{x_0}(f) ,$$

onde g_n encontra-se definida em (38.171). Para entender o que esse resultado significa, note que:

1. Para todo x diferente de zero vale

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0 . \tag{38.191}$$

2. Para todo $n > 0$ vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)dx \;=\; 1\;. \tag{38.192}$$

Esse último resultado é facilmente provado usando a integral de Laplace: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Isso mostra que à medida em que n cresce, a função g_n tende a se comportar muito analogamente a uma densidade concentrada em um único ponto, o ponto $x = 0$. Assim, a distribuição delta de Dirac centrada em zero pode ser, em um certo sentido, caracterizada como o limite de g_n quando n vai para o infinito. Ainda que esse limite, matematicamente falando, não exista para a sequência de *funções* g_n ele faz sentido para a sequência de *distribuições* T_{g_n}, geradas pelas funções g_n.

As sequência de funções g_n é um exemplo de uma classe de sequências de funções denominadas *sequências delta de Dirac*, a qual é detalhadamente estudada na Seção 37.2, página 1944, cuja leitura recomendamos ao leitor nesse momento. Vide, por exemplo, a Definição 37.1, página 1944.

De fundamental importância é o Teorema 37.1, página 1947, sobre a aproximação de funções uniformemente contínuas e limitadas (como as funções de Schwartz) por sequências de funções produzidas por convolução com sequências delta de Dirac.

Um corolário imediato daquele teorema, e de interesse para a teoria das distribuições é:

Corolário 38.2 *Se K_n é uma sequência delta de Dirac em $\mathbb{R}$ (vide Definição 37.1, página 1944) de funções polinomialmente limitadas, T_{K_n} define uma distribuição em $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (pelo Exemplo 38.2) e para todo $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ vale*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{T}_{K_n}(f) \;=\; f(0) \;=\; \delta_0(f)\;,$$

o que permite escrever em $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$

$$\delta_{x_0} \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathsf{T}_{K_n} \circ \mathcal{T}_{-x_0} \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}^*_{x_0} \mathsf{T}_{K_n} \;\overset{(38.188)}{=}\; \lim_{n\to\infty} \mathsf{T}_{\left(\mathcal{T}_{x_0} K_n\right)}\;,$$

para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. □

Assim, a distribuição de Dirac δ_{x_0} em $\mathbb{R}$ pode ser entendida como o limite das distribuições $\mathsf{T}_{\left(\mathcal{T}_{x_0} K_n\right)}$. Uma afirmação análoga é válida em $\mathbb{R}^n$.

38.3.2 Outros Exemplos de Distribuições

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos especiais de distribuições, exemplos esses distintos dos apresentados acima. Classes ainda maiores de exemplos surgirão quando tratarmos da noção de derivada de distribuições na Seção 38.3.4, página 2074.

38.3.2.1 A Distribuição Valor Principal

• **O valor principal de Cauchy de uma integral**

No espaço $\mathbb{R}^n$, denotamos por $B(y,\ r)$ a bola aberta de raio $r > 0$ centrada em $y \in \mathbb{R}^n$: $B(y,\ r) := \big\{x \in \mathbb{R}^n \big|\ \|x - y\| < r\big\}$, onde $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ é a distância Euclidiana usual em $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $B(y,\ r)^c$ conjunto (fechado) complementar a $B(y,\ r)$, ou seja, $\mathbb{R}^n \setminus B(y,\ r)$.

Seja uma função f singular em um ponto y e integrável nos conjuntos $B(y,\ r)^c$ para todo $r > 0$. Se o limite

$$\lim_{r\to 0} \int_{B(y,\ r)^c} f(x)\ d^n x$$

existir seu valor é dito ser o *valor principal de Cauchy* da integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ d^n x$, e é denotado por $\mathsf{VP}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ d^n x$. Assim

$$\mathsf{VP}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ d^n x \;:=\; \lim_{r\to 0} \int_{B(y,\ r)^c} f(x)\ d^n x$$

se o limite existir. Dizer que a integral de f existe no sentido de valor principal (de Cauchy) é dizer que o limite acima existe.

Na discussão acima assumimos que f tenha apenas um ponto singular, mas não há qualquer dificuldade em estender essa noção para funções com um número finito de singularidades, subtraindo-se da região de integração $\mathbb{R}^n$ bolas de raio r centradas nesses pontos e tomando-se o limite $r \to 0$, caso o mesmo exista.

Diversas integrais importantes podem ser definidas no sentido de valor principal. Na Eletrostática, por exemplo, o potencial elétrico de uma distribuição de cargas ρ (suposta contínua e de suporte compacto) é dada por

$$\phi(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(\vec{x}\,')}{\|\vec{x}-\vec{x}\,'\|}\, d^3x'$$

e a integral do lado direito deve ser entendida no sentido de valor principal, devido à singularidade no integrando em $\vec{x}\,' = \vec{x}$. Vide a discussão sobre a solução da equação de Poisson no Capítulo 44, página 2541.

No nosso contexto, a noção de valor principal é importante por permitir definir uma distribuição.

• **A distribuição valor principal de Cauchy**

Para $x_0 \in \mathbb{R}$, fixo, define-se em $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ a distribuição $\mathsf{VP}_{x_0} \equiv \mathsf{VP}\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$, denominada *distribuição valor principal de Cauchy* centrada em x_0, por

$$\left\langle \mathsf{VP}_{x_0},\, \varphi\right\rangle \;\equiv\; \left\langle \mathsf{VP}\left(\frac{1}{x-x_0}\right),\, \varphi\right\rangle \;:=\; \mathsf{VP}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-x_0}\varphi(x)\, dx \tag{38.193}$$

para toda $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Por razões práticas, usaremos indistintamente a notação VP_{x_0} ou a notação em termos de função generalizada $\mathsf{VP}\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$ para essa distribuição.

Para mostrar que (38.193) define, de fato, uma distribuição, provemos primeiramente que o limite que define o valor principal acima existe de fato. Tomaremos $x_0 = 0$, sem perda de generalidade. Seja $A > 0$ grande o suficiente para que $[-A,\, A]$ contenha o suporte de φ. Temos, para $0 < r < A$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\setminus(-r,\, r)} \frac{1}{x}\varphi(x)\, dx \;&=\; \int_{-A}^{-r} \frac{1}{x}\varphi(x)\, dx + \int_r^A \frac{1}{x}\varphi(x)\, dx \\ &=\; \int_{-A}^{-r} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\, dx + \int_r^A \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\, dx + \varphi(0)\underbrace{\left(\int_{-A}^{-r}\frac{1}{x}\, dx + \int_r^A \frac{1}{x}\, dx\right)}_{=\,0}\end{aligned} \tag{38.194}$$

Seja $F(r) := \displaystyle\int_r^A \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\, dx$. Temos que para $r > r' > 0$ vale $F(r) - F(r') = \displaystyle\int_{r'}^r \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\, dx$. Agora,

$$|\varphi(x)-\varphi(0)| \;=\; \left|\int_0^x \varphi'(s)\, ds\right| \;\leq\; \int_0^x |\varphi'(s)|\, ds \;\leq\; \left(\sup_{s\in[0,\, x]}\left\{\, |\varphi'(s)|\,\right\}\right)|x| \;\leq\; \|\varphi\|_{0,\,1}\, |x| \tag{38.195}$$

e, portanto, $|F(r) - F(r')| \leq \|\varphi\|_{0,\,1}|r-r'| \leq 2r\|\varphi\|_{0,\,1}$. Isso mostra que $r \mapsto F(r)$ é uma rede de Cauchy e, portanto, converge quando $r \to 0$. Para a integral $\displaystyle\int_{-A}^{-r} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\, dx$ a análise é a mesma. Isso estabelece a existência do valor principal acima.

Que (38.193) define um funcional linear em $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ é evidente. Que (38.193) é contínua em $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ é provado pelo seguinte argumento. Seja φ_n uma sequência em $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ que converge a 0 para $n \to \infty$ e seja $A > 0$ tal que $[-A,\, A]$ contém o suporte de <u>todas</u> as funções φ_n (tal existe pela definição de convergência em $\mathscr{D}(\mathbb{R})$). Então,

$$\left\langle \mathsf{VP}\left(\frac{1}{x}\right),\, \varphi_n\right\rangle \;=\; \mathsf{VP}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\varphi_n(x)\, dx \;\overset{(38.194)}{=}\; \lim_{r\to 0}\left[\int_{-A}^{-r} \frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(0)}{x}\, dx + \int_r^A \frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(0)}{x}\, dx\right] \tag{38.196}$$

Agora, por (38.195), $\left|\int_r^A \frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(0)}{x}\,dx\right| \leq \|\varphi_n\|_{0,\,1}(A-r)$ e analogamente para a outra integral. Portanto,

$$\left|\left\langle \mathsf{VP}\left(\frac{1}{x}\right),\ \varphi_n\right\rangle\right| \ < \ 2A\|\varphi_n\|_{0,\,1}$$

o que prova a continuidade de $\mathsf{VP}_0 \equiv \mathsf{VP}\left(\frac{1}{x}\right)$, já que $\|\varphi_n\|_{0,\,1} \to 0$ para $n \to \infty$.

As distribuições VP_{x_0}, $x_0 \in \mathbb{R}$, podem ser estendidas sem dificuldade a $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, sendo, portanto, distribuições temperadas. As distribuições VP_{x_0} surgirão adiante, por exemplo, quando calcularmos derivadas de certas distribuições ou quando tratarmos de certos exemplos de equações diferenciais distribucionais e do método da função de Green.

• **Uma relação útil para a distribuição VP_{x_0}**

Se $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ podemos escrever, para todo $r > 0$

$$\int_{|x-x_0|>r} \frac{\varphi(x)}{x-x_0}\,dx \ = \ \int_{-\infty}^{x_0-r} \frac{\varphi(x)}{x-x_0}\,dx + \int_{x_0+r}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x-x_0}\,dx \ = \ \int_{-\infty}^{-r} \frac{\varphi(y+x_0)}{y}\,dy + \int_r^{\infty} \frac{\varphi(y+x_0)}{y}\,dy$$

$$= \int_r^{\infty} \frac{\varphi(x_0+y)-\varphi(x_0-y)}{y}\,dy\ .$$

Como φ é diferenciável, o limite $\lim_{y\to 0} \frac{\varphi(x_0+y)-\varphi(x_0-y)}{y}$ existe e podemos escrever

$$\langle \mathsf{VP}_{x_0},\ \varphi\rangle \ = \ \int_0^{\infty} \frac{\varphi(y+x_0)-\varphi(-y+x_0)}{y}\,dy \tag{38.197}$$

para todo $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

38.3.2.2 Distribuições do Tipo Parte Finita de Hadamard

• **A noção de parte finita de integrais divergentes**

Seja, como acima, $B(r,\ y)$ a bola aberta de raio $r > 0$ centrada em $y \in \mathbb{R}^n$ e seja $B(r,\ y)^c$ seu conjunto complementar. Suponha que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ seja integrável em $B(r,\ y)^c$ para cada $r > 0$ e suponhamos que para todo $r > 0$ possamos escrever

$$\int_{B(r,\ y)^c} f(x)\ d^n x = F(r) + D(r)\ ,$$

onde $\lim\limits_{r\to 0} F(r)$ existe e é finito, enquanto que D é divergente para $r \to 0$. Gostaríamos de definir a função F, ou mais precisamente o limite $\lim\limits_{r\to 0} F(r)$, como a parte finita da integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ d^n x$ e a função D como sua parte divergente. Uma dificuldade evidente é a de caracterizar univocamente qual a função D e qual a função F na decomposição acima. Em certos casos, se restringirmos as funções D a classes específicas de funções divergentes, a separação entre a parte finita e a parte divergente do limite $\lim\limits_{r\to 0} \int_{B(r,\ y)^c} f(x)$ pode ser feita de modo único.

No que segue, apresentaremos uma classe de funções com tal propriedade e em seguida mostraremos que com a correspondente definição de parte finita é possível definir uma distribuição.

• **Uma classe de funções divergentes**

Para apresentarmos a noção de parte finita de uma integral divergente precisamos da proposição a seguir. Afirmação que a mesma faz pode parecer óbvia, mas a demonstração é um tanto envolvente e é apresentada em detalhe no Apêndice 38.B, página 2114.

Proposição 38.16 *Seja* $\mathbb{R}^2_+ := \big\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ *mas* $(x,\ y) \neq (0,\ 0)\big\}$. *Seja* $(a_k,\ b_k)$, $k = 1,\ \ldots,\ n$, *uma coleção finita de* n *pares* <u>*distintos*</u> *de números complexos com* $\big(\mathrm{Re}\,(a_k),\ \mathrm{Re}\,(b_k)\big) \in \mathbb{R}^2_+$ *para todo* k. *Suponha que existam*

constantes $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ *tais que o limite* $\lim_{x\to 0_+}\left(c_1\frac{(\ln x)^{b_1}}{x^{a_1}}+\cdots+c_n\frac{(\ln x)^{b_n}}{x^{a_n}}\right)$ *exista e seja finito:*

$$\lim_{x\to 0_+}\left(c_1\frac{(\ln x)^{b_1}}{x^{a_1}}+\cdots+c_n\frac{(\ln x)^{b_n}}{x^{a_n}}\right) = \alpha\in\mathbb{C}\,. \tag{38.198}$$

Então, $c_1=\cdots=c_n=0$ *e* $\alpha=0$. □

A coleção de todas as funções definidas em $(0,\ \infty)$ que sejam combinações lineares finitas de funções da forma $\frac{(\ln x)^b}{x^a}$ com $\big(\mathrm{Re}\,(a),\ \mathrm{Re}\,(b)\big)\in\mathbb{R}^2_+$ será denotado aqui por $\mathcal{S}_H$. É claro pela definição que $\mathcal{S}_H$ é um espaço vetorial complexo (e mesmo uma álgebra complexa com respeito ao produto usual de funções).

O seguinte corolário imediato é essencial para o que segue.

Corolário 38.3 *Se uma função* $f:(0,\ a)\to\mathbb{C}$ *puder ser escrita na forma* $f=s+h$ *com* $s\in\mathcal{S}_H$ *e* h *tal que* $\lim_{x\to 0_+}h(x)$ *existe e é finito, então essa decomposição é única, ou seja, se também valer* $f=r+g$ *com* $r\in\mathcal{S}_H$ *e* g *tal que* $\lim_{x\to 0_+}g(x)=0$ *existe e é finito, então* $s=r$ *e* $g=h$. □

Prova. Pela hipótese, se $s+h=r+g$ com $s,\ r\in\mathcal{S}_H$ e $\lim_{x\to 0_+}h(x)$ e $\lim_{x\to 0_+}g(x)$ existem e são finitos, então $\lim_{x\to 0_+}\big(h(x)-g(x)\big)$ existe e é finito. Logo, $\lim_{x\to 0_+}\big(s(x)-r(x)\big)=0$ existe e é finito. Pela Proposição 38.16, isso implica que $s=r$. ■

O ponto importante para nossa discussão que nos é ensinado pelo corolário acima é a observação que se $f:(0,\ a)\to\mathbb{C}$ for uma função que diverge em zero de uma forma específica, a saber, segundo uma função de $\mathcal{S}_H$ (a função s, acima), então é possível identificar univocamente a parte não divergente de f (a função h, acima). Essa observação é o germe de uma importante definição introduzida por Hadamard[32] em 1932 em um estudo sobre equações diferenciais parciais[33], a definição de *parte finita de uma integral divergente*. Muitos consideram esse trabalho de Hadamard como precursor da *Teoria de Renormalização*, de importância central na Teoria Quântica de Campos. Historicamente, porém, não é claro se os primeiros desenvolvedores dessa teoria tivessem conhecimento daquele trabalho de Hadamard.

Comentamos, por fim, que certamente é possível caracterizar a unicidade em uma classe maior de funções divergentes que aquela do conjunto $\mathcal{S}_H$, mas esse é o conjunto que demonstrou ser de maior interesse em aplicações à Teoria de Distribuições e à Teoria das Equações Diferenciais.

• A parte finita de Hadamard de integrais divergentes

Seja, como acima, $B(r,\ y)$ a bola aberta de raio $r>0$ centrada em $y\in\mathbb{R}^n$ e seja $B(r,\ y)^c$ seu conjunto complementar. Suponha que $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ seja integrável em $B(r,\ y)^c$ para cada $r>0$. Dizemos que $\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\ d^nx$ possui uma *parte finita no sentido de Hadamard* se para todo $r>0$ pudermos escrever

$$\int_{B(r,\ y)^c}f(x)\ d^nx = F(r)+D(r)\ ,$$

onde $\lim_{r\to 0}F(r)$ existe e é finito, enquanto que $D\in\mathcal{S}_H$. Pelo Corolário 38.3 essa decomposição é única. A parte finita $\lim_{r\to 0}F(r)$ é denominada *parte finita de Hadamard* da integral $\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\ d^nx$ e está, consequentemente, bem definida. A *parte finita de Hadamard* de $\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\ d^nx$ é denotada por $\mathsf{PF}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\ d^nx$.

Com uso da noção de parte finita de Hadamard várias distribuições novas podem ser definidas, como mostraremos no que segue.

• As distribuições parte finita de Hadamard

Para $m\in\mathbb{N}_0$ e $x_0\in\mathbb{R}$, definimos a distribuição $\mathsf{PF}_{x_0,\,m}$ por

$$\langle\mathsf{PF}_{x_0,\,m},\ \varphi\rangle\ :=\ \mathsf{PF}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-x_0)^m}\varphi(x)\ dx\ ,$$

[32] Jacques Salomon Hadamard (1865-1963).

[33] J. Hadamard, "Le Problème de Cauchy et les Équation aux Dérivées Partielles". Hermann et Cie, Paris, 1932.

$\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Essas distribuições são denominadas *distribuições parte finita de Hadamard* e para elas adotaremos também a notação de função generalizada $\mathsf{PF}_{x_0,\,m} \equiv \mathsf{PF}\left(\frac{1}{(x-x_0)^m}\right)$.

Claro está que $\mathsf{PF}_{x_0,\,m}$ é obtida de $\mathsf{PF}_{0,\,m}$ por uma translação por x_0.

Que realmente se trata de uma distribuição pode ser constatado pela seguinte argumentação. Primeiramente, observe-se que de acordo com as definições $\mathsf{PF}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\varphi(x)dx = \mathsf{VP}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\varphi(x)dx$ e, portanto, $\mathsf{PF}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathsf{VP}\left(\frac{1}{x}\right)$, ou seja, $\mathsf{PF}_{0,\,1} = \mathsf{VP}_0$. Analogamente, vale

$$\mathsf{PF}_{x_0,\,1} \;=\; \mathsf{VP}_{x_0}$$

para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Para $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, consideremos a expressão $\displaystyle\int_{-\infty}^{-r}\frac{1}{x^m}\varphi(x)dx + \int_{r}^{\infty}\frac{1}{x^m}\varphi(x)dx$, com $r > 0$. Vemos por integração por partes que a mesma vale

$$\frac{1}{m-1}\left(\frac{\varphi(r)}{r^{m-1}} - (-1)^{m-1}\frac{\varphi(-r)}{r^{m-1}}\right) + \frac{1}{m-1}\left[\int_{-\infty}^{-r}\frac{1}{x^{m-1}}\varphi'(x)\;dx + \int_{r}^{\infty}\frac{1}{x^{m-1}}\varphi'(x)\;dx\right]\;,$$

e isso claramente mostra que

$$\mathsf{PF}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^m}\varphi(x)\;dx \;=\; \frac{1}{m-1}\mathsf{PF}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^{m-1}}\varphi'(x)\;dx\;,$$

ou seja

$$\left\langle \mathsf{PF}\left(\frac{1}{x^m}\right),\,\varphi\right\rangle \;=\; \frac{1}{m-1}\left\langle \mathsf{PF}\left(\frac{1}{x^{m-1}}\right),\,\varphi'\right\rangle\;.$$

Generalizando para um ponto x_0 qualquer, provamos que para $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$,

$$\langle \mathsf{PF}_{x_0,\,m},\,\varphi\rangle \;=\; \frac{1}{m-1}\,\langle \mathsf{PF}_{x_0,\,m-1},\,\varphi'\rangle\;. \tag{38.199}$$

Daí, segue que, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\langle \mathsf{PF}_{x_0,\,m},\,\varphi\rangle \;=\; \frac{1}{(m-1)!}\left\langle \mathsf{VP}_{x_0},\,\varphi^{(m-1)}\right\rangle\;, \tag{38.200}$$

o que claramente mostra que $\mathsf{PF}_{x_0,\,m}$, $m \in \mathbb{N}$, é de fato uma distribuição, pois VP_{x_0} o é, como estabelecemos anteriormente. As distribuições $\mathsf{PF}_{x_0,\,m}$ podem ser estendidas sem dificuldade a $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, sendo, portanto, distribuições temperadas. Daremos uma nova interpretação à identidade (38.200) ao falarmos da noção de derivada de distribuições na Seção 38.3.4, página 2074. Vide, por exemplo, a relação (38.228), página 2079.

- **As distribuições $\mathsf{PF}\left(\frac{H(x)}{x}\right)$ e $\mathsf{PF}\left(\frac{H(-x)}{x}\right)$**

Outra distribuição relevante é a distribuição $\mathsf{PF}\left(\frac{H(x)}{x}\right)$, definida por

$$\left\langle \mathsf{PF}\left(\frac{H(x)}{x}\right),\,\varphi\right\rangle \;:=\; \mathsf{PF}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(x)\varphi(x)}{x}\;dx \;=\; \mathsf{PF}\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\;dx\;.$$

Acima, H é a função de Heaviside definida em (38.173). Observe-se que, para $r > 0$,

$$\int_{r}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\;dx \;=\; \int_{r}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}\ln(x)\right)\varphi(x)\;dx \;=\; -\ln(r)\varphi(r) - \int_{r}^{\infty}\ln(x)\,\varphi'(x)\;dx\;,$$

o que prova que

$$\mathsf{PF}\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\;dx \;=\; -\int_{0}^{\infty}\ln(x)\,\varphi'(x)\,dx \;\overset{(38.167)}{=}\; -\int_{-\infty}^{\infty}(\ln x)_+\;\varphi'(x)\,dx$$

e, portanto,

$$\left\langle \mathsf{PF}\left(\frac{H(x)}{x}\right),\,\varphi\right\rangle \;=\; -\langle (\ln x)_+,\,\varphi'\rangle\;, \tag{38.201}$$

estabelecendo que $\mathsf{PF}\left(\frac{H(x)}{x}\right)$ é, de fato, uma distribuição.

De maneira análoga, definimos a distribuição $\mathsf{PF}\left(\frac{H(-x)}{x}\right)$ por

$$\left\langle \mathsf{PF}\left(\frac{H(-x)}{x}\right),\ \varphi\right\rangle \ = \ \mathsf{PF}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(-x)\varphi(x)}{x}\,dx \ = \ \mathsf{PF}\int_{-\infty}^{0}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\ .$$

Escrevendo novamente, para $r>0$,

$$\int_{-\infty}^{-r}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx \ = \ \int_{-\infty}^{-r}\left(\frac{d}{dx}\ln|x|\right)\varphi(x)\,dx \ = \ \ln(r)\varphi(-r)-\int_{-\infty}^{-r}\ln|x|\,\varphi'(x)\,dx\ ,$$

o que prova que

$$\mathsf{PF}\int_{-\infty}^{0}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx \ = \ -\int_{-\infty}^{0}\ln|x|\,\varphi'(x)\,dx \ \overset{(38.167)}{=} \ -\int_{-\infty}^{\infty}(\ln|x|)_-\,\varphi'(x)\,dx$$

e, portanto,

$$\left\langle \mathsf{PF}\left(\frac{H(-x)}{x}\right),\ \varphi\right\rangle \ = \ -\big\langle(\ln|x|)_-,\ \varphi'\big\rangle\ , \tag{38.202}$$

estabelecendo que $\mathsf{PF}\left(\frac{H(-x)}{x}\right)$ é, de fato, uma distribuição.

As distribuições $\mathsf{PF}\left(\frac{H(x)}{x}\right)$ e $\mathsf{PF}\left(\frac{H(-x)}{x}\right)$ podem ser estendidas sem dificuldade a $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, sendo, portanto, distribuições temperadas.

* ** *

Mais propriedades de distribuições tipo parte finita serão estudadas adiante quanto tratarmos de derivadas de distribuições.

38.3.3 Algumas Relações Úteis Envolvendo Distribuições

No que segue, apresentaremos duas relações envolvendo distribuições as quais são úteis, particularmente na Física Quântica.

• **A fórmula de Breit-Wigner**

Seja, para $\epsilon>0$ e $x_0\in\mathbb{R}$, a função definida por

$$\ell_{x_0,\,\epsilon}(x) \ := \ \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} \ = \ \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{(x-x_0)+i\epsilon}-\frac{1}{(x-x_0)-i\epsilon}\right)\ , \tag{38.203}$$

com $x\in\mathbb{R}$. Como $\ell_{x_0,\,\epsilon}$ é positiva e vale $\int_{-\infty}^{\infty}\ell_{x_0,\,\epsilon}(x)dx=1$ (verifique!), a função $\ell_{x_0,\,\epsilon}$ define uma distribuição de probabilidades, conhecida como *distribuição de Cauchy*[34] (ou como *distribuição de Lorentz*[35], como *distribuição de Cauchy-Lorentz* ou ainda como *distribuição de Breit*[36]*-Wigner*[37]) centrada em x_0. Ela é empregada, por exemplo, na teoria do espalhamento (ressonâncias) na Mecânica Quântica e na Física das Partículas.

Como $\ell_{x_0,\,\epsilon}$ é contínua e limitada, ela também define uma distribuição regular: $\mathsf{T}_{\ell_{x_0,\,\epsilon}}$. Desejamos provar que em $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ vale

$$\lim_{\epsilon\to 0}\mathsf{T}_{\ell_{x_0,\,\epsilon}} \ = \ \delta_{x_0}\ , \tag{38.204}$$

ou, em termos da notação com funções generalizadas,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} \ = \ \delta(x-x_0)\ . \tag{38.205}$$

[34] Augustin Louis Cauchy (1789–1857).
[35] Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928).
[36] Gregory Breit (1899–1981).
[37] Eugene Paul Wigner (1902–1995).

A identidade (38.204), especialmente na forma (38.205), é conhecida como *fórmula de Breit-Wigner*.

A demonstração é muito simples. Observemos que $\ell_{x_0,\,\epsilon}(x) > 0$ para todo x, que $\int_{-\infty}^{\infty} \ell_{x_0,\,\epsilon}(x)dx = 1$ para todo $\epsilon > 0$ e todo $x_0 \in \mathbb{R}$ e observemos que para todo $\delta > 0$ vale

$$\int_{x_0+\delta}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{x_0-\delta} \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}\,dx \;=\; \frac{-1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{\delta}{\epsilon}\right)-\frac{\pi}{2}\right)\,,$$

implicando que para todo $\delta > 0$ vale

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{x_0-\delta} \ell_{x_0,\,\epsilon}(x)\,dx + \int_{x_0+\delta}^{\infty} \ell_{x_0,\,\epsilon}(x)\,dx\right] \;=\; 0\,.$$

Pela Definição 37.1, página 1944, concluímos que $\ell_{x_0,\,\epsilon}$ (para $\epsilon \to 0$) é uma sequência delta de Dirac centrada em x_0 e, pelo Teorema 37.1, página 1947, concluímos pela validade de (38.204) e (38.205) em funções do espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

• **A fórmula de Plemelj-Sokhotsky-Weierstrass**

Para $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, vale

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{(x-x_0)\pm i\epsilon} \;=\; \frac{1}{\pi}\frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} \mp i\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}\,.$$

Verifique! Logo, se definirmos $j_{x_0,\,\epsilon}(x) := \frac{1}{\pi}\frac{1}{(x-x_0)\pm i\epsilon}$ e $\kappa_{x_0,\,\epsilon}(x) := \frac{1}{\pi}\frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}$, $x \in \mathbb{R}$, teremos $j_{x_0,\,\epsilon} = \kappa_{x_0,\,\epsilon} \mp i\ell_{x_0,\,\epsilon}$ com $\ell_{x_0,\,\epsilon}$ definido em (38.203) e, assim,

$$\mathsf{T}_{j_{x_0,\,\epsilon}} \;=\; \mathsf{T}_{\kappa_{x_0,\,\epsilon}} \mp i\mathsf{T}_{\ell_{x_0,\,\epsilon}}\,.$$

Com a fórmula de Breit-Wigner (38.204) já sabemos que $\lim_{\epsilon\to 0}\mathsf{T}_{\ell_{x_0,\,\epsilon}} = \delta_{x_0}$. Vamos agora estudar o limite $\lim_{\epsilon\to 0}\mathsf{T}_{\kappa_{x_0,\,\epsilon}}$.

Para $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ temos

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_{\kappa_{x_0,\,\epsilon}}(\varphi) \;&=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\kappa_{x_0,\,\epsilon}(x)\varphi(x)\,dx \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}\varphi(x)\,dx \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+\epsilon^2}\varphi(y+x_0)\,dy\\ &=\; \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{y^2}{y^2+\epsilon^2}\left(\frac{\varphi(y+x_0)-\varphi(-y+x_0)}{y}\right)dy\,. \qquad (38.206)\end{aligned}$$

A função de y dada por $\frac{\varphi(y+x_0)-\varphi(-y+x_0)}{y}$ é integrável, pois $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ e pois $\lim_{y\to 0}\frac{\varphi(y+x_0)-\varphi(-y+x_0)}{y}$ é finito, por φ ser diferenciável em x_0. Além disso, vale que $\frac{y^2}{y^2+\epsilon^2} < 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Logo, o integrando do lado direito de (38.206) é majorado pela função integrável $\left|\frac{\varphi(y+x_0)-\varphi(-y+x_0)}{y}\right|$. Aplica-se, portanto, o Teorema da Convergência Dominada, Teorema 31.6, página 1557, que nos permite escrever que

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\mathsf{T}_{\kappa_{x_0,\,\epsilon}}(\varphi) \;&=\; \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{y^2}{y^2+\epsilon^2}\left(\frac{\varphi(y+x_0)-\varphi(-y+x_0)}{y}\right)dy\\ &=\; \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\lim_{\epsilon\to 0}\frac{y^2}{y^2+\epsilon^2}\right]\left(\frac{\varphi(y+x_0)-\varphi(-y+x_0)}{y}\right)dy\\ &=\; \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\varphi(y+x_0)-\varphi(-y+x_0)}{y}\right)dy \;\overset{(38.197)}{=}\; \frac{1}{\pi}\left\langle \mathsf{VP}\left(\frac{1}{x-x_0}\right),\,\varphi\right\rangle\,,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\mathsf{T}_{\kappa_{x_0,\,\epsilon}} \;=\; \frac{1}{\pi}\mathsf{VP}\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\,.$$

Com isso, provamos que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathsf{T}_{j_{x_0,\,\epsilon}} \;=\; \frac{1}{\pi}\mathsf{VP}_{x_0} \mp i\delta_{x_0} \;. \tag{38.207}$$

Na notação de funções generalizadas isso fica

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\frac{1}{(x-x_0)\pm i\epsilon} \;=\; \frac{1}{\pi}\mathsf{VP}\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \mp i\delta(x-x_0) \;. \tag{38.208}$$

As relações (38.207) e (38.208) são denominadas *fórmula de Plemelj*[38]*-Sokhotsky*[39]*-Weierstrass*[40] (ou outros arranjos de um, dois ou três desses nomes).

As distribuições definidas pelo limite do lado esquerdo de (38.208) são frequentemente denotadas como $\frac{1}{\pi}\frac{1}{(x-x_0)\pm i0}$:

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{(x-x_0)\pm i0} \;:=\; \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\frac{1}{(x-x_0)\pm i\epsilon} \;, \tag{38.209}$$

a igualdade sendo entendida no sentido de distribuições. Assim,

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{(x-x_0)\pm i0} \;=\; \frac{1}{\pi}\mathsf{VP}\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \mp i\delta(x-x_0) \;. \tag{38.210}$$

A distribuição $\frac{1}{\pi}\frac{1}{x\pm i0}$ pode também ser descrita de outra forma. Para $\epsilon>0$ podemos escrever

$$\int_0^\infty e^{ip(\pm x+i\epsilon)}\,dp \;=\; \pm\frac{i}{x\pm i\epsilon} \;.$$

Assim,

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{x\pm i0} \;=\; \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mp i}{\pi}\int_0^\infty e^{\pm ip(x\pm i\epsilon)}\,dp \;,$$

onde a distribuição do lado direito é definida sobre $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ por

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mp i}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)e^{\pm ip(x\pm i\epsilon)}\,dx\right)dp \;=\; \lim_{\epsilon\to 0}\mp i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-p\epsilon}\mathcal{F}[\varphi](p)\,dp \;=\; \mp i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \mathcal{F}[\varphi](p)\,dp \;.$$

A fórmula de Plemelj-Sokhotsky-Weierstrass (38.210) pode ser escrita, portanto, na forma da identidade distribucional

$$\int_0^\infty e^{ip\left(\pm(x-x_0)+i0\right)}dp \;=\; \pm i\mathsf{VP}\left(\frac{1}{x-x_0}\right)+\pi\delta(x-x_0) \;. \tag{38.211}$$

Essa expressão será reencontrada na forma das expressões (38.234) e (38.235), página 2083, quando lidarmos com transformadas de Fourier de distribuições.

• A distribuição $\delta\big(f(x)\big)$

A expressão $\delta\big(f(x)\big)$, que representa a composição da distribuição delta de Dirac com uma função (adequada) f, ocorre amiúde no trato com distribuições. No que segue, vamos encontrar uma identidade útil para a mesma, a saber, mostraremos que se f for diferenciável e anular-se em um único ponto x_0 do seu domínio e valer $f'(x_0)\neq 0$, tem-se, em termos de funções generalizadas,

$$\delta\big(f(x)\big) \;=\; \frac{1}{\left|f'(x_0)\right|}\,\delta(x-x_0) \;. \tag{38.212}$$

É importante frisar que no denominador do lado direito ocorre o módulo de $f'(x_0)$, não apenas $f'(x_0)$.

Na demonstração dessa igualdade algumas hipóteses adicionais (invertibilidade, diferenciabilidade) serão supostas sobre f. Mencionamos que essas hipóteses adicionais e a hipótese de que f tenha um único zero podem ser enfraquecidas. Para isso, vide a identidade (38.216) e os comentários ao final.

Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

[38] Josip Plemelj (ou Plemelji) (1873–1967).
[39] Yulian-Karl Vasilievich Sokhotsky (também grafado como Sochocki ou Sokhatsk) (1842–1927).
[40] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897).

1. f é uma função bijetora e, portanto, é inversível em toda parte, sendo f^{-1} sua função inversa;

2. f e f^{-1} são contínuas e infinitamente diferenciáveis em seus domínios de definição;

3. f anula-se em um (único!) ponto x_0 em seu domínio de definição. Assim, $x_0 = f^{-1}(0)$;

4. f' não se anula em parte alguma, em particular, $f'(x_0) \neq 0$.

Devido à última hipótese, tem-se $f' > 0$ ou $f' < 0$, ou seja, ou f é uma função crescente ou decrescente. Com isso, podemos estabelecer uma convenção. Caso f seja <u>crescente</u>, denotamos $A \equiv \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $B \equiv \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e, caso seja f <u>decrescente</u>, denotamos $A \equiv \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ e $B \equiv \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Note-se que A pode ser $\mp\infty$ e B pode ser $\pm\infty$, caso os limites acima não existam. Em todo caso, como f anula-se em um único ponto x_0, teremos pela convenção acima que $A < 0 < B$, seja f crescente ou decrescente.

Essa convenção para a definição de A e de B é útil pela seguinte razão. Seja H uma função contínua e que decaia a zero suficientemente rápido em $\pm\infty$. Temos, pela mudança de variáveis $y = f(x)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H\big(f(x)\big)\, dx \;=\; \begin{cases} \displaystyle\int_A^B H(y)\, \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}\, dy\,, & \text{para } f \text{ crescente,} \\[2ex] \displaystyle\int_B^A H(y)\, \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}\, dy\,, & \text{para } f \text{ decrescente.} \end{cases}$$

Lembrando que sempre vale que $A < B$, que $f' > 0$ quando f é crescente e que $f' < 0$ quando f é decrescente, podemos sempre escrever que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H\big(f(x)\big)\, dx \;=\; \int_A^B H(y)\, \frac{1}{\Big|f'\big(f^{-1}(y)\big)\Big|}\, dy\,.$$

Observe-se o módulo no denominador $\Big|f'\big(f^{-1}(y)\big)\Big|$. Sua presença decorre de termos $A < B$ e de a integração ser feita de A a B, independente de a função f ser crescente ou decrescente.

Seja agora g_n, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência delta de Dirac centrada em 0 de funções localmente integráveis, por exemplo, a sequência $g_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2x^2}$. Afirmamos que as funções compostas $g_n \circ f$ são localmente integráveis. De fato, para qualquer intervalo finito $(a,\ b)$, com $a < b$, teremos

$$\int_a^b \Big|g_n\big(f(x)\big)\Big|\, dx \;=\; \int_{f(a)}^{f(b)} |g_n(y)|\, \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}\, dy\,,$$

onde fizemos a mudança de variáveis $y = f(x)$. Pelas hipóteses, é evidente que o lado direito é finito para todo intervalo finito $(a,\ b)$, provando que $g_n \circ f$ são localmente integráveis é localmente integrável.

Podemos, portanto, considerar a sequência de distribuições regulares $\mathsf{T}_{g_n\circ f} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Valerá, para $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,

$$\big\langle \mathsf{T}_{g_n\circ f},\ \varphi\big\rangle \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} g_n\big(f(x)\big)\, \varphi(x)\, dx \;=\; \int_A^B g_n(y)\, \frac{1}{\Big|f'\big(f^{-1}(y)\big)\Big|}\, \varphi\big(f^{-1}(y)\big)\, dy\,,$$

novamente pela mudança de variável $y = f(x)$. Como g_n é uma sequência delta de Dirac centrada em 0, obtemos da última expressão, tomando-se $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \big\langle \mathsf{T}_{g_n\circ f},\ \varphi\big\rangle \;=\; \frac{1}{\Big|f'\big(f^{-1}(0)\big)\Big|}\, \varphi\big(f^{-1}(0)\big) \;=\; \frac{1}{\Big|f'(x_0)\Big|}\, \varphi(x_0)\,.$$

Concluímos disso que

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{T}_{g_n\circ f} \;=\; \frac{1}{\Big|f'\big(f^{-1}(0)\big)\Big|}\, \delta_{f^{-1}(0)} \;=\; \frac{1}{\Big|f'(x_0)\Big|}\, \delta_{x_0}\,. \tag{38.213}$$

Lembrando que as funções $g_n(x)$ convergem formalmente à função generalizada $\delta(x)$ (que representa a distribuição delta de Dirac centrada em 0), podemos expressar (38.213) em termos de funções generalizadas, obtendo

$$\delta\big(f(x)\big) \;=\; \frac{1}{\Big|f'\big(f^{-1}(0)\big)\Big|}\,\delta\big(x-f^{-1}(0)\big) \;=\; \frac{1}{\Big|f'(x_0)\Big|}\,\delta(x-x_0)\;.$$

Essa identidade

$$\delta\big(f(x)\big) \;=\; \frac{1}{\Big|f'(x_0)\Big|}\,\delta(x-x_0)\;, \tag{38.214}$$

onde x_0 é o ponto onde f se anula, é muito frequentemente encontrada em textos de Física e Engenharia. Ela representa a afirmação que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\delta\big(f(x)\big)\;dx \;=\; \frac{1}{\Big|f'(x_0)\Big|}\,\varphi(x_0)\;.$$

É importante frisar que no denominador do lado direito ocorre o módulo de $f'(x_0)$, não apenas $f'(x_0)$.

Assim, tem-se, por exemplo, para $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, constante, a identidade útil

$$\delta(ax) \;=\; \frac{1}{|a|}\,\delta(x)\;, \tag{38.215}$$

que segue do caso em que $f(x)=ax$.

As identidades (38.213) e (38.214) podem também ser expressas da seguinte forma:

$$\delta_0\circ f \;:=\; \frac{1}{\Big|f'\big(f^{-1}(0)\big)\Big|}\,\delta_{f^{-1}(0)} \;=\; \frac{1}{\Big|f'(x_0)\Big|}\,\delta_{x_0}\;.$$

O leitor pode facilmente constatar que a hipótese que f seja definida em todo $\mathbb{R}$ pode ser enfraquecida. As relações acima permanecem válidas se f for definida em um intervalo aberto ou semiaberto de $\mathbb{R}$, desde que nele continue sendo inversível e que se mantenham as condições de diferenciabilidade sobre f e sua inversa. Com isso em mãos, é também possível considerar o caso em que f possua um conjunto finito de zeros: $\{x_1,\,\ldots,\,x_n\}$. Nesse caso, tem-se

$$\delta\big(f(x)\big) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Big|f'(x_k)\Big|}\,\delta(x-x_k)\;. \tag{38.216}$$

Naturalmente, deve ser mantida a hipótese que $f'(x_k)\neq 0$ para cada k.

E. 38.47 *Exercício*. Estabeleça condições precisas sobre f que garantam a validade de (38.216), dando sentido à distribuição $\delta\big(f(x)\big)$ quando f possua n zeros em $\mathbb{R}$, a saber, os pontos $x_1,\,\ldots,\,x_n$. ✠

Comentamos ainda que as diversas identidades obtidas acima são a base para a definição da noção de distribuição delta de Dirac em variedades.

38.3.4 Derivadas de Distribuições

Uma das razões pelas quais definimos distribuições sobre espaços de funções infinitamente diferenciáveis é que isso torna possível definir a noção de *derivada de uma distribuição*. Exemplos de interesse de derivadas de distribuições serão apresentados na Seção 38.3.4.1, página 2077, e na Seção 38.3.4.2, página 2078. Comecemos a discussão com o caso unidimensional.

Um dos aspectos mais atraentes que resultarão dessa empreitada será a possibilidade de se oferecer um sentido (distribucional) às derivadas de certas funções que não são diferenciáveis no sentido tradicional. Outro aspecto atraente será a possibilidade de se estender a noção de equações diferenciais (lineares, ao menos) para distribuições.

• **Derivadas de distribuições em $\mathbb{R}$**

Seja f um elemento de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ (ou de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$). Como é bem sabido, sua derivada em $x \in \mathbb{R}$ é dada por

$$f'(x) \;=\; \lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\Big(f(x+a)-f(x)\Big) \;=\; \lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\Big(\big(\mathcal{T}_{-a}f\big)(x)-f(x)\Big) \;=\; \lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\Big(\big(\mathcal{T}_{-a}-\mathbf{id}\,\big)f\Big)(x)\;.$$

Como $\mathcal{T}_y$ representa a ação do grupo de translações em $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ (ou de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$) e $\mathcal{T}_y^*$ a correspondente ação do grupo de translações em distribuições (vide acima), é natural definir-se a derivada de uma distribuição $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ por

$$T' \;:=\; \lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\big(\mathcal{T}_{-a}^*-\mathbf{id}\,\big)T\;, \tag{38.217}$$

caso esse limite exista. A existência do limite é fácil de ser estabelecida pontualmente. De fato, se f for um elemento de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ (ou de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$), temos que

$$\frac{1}{a}\Big(\big(\mathcal{T}_{-a}^*-\mathbf{id}\,\big)T\Big)(f) \;=\; \frac{1}{a}\Big(\big(\mathcal{T}_{-a}^*T\big)(f)-T(f)\Big) \;=\; \frac{1}{a}\Big(T(\mathcal{T}_a f)-T(f)\Big) \;=\; T\left(\frac{\mathcal{T}_a f-f}{a}\right)\;.$$

Agora, $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{(\mathcal{T}_a f)(x)-f(x)}{a} = \lim_{a\to 0}\frac{f(x-a)-f(x)}{a} = -f'(x)$, sendo f' um elemento de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ (ou de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$), com a convergência se dando também na topologia de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ (ou de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$). Portanto, a continuidade de T implica

$$T'(f) \;=\; \lim_{a\to 0}T\left(\frac{\mathcal{T}_a f-f}{a}\right) \;=\; -T(f')\;.$$

Vemos com isso que a derivada de T está bem definida e vale

$$T'(f) \;=\; -T(f')\;. \tag{38.218}$$

Assim, distribuições são sempre diferenciáveis e, em verdade, infinitamente diferenciáveis, como não é difícil de se ver, repetindo-se a argumentação.

Antes de generalizarmos esses fatos, tratemos de mais uma motivação para a relação (38.218).

• **Derivadas de certas distribuições regulares em $\mathbb{R}$**

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável e localmente integrável, cuja derivada seja também localmente integrável. Então, por (38.168), T_g e $\mathsf{T}_{g'}$ definem distribuições regulares em $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Notemos agora que para toda f de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ vale

$$\mathsf{T}_{g'}(f) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)f(x)\,dx \;=\; -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f'(x)\,dx \;=\; -\mathsf{T}_g(f') \tag{38.219}$$

(a segunda igualdade segue de integração por partes pois, pelas hipóteses, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)f(x) = 0$). Seguindo a ideia de identificar uma distribuição com a "função generalizada" que a representa (vide discussão à página 2062), podemos interpretar $\mathsf{T}_{g'}$ como sendo a derivada da distribuição T_g e temos, novamente, portanto, $\mathsf{T}_g'(f) = -\mathsf{T}_g(f')$.

Esses comentários motivam a definição da noção de derivada de uma distribuição geral.

• **Definindo derivadas de distribuições em $\mathbb{R}$**

Definição 38.1 *Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ é uma distribuição qualquer, definimos sua derivada $T' \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ como sendo a distribuição dada por*

$$T'(f) \;:=\; -T(f') \tag{38.220}$$

para toda $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Assim, na notação de emparelhamento,

$$\langle T',\, f\rangle \;=\; -\,\langle T,\, f'\rangle\;.$$

Note-se que, com isso, (38.219) informa-nos que para toda função diferenciável e localmente integrável g, cuja derivada seja também localmente integrável, vale a seguinte relação entre distribuições regulares:

$$(\mathsf{T}_g)' \;=\; \mathsf{T}_{g'}\;.$$

Na notação integral para distribuições, se $t(x)$ é a "função generalizada" que representa T, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} t'(x)\,f(x)\,dx \;=\; -\int_{-\infty}^{\infty} t(x)\,f'(x)\,dx\;.$$

É um exercício elementar constatar que T', assim definida, é de fato uma distribuição. Fazendo uso do fato de lidarmos com funções infinitamente diferenciáveis podemos generalizar ainda mais essa definição

Definição 38.2 *Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ é uma distribuição qualquer e $n \in \mathbb{N}_0$, definimos a n-ésima derivada de T, denotada por $T^{(n)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, como sendo a distribuição dada por*

$$T^{(n)}(f) \ := \ (-1)^n T\left(f^{(n)}\right) \tag{38.221}$$

para toda $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Assim, na notação de emparelhamento,

$$\left\langle T^{(n)},\ f\right\rangle \ = \ (-1)^n \left\langle T,\ f^{(n)}\right\rangle$$

e na notação integral, se $t(x)$ é a "função generalizada" que representa T,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{(n)}(x)\, f(x)\, dx \ = \ (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\, f^{(n)}(x)\, dx \ .$$

Novamente, é um exercício elementar constatar que $T^{(n)}$, assim definida, é de fato uma distribuição. No sentido da definição acima, distribuições são infinitamente diferenciáveis.

No que segue, denotaremos a derivada de uma distribuição T por T' ou também por $\frac{d}{dx}T$. Analogamente, a n-ésima derivada $T^{(n)}$ também será por vezes denotada por $\frac{d^n}{dx^n}T$.

Mais considerações sobre a continuidade de derivadas de distribuições regulares serão apresentadas logo adiante. É importante notar que se T_g for uma distribuição regular, sua derivada $\mathsf{T}_g{}'$ não é necessariamente uma distribuição regular (a função g pode não ser diferenciável, ou sua derivadas pode não ser localmente integrável). Um exemplo desse tipo é discutido na Seção 38.3.4.2, logo adiante: para a função de Heaviside H, tem-se $\mathsf{T}_H{}' = \delta_0$.

• **Derivadas de distribuições temperadas em $\mathbb{R}$**

Todos os comentários e definições acima particularizam-se para distribuições temperadas: se $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ definimos sua n-ésima derivada por

$$\left\langle T^{(n)},\ f\right\rangle \ = \ (-1)^n \left\langle T,\ f^{(n)}\right\rangle \ , \qquad \forall\, f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$$

e, em especial, se g for uma função n vezes diferenciável e de crescimento polinomialmente limitado cujas n primeiras derivadas são igualmente de crescimento polinomialmente limitadas, temos para distribuições regulares

$$(\mathsf{T}_g)^{(n)} \ = \ \mathsf{T}_{g^{(n)}} \ ,$$

como facilmente se constata via integração por partes. Mais considerações sobre a continuidade de derivadas de distribuições temperadas regulares serão apresentadas logo adiante.

É importante observar que pode ocorrer de uma função g ser de crescimento polinomialmente limitado mas não suas derivadas. Considere-se $g(x) = \cos\left(e^{x^4}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Essa função é de crescimento polinomialmente limitado, mas $g'(x) = -4x^3 e^{x^4}\, \mathrm{sen}\left(e^{x^4}\right)$ não é. Nesse caso $(\mathsf{T}_g)'$ está definida enquanto distribuição temperada, mas $\mathsf{T}_{g'}$ não está.

Esse último exemplo é interessante, pois $\mathsf{T}_{g'}$ está, porém, definida como distribuição (não temperada). Trata-se, portanto, de um elemento de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ que não pertence a $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Em $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ vale até a igualdade $(\mathsf{T}_g)' = \mathsf{T}_{g'}$, a qual não faz sentido em $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

• **Derivadas parciais de distribuições em $\mathbb{R}^n$**

As definições acima estendem-se naturalmente a distribuições definidas em $\mathbb{R}^n$:

Definição 38.3 *Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição qualquer e α é um multi-índice, definimos a distribuição $D^\alpha T$ como sendo a distribuição em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dada por*

$$\big(D^\alpha T\big)(f) \ := \ (-1)^{|\alpha|}\, T\big(D^\alpha f\big) \tag{38.222}$$

para toda $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Assim, na notação de emparelhamento,

$$\langle D^\alpha T,\ f\rangle \ = \ (-1)^{|\alpha|}\, \langle T,\ D^\alpha f\rangle$$

e na notação integral, se $t(x)$ é a "função generalizada" que representa T,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big(D^\alpha t\big)(x)\, f(x)\, d^n x \;=\; (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} t(x)\, \big(D^\alpha f\big)(x)\, d^n x\,.$$

É um exercício elementar provar, usando as definições acima, que $D^\alpha T$ é de fato uma distribuição.

Uma vez entendido que distribuições são objetos infinitamente diferenciáveis, podemos também definir certos tipos de equações diferenciais para distribuições, o que faremos mais adiante, limitando nossa discussão a equações lineares.

38.3.4.1 Alguns Exemplos de Derivadas de Distribuições

• **Derivadas de distribuições regulares**

Seja h uma função localmente integrável em $\mathbb{R}^n$ e seja T_h a correspondente distribuição regular definida em (38.168). Se β é um n-multi-índice, $D^\beta \mathsf{T}_h$ é definida por

$$\langle D^\beta \mathsf{T}_h,\, \varphi\rangle \;\equiv\; D^\beta \mathsf{T}_h(\varphi) \;:=\; (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \big(D^\beta \varphi\big)(x)\, d^n x \tag{38.223}$$

para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Que (38.223) está bem definida para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ segue do seguinte argumento. Pelo fato de o suporte de φ ser compacto podemos restringir a integral de (38.223) a esse suporte. Como $D^\beta \varphi$ é limitado, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\, \big|D^\beta \varphi(x)\big|\, d^n x \;\leq\; \sup\big\{\big|D^\beta \varphi(x)\big|,\, x \in \mathbb{R}^n\big\} \int_{\operatorname{supp}\varphi} |h(x)|\, d^n x$$

que é finito por hipótese. Com isso, (38.223) define um funcional linear em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Provemos que esse funcional linear é contínuo. Para tal seja $\varphi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ uma sequência de funções que converge a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ no sentido de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Então, existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi - \varphi_k) \subset K$ para todo k grande o suficiente e para todo multi-índice β, tem-se que $\sup\{|D^\beta \varphi(x) - D^\beta \varphi_k(x)|,\, x \in \mathbb{R}^n\} \to 0$ para $k \to \infty$. Portanto, para todo k grande o suficiente, vale

$$\begin{aligned}\big|D^\beta \mathsf{T}_h(\varphi - \varphi_k)\big| \;&\leq\; \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\, \big|D^\beta \varphi(x) - D^\beta \varphi_k(x)\big|\; d^n x \;=\; \int_K |h(x)|\, \big|D^\beta \varphi(x) - D^\beta \varphi_k(x)\big|\; d^n x \\ &\leq\; \sup\Big\{\big|D^\beta \varphi(x) - D^\beta \varphi_k(x)\big|\,,\; x \in \mathbb{R}^n\Big\} \int_K |h(x)|\, d^n x\,.\end{aligned}$$

Como a integral do lado direito é finita, concluímos que $\big|D^\beta \mathsf{T}_h(\varphi - \varphi_k)\big| \to 0$ para $k \to \infty$ e isso estabelece que $D^\beta \mathsf{T}_h$ é contínua em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, que é um elemento de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Analogamente ao exemplo de (38.166), nem toda distribuição desse tipo é temperada.

• **Derivadas de distribuições temperadas regulares**

Seja g uma função (mensurável) e de crescimento polinomialmente limitado definida em $\mathbb{R}^n$, satisfazendo (38.17) para algum $C > 0$ e algum $m \in \mathbb{N}_0$. Seja T_g a correspondente distribuição temperada regular definida em (38.169). Se β é um n-multi-índice, $D^\beta \mathsf{T}_g$ é definida por

$$\langle D^\beta \mathsf{T}_g,\, f\rangle \;\equiv\; D^\beta \mathsf{T}_g(f) \;:=\; (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) D^\beta f(x)\, d^n x \tag{38.224}$$

para $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ define uma distribuição temperada (e, portanto, uma distribuição). Que (38.224) está bem definida para todo $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ vê-se pelo seguinte argumento. Escrevemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\, |D^\beta f(x)|\, d^n x \;\overset{(38.17)}{\leq}\; C \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|)^m\, |D^\beta f(x)|\, d^n x \;\overset{(38.10)}{\leq}\; C \|f\|_{q,\,\beta} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + \|x\|)^{q-m}}\; d^n x\,. \tag{38.225}$$

Escolhendo q grande o suficiente (a saber, $q \geq n + m + 1$), a integral do lado direito de (38.225) é finita, provando que o lado direito de (38.224) é uma integral absolutamente convergente para todo $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Assim, (38.224) define um funcional linear em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Provemos agora que é contínuo em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Para tal seja $f_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ uma sequência de funções que converge a $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ no sentido de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Teremos

$$\left|D^\beta \mathsf{T}_g(f-f_k)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\,|D^\beta(f-f_k)(x)|\,d^nx \overset{(38.17)}{\leq} C\int_{\mathbb{R}^n}(1+\|x\|)^m\,|D^\beta(f-f_k)(x)|\,d^nx$$

$$\overset{(38.10)}{\leq} C\|f-f_k\|_{q,\,\beta}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+\|x\|)^{q-m}}\,d^nx\,.$$

Novamente escolhendo q grande o suficiente (a saber, $q \geq n+m+1$) a integral do lado direito fica finita e concluímos que existe uma constante C_0, independente de k, tal que $\left|D^\beta \mathsf{T}_g(f-f_k)\right| \leq C_0\|f-f_k\|_{q,\,\beta}$. Por hipótese, $\|f-f_k\|_{q,\,\beta} \to 0$ para $k \to \infty$ e isso estabelece que $D^\beta \mathsf{T}_g$ é contínua em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

• **Derivadas da distribuição de Dirac**

Pelas definições acima podemos definir a derivada n-ésima da distribuição de Dirac centrada em x_0 por

$$\delta_{x_0}^{(n)}(f) := (-1)^n\,\delta_{x_0}\left(f^{(n)}\right) = (-1)^n f^{(n)}(x_0)$$

para toda $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

38.3.4.2 Cálculo da Derivada de Algumas Distribuições de Interesse

Para entender melhor o que as definições apresentadas acima para a noção de derivada de uma distribuição significam, trataremos aqui de exemplos, dentre os quais, alguns de considerável interesse.

Considere-se a distribuição de Heaviside T_H definida em (38.174). Vamos mostrar que a derivada de T_H coincide com a distribuição δ_0. Pela definição, para toda $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$,

$$(\mathsf{T}_H)'(f) = -\mathsf{T}_H(f') = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)f'(x)\,dx = -\int_0^\infty f'(x)\,dx = f(0)-f(\infty) = f(0). \tag{38.226}$$

Portanto, para toda $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ tem-se $(\mathsf{T}_H)'(f) = \delta_0(f)$. Isso mostra, fazendo-se uma analogia com (38.219), que a distribuição de Dirac pode ser entendida como a derivada da distribuição associada à função degrau. Assim, apesar de $H(x)$ não ser uma função diferenciável (sua derivada não está definida em $x=0$), podemos interpretar sua derivada $H'(x)$ como uma "função generalizada", a saber por meio da relação

$$H'(x) = \delta(x)\,.$$

Ao notar que H' não existe enquanto função mas existe enquanto "função generalizada" o estudante pode apreciar melhor a relevância dessa noção.

E. 38.48 *Exercício importante*. Seja h a função contínua mas com derivada descontínua (em $x=0$) definida por

$$h(x) := \frac{|x|+x}{2} = \begin{cases} 0\,, & x \leq 0\,, \\ x\,, & x > 0\,. \end{cases}$$

Mostre que $(\mathsf{T}_h)' = \mathsf{T}_H$ (com H definida em (38.173)) e que $(\mathsf{T}_h)'' = \delta_0$. Conclua, em termos de "funções generalizadas", que valem

$$h'(x) = H(x) \qquad \text{e} \qquad h''(x) = \delta(x)\,.$$

O estudante deve atentar para o fato que a relação $h'(x) = H(x)$ não deve ser entendida como uma igualdade entre funções, mas entre "funções generalizadas", pois h' não existe enquanto função (h não é diferenciável em 0), ainda que H o seja. ✠

Esse exercício mostra que a distribuição de Dirac é a derivada (distribucional) segunda de uma função contínua e polinomialmente limitada, a saber, da função h. Um teorema mais profundo da Teoria das Distribuições afirma que

toda distribuição em $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ é a derivada de ordem suficientemente grande de uma função contínua e polinomialmente limitada. Vide Teorema 38.5, página 2080 e vide, *e.g.*, [412] e [413]. Essa afirmação não é válida para as distribuições em $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ (ache um contraexemplo!).

• **As derivadas das distribuições $\ln|x|$, $(\ln x)_+$ e $(\ln|x|)_-$**

Como já observamos, $\ln|x|$ é uma função localmente integrável e, portanto, define uma distribuição com $\langle \ln|x|,\ \varphi\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x|\,\varphi(x)dx$, o mesmo se dando com as funções $(\ln x)_+$ e $(\ln|x|)_-$ definidas em (38.167). No que segue, vamos calcular as derivadas dessas distribuições e estabelecer que

$$\frac{d}{dx}\ln|x| \;=\; \mathsf{VP}\left(\frac{1}{x}\right)\;,\qquad \frac{d}{dx}(\ln x)_+ \;=\; \mathsf{PF}\left(\frac{H(x)}{x}\right)\qquad \text{e}\qquad \frac{d}{dx}(\ln|x|)_- \;=\; \mathsf{PF}\left(\frac{H(-x)}{x}\right)\;. \tag{38.227}$$

As duas últimas relações foram estabelecidas em (38.201) e (38.202), respectivamente, de modo que falta-nos apenas demonstrar a primeira. Observemos para tal que

$$\left\langle \frac{d}{dx}\ln|x|,\ \varphi\right\rangle \;=\; -\langle \ln|x|,\ \varphi'\rangle \;=\; -\lim_{r\to 0+}\left\{\int_{-\infty}^{-r}\ln|x|\varphi'(x)dx + \int_{r}^{\infty}\ln|x|\varphi'(x)dx\right\}$$

$$= \lim_{r\to 0+}\left\{\ln(r)\varphi(r) - \ln(r)\varphi(-r) + \int_{-\infty}^{-r}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{r}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right\}\;.$$

Agora, $\ln(r)\varphi(r) \;=\; \ln(r)\varphi(0) + \frac{\varphi(r)-\varphi(0)}{r}r\ln(r)$ e, portanto

$$\ln(r)\varphi(r) - \ln(r)\varphi(-r) \;=\; \left(\frac{\varphi(r)-\varphi(0)}{r} - \frac{\varphi(-r)-\varphi(0)}{r}\right)r\ln(r)\;.$$

Quando $r\to 0$, a expressão $\frac{\varphi(r)-\varphi(0)}{r}$ converge a $\varphi'(0)$ e $\frac{\varphi(-r)-\varphi(0)}{r}$ converge a $-\varphi'(0)$. No entanto, $\lim_{r\to 0} r\ln r = 0$ e, portanto, $\lim_{r\to 0}\big(\ln(r)\varphi(r) - \ln(r)\varphi(-r)\big) = 0$ e disso concluímos que

$$\left\langle \frac{d}{dx}\ln|x|\ ,\ \varphi\right\rangle \;=\; \lim_{r\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-r}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{r}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] \;=\; \mathsf{VP}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\;,$$

demonstrando a primeira identidade em (38.227).

• **As derivadas das distribuições VP_{x_0} e $\mathsf{PF}_{x_0,\,m}$**

Podemos ainda coletar alguns dos resultados anteriores e interpretá-los em termos de derivadas de distribuições. Em (38.199), por exemplo, estabelecemos que para $m\in\mathbb{N}$, $m>1$,

$$\big(\mathsf{PF}_{x_0,\,m-1}\big)' \;=\; -(m-1)\mathsf{PF}_{x_0,\,m}$$

para todos $m\in\mathbb{N}$ e $x_0\in\mathbb{R}$, ou seja,

$$\frac{d}{dx}\mathsf{PF}\left(\frac{1}{(x-x_0)^m}\right) \;=\; -m\mathsf{PF}\left(\frac{1}{(x-x_0)^{m+1}}\right)\;,\qquad m\in\mathbb{N}\;,\ x_0\in\mathbb{R}\;.$$

A relação (38.200) pode ser lida como

$$\big(\mathsf{VP}_{x_0}\big)^{(m-1)} \;=\; (-1)^{m-1}(m-1)!\ \mathsf{PF}_{x_0,\,m} \tag{38.228}$$

para todos $m\in\mathbb{N}$ e $x_0\in\mathbb{R}$, ou seja, estabelecemos que

$$\frac{d^m}{dx^m}\mathsf{VP}\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \;=\; (-1)^m m!\ \mathsf{PF}\left(\frac{1}{(x-x_0)^{m+1}}\right)\;,\qquad m\in\mathbb{N}_0\;,\ x_0\in\mathbb{R}\;.$$

Junto com a primeira relação em (38.227), isso estabeleceu também que

$$\mathsf{PF}\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) \;=\; \frac{(-1)^m}{m!}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\big(\ln|x|\big)\;,\qquad m\in\mathbb{N}_0\;.$$

38.3.5 Alguns Resultados Estruturais sobre Distribuições

Nesta breve seção listaremos alguns resultados importantes sobre a natureza das distribuições e distribuições temperadas. Suas demonstrações serão omitidas na presente versão deste texto por requererem um estudo mais aprofundado de aspectos topológicos que subjazem à teoria das distribuições.

• **Suporte de Distribuições. Suporte singular de distribuições**

Recordemos que o suporte de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, denotado por $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^n$, é o fecho do conjunto de todos os pontos onde a função não se anula. Para distribuições existe uma noção análoga. Dizemos uma distribuição $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ anula-se em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se $T(\varphi) = 0$ para toda $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ com $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$. O *suporte de uma distribuição* $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, denotado por $\operatorname{supp} T$, é o complemento da união de todos os abertos onde T se anula. É evidente por essa definição que suporte de uma distribuição é um conjunto fechado. Para distribuições temperadas a definição de suporte é idêntica.

O suporte da distribuição delta de Dirac centrada em x_0, δ_{x_0}, é $\{x_0\}$, como facilmente se constata. O mesmo vale para suas derivadas $\delta_{x_0}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$. O suporte de uma distribuição regular T_h coincide com o suporte de h.

Dizemos que duas distribuições T_1 e T_2 são iguais em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se $T_1 - T_2$ anula-se em Ω.

O *suporte singular de uma distribuição* $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, denotado por $\operatorname{sing\,supp} T$, é o menor fechado de $\mathbb{R}^n$ em cujo complemento T é igual a uma distribuição de $\mathscr{D}'_{\text{reg},\,\infty}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, a uma distribuição regular de uma função infinitamente diferenciável.

O suporte singular das distribuições $\delta_{x_0}^{(n)}$ coincide com o suporte dessas distribuições, ou seja, é $\{x_0\}$. O suporte da distribuição VP_{x_0} é $\mathbb{R}$, mas seu suporte singular é $\{x_0\}$.

E. 38.49 *Exercício*. Justifique essas afirmações. ✠

• **Regularidade de distribuições**

O resultado a seguir informa que toda distribuição temperada é uma derivada (de ordem grande o suficiente) de uma distribuição regular.

Teorema 38.5 *Seja $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Então, existe uma função h definida em $\mathbb{R}^n$, contínua e de crescimento polinomialmente limitado, e um n-multi-índice $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ tais que $T = D^\beta \mathsf{T}_h$, ou seja,*

$$T(f) \;=\; (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,\big(D^\beta f\big)(x)\; d^n x$$

para toda $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada, por exemplo, em [412] e [413]. Um exemplo notório é δ_0, a distribuição delta de Dirac centrada em 0 em $\mathbb{R}$. Vide Exercício E. 38.48, página 2078.

O Teorema 38.5 não é válido no caso de distribuições em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, como mostra o exemplo (de [412]) da distribuição $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ definida por $T := \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} D^n \delta_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x-n)$. Justifique! Uma forma "local" do mesmo, porém, é verdadeira:

Teorema 38.6 *Seja $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Então, para cada compacto $C \subset \mathbb{R}^n$ existe uma função contínua h definida em C e um n-multi-índice $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ (h e β podem depender de C) tais que $T(\varphi) = \big(D^\beta \mathsf{T}_h\big)(\varphi)$, para toda função de teste $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ com suporte em C, ou seja,*

$$T(\varphi) \;=\; (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,\big(D^\beta \varphi\big)(x)\; d^n x \tag{38.229}$$

para toda $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ com $\operatorname{supp}\varphi \subset C$.

Um corolário evidente é que para distribuições com suporte compacto as afirmações acima valem globalmente: se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ possuir suporte compacto, então existe uma função contínua h e um n-multi-índice $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ tais que $T = D^\beta \mathsf{T}_h$, ou seja vale $T(\varphi) = (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,\big(D^\beta \varphi\big)(x)\, d^n x$ para toda $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. □

Uma elegante demonstração desse teorema (fazendo uso do Teorema da Representação de Riesz, Teorema 39.4, página 2134) pode ser encontrada em [55]. Uma ilustração de como o Teorema 38.6 é usado pode ser encontrada na demonstração da Proposição 38.18, página 2088.

O teorema a seguir pode ser demonstrado a partir do Teorema 38.5. Vide, *e.g.*, [55] ou [412].

Teorema 38.7 *Seja $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição temperada cujo suporte é $\{x_0\}$, para $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Então, T é uma combinação linear finita da distribuição δ_{x_0} e suas derivadas, ou seja, existem $N \in \mathbb{N}$, constantes $c_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, N$ e inteiros não negativos distintos $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, \ldots, N$ com $0 \leq n_1 < \cdots < n_N$, tais que $T = \sum_{k=1}^{N} c_k \, \delta_{x_0}^{(n_k)}$.* □

38.3.6 Transformadas de Fourier de Distribuições Temperadas

Seja $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e seja T_g a distribuição temperada definida em (38.169) por $\mathsf{T}_g(f) \equiv \langle \mathsf{T}_g, \, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x) \, d^n x$. De acordo com (38.96) temos que $\langle \mathsf{T}_g, \, \mathcal{F}[f] \rangle = \langle \mathsf{T}_{\mathcal{F}[g]}, \, f \rangle$. Essa observação nos induz a definir a noção de transformada de Fourier de uma distribuição temperada seguindo o mesmo tipo de ideia que inspira a definição de derivadas de distribuições. Se $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição em $\mathbb{R}^n$, definimos sua transformada de Fourier $\mathcal{F}[T] \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ como sendo a distribuição que a cada $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ associa

$$\langle \mathcal{F}[T], \, f \rangle \; := \; \langle T, \, \mathcal{F}[f] \rangle \, .$$

Notemos que o lado direito, de fato, define um funcional linear <u>contínuo</u> em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ devido à Proposição 38.7, página 2027, que estabeleceu a continuidade de $\mathcal{F}$.

Analogamente, a transformada de Fourier inversa de $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ é definida por $\langle \mathcal{F}^{-1}[T], \, f \rangle := \langle T, \, \mathcal{F}^{-1}[f] \rangle$.

Com essas definições $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ passam a ser consideradas como aplicações lineares de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ sobre si mesmo com $\mathcal{F}^{-1}$ sendo a inversa de $\mathcal{F}$.

38.3.6.1 Cálculo de Transformadas de Fourier de Algumas Distribuições Temperadas

Seja δ_y a distribuição delta de Dirac centrada em $y \in \mathbb{R}^n$. Por definição, temos

$$\langle \mathcal{F}[\delta_y], \, f \rangle \; := \; \langle \delta_y, \, \mathcal{F}[f] \rangle \; = \; \mathcal{F}[f](y) \; = \; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot x} f(x) \, d^n x \; = \; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathsf{T}_{e_y}(f) \; = \; \left\langle \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathsf{T}_{e_y}, \, f \right\rangle \, ,$$

onde e_y é a função $e_y(x) := e^{-iy\cdot x}$. Assim, provamos que

$$\mathcal{F}[\delta_y] \; = \; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathsf{T}_{e_y} \, , \tag{38.230}$$

ou seja, na notação de funções generalizadas,

$$\mathcal{F}[\delta_y](p) \; = \; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-iy\cdot p} \, .$$

Em textos de Física não é raro encontrar-se essa identidade escrita também na forma

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot p} \delta(x-y) \, d^n x \; = \; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-iy\cdot p} \, .$$

É desnecessário repetir que a integral do lado esquerdo possui apenas um sentido simbólico. Apesar disso, relações como essa têm um valor prático e são frequentemente empregadas.

De forma totalmente análoga, prova-se que

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta_y] \; = \; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathsf{T}_{e_{-y}} \, . \tag{38.231}$$

E. 38.50 *Exercício*. Verifique! ✠

Dessas relações concluímos que

$$\mathcal{F}[\mathsf{T}_{e_{-y}}] \;=\; (2\pi)^{n/2}\,\delta_y \qquad \text{e que} \qquad \mathcal{F}^{-1}[\mathsf{T}_{e_y}] \;=\; (2\pi)^{n/2}\,\delta_y\;.$$

Escrevendo essas relações de maneira formal como uma integral, temos

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y-x)\cdot w}d^n w \;=\; \delta_y(x) \;=\; \delta(x-y)\;, \tag{38.232}$$

tal como antecipado em (38.83). Novamente comentamos que essas integrais, ainda que possuam apenas significado simbólico, são frequentemente empregadas em manipulações, especialmente em textos de Física.

As transformadas de Fourier de derivadas da distribuição delta de Dirac são também fáceis de se calcular. Para um n-multi-índice α, temos

$$\big\langle \mathcal{F}[D^\alpha\delta_y],\, f\big\rangle \;:=\; \big\langle D^\alpha\delta_y,\, \mathcal{F}[f]\big\rangle \;=\; (-1)^{|\alpha|}\big\langle \delta_y,\, D^\alpha\mathcal{F}[f]\big\rangle \;=\; (-i)^{|\alpha|}\big\langle \delta_y,\, P^\alpha\mathcal{F}[f]\big\rangle \;=\; i^{|\alpha|}\big\langle \delta_y,\, \mathcal{F}[Q^\alpha f]\big\rangle$$

$$=\; i^{|\alpha|}\mathcal{F}[Q^\alpha f](y) \;=\; \frac{i^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot x}x^\alpha f(x)\,d^n x \;=\; \frac{i^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}}\mathsf{T}_{e_{\alpha,y}}(f) \;=\; \left\langle \frac{i^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}}\mathsf{T}_{e_{\alpha,y}},\, f\right\rangle\;,$$

onde $e_{\alpha,y}$ é a função

$$e_{\alpha,y}(x) \;:=\; x^\alpha e^{-iy\cdot x}\;,$$

ou seja,

$$\mathcal{F}[D^\alpha\delta_y] \;=\; \frac{i^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}}\,\mathsf{T}_{e_{\alpha,y}}\;. \tag{38.233}$$

De forma totalmente análoga, prova-se que

$$\mathcal{F}^{-1}[D^\alpha\delta_y] \;=\; \frac{(-i)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}}\,\mathsf{T}_{e_{\alpha,-y}}\;.$$

Em termos da notação de funções generalizadas, a relação (38.233) se deixa escrever como

$$\mathcal{F}[D^\alpha\delta_y](p) \;=\; \frac{i^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}}\,p^\alpha e^{-iy\cdot p}\;.$$

E. 38.51 *Exercício*. Verifique! ✠

Dessas relações concluímos que

$$\mathcal{F}[\mathsf{T}_{e_{\alpha,-y}}] \;=\; i^{|\alpha|}(2\pi)^{n/2}D^\alpha\delta_y \qquad \text{e que} \qquad \mathcal{F}^{-1}[\mathsf{T}_{e_{\alpha,-y}}] \;=\; (-i)^{|\alpha|}(2\pi)^{n/2}D^\alpha\delta_y\;.$$

Escrevendo essas relações de maneira formal como uma integral, temos

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} w^\alpha e^{i(y-x)\cdot w}d^n w \;=\; i^{|\alpha|}D^\alpha_x\delta_y(x) \;=\; i^{|\alpha|}D^\alpha_x\delta(x-y)\;,$$

expressão essa que também pode ser obtida formalmente de (38.232).

• **A transformada de Fourier da distribuição de Heaviside e outras associadas**

É interessante determinarmos a transformada de Fourier da distribuição de Heaviside, entre outras razões, pois com ela obtemos também a transformada de Fourier de outras distribuições. Seja T_H a distribuição de Heaviside definida em (38.174). Para $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ teremos

$$\big(\mathcal{F}[\mathsf{T}_H]\big)(\varphi) \;=\; \mathsf{T}_H(\mathcal{F}\varphi) \;=\; \int_0^\infty \mathcal{F}[\varphi](y)\,dy \;=\; \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}}\int_0^\infty e^{-ay}\mathcal{F}[\varphi](y)\,dy\;,$$

sendo que a última igualdade é justificada pelo fato que $e^{-ay} < 1$ para todo $y \in \mathbb{R}_+$, pelo fato que $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L_1(\mathbb{R},\, dx)$ e pelo Teorema da Convergência Dominada, Teorema 31.6, página 1557. Agora,

$$\int_0^\infty e^{-ay}\mathcal{F}[\varphi](y)\, dy \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-ay}\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-ixy}\varphi(x)\, dx\right)\, dy \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty\left(\int_0^\infty e^{-ay-ixy}\, dy\right)\varphi(x)\, dx\;,$$

onde, para a troca de ordem de integração na última igualdade, usamos o Teorema de Fubini[41]. Como $\int_0^\infty e^{-ay-ixy}dy = \frac{1}{a+ix}$, temos

$$(\mathcal{F}[\mathsf{T}_H])(\varphi) \;=\; \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x-ia}\,\varphi(x)\, dx \;=\; \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left\langle \frac{1}{x-i0},\, \varphi\right\rangle\;,$$

onde a distribuição $\frac{1}{x-i0}$ foi definida em (38.209), página 2072, e satisfaz (38.210). Assim, com a identidade (38.210), página 2072, estabelecemos que

$$\mathcal{F}[\mathsf{T}_H] \;=\; \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x-i0} \;\overset{(38.210)}{=}\; \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\mathsf{VP}_0 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta_0\;. \tag{38.234}$$

De maneira análoga prova-se que

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathsf{T}_H] \;=\; \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x+i0} \;\overset{(38.210)}{=}\; \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathsf{VP}_0 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta_0\;. \tag{38.235}$$

O estudante deve comparar (38.234) e (38.235) a (38.211).

Das expressões (38.234)–(38.235) obtém-se facilmente as seguintes relações:

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x\pm i0}\right] \;=\; \mp i\sqrt{2\pi}\,\mathsf{T}_{H^\pm} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{x\pm i0}\right] \;=\; \mp i\sqrt{2\pi}\,\mathsf{T}_{H^\mp}\;,$$

sendo $H^\pm(y) = H(\pm y)$, ou seja, na notação de funções generalizadas,

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x\pm i0}\right](y) \;=\; \mp i\sqrt{2\pi}\,H(\pm y) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{x\pm i0}\right](y) \;=\; \mp i\sqrt{2\pi}\,H(\mp y)\;.$$

De (38.234)–(38.235) obtém-se também

$$\mathcal{F}\left[\mathsf{VP}_0\right] \;=\; \mp i\sqrt{2\pi}\,\mathsf{T}_{H^\pm-1/2} \;=\; -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathsf{T}_{\mathrm{sgn}} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}^{-1}\left[\mathsf{VP}_0\right] \;=\; \pm i\sqrt{2\pi}\,\mathsf{T}_{H^\pm-1/2} \;=\; i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathsf{T}_{\mathrm{sgn}}\;,$$

que implica

$$\mathcal{F}\big[\mathsf{T}_{\mathrm{sgn}}\big] \;=\; -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathsf{VP}_0\;.$$

Na notação de funções generalizadas, as relações acima ficam

$$\mathcal{F}\left[\mathsf{VP}\left(\frac{1}{x}\right)\right](y) \;=\; \mp i\sqrt{2\pi}\left(H(\pm y)-\frac{1}{2}\right) \;=\; -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sgn}\,(x) \qquad \text{e} \tag{38.236}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathsf{VP}\left(\frac{1}{x}\right)\right](y) \;=\; \pm i\sqrt{2\pi}\left(H(\pm y)-\frac{1}{2}\right) \;=\; i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sgn}\,(x)\;, \tag{38.237}$$

ou seja,

$$\mathsf{VP}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-iyx}}{x}\, dx \;=\; \mp\pi i\,\big(2H(\pm y)-1\big) \;=\; -\pi i\,\mathrm{sgn}\,(y)\;. \tag{38.238}$$

E. 38.52 *Exercício*. Obtenha todas as relações acima. ✠

[41] Guido Fubini (1879–1943).

E. 38.53 *Exercício*. Generalizando as expressões acima, mostre que

$$\mathcal{F}\left[\mathsf{VP}_{x_0}\right] \;=\; \mp i\sqrt{2\pi}\,\mathsf{T}_{e_{x_0}(H^{\pm}-1/2)} \;=\; -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathsf{T}_{e_{x_0}\mathrm{sgn}} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}^{-1}\left[\mathsf{VP}_{x_0}\right] \;=\; \pm i\sqrt{2\pi}\,\mathsf{T}_{e_{-x_0}(H^{\pm}-1/2)} \;=\; i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathsf{T}_{e_{-x_0}\mathrm{sgn}}\;, \tag{38.239}$$

ou seja, que

$$\mathcal{F}\left[\mathsf{VP}\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right](y) \;=\; \mp i\sqrt{2\pi}e^{-ix_0y}\left(H(\pm y)-\frac{1}{2}\right) \;=\; -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-ix_0y}\mathrm{sgn}\,(x) \quad \text{e} \tag{38.240}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathsf{VP}\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right](y) \;=\; \pm i\sqrt{2\pi}e^{ix_0y}\left(H(\pm y)-\frac{1}{2}\right) \;=\; i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{+ix_0y}\mathrm{sgn}\,(x)\;, \tag{38.241}$$

para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. ✠

E. 38.54 *Exercício*. Usando (38.228) e (38.239), mostre que

$$\mathcal{F}\big[\mathsf{PF}_{x_0,\,m}\big] \;=\; \frac{\pm\sqrt{2\pi}(-i)^m}{(m-1)!}\mathsf{T}_{Q^{m-1}e_{x_0}(H^{\pm}-1/2)} \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(-i)^m}{(m-1)!}\mathsf{T}_{Q^{m-1}e_{x_0}\mathrm{sgn}}\;,$$

ou seja, em termos de funções generalizadas,

$$\mathcal{F}\big[\mathsf{PF}_{x_0,\,m}\big](p) \;=\; \frac{\pm\sqrt{2\pi}(-i)^m}{(m-1)!}\,p^{m-1}e^{-ix_0p}\big(H(\pm p)-1/2\big) \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(-i)^m}{(m-1)!}p^{m-1}e^{-ix_0p}\mathrm{sgn}\,(p)\;,$$

para todos $x_0 \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$. ✠

• Transformada de Fourier de distribuições regulares. Revisitando (38.124)

Seja T_g uma distribuição temperada regular associada a uma função g, satisfazendo as propriedades previamente definidas. A função g não é necessariamente integrável. No entanto, podemos associar a ela uma transformada de Fourier, definida da seguinte forma.

Uma função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é dita ser a transformada de Fourier distribucional de g se existir uma distribuição temperada regular T_h tal que $\mathcal{F}[\mathsf{T}_g] = \mathsf{T}_h$, ou seja, se valer

$$\langle \mathsf{T}_g,\; \mathcal{F}[f]\rangle \;=\; \langle \mathsf{T}_h,\; f\rangle$$

para toda $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Em um tal caso, escrevemos $h = \mathcal{F}[g]$ e as relações acima indicam que $\mathcal{F}[\mathsf{T}_g] = \mathsf{T}_{\mathcal{F}[g]}$, sempre que tal expressão faça sentido.

Analogamente, definimos $\mathcal{F}^{-1}[\mathsf{T}_g] = \mathsf{T}_{\mathcal{F}^{-1}[g]}$ sempre que tal igualdade faça sentido.

É importante notar que nem sempre $\mathcal{F}[\mathsf{T}_g]$ é uma distribuição regular. Um exemplo ocorre no caso em que g é a função de Heaviside, como vimos acima. Ainda assim, podemos em tais casos tratar $\mathcal{F}[g]$ como uma função generalizada.

Essas noções permitem lançar um outro olhar sobre a identidade (38.124), página 2044, que justificamos anteriormente com base na noção de transformadas de Fourier no espaço $L^2(\mathbb{R},\; dx)$.

Seja ω_* um número complexo com $\mathrm{Im}\,(\omega_*) > 0$ e considere-se a função $g(t) := H(t)e^{i\omega_* t}$, $t \in \mathbb{R}$. O rápido decaimento de g quando $|t| \to \infty$ garante que podemos associar a g uma distribuição temperada regular, T_g, dada por

$$\langle \mathsf{T}_g,\; f\rangle \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)\,dt \;=\; \int_0^{\infty} e^{i\omega_* t}f(t)\,dt\;, \qquad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})\;.$$

Por definição, temos

$$\langle \mathcal{F}[\mathsf{T}_g],\; f\rangle \;=\; \langle \mathsf{T}_g,\; \mathcal{F}[f]\rangle \;=\; \int_0^{\infty} e^{i\omega_* t}\mathcal{F}[f](t)\;dt \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{i\omega_* t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{-i\omega t}\;d\omega\right)\;dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{i(\omega_*-\omega)t}\;dt\right)f(\omega)\;d\omega \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i(\omega-\omega_*)}f(\omega)\;d\omega\;,$$

a inversão da ordem de integração sendo devida ao rápido decaimento de $e^{-i\omega t}$ para $t \to \infty$ e de $f(\omega)$ para $|\omega| \to \infty$. Essa igualdade mostra que $\mathcal{F}[\mathsf{T}_g]$ é idêntica à distribuição temperada regular T_h definida pela função $h(\omega) := \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega-\omega_*)}$. Assim, justifica-se escrever $\mathcal{F}[g](\omega) = h(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Se na igualdade $\langle \mathcal{F}[\mathsf{T}_g],\ f\rangle = \langle \mathsf{T}_h,\ f\rangle$ substituirmos $f \mapsto \mathcal{F}^{-1}[f]$, obtemos $\langle \mathcal{F}[\mathsf{T}_g],\ \mathcal{F}^{-1}[f]\rangle = \langle \mathsf{T}_g,\ f\rangle = \langle \mathsf{T}_h,\ \mathcal{F}^{-1}[f]\rangle$, ou seja,

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[\mathsf{T}_h],\ f]\rangle \ = \ \langle \mathsf{T}_g,\ f\rangle \ ,$$

indicando que $\mathcal{F}^{-1}[\mathsf{T}_h]$ é uma distribuição regular e que podemos identificar, no sentido expresso acima, que $\mathcal{F}^{-1}[h](t) = g(t)$, ou seja,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_*}\, d\omega \ = \ H(t)e^{i\omega_* t} \ .$$

Esta é novamente a identidade (38.124), página 2044, justificada agora em termos distribucionais, ou seja, como uma igualdade entre distribuições regulares temperadas.

38.3.7 Produtos de Distribuições

• **Produtos tensoriais de distribuições**

Dadas duas funções $\varphi,\ \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ define-se seu produto tensorial[42], denotado por $\varphi\otimes\psi$ como sendo a função definida em $\mathbb{R}^{2n}$ por

$$\big(\varphi\otimes\psi\big)(x,\ y) \ = \ \varphi(x)\psi(y) \ .$$

É um exercício elementar (faça-o!) mostrar que $\varphi\otimes\psi$ assim definida é um elemento de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$. A coleção de todas as funções de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ que sejam combinações lineares finitas de produtos tensoriais de funções de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço linear de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ denotado por $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, o produto tensorial de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ consigo mesmo. É relativamente fácil provar usando o Teorema de Weierstrass (Teorema 37.3, página 1950) que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$, ou seja, toda função de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ pode ser aproximada por funções na forma de somas finitas $\sum_k \varphi_k(x)\psi_k(y)$, com $\varphi_k,\ \psi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ para todo k. Omitiremos a demonstração aqui.

Se $T,\ U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, define-se o produto tensorial $T\otimes U$ como o funcional linear definido em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ por

$$(T\otimes U)(\varphi\otimes\psi) \ = \ T(\varphi)U(\psi) \ .$$

Claramente $T\otimes U$ é contínua em cada um dos seus argumentos separadamente. Como $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$, o produto tensorial $T\otimes U$ pode ser estendido a todo $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ e, portanto, define uma distribuição nesse espaço, ou seja, $T\otimes U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{2n})$. Dessa forma, se t e u denotam as "funções generalizadas" associadas a T e U, respectivamente, é legítimo escrever, na notação integral,

$$(T\otimes U)(\zeta) \ = \ \int_{\mathbb{R}^{2n}} t(x)u(y)\zeta(x,\ y)\, d^n x\, d^n y$$

para toda $\zeta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$. Assim, a "função generalizada" associada a $T\otimes U$ é $t\otimes u$.

• **Produto de funções e distribuições**

Ao contrário do caso de funções, o produto de duas distribuições pode ser definido sob circunstâncias bastante restritivas. Vamos discutir brevemente uma dessas circunstâncias atendendo nosso interesse próximo de discutir equações diferenciais distribucionais lineares. Sejam $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição e $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função infinitamente diferenciável. Definimos o produto $h\cdot T$ como sendo a distribuição que a cada $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ associa

$$\big(h\cdot T\big)(f) \ := \ T(hf) \ . \tag{38.242}$$

Na notação de emparelhamento isso significa

$$\langle h\cdot T,\ f\rangle \ := \ \langle T,\ hf\rangle$$

[42] No caso dos espaços $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ as definições são análogas.

e na notação integral, se t é a "função generalizada" associada a T e ht é a "função generalizada" associada a $h \cdot T$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (ht)(x)\, f(x)\, d^n x \;:=\; \int_{\mathbb{R}^n} t(x) \Big(h(x) f(x) \Big)\, d^n x \;.$$

Assim, a "função generalizada" $(ht)(x)$ é dada simbolicamente por $h(x)t(x)$.

E. 38.55 *Exercício*. Mostre que $h \cdot T$, definida em (38.242), com $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, é de fato uma distribuição. ✠

Se $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição temperada, podemos definir analogamente o produto $h \cdot T$ por $\big(h \cdot T\big)(f) := T(hf)$ (para toda $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$) desde que h seja infinitamente diferenciável e tenha crescimento polinomialmente limitado.

E. 38.56 *Exercício*. Mostre que $h \cdot T$ assim definida, com $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ com crescimento polinomialmente limitado, é de fato uma distribuição temperada. ✠

• A regularização de uma distribuição

Para $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ e $y \in \mathbb{R}^n$, seja $\varphi_y \equiv (\mathcal{T}_y(R\varphi))$ com $\mathcal{T}_y$ definida em (38.182). A função φ_y é tal que $\varphi_y(x) = \varphi(y-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Naturalmente φ_y é, para cada $y \in \mathbb{R}^n$, também um elemento de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ a aplicação

$$\mathbb{R}^n \ni y \;\mapsto\; T(\varphi_y) \in \mathbb{C}$$

define uma função em $\mathbb{R}^n$, a qual é frequentemente denotada por $T * \varphi$. Assim,

$$(T * \varphi)(y) \;:=\; T(\varphi_y) \;=\; T\big(\mathcal{T}_y(R\varphi)\big) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} t(x)\varphi(y-x)\, d^n x \;,$$

sendo que na última igualdade empregamos a notação em termos de funções generalizadas, $t(x)$ sendo a função generalizada associada a T. A função $T * \varphi$ é dita ser a *regularização da distribuição T pela função de teste φ*.

É de se notar também que se T é uma distribuição regular, isto é, se $T = \mathsf{T}_h$ para h localmente integrável, teremos

$$(\mathsf{T}_h * \varphi)(y) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\varphi(y-x)\, d^n x \;=\; (h * \varphi)(y) \;.$$

É também interessante observar que para $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tem-se

$$\langle T,\, \varphi \rangle \;=\; T(\varphi) \;=\; T(\varphi_0) \;=\; \big(T * (R\varphi)\big)(0) \;. \tag{38.243}$$

Para atender a diversos propósitos futuros, vamos estudar algumas propriedades das funções $T * \varphi$. A primeira delas refere-se à diferenciabilidade de $T * \varphi$.

Proposição 38.17 *Para $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ e com as definições acima a função $T * \varphi$ é infinitamente diferenciável. Tem-se também*

$$D^\alpha(T * \varphi) \;=\; \big(T * (D^\alpha \varphi)\big) \;=\; \big((D^\alpha T) * \varphi\big) \tag{38.244}$$

para todo n-multi-índice α. Por fim, vale a afirmação que se T tem suporte compacto, então $T * \varphi$ é um elemento de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. □

Prova. Seja $z \in \mathbb{R}^n$ e considere-se a diferença

$$\varphi_{y+z}(x) - \varphi_y(x) \;=\; \varphi(y+z-x) - \varphi(y-x) \;.$$

Podemos escrever, usando a diferenciabilidade de φ e denotando $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)$ por $(D_k\varphi)(x)$,

$$\begin{aligned}\varphi_{y+z}(x)-\varphi_y(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\varphi_{y+tz}(x)\,dt \;=\; \int_0^1 \frac{d}{dt}\varphi(y+tz-x)\,dt\\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 \big(D_k\varphi\big)(y+tz-x)z_k\,dt\\ &= \sum_{k=1}^n \big(D_k\varphi\big)(y-x)z_k + \sum_{k=1}^n \int_0^1 \Big[\big(D_k\varphi\big)(y+tz-x)-\big(D_k\varphi\big)(y-x)\Big]z_k\,dt\;,\end{aligned}$$

sendo que na última igualdade apenas somamos e subtraímos o termo $\sum_{k=1}^n \big(D_k\varphi\big)(y-x)z_k$. Observemos agora que a função $x\mapsto\sum_{k=1}^n \big(D_k\varphi\big)(y-x)z_k$ assim como a função

$$x \;\longmapsto\; \sum_{k=1}^n \int_0^1 \Big[\big(D_k\varphi\big)(y+tz-x)-\big(D_k\varphi\big)(y-x)\Big]z_k\,dt \tag{38.245}$$

são elementos de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Para a primeira função a afirmação é evidente; para a segunda necessitamos apenas observar 1º que o lado direito de (38.245) é infinitamente diferenciável em relação a x (pois, sob as hipóteses, podemos diferenciar sob o símbolo de integral. Vide Proposição 37.5, página 1942) e 2º que o lado direito de (38.245) tem suporte compacto como função de x, pois as funções $D_k\varphi$ têm suporte compacto.

Assim, é legítimo escrevermos

$$(T*\varphi)(y+z)-(T*\varphi)(y) \;=\; \langle T,\,\varphi_{y+z}-\varphi_y\rangle \;=\; \sum_{k=1}^n \left[\Big\langle T,\,\big(D_k\varphi\big)_y\Big\rangle + \Big\langle T,\,\int_0^1\Big[\big(D_k\varphi\big)_{y+tz}-\big(D_k\varphi\big)_y\Big]\,dt\Big\rangle\right]\,z_k\;.$$

Observemos agora que a expressão $\Big|\Big\langle T,\,\int_0^1\Big[\big(D_k\varphi\big)_{y+tz}-\big(D_k\varphi\big)_y\Big]\,dt\Big\rangle\Big|$ pode ser majorada da seguinte forma: sendo T uma distribuição, existe para cada compacto $K\subset\mathbb{R}^n$ e todo $m\in\mathbb{N}_0$ uma constante $C_{K,\,m}$ tal que

$$\begin{aligned}\Big|\Big\langle T,\,\int_0^1\Big[\big(D_k\varphi\big)_{y+tz}-\big(D_k\varphi\big)_y\Big]\,dt\Big\rangle\Big| &\le C_{K,\,m}\sup_{x\in K,\,|\alpha|\le m}\Big|D_x^\alpha\int_0^1\Big[\big(D_k\varphi\big)_{y+tz}(x)-\big(D_k\varphi\big)_y(x)\Big]\,dt\Big|\\ &\le C_{K,\,m}\sup_{x\in K,\,|\alpha|\le m}\int_0^1\Big|\big(D^\alpha D_k\varphi\big)(y-x+tz)-\big(D^\alpha D_k\varphi\big)(y-x)dt\Big|\,dt\;.\end{aligned}$$

Em função da continuidade uniforme de φ e suas derivadas, podemos, para cada $\epsilon>0$, uma bola $B_\epsilon\subset\mathbb{R}^n$ centrada em 0 tal que para todo $z\in B_\epsilon$ (e, consequentemente, $tz\in B_\epsilon$ para todo $t\in[0,\,1]$) teremos $\big|\big(D^\alpha D_k\varphi\big)(y-x+tz)-\big(D^\alpha D_k\varphi\big)(y-x)\big|<\epsilon$. Com isso, obtemos que

$$(T*\varphi)(y+z)-(T*\varphi)(y) \;=\; \sum_{k=1}^n\left[\Big\langle T,\,\big(D_k\varphi\big)_y\Big\rangle\right]\,z_k+o(\epsilon)\;.$$

o que demonstra que $T*\varphi$ é diferenciável e vale

$$D_k(T*\varphi)(y) \;=\; \Big\langle T,\,\big(D_k\varphi\big)_y\Big\rangle\;. \tag{38.246}$$

A argumentação acima pode ser repetida para demonstrar que $T*\varphi$ é diferenciável um número finito arbitrário de vezes, ou seja, é infinitamente diferenciável.

Para provarmos (38.244) notemos, por um lado, que $\Big\langle T,\,\big(D_k\varphi\big)_y\Big\rangle=\big(T*(D_k\varphi)\big)(y)$. Por outro lado, como $RD_k=-D_kR$, tem-se também

$$\Big\langle T,\,\big(D_k\varphi\big)_y\Big\rangle \;=\; \big\langle T,\,\mathcal{T}_yR\big(D_k\varphi\big)\big\rangle \;=\; -\big\langle T,\,D_k\mathcal{T}_y\big(R\varphi\big)\big\rangle \;=\; \big\langle D_kT,\,\mathcal{T}_y\big(R\varphi\big)\big\rangle \;=\; \langle D_kT,\,\varphi_y\rangle \;=\; \big((D_kT)*\varphi\big)(y)\;.$$

Portanto, de (38.246), teremos

$$D_k(T*\varphi)(y) \;=\; \big(T*(D_k\varphi)\big)(y) \;=\; \big((D_kT)*\varphi\big)(y)\;.$$

Essa relação pode ser agora usada como base para uma prova indutiva elementar de que

$$D^\alpha(T*\varphi)(y) \;=\; \big(T*(D^\alpha\varphi)\big)(y) \;=\; \big((D^\alpha T)*\varphi\big)(y)$$

para todo n-multi-índice α.

Para finalizarmos, a afirmação de que se T tem suporte compacto, então $T*\varphi$ é um elemento de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ é evidente pois $(T*\varphi)(y) = T(\varphi_y) = T\big(\mathfrak{T}_y(R\varphi)\big)$. Para todo $y\in\mathbb{R}^n$ com $\|y\|$ grande o suficiente o suporte de $\varphi_y = \mathfrak{T}_y(R\varphi)$ será disjunto do suporte de T e, portanto, $(T*\varphi)(y)$ será nula. ■

Ainda sobre as funções $T*\varphi$ vale o seguinte resultado que utilizaremos no que segue:

Proposição 38.18 *Seja $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Então, vale*

$$T*(\varphi*\phi) \;=\; (T*\varphi)*\phi \tag{38.247}$$

para todos $\varphi,\ \phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. □

Prova. Recordemos, em primeiro lugar, que $\varphi*\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, sendo, portanto, infinitamente diferenciável e de suporte compacto. Fixemos essas duas funções φ e ϕ. Pela definição, temos que

$$\big(T*(\varphi*\phi)\big)(y) \;=\; T\big((\varphi*\phi)_y\big)\;,$$

com

$$(\varphi*\phi)_y(x) \;=\; (\varphi*\phi)(y-x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y-x-z)\phi(z)\;d^nz\;.$$

Podemos evocar o Teorema 38.6, página 2080, e representar T em um compacto que contenha o suporte de $\varphi*\phi$ e de φ por (38.229), com $\beta\in\mathbb{N}_0^n$ e h contínua. Com isso, teremos

$$\begin{aligned}
\big(T*(\varphi*\phi)\big)(y) &\overset{(38.229)}{=} (-1)^\beta\int_{\mathbb{R}^n}h(x)\big(D_x^\beta(\varphi*\phi)_y\big)(x)\;d^nx\\
&= (-1)^\beta\int_{\mathbb{R}^n}h(x)D_x^\beta\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y-x-z)\phi(z)\;d^nz\right)\;d^nx\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}h(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n}(D^\beta\varphi)(y-x-z)\phi(z)\;d^nz\right)\;d^nx\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}h(x)(D^\beta\varphi)(y-z-x)\;d^nx\right)\phi(z)\;d^nz\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}h(x)(D^\beta\varphi)_{y-z}(x)\;d^nx\right)\phi(z)\;d^nz\\
&\overset{(38.229)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}(T*\varphi)(y-z)\phi(z)\;d^nz\\
&= \big((T*\varphi)*\phi\big)(y)\;,
\end{aligned}$$

tal como queríamos provar. A inversão de ordem de integração acima é facilmente justificável pela compacidade do suporte do integrando. ■

A Proposição 38.18 tem o seguinte corolário importante:

Teorema 38.8 *$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ no seguinte sentido: para cada $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ existe uma sequência de distribuições regulares T_{h_m}, $m \in \mathbb{N}$, com $h_m \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\langle T,\ \phi\rangle \ = \ \lim_{m\to\infty} \langle \mathsf{T}_{h_m},\ \phi\rangle$$

para toda $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. □

Prova. Seja $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)d^nx = 1$ e defina-se para $m \in \mathbb{N}$ a sequência $\varphi_m \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dada por $\varphi_m(x) := m^n\varphi(mx)$. É evidente que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(x)d^nx = m^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(mx)d^nx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)d^nx = 1$. Além disso, se $B_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| < \delta\}$ é a bola aberta de raio $\delta > 0$ centrada em $0 \in \mathbb{R}^n$, teremos

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta} \varphi_m(x)d^nx \ = \ m^n \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta} \varphi(mx)d^nx \ = \ \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{m\delta}} \varphi(x)d^nx\ ,$$

de sorte que para cada $\delta > 0$ vale $\lim\limits_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta} \varphi_m(x)d^nx = \lim\limits_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{m\delta}} \varphi(x)d^nx = 0$, devido ao suporte de φ ser compacto. Com isso, estabelecemos que φ_m, $m \in \mathbb{N}$, é uma sequência delta de Dirac em $\mathbb{R}^n$ segundo a Definição 37.2, página 1949. Do Teorema 37.2, página 1949, segue que para toda $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ a sequência ϕ_m, $m \in \mathbb{N}$, definida por

$$\phi_m(x) \ = \ (\varphi_m * \phi)(x) \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(x-y)\phi(y)\, d^ny \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(y)\phi(x-y)\, d^ny$$

converge uniformemente a ϕ em $\mathbb{R}^n$, pois toda $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz as condições do Teorema 37.2. Adicionalmente, podemos também afirmar que para cada n-multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ a sequência $D^\alpha\phi_m$ converge uniformemente a $D^\alpha\phi$, pois

$$D^\alpha\phi_m(x) \ = \ D^\alpha(\varphi_m * \phi)(x) \ = \ D^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(y)\phi(x-y)\, d^ny \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(y)\big(D^\alpha\phi\big)(x-y)\, d^ny$$

e $D^\alpha\phi$ também satisfaz as condições do Teorema 37.2. Segue dessas afirmações que se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, então $\lim\limits_{m\to\infty} T(\phi_m) = T\Big(\lim\limits_{m\to\infty} \phi_m\Big) = T(\phi)$, devido à continuidade de T. Agora, temos que

$$\begin{aligned}
\langle T,\ \phi\rangle \ = \ T(\phi) \quad &= \quad \lim_{m\to\infty} T(\phi_m) \ = \ \lim_{m\to\infty} T\big(\varphi_m * \phi\big) \\
&\overset{(38.243)}{=} \quad \lim_{m\to\infty} \Big(T * \big(R(\varphi_m * \phi)\big)\Big)(0) \\
&= \quad \lim_{m\to\infty} \Big(T * \big((R\varphi_m) * (R\phi)\big)\Big)(0) \\
&\overset{(38.247)}{=} \quad \lim_{m\to\infty} \Big(\big(T * (R\varphi_m)\big) * (R\phi)\Big)(0) \\
&= \quad \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \big(T * (R\varphi_m)\big)(-y)\, (R\phi)(y)\ d^ny \\
&\overset{y\to -y}{=} \quad \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \big(T * (R\varphi_m)\big)(y)\, \phi(y)\ d^ny \\
&= \quad \lim_{m\to\infty} \langle \mathsf{T}_{h_m},\ \phi\rangle\ ,
\end{aligned}$$

onde $h_m := T * (R\varphi_m) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Isso completa a demonstração. ■

38.3.7.1 Produto de Convolução de Distribuições

Vamos agora descrever como o produto de convolução pode ser definido para distribuições dotadas de certas propriedades. Seguindo uma estratégia já empregada antes, começamos considerando certas distribuições regulares adequadas para depois tratarmos de generalizações.

• **O caso de distribuições regulares**

Comecemos com uma definição. Dada uma função $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, denotamos por $\mathsf{E}[\varphi]$ a função definida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ assumindo valores em $\mathbb{C}$ definida por $\mathsf{E}[\varphi](x,\ y) := \varphi(x+y)$.

Seja $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$, o conjunto das funções contínuas definidas em $\mathbb{R}^n$, e seja $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$, o conjunto das funções contínuas e de suporte compacto definidas em $\mathbb{R}^n$. Sejam $f_1 \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$ e $f_2 \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ e sejam T_{f_1} e T_{f_2} as respectivas distribuições regulares. No contexto de distribuições regulares é natural definirmos o produto de convolução $\mathsf{T}_{f_1} * \mathsf{T}_{f_2}$ de T_{f_1} e T_{f_2} como sendo o elemento de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$\mathsf{T}_{f_1} * \mathsf{T}_{f_2} \ := \ \mathsf{T}_{f_1 * f_2} \ .$$

Teremos, para cada $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\big\langle \mathsf{T}_{f_1*f_2},\ \varphi\big\rangle \ &= \ \int_{\mathbb{R}^n} \big(f_1 * f_2\big)(x)\,\varphi(x)\,d^n x \ = \ \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x-y) f_2(y)\,d^n y\right)\varphi(x)\,d^n x \\ &\overset{x\to x+y}{=} \ \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x) f_2(y)\,\varphi(x+y)\,d^n x\,d^n y \ = \ \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x) f_2(y)\,\mathsf{E}[\varphi](x,\ y)\,d^n x\,d^n y \ .\end{aligned}$$

Essa última expressão sugere que poderíamos escrever $\big\langle \mathsf{T}_{f_1*f_2},\ \varphi\big\rangle = \big\langle \mathsf{T}_{f_1} \otimes \mathsf{T}_{f_2},\ \mathsf{E}[\varphi]\big\rangle$ o que sugere definirmos o produto de convolução $\mathsf{T}_{f_1} * \mathsf{T}_{f_2}$ das distribuições T_{f_1} e T_{f_2} por $\big\langle \mathsf{T}_{f_1} * \mathsf{T}_{f_2},\ \varphi\big\rangle := \big\langle \mathsf{T}_{f_1} \otimes \mathsf{T}_{f_2},\ \mathsf{E}[\varphi]\big\rangle$. Sucede, porém, que não é possível dar uma interpretação distribucional à integral $\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x) f_2(y)\,\mathsf{E}[\varphi](x,\ y)\,d^n x\,d^n y$, pois $\mathsf{E}[\varphi]$, ainda que seja uma função infinitamente diferenciável, *não* é um elemento de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ($\varphi(x+y)$ e suas derivadas não caem a zero quando $x \to \infty$ com $x+y$ constante). Esse problema pode ser remediado de um modo adequado aos nossos propósitos.

O suporte da função $f_1(x) f_2(y) \varphi(x+y)$ é um subconjunto compacto de

$$S_{f_1,\,f_2,\,\varphi} \ := \ \Big\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | x \in \ \mathrm{supp}\,(f_1),\ y \in \ \mathrm{supp}\,(f_2) \text{ e } x+y \in \ \mathrm{supp}\,(\varphi)\Big\} \ .$$

Como f_1 e φ têm suporte compacto, não é difícil constatar que $S_{f_1,\,f_2,\,\varphi}$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Consideremos uma função auxiliar $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ definida de sorte que $\chi(x,\ y) = 1$ para todos $(x,\ y)$ contidos no compacto $S_{f_1,\,f_2,\,\varphi}$ (uma tal função sempre existe, como já observamos anteriormente). Teremos, naturalmente,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x) f_2(y)\,\mathsf{E}[\varphi](x,\ y)\,d^n x\,d^n y \ = \ \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x) f_2(y)\,\chi(x,\ y)\mathsf{E}[\varphi](x,\ y)\,d^n x\,d^n y$$

e como o produto $\chi\mathsf{E}[\varphi]$ é um elemento de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ (pois χ o é e $\mathsf{E}[\varphi]$ é infinitamente diferenciável), é legítimo escrevermos

$$\big\langle \mathsf{T}_{f_1*f_2},\ \varphi\big\rangle \ = \ \big\langle \mathsf{T}_{f_1} \otimes \mathsf{T}_{f_2},\ \chi\,\mathsf{E}[\varphi]\big\rangle \ .$$

Com isso, o produto de convolução $\mathsf{T}_{f_1} * \mathsf{T}_{f_2}$ das distribuições T_{f_1} e T_{f_2} é o elemento de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\big\langle \mathsf{T}_{f_1} * \mathsf{T}_{f_2},\ \varphi\big\rangle \ := \ \big\langle \mathsf{T}_{f_1} \otimes \mathsf{T}_{f_2},\ \chi\,\mathsf{E}[\varphi]\big\rangle \ ,$$

para cada $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Utilizando essas ideias, vamos agora descrever como definir o produto de convolução de uma certa classe de distribuições.

• **A condição de suporte**

Definição. Dizemos que duas distribuições $U_1,\ U_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ satisfazem a *condição de suporte* se para todo compacto $C \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto

$$S(U_1,\ U_2,\ C) \ := \ \Big\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \Big|\ x \in \ \mathrm{supp}\,(U_1),\ y \in \ \mathrm{supp}\,(U_2) \text{ e } x+y \in C\Big\}$$

for um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. ♠

Sejam $U_1, U_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ duas distribuições que satisfazem a condição de suporte e seja $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Denotamos por $\mathcal{S}(U_1,\ U_2,\ C) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as funções $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tais que $\chi(x,\ y) = 1$ para todo $(x,\ y) \in S(U_1,\ U_2,\ C)$. A condição de suporte compacto é importante por garantir que $\mathcal{S}(U_1,\ U_2,\ C)$ é não vazio para todo $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto e, em particular, por garantir que $\mathcal{S}\big(U_1,\ U_2,\ \operatorname{supp}(\varphi)\big)$ é não vazio para cada $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

• **Produto de convolução de distribuições satisfazendo a condição de suporte**

Se $U_1, U_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ são duas distribuições que satisfazem a condição de suporte, definimos seu produto de convolução, denotado por $U_1 * U_2$, como sendo o elemento de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ definido para cada $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\big\langle U_1 * U_2,\ \varphi \big\rangle \ := \ \big\langle U_1 \otimes U_2,\ \chi\, \mathsf{E}[\varphi] \big\rangle\,, \tag{38.248}$$

com $\chi \in \mathcal{S}\big(U_1,\ U_2,\ \operatorname{supp}(\varphi)\big)$. É importante observar que a expressão do lado direito de (38.248) independe do particular elemento $\chi \in \mathcal{S}\big(U_1,\ U_2,\ \operatorname{supp}(\varphi)\big)$ tomado. De fato, se χ e χ' são elementos de $\mathcal{S}\big(U_1,\ U_2,\ \operatorname{supp}(\varphi)\big)$, teremos $\big(\chi(x,\ y) - \chi'(x,\ y)\big)\varphi(x+y) = 0$ se $(x,\ y) \in S\big(U_1,\ U_2,\ \operatorname{supp}(\varphi)\big)$.

• **Algumas condições suficientes para a condição de suporte**

Dada a relevância da condição de suporte para a definição de produto de convolução de distribuições é importante termos uma lista de condições suficientes para que a mesma seja satisfeita.

Observe-se que $S(U_1,\ U_2,\ C)$ é sempre fechado para C compacto, mas não é necessariamente limitado. De fato, se $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ for a função contínua $f(x,\ y) := x + y$, então $S(U_1,\ U_2,\ C) = f^{-1}(C) \cap \Big(\operatorname{supp}(U_1) \times \operatorname{supp}(U_2)\Big)$, que é fechado pois $f^{-1}(C)$, $\operatorname{supp}(U_1)$ e $\operatorname{supp}(U_2)$ são fechados. Assim, para que tenhamos $S(U_1,\ U_2,\ C)$ compacto é necessário e suficiente que o mesmo seja um conjunto limitado de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Se C é compacto, então é limitado e $D(C) := \sup\{\|c\|,\ c \in C\}$ é finito. Se $(x,\ y) \in S(U_1,\ U_2,\ C)$, então $(x,\ y) \in \operatorname{supp}(U_1) \times \operatorname{supp}(U_2)$ e $x + y = c$ para algum $c \in C$. Logo, $\|y\| \leq \|c\| + \|x\| \leq C_0 + \|x\|$. Se $\operatorname{supp}(U_1)$ também for compacto, teremos $\|x\| \leq D\big(\operatorname{supp}(U_1)\big) \equiv \sup\{\|x'\|,\ x' \in \operatorname{supp}(U_1)\} < \infty$. Logo $\|y\| \leq D(C) + D\big(\operatorname{supp}(U_1)\big)$ o que prova que $S(U_1,\ U_2,\ C)$ é limitado e, portanto, compacto.

Concluímos, portanto, que se $\operatorname{supp}(U_1)$ ou $\operatorname{supp}(U_2)$ forem compactos a condição de suporte é satisfeita.

No caso de distribuições em $\mathbb{R}$ temos uma outra condição útil: se $\operatorname{supp}(U_1)$ e $\operatorname{supp}(U_2)$ forem ambos limitados inferiormente ou se forem ambos limitados superiormente, então a condição de suporte é satisfeita.

Para provarmos isso, vamos supor que existam a_1 e $a_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\operatorname{supp}(U_1) \subset [a_1,\ \infty)$ e $\operatorname{supp}(U_2) \subset [a_2,\ \infty)$ (o caso em que ambos são limitados superiormente é análogo). Seja $C \subset \mathbb{R}$ compacto. Então, existe $k > 0$ tal que $C \subset [-k,\ k]$. Se $(x,\ y) \in S(U_1,\ U_2,\ C)$ então $-k \leq x + y \leq k$ e, portanto, $y \leq k - x \leq k - a_1$. Logo, temos que $a_2 \leq y \leq k - a_1$ e, *mutatis mutandis*, temos também $a_1 \leq x \leq k - a_2$. Isso estabelece que $S(U_1,\ U_2,\ C)$ é limitado e, portanto, compacto.

38.4 Equações Diferenciais Distribucionais, Soluções Fundamentais e Funções de Green

Nesta seção desenvolveremos algumas das ideias subjacentes às noções de solução fundamental de um operador diferencial, funções de Green etc. Trata-se provavelmente das mais importantes aplicações da noção de distribuição. Alguns problemas de interesse físico são também discutidos. Um tratamento mais prático e informal pode ser encontrado na Seção 43.11, página 2501.

• **Operadores diferenciais lineares em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$**

Reunindo as definições acima de derivada de uma distribuição e produto de uma distribuição com uma função infinitamente diferenciável, podemos introduzir a noção de operador diferencial linear agindo no espaço de distribuições $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ (compare com a definição de operador diferencial linear agindo no espaço $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ introduzida à página 2015).

Sejam $a_1, \ldots, a_N$ funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ e sejam $\alpha^1, \ldots, \alpha^N \in \mathbb{N}_0^n$ multi-índices distintos. Seja o operador diferencial

$$\mathcal{L} \;=\; \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\, D^{\alpha^k} \;=\; \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\, \frac{\partial^{|\alpha^k|}}{\partial x_1^{\alpha_1^k} \cdots \partial x_n^{\alpha_n^k}} \,.$$

Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, define-se $\mathcal{L}T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ como sendo a distribuição definida por

$$\Big(\mathcal{L}T\Big)(\varphi) \;:=\; T\Big(\mathcal{L}^T\varphi\Big) \,,$$

para toda $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, onde $\mathcal{L}^T$ é o operador diferencial dual de $\mathcal{L}$ definido em (38.14) e (38.16). É um exercício simples para o leitor provar que essa definição é plenamente consistente com as definições dadas acima de derivada de uma distribuição e produto de uma distribuição com uma função infinitamente diferenciável.

Na notação de emparelhamento temos, assim,

$$\langle \mathcal{L}T,\, \varphi\rangle \;=\; \langle T,\, \mathcal{L}^T\varphi\rangle$$

para toda $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e toda $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

• **Operadores diferenciais lineares em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$**

Operadores diferenciais lineares em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ são definidos analogamente, com a ressalva, já mencionada quando definimos operadores diferenciais lineares em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ à página 2016, que as funções a_k e suas primeiras $|\alpha^k|$ derivadas devem ser de crescimento polinomialmente limitado.

• **Produtos tensoriais de operadores diferenciais lineares**

Se $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ são operadores diferenciais lineares agindo em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ definimos seu produto tensorial $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ por

$$\big((\mathcal{L} \otimes \mathcal{M})\,\zeta\big)\,(x,\, y) \;=\; \mathcal{L}_x\mathcal{M}_y\zeta(x,\, y)$$

para $\zeta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$. No lado direito, acima os índices x e y sob os operadores $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$, respectivamente, servem apenas para lembrar em relação a quais variáveis os operadores agem. Note-se que $\mathcal{L}_x\mathcal{M}_y = \mathcal{M}_y\mathcal{L}_x$.

Assim, se $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ são operadores diferenciais lineares agindo em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ e $T,\, U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, definimos, $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M})\,(T \otimes U)$ como sendo a distribuição tal que

$$\Big((\mathcal{L} \otimes \mathcal{M})\,(T \otimes U)\Big)(\zeta) \;=\; (T \otimes U)\Big(\big(\mathcal{L}^T \otimes \mathcal{M}^T\big)\,\zeta\Big)$$

para toda $\zeta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$.

A definição de produtos tensoriais de operadores diferenciais lineares agindo em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é análoga e não requer maiores comentários.

• **Equações diferenciais ordinárias distribucionais**

No caso de uma variável, podemos caracterizar uma equação diferencial distribucional linear de ordem N da seguinte forma. Se $a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_N$ são funções infinitamente diferenciáveis de uma variável real e $B \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ é uma distribuição em $\mathbb{R}$, a expressão

$$a_N \cdot \Big(T^{(N)}\Big) + a_{N-1} \cdot \Big(T^{(N-1)}\Big) + \cdots + a_1 \cdot \Big(T^{(1)}\Big) + a_0 \cdot T \;=\; B \,, \tag{38.249}$$

define uma equação diferencial distribucional para uma distribuição T. De acordo com as definições, se T satisfaz essa equação, então

$$(-1)^N T\Big(\,(a_N f)^{(N)}\,\Big) + (-1)^{N-1} T\Big(\,(a_{N-1} f)^{(N-1)}\,\Big) + \cdots + (-1)^1 T\Big(\,(a_1 f)^{(1)}\,\Big) + T\Big(a_0 f\Big) \;=\; B(f)$$

para toda $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, ou seja,

$$T\Big((-1)^N\,(a_N f)^{(N)} + (-1)^{N-1}\,(a_{N-1} f)^{(N-1)} + \cdots + (-1)^1\,(a_1 f)^{(1)} + a_0 f\Big) \;=\; B(f) \,, \tag{38.250}$$

para toda $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Se t e b denotam as "funções generalizadas" associadas a T e B, respectivamente, (38.249) pode ser escrita na forma convencional

$$a_N(x)\frac{d^N}{dx^N}t(x) + a_{N-1}(x)\frac{d^{N-1}}{dx^{N-1}}t(x) + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx}t(x) + a_0(x)t(x) \;=\; b(x)\;,$$

e, como em (38.250), isso significa que para toda $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t(x)\left[(-1)^N\frac{d^N}{dx^N}\left(a_N f\right)(x) + (-1)^{N-1}\frac{d^{N-1}}{dx^{N-1}}\left(a_{N-1}f\right)(x) + \cdots + (-1)^1\frac{d}{dx}\left(a_1 f\right)(x) + \left(a_0 f\right)(x)\right]\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} b(x)f(x)\,dx\;.$$

• **Equações diferenciais parciais distribucionais**

Equações diferenciais parciais para distribuições em $\mathbb{R}^n$ podem ser definidas analogamente. Se $a_1,\,\ldots,\,a_N$ são funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$, $B \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha^1,\,\ldots,\,\alpha^N$ são multi-índices distintos, a expressão

$$\sum_{k=1}^{N} a_n \cdot \left(D^{\alpha^k}T\right) \;=\; B \tag{38.251}$$

define uma equação diferencial distribucional linear para uma distribuição T. De acordo com as definições, se T satisfaz essa equação, então para toda $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\sum_{k=1}^{N}(-1)^{|\alpha^k|}T\Big(D^{\alpha^k}(a_k\varphi)\Big) \;=\; B(\varphi) \qquad \text{ou seja,} \qquad T\left(\sum_{k=1}^{N}(-1)^{|\alpha^k|}D^{\alpha^k}(a_k\varphi)\right) \;=\; B(\varphi)\;.$$

Assim, uma equação diferencial linear distribucional para uma distribuição incógnita $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ é da forma

$$\mathcal{L}T \;=\; B\;,$$

para uma distribuição $B \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ dada e para um operador linear dado $\mathcal{L}$ na forma

$$\mathcal{L} \;=\; \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\,D^{\alpha^k} \;=\; \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\,\frac{\partial^{|\alpha^k|}}{\partial x_1^{\alpha_1^k}\cdots\partial x_n^{\alpha_n^k}}\;,$$

onde $a_1,\,\ldots,\,a_N$ funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha^1,\,\ldots,\,\alpha^N$ são multi-índices distintos. Assim, T deve satisfazer para toda $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

$$T(\mathcal{L}^T\varphi) \;=\; B(\varphi)\;, \qquad \text{ou seja,} \qquad \langle T,\,\mathcal{L}^T\varphi\rangle \;=\; \langle B,\,\varphi\rangle\;.$$

Se t e b denotam as "funções generalizadas" associadas a T e B, respectivamente, (38.251) pode ser escrita na forma convencional

$$\sum_{k=1}^{N} a_n(x)\,\left(D^{\alpha^k}t\right)(x) \;=\; b(x)\;, \qquad \text{ou seja} \qquad \mathcal{L}t(x) \;=\; b(x)\;,$$

e isso significa que para toda $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} t(x)\,\big(\mathcal{L}^T\varphi\big)(x)\;d^nx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} b(x)\varphi(x)\;d^nx\;,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} t(x)\left[\sum_{k=1}^{N}(-1)^{|\alpha^k|}D^{\alpha^k}(a_k\varphi)(x)\right]\,d^nx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} b(x)\varphi(x)\;d^nx\;.$$

38.4.1 Soluções Fundamentais

• **A distribuição delta diagonal**

Uma distribuição de interesse definida em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ é a *distribuição delta diagonal*, ou *distribuição delta de Dirac diagonal*, definida para $\zeta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ por

$$\delta(\zeta) \ := \ \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(x,\ x)\ d^n x\ .$$

Essa definição pressupõe uma decomposição (não canônica) de $\mathbb{R}^{2n}$ na forma $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$. Provar que realmente se trata de uma distribuição em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ é deixado como exercício. É claro que

$$\delta(\zeta) \ = \ \int_{\mathbb{R}^{2n}} \delta(x-y)\zeta(x,\ y)\ d^n x\, d^n y\ .$$

Essa última expressão mostra que a "função generalizada" associada à distribuição delta diagonal é $\delta(x-y)$. Percebe-se também que se ζ é da forma $\zeta = \varphi \otimes \psi$, com $\varphi,\ \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\delta\big(\varphi \otimes \psi\big) \ = \ \mathsf{T}_\varphi(\psi) \ = \ \mathsf{T}_\psi(\varphi)\ ,$$

com T_g definida em (38.169).

• **Soluções fundamentais de operadores diferenciais lineares**

Seja um operador diferencial linear $\mathcal{L}$ da forma

$$\mathcal{L} \ = \ \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\, D_x^{\alpha^k} \ = \ \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\, \frac{\partial^{|\alpha^k|}}{\partial x_1^{\alpha_1^k} \cdots \partial x_n^{\alpha_n^k}}\ ,$$

onde $a_1,\ \ldots,\ a_N$ são funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha^1,\ \ldots,\ \alpha^N$ são multi-índices distintos.

Seja $h \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ e considere-se se a equação diferencial não-homogênea

$$\mathcal{L}u \ = \ h\ . \tag{38.252}$$

Equações desse tipo ocorrem com grande frequência na Física. Essa equação inspira considerarmos a equação diferencial distribucional para $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\mathcal{L}U \ = \ \mathsf{T}_h\ , \tag{38.253}$$

onde T_h é a distribuição regular definida em (38.168).

Uma distribuição $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ é dita ser uma *solução fundamental do operador diferencial linear* $\mathcal{L}$ se

$$(\mathcal{L} \otimes \mathbb{1})F \ = \ \delta\ , \tag{38.254}$$

onde δ no lado direito é a distribuição delta diagonal definida acima e $\mathbb{1}$ é o operador identidade. Assim, se F é uma solução fundamental do operador linear $\mathcal{L}$, vale para toda $\zeta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$

$$F\big((\mathcal{L}^T \otimes \mathbb{1})\zeta\big) \ = \ \delta(\zeta)\ .$$

Se uma solução fundamental F do operador linear $\mathcal{L}$ for fornecida, afirmamos que uma solução $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ da equação distribucional (38.253) é dada por

$$U(\varphi) \ := \ F(\varphi \otimes h)\ , \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\ . \tag{38.255}$$

De fato, para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ teremos,

$$(\mathcal{L}U)(\varphi) \ = \ U(\mathcal{L}^T\varphi) \ = \ F\big((\mathcal{L}^T\varphi) \otimes h\big) \ = \ \big((\mathcal{L} \otimes \mathbb{1})F\big)(\varphi \otimes h) \ = \ \delta(\varphi \otimes h) \ = \ \mathsf{T}_h(\varphi)\ ,$$

provando que $\mathcal{L}U = \mathsf{T}_h$, como desejávamos.

A existência de soluções fundamentais para operadores diferenciais lineares não é automaticamente garantida e para tal diversos teoremas foram demonstrados, entre os quais encontra-se o importante teorema de Malgrange[43]-Ehrenpreis[44] (demonstrado entre 1954 e 1955), o qual estabelece que operadores diferenciais lineares a coeficientes constantes sempre possuem soluções fundamentais. Vide, *e.g.*, [548].

• **A questão da unicidade de soluções fundamentais**

Se para um operador diferencial $\mathcal{L}$, como acima, existir uma solução fundamental F, esta pode não ser única. Se g for localmente integrável e satisfizer $(\mathcal{L}g)(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (ou seja, se g for uma solução forte da equação $\mathcal{L}u = 0$) valerá $\mathcal{L}\mathsf{T}_g = 0$ pois, para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$(\mathcal{L}\mathsf{T}_g)(\varphi) \;=\; \mathsf{T}_g(\mathcal{L}^T\varphi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,(\mathcal{L}^T\varphi)(x)\,d^nx \;\overset{(38.15)}{=}\; \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{L}g)(x)\,\varphi(x)\,d^nx \;=\; 0\,.$$

Concluímos disso que se F é uma solução fundamental de $\mathcal{L}$, então qualquer distribuição de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ da forma

$$F + \mathsf{T}_g \otimes V\,,$$

com $V \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, arbitrária, será também uma solução fundamental de $\mathcal{L}$.

38.4.1.1 Soluções Fundamentais como Funções Generalizadas

A noção de solução fundamental do operador linear $\mathcal{L}$ é talvez mais facilmente explicada em termos da "função generalizada" $F(x,\ y)$, $x,\ y \in \mathbb{R}^n$, associada à distribuição F agindo em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$. F é dita ser uma solução fundamental do operador linear $\mathcal{L}$ se

$$\mathcal{L}_xF(x,\ y) \;=\; \delta(x-y)\,, \tag{38.256}$$

isto é

$$\sum_{k=1}^{N} a_k(x)\,\frac{\partial^{|\alpha^k|}}{\partial x_1^{\alpha_1^k}\cdots\partial x_n^{\alpha_n^k}}F(x,\ y) \;=\; \delta(x-y)\,.$$

Assim, para $\zeta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$,

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \Big(\mathcal{L}_xF(x,\ y)\Big)\zeta(x,\ y)\,d^nx\,d^ny \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(x,\ x)\,d^nx\,. \tag{38.257}$$

Em particular, para duas funções de teste quaisquer $\varphi,\ \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\mathcal{L}_xF(x,\ y)\Big)\varphi(x)\psi(y)\,d^nx\,d^ny \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x)\,d^nx\,, \tag{38.258}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\mathcal{L}_xF(x,\ y)\Big)\psi(y)\,d^ny - \psi(x)\right]\varphi(x)\,d^nx \;=\; 0\,.$$

A validade dessa relação para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ implica a validade no sentido de distribuições da igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\mathcal{L}_xF(x,\ y)\Big)\psi(y)\,d^ny \;=\; \psi(x) \tag{38.259}$$

para cada $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Também de (38.258), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} F(x,\ y)\Big(\mathcal{L}_x^T\varphi(x)\Big)\psi(y)\,d^nx\,d^ny \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(y)\,d^ny\,,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} F(x,\ y)\Big(\mathcal{L}_x^T\varphi(x)\Big)\,d^nx - \varphi(y)\right]\psi(y)\,d^ny \;=\; 0\,.$$

[43] Bernard Malgrange (1928–).
[44] Leon Ehrenpreis (1930–2010).

A validade dessa relação para todo $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ implica a validade no sentido de distribuições das igualdades

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x,\ y)\Big(\mathcal{L}_x^T \varphi(x)\Big)\, d^n x \ = \ \varphi(y) \qquad \text{ou, equivalentemente,} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\mathcal{L}_x F(x,\ y)\Big)\varphi(x)\, d^n x \ = \ \varphi(y)\ , \tag{38.260}$$

para cada $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Comparar cuidadosamente com (38.259). O exemplo do operador Laplaciano em $\mathbb{R}^3$ apresentado à página 2098 ilustra bem as diversas relações acima.

• **Soluções fracas e soluções fundamentais**

Se uma função $F(x,\ y)$, definida para $x \neq y$, for solução da equação diferencial $\mathcal{L}_x F(x,\ y) = 0$ na região não diagonal $x \neq y$ (comparar com (38.256). Uma tal solução é denominada *solução fraca* da equação diferencial em questão), então a função F será uma solução fundamental de $\mathcal{L}_x$ se adicionalmente satisfazer a primeira relação de (38.260) para toda $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Um exemplo disso será discutido logo adiante (página 2098), quando tratarmos do operador Laplaciano em $\mathbb{R}^3$.

• **Mais comentários sobre a utilidade das soluções fundamentais. O método da função de Green**

Já observamos que a noção de solução fundamental de um operador diferencial linear é útil por oferecer soluções distribucionais à equação (38.252)–(38.253). É útil discutirmos isso empregando a notação de função generalizada. Se $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ satisfaz (38.253), tem-se para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ que $(\mathcal{L}U)(\varphi) = \mathsf{T}_h(\varphi)$. Denotando por $u(x)$ a função generalizada associada a U, isso fica

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big((\mathcal{L}u)(x)\ - h(x)\big)\varphi(x)\, d^n x \ = \ 0\ ,$$

e temos no sentido distribucional a igualdade

$$(\mathcal{L}u)(x) \ = \ h(x)\ , \tag{38.261}$$

que corresponde a uma versão distribucional de (38.252). Como vimos em (38.255), podemos tomar $U(\varphi) = F(\varphi \otimes h)$, igualdade essa que na notação de funções generalizadas fica

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,\varphi(x)\, d^n x \ = \ \int_{\mathbb{R}^{2n}} F(x,\ y)\varphi(x)h(y)\, d^n x\, d^n y\ , \qquad \text{ou seja,} \qquad u(x) \ = \ \int_{\mathbb{R}^{2n}} F(x,\ y)h(y)\, d^n y\ .$$

Com isso, (38.261) transforma-se em

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathcal{L}_x F(x,\ y)h(y)\, d^n y \ = \ h(x)\ ,$$

em concordância com (38.260) e com (38.256).

Em resumo, se $F(x,\ y)$ é a função generalizada associada a uma solução fundamental F do operador diferencial linear $\mathcal{L}$, então a equação não-homogênea $\mathcal{L}u = h$ com $h \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tem uma solução distribucional dada por

$$u(x) \ = \ \int_{\mathbb{R}^{2n}} F(x,\ y)h(y)\, d^n y\ . \tag{38.262}$$

O exposto acima reexpressa as considerações que fizemos entre (38.252) e (38.255).

Em muitos problemas, exige-se que a solução da equação $\mathcal{L}_x u(x) = h(x)$ satisfaça certas condições de contorno (de Dirichlet, de Neumann ou mistas) na fronteira de um domínio aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Soluções fundamentais que conduzem a soluções que satisfaçam condições homogêneas desses tipos são denominadas *funções de Green*[45] (para condições de contorno de Dirichlet, de Neumann ou mistas). O método de resolução de equações diferenciais parciais sob tais condições de contorno por meio da determinação da função de Green adequada é denominado *método da função de Green*. O método da função de Green é de grande relevância em Física, como discutido na Seção 43.11, página 2501. Também no Capítulo 19, página 1027, encontramos o método da função de Green no tratamento do problema de Sturm-Liouville.

Uma questão importante é a de se saber quando o lado direito de (38.262) define uma função, ou seja, quando u é uma solução forte da equação $\mathcal{L}u = h$ ou, equivalentemente, quando a distribuição U dada em (38.255) é uma distribuição regular. O lado direito de (38.262) definirá uma função se, por exemplo, $F(x,\ y)$ for uma função definida quase em toda parte, tal como no exemplo do operador Laplaciano, discutido à página 2098. Isso ocorre em diversos exemplos de interesse, como veremos adiante e em exemplos da Seção 43.11, especialmente quando $\mathcal{L}$ for um operador elíptico. Uma

[45] George Green (1793–1841).

parte importante da literatura matemática da teoria das equações diferenciais parciais lineares é dedicada a essa questão. Mencionamos nesse contexto os importantes Teoremas de Weyl, de Friedrichs e de Hörmander (vide, *e.g.*, [548]).

• **Uma propriedade de soluções fundamentais**

Dada uma solução fundamental $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ de $\mathcal{L}$, podemos obter uma distribuição $F_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo

$$\mathcal{L}F_0 \;=\; \delta_0$$

por meio do seguinte procedimento. Para $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ fixo, defina-se $G_\psi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ por $G_\psi(\varphi) = F(\varphi \otimes \psi)$. Teremos

$$\mathcal{L}G_\psi(\varphi) \;=\; G_\psi(\mathcal{L}^T\varphi) \;=\; F\big((\mathcal{L}^T\varphi)\otimes\psi\big) \;=\; \big((\mathcal{L}\otimes\mathbb{1})F\big)(\varphi\otimes\psi) \;=\; \delta(\varphi\otimes\psi) \;=\; \mathsf{T}_\psi(\varphi)\;.$$

Assim, tomando-se $\psi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência delta de Dirac centrada em 0, podemos definir

$$F_0(\varphi) \;:=\; \lim_{n\to\infty} G_{\psi_n}(\varphi) \;:=\; \lim_{n\to\infty} F(\varphi\otimes\psi_n)\;,$$

e teremos

$$\mathcal{L}F_0(\varphi) \;=\; F_0(\mathcal{L}^T\varphi) \;=\; \lim_{n\to\infty} G_{\psi_n}(\mathcal{L}^T\varphi) \;=\; \lim_{n\to\infty}(\mathcal{L}G_{\psi_n})(\varphi) \;=\; \lim_{n\to\infty}\mathsf{T}_{\psi_n}(\varphi) \;=\; \delta_0(\varphi)\;,$$

mostrando que $\mathcal{L}F_0 = \delta_0$.

Como veremos, no caso em que o operador $\mathcal{L}$ tem coeficientes constantes, a existência de uma distribuição $F_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\mathcal{L}F_0 = \delta_0$ equivale à existência de uma solução fundamental satisfazendo (38.254).

38.4.1.2 O Caso de Operadores Lineares a Coeficientes Constantes

De grande importância para o estudo de muitas das equações diferenciais encontradas na Física é a situação na qual o operador diferencial $\mathcal{L}$ considerado (agindo em funções suficientemente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$) tem coeficientes constantes, ou seja, tem-se

$$\mathcal{L} \;=\; \sum_{k=1}^{N} a_k\, D^{\alpha^k} \;=\; \sum_{k=1}^{N} a_k\, \frac{\partial^{|\alpha^k|}}{\partial x_1^{\alpha_1^k}\cdots\partial x_n^{\alpha_n^k}} \qquad \text{e} \tag{38.263}$$

$$\mathcal{L}^T \;=\; \sum_{k=1}^{N} (-1)^{|\alpha^k|}\, a_k\, D^{\alpha^k} \;=\; \sum_{k=1}^{N} (-1)^{|\alpha^k|}\, a_k\, \frac{\partial^{|\alpha^k|}}{\partial x_1^{\alpha_1^k}\cdots\partial x_n^{\alpha_n^k}};, \tag{38.264}$$

com a_k, $k = 1, \ldots, N$, sendo constantes. Nesse caso vê-se claramente que $\mathcal{L} = \mathcal{L}^T$ se e somente se $|\alpha^k|$ for par para todo $k = 1, \ldots, N$.

Seja $F_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição tal que

$$\mathcal{L}F_0 \;=\; \delta_0\;. \tag{38.265}$$

Se uma tal F_0 existir podemos definir uma solução fundamental F de $\mathcal{L}$ por

$$F(\varphi\otimes\psi) \;:=\; (2\pi)^{n/2} F_0\big(\varphi * (R\psi)\big)\;. \tag{38.266}$$

para φ, $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, onde $(R\phi)(x) := \phi(-x)$, $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. De fato, teremos

$$\begin{aligned}\big((\mathcal{L}\otimes\mathbb{1})F\big)(\varphi\otimes\psi) \;&=\; F\big((\mathcal{L}^T\varphi)\otimes\psi\big) \;=\; (2\pi)^{n/2}F_0\big((\mathcal{L}^T\varphi)*(R\psi)\big) \;=\; (2\pi)^{n/2}F_0\Big(\mathcal{L}^T\big(\varphi*(R\psi)\big)\Big)\\ &=\; (2\pi)^{n/2}(\mathcal{L}F_0)\big(\varphi*(R\psi)\big) \;=\; (2\pi)^{n/2}\delta_0\big(\varphi*(R\psi)\big) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(-y)\psi(-y)\,d^ny\\ &=\; \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\psi(y)\,d^ny \;=\; \delta(\varphi\otimes\psi)\;,\end{aligned}$$

estabelecendo que $(\mathcal{L}\otimes\mathbb{1})F=\delta$, como queríamos. Acima, na terceira igualdade, usamos o fato que, se os coeficientes de $\mathcal{L}$ forem constantes, valerá

$$(2\pi)^{n/2}\big((\mathcal{L}^T\varphi)*R\psi\big)(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{L}^T\varphi)(x-y)\psi(-y)\,d^ny \;=\; \mathcal{L}^T\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)\psi(-y)\,d^ny \;=\; (2\pi)^{n/2}\Big(\mathcal{L}^T\big(\varphi*(R\psi)\big)\Big)(x)\;.$$

É interessante expressarmos a distribuição F definida em (38.266) usando a notação de funções generalizadas. Denotemos $F_0(\phi)$ por $\int_{\mathbb{R}^n}F_0(x)\phi(x)d^nx$. Teremos por (38.266)

$$F(\varphi\otimes\psi) \;:=\; (2\pi)^{n/2}F_0\big(\varphi*(R\psi)\big) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}F_0(x)\big(\varphi*(R\psi)\big)(x)d^nx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}F_0(x)\varphi(x-y)\psi(-y)\,d^nx\right)d^ny \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}F_0(x-y)\varphi(x)\psi(y)\,d^nxd^ny\;,$$

mostrando que $F(x,\,y)=F_0(x-y)$.

As considerações acima mostram-nos também que dada uma distribuição $F_0\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo (38.265) e dada $h\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, a distribuição U dada por

$$U(\varphi) \;=\; (2\pi)^{n/2}F_0\big(\varphi*(Rh)\big)\;,\qquad \varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\;, \tag{38.267}$$

satisfará

$$\mathcal{L}U \;=\; \mathsf{T}_h\;. \tag{38.268}$$

Em termos de funções generalizadas (38.267) fica

$$U(\varphi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}u(x)\varphi(x)\,dx\;,\qquad \text{com}\qquad u(x)\;:=\;\int_{\mathbb{R}^n}F_0(x-y)h(y)\,d^ny\;. \tag{38.269}$$

Assim, uma distribuição $F_0\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo (38.265) fornece diretamente uma solução distribucional à equação não-homogênea (38.252)–(38.253).

Por essas razões, dado um operador $\mathcal{L}$ com coeficientes constantes, uma distribuição $F_0\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo (38.265) é também dita ser uma *solução fundamental* associada ao operador $\mathcal{L}$. Na maioria dos livros-texto, a noção de solução fundamental para operadores diferenciais com coeficientes constantes é apresentada por meio de (38.265). Nossa definição (38.254) é mais geral e engloba a noção de solução fundamental para operadores diferenciais com coeficientes não necessariamente constantes.

• **O exemplo do operador Laplaciano em $\mathbb{R}^3$**

Um exemplo importante se dá no caso do operador Laplaciano em $\mathbb{R}^3$: $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, para o qual vale $\Delta^T=\Delta$, como facilmente se constata pela definição (38.16), página 2015 (vide (38.264)).

Para $x,\,y\in\mathbb{R}^3$ da forma $x=(x_1,\,x_2,\,x_3)$ e $y=(y_1,\,y_2,\,y_3)$, seja $\|x-y\|:=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$. A função

$$F(x,\,y)\;:=\;-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-y\|} \tag{38.270}$$

definida para $x\neq y$, satisfaz (verifique!)

$$\Delta_x\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-y\|}\right)\;=\;0\;,\quad x\neq y\;.$$

Além disso, vale

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-y\|}\right)\Big(\Delta_x\varphi(x)\Big)\,d^3x\;=\;\varphi(y)$$

para toda $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, como demonstramos com mais generalidade no Teorema 44.1, página 2544, do Capítulo 44. Note que a relação acima permite escrever

$$\Delta_x\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)\;=\;-4\pi\delta(x-y)\;,$$

uma relação muito empregada, por exemplo, na Eletrostática.

A distribuição F definida em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^6)$ associada à função F acima é

$$\langle F,\ \zeta\rangle \ = \ -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\|x-y\|}\zeta(x,\ y)\,d^3x\,d^3y\ , \qquad \zeta\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^6)\ .$$

A integral acima é definida no sentido de valor principal. Note o leitor que a singularidade de $F(x,\ y)$ em $x=y$ é integrável em $\mathbb{R}^3$, ou seja, a função $\frac{1}{\|x-y\|}$ é localmente integrável em $\mathbb{R}^3$. Para mais detalhes a respeito da definição de integrais envolvendo a função $\frac{1}{\|x-y\|}$, vide Capítulo 44, página 2541.

Vemos que a "função generalizada" definida pela função $F(x,\ y)$ dada em (38.270) é uma solução fundamental do operador Laplaciano em $\mathbb{R}^3$. Uma outra solução fundamental pode ser obtida somando à função $F(x,\ y)$ uma outra função $H(x,\ y)$, definida para todos $x,\ y\in\mathbb{R}^3$, que seja uma função harmônica, ou seja, que satisfaça $\Delta_x H(x,\ y)=0$ para todos $x,\ y\in\mathbb{R}^3$. Com esse exemplo, percebemos que soluções fundamentais de operadores diferenciais lineares não são necessariamente únicas.

Observemos, antes de prosseguirmos, que nem todo operador linear tem por solução fundamental uma função, como no exemplo do Laplaciano, acima. Em muitos casos a solução fundamental é uma legítima distribuição. Tal ocorre especialmente no caso de operadores hiperbólicos, como o operador de onda $\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, onde a solução fundamental em $3+1$ dimensões envolve uma distribuição de Dirac. Vide Seção 43.11.3.1, página 2509.

• **Soluções fundamentais e transformadas de Fourier**

Como já discutimos, se possuirmos de uma distribuição $F_0\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo (38.265) então uma solução distribucional de (38.268) é fornecida por (38.267). É importante, portanto, dispormos de meios de obter uma tal distribuição F_0 de modo mais explícito em casos particulares e, no que segue, discutiremos um método empregado amiúde em Física e que faz uso da transformada de Fourier.

Se $\mathcal{L}$ é um operador diferencial com coeficientes constantes, temos para todo $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ que

$$\mathcal{L}^T\mathcal{F}^{-1}[f] \ = \ \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{P}_{\mathcal{L}}f]\ ,$$

onde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ é um polinômio denominado *polinômio característico associado ao operador* $\mathcal{L}$. Se $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^T$ são da forma (38.263) e (38.264), respectivamente, então

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}}(p) \ := \ \sum_{k=1}^{N}(-i)^{|\alpha^k|}\,a_k\,p^{\alpha^k}\ , \qquad p\in\mathbb{R}^n\ .$$

E. 38.57 *Exercício importante.* Verifique! ✠

Vamos supor que para cada $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tenhamos também

$$\varphi \ := \ \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{L}}}\mathcal{F}[\phi]\right] \ \in\ \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\ .$$

Como $\big(\mathcal{L}F_0\big)(f)=\delta_0(f)$ para toda $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, valerá também

$$\delta_0(\varphi) \ = \ \big(\mathcal{L}F_0\big)(\varphi) \ = \ F_0(\mathcal{L}^T\varphi) \ = \ F_0\left(\mathcal{L}^T\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{L}}}\mathcal{F}[\phi]\right]\right) \ = \ F_0\left(\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[\phi]\big]\right) \ = \ F_0(\phi)\ .$$

Logo, concluímos que a distribuição F_0 dada por

$$F_0(\phi) \ := \ \delta_0\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{L}}}\mathcal{F}[\phi]\right]\right)\ , \qquad \phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\ , \tag{38.271}$$

seria uma solução fundamental associada a $\mathcal{L}$. Naturalmente, não é evidente que o lado direito de (38.271) defina uma distribuição, pois o polinômio característico $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ pode ter zeros que atrapalhem esse propósito. Como veremos adiante, porém, (38.271) pode ser usada em muitos exemplos de interesse em Física. De modo geral um resultado fundamental devido a Hörmander[46], do qual não trataremos aqui, garante ser sempre possível dar sentido à expressão (38.271).

[46] Lars Valter Hörmander (1931–2012).

É útil reapresentar (38.271) de uma forma mais conveniente a certos propósitos. Fazendo uso da notação de emparelhamento para distribuições, temos

$$F_0(\phi) \;=\; \left\langle \delta_0,\, \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{L}}}\mathcal{F}[\phi]\right]\right\rangle \;=\; \left\langle \mathcal{F}^{-1}\delta_0,\, \frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{L}}}\mathcal{F}[\phi]\right\rangle \overset{(38.231)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left\langle \mathsf{T}_1,\, \frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{L}}}\mathcal{F}[\phi]\right\rangle \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left\langle \mathcal{F}\left[\frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{L}}}\right],\phi\right\rangle .$$

Obtemos assim a igualdade

$$F_0(\phi) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left\langle \mathcal{F}\left[\frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{L}}}\right],\phi\right\rangle , \tag{38.272}$$

ou seja,

$$F_0 \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\mathcal{F}\left[\frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{L}}}\right] . \tag{38.273}$$

Como comentamos, a distribuição do lado direito pode ter de ser definida em termos de valores principais ou de partes finitas, devido ao fato de $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ poder eventualmente ter zeros sobre o eixo real.

Com (38.273) vemos que a função generalizada $F_0(x)$ associada à solução fundamental F_0 é formalmente dada por

$$F_0(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\,\mathcal{F}\left[\frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{L}}}\right](x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-ix\cdot y}}{\mathcal{P}_{\mathcal{L}}(y)}\,d^ny . \tag{38.274}$$

Com isso, a solução da equação não-homogênea $\mathcal{L}u = h$ fornecida em (38.269) é também dada formalmente por

$$u(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}\left[\frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{L}}}\right](x-y)\,h(y)\,d^ny . \tag{38.275}$$

Para certos operadores $\mathcal{L}$ é possível dar sentido matemático a (38.274) e (38.275), como veremos nos exemplos tratados adiante, assim como na Seção 38.4.1.3 e, informalmente, na Seção 43.11, página 2501. Nesses casos felizes as expressões (38.274) e (38.275) são muito úteis para a obtenção de soluções explícitas de equações diferenciais lineares a coeficientes constantes e não-homogêneas, o que inclui muitos exemplos de interesse físico, como os tratados nas seções supracitadas.

Antes de analisarmos exemplos do uso de (38.271) precisamos fazer algumas colocações sobre aquela solução.

• **Comentários sobre a solução (38.271) ou (38.273)**

Em primeiro lugar, cabe notar que (38.271) ou (38.273) não definem univocamente uma solução fundamental associada a $\mathcal{L}$, pois sempre podemos acrescentar ao lado direito uma distribuição V que seja solução da equação homogênea $\big(\mathcal{L}\otimes\mathbb{1}\big)V = 0$.

Um segundo comentário, também pertinente à unicidade da solução (38.271), ou (38.273), e que particularmente concerne casos em que $\mathcal{L}$ é um operador hiperbólico (como o operador de onda, ou d'Alembertiano), é o seguinte. Como já comentamos, certos cuidados devem ser tomados para que se dê sentido ao lado direito de (38.271) ou de (38.273) enquanto uma distribuição. Em certos casos a expressão $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{L}}}\mathcal{F}[\phi]\right]$ tem de ser definida em termos de valores principais (ou partes finitas), o que pode conduzir a certas ambiguidades e à diversas soluções distintas da equação (38.254). É de se notar aqui que se houver duas soluções distintas, F e G de (38.254) combinações lineares do tipo $\lambda F + (1-\lambda)G$ fornecem também soluções mais gerais. Assim, essas ambiguidades, se surgirem (e, de fato, surgem em equações de onda não-homogêneas, quando $\mathcal{L}$ é hiperbólico, levando às chamadas funções de Green retardadas e avançadas), podem ser bem vindas.

• **Um exemplo ilustrativo**

Consideremos a equação diferencial linear não-homogênea e a coeficientes constantes[47]

$$\left(i\frac{d}{dt} - \omega_0\right)u(t) \;=\; h(t) , \tag{38.276}$$

com $\omega_0 \in \mathbb{R}$, constante, e $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, uma função dada. Temos $\mathcal{L} = i\frac{d}{dt} - \omega_0$ e $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}(p) = p - \omega_0$, $p \in \mathbb{R}$. Assim,

$$F_0(\phi) \;:=\; \delta_0\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{L}}}\mathcal{F}[\phi]\right]\right) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathcal{F}[\phi](p)}{p-\omega_0}\,dp \;=\; \frac{1}{2\pi}\Big\langle \mathsf{VP}_{\omega_0},\, \mathcal{F}[\phi]\Big\rangle \;=\; \frac{1}{2\pi}\Big\langle \mathcal{F}\mathsf{VP}_{\omega_0},\, \phi\Big\rangle .$$

[47] A equação (38.276), como toda EDO, é hiperbólica, e o operador $i\frac{d}{dt} - \omega_0$ é hiperbólico, fatos mencionados já na primeira linha de [247].

Podemos agora prosseguir usando os resultados sobre transformadas de Fourier de distribuições. Por (38.239), temos

$$F_0(\phi) \;=\; \frac{1}{2\pi}\Big\langle \mathcal{F}\mathsf{VP}_{\omega_0},\, \phi\Big\rangle \;\overset{(38.239)}{=}\; \mp i\Big\langle \mathsf{T}_{e_{\omega_0}(H^{\pm}-1/2)},\, \phi\Big\rangle \;=\; \mp i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t}\big(H(\pm t)-1/2\big)\phi(t)\,dt\;,$$

com H sendo a função de Heaviside (38.173). Reconhecemos que F_0 é a distribuição regular associada à função

$$F_0(t) \;=\; \mp i e^{-i\omega_0 t}\big(H(\pm t)-1/2\big)\;. \tag{38.277}$$

Devemos aqui fazer notar que $v(t)=e^{-i\omega_0 t}$ é uma solução da equação homogênea $\big(i\frac{d}{dt}-\omega_0\big)v(t)=0$. Assim, reconhecemos que podemos reduzir (38.277) ao par de soluções

$$F_{\pm}(t) \;=\; \mp i e^{-i\omega_0 t}H(\pm t)\;, \tag{38.278}$$

como soluções fundamentais associadas a $\mathcal{L}$. As correspondentes soluções particulares de (38.276) são

$$u_+(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} F_+(t-t')h(t')\,dt' \;=\; -i\int_{-\infty}^{t} e^{-i\omega_0(t-t')}h(t')dt'\;, \tag{38.279}$$

$$u_-(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} F_-(t-t')h(t')\,dt' \;=\; +i\int_{t}^{\infty} e^{-i\omega_0(t-t')}h(t')dt'\;. \tag{38.280}$$

A solução u_+ é dita ser uma *solução retardada*, pois u_+ depende de valores de $h(t')$ para $t'<t$. Já a solução u_- é dita ser uma *solução avançada*, pois u_- depende de valores de $h(t')$ para $t'>t$.

As soluções avançada e retardada satisfazem a mesma equação não-homogênea $\big(i\frac{d}{dt}-\omega_0\big)u_{\pm}(t)=h(t)$. Assim, a diferença u_+-u_- deve ser uma solução da equação homogênea $\big(i\frac{d}{dt}-\omega_0\big)v(t)=0$. De fato, vemos de (38.279)–(38.280) que

$$u_+(t)-u_-(t) \;=\; \Big(-i\sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}[h](\omega_0)\Big)\,e^{-i\omega_0 t}$$

é solução da equação homogênea, devido ao fator $e^{-i\omega_0 t}$ (o fator $-i\sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}[h](\omega_0)$ é uma mera constante multiplicativa, pois independe de t).

Vemos explicitamente nesse caso simples, portanto, que a diferença entre a solução retardada e a avançada é uma solução da equação homogênea.

É interessante comparar o problema que acabamos de tratar com outro similar, o da equação

$$\left(i\frac{d}{dt}-\omega_*\right)u(t) \;=\; h(t)\;, \tag{38.281}$$

onde agora $\omega_*\in\mathbb{C}$, constante com parte imaginária não-nula, e onde, como antes, $h\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, uma função dada. Vamos escrever $\omega_*=\omega_0+i\omega_1$, com ω_0 e ω_1 reais e $\omega_1\neq 0$.

Temos $\mathcal{L}=i\frac{d}{dt}-\omega_*$ e $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}(p)=p-\omega_*$, $p\in\mathbb{R}$. Aqui, (38.273) fica, para a função generalizada F_0,

$$F_0(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\left[\frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{L}}}\right](t) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ipt}}{p-\omega_*}\,dp \;\overset{(38.126)}{=}\; i\,\mathrm{sgn}\,(\omega_1)H\big(-\mathrm{sgn}\,(\omega_1)t\big)e^{-i\omega_* t}\;,$$

onde sgn é a função sinal. Para cada ω_1 há, portanto, apenas uma solução, ao contrário do que vimos acima quanto ω_* era real (e ω_1 era nula). A solução aqui é ou retardada (quando $\omega_1<0$) ou avançada (quando $\omega_1>0$). Ao fazermos formalmente $|\omega_1|\to 0$ recuperamos as soluções fundamentais (38.278) dependendo do sinal de ω_1 quando o limite é tomado.

* * *

Os comentários dos exemplos acima sobre soluções retardadas e avançadas são relevantes, pois os mesmos fenômenos são observados em outras equações hiperbólicas, como a equação de ondas forçadas $\Box u=h$, que estudaremos oportunamente.

38.4.1.3 Alguns Exemplos Fisicamente Relevantes

Vamos agora ilustrar as ideias acima com alguns exemplos de interesse em Física. Um tratamento mais informal é oferecido na Seção 43.11, página 2501.

• **O oscilador harmônico forçado unidimensional**

Considere-se a equação diferencial $\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)u(t)=h(t)$, com $\omega_0>0$, constante, e $h\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ uma função dada. Essa é a bem-conhecida equação do harmônico forçado unidimensional (onde $\omega_0=\sqrt{k/m}$, $k>0$ sendo a constante da mola e $m>0$ a massa da partícula e $h(t)=f(t)/m$, com f sendo uma forma externa aplicada à partícula, dependente apenas de t). Adotando-se $\mathcal{L}=\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2$ temos nesse caso $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}(p)=-p^2+\omega_0^2=-(p-\omega_0)(p+\omega_0)$, $p\in\mathbb{R}$. É conveniente escrever

$$\frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{L}}(p)} = \frac{-1}{2\omega_0}\left(\frac{1}{p-\omega_0}-\frac{1}{p+\omega_0}\right),$$

e com isso

$$F_0(\phi) := \delta_0\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{L}}}\mathcal{F}[\phi]\right]\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathcal{F}[\phi](p)}{-p^2+\omega_0^2}\,dp = \frac{-1}{4\pi\omega_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[\phi](p)\left(\frac{1}{p-\omega_0}-\frac{1}{p+\omega_0}\right)dp$$

$$= -\frac{1}{4\pi\omega_0}\Big(\Big\langle \mathsf{VP}_{\omega_0},\,\mathcal{F}[\phi]\Big\rangle-\Big\langle \mathsf{VP}_{-\omega_0},\,\mathcal{F}[\phi]\Big\rangle\Big) = -\frac{1}{4\pi\omega_0}\Big(\Big\langle \mathcal{F}[\mathsf{VP}_{\omega_0}],\,\phi\Big\rangle-\Big\langle \mathcal{F}[\mathsf{VP}_{-\omega_0}],\,\phi\Big\rangle\Big).$$

Podemos agora prosseguir usando os resultados sobre transformadas de Fourier de distribuições. Por (38.239), temos

$$\frac{1}{2\pi}\Big\langle \mathcal{F}\mathsf{VP}_{\omega_0},\,\phi\Big\rangle \overset{(38.239)}{=} \mp i\Big\langle \mathsf{T}_{e_{\omega_0}(H^{\pm}-1/2)},\,\phi\Big\rangle = \mp i\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega_0 t}\big(H(\pm t)-1/2\big)\phi(t)\,dt \qquad \text{e} \tag{38.282}$$

$$\frac{1}{2\pi}\Big\langle \mathcal{F}\mathsf{VP}_{-\omega_0},\,\phi\Big\rangle \overset{(38.239)}{=} \mp i\Big\langle \mathsf{T}_{e_{-\omega_0}(H^{\pm}-1/2)},\,\phi\Big\rangle = \mp i\int_{-\infty}^{\infty}e^{+i\omega_0 t}\big(H(\pm t)-1/2\big)\phi(t)\,dt \tag{38.283}$$

com H sendo a função de Heaviside (38.173). O sinal a ser escolhido em (38.282) é independente do de (38.283). Há, portanto, quatro possibilidades de escolha de sinais.

I. *Escolha* $--$. Nesse caso F_0 é a distribuição regular associada à função

$$F_0(t) = \frac{-i}{2\omega_0}\Big(e^{-i\omega_0 t}\big(H(t)-1/2\big)-e^{i\omega_0 t}\big(H(t)-1/2\big)\Big) = -\frac{1}{\omega_0}\operatorname{sen}(\omega_0 t)\big(H(t)-1/2\big).$$

Como $\operatorname{sen}(\omega_0 t)$ é solução da equação homogênea $\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)u(t)=0$, podemos simplificar a solução acima para

$$F_0(t) = -\frac{1}{\omega_0}\operatorname{sen}(\omega_0 t)H(t). \tag{38.284}$$

II. *Escolha* $++$. Nesse caso F_0 é a distribuição regular associada à função

$$F_0(t) = \frac{i}{2\omega_0}\Big(e^{-i\omega_0 t}\big(H(-t)-1/2\big)-e^{i\omega_0 t}\big(H(-t)-1/2\big)\Big) = \frac{1}{\omega_0}\operatorname{sen}(\omega_0 t)\big(H(-t)-1/2\big).$$

Como $\operatorname{sen}(\omega_0 t)$ é solução da equação homogênea $\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)u(t)=0$, podemos simplificar a solução acima para

$$F_0(t) = \frac{1}{\omega_0}\operatorname{sen}(\omega_0 t)H(-t). \tag{38.285}$$

III. *Escolha* $-+$. Nesse caso F_0 é a distribuição regular associada à função

$$F_0(t) = \frac{-i}{2\omega_0}\Big(e^{-i\omega_0 t}\big(H(t)-1/2\big)+e^{i\omega_0 t}\big(H(-t)-1/2\big)\Big).$$

Como $e^{-i\omega_0 t}$ e $e^{i\omega_0 t}$ são soluções da equação homogênea $\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)u(t)=0$, podemos simplificar a solução acima para

$$F_0(t) \;=\; \frac{-i}{2\omega_0}\Big(e^{-i\omega_0 t}H(t)+e^{i\omega_0 t}H(-t)\Big) \;=\; -\frac{1}{\omega_0}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)H(t)+\frac{-i}{2\omega_0}e^{i\omega_0 t}\;,$$

onde usamos que $H(t)+H(-t)=1$ (o que é verdade exceto em $t=0$, um conjunto de medida nula). Assim, novamente descartando o último termo, por ser solução da equação homogênea, reobtemos a solução (38.284).

IV. *Escolha* $+-$. Nesse caso F_0 é a distribuição regular associada à função

$$F_0(t) \;=\; \frac{i}{2\omega_0}\Big(e^{-i\omega_0 t}\big(H(-t)-1/2\big)+e^{i\omega_0 t}\big(H(t)-1/2\big)\Big)\;.$$

Como $e^{-i\omega_0 t}$ e $e^{i\omega_0 t}$ são soluções da equação homogênea $\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)u(t)=0$, podemos simplificar a solução acima para

$$F_0(t) \;=\; \frac{i}{2\omega_0}\Big(e^{-i\omega_0 t}H(-t)+e^{i\omega_0 t}H(t)\Big) \;=\; \frac{1}{\omega_0}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)H(-t)+\frac{i}{2\omega_0}e^{i\omega_0 t}\;,$$

onde usamos que $H(t)+H(-t)=1$ (o que é verdade exceto em $t=0$, um conjunto de medida nula). Assim, novamente descartando o último termo, por ser solução da equação homogênea, reobtemos a solução (38.285).

Há, assim, duas particulares soluções distintas para a equação não-homogênea $\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)u(t)=h(t)$:

$$u_{ret}(t) \;:=\; -\frac{1}{\omega_0}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{sen}\big(\omega_0(t-t')\big)h(t')\;dt' \qquad \text{e} \qquad u_{av}(t) \;:=\; \frac{1}{\omega_0}\int_{t}^{\infty}\mathrm{sen}\big(\omega_0(t-t')\big)h(t')\;dt'\;.$$

Essas são as soluções retardada e avançada, respectivamente.

E. 38.58 *Exercício*. Constate que

$$u_{ret}(t)-u_{av}(t) \;=\; -\frac{1}{\omega_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sen}\big(\omega_0(t-t')\big)h(t')\;dt' \;=\; -\frac{\mathrm{sen}\big(\omega_0 t\big)}{\omega_0}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\big(\omega_0 t'\big)h(t')\;dt'+\frac{\cos\big(\omega_0 t\big)}{\omega_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sen}\big(\omega_0 t'\big)h(t')\;dt'$$

e que essa é uma solução da equação homogênea $\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)u(t)=0$. ✠

• O exemplo do Laplaciano em $\mathbb{R}^3$. A equação de Poisson revisitada

Consideremos a *equação de Poisson* $\Delta u=h$ em $\mathbb{R}^3$ com $h\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$. Nesse caso consideramos o operador $\mathcal{L}=\Delta$ para o qual temos $\mathcal{L}^T=\Delta=\mathcal{L}$ e cujo polinômio característico associado é $\mathcal{P}_\Delta(p)=-\|p\|^2$, com $p=(p_1,\,p_2,\,p_3)\in\mathbb{R}^3$ e com $\|p\|^2=p_1^2+p_2^2+p_3^2$.

Uma solução fundamental F_0 para Δ em $\mathbb{R}^3$ será tal que para toda $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ teremos $\big(\Delta F_0\big)(\varphi)=\delta_0(\varphi)$. Assim, como $\Delta^T=\Delta$, vale $F_0(\Delta\varphi)=\delta_0(\varphi)$. Tomemos φ da forma $\varphi=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathcal{P}_\Delta}\mathcal{F}[\phi]\right]$, com $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$. Como $\Delta\mathcal{F}^{-1}=\mathcal{F}^{-1}\mathcal{P}_\Delta$, segue que

$$\delta_0(\varphi) \;=\; \big(\Delta F_0\big)(\varphi) \;=\; F_0(\Delta\varphi) \;=\; F_0\left(\Delta\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathcal{P}_\Delta}\mathcal{F}[\phi]\right]\right) \;=\; F_0\left(\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[\phi]\big]\right) \;=\; F_0(\phi)\;.$$

Assim, estabelecemos que uma solução fundamental de Δ é a distribuição F_0 dada por

$$F_0(\phi) \;=\; \delta_0\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathcal{P}_\Delta}\mathcal{F}[\phi]\right]\right)\;,\qquad \phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)\;. \tag{38.286}$$

O lado direito da igualdade em (38.286) é dado por

$$\begin{aligned}
\delta_0\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathcal{P}_\Delta}\mathcal{F}[\phi]\right]\right) \;&=\; -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\int_{\mathbb{R}^3}e^{-ix\cdot p}\phi(x)\,d^3x\right)\frac{1}{\|p\|^2}d^3p\\
&=\; -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\|p\|<R}\left(\int_{\mathbb{R}^3}e^{-ix\cdot p}\phi(x)\,d^3x\right)\frac{1}{\|p\|^2}d^3p\\
&=\; -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\int_{\|p\|<R}\frac{e^{-ix\cdot p}}{\|p\|^2}d^3p\right)\phi(x)\,d^3x\;.
\end{aligned}$$

A inversão da ordem das integrais é novamente permitida pelo Teorema de Fubini (daí ser necessário limitar a integral em p para a região $\|p\| < R$). Para cada $x \neq 0$ calculamos a integral em p adotando um sistema de coordenadas esféricas com eixo "z" na direção de x, escrevendo

$$\int_{\|p\|<R} \frac{e^{-ix\cdot p}}{\|p\|^2} d^3p \;=\; \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R e^{-ir\|x|\cos\theta} dr\,\mathrm{sen}\theta d\theta d\varphi \;=\; 2\pi\int_0^{\pi}\int_0^R e^{-ir|x|\cos\theta} dr\,\mathrm{sen}\theta d\theta\ ,$$

sendo $r \equiv \|p\|$, $\varphi \in (-\pi,\ \pi]$ o ângulo azimutal e $\theta \in [0,\ \pi]$ o ângulo zenital. Agora, $\int_0^{\pi} e^{-ir\|x\|\cos\theta}\,\mathrm{sen}\theta d\theta = 2\frac{\mathrm{sen}\big(r\|x\|\big)}{r\|x\|}$ e ficamos com $4\pi\int_0^R \frac{\mathrm{sen}\big(r\|x\|\big)}{r\|x\|}\,dr = \frac{4\pi}{\|x\|}\int_0^R \frac{\mathrm{sen}s}{s}\,ds$. Logo,

$$F_0(\phi) \;=\; -\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\left(\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\mathrm{sen}s}{s}\,ds\right)\int_{\mathbb{R}^3}\phi(x)\,\frac{1}{\|x\|}d^3x\ .$$

Como, sabidamente, $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\mathrm{sen}s}{s}\,ds = \frac{\pi}{2}$ (isso se prova facilmente pelo método dos resíduos), concluímos que uma solução fundamental de Δ em $\mathbb{R}^3$ é a distribuição F_0 dada por

$$F_0(\phi) \;=\; -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\phi(x)\,\frac{1}{\|x\|}d^3x\ , \qquad \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)\ .$$

Na notação de funções generalizadas, a solução fundamental de Δ em $\mathbb{R}^3$ obtida acima é dada por

$$F_0(x) \;:=\; -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x\|}\ , \qquad x \in \mathbb{R}^3\ .$$

Conforme já comentamos, uma solução fundamental mais geral é obtida adicionando-se a esta uma solução u da equação de Laplace $\Delta u = 0$. Do Teorema 44.1, página 2544, aprendemos, porém, que se exigirmos que u e seu gradiente decaiam rapidamente a zero no infinito, então u deverá ser identicamente nula.

Com isso, a solução (38.267) de $\Delta U = \mathsf{T}_h$ com $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ será

$$U(\varphi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^3}\left(-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{h(x')}{\|x-x'\|}\,d^3x'\right)\varphi(x)\,d^3x\ ,$$

$\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, como facilmente se constata, e concluímos que uma solução da *equação de Poisson* $\Delta u = h$ com $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ é dada por

$$u(x) \;=\; -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{h(x')}{\|x-x'\|}\,d^3x'\ .$$

Essa solução da equação de Poisson é também obtida com mais generalidade (ou seja, com menos restrições à função h) no Teorema 44.2, página 2545.

• **O exemplo da equação de difusão não-homogênea**

Consideremos a *equação de difusão não-homogênea* $\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta\right)u = h$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+1})$. Nesse caso consideramos o operador $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - D\Delta$ para o qual temos $\mathcal{L}^T = -\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta$ e cujo polinômio característico associado é $\mathcal{P}(p_0,\ p) = -ip_0 + D\|p\|^2$, com $p_0 \in \mathbb{R}$, $p = (p_1,\ \ldots,\ p_n) \in \mathbb{R}^n$ e com $\|p\|^2 = p_1^2 + \cdots + p_n^2$.

Uma solução fundamental F_0 para $\mathcal{L}$ será dada por $F_0(\phi) = \delta_0\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathcal{P}}\mathcal{F}[\phi]\right]\right)$, $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+1})$. Assim, tomando $y_0 \in \mathbb{R}$

e $y = (y_1,\ \ldots,\ y_n) \in \mathbb{R}^n$, teremos

$$\begin{aligned}
F_0(\phi) &= \delta_0\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathcal{P}}\mathcal{F}[\phi]\right]\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-i(y_0p_0+y\cdot p)}\phi(y)\,d^{n+1}y\right)\frac{1}{\mathcal{P}(p)}d^{n+1}p \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-i(y_0p_0+y\cdot p)}\phi(y)\,d^{n+1}y\right)\frac{1}{ip_0 - D\|p\|^2}d^{n+1}p \\
&= -\lim_{R_1\to\infty}\lim_{R_2\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{\|p\|<R_2}\int_{-R_1}^{R_1}\left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-i(y_0p_0+y\cdot p)}\phi(y)\,d^{n+1}y\right)\frac{1}{ip_0 - D\|p\|^2}dp_0d^np \\
&= -\lim_{R_1\to\infty}\lim_{R_2\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{\|p\|<R_2}\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\left(\int_{-R_1}^{R_1}\frac{e^{-iy_0p_0}}{ip_0 - D\|p\|^2}dp_0\right)e^{-iy\cdot p}\phi(y)\,d^{n+1}yd^np\ .
\end{aligned}$$

Agora, o limite $\lim\limits_{R_1\to\infty}\int_{-R_1}^{R_1}\frac{e^{-iy_0p_0}}{ip_0 - D\|p\|^2}dp_0$ pode ser calculado pelo método dos resíduos, fornecendo

$$\lim_{R_1\to\infty}\int_{-R_1}^{R_1}\frac{e^{-iy_0p_0}}{ip_0 - D\|p\|^2}dp_0 \ = \ 2\pi H(y_0)e^{-Dy_0\|p\|^2}\ ,$$

com H sendo a função de Heaviside (38.173). Verifique! Assim,

$$\begin{aligned}
F_0(\phi) &= \lim_{R_2\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\|p\|<R_2}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} H(y_0)e^{-Dy_0\|p\|^2}e^{-iy\cdot p}\phi(y)\,d^{n+1}yd^np \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Dy_0\|p\|^2}e^{-iy\cdot p}\,d^np\right)H(y_0)\phi(y)\ d^{n+1}y \\
&\overset{(38.72)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\left(H(y_0)\frac{e^{-\frac{\|y\|^2}{4Dy_0}}}{\big(2Dy_0\big)^{n/2}}\right)\phi(y)\ d^{n+1}y\ .
\end{aligned}$$

Assim, na notação de funções generalizadas, a solução fundamental do operador $\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta$ é

$$F_0(y_0,\ y) \ = \ H(y_0)\frac{e^{-\frac{\|y\|^2}{4Dy_0}}}{\sqrt{\big(4\pi Dy_0\big)^n}}\ , \qquad y_0\in\mathbb{R},\ \ y\in\mathbb{R}^n\ .$$

Por (38.269), uma solução da *equação de difusão não-homogênea* $\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta\right)u = h$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $h\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ é, portanto, dada por

$$u(t,\ x) \ = \ \int_{\mathbb{R}^{n+1}} F_0(t-y_0,\ x-y)\,h(y_0,\ y)\,dy_0d^ny \ = \ \int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4D(t-y_0)}}}{\sqrt{\big(4\pi D(t-y_0)\big)^n}}\,h(y_0,\ y)\ d^nydy_0\ ;\quad t\in\mathbb{R},\quad x\in\mathbb{R}^n\ . \tag{38.287}$$

E. 38.59 *Exercício*. Verifique explicitamente que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta_x\right)\left(H(t-y_0)\frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4D(t-y_0)}}}{\sqrt{\big(4\pi D(t-y_0)\big)^n}}\right) \ = \ \delta(t-y_0)\delta(x-y)\ .$$

✠

38.5 Exercícios Adicionais

E. 38.60 *Exercício dirigido.* **[A transformada de Fourier de Gaussianas via integração complexa].** Desejamos demonstrar a igualdade (38.75)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - i(y+i\gamma)x}\, dx \;=\; \frac{\exp\left(-\frac{1}{4\alpha}(y+i\gamma)^2\right)}{\sqrt{2\alpha}}\,, \tag{38.288}$$

para α e $\gamma \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$, usando desta vez métodos de integração complexa. Acima $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$, sendo $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ (pois supomos $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$) e $\sqrt{\alpha} = \sqrt{|\alpha|}\, e^{i\theta/2}$.

Mostre por completamento de quadrados que vale

$$-\alpha x^2 - i(y+i\gamma)x \;=\; -\alpha\left(x + i\frac{(y+i\gamma)}{2\alpha}\right)^2 - \frac{1}{4\alpha}(y+i\gamma)^2\,.$$

Logo,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - i(y+i\gamma)x}\, dx \;=\; \frac{\exp\left(-\frac{1}{4\alpha}(y+i\gamma)^2\right)}{\sqrt{2\pi}}\;\mathsf{J}\,, \tag{38.289}$$

onde

$$\mathsf{J} \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha\left(x + i\frac{(y+i\gamma)}{2\alpha}\right)^2\right)\, dx\,.$$

Tomando-se $z \equiv x + i\frac{(y+i\gamma)}{2\alpha}$, mostre que podemos escrever

$$\mathsf{J} \;=\; \int_C e^{-\alpha z^2}\, dz$$

onde $C := \{x + i\frac{(y+i\gamma)}{2\alpha},\; x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ é uma linha reta no plano complexo paralela ao eixo real e com parte imaginária igual a $w_0 := \mathrm{Im}\left(\frac{(y+i\gamma)}{2\alpha}\right)$ e orientada de $x = -\infty$ a $x = +\infty$. Vide Figura 38.3, página 2106.

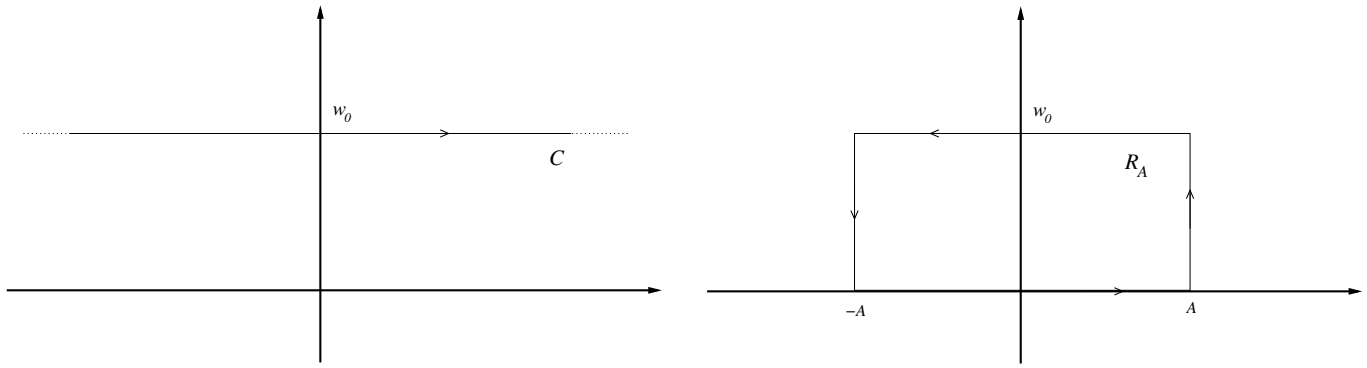

Figura 38.3: À esquerda, o caminho de integração C. À direita, o caminho de integração fechado R_A.

O passo seguinte é provar que

$$\int_C e^{-\alpha z^2}\, dz \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx\,. \tag{38.290}$$

Para tal, tome-se $A > 0$ e considere-se a integral

$$\mathsf{H}_A \;:=\; \int_{R_A} e^{-\alpha z^2}\, dz$$

onde R_A é o retângulo em $\mathbb{C}$ indicado na Figura 38.3, página 2106. Como $e^{-\alpha z^2}$ é uma função inteira (i.e., analítica em toda parte) na variável z, a integral H_A é nula para todo $A > 0$, pelo Teorema de Cauchy. No entanto, H_A é a soma das integrais sobre os quatro segmentos de reta orientados que compõem R_A. Constate que a integral sobre o segmento de reta horizontal superior é $\mathsf{S}_A := -\int_{-A}^{A} e^{-\alpha(x+iw_0)^2} dx$. Constate que a integral sobre o segmento de reta horizontal inferior é $\mathsf{I}_A := \int_{-A}^{A} e^{-\alpha x^2} dx$. Constate que as integrais sobre os segmentos verticais do lado e esquerdo e direito são

$$\mathsf{E}_A \;:=\; -i\int_0^{w_0} e^{-\alpha(-A+iy)^2}\, dy \qquad \text{e} \qquad \mathsf{D}_A \;:=\; i\int_0^{w_0} e^{-\alpha(A+iy)^2}\, dy\,,$$

respectivamente. Constate que

$$\left|e^{-\alpha(\pm A+iy)^2}\right| \;=\; \exp\Big(-\operatorname{Re}\big(\alpha(\pm A+iy)^2\big)\Big)$$

e que

$$\operatorname{Re}\Big(\alpha(\pm A+iy)^2\Big) \;=\; -\operatorname{Re}(\alpha)\big(A^2-y^2\big)\pm 2\operatorname{Im}(\alpha)yA \;=\; -\operatorname{Re}(\alpha)\left(A\pm\frac{\operatorname{Im}(\alpha)}{\operatorname{Re}(\alpha)}y\right)^2+\frac{|\alpha|^2}{\operatorname{Re}(\alpha)}y^2\;.$$

Obtenha disso que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{w_0} e^{-\alpha(\pm A+iy)^2}\,dy\right| \;&\leq\; \int_0^{|w_0|}\exp\Big(-\operatorname{Re}\big(\alpha(\pm A+iy)^2\big)\Big)\,dy\\ &=\; \exp\left(-\operatorname{Re}(\alpha)\left(A\pm\frac{\operatorname{Im}(\alpha)}{\operatorname{Re}(\alpha)}y\right)^2\right)\int_0^{|w_0|}\exp\left(\frac{|\alpha|^2}{\operatorname{Re}(\alpha)}y^2\right)\,dy\\ &\leq\; |w_0|\,\exp\left(-\operatorname{Re}(\alpha)\left(A\pm\frac{\operatorname{Im}(\alpha)}{\operatorname{Re}(\alpha)}y\right)^2+\frac{|\alpha|^2}{\operatorname{Re}(\alpha)}w_0^2\right)\end{aligned}$$

e conclua disso que

$$\lim_{A\to\infty}\mathsf{E}_A \;=\; \lim_{A\to\infty}\mathsf{D}_A \;=\; 0\;,$$

já que supomos $\operatorname{Re}(\alpha)>0$. Conclua disso e do fato que $\mathsf{H}_A=0$ que

$$\lim_{A\to\infty}\mathsf{S}_A \;=\; -\lim_{A\to\infty}\mathsf{I}_A\;,$$

ou seja, que

$$\int_C e^{-\alpha z^2}\,dz \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$$

como queríamos mostrar.

Escrevamos $\alpha=|\alpha|e^{i\theta}$, sendo $-\pi/2<\theta<\pi/2$, pois supomos $\operatorname{Re}(\alpha)>0$. Vamos agora provar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\;, \tag{38.291}$$

com $\sqrt{\alpha}=\sqrt{|\alpha|}e^{i\theta/2}$. Constate que vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx \;=\; 2\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx \;=\; 2e^{-i\theta/2}\int_L e^{-|\alpha|z^2}\,dz\;,$$

onde L é a semirreta em $\mathbb{C}$ indicada na Figura 38.4, página 2108.

Para calcular $\int_L e^{-|\alpha|z^2}\,dz$ tomamos novamente $A>0$ e consideramos a integral

$$\mathsf{K}_A \;:=\; \int_{L_A} e^{-|\alpha|z^2}\,dz\;.$$

Como $e^{-|\alpha|z^2}$ é uma função inteira de z temos $\mathsf{K}_A=0$, pelo Teorema de Cauchy. A integral que define K_A é a soma das integrais nas três partes que compõem L_A: dois segmentos de reta e um arco de círculo. Vide Figura 38.4, página 2108. Constate que essas integrais são dadas por

$$1_A \;:=\; -e^{i\theta/2}\int_0^A e^{-\alpha\rho^2}d\rho\;,\qquad 2_A \;:=\; \int_0^A e^{-|\alpha|\rho^2}d\rho \qquad \text{e} \qquad 3_A \;:=\; \int_0^{\theta/2}\exp\Big(-|\alpha|A^2e^{2i\varphi}\Big)\,d\varphi\;.$$

Constate que

$$|3_A| \;=\; \left|\int_0^{\theta/2}\exp\Big(-|\alpha|A^2e^{2i\varphi}\Big)\,d\varphi\right| \;\leq\; \int_0^{|\theta|/2}\exp\big(-|\alpha|A^2\cos(2\varphi)\big)\,d\varphi \;\leq\; \frac{|\theta|}{2}\exp\big(-|\alpha|A^2\cos(\theta)\big) \;=\; \frac{|\theta|}{2}e^{-\operatorname{Re}(\alpha)A^2}$$

e, portanto, que $\lim_{A\to\infty}3_A=0$. Conclua do fato que $\mathsf{K}_A=0$ que temos $\lim_{A\to\infty}1_A=-\lim_{A\to\infty}2_A$. Obtenha disso que

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha\rho^2}d\rho \;=\; e^{-i\theta/2}\int_0^{\infty} e^{-|\alpha|\rho^2}d\rho \;=\; \frac{e^{-i\theta/2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\alpha|\rho^2}d\rho \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{|\alpha|}e^{i\theta/2}} \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\;,$$

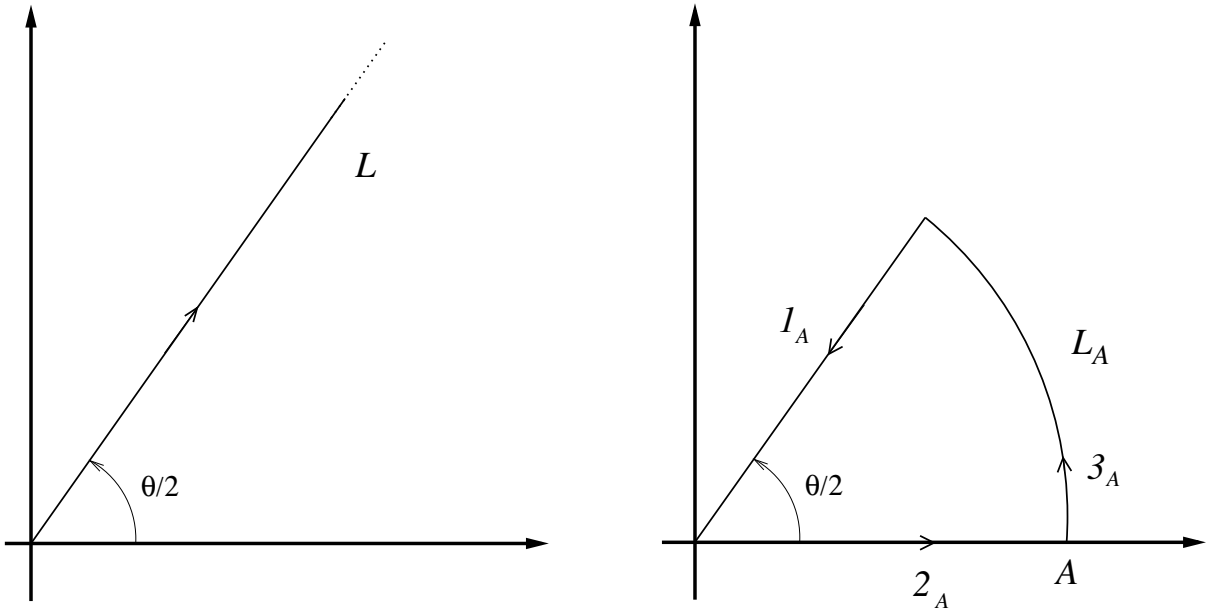

Figura 38.4: Esquerda: o caminho de integração L, uma semirreta que parte da origem e estende-se ao infinito formando um ângulo de $\theta/2$ com a horizontal. Direita: caminho de integração L_A e as três partes que o compõem: o segmento de reta 1_A (que parte da origem, tem comprimento A e forma um ângulo de $\theta/2$ com a horizontal), segmento de reta 2_A (idêntico ao intervalo $[0,\ A]$ do eixo real) e o arco de círculo 3_A (de raio A e abertura $\theta/2$, centrado na origem).

o que implica (38.291). Reunindo (38.291), (38.290) e (38.289), estabeleça que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - i(y+i\gamma)x}\,dx \;=\; \frac{\exp\left(-\frac{1}{4\alpha}\left(y+i\gamma\right)^2\right)}{\sqrt{2\alpha}}\;,$$

que é a relação (38.288) ou (38.75), como desejado. Isto também completa uma demonstração alternativa do Corolário 38.1, página 2034. ✠

E. 38.61 *Exercício dirigido.* **[A transformada de Fourier de Gaussianas usando séries de Taylor].** Sejam $\alpha > 0$ e $\gamma \in \mathbb{C}$, constantes, seja a função $h(x) := e^{-\alpha x^2+\gamma x} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ e seja $\hat{h} := \mathcal{F}[h]$ sua transformada de Fourier. Usando a expansão de Taylor da exponencial, temos

$$\hat{h}(p) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{(-ip+\gamma)x}\,dx \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ip+\gamma)^n}{n!}x^n\right)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ip+\gamma)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}x^n\,dx\;.$$

Justifique a troca da série pela integral, acima. Note agora que os termos com n ímpar anulam-se, pois h é uma função par. Temos, portanto, $\hat{h}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-ip+\gamma)^{2m}}{(2m)!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}x^{2m}\,dx$. Agora,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}x^{2m}\,dx \;=\; 2\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}x^{2m}\,dx \;\overset{t=\alpha x^2}{=}\; \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}+m}}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{m+\frac{1}{2}-1}\,dt \;=\; \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}+m}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\;,$$

onde Γ é a *Função Gama de Euler* (vide Capítulo 7, página 386). Usando, (7.19), página 393, obtenha disso

$$\hat{h}(p) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{(-ip+\gamma)^2}{4\alpha}\right)^m \;=\; \frac{e^{-\frac{(p+i\gamma)^2}{4\alpha}}}{\sqrt{2\alpha}}\;,$$

que é o resultado obtido em (38.72). ✠

E. 38.62 *Exercício dirigido.* **[A transformada de Fourier da função $e^{-\gamma x^4}$].** Seja $\gamma > 0$, constante, seja a função $h(x) := e^{-\gamma x^4} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ e seja $\hat{h} := \mathcal{F}[h]$ sua transformada de Fourier. Usando a expansão de Taylor da exponencial, temos

$$\hat{h}(p) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma x^4} e^{-ipx}\,dx \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma x^4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}x^n p^n\right)dx \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}p^n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma x^4}x^n\,dx\;.$$

Justifique a troca da série pela integral, acima. Note agora que os termos com n ímpar anulam-se, pois h é uma função par. Temos, portanto, $\hat{h}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}p^{2m}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma x^4}x^{2m}\,dx$. Agora,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma x^4}x^{2m}\,dx \;=\; 2\int_0^{\infty} e^{-\gamma x^4}x^{2m}\,dx \;\overset{t=\gamma x^4}{=}\; \frac{1}{2\gamma^{\frac{1}{4}+\frac{m}{2}}}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{4}+\frac{m}{2}-1}\,dt \;=\; \frac{1}{2\gamma^{\frac{1}{4}+\frac{m}{2}}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{m}{2}\right)\;,$$

onde Γ é a *Função Gama de Euler* (vide Capítulo 7, página 386). Portanto,

$$\hat{h}(p) \;=\; \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{4}}\sqrt{8\pi}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{p^{2m}}{\gamma^{\frac{m}{2}}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{m}{2}\right)\;. \tag{38.292}$$

Mostre, usando essa expansão, que $\hat{h}(p)$ é uma função inteira na variável p. Essa expressão permite vislumbrar a estrutura analítica de $\hat{h}$ como função de $1/\gamma \in \mathbb{C}$: a mesma possui um ponto de ramificação de ordem $1/4$ em $1/\gamma = 0$.

No Exercício E. 38.63 apresentamos uma outra estratégia para determinar $\hat{h}$. ✠

E. 38.63 *Exercício dirigido.* **[A transformada de Fourier da função $e^{-\gamma x^4}$].** Seja $\gamma > 0$, constante, seja a função $h(x) := e^{-\gamma x^4} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ e seja $\hat{h} := \mathcal{F}[h]$ sua transformada de Fourier. A função h satisfaz $h'(x) = -4\gamma x^3 h(x)$, ou seja, vale $Ph = 4i\gamma Q^3 h$. Aplicando-se a transformada de Fourier a essa expressão e usando-se (38.44), obtém-se $Q\hat{h} = -4i\gamma P^3\hat{h}$, ou seja, $\hat{h}(p)$ satisfaz a equação diferencial $\hat{h}'''(p) - \frac{1}{4\gamma}p\hat{h}(p) = 0$.

As soluções da equação diferencial $y'''(p) - \alpha p y(p) = 0$ com $\alpha \in \mathbb{C}$, constante, podem ser obtidas pelo método de expansão em série de potências, pois trata-se de uma equação diferencial ordinária linear regular de ordem três (vide Seção 14.6, página 744 e Seção 15.1, página 802). Procurando-se soluções na forma $y(p) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n$, mostre que os coeficientes c_n satisfazem as relações de recorrência

$$c_3 \;=\; 0\;,\qquad c_{n+4} \;=\; \frac{\alpha}{(n+4)(n+4)(n+2)}\,c_n\;,\qquad n \in \mathbb{N}_0\;. \tag{38.293}$$

Como $c_3 = 0$, tem-se $c_{4k+3} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. No caso específico de $\hat{h}$ temos $\hat{h}'(0) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y h(y)dy = 0$, pois h é uma função par. Portanto, interessa-nos impor que $c_1 = 0$, implicando $c_{4k+1} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ e, com isso, poderão ser não nulos apenas os coeficientes c_{4k} e c_{4k+2}, $k \in \mathbb{N}_0$, ou seja, os coeficientes $c_0,\ c_4,\ c_8,\ c_{12}$, etc., todos proporcionais a c_0, e os coeficientes $c_2,\ c_6,\ c_{10},\ c_{14}$, etc., todos proporcionais a c_2. Usando as fórmulas de recorrência (38.293), mostre que

$$c_{4k} \;=\; \alpha^k\frac{(4k-3)!!!}{(4k)!}\,c_0 \quad \text{e} \quad c_{4k+2} \;=\; \alpha^k\frac{(4k-1)!!!}{(4k+2)!}\,c_2\;,\quad k \in \mathbb{N}\;.$$

Com isso, mostre que

$$\hat{h}(p) \;=\; I_1\,\mathsf{h}_1(p,\,\gamma) + I_2\,\mathsf{h}_2(p,\,\gamma)\;, \tag{38.294}$$

onde I_1 e I_2 são as constantes

$$I_1 \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^4}\,ds \;=\; \frac{\Gamma(1/4)}{\sqrt{8\pi}}\;,\qquad I_2 \;:=\; \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} s^2 e^{-s^4}\,ds \;=\; -\frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{8\pi}} \;=\; -\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1/4)}\;,$$

Γ sendo a *Função Gama de Euler* (vide Capítulo 7, página 386), e onde

$$\mathsf{h}_1(p,\,\gamma) \;:=\; \frac{1}{\gamma^{1/4}}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(4k-3)!!!}{(4k)!}\left(\frac{p^4}{4\gamma}\right)^k\right)\;,\qquad \mathsf{h}_2(p,\,\gamma) \;:=\; \frac{p^2}{2\gamma^{3/4}}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(4k-1)!!!}{(4k+2)!}\left(\frac{p^4}{4\gamma}\right)^k\right)\;.$$

Mostre, usando essas expansões, que h_1 e h_2 são funções inteiras da variável p. Mostre, usando as expansões e propriedades da função Gama de Euler, que a expressão acima para $\hat{h}$ coincide com a de (38.292).

Essas expressões também permitem vislumbrar a estrutura analítica de $\hat{h}$ como função de $1/\gamma \in \mathbb{C}$: a mesma possui um ponto de ramificação de ordem $1/4$ em $1/\gamma = 0$. ✠

E. 38.64 *Exercício*. Usando as mesmas ideias do Exercício E. 38.63, obtenha a transformada de Fourier da função $\exp\Big(-\gamma x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \delta x\Big)$, com $\gamma > 0$ e $\alpha,\ \beta,\ \delta \in \mathbb{C}$, em termos de expansões em séries de potências. ✠

E. 38.65 *Exercício*. Usando as mesmas ideias dos Exercícios E. 38.61 ou E. 38.63, obtenha a transformada de Fourier da função $e^{-\gamma x^6}$, $\gamma > 0$, em termos de expansões em séries de potências. ✠

E. 38.66 *Exercício dirigido*. Para $\beta > 0$, constante, seja a função

$$h(x) \ = \ \frac{1}{\cosh\big(\beta\, x\big)} \ ,$$

$x \in \mathbb{R}$. Sabemos do Exercício E. 38.1, página 2009, que $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Mostre que

$$\mathcal{F}[h](y) \ = \ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\beta\cosh\Big(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\beta}\Big)} \ . \tag{38.295}$$

Observe que segue facilmente disso que para a função

$$h(x) \ = \ \frac{1}{\cosh\big(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, x\big)} \qquad \text{vale} \qquad \mathcal{F}[h] \ = \ h \ , \tag{38.296}$$

ou seja, essa função h tem a si mesma como transformada de Fourier!

Sugestões. Observe que $h(x) = 2\frac{e^{\beta x}}{1+e^{2\beta x}}$. Logo,

$$\mathcal{F}[h](y) \ = \ \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\beta x}}{1+e^{2\beta x}}e^{-ixy}\,dx \ \overset{s\equiv 2\beta x}{=} \ \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(\frac{1}{2}-i\frac{y}{2\beta})s}}{1+e^{s}}\,ds \ = \ \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\Big(\lim_{a\to\infty}\mathrm{I}_a\Big) \ ,$$

onde, para $a > 0$, $\mathrm{I}_a := \displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{e^{(\frac{1}{2}-i\frac{y}{2\beta})s}}{1+e^{s}}\,ds$. Como descreveremos abaixo, o limite $\lim\limits_{a\to\infty}\mathrm{I}_a$ pode ser obtido considerando-se a integral complexa $\displaystyle\oint_{C_a} F(z)\,dz$, onde

$$F(z) \ := \ \frac{e^{(\frac{1}{2}-i\frac{y}{2\beta})z}}{1+e^{z}}$$

e onde C_a é o caminho de integração retangular fechado e orientado no sentido anti-horário indicado na Figura 38.5, página 2110.

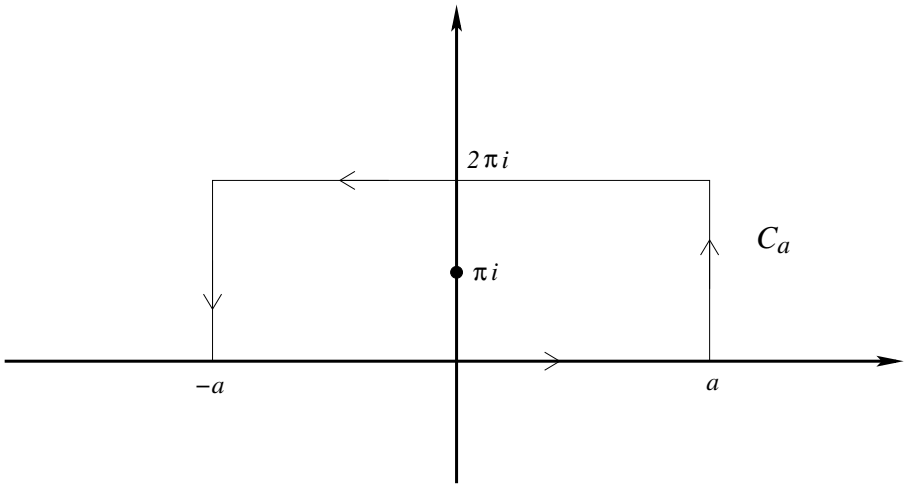

Figura 38.5: O caminho de integração retangular fechado orientado no sentido anti-horário C_a no plano complexo. Aqui, $a > 0$ é arbitrário.

Constate que a integral no segmento horizontal inferior de C_a é precisamente I_a. Mostre que a integral no segmento horizontal superior de C_a é $e^{\pi y/\beta}\mathrm{I}_a$. Mostre que as integrais nos segmentos verticais de C_a convergem a zero no limite $a \to \infty$. Conclua disso que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(\frac{1}{2}-i\frac{y}{2\beta})s}}{1+e^s}\, ds \;=\; \frac{1}{1+e^{\pi y/\beta}}\left[\lim_{a\to\infty}\oint_{C_a} F(z)\, dz\right] .$$

Agora, a integral $\oint_{C_a} F(z)\, dz$ pode ser calculada pelo método dos resíduos. Observemos para tal que $F(z)$ é da forma

$$F(z) \;=\; \frac{p(z)}{q(z)}\,, \qquad \text{com} \qquad p(z) \;=\; e^{(\frac{1}{2}-i\frac{y}{2\beta})z} \qquad \text{e} \qquad q(z) \;=\; 1+e^z\,.$$

As funções p e q são funções inteiras (analíticas em toda parte) e q tem zeros somente nos pontos $z_n = (2n+1)\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$, todos zeros simples (justifique essas afirmações!). Há um único desses zeros no interior do retângulo delimitado pela curva C_a, a saber, o ponto $z_0 = \pi i$. Sob essas circunstâncias o Teorema dos Resíduos informa-nos que $\oint_{C_a} F(z)\, dz$ independe de a e que vale $\oint_{C_a} F(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res} F(z_0)$, onde $\operatorname{Res} F(z_0)$ é o resíduo de F em z_0. Como q tem um zero de ordem um em z_0 vale, por uma fórmula bem conhecida,

$$\operatorname{Res} F(z_0) \;=\; \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

(prove-a ou procure-a, *e.g.*, em [95] ou [18]). Calculando o lado direito e reunindo os resultados, obtenha (38.295). ✠

E. 38.67 *Exercício dirigido.* Este exercício estende o método empregado no Exercício E. 38.66, página 2110. Para $\beta > 0$, constante, seja a função

$$\ell(x) \;=\; \frac{1}{\Big(\cosh\big(\beta\, x\big)\Big)^2}\,,$$

$x \in \mathbb{R}$. Sabemos do Exercício E. 38.1, página 2009, que $\ell \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Mostre que

$$\mathcal{F}[\ell](y) \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{y}{\beta^2 \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\beta}\right)}\,. \tag{38.297}$$

Sugestões. Observe que $\ell(x) = 4\frac{e^{2\beta x}}{\left(1+e^{2\beta x}\right)^2}$. Logo,

$$\mathcal{F}[\ell](y) \;=\; \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\beta x}}{\left(1+e^{2\beta x}\right)^2}e^{-ixy}\, dx \;\overset{s\equiv 2\beta x}{=}\; \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(1-i\frac{y}{2\beta})s}}{\left(1+e^s\right)^2}\, ds \;=\; \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\lim_{a\to\infty}\mathrm{I}_a\right)\,,$$

onde, para $a > 0$, $\mathrm{I}_a := \displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{e^{(1-i\frac{y}{2\beta})s}}{\left(1+e^s\right)^2}\, ds$. Como descreveremos abaixo, o limite $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\mathrm{I}_a$ pode ser obtido considerando-se a integral complexa $\displaystyle\oint_{C_a} F(z)\, dz$, onde

$$F(z) \;:=\; \frac{e^{(1-i\frac{y}{2\beta})z}}{\left(1+e^z\right)^2}$$

e onde C_a é o caminho de integração retangular fechado e orientado no sentido anti-horário indicado na Figura 38.5, página 2110.

Constate que a integral no segmento horizontal inferior de C_a é precisamente I_a. Mostre que a integral no segmento horizontal superior de C_a é $-e^{\pi y/\beta}\mathrm{I}_a$. Mostre que as integrais nos segmentos verticais de C_a convergem a zero no limite $a \to \infty$. Conclua disso que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(1-i\frac{y}{2\beta})s}}{\left(1+e^s\right)^2}\, ds \;=\; \frac{1}{1-e^{\pi y/\beta}}\left[\lim_{a\to\infty}\oint_{C_a} F(z)\, dz\right] .$$

Agora, a integral $\oint_{C_a} F(z)\, dz$ pode ser calculada pelo método dos resíduos. Observemos para tal que $F(z)$ é da forma

$$F(z) \;=\; \frac{p(z)}{q(z)}\,, \qquad \text{com} \qquad p(z) \;=\; e^{(1-i\frac{y}{2\beta})z} \qquad \text{e} \qquad q(z) \;=\; \left(1+e^z\right)^2\,.$$

As funções p e q são funções inteiras (analíticas em toda parte) e q tem zeros somente nos pontos $z_n = (2n+1)\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$, todos zeros duplos (justifique essas afirmações!). Há um único desses zeros no interior do retângulo delimitado pela curva C_a, a saber, o ponto $z_0 = \pi i$. Sob essas circunstâncias o Teorema dos Resíduos informa-nos que $\oint_{C_a} F(z)\, dz$ independe de a e que vale $\oint_{C_a} F(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res} F(z_0)$, onde $\operatorname{Res} F(z_0)$ é o resíduo de F em z_0. Como q tem um zero de ordem dois em z_0 vale, por uma fórmula bem conhecida,

$$\operatorname{Res} F(z_0) \;=\; 2\frac{p'(z_0)}{q''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{p(z_0)q'''(z_0)}{\left(q''(z_0)\right)^2}$$

(prove-a ou procure-a, *e.g.*, em [95] ou [18]). Calculando o lado direito e reunindo os resultados, obtenha (38.297). ✠

E. 38.68 *Exercício dirigido.* Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função de teste, ou seja, uma função infinitamente diferenciável e de suporte compacto. Sua transformada de Fourier é uma função inteira e de tipo exponencial – essencialmente, por ser uma integral absolutamente convergente da função inteira $z \mapsto e^{-izx}$. Para outra argumentação, vide a discussão sobre os Teoremas de Paley-Wiener[48] no Cap. 19 de [427].

Há um caso feliz onde a transformada de Fourier de uma tal f pode ser computada de forma "explícita", quer seja, por meio de expansões em séries. Seja f definida por

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} , & \text{para } x \in (-1,\ 1) , \\ 0 , & \text{de outra forma.} \end{cases}$$

Sua transformada de Fourier é

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}} e^{-ipx}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ip)^n}{n!} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}} x^n\, dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ip)^{2n}}{(2n)!} \int_{0}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}} x^{2n}\, dx \\ &\overset{v=1-x^2}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ip)^{2n}}{(2n)!} \int_{0}^{1} e^{-\frac{1}{v}} (1-v)^{n-1/2}\, dv . \end{aligned}$$

Pela expansão binomial (15.167), página 853, podemos escrever

$$(1-v)^{n-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n-k+1/2)k!}\, v^k .$$

Assim,

$$\mathcal{F}[f](p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ip)^{2n}}{(2n)!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n-k+1/2)k!} \int_0^1 e^{-\frac{1}{v}} v^k\, dv \right) .$$

Com a mudança de variável $t := v^{-1}$, temos

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{v}} v^k\, dv = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{-k-2}\, dt \equiv \Gamma(-k-1,\ 1) ,$$

onde

$$\Gamma(s,\ x) := \int_x^{\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt$$

define a assim chamada *função Gama incompleta superior*. Aqui $x \in (0,\ \infty)$ e $s \in \mathbb{C}$.

Assim, concluímos,

$$\mathcal{F}[f](p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} p^{2n} \frac{(-1)^n \Gamma(n+1/2)}{(2n)!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(n-k+1/2)k!} \Gamma(-k-1,\ 1) \right) . \tag{38.298}$$

A expressão (38.298) representa a expansão em série de Taylor da função inteira $\mathcal{F}[f](p)$.

Verifique os detalhes omitidos nos cômputos acima, justifique as trocas de ordem realizadas entre integrais e séries e discuta a convergência das séries encontradas em (38.298). **Sugestão:** para a convergência da série em k, deduza e use a simples estimativa $\Gamma(-k-1,\ 1) = \int_0^1 e^{-\frac{1}{v}} v^k\, dv \leq 1/(k+1)$. Use também a fórmula de Stirling (Seção 7.6, página 410) para estimar as funções Γ para k grande. ✠

[48] Raymond Edward Alan Christopher Paley (1907-1933). Norbert Wiener (1894–1964).

Apêndices

38.A Prova de (38.21)

Nesta seção demonstramos a desigualdade (38.21), página 2018, enunciada na proposição que segue.

Proposição 38.19 *Para todo q grande o suficiente, a saber $q > n$, vale para todo $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x-y\|)^{2q}(1+\|y\|)^{2q}}\, d^n y \;\leq\; \frac{M}{(1+\|x\|)^q}\;,$$

onde $M > 0$ é uma constante que depende de q e de n. Uma possível escolha é $M = 2^q \int_{\mathbb{R}^n} \big(1+\|y\|\big)^{-q}\, d^n y$. □.

Prova. Observemos em primeiro lugar que adotando $u = \frac{x}{2}$ e $v = \frac{x}{2} - y$ na identidade do paralelogramo, equação (3.31), página 277, obtemos

$$\|x-y\|^2 + \|y\|^2 \;=\; \frac{1}{2}\|x\|^2 + 2\left\|\frac{x}{2} - y\right\|^2 \;. \tag{38.A.1}$$

Observemos em segundo lugar que para todo $a \geq 0$ vale $(1+a)^2 = 1+2a+a^2 \geq 1+a^2$. Assim, $(1+\|x-y\|)^2(1+\|y\|)^2 \geq (1+\|x-y\|^2)(1+\|y\|^2)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
(1+\|x-y\|)^2(1+\|y\|)^2 \quad &\geq \quad \big(1+\|x-y\|^2\big)\big(1+\|y\|^2\big) \\
&= \quad 1+\|x-y\|^2+\|y\|^2+\|x-y\|^2\,\|y\|^2 \\
&\geq \quad 1+\|x-y\|^2+\|y\|^2 \\
&\overset{(38.A.1)}{=} \quad 1+\frac{1}{2}\|x\|^2+2\left\|\frac{x}{2}-y\right\|^2
\end{aligned} \tag{38.A.2}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x-y\|)^{2q}(1+\|y\|)^{2q}}\, d^n y \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{(1+\|x-y\|)^2(1+\|y\|)^2}\right)^q d^n y \\
&\overset{(38.A.2)}{\leq} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\|x\|^2+2\left\|\frac{x}{2}-y\right\|^2}\right)^q d^n y \\
&= \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\|x\|^2+2\,\|y\|^2}\right)^q d^n y\;,
\end{aligned}$$

onde, na última passagem, fizemos a mudança de variáveis $y \to y + \frac{x}{2}$. Agora,

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{2}\|x\|^2+2\,\|y\|^2 \quad &\geq \quad 1+\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{1}{2}\|y\|^2 \\
&= \quad \frac{1}{2}\Big[\,\big(1+\|x\|^2\big)+\big(1+\|y\|^2\big)\,\Big] \\
&\geq \quad \frac{1}{4}\Big[\,(1+\|x\|)^2+(1+\|y\|)^2\,\Big] \\
&\geq \quad \frac{1}{2}\,(1+\|x\|)\,(1+\|y\|)\;.
\end{aligned}$$

Acima, na passagem da segunda para a terceira linha usamos o fato que $(1+c^2) \geq \frac{1}{2}(1+c)^2$ para todo $c \in \mathbb{R}$, consequência de $2(1+c^2)-(1+c)^2 = (c-1)^2 \geq 0$. Na passagem da terceira para a quarta linha usamos o fato que para todos $a,\ b \in \mathbb{R}$ vale $a^2+b^2 \geq 2ab$, consequência elementar da desigualdade $(a-b)^2 \geq 0$.

Retornando finalmente a (38.A.2), temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x-y\|)^{2q}(1+\|y\|)^{2q}}\, d^n y \ \leq\ \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{2}{\big(1+\|x\|\big)\big(1+\|y\|\big)}\right)^q d^n y \ =\ \frac{2^q}{\big(1+\|x\|\big)^q}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\big(1+\|y\|\big)^q}\, d^n y\ .$$

Para q grande o suficiente ($q > n$) a integral é finita, provando o que desejávamos. ■

38.B Prova da Proposição 38.16

Esta seção é dedicada à prova da Proposição 38.16, página 2067. Essa demonstração requer alguns lemas preparatórios, com os quais iniciaremos a discussão. Algumas das afirmações que seguem podem ser um tanto óbvias para alguns, mas isso é um tanto ilusório. Por essa razão apresentamos demonstrações detalhadas. O leitor perceberá que algumas das demonstrações adiante seguem passos familiares à teoria das funções "almost"-periódicas (vide, *e.g.*, [275]).

• **Alguns fatos preparatórios**

Lema 38.2 *Sejam $a,\ b \in \mathbb{R}$. Então, vale*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T^{2T} e^{i\left(at+b\ln t\right)}\, dt \ =\ \begin{cases} 1\ , & \text{se } a=b=0\ , \\ 0\ , & \text{se } a\neq 0\ . \end{cases} \tag{38.B.3}$$

Para $a=0$ vale

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T} e^{ib\ln t}\, dt \ =\ \left(\frac{2e^{ib\ln 2}-1}{1+ib}\right) e^{ib\ln T}\ , \tag{38.B.4}$$

e o limite $T\to\infty$ só existe para $b=0$ (e vale 1). Para todo $b\in\mathbb{R}$ vale, porém, $\limsup\limits_{T\to\infty}\left|\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T^{2T} e^{ib\ln t}\, dt\right| > 0$. □

Prova. A afirmativa é evidente para o caso $a=b=0$. Seja, agora $a\neq 0$. Definamos $F(T) := \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T^{2T} e^{i\left(at+b\ln t\right)}\, dt$. Para $t>0$ defina-se a função $f(t) := at + b\ln t$. Como $f'(t) = a+\frac{b}{t}$, f é inversível para todo t grande o suficiente. Adotemos então T grande o suficiente para garantir que $f^{-1}(t)$ exista para todo $t\geq T$. Fazendo a mudança de variável $s=f(t)$ podemos escrever

$$\begin{aligned} F(T) \ =\ \frac{1}{T}\int_{f(T)}^{f(2T)} e^{is}\frac{1}{f'(f^{-1}(s))}\, ds \ &=\ \frac{1}{T}\int_{f(T)}^{f(2T)} e^{is}\frac{1}{a+\frac{b}{f^{-1}(s)}}\, ds \\ &=\ \frac{1}{aT}\int_{f(T)}^{f(2T)} e^{is}\, ds - \frac{b}{aT}\int_{f(T)}^{f(2T)} e^{is}\frac{1}{af^{-1}(s)+b}\, ds\ . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left|F(T)-\frac{1}{aT}\int_{f(T)}^{f(2T)} e^{is}\,ds\right| &\leq \frac{|b|}{|a|T}\int_{f(T)}^{f(2T)}\left|\frac{1}{af^{-1}(s)+b}\right|ds\\ &\leq \frac{|b|}{|a|}\left(\sup_{s\in[T,\,\infty)}\left|\frac{1}{af^{-1}(s)+b}\right|\right)\frac{|f(2T)-f(T)|}{T}\\ &\leq \frac{|b|}{|a|}\left(\sup_{s\in[T,\,\infty)}\left|\frac{1}{af^{-1}(s)+b}\right|\right)\frac{|a|T+|b|\ln 2}{T}\,.\end{aligned}$$

Como $\lim_{t\to\infty}|f(t)|=\infty$ tem-se também $\lim_{s\to\infty}|f^{-1}(s)|=\infty$. Assim, $\lim_{T\to\infty}\left(\sup_{s\in[T,\,\infty)}\left|\frac{1}{af^{-1}(s)+b}\right|\right)=0$. Provou-se assim que

$$\lim_{T\to\infty}F(T) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{aT}\int_{f(T)}^{f(2T)} e^{is}\,ds = \lim_{T\to\infty}\frac{e^{if(2T)}-e^{if(T)}}{iaT} = 0\,.$$

Para $a=0$ um cálculo simples mostra que

$$F(T) = \frac{1}{T}\int_T^{2T} e^{ib\ln t}\,dt = \left(\frac{2e^{ib\ln 2}-1}{1+ib}\right)e^{ib\ln T}$$

e o limite para $T\to\infty$ não existe, exceto no caso $b=0$. Vê-se também dessa expressão que nesse caso $\limsup_{t\to\infty}|F(t)|>0$.

■

O leitor pode perceber que a demonstração acima pode ser estendida, por exemplo, substituindo $f(t)=at+b\ln t$ por funções f que sejam da forma $f(t)=at+g(t)$ com $g'(t)\to 0$ para $t\to\infty$. Um exemplo são funções do tipo $f(t)=at+b\ln t+c\ln(\ln t)$, definidas para $t>1$. Essas extensões forneceriam maior generalidade aos resultados que se seguirão, mas não trataremos delas aqui.

Lema 38.3 *Seja $\{\omega_k\in\mathbb{R},\ k=1,\ldots,n\}$ um conjunto de $n\geq 1$ números reais distintos e sejam $d_1,\ \ldots,\ d_n\in\mathbb{C}$, constantes. Considere-se a função $H(s)=\sum_{k=1}^{n}d_k\,e^{i\omega_k s}$. Então, uma condição necessária e suficiente para que $\lim_{s\to\infty}H(s)$ exista e seja nulo é que $d_1=\cdots=d_n=0$.* □

Prova. Se $d_1=\cdots=d_n=0$, é evidente que $\lim_{s\to\infty}H(s)=0$, pois H é a função nula. Vamos então supor que $\lim_{s\to\infty}H(s)=0$. Escolhamos um $l\in\{1,\ \ldots,\ n\}$. Temos que

$$\frac{1}{S}\int_S^{2S}H(s)e^{-i\omega_l s}\,ds = \sum_{k=1}^{n}d_k\frac{1}{S}\int_S^{2S}e^{i(\omega_k-\omega_l)s} = d_l+\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}d_k\frac{e^{i(\omega_k-\omega_l)2S}-e^{i(\omega_k-\omega_l)S}}{i(\omega_k-\omega_l)S}\,.$$

Logo,

$$\lim_{S\to\infty}\frac{1}{S}\int_S^{2S}H(s)e^{-i\omega_l s}\,ds = d_l\,.$$

Agora, se $\lim_{s\to\infty}H(s)=0$, o limite do lado esquerdo é nulo e, portanto, $d_l=0$. Como l foi escolhido arbitrariamente, segue que $d_1=\cdots=d_n=0$. ■

Lema 38.4 *Seja $\{(a_k,\ b_k)\in\mathbb{R}^2,\ k=1,\ldots,n\}$ um conjunto de n elementos distintos de $\mathbb{R}^2$, com $n\geq 1$, e sejam $c_1,\ \ldots,\ c_n\in\mathbb{C}$, constantes. Considere-se a função*

$$G(t) = \sum_{k=1}^{n}c_k\,e^{i\left(a_k t+b_k\ln t\right)}$$

definida para $t > 0$. Então, $\limsup_{t\to\infty} |G(t)| = 0$ se e somente se $c_1 = \cdots = c_n = 0$. □

Prova. É evidente que se $c_1 = \cdots = c_n = 0$ então $\limsup_{t\to\infty} |G(t)| = 0$, pois nesse caso G é a função nula. Vamos então supor que $\limsup_{t\to\infty} |G(t)| = 0$.

Escolhamos um índice $l \in \{1, \ldots, n\}$. Defina-se L como o conjunto de todos os índices k tais que $a_k = a_l$ e seja L^c o seu conjunto complementar, que é um subconjunto próprio de $\{1, \ldots, n\}$. Podemos escrever

$$G(t) \;=\; \sum_{k\in L^c} c_k\, e^{i\left(a_k t + b_k \ln t\right)} + \sum_{k\in L^c} c_k\, e^{i\left(a_k t + b_k \ln t\right)} \;.$$

Multiplicando ambos os lados por $T^{-1}e^{-i\left(a_l t + b_l \ln t\right)}$ e integrando entre T e $2T$, obtemos

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T} G(t)e^{-i\left(a_l t + b_l \ln t\right)}\, dt \;=\; \sum_{k\in L^c} c_k \frac{1}{T}\int_T^{2T} e^{i\left((a_k-a_l)t + (b_k-b_l)\ln t\right)}\, dt + \sum_{k\in L} c_k \frac{1}{T}\int_T^{2T} e^{i\left((b_k-b_l)\ln t\right)}\, dt \;.$$

Note-se que

$$\sum_{k\in L} c_k \frac{1}{T}\int_T^{2T} e^{i\left((b_k-b_l)\ln t\right)}\, dt \;=\; c_l + \sum_{\substack{k\in L\\ k\neq l}} c_k \frac{1}{T}\int_T^{2T} e^{i\left((b_k-b_l)\ln t\right)}\, dt \;\overset{(38.B.4)}{=}\; c_l + \sum_{\substack{k\in L\\ k\neq l}} c_k \left(\frac{2e^{i(b_k-b_l)\ln 2} - 1}{1 + i(b_k - b_l)}\right) e^{i(b_k-b_l)\ln T} \;.$$

Pelo Lema 38.2, sabemos que para $k \in L^c$ o limite $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T^{2T} e^{i\left((a_k-a_l)t + (b_k-b_l)\ln t\right)}\, dt$ é nulo. Pela hipótese que $\limsup_{t\to\infty} |G(t)| = 0$ temos também que $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T^{2T} G(t)e^{-i\left(a_l t + b_l \ln t\right)}\, dt = 0$. Assim, concluímos que

$$\lim_{T\to\infty} \left[c_l + \sum_{\substack{k\in L\\ k\neq l}} c_k \left(\frac{2e^{i(b_k-b_l)\ln 2} - 1}{1 + i(b_k - b_l)}\right) e^{i(b_k-b_l)\ln T} \right] \;=\; 0 \;. \tag{38.B.5}$$

Pelo Lema 38.3 (tome $s = \ln T$) o limite acima só pode anular-se se todos os coeficientes forem nulos, ou seja, se $c_k = 0$ para todo $k \in L$. Com isso, estabelecemos que a soma que define G pode ser reduzida ao conjunto L^c (que é um subconjunto próprio de $\{1, \ldots, n\}$):

$$G(t) \;=\; \sum_{k\in L^c} c_k e^{i\left(a_k t + b_k \ln t\right)} \;.$$

Repetindo o argumento acima um número finito de vezes provaremos que todos os coeficientes c_k, $k = 1, \ldots, n$, são nulos. ■

Lema 38.5 *Seja $\{(a_k,\ b_k) \in \mathbb{R}^2,\ k = 1, \ldots, n\}$ um conjunto de n elementos distintos de $\mathbb{R}^2$, com $n \geq 1$. Então, as n funções $e^{i\left(a_k y + b_k \ln y\right)}$ definidas para $y > 0$ são linearmente independentes, ou seja, se existirem constantes $c_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, n$, tais que $\sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\left(a_k y + b_k \ln y\right)} = 0$ para todo $y > 0$, então $c_k = 0$ para todo $k = 1, \ldots, n$.* □

Prova. A afirmação é evidente pelo Lema 38.4. ■

Lema 38.6 *Seja $\{(a_k,\ b_k) \in \mathbb{R}^2,\ k = 1, \ldots, n\}$ um conjunto de n elementos distintos de $\mathbb{R}^2$, com $n \geq 1$, e sejam $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, constantes. Considere-se a função $G(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{i\left(a_k t + b_k \ln t\right)}$ definida para $t > 0$.*

Sejam A e C duas funções definidas em $(0,\ \infty)$ tais que: **1.** $A(t)G(t) = C(t)$ *para todo* $t \in (0,\ \infty)$, **2.** $\lim\limits_{t\to\infty} |A(t)| = \infty$ *e* **3.** *C é limitada, ou seja,* $\sup\limits_{t\in(0,\ \infty)} |C(t)| < \infty$. *Então, G e C são identicamente nulas.* □

Prova. Seja $\limsup\limits_{t\to\infty} |G(t)| = M \geq 0$. Então, existe uma sequência ilimitada t_n tal que $\lim\limits_{n\to\infty} |G(t_n)| = M$. Por outro lado, para todo n grande o suficiente (de forma que se garanta $A(t_n) \neq 0$), tem-se $G(t_n) = C(t_n)/A(t_n)$. Como C é limitado, vale para todo n que $|C(t_n)| \leq K$ para algum $K \geq 0$. Assim, $|G(t_n)| \leq K/|A(t_n)|$. Tomando o limite $n \to \infty$ de ambos os lados, obtemos $M = 0$, pois $\lim\limits_{n\to\infty} 1/|A(t_n)| = 0$, por hipótese. Isso implica que $\limsup\limits_{t\to\infty} |G(t)| = 0$ e, pelo Lema 38.4 isso implica que G é identicamente nula. Como $A(t)G(t) = C(t)$, é válida para todo t, isso implica que C é também identicamente nula. ■

Com esses resultados à mão, passemos à demonstração da Proposição 38.16.

• **Prova da Proposição 38.16**

Com $x = e^{-y}$, a expressão (38.198) escreve-se

$$\lim_{y\to\infty} \left[c'_1 y^{b_1} e^{a_1 y} + \cdots + c'_n y^{b_n} e^{a_n y} \right] \ = \ \alpha \ ,$$

onde $c'_k \equiv c_k e^{i\pi b_k}$, ou seja,

$$\lim_{y\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c'_k e^{i\left(\mathrm{Im}\,(a_k)y + \mathrm{Im}\,(b_k)\ln y\right)} e^{\mathrm{Re}\,(a_k)y + \mathrm{Re}\,(b_k)\ln y} \ = \ \alpha \ . \tag{38.B.6}$$

Seja a relação de ordem em $\mathbb{R}^2_+$ (vide enunciado da Proposição 38.16) definida da seguinte forma: dizemos que $(a,\ b) \succ (a',\ b')$ se $a > a'$ ou se $a = a'$ mas $b > b'$. Isso faz de $\mathbb{R}^2_+$ um conjunto totalmente ordenado. Vamos supor que $\big(\mathrm{Re}\,(a_{k_0}),\ \mathrm{Re}\,(b_{k_0})\big)$ seja o máximo (não necessariamente único) do conjunto

$$\Big\{ \big(\mathrm{Re}\,(a_1),\ \mathrm{Re}\,(b_1)\big),\ \ldots,\ \big(\mathrm{Re}\,(a_n),\ \mathrm{Re}\,(b_n)\big) \Big\} \subset \mathbb{R}^2_+$$

segundo a relação de ordem acima. Fatorando $e^{\mathrm{Re}\,(a_{k_0})y + \mathrm{Re}\,(b_{k_0})\ln y}$ de (38.B.6) e notando que

$$\lim_{y\to\infty} e^{\mathrm{Re}\,(a_l)y + \mathrm{Re}\,(b_l)\ln y} e^{-\mathrm{Re}\,(a_{k_0})y - \mathrm{Re}\,(b_{k_0})\ln y} \ = \ 0$$

caso $\big(\mathrm{Re}\,(a_l),\ \mathrm{Re}\,(b_l)\big) \prec \big(\mathrm{Re}\,(a_{k_0}),\ \mathrm{Re}\,(b_{k_0})\big)$ obtemos de (38.B.6) que

$$\lim_{y\to\infty} e^{\mathrm{Re}\,(a_{k_0})y + \mathrm{Re}\,(b_{k_0})\ln y} \sum_{m\in M} c'_m e^{i\left(\mathrm{Im}\,(a_m)y + \mathrm{Im}\,(b_m)\ln y\right)} \ = \ \alpha \ , \tag{38.B.7}$$

onde $M \subset \{1,\ \ldots,\ n\}$ é conjunto de todos os índices m tais que $\big(\mathrm{Re}\,(a_m),\ \mathrm{Re}\,(b_m)\big) = \big(\mathrm{Re}\,(a_{k_0}),\ \mathrm{Re}\,(b_{k_0})\big)$ (como $k_0 \in M$, M é não vazio). Agora, dos fatos que

1. $\lim\limits_{y\to\infty} e^{\mathrm{Re}\,(a_{k_0})y + \mathrm{Re}\,(b_{k_0})\ln y} = \infty$,

2. A função $\sum\limits_{m\in M} c'_m e^{i\left(\mathrm{Im}\,(a_m)y + \mathrm{Im}\,(b_m)\ln y\right)}$ é limitada no conjunto $y > 0$, pois $\left| e^{i(\mathrm{Im}\,(a_m)y + \mathrm{Im}\,(b_m)\ln y} \right| = 1$ para todo $y > 0$.

segue pelo Lema 38.6 que $\sum\limits_{m\in M} c'_m e^{i\left(\mathrm{Im}\,(a_m)y + \mathrm{Im}\,(b_m)\ln y\right)} = 0$ para todo $y > 0$ e que $\alpha = 0$.

Pela definição de M tem-se $\big(\mathrm{Re}\,(a_m),\ \mathrm{Re}\,(b_m)\big) = \big(\mathrm{Re}\,(a_{m'}),\ \mathrm{Re}\,(b_{m'})\big)$ se $m,\ m' \in M$. Assim, como por hipótese, os pares $(a_k,\ b_k)$ são todos distintos, segue que $\big(\mathrm{Im}\,(a_m),\ \mathrm{Im}\,(b_m)\big) \neq \big(\mathrm{Im}\,(a_{m'}),\ \mathrm{Im}\,(b_{m'})\big)$ se $m \neq m'$, ambos em M.

Portanto, pelo Lema 38.5, as funções $e^{i\left(\mathrm{Im}\,(a_m)y+\mathrm{Im}\,(b_m)\ln y\right)}$, $m \in M$, são linearmente independentes e concluímos que $c'_m = 0$ para todo $m \in M$, o que evidentemente implica $c_m = 0$ para todo $m \in M$.

A soma em (38.B.6) pode assim ser reduzida ao conjunto complementar de M (que denotamos por M^c) e que é um subconjunto próprio de $\{1, \ldots, n\}$. Logo, obtemos, agora com $\alpha = 0$,

$$\lim_{y\to\infty} \sum_{k\in M^c} c'_k e^{i(\mathrm{Im}\,(a_k)y+\mathrm{Im}\,(b_k)\ln y)}\, e^{\mathrm{Re}\,(a_k)y+\mathrm{Re}\,(b_k)\ln y} \;=\; 0\,.$$

Repetindo a argumentação acima um número finito de vezes, concluímos que os coeficientes c_k são nulos para todo $k = 1, \ldots, n$, como queríamos provar. ■

38.C Prova da Regra de Leibniz (38.6)

Aqui apresentamos uma demonstração da Regra de Leibniz na forma generalizada (38.6), página 2011. Essa demonstração é devida a Victor Hugo Marques Ramos, a quem agradecemos.

Para provarmos a relação (38.6), página 2011, começaremos estabelecendo a regra de Leibniz para uma variável e múltiplas derivadas, isto é, para todo $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\frac{\partial^m}{\partial x_1^m}(fg) \;=\; \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^j f}{\partial x_1^j} \frac{\partial^{m-j} g}{\partial x_1^{m-j}}\,. \tag{38.C.8}$$

Seguimos com a prova por indução. Para $m = 0$ temos o produto de funções e para $m = 1$ obtemos a regra de Leibniz,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(fg) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot g + f\cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}\,. \tag{38.C.9}$$

Suponhamos que para algum $k \geq 1$,

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^k}(fg) \;=\; \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^j f}{\partial x_1^j} \frac{\partial^{k-j} g}{\partial x_1^{k-j}}\,. \tag{38.C.10}$$

Aplicando a derivada em x_1 mais uma vez e usando a regra de Leibniz para uma variável,

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_1^{k+1}}(fg) \;=\; \frac{\partial}{\partial x_1}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^j f}{\partial x_1^j} \frac{\partial^{k-j} g}{\partial x_1^{k-j}} \;=\; \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^{j+1} f}{\partial x_1^{j+1}} \frac{\partial^{k-j} g}{\partial x_1^{k-j}} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^j f}{\partial x_1^j} \frac{\partial^{k-j+1} g}{\partial x_1^{k-j+1}}\,.$$

No que segue agruparemos os termos da soma do lado direito. Fazendo a mudança de variáveis $j' = j + 1$ no primeiro termo do lado direito, acima, obtemos

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_1^{k+1}}(fg) \;=\; \sum_{j'=1}^{k+1} \binom{k}{j'-1} \frac{\partial^{j'} f}{\partial x_1^{j'}} \frac{\partial^{k-j'+1} g}{\partial x_1^{k-j'+1}} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^j f}{\partial x_1^j} \frac{\partial^{k-j+1} g}{\partial x_1^{k-j+1}}\,.$$

Note que com isso acertamos o termo de derivada em f, mas não conseguimos agrupar as somas. Para corrigir isso, renomeamos j' para j e separamos da primeira soma o último termo, e da segunda soma o primeiro termo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_1^{k+1}}(fg) \;=\; & \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j-1} \frac{\partial^j f}{\partial x_1^j} \frac{\partial^{k-j+1} g}{\partial x_1^{k-j+1}} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^j f}{\partial x_1^j} \frac{\partial^{k-j+1} g}{\partial x_1^{k-j+1}} \\
& + \binom{k}{k} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_1^{k+1}} \frac{\partial^{k-(k+1)+1} g}{\partial x_1^{k-(k+1)+1}} + \binom{k}{0} f\cdot \frac{\partial^{k+1} g}{\partial x_1^{k+1}} \\
= & \sum_{j=1}^{k} \left[\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j}\right] \frac{\partial^j f}{\partial x_1^j} \frac{\partial^{k-j+1} g}{\partial x_1^{k-j+1}} + \binom{k}{k} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_1^{k+1}}\cdot g + \binom{k}{0} f\cdot \frac{\partial^{k+1} g}{\partial x_1^{k+1}}\,.
\end{aligned} \tag{38.C.11}$$

Usando a identidade de Pascal (6.2), página 356, na forma $\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j} = \binom{k+1}{j}$, e além disso, usando que

$$\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1, \qquad \binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} = 1 ,$$

obtemos, substituindo em (38.C.11), que

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_1^{k+1}}(fg) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} \frac{\partial^j f}{\partial x_1^j} \frac{\partial^{k-j+1} g}{\partial x_1^{k-j+1}} + \binom{k+1}{k+1} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_1^{k+1}} \cdot g + \binom{k+1}{0} f \cdot \frac{\partial^{k+1} g}{\partial x_1^{k+1}} . \tag{38.C.12}$$

Assim, podemos agrupar todos os termos acima em um único somatório,

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_1^{k+1}}(fg) = \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} \frac{\partial^j f}{\partial x_1^j} \frac{\partial^{k+1-j} g}{\partial x_1^{k+1-j}} . \tag{38.C.13}$$

Com isso, provamos a regra de Leibniz para derivadas múltiplas de uma variável.

Seguimos com a prova da regra de Leibniz fazendo uso dos multi-índices. Observe que pela definição

$$D^\gamma(fg) = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{\gamma_1} \partial x_2^{\gamma_2} \dots \partial x_n^{\gamma_n}}(fg) . \tag{38.C.14}$$

Pelo Teorema de Schwarz sobre a simetria de derivadas segundas, podemos escrever

$$D^\gamma(fg) = \frac{\partial^{|\gamma|-\gamma_1}}{\partial x_2^{\gamma_2} \partial x_3^{\gamma_3} \dots \partial x_n^{\gamma_n}} \frac{\partial^{\gamma_1}}{\partial x_1^{\gamma_1}}(fg) . \tag{38.C.15}$$

Faremos a prova usando novamente indução. Note que a base de indução corresponde ao caso de uma derivada em apenas uma variável, que foi mostrado logo acima. Sendo assim, prosseguimos para o passo de indução. Considere-se para tal multi-índices $\gamma_{(k)}$ de n componentes cujas primeiras k componentes (com $1 \leq k \leq n$) correspondem às do multi-índice γ, as demais sendo nulas. Isto é, se $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$, definimos

$$\begin{aligned} \gamma_{(1)} &= (\gamma_1,\ 0,\ \dots,\ 0) \in \mathbb{N}^n , \\ &\vdots \\ \gamma_{(k)} &= (\gamma_1,\ \gamma_2,\ \dots,\ \gamma_k,\ 0,\ \dots,\ 0) \in \mathbb{N}^n , \end{aligned}$$

com $\gamma_{(n)} = \gamma$. Note-se que $|\gamma_{(k)}| = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ para cada $k = 1, \dots, n$. Suponhamos, então, que

$$\frac{\partial^{|\gamma_{(k)}|}}{\partial x_1^{\gamma_1} \partial x_2^{\gamma_2} \dots \partial x_k^{\gamma_k}}(fg) = \sum_{\alpha_1=0}^{\gamma_1} \cdots \sum_{\alpha_k=0}^{\gamma_k} \binom{\gamma_1}{\alpha_1} \cdots \binom{\gamma_k}{\alpha_k} \frac{\partial^{|\alpha_{(k)}|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_k^{\alpha_k}} \frac{\partial^{|\gamma_{(k)}|-|\alpha_{(k)}|} g}{\partial x_1^{\gamma_1-\alpha_1} \dots \partial x_k^{\gamma_k-\alpha_k}} .$$

Aplicando γ_{k+1} derivadas da variável x_{k+1} e usando a regra de Leibniz para múltiplas derivadas de uma variável, obtemos

$$\frac{\partial^{|\gamma_{(k+1)}|}}{\partial x_1^{\gamma_1} \partial x_2^{\gamma_2} \dots \partial x_{k+1}^{\gamma_{k+1}}}(fg) = \sum_{\alpha_1=0}^{\gamma_1} \cdots \sum_{\alpha_{k+1}=0}^{\gamma_{k+1}} \binom{\gamma_1}{\alpha_1} \cdots \binom{\gamma_{k+1}}{\alpha_{k+1}} \frac{\partial^{|\alpha_{(k+1)}|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_{k+1}^{\alpha_{k+1}}} \frac{\partial^{|\gamma_{(k+1)}|-|\alpha_{(k+1)}|} g}{\partial x_1^{\gamma_1-\alpha_1} \dots \partial x_k^{\gamma_{k+1}-\alpha_{k+1}}} .$$

Com isso, concluímos o passo de indução e estabelecemos a regra de Leibniz desejada. ■

Parte IX

Análise Funcional II. Espaços de Hilbert e Teoria de Operadores