

Capítulo 45

Notas Sobre Mecânica Clássica. II. Problemas e Aplicações

Conteúdo

45.1	As Curvas Tautócrona, Cicloide e Braquistócrona	2512
45.2	Movimento em Potenciais Centrais e o Problema de Kepler	2518
45.2.1	O Problema de Um Corpo sob Forças Centrais	2519
45.2.2	O Problema de Dois Corpos sob Forças Centrais	2521
45.2.3	O Problema de Kepler. Determinação das Órbitas	2522
45.2.4	O Problema de Kepler. Determinação das Trajetórias. A Equação de Kepler	2525
45.3	Modos Normais de Oscilação	2530
45.3.1	Modos Normais e a Energia Mecânica	2538
45.4	Ângulos de Euler na Mecânica de Corpos Rígidos	2540
45.4.1	Usos dos Ângulos de Euler. O Pião de Lagrange	2541
45.5	Exercícios Adicionais	2549
	APÊNDICES	2551
45.A	Seções Cônicas	2551
45.A.1	Elipses e Círculos	2551
45.A.2	Hipérbolas	2552
45.A.3	Parábolas	2554
45.B	Parametrização Polar de Seções Cônicas	2554



ESTE capítulo dá continuidade ao Capítulo 44, página 2401, e dedica-se à resolução de problemas da Mecânica Clássica com importante conteúdo físico. Suas várias Seções são independentes entre si e podem ser lidas separadamente. Os problemas tratados lidam com o movimento sob forças centrais, como o Problema de Kepler, de grande importância na Mecânica Celeste e na Física Atômica, com o movimento do pião de Lagrange, com os chamados modos normais de oscilação etc. Os métodos foram desenvolvidos no Capítulo 44 e servem de ilustração à teoria lá desenvolvida. Iniciamos com os problemas históricos da determinação das curvas tautócrona e braquistócrona, cujas soluções envolvem métodos variacionais.

Recomendamos as mesmas referências listadas no início do Capítulo 44. Para um compêndio de problemas, vide [240].

45.1 As Curvas Tautócrona, Cicloide e Braquistócrona

A solução do problema que aqui trataremos envolve a propriedade de covariância das equações de Euler-Lagrange por mudanças de coordenadas do Lagrangiano.

Considere-se um ponto material de massa m movendo-se sob a ação de uma força gravitacional constante (como nas proximidades da superfície da Terra), em um plano vertical x - z , com z denotando o eixo vertical e x o eixo horizontal. Vamos supor que o ponto material mova-se ao longo de uma curva $(x(\tau), z(\tau))$ no plano, parametrizada por τ , com τ em algum intervalo adequado de \mathbb{R} . Como o ponto material se move ao longo de uma curva, trata-se de um sistema unidimensional e seu Lagrangiano é

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \|\vec{v}\|^2 - mgz.$$

Escrevendo-o em termos do parâmetro τ , ficamos com

$$\mathcal{L}(\tau, \dot{\tau}) = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{d\tau}(\tau) \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}(\tau) \right)^2 \right] \dot{\tau}^2 - mgz(\tau).$$

Com isso, a trajetória do sistema é descrita pela função $\tau(t)$ (com t sendo o tempo). Desejamos determinar qual a curva $\tau \mapsto (x(\tau), z(\tau))$ com a propriedade de admitir trajetórias periódicas cujo período não dependa das condições iniciais.

Para resolver isso, tenhamos em mente que o oscilador harmônico simples, com Lagrangiano $\frac{m}{2}(\dot{x})^2 - \frac{k}{2}x^2$ tem precisamente essa propriedade: tem trajetórias periódicas cujo período não depende das condições iniciais, mas apenas dos parâmetros m e k , a saber, $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Inspirados nisso, teremos sucesso se pudermos escolher o parâmetro τ e a curva $\tau \mapsto (x(\tau), z(\tau))$ de sorte que $\mathcal{L}(\tau, \dot{\tau})$ seja como o Lagrangiano do oscilador harmônico simples no parâmetro τ , ou seja, da forma $\mathcal{L}(\tau, \dot{\tau}) = \frac{m}{2}(\dot{\tau})^2 - \frac{mg}{2\ell}\tau^2$. Aqui, $\ell > 0$ é uma constante, em princípio arbitrária, escolhida com a dimensão de comprimento. A constante ℓ pode ser fixada de acordo com o período de movimento desejado. Vide adiante.

Para tal, precisamos ter

$$\left(\frac{dx}{d\tau}(\tau)\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}(\tau)\right)^2 = 1 \quad \text{e} \tag{45.1}$$

$$z(\tau) = \frac{1}{2\ell}\tau^2. \tag{45.2}$$

De (45.2) temos $\frac{dz}{d\tau} = \frac{\tau}{\ell}$ e inserindo em (45.1), temos

$$\frac{dx}{d\tau}(\tau) = \sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{\ell}\right)^2}.$$

Essa expressão nos mostra, *en passant*, que τ deve ser limitada ao intervalo $[-\ell, \ell]$.

A solução dessa equação é $x(\tau) = \int \sqrt{1 - (\tau/\ell)^2} d\tau + c$, onde c é uma constante de integração. Essa integral pode ser calculada explicitamente (faça-o!), resultando em

$$x(\tau) = \frac{\ell}{2} \left(\frac{\tau}{\ell} \sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{\ell}\right)^2} + \arcsen\left(\frac{\tau}{\ell}\right) \right) + c.$$

Escolhendo $x(0) = 0$ (para que a curva tenha um mínimo em $(0, 0)$) resulta em $c = 0$ e assim, finalmente, a curva procurada é

$$(x(\tau), z(\tau)) = \frac{\ell}{2} \left(\frac{\tau}{\ell} \sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{\ell}\right)^2} + \arcsen\left(\frac{\tau}{\ell}\right), \left(\frac{\tau}{\ell}\right)^2 \right), \quad \tau \in [-\ell, \ell]. \tag{45.3}$$

O correspondente Lagrangiano é

$$\mathcal{L}(\tau, \dot{\tau}) = \frac{m}{2}(\dot{\tau})^2 - \frac{mg}{2\ell}\tau^2.$$

A correspondente equação de Euler Lagrange tem por solução $\tau(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, com A e B sendo constantes dependentes das condições iniciais e $\omega = \sqrt{g/\ell}$, resultando que o período de oscilação é $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, quaisquer que sejam as condições iniciais. Observe que T independe da massa m , em contraste com o que ocorre no oscilador harmônico simples.

Na curva (45.3) a variável horizontal x estende-se no intervalo $[-\ell\pi/4, \ell\pi/4]$ e a variável vertical z passeia no intervalo $[0, \ell/2]$. É claro de (45.1) que o parâmetro τ , que descreve a curva, deve ser identificado com seu comprimento (começando pelo ponto de mínimo em $(0, 0)$ e assumindo valores positivos (negativos) para $x > 0$ ($x < 0$)). Fica claro com isso que o comprimento total da curva é 2ℓ .

A curva (45.3) é denominada *curva tautócrona*¹, ou *curva tautocrônica*, ou ainda *curva isócrona*, e é uma curva *cicloide*. Vide Figura 45.1, página 2514.

E. 45.1 Exercício. Os pontos da curva tautócrona $(x(\tau), z(\tau))$ têm um limite finito quando τ aproxima-se dos extremos $\pm\ell$. Mostre, porém, que a derivada $\frac{dz}{dx}$ diverge quando τ aproxima-se de $\pm\ell$. ✱

• Relação com a curva cicloide

¹Do grego “tauto” (mesmo, idêntico) + “khronos” (tempo).

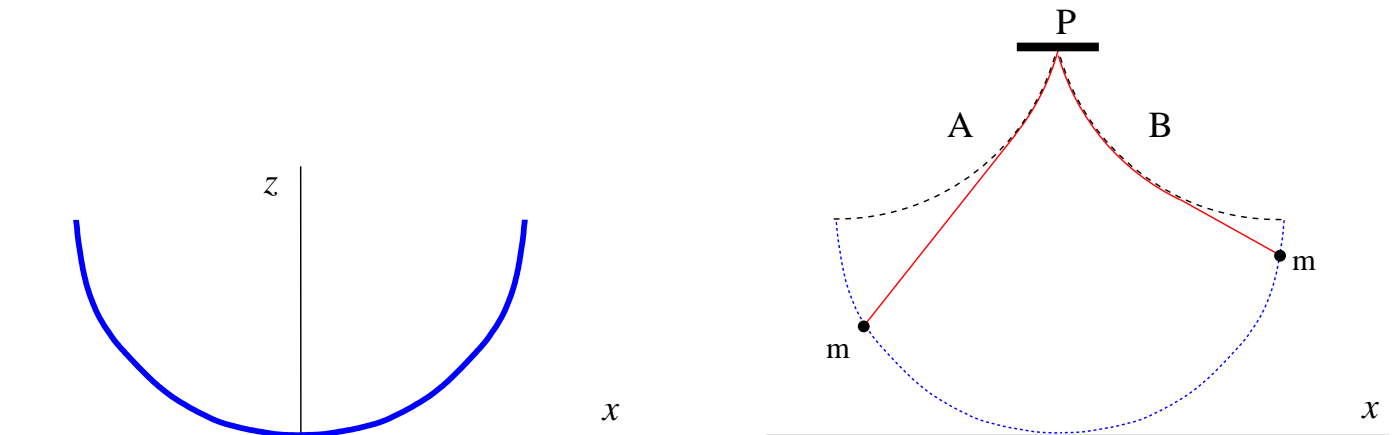


Figura 45.1: **Esquerda:** esquema aproximado de uma curva tautócrona (em azul). **Direita:** esquema do pêndulo isócrono de Huygens. A haste flexível é indicada em vermelho em duas posições. Ela é pendurada no ponto P e é limitada pelas curvas A e B (que, por coincidência, também são cicloides), de sorte que seu ponto final, onde localiza-se a massa m , mova-se sobre a curva tautócrona (pontilhada em azul).

A máxima altura (máximo valor de $z(\tau)$) da curva (45.3) é $\ell/2$, obtida para $\tau = \pm\ell$. Consideremos a curva $(x(\tau), \ell/2 - z(\tau))$, que é a curva original (45.3) refletida em torno do eixo horizontal e transladada verticalmente de $\ell/2$, com sua altura máxima agora em $\tau = 0$. Consideremos também uma translação horizontal de $x(\ell) = \pi\ell/4$ para a direita. Obtemos assim a curva

$$(x_1(\tau), z_1(\tau)) = \frac{\ell}{2} \left(\frac{\tau}{\ell} \sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{\ell}\right)^2} + \arcsen\left(\frac{\tau}{\ell}\right) - \frac{\pi}{2}, 1 - \left(\frac{\tau}{\ell}\right)^2 \right), \quad \tau \in [-\ell, \ell]. \quad (45.4)$$

Vide Figura 45.2, página 2515.

Façamos em (45.4) a mudança de parametrização $\tau/\ell = \text{sen}(\theta/2)$, para $\theta \in [-\pi, \pi]$. Ficamos com

$$\begin{aligned} (x_1(\theta), z_1(\theta)) &= \frac{\ell}{2} \left(\text{sen}(\theta/2) \cos(\theta/2) + \frac{\theta - \pi}{2}, \cos^2(\theta/2) \right) \\ &= \frac{\ell}{4} \left(\text{sen}(\theta) + (\theta - \pi), \cos(\theta) + 1 \right), \quad \theta \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

Com a troca $\theta \rightarrow \theta + \pi$, ficamos finalmente com a parametrização

$$(x_1(\theta), z_1(\theta)) = \frac{\ell}{4} \left(\theta - \text{sen}(\theta), 1 - \cos(\theta) \right), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (45.5)$$

Observe-se que, com essa parametrização, vale $z_1(\theta) = \frac{dx_1}{d\theta}(\theta)$. Mais importante, observe-se que, definindo-se $R := \ell/4$, a relação (45.5) fica

$$\begin{pmatrix} x_1(\theta) \\ z_1(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\theta \\ R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}. \quad (45.6)$$

A interpretação disso é que o vetor $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é transladado de $\begin{pmatrix} R\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ e simultaneamente rodado em torno do ponto $\begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}$ de um ângulo θ no sentido horário.

E. 45.2 Exercício. Justifique essa afirmação! *

Uma *cicloide* é uma a curva definida no plano por um ponto de uma circunferência que rola sem deslizar sobre uma reta horizontal. Vide o esquema da Figura 45.2, página 2515. Para uma circunferência de raio $\ell/4$ uma tal curva pode

ser parametrizada como (45.5), com θ sendo o ângulo rodado pela circunferência. Verifique! Concluímos de (45.5) ou de (45.6) que a curva tautócrona (45.3) é, a menos de uma reflexão e translações, uma curva cicloide.

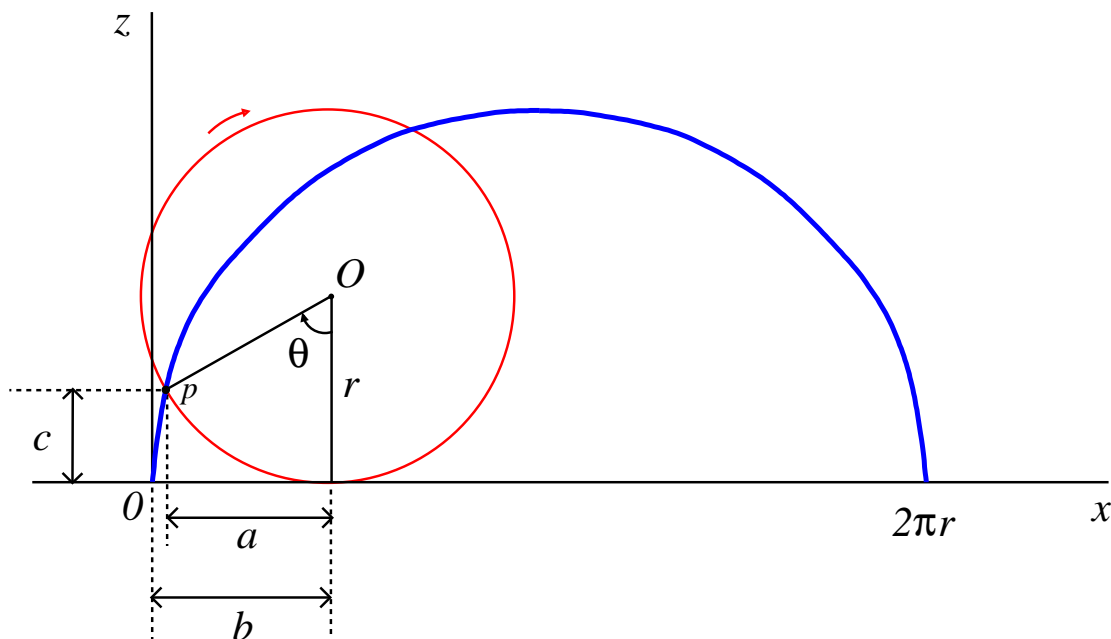


Figura 45.2: Em azul, curva cicloide de altura $2r$ e largura $2\pi r$. Em vermelho, círculo que roda para a direita, sem deslizar, ao longo do eixo horizontal x , sendo θ o ângulo rodado a partir da posição inicial, quando o centro do círculo O encontra-se sobre o eixo vertical z . A distância a vale $r \sin \theta$. A distância b vale $r \theta$ e $c = r - r \cos \theta$. Assim, as coordenadas $(x_1(\theta), z_1(\theta))$ do ponto p da cicloide valem $(r\theta - r \sin \theta, r - r \cos \theta)$.

E. 45.3 Exercício. Mostre que a área sob a curva cicloide da Figura 45.2, página 2515, é $3\pi r^2$. Esse resultado foi obtido primeiramente por Torricelli² em 1644, usando métodos geométricos, e não Cálculo Diferencial e Integral, que surgiria posteriormente. O resultado fora antecipado por medidas empíricas (!) da área, feitas por Galilei, do qual Torricelli fora discípulo. Mostre também que o comprimento da mesma cicloide é $8r$. ✦

• **Nota histórica**

Curvas cicloides foram estudadas nos séculos XVI e XVII em conexão com as curvas tautócrona e braquistócrona, mas eram conhecidas desde a Antiguidade. O nome *cicloide* foi cunhado por Galilei.

A curva tautócrona foi encontrada por Christiaan Huygens³ em 1659, por outros meios. Huygens procurava construir um pêndulo cujo período fosse independente da amplitude (isso só ocorre em pêndulos normais para pequenas oscilações) e essa procura levou-o à curva tautócrona.

Huygens inventara o relógio de pêndulo em 1656 ou 1657 e apercebeu-se de um problema: o período do pêndulo varia com a amplitude, permanecendo constante apenas para pequenas oscilações. Sua ideia para resolver esse problema, esquematizada na Figura 45.1, página 2514, foi a de produzir um pêndulo cuja massa não se movesse em um arco de círculo, como os pêndulos comuns. Para tal, concebeu que a haste do pêndulo fosse flexível e tivesse seu movimento limitado por cima por duas curvas A e B , escolhidas de forma a garantir que a massa m sempre percorresse uma tautócrona, garantindo assim a independência do período com a amplitude.

A intenção de Huygens era produzir um pêndulo que pudesse ser empregado em barcos para a determinação precisa do tempo, mesmo sob balanços do mar, permitindo assim determinar a longitude na qual o barco encontrava-se, um importante problema técnico de seu tempo do qual dependia o crescente tráfego marítimo internacional⁴. Huygens

²Evangelista Torricelli (1608–1647).

³Christiaan Huygens (1629–1695).

⁴Se o barco possuísse um relógio confiável, sua longitude podia ser determinada medindo-se a diferença entre o tempo marcado no relógio

produziu e testou protótipos de seus pêndulos isócronos e, em 1664, enviou-os em uma expedição de ida e volta às ilhas de Cabo Verde. Os resultados foram bons, mas o tempo mostrou que eles não operavam bem em mares mais agitados⁵. Para a história do problema da longitude e sua solução, vide [369].

E. 45.4 Exercício-desafio. Determine as curvas A e B e o ponto P da Figura 45.1, página 2514, para as quais a massa m mova-se ao longo da curva tautócrona. A resposta é que A e B são cicloides. *Sugestão:* comece determinando a altura do ponto P e, assim, o comprimento L da haste. Esse comprimento deve ser tal que o período do pêndulo sob pequenas oscilações coincida com o período da curva tautócrona. ✱

A identificação da curva tautócrona como uma cicloide foi anunciada pelo mesmo Huygens em 1673. O pêndulo de Huygens é por vezes denominado *pêndulo cicloidal*. A curva tautócrona é também relacionada à curva *braquistócrona*, que fornece o caminho mais rápido para o movimento entre dois pontos sob um campo gravitacional constante.

• **A curva braquistócrona**

Considere-se um ponto material de massa m que seja restrito a mover-se no plano $x - z$ (x sendo o eixo horizontal e z o eixo vertical), sob a ação de um campo gravitacional constante. Considere-se dois pontos $p_1 = (x_1, z_1)$ e $p_2 = (x_2, z_2)$ nesse plano, sendo $x_1 < x_2$ e $z_1 \geq z_2$ (ou seja, a altura de p_1 é maior ou igual à de p_2). Se pudermos restringir o movimento do ponto material a uma curva no plano $x - z$ que conecta p_1 a p_2 e se o ponto material for solto em repouso de p_1 , qual seria a forma dessa curva para que o tempo percorrido pelo ponto material seja o menor possível? Vide Figura 45.3, página 2518.

Essa questão foi levantada em 1696 por Johann Bernoulli⁶, que denominou a curva “braquistócrona”⁷.

São conhecidas diversas soluções desse problema, sendo as primeiras publicadas em 1697: a de seu irmão (e rival) Jacob Bernoulli⁸, a de Leibniz⁹, a de L’Hôpital¹⁰ e a de Isaac Newton (anonimamente), além da própria solução de Johann Bernoulli. Vamos apresentar uma solução variacional desse problema mecânico, empregando resultados anteriormente aqui obtidos. Essa solução, desenvolvida independentemente por Euler e Lagrange em meados do século XVIII, foi uma das primeiras soluções de problemas matemáticos a fazer uso do que viria a ser chamado *Cálculo de Variações*.

Seja a curva procurada descrita por uma função $z = f(x)$, com $x_1 \leq x \leq x_2$. A energia cinética do ponto material será $\frac{m}{2}(\dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) = \frac{m}{2} [1 + f'(x(t))^2] \dot{x}(t)^2$. Sua energia potencial é $mgf(x(t))$. Com isso, a energia mecânica do ponto material (que é constante ao longo do movimento) é

$$E = \frac{m}{2} [1 + f'(x(t))^2] \dot{x}(t)^2 + mgf(x(t)) .$$

Eliminando $\dot{x}(t)$, temos

$$\dot{x}(t) = \sqrt{2g} \sqrt{\frac{E' - f(x(t))}{1 + f'(x(t))^2}} , \tag{45.7}$$

sendo $E' \equiv E/(mg)$. Acima, escolhemos a raiz positiva da raiz quadrada sob o entendimento que, pelas hipóteses, a partícula se move da esquerda para a direita.

Como o ponto material é solto em repouso de p_1 , sua energia mecânica é $E = mgz_1$. Assim, é conveniente definir-se

desde a passagem por um meridiano padrão e o tempo local, que podia ser obtido pela posição do Sol ao meio-dia ou pela posição de estrelas. Cada hora de diferença após a passagem pelo meridiano padrão, corresponde a 15° graus de longitude em relação a esse meridiano. A escolha de qual seria o meridiano padrão é uma questão política e, devido à influência do Império Britânico, adota-se atualmente o Meridiano de Greenwich, que passa por uma vila com esse nome às margens do Tâmis, próxima a Londres, onde localiza-se um Observatório Real. No passado, vários outros padrões foram considerados. A dificuldade prática nesse método estava em construir-se um relógio confiável, problema primeiramente resolvido por John Harrison (1693–1776), um relojoeiro autodidata. Vide [369].

⁵Vale comentar que o problema tinha múltiplos aspectos. Mudanças de temperatura e pressão atmosférica podem afetar o funcionamento de relógios mecânicos, alterando, por exemplo, qualidades dos óleos lubrificantes empregados nesses dispositivos ou afetando as dimensões de suas peças. Mesmo variações na aceleração da gravidade local podem ter efeitos sensíveis em medições de tempo. Em um pêndulo, por exemplo, o período é $2\pi\sqrt{\ell/g}$, que depende de g , que apresenta variações ao longo da superfície da Terra, e do comprimento do pêndulo ℓ , que pode variar com a temperatura. Juntos, esses efeitos tornavam as medidas de tempo e longitude muitas imprecisas para uso eficiente.

⁶Johann Bernoulli (1667–1748).

⁷De “tempo” (*khrónos*) “mais curto” (*brakhystós*), em Grego.

⁸Jacob Bernoulli (1654–1705).

⁹Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716).

¹⁰Guillaume François Antoine, Marquês de l’Hôpital (1661–1704).

$h(x) := E' - f(x) = z_1 - f(x)$, com o que (45.7) fica

$$\dot{x}(t) = \sqrt{2g} \sqrt{\frac{h(x(t))}{1 + h'(x(t))^2}}. \tag{45.8}$$

Observe-se que $z_1 - f(x) \geq 0$ durante o movimento pois, pela conservação de energia, o ponto p_1 é o mais elevado da trajetória. Assim, a raiz quadrada, acima, está bem definida.

Com isso, obtemos que o tempo $T_{p_1 \rightarrow p_2}$ que o ponto material leva para percorrer a curva de p_1 e p_2 é

$$T_{p_1 \rightarrow p_2} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + h'(x)^2}{h(x)}} dx. \tag{45.9}$$

Com isso, o problema de determinar a curva braquistócrona transforma-se no problema de encontrar a função h que minimiza o funcional do lado direito de (45.9), cuja Função de Lagrange é

$$\mathcal{L}(h, h') = \sqrt{\frac{1 + h'(x)^2}{h(x)}} \tag{45.10}$$

(o fator $1/\sqrt{2g}$ é irrelevante para o que segue). Poderíamos prosseguir daqui escrevendo as equações de Euler-Lagrange correspondentes, o que é um tanto trabalhoso, mas existe um atalho. A Função de Lagrange de (45.10) não depende explicitamente da variável independente x . Assim, aplica-se aqui a Identidade de Beltrami (44.176), página 2457 (lembrar que aqui a variável independente é x , não t), que afirma que a quantidade $\mathcal{L} - h' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h'}$ é uma constante, que, por conveniência, escrevemos como $1/\sqrt{2R}$, sendo $R > 0$ constante:

$$\mathcal{L}(h(x), h'(x)) - h'(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h'}(h(x), h'(x)) = \frac{1}{\sqrt{2R}}.$$

Assim, temos

$$\sqrt{\frac{1 + h'(x)^2}{h(x)}} - \frac{h'(x)^2}{\sqrt{(1 + h'(x)^2)h(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2R}}. \tag{45.11}$$

Elevando-se ambos os lados ao quadrado, obtemos, após algumas manipulações simples,

$$h(x)(1 + h'(x)^2) = 2R. \tag{45.12}$$

Trata-se de uma equação diferencial de primeira ordem para h . Para resolvê-la isolamos h' , obtendo

$$h'(x)^2 = \frac{2R}{h(x)} - 1 \quad \text{e, assim,} \quad x - c = \int \frac{dh}{\sqrt{\frac{2R}{h} - 1}},$$

com c sendo uma constante de integração. Definindo-se $u = h/(2R)$, temos

$$x - c = 2R \int \sqrt{\frac{u}{1-u}} du = 2R \int \text{sen}(\theta/2)^2 d\theta = R(\theta - \text{sen}(\theta)),$$

onde fizemos a mudança de variável $u = \text{sen}^2(\theta/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\theta))$. Note-se aqui que $\theta - \text{sen}(\theta)$ é uma função crescente (sua derivada é $1 - \cos(\theta) > 0$ para $\theta \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$) e, portanto, é inversível, permitindo escrever $\theta(x)$. Como x é limitada ao intervalo $[x_1, x_2]$, a variável θ é limitada correspondentemente a um intervalo que denotaremos por $[\theta_1, \theta_2]$.

Resumindo, escrevendo x e $h(x)$ em termos de θ , temos

$$x = c + R(\theta - \text{sen}(\theta)) \quad \text{e} \quad h(x) = 2Ru = R(1 - \cos(\theta)).$$

É novamente de se observar que

$$h(x(\theta)) = \frac{d}{d\theta} x(\theta), \tag{45.13}$$

como no caso da curva tautócrona.

A curva $(x, h(x))$ procurada, portanto, é

$$(c + R(\theta - \text{sen}(\theta)), R(1 - \text{cos}(\theta))) , \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2] .$$

Comparando a (45.5), vemos que trata-se de um trecho da curva cicloide descrita em (45.5), com a identificação $R = \frac{\ell}{4}$. Assim, a curva braquistócrona é também obtida de uma cicloide com círculo gerador de raio R .

Se retornarmos às variáveis originais e escrevermos $f(x) = z_1 - h(x)$, temos que a curva procurada é

$$(c + R(\theta - \text{sen}(\theta)), z_1 - R(1 - \text{cos}(\theta))) , \quad \theta \in [\theta(x_1), \theta(x_2)] . \tag{45.14}$$

Verificamos, por comparação, que trata-se de um trecho uma curva tautócrona (a menos de translações).

Desejamos agora fixar os parâmetros R, c, θ_1 e θ_2 de forma a impor que essa curva passe pelos pontos (x_1, z_1) (para $\theta = \theta_1$) e (x_2, z_2) (para $\theta = \theta_2$). Devemos, assim, ter

$$x_1 = c + R(\theta_1 - \text{sen}(\theta_1)), \quad z_1 = z_1 - R(1 - \text{cos}(\theta_1)), \quad x_2 = c + R(\theta_2 - \text{sen}(\theta_2)), \quad z_2 = z_1 - R(1 - \text{cos}(\theta_2)) .$$

A segunda relação implica $\theta_1 = 0$ e, com isso, a primeira relação implica $c = x_1$. Assim, as duas últimas ficam

$$\frac{\text{cos}(\theta_2) - 1}{\theta_2 - \text{sen}(\theta_2)} = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad R = \frac{z_2 - z_1}{\text{cos}(\theta_2) - 1} . \tag{45.15}$$

A primeira determina θ_2 (observar aqui que a função $(\text{cos}(\theta) - 1)/(\theta - \text{sen}(\theta))$ é inversível no intervalo $(0, 2\pi]$, sendo negativa nesse intervalo, o que vem ao encontro da hipótese que $z_2 \leq z_1$) e a segunda determina R .

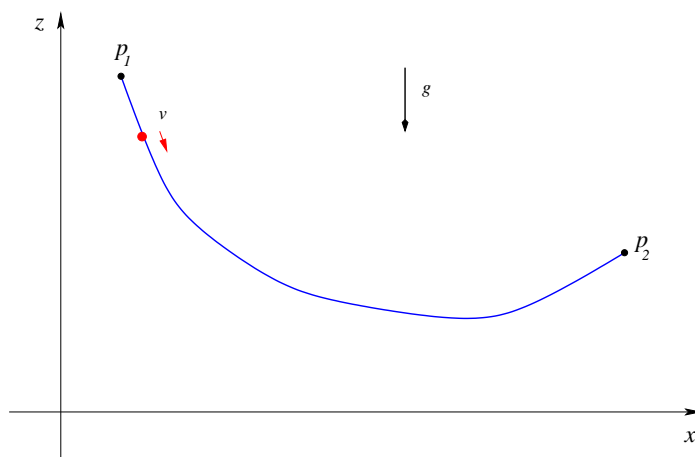


Figura 45.3: Em azul, curva conectando os pontos p_1 e p_2 com a propriedade que um ponto material (em vermelho, com velocidade v) partindo de p_1 e impulsionado pela força da vertical da gravidade chega a p_2 no menor tempo possível. Como desenvolvido no texto, essa curva, denominada *braquistócrona*, é um pedaço de uma cicloide, ou seja, de uma tautócrona.

Se retornarmos a (45.9) com (45.12), obtemos

$$T_{p_1 \rightarrow p_2} = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{h(x)} dx = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\theta_2} \frac{1}{h(x(\theta))} \frac{dx}{d\theta} d\theta \stackrel{(45.13)}{=} \theta_2 \sqrt{\frac{R}{g}} ,$$

com θ_2 e R determinados em (45.15).

45.2 Movimento em Potenciais Centrais e o Problema de Kepler

Nesta Seção trataremos da solução de sistemas mecânicos que se movam sob a ação de forças centrais, ou seja, de forças derivadas de potenciais que dependam apenas da distância entre as partículas participantes. Trataremos de sistemas

de um ou dois pontos materiais sob tais forças e comentaremos também alguns aspectos do que ocorre no caso de três pontos materiais. Problemas com forças centrais são de grande importância na Mecânica Celeste – particularmente o chamado *Problema de Kepler* – e na Física Atômica.

Uma breve revisão de seções cônicas pode ser encontrada no Apêndice 45.A, página 2551.

• **Nota histórica**

O Problema de Kepler – a determinação do movimento de pontos materiais sob a ação de uma força que varie com o inverso do quadrado da distância – foi um dos mais importantes problemas da História da Física e da Astronomia e sua resolução, atribuída a Newton e, parcialmente, a Hooke, contribuiu de forma decisiva para a aceitação da Lei de Gravitação Universal, proposta por Newton, dando início a uma nova era da Astronomia. O feito mais importante foi provar que as órbitas nesse caso seguiam seções cônicas, ou seja, círculos, elipses, parábolas ou hipérbolas. Que planetas descreviam aproximadamente elipses em seu movimento, com o Sol em um de seus focos, foi constatado observacionalmente por Kepler (*Primeira Lei de Kepler*) e divulgado por esse autor entre 1609 e 1619, junto com as duas outras leis do movimento planetário que levam seu nome.

Certos aspectos do Problema de Kepler, como a determinação aproximada da trajetória como função do tempo, foram tratados pelo próprio Kepler, antes mesmo das contribuições de Newton. Trataremos disso adiante.

Fazemos notar que, em situações reais, como no sistema solar, o fato de o movimento de planetas ser restrito a seções cônicas não é exato, pois as órbitas podem ser perturbadas pela atração dos outros planetas, pelo fato de Sol não ser exatamente esférico e sim uma esfera oblata (o que introduz correções à lei $F \propto -1/r^2$) e por efeitos da Teoria da Relatividade Geral. O estudo dessas correções é objeto da Teoria de Perturbações.

45.2.1 O Problema de Um Corpo sob Forças Centrais

Consideremos um ponto material de massa m movendo-se em \mathbb{R}^3 , sendo \vec{x} seu vetor-posição. Consideremos um sistema de coordenadas Cartesianas fixo em \mathbb{R}^3 , com versores ortogonais \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 , de sorte que escrevemos $\vec{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3$, em termos de componentes x^1 , x^2 e x^3 .

Trataremos aqui da situação de particular interesse físico na qual esse ponto material move-se sob um potencial esféricamente simétrico, ou seja, da forma $U(\vec{x}) = V(\|\vec{x}\|)$, com V sendo uma função de uma variável, usualmente suposta contínua e diferenciável por partes, $V : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (em alguns casos o ponto 0 pode ser incluído no domínio de V). Um tal potencial que dependa apenas de $\|\vec{x}\|$ é dito ser um *potencial central* e a força por ele produzida é dita ser uma *força central*, ou *campo central*.

O Lagrangiano que descreve esse sistema mecânico é $\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{m}{2}\|\dot{\vec{x}}\|^2 - V(\|\vec{x}\|)$ e as correspondentes equações de Euler-Lagrange são

$$m\ddot{\vec{x}}(t) = -V'(\|\vec{x}(t)\|)\frac{\vec{x}(t)}{\|\vec{x}(t)\|}, \tag{45.16}$$

as quais expressam a segunda lei de Newton para o problema, sendo o lado direito (a menos do sinal) a força central produzida pelo potencial V .

Como $\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$ é invariante por rotações da coordenada \vec{x} , o momento angular $\vec{\ell} = \vec{x} \times (m\dot{\vec{x}})$ é uma constante de movimento. Isso decorre também diretamente de (45.16), pois $\dot{\vec{\ell}} = \vec{x} \times (m\ddot{\vec{x}}) = -\vec{x} \times \left(V'(\|\vec{x}\|)\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right) = 0$, onde usamos que $\dot{\vec{x}} \times \dot{\vec{x}} = 0$ e que $\vec{x} \times \vec{x} = 0$. Esse fato permite-nos uma importante simplificação no tratamento do problema, que passa a depender de duas possíveis situações:

1. Caso $\vec{\ell} = \vec{0}$. Nesse caso \vec{x} e $\dot{\vec{x}}$ são paralelos ao longo de todo o movimento (pois $\vec{\ell}$ é constante) e (45.16) reduz-se a um problema unidimensional.
2. Caso $\vec{\ell} \neq \vec{0}$. Nesse caso \vec{x} e o vetor não nulo $\vec{\ell}$ são ortogonais e como $\vec{\ell}$ é constante, o vetor posição \vec{x} deve estar sempre em um mesmo plano e a trajetória deve ser planar.

• **Caso $\vec{\ell} \neq \vec{0}$**

Vamos convencionar que $\vec{\ell}$ aponta na direção de \mathbf{e}_3 do sistema de coordenadas Cartesiano adotado em \mathbb{R}^3 e que o

plano de movimento seja o plano 1-2, ou seja, $\vec{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2$. Temos também $\dot{\vec{x}} = \dot{x}^1\mathbf{e}_1 + \dot{x}^2\mathbf{e}_2$ e $\vec{\ell} = m(x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1)\mathbf{e}_3$.

É conveniente adotarmos um sistema de coordenadas polares no plano 1-2, escrevendo

$$x^1 = r \cos(\phi), \quad x^2 = r \sin(\phi),$$

onde $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ e $\phi = \arctan(x^2/x^1)$. Os correspondentes versores ortogonais desse sistema são

$$\mathbf{e}_r = \cos(\phi)\mathbf{e}_1 + \sin(\phi)\mathbf{e}_2 \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_\phi = -\sin(\phi)\mathbf{e}_1 + \cos(\phi)\mathbf{e}_2. \quad (45.17)$$

É fácil verificar que $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_3$. De (45.17) segue também

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r = \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}\mathbf{e}_\phi = -\dot{\phi}\mathbf{e}_r.$$

Dessa forma, temos

$$\vec{x} = r\mathbf{e}_r, \quad (45.18)$$

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \quad \text{e} \quad (45.19)$$

$$\ddot{\vec{x}} = (\ddot{r} - r(\dot{\phi})^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\mathbf{e}_\phi. \quad (45.20)$$

Consequentemente, temos

$$\vec{\ell} = m\vec{x} \times \dot{\vec{x}} = mr\mathbf{e}_r \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi) = mr^2\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \quad (45.21)$$

e, portanto,

$$\ell^2 = m^2r^4(\dot{\phi})^2, \quad (45.22)$$

onde

$$\ell \equiv \|\vec{\ell}\|.$$

Com isso, (45.16) fica $m(\ddot{r} - r(\dot{\phi})^2)\mathbf{e}_r + m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\mathbf{e}_\phi = -V'(r)\mathbf{e}_r$. Naturalmente, isso implica

$$m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = 0 \quad \text{e} \quad (45.23)$$

$$m(\ddot{r} - r(\dot{\phi})^2) = -V'(r). \quad (45.24)$$

A relação (45.23) significa $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0$, do que se conclui que $mr^2\dot{\phi}$ é constante, que é a já observada conservação do momento angular. A relação (45.24) pode ser escrita com uso de (45.22) como

$$m\ddot{r} = -V'(r) + \frac{\ell^2}{mr^3} = -V_{\text{ef}}'(r), \quad \text{onde} \quad V_{\text{ef}}(r) := V(r) + \frac{\ell^2}{2m r^2} \quad (45.25)$$

é o chamado *potencial efetivo* associado a esse problema de força central.

A energia mecânica do sistema é dada por

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2} \|\dot{\vec{x}}\|^2 + V(r) \\ &\stackrel{(45.19)}{=} \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2(\dot{\phi})^2) + V(r) \\ &\stackrel{(45.22)}{=} \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V(r) + \frac{\ell^2}{2m r^2} \\ &\equiv \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r). \end{aligned} \quad (45.26)$$

Resumindo, concluímos de (45.25) e de (45.26) que o movimento sob a ação de uma força central reduz-se, a um movimento angular sob a conservação do momento angular e a um movimento radial unidimensional sob o potencial efetivo V_{ef} .

• **Solução das equações de movimento sob forças centrais para $\vec{\ell} \neq 0$**

A expressão (45.26) permite-nos resolver a equação diferencial (45.25). De fato, isolando-se \dot{r} em (45.26), temos $\dot{r}^2 = \frac{2}{m}(E - V_{\text{ef}}(r))$. Assim, em um trecho da trajetória em que $\dot{r} > 0$, temos

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{ef}}(r))}. \tag{45.27}$$

Isso é um exemplo de uma equação separável, cuja solução geral é exposta na Seção 13.3, página 658. Segue que

$$t + c = \int \left[\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2m} \frac{1}{r^2} \right) \right]^{-1/2} dr, \tag{45.28}$$

sendo c uma constante de integração. A determinação da integral do lado direito permite expressar a solução da equação diferencial (45.25). Se a integral do lado direito, que denotaremos por F , for uma função inversível em algum intervalo, teremos a solução $r(t) = F^{-1}(t + c)$. Veremos essas ideias em ação no caso do Problema de Kepler, adiante. É de se observar que a solução oferecida em (45.28) depende das constantes de movimento E e ℓ .

De (45.28) se extrai, por exemplo, que

$$T_{1 \rightarrow 2} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{ef}}(r))}} dr = \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2m} \frac{1}{r^2} \right) \right]^{-1/2} dr,$$

onde $T_{1 \rightarrow 2}$ é o tempo necessário para o ponto material transitar de r_1 a r_2 (com $r_2 > r_1$).

Para um movimento em sentido anti-horário a relação (45.21), página 2520, diz-nos que

$$\ell = mr^2\dot{\phi} \tag{45.29}$$

o que nos fornece $\phi(t)$ a partir da integral de $\ell/(mr(t)^2)$ na variável t . Em muitos, casos, porém, é mais importante determinar a relação entre r e ϕ , ou seja, a curva no espaço descrita pelo movimento.

Vamos supor que haja algum intervalo de tempo onde as funções $t \mapsto r(t)$ e $t \mapsto \phi(t)$ sejam bijetoras (o que é de se supor com as hipóteses que fazemos sobre o potencial)¹¹. Podemos então, nesse intervalo, escrever ϕ como função de r na forma de uma função $\varphi(r)$, especificamente, $\phi(t) = \varphi(r(t))$, e valerá

$$\frac{d\varphi}{dr}(r(t)) = \frac{\dot{\phi}(t)}{\dot{r}(t)} \stackrel{(45.27), (45.29)}{=} \frac{\ell}{mr(t)^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{ef}}(r(t)))}}$$

e, assim,

$$\varphi(r) = c + \ell \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{1}{r^2 \sqrt{E - V(r) - \frac{\ell^2}{2m} \frac{1}{r^2}}} dr, \tag{45.30}$$

com c sendo uma constante de integração. A integral em r do lado direito fornecerá $\varphi(r)$ e, assim, a curva no espaço descrita pelo movimento. Exibiremos um cálculo explícito no caso do Problema de Kepler, adiante.

45.2.2 O Problema de Dois Corpos sob Forças Centrais

Consideremos dois pontos materiais com massas m_1 e m_2 e vetores-posição \vec{x}_1 e \vec{x}_2 , respectivamente, se movimentando no espaço \mathbb{R}^3 sob um potencial $U(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = V(\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|)$. É conveniente tratar esse sistema introduzindo as coordenadas

¹¹A limitação a um intervalo é devida à possibilidade de autocruzamentos da trajetória.

$\vec{y} := \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ e $\vec{X} := \frac{1}{M}(m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)$, onde $M := m_1 + m_2$. A coordenada \vec{X} é a coordenada do centro de massa do par de pontos materiais. Com isso, obtém-se

$$\vec{x}_1 = \vec{X} - \frac{m_2}{M}\vec{y} \quad \text{e} \quad \vec{x}_2 = \vec{X} + \frac{m_1}{M}\vec{y},$$

como facilmente se verifica. Analogamente, para as velocidades temos $\dot{\vec{x}}_1 = \dot{\vec{X}} - \frac{m_2}{M}\dot{\vec{y}}$ e $\dot{\vec{x}}_2 = \dot{\vec{X}} + \frac{m_1}{M}\dot{\vec{y}}$. Assim, a energia cinética desse sistema pode ser escrita, após cancelamentos triviais, como

$$T = \frac{m_1}{2}\|\dot{\vec{x}}_1\|^2 + \frac{m_2}{2}\|\dot{\vec{x}}_2\|^2 = \frac{M}{2}\|\dot{\vec{X}}\|^2 + \frac{\mu}{2}\|\dot{\vec{y}}\|^2,$$

(verifique!) onde $\mu := m_1m_2/M$ é denominada *massa reduzida* (ou *efetiva*) do par de pontos materiais. Com isso, podemos escrever o Lagrangiano do sistema nas novas coordenadas \vec{X} , $\dot{\vec{X}}$, \vec{y} e $\dot{\vec{y}}$:

$$\mathcal{L}(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, \vec{y}, \dot{\vec{y}}) = \mathcal{L}_{cm}(\vec{X}, \dot{\vec{X}}) + \mathcal{L}_r(\vec{y}, \dot{\vec{y}}), \quad \text{sendo} \quad \mathcal{L}_{cm}(\vec{X}, \dot{\vec{X}}) := \frac{M}{2}\|\dot{\vec{X}}\|^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_r(\vec{y}, \dot{\vec{y}}) := \frac{\mu}{2}\|\dot{\vec{y}}\|^2 - V(\|\vec{y}\|).$$

Podemos interpretar essas relações como afirmando que o movimento do centro de massa \vec{X} é independente do movimento da coordenada relativa \vec{y} , o primeiro sendo regido pelo Lagrangiano $\mathcal{L}_{cm}(\vec{X}, \dot{\vec{X}})$ e o segundo pelo Lagrangiano $\mathcal{L}_r(\vec{y}, \dot{\vec{y}})$.

As correspondentes equações de Euler-Lagrange nos informam que o momento total $M\dot{\vec{X}}$ é uma constante de movimento (lembrar que \mathcal{L}_{cm} independe de \vec{X} e, portanto, o momento generalizado associado é conservado) e que

$$\mu\ddot{\vec{y}} = -V'(\|\vec{y}\|)\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}. \tag{45.31}$$

Como se vê, esse problema é idêntico ao de uma partícula de massa μ movendo-se sob um potencial central, como em (45.16), página 2519. O momento angular $\vec{\ell} = \vec{y} \times (\mu\dot{\vec{y}})$ é uma constante de movimento (o que decorre também de $\mathcal{L}_r(\vec{y}, \dot{\vec{y}})$ ser invariante por rotações da coordenada \vec{y}), assim como a energia mecânica $E = \frac{\mu}{2}\|\dot{\vec{y}}\|^2 + V(\|\vec{y}\|)$.

A equação para a coordenada radial $r = \|\vec{y}\|$ é fornecida como em em (45.28), página 2521:

$$t + c = \int \left[\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2\mu r^2} \right) \right]^{-1/2} dr, \tag{45.32}$$

sendo necessário inverter a função de r do lado direito. Discutiremos isso com mais detalhe no caso do Problema de Kepler, adiante.

45.2.3 O Problema de Kepler. Determinação das Órbitas

O *Problema de Kepler* consiste em determinar a solução da equação de movimento no caso de um potencial da forma $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, com $\kappa > 0$ (potencial atrativo) na região $r > 0$. Esse é um problema de grande importância na Física e que encontra aplicações na Mecânica Celeste e no Eletromagnetismo (força de Coulomb¹²).

• Análise qualitativa do movimento

O potencial efetivo é dado por $V_{\text{ef}}(r) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$. É relevante analisarmos o gráfico dessa função na região $r > 0$. Ele encontra-se representado na Figura 45.4, página 2523.

O mínimo de $V_{\text{ef}}(r)$ se dá r_c no ponto onde $V'_{\text{ef}}(r_c) = 0$, que vem a ser

$$r_c = \frac{\ell^2}{\mu\kappa}, \quad \text{sendo que} \quad V_{\text{ef}}(r_c) = -\frac{1}{2}\frac{\mu\kappa^2}{\ell^2}, \tag{45.33}$$

como se verifica facilmente. De (45.26), página 2520, concluímos que

$$E \geq -\frac{1}{2}\frac{\mu\kappa^2}{\ell^2}.$$

A Figura 45.4, página 2523, ajuda-nos também a entender qualitativamente como são as trajetórias. Há quatro casos a se considerar:

¹²Charles-Augustin de Coulomb (1736–1806).

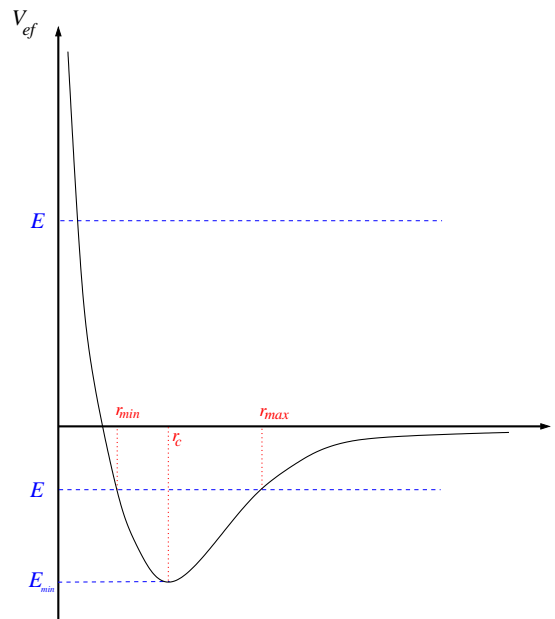


Figura 45.4: O potencial efetivo $V_{ef}(r) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{\ell^2}{2\mu} \frac{1}{r^2}$. São indicados (em azul) dois níveis de energia, (1) um para $E_{min} < E < 0$, sendo $E_{min} := -\frac{1}{2} \frac{\mu \kappa^2}{\ell^2}$ (E_{min} é o valor de V_{ef} no seu mínimo r_c , dados em (45.33); e outro para (2) $E > 0$. Para cada valor de E o movimento se dá na região na qual $V_{ef}(r) \leq E$. No caso $E = E_{min}$ o movimento é circular com raio r_c . No caso (1), o movimento é limitado ao intervalo $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ (com r_{min}/r_{max} dados em (45.34)). No caso (2) o movimento é ilimitado, havendo apenas um valor mínimo para r . O mesmo se dá caso $E = 0$. Como veremos, a órbita é circular caso $E = E_{min}$, elíptica caso $E_{min} < E < 0$, parabólica caso $E = 0$ e hiperbólica caso $E > 0$.

1º Caso $E = -\frac{1}{2} \frac{\mu \kappa^2}{\ell^2}$. Devido a (45.26), esse caso só ocorre se trajetória for tal que $r(t) = r_c$ para todo t , e, portanto, $\dot{r}(t) = 0$ também para todo t . Dessa forma, trajetória é um círculo de raio r_c , e o movimento se dá com velocidade angular, também constante no tempo,

$$\dot{\phi}(t) = \frac{\ell}{\mu(r_c)^2} = \frac{\mu \kappa^2}{\ell^3},$$

como segue de (45.29), página 2521, e de (45.33).

2º Caso $-\frac{1}{2} \frac{\mu \kappa^2}{\ell^2} < E < 0$. O movimento é radialmente limitado e se dá na região $r_{min} \leq r \leq r_{max}$. Os pontos r_{min}/r_{max} são pontos de retorno, ou seja, são pontos da trajetória em que $V_{ef}(r) = E$ (e, portanto, $\dot{r} = 0$). Como facilmente se vê, a equação algébrica $V_{ef}(r) = E$ tem por soluções nesse caso

$$r_{min} = \frac{-\kappa + \sqrt{\kappa^2 + \frac{2E\ell^2}{\mu}}}{2E} \quad \text{e} \quad r_{max} = \frac{-\kappa - \sqrt{\kappa^2 + \frac{2E\ell^2}{\mu}}}{2E}. \quad (45.34)$$

Como veremos, a trajetória nesse caso é fechada e se dá em uma elipse.

3º Caso $E = 0$. O movimento não é mais radialmente limitado e se dá na região $r \geq r_{min}$, onde agora o ponto de retorno, onde $V_{ef}(r) = E = 0$, é único e vale

$$r_{min} = \frac{\ell^2}{2\mu\kappa}. \quad (45.35)$$

A solução r_{min} pode ser obtida de r_{min} dada em (45.34) tomando-se o limite $E \rightarrow 0_-$. Nesse caso, o mesmo limite para r_{max} diverge. A trajetória nesse caso é aberta e, como veremos, se dá em uma parábola.

4º Caso $E > 0$. O movimento não é mais radialmente limitado e se dá na região $r \geq r_{min}$, onde agora o ponto de retorno, onde $V_{ef}(r) = E \geq 0$, é único e vale

$$r_{min} = \frac{-\kappa + \sqrt{\kappa^2 + \frac{2E\ell^2}{\mu}}}{2E}. \quad (45.36)$$

Trata-se da mesma expressão que em (45.34), mas aqui teríamos $r_{max} < 0$ e essa solução, portanto, deve ser excluída. A trajetória nesse caso é aberta e, como veremos, se dá em uma hipérbole.

• Determinação das órbitas

Nesse caso, a integral do lado direito de (45.30) pode ser calculada explicitamente e sua inversa pode ser determinada.

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= c + \sqrt{\frac{\ell^2}{2\mu}} \int \frac{1}{r^2 \sqrt{E + \frac{\kappa}{r} - \frac{\ell^2}{2\mu} \frac{1}{r^2}}} dr \\ &\stackrel{y:=1/r}{=} c - \sqrt{\frac{\ell^2}{2\mu}} \int \left[E + \kappa y - \frac{\ell^2}{2\mu} y^2 \right]^{-1/2} dy . \end{aligned} \tag{45.37}$$

Escrevemos, completando quadrados,

$$E + \kappa y - \frac{\ell^2}{2\mu} y^2 = \left(E + \frac{\mu\kappa^2}{2\ell^2} \right) [1 - z^2] , \quad \text{onde} \quad z := \frac{\sqrt{\frac{\ell^2}{2\mu}} y - \kappa \sqrt{\frac{\mu}{2\ell^2}}}{\left(E + \frac{\mu\kappa^2}{2\ell^2} \right)^{1/2}} .$$

Verifique! Inserindo isso em (45.37), ficamos com

$$\varphi(r) = c - \int [1 - z^2]^{-1/2} dz = c' + \arccos(z) ,$$

onde c' é também uma constante de integração. Consequentemente,

$$\varphi(r) = c' + \arccos \left(\frac{\frac{\ell}{r} - \frac{\kappa\mu}{\ell}}{\left(2\mu E + \frac{\mu^2\kappa^2}{\ell^2} \right)^{1/2}} \right) , \tag{45.38}$$

Com isso, temos, finalmente,

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos(\varphi - c') , \tag{45.39}$$

onde

$$p := \frac{\ell^2}{\mu\kappa} \quad e \quad e := \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\kappa^2}} . \tag{45.40}$$

Verifique! Como demonstraremos adiante e na Seção 45.B, página 2554, a equação (45.39) mostra que as órbitas possíveis são seções cônicas, *i.e.*, círculos, elipses, parábolas ou hipérbolas, a depender do valor de e . Vide também Seção 45.A para uma revisão dos conceitos geométricos necessários.

A grandeza adimensional e é denominada *excentricidade da órbita* e a grandeza p é denominada *parâmetro da cônica*, ou ainda *semi-latus rectum*, na Geometria¹³. Pela expressão (45.40), p possui dimensão de comprimento e é tal que $p/(1 + e)$ é a distância à origem do *periastro*, ou *periápside*¹⁴ da órbita, ou seja, o mínimo valor de r como função de φ , e que é alcançado quando $\varphi = c'$. Vide adiante. Em função disso, podemos convencionar que $c' = 0$, o que significa que a coordenada angular φ é medida a partir da linha onde r assume seu valor mínimo.

¹³O *semi-latus rectum* de uma cônica é a metade do comprimento do segmento ortogonal ao semieixo maior que passa pelo ponto focal e intercepta a cônica. Vide Seção 45.A, página 2551.

¹⁴Segundo os dicionários o periastro, ou periápside, “é o ponto da órbita de um corpo celeste ou de uma nave espacial, em que ele se encontra mais próximo do astro em torno do qual gravita” [298]. Dependendo dos astros envolvidos, outros nomes podem ser adotados: *periélio* para o movimento da Terra, ou quaisquer outros planetas, em torno do Sol; *perigeu* para o movimento da Lua ou de satélites artificiais em torno da Terra; *periselene* ou *perilúnio* para o movimento de satélites ou naves espaciais em torno da Lua; *perizene* ou *perijove* para o movimento de satélites em torno de Júpiter; *periares* para o movimento de satélites em torno de Marte; *pericrone* para o movimento de satélites em torno de Saturno; *perigalacticon* para o movimento de estrelas em torno do centro da galáxia a que pertencem etc.

Na linguagem da Mecânica Celeste, o ângulo φ é denominado *anomalia verdadeira*, ou *anomalia real*, e mede o ângulo a partir da origem (do Sol, no caso do sistema solar) entre a posição de um planeta e a posição na qual a distância deste ao Sol é mínima (periastro).

As coordenadas Cartesianas da órbita (x, y) , centradas na origem e com o eixo x apontando no sentido que liga a origem ao periastro, podem ser facilmente relacionadas a r e φ , pois $x = r \cos(\varphi)$. Tem-se

$$x = r \cos(\varphi) \stackrel{(45.39)}{=} \frac{p - r}{e} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \frac{(p - r)^2}{e^2}}. \quad (45.41)$$

Verifique!

Observe-se que, em geral, $e \geq 0$. Novamente, há quatro casos a se analisar. Os fatos relevantes sobre seções cônicas são apresentados nos Apêndices 45.A, página 2551, e 45.B, página 2554.

- (a) Caso $e = 0$. Isso se dá somente se $E = -\frac{\mu\kappa^2}{2\ell^2}$, o que ocorre com uma órbita circular. De fato, vê-se de (45.39) que $r = p$, constante, e o movimento é circular. Comparando-se a (45.33) vê-se sem surpresa que $p = r_c$. O ângulo φ pode assumir todos os valores no intervalo semiaberto $(-\pi, \pi]$.
- (b) Caso $0 < e < 1$. Isso se dá somente se $-\frac{\mu\kappa^2}{2\ell^2} < E < 0$ e nesse caso a trajetória é elíptica. De fato, a expressão (45.39) no caso $0 < e < 1$ representa uma elipse. O ângulo φ pode assumir todos os valores no intervalo semiaberto $(-\pi, \pi]$.
Os pontos focais encontram-se nas posições $(0, 0)$ e $(-\frac{2pe}{1-e^2}, 0)$.
- (c) Caso $e = 1$. Isso se dá somente se $E = 0$ e nesse caso a trajetória é órbita parabólica. De fato, a expressão (45.39) no caso $e = 1$ representa uma parábola, cujo foco localiza-se em $(0, 0)$. O ângulo φ pode assumir todos os valores no intervalo aberto $(-\pi, \pi)$.
- (d) Caso $e > 1$. Isso se dá somente se $E > 0$ e nesse caso a trajetória é órbita hiperbólica. De fato, a expressão (45.39) no caso $e > 1$ representa uma hipérbole. Os focos da hipérbole estão localizados nos pontos $(0, 0)$ e $(2pe/(e^2 - 1), 0)$. O ângulo φ pode assumir todos os valores no intervalo aberto $(-\phi_0, \phi_0)$, onde $\phi_0 = \arccos(-1/e)$.

É de se observar que a origem, o ponto $(0, 0)$ do plano $x-y$, é sempre um ponto focal das cônicas que descrevem as órbitas do Problema de Kepler.

45.2.4 O Problema de Kepler. Determinação das Trajetórias. A Equação de Kepler

Aqui damos continuidade à Seção 45.2.3, página 2522, tratando agora de obter as trajetórias como função do tempo, uma questão de grande relevância na Astronomia Planetária, no estudo do movimento de satélites artificiais, naves espaciais etc.

• A trajetória como função do tempo. Uma primeira abordagem

Em primeiro lugar observemos que obteremos a função $\phi(t)$ através da relação

$$\phi(t) = \varphi(r(t)),$$

com $\varphi(r)$ dada em (45.38) (podemos adotar $c' = 0$) e $r(t)$ obtida por (45.32). Para o Problema de Kepler, a relação (45.32) fica

$$t + c = \int \left[\frac{2}{\mu} \left(E + \frac{\kappa}{r} - \frac{\ell^2}{2\mu r^2} \right) \right]^{-1/2} dr. \quad (45.42)$$

A integral do lado direito pode ser calculada de forma explícita¹⁵. O resultado sendo:

$$t + c = \frac{r}{E} \sqrt{\frac{\mu}{2}(E - V_{\text{ef}}(r))} - \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{E^{3/2}} \operatorname{argtanh} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{E - \frac{\kappa}{2r}}{\sqrt{E - V_{\text{ef}}(r)}} \right), \quad \text{para } E > 0, \quad (45.43)$$

$$t + c = \frac{r}{E} \sqrt{\frac{\mu}{2}(E - V_{\text{ef}}(r))} - \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{(-E)^{3/2}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{-E}} \frac{E - \frac{\kappa}{2r}}{\sqrt{E - V_{\text{ef}}(r)}} \right), \quad \text{para } E < 0, \quad (45.44)$$

$$t + c = \frac{1}{3\kappa^2} \sqrt{\frac{2}{\mu}} (\ell^2 + \kappa\mu r) \sqrt{\kappa r - \frac{\ell^2}{2\mu}}, \quad \text{para } E = 0, \quad (45.45)$$

sendo as expressões acima sempre válidas para valores de r para os quais $V_{\text{ef}}(r) < E$.

Nos casos $E > 0$ e $E < 0$ não é possível, infelizmente, inverter a função do lado direito de forma explícita, isto é sem uso de funções transcendentais, de modo a se obter $r(t)$. No caso parabólico, $E = 0$, a inversão é mais fácil, mas ainda assim envolve a resolução de uma equação algébrica de terceiro grau para r .

O problema de obter $r(t)$ nesses casos foi tratado por Kepler (para o caso elíptico, sem uso de Cálculo Diferencial), que elaborou um método engenhoso de abordá-lo, introduzindo certos parâmetros que permitem a inversão após a resolução de uma equação transcendente (no caso elíptico e hiperbólico; no caso parabólico a solução da equação é explícita). Em sua análise, Kepler fez uso de suas três Leis e de ideias geométricas, mas é mais interessante hoje apresentarmos seus resultados de outra forma, como apresentamos a seguir.

• **A trajetória como função do tempo. Uma abordagem paramétrica e a equação de Kepler**

Como comentamos, a tentativa de usar (45.42) para escrever-se uma expressão para a trajetória, expressando r e ϕ como função de t , conduz a equações transcendentais que não podem ser expressas em termos de funções elementares. Kepler enfrentou problemas similares, que resolveu com uso de uma parametrização conveniente que motivou geometricamente. Apresentaremos agora essa parametrização, mas que obteremos do uso do Cálculo Diferencial e Integral. Há três casos a considerar:

1. Caso circular ou elíptico, com $E_{\min} \leq E < 0$, sendo $E_{\min} := -\frac{1}{2} \frac{\mu\kappa^2}{\ell^2}$.

O primeiro passo é escrever (45.42) na forma

$$t = \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} \int \frac{r \, dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\kappa}{|E|}r - \frac{\ell^2}{2\mu|E|}}}. \quad (45.46)$$

Verifique! Como antes, definimos

$$\mathbf{p} := \frac{\ell^2}{\mu\kappa}, \quad \mathbf{e} := \sqrt{1 - \frac{2|E|\ell^2}{\mu\kappa^2}}, \quad \mathbf{a} := \frac{\mathbf{p}}{1 - \mathbf{e}^2} = \frac{\kappa}{2|E|} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} := \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{1 - \mathbf{e}^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{2\mu|E|}}, \quad (45.47)$$

com o que, temos

$$\frac{\ell^2}{2\mu|E|} = \mathbf{p}\mathbf{a} = \mathbf{a}^2(1 - \mathbf{e}^2). \quad (45.48)$$

Com isso, temos de (45.34)

$$r_{\min} = \frac{\mathbf{p}}{1 + \mathbf{e}} = \mathbf{a}(1 - \mathbf{e}) \quad \text{e} \quad r_{\max} = \frac{\mathbf{p}}{1 - \mathbf{e}} = \mathbf{a}(1 + \mathbf{e}).$$

Verifique! Vale notar aqui que

$$r_{\min} + r_{\max} = 2\mathbf{a},$$

o que é plenamente coerente com a interpretação de $2\mathbf{a}$ como eixo maior da elipse.

¹⁵O cálculo é trabalhoso e seus detalhes não serão apresentados aqui, podendo ser feitos com consulta a tabelas de integrais ou por meio de programas de computação algébrica.

A relação (45.46) fica

$$t = \sqrt{\frac{\mu a}{\kappa}} \int \frac{r \, dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}}. \quad (45.49)$$

Nesse ponto introduzimos a parametrização de Kepler, escrevendo

$$r = a(1 - e \cos(\xi)). \quad (45.50)$$

O parâmetro ξ variará entre 0 a 2π , sendo que no intervalo $[0, \pi]$, r varia entre os valores $a(1 - e) = r_{min}$ e $a(1 + e) = r_{max}$. Introduzindo a mudança de variáveis (45.50) em (45.49), temos

$$t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\kappa}} \int (1 - e \cos(\xi)) \, d\xi$$

e, portanto,

$$t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\kappa}} (\xi - e \operatorname{sen}(\xi)) = \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}} (\xi - e \operatorname{sen}(\xi)). \quad (45.51)$$

A constante de integração foi escolhida de sorte que $t = 0$ quando $\xi = 0$, ou seja, quando $r = r_{min}$ e o ponto material se encontra no periastro da órbita.

A equação (45.51) é denominada *equação de Kepler* e a função $K(\xi) := \xi - e \operatorname{sen}(\xi)$ que surge em (45.51) é denominada *função de Kepler*. Na linguagem da Mecânica Celeste, ξ é denominado *anomalia excêntrica* e $K(\xi)$ é denominado *anomalia média*. Ambas as grandezas têm interpretações geométrica, introduzidas por Kepler, mas essas não são relevantes aqui¹⁶. A função $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é inversível, pois $K'(\xi) = 1 - e \cos(\xi) > 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$ (lembrar que $0 \leq e < 1$), o que permite escrever ξ como função de t em (45.51). A função $K^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função transcendente, mas pode ser facilmente calculada numericamente, e por diversos outros métodos, com alta precisão (para uma referência, vide [85]). No caso de órbita circular, com $e = 0$, a função K é simplesmente a função identidade: $K(\xi) = \xi$.

Assim, no caso geral, teremos

$$\xi(t) = K^{-1} \left(\frac{2}{\kappa} \sqrt{\frac{2|E|^3}{\mu}} t \right) \quad (45.52)$$

e, por (45.50),

$$r(t) = a \left[1 - e \cos \left(K^{-1} \left(\frac{2}{\kappa} \sqrt{\frac{2|E|^3}{\mu}} t \right) \right) \right]. \quad (45.53)$$

Além disso,

$$\phi(t) = \varphi(r(t)), \quad (45.54)$$

com φ dado em função de r em (45.38) (adotamos $c' = 0$). A expressão para $\phi(t)$ assim obtida não é muito iluminante, mas é explícita e é útil em cálculos astronômicos. Mais interessante é utilizar o parâmetro de Kepler ξ para expressar as coordenadas Cartesianas (x, y) da órbita.

Para x temos que $x = r \cos(\varphi)$ e, com uso de (45.39), obtemos $x = \frac{p-r}{e}$. Com isso e com (45.50), obtemos após algumas contas simples,

$$x(\xi) = a(\cos(\xi) - e).$$

Como $x^2 + y^2 = r^2$, temos também

$$y(\xi) = a\sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen}(\xi) = b \operatorname{sen}(\xi).$$

Verifique!

Assim, em coordenadas Cartesianas a trajetória é

$$(x(t), y(t)) = a \left(\cos \left[K^{-1} \left(\frac{2}{\kappa} \sqrt{\frac{2|E|^3}{\mu}} t \right) \right] - e, \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sen} \left[K^{-1} \left(\frac{2}{\kappa} \sqrt{\frac{2|E|^3}{\mu}} t \right) \right] \right). \quad (45.55)$$

¹⁶Supondo-a circular ou elíptica, a anomalia média, por exemplo, é o arco de uma circunferência de raio a (o semieixo maior da elipse) centrada no centro da elipse, que o ponto material descreveria desde sua passagem pelo periastro no instante 0 até o instante t se estivesse se movendo com a velocidade angular média da trajetória real, $2\pi/T$, onde T é o período da órbita.

Como $K(\xi + 2\pi) = K(\xi) + 2\pi$, percebemos das diversas fórmulas acima, por exemplo, de (45.51), que o período da trajetória é

$$T = \kappa\pi\sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}}$$

e com uso de (45.47), obtemos

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{\kappa} a^3$$

(lembrar que a é o semieixo maior da elipse). O leitor há de identificar essa relação com a *Terceira Lei de Kepler*, já aludida em (44.249), página 2481, em nosso tratamento da similitude mecânica da Seção 44.6.3, página 2480.

2. Caso parabólico, com $E = 0$.

Para $E = 0$ a relação (45.42), página 2525, fica

$$t = \sqrt{\frac{\mu}{2\kappa}} \int \frac{r \, dr}{\sqrt{r - \frac{p}{2}}}, \tag{45.56}$$

onde $p = \frac{\ell^2}{\mu\kappa}$. Seguindo as mesmas ideias do caso elíptico, procuramos uma parametrização adequada para r . Sugere-se escrever

$$r = \frac{p}{2}(1 + \tan(\xi/2)^2) = \frac{p}{2} \frac{1}{\cos(\xi/2)^2}, \tag{45.57}$$

com $\xi \in (-\pi, \pi)$. A equação (45.56) fica

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{\mu}{2\kappa}} \left(\frac{p}{2}\right)^{3/2} \int \left(\frac{1 + \tan(\xi/2)^2}{\tan(\xi/2)}\right) \frac{\tan(\xi/2)}{\cos(\xi/2)^2} d\xi \\ &= \sqrt{\frac{\mu p^3}{16\kappa}} \left[\int \frac{1}{\cos(\xi/2)^2} d\xi + \int \frac{\sin(\xi/2)^2}{\cos(\xi/2)^4} d\xi \right] = 2\sqrt{\frac{\mu p^3}{16\kappa}} \left[\tan(\xi/2) + \frac{1}{3} \tan(\xi/2)^3 \right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$t = \frac{1}{2} \frac{\ell^3}{\mu\kappa^2} \left[\tan(\xi/2) + \frac{1}{3} \tan(\xi/2)^3 \right]. \tag{45.58}$$

A equação (45.58) é a análoga à equação de Kepler (45.51), mas é denominada *equação de Barker*¹⁷.

O parâmetro ξ é aqui também denominado *anomalia excêntrica* e varia no intervalo $(-\pi, \pi)$, divergindo nos extremos. A *função de Barker* $B : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $B(\xi) := \tan(\xi/2) + \frac{1}{3} \tan(\xi/2)^3$ é inversível, pois $B'(\xi) = 1/(2 \cos(\xi/2)^4) > 0$ em $(-\pi, \pi)$. Ao contrário do que ocorre no caso elíptico, a inversa $B^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi, \pi)$ pode ser expressa em termos de funções elementares. Mostremos como isso se faz.

Seja a equação $B(\xi) = y$, ou seja, $\tan(\xi/2) + \frac{1}{3} \tan(\xi/2)^3 = y$. Definindo $v = \tan(\xi/2)$, temos a equação cúbica

$$v^3 + 3v - 3y = 0.$$

Sua única solução real é fornecida pela bem conhecida *fórmula de Cardano*¹⁸ (para sua dedução, vide *e.g.*, [390]), com a qual obtemos

$$v = \left[\frac{3}{2}y + \sqrt{\frac{9}{4}y^2 + 1} \right]^{1/3} + \left[\frac{3}{2}y - \sqrt{\frac{9}{4}y^2 + 1} \right]^{1/3}.$$

Verifique! É um exercício banal verificar também que

$$\left[\frac{3}{2}y - \sqrt{\frac{9}{4}y^2 + 1} \right]^{1/3} = - \left[\frac{3}{2}y + \sqrt{\frac{9}{4}y^2 + 1} \right]^{-1/3},$$

¹⁷Thomas Barker (1722–1809). Trabalho original: “An Account of the Discoveries concerning Comets, with the Way to find their Orbits, and some Improvements in constructing and calculating their Places”, de 1757.

¹⁸Gerolamo Cardano (1501–1576).

de sorte que também podemos escrever

$$v = \left[\frac{3}{2}y + \sqrt{\frac{9}{4}y^2 + 1} \right]^{1/3} - \left[\frac{3}{2}y + \sqrt{\frac{9}{4}y^2 + 1} \right]^{-1/3}.$$

Assim, obtemos

$$\xi = 2 \arctan(v) = 2 \arctan \left(\left[\frac{3}{2}y + \sqrt{\frac{9}{4}y^2 + 1} \right]^{1/3} - \left[\frac{3}{2}y + \sqrt{\frac{9}{4}y^2 + 1} \right]^{-1/3} \right) \equiv B^{-1}(y).$$

No caso da equação (45.58), temos $y = \alpha t$, com $\alpha := \frac{2\mu\kappa^2}{\ell^3}$. Portanto, temos a solução explícita

$$\xi(t) = B^{-1}(\alpha t) = 2 \arctan \left(\left[\frac{3}{2}\alpha t + \sqrt{\frac{9}{4}(\alpha t)^2 + 1} \right]^{1/3} - \left[\frac{3}{2}\alpha t + \sqrt{\frac{9}{4}(\alpha t)^2 + 1} \right]^{-1/3} \right). \quad (45.59)$$

Por (45.57), temos

$$r = \frac{\mathfrak{p}}{2 \cos(\xi/2)^2} = \frac{\mathfrak{p}}{1 + \cos(\xi)}. \quad (45.60)$$

Porém, (45.39) para o caso $E = 0$ (ou seja, $e = 1$), informa que $r = \mathfrak{p}/(1 + \cos(\varphi))$ (novamente, adotamos $c' = 0$). Por comparação, concluímos que

$$\varphi = \xi, \quad (45.61)$$

o que nos informa que, no caso parabólico, a anomalia verdadeira coincide com a anomalia excêntrica.

Observemos agora que de (45.60), (45.59) e (45.61) extraímos

$$r(t) = \frac{\ell^2}{\mu\kappa} \frac{1}{1 + \cos \left(B^{-1} \left(\frac{2\mu\kappa^2}{\ell^3} t \right) \right)}. \quad (45.62)$$

Como $\cos(2 \arctan(\zeta)) = \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}$, podemos também escrever

$$r(t) = \frac{\mathfrak{p}}{2} (1 + \zeta(t)^2) = \frac{\ell^2}{2\mu\kappa} (1 + \zeta(t)^2), \quad (45.63)$$

com

$$\zeta(t) := \left[\frac{3}{2}\alpha t + \sqrt{\frac{9}{4}(\alpha t)^2 + 1} \right]^{1/3} - \left[\frac{3}{2}\alpha t + \sqrt{\frac{9}{4}(\alpha t)^2 + 1} \right]^{-1/3}. \quad (45.64)$$

Coerentemente com resultados anteriores (vide (45.35), página 2523), obtém-se disso que

$$r_{min} = \frac{\ell^2}{2\mu\kappa}.$$

Para finalizar, as coordenadas Cartesianas da trajetória $(x(t), y(t))$ podem ser obtidas da seguinte forma. De (45.38), (45.60) e (45.61) e do fato que $x = r \cos(\varphi)$,

$$x(t) = \mathfrak{p} - r(t) = \mathfrak{p} \frac{\cos(\xi(t))}{1 + \cos(\xi(t))} \quad \text{e} \quad y(t) = \sqrt{r(t)^2 - x(t)^2} = \mathfrak{p} \frac{\text{sen}(\xi(t))}{1 + \cos(\xi(t))},$$

com $\xi(t)$ dado em (45.59). Como uso de (45.63), podemos escrever também

$$x(t) = \frac{\mathfrak{p}}{2} (1 - \zeta(t)^2) \quad \text{e} \quad y(t) = \mathfrak{p} \zeta(t),$$

com $\zeta(t)$ dado em (45.64).

3. Caso hiperbólico, com $E > 0$.

O tratamento deste caso é similar ao do caso elíptico. Escrevemos a relação (45.42), página 2525, na forma

$$t = \sqrt{\frac{\mu}{2E}} \int \frac{r \, dr}{\sqrt{r^2 + \frac{\kappa}{E}r - \frac{\ell^2}{2\mu E}}} = \sqrt{\frac{\mu a}{\kappa}} \int \frac{r \, dr}{\sqrt{(r+a)^2 - a^2 e^2}}, \tag{45.65}$$

onde agora definimos

$$p := \frac{\ell^2}{\mu\kappa}, \quad e := \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\kappa^2}}, \quad a := \frac{p}{e^2 - 1} = \frac{\kappa}{2E} \quad e \quad b := \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} = \frac{\ell}{\sqrt{2\mu E}}. \tag{45.66}$$

Na integral em (45.65), fazamos agora a mudança de variáveis

$$r = a(e \cosh(\xi) - 1), \tag{45.67}$$

com ξ assumindo valores em \mathbb{R} . Temos

$$t = \sqrt{\frac{\mu a}{\kappa}} \int a(e \cosh(\xi) - 1) \, d\xi = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\kappa}} (e \sinh(\xi) - \xi). \tag{45.68}$$

Como antes, ξ é denominada *anomalia excêntrica*. A função de Kepler hiperbólica $K_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $K_h(\xi) := e \sinh(\xi) - \xi$ e como $K_h'(\xi) = e \cosh(\xi) - 1 > 0$ (pois $e > 1$ e $\cosh(\xi) > 1$), temos novamente que K_h é inversível, com a inversa sendo uma função transcendente. Assim, a equação de Kepler hiperbólica (45.68) tem por solução

$$\xi(t) = K_h^{-1} \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\mu a^3}} t \right). \tag{45.69}$$

e de (45.67) temos, portanto,

$$r(t) = a \left[e \cosh \left(K_h^{-1} \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\mu a^3}} t \right) \right) - 1 \right]. \tag{45.70}$$

A anomalia verdadeira $\varphi(t)$ nesse caso é dada novamente por (45.38), página 2524, com $r(t)$ dada em (45.70).

Para as coordenadas Cartesianas da trajetória, temos novamente de (45.39), página 2524, que $x = (p - r)/e$ e $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Portanto,

$$x(t) = a(e - \cosh(\xi(t))) \quad e \quad y(t) = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh(\xi(t)),$$

(verifique!) com $\xi(t)$ dado em (45.69).

45.3 Modos Normais de Oscilação

Ilustremos algumas das ideias do formalismo Lagrangiano com o exemplo fisicamente importante de sistemas definidos por Lagrangianos quadráticos e pelos chamados modos normais de oscilação.

• **Lagrangianos quadráticos e sua forma canônica**

Seja um sistema de n partículas pontuais cuja dinâmica é descrita pelo Lagrangiano quadrático

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} q_i q_j + \sum_{i=1}^n \ell_i q_i, \tag{45.71}$$

onde $q_i' \in \mathbb{R}$ para todo i e onde M_{ij} , K_{ij} e ℓ_i são constantes reais. Sem perda de generalidade podemos supor que $M_{ij} = M_{ji}$ e $K_{ij} = K_{ji}$ para todos i e j , pois a expressão para \mathcal{L} é simétrica nos \dot{q}_i 's e q_i 's.

O Lagrangiano (45.71) é usado na descrição de sistemas de osciladores acoplados por forças harmônicas. Um exemplo (pêndulo planar duplo em pequenas oscilações) é discutido no Exemplo 45.2, página 2535. Outro exemplo é discutido no Exercício E. 44.39, página 2505 (vide Figura 44.7, página 2506).

Defina-se os vetores-coluna q' e ℓ e as matrizes $n \times n$ reais simétricas M e K por

$$q' := \begin{pmatrix} q'_1 \\ \vdots \\ q'_n \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}, \quad K := \begin{pmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix}, \quad \ell := \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}.$$

Usando o produto escalar usual em \mathbb{R}^n , denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$, o Lagrangiano \mathcal{L} dado em (45.71) pode ser escrito como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle \dot{q}', M \dot{q}' \rangle_{\mathbb{R}} - \frac{1}{2} \langle q', K q' \rangle_{\mathbb{R}} + \langle \ell, q' \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Assumindo K inversível e definindo novas coordenadas $q := q' - K^{-1}\ell$, e escrevendo-se q como um vetor-coluna $q := \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$, o Lagrangiano \mathcal{L} assume a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, M \dot{q} \rangle_{\mathbb{R}} - \frac{1}{2} \langle q, K q \rangle_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2} \langle \ell, K^{-1} \ell \rangle_{\mathbb{R}}. \tag{45.72}$$

O último termo, sendo uma constante, será doravante omitido, pois não contribui nas equações de Euler-Lagrange.

E. 45.5 *Exercício.* Obtenha (45.72). *

De forma mais explícita (45.72) pode ser escrita (já sem o termo constante) como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} q_i q_j, \tag{45.73}$$

onde $q_i \in \mathbb{R}$ para todo i . As formas (45.72) ou (45.73) são denominadas *formas canônicas* do Lagrangiano quadrático (45.71).

As expressões acima talvez tornem clara a interpretação das novas variáveis q . O ponto de equilíbrio estático do sistema se dá quando $q = 0$, ou seja, quando $q' = K^{-1}\ell$. Assim, q_i mede o desvio de q'_i de sua posição de equilíbrio.

• **Solução na forma canônica**

No que segue suporemos que as matrizes M e K sejam matrizes inversíveis e, mais adiante, suporemos também que M e K sejam positivas e possuam inversas.

As equações de Euler-Lagrange associadas ao Lagrangiano (45.73) compõem o sistema de n equações diferenciais ordinárias acopladas

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n K_{ij} q_j(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

E. 45.6 *Exercício.* Verifique! *

É mais conveniente escrever essas equações em forma matricial: com as definições acima $M\ddot{q}(t) + Kq(t) = 0$, ou, equivalentemente,

$$\ddot{q}(t) + (M^{-1}K)q(t) = 0. \tag{45.74}$$

Vamos encontrar a solução dessa equação por um procedimento indireto. Vamos provisoriamente supor que exista uma matriz Ω_0 tal que $(\Omega_0)^2 = M^{-1}K$. Notemos que nem sempre existe uma tal matriz Ω_0 e na Seção 39.3.8, página 2083,

são apresentadas condições suficientes para tal, mas não necessitaremos disso aqui¹⁹²⁰. Sob a hipótese da existência de Ω_0 , a equação (45.74) assume a forma $\ddot{q}(t) + (\Omega_0)^2 q(t) = 0$. Como facilmente se verifica, a solução dessa equação com condições iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ é

$$q(t) = \cos(\Omega_0 t) q_0 + \Omega_0^{-1} \sin(\Omega_0 t) v_0, \tag{45.75}$$

onde $\cos(\Omega_0 t)$ e $\sin(\Omega_0 t)$ são matrizes definidas por via das séries de Taylor (convergentes!) das funções cosseno e seno:

$$\cos(\Omega_0 t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} \Omega_0^{2l}, \quad \sin(\Omega_0 t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} \Omega_0^{2l+1}. \tag{45.76}$$

Note-se que Ω_0 terá inversa se e somente se M e K o tiverem, o que estamos supondo.

E. 45.7 Exercício. Verifique que (45.75) é, de fato, a solução de (45.74) com as condições iniciais q_0 e v_0 . *

Observe-se que, como $(\Omega_0)^2 = M^{-1}K$, podemos escrever, inserindo em (45.75) as séries de (45.76),

$$q(t) = \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} (M^{-1}K)^l \right] q_0 + \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} (M^{-1}K)^l \right] v_0. \tag{45.77}$$

Ao chegarmos a esta expressão, podemos constatar que a mesma representa uma solução de (45.74) com as condições iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$, independente da existência ou não de Ω_0 . Assim, pelos bem conhecidos teoremas de existência e unicidade de soluções de problemas de valor inicial como (45.74), concluímos que (45.77) é a solução procurada.

E. 45.8 Exercício. Constatare diferenciando as séries em (45.77) termo a termo que (45.77) é, de fato, solução de (45.74) com as condições iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$. *

A solução (45.77) será reencontrada por outros meios em (45.88), página 2534.

Observemos de passagem que (45.77) representa a solução de (45.74) mesmo quando K não possui inversa. Por exemplo, para $n = 1$ e $K = 0$, a equação diferencial reduz-se a $\ddot{q}(t) = 0$ e, nesse caso, (45.77) fornece $q(t) = q_0 + v_0 t$ (pois só os termos com $l = 0$ sobrevivem), e essa é, de fato, a solução de $\ddot{q}(t) = 0$ para as condições iniciais dadas.

A solução obtida em (45.77), ainda que completa, não ilumina um aspecto importante do movimento de sistemas descritos pelo Lagrangiano (45.73): a presença de modos normais de oscilação quando ambas as matrizes M e K são positivas. Trata-se de novas coordenadas para descrever o sistema, em geral distintas das coordenadas q_i , cujas equações de movimento são desacopladas e descrevem oscilações harmônicas independentes umas das outras com certas frequências que são características do sistema, as chamadas frequências normais de oscilação. No que segue apresentaremos os modos normais e reobteremos com os mesmos a solução (45.77) com uma matriz Ω_0 específica.

• **Modos normais de oscilação**

Vamos aqui supor também que M e K sejam matrizes positivas (ou seja, que seus autovalores sejam todos positivos). Usando o produto escalar usual em \mathbb{R}^n , denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$, é claro que \mathcal{L} dada em (45.73) pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, M \dot{q} \rangle_{\mathbb{R}} - \frac{1}{2} \langle q, K q \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Defina-se $Q := M^{1/2} q$. Teremos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle \dot{Q}, \dot{Q} \rangle_{\mathbb{R}} - \frac{1}{2} \langle Q, B Q \rangle_{\mathbb{R}}, \tag{45.78}$$

onde $B := M^{-1/2} K M^{-1/2}$. A matriz B é simétrica e, portanto, é diagonalizável por uma matriz ortogonal O . Seja $D = O^T B O$ diagonal. Definindo-se

$$\Omega := O^T Q = O^T M^{1/2} q, \tag{45.79}$$

¹⁹Uma dessas condições suficientes exige que $\|\mathbb{1} - M^{-1}K\| \leq 1$ (vide Corolário 39.12, página 2084), o que podemos provisoriamente assumir.
²⁰Notemos, porém, que, seguindo outros caminhos, uma matriz Ω será encontrada adiante, vide (45.85) e (45.87), que satisfaz $\Omega^2 = M^{-1}K$ para quaisquer M e K . Para nosso argumento aqui, não precisamos dessa matriz.

obtemos,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle \dot{Q}, \dot{Q} \rangle_{\mathbb{R}} - \frac{1}{2} \langle Q, DQ \rangle_{\mathbb{R}} .$$

Isso pode ser escrito de forma mais explícita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{Q}_i)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i (Q_i)^2 , \tag{45.80}$$

onde escrevemos

$$Q := \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} , \quad D := \text{diag} (d_1, \dots, d_n) .$$

As equações de Euler-Lagrange para (45.80) são

$$\ddot{Q}_i(t) + d_i Q_i(t) = 0 , \quad i = 1, \dots, n . \tag{45.81}$$

Note-se que se trata de um sistema de n equações desacopladas.

As constantes d_i são autovalores da matriz D e, portanto, da matriz B . Como B é simétrica e positiva (pois K é positiva e, portanto, $B = M^{-1/2} K M^{-1/2} = (K^{1/2} M^{-1/2})^T (K^{1/2} M^{-1/2})$, que é positiva), temos $d_i > 0$ para todo i . As soluções de (45.81) são, portanto,

$$Q_i(t) = \alpha_i \cos(\sqrt{d_i}t) + \beta_i \sin(\sqrt{d_i}t) , \quad i = 1, \dots, n , \tag{45.82}$$

com α_i e β_i sendo constantes a serem determinadas pelas condições iniciais (por exemplo, $\alpha_i = Q_i(0)$ e $\beta_i = \dot{Q}_i(0)/\sqrt{d_i}$).

As coordenadas $Q_i, i = 1, \dots, n$, são denominadas *modos normais de vibração* do sistema de n partículas considerado. As quantidades $\sqrt{d_i}$ são denominadas *frequências normais de oscilação* do sistema considerado. Por serem autovalores da matriz B , os d_i 's são soluções do polinômio característico $\det(\lambda \mathbb{1} - B) = 0$. Assim,

$$0 = \det(\lambda \mathbb{1} - B) = \det(\lambda \mathbb{1} - M^{-1/2} K M^{-1/2}) = \det(\lambda M - K) \det(M^{-1}) .$$

Concluimos que os d_i 's são soluções da chamada *equação secular*, ou *equação característica*:

$$\det(\lambda M - K) = 0 .$$

Note-se que o lado esquerdo é um polinômio de ordem n em λ .

Em forma matricial, (45.82) fica

$$Q(t) = \cos(D^{1/2}t)\alpha + \sin(D^{1/2}t)\beta ,$$

com α e β sendo os vetores-coluna com componentes α_i e $\beta_i, i = 1, \dots, n$, respectivamente, com $\cos(D^{1/2}t) = \text{diag}(\cos(\sqrt{d_1}t), \dots, \cos(\sqrt{d_n}t))$ e com $\sin(D^{1/2}t) = \text{diag}(\sin(\sqrt{d_1}t), \dots, \sin(\sqrt{d_n}t))$.

Retornando às coordenadas originais, temos que $q(t) = M^{-1/2} O Q(t)$ e, portanto,

$$q(t) = M^{-1/2} O \cos(D^{1/2}t)\alpha + M^{-1/2} O \sin(D^{1/2}t)\beta . \tag{45.83}$$

Para cada componente, isso diz que

$$q_i(t) = \sum_{a=1}^n (M^{-1/2} O)_{ia} \cos(\sqrt{d_a}t)\alpha_a + \sum_{a=1}^n (M^{-1/2} O)_{ia} \sin(\sqrt{d_a}t)\beta_a . \tag{45.84}$$

Como se vê, para cada coordenada q_i o movimento é uma combinação linear de movimentos harmônicos independentes cada qual com uma frequência normal de oscilação.

Para as condições iniciais em $t = 0$, (45.84) significa que

$$q_i(0) = \sum_{a=1}^n (M^{-1/2}O)_{ia} \alpha_a \quad \text{e} \quad \dot{q}_i(0) = \sum_{a=1}^n (M^{-1/2}O)_{ia} \sqrt{d_a} \beta_a .$$

Em termos matriciais, isso fica

$$q_0 = M^{-1/2}O\alpha \quad \text{e} \quad v_0 = M^{-1/2}OD^{1/2}\beta .$$

Com isso, podemos reescrever (45.83) diretamente em termos das condições iniciais em $t = 0$:

$$\begin{aligned} q(t) &= M^{-1/2}O \cos(D^{1/2}t)O^{-1}M^{1/2}q_0 + M^{-1/2}O \sin(D^{1/2}t)D^{-1/2}O^{-1}M^{1/2}v_0 \\ &= M^{-1/2} \cos(B^{1/2}t)M^{1/2}q_0 + M^{-1/2}B^{-1/2} \sin(B^{1/2}t)M^{1/2}v_0 , \end{aligned}$$

Assim, definindo a matriz

$$\Omega := M^{-1/2}B^{1/2}M^{1/2} , \tag{45.85}$$

obtemos

$$q(t) = \cos(\Omega t)q_0 + \Omega^{-1} \sin(\Omega t)v_0 . \tag{45.86}$$

E. 45.9 *Exercício.* Demonstre a validade das igualdades acima. *

Observe-se que nas duas últimas expressões acima não mais ocorre a matriz ortogonal O . Observe-se também que Ω não é, em geral, simétrica e que as seguintes manipulações são ainda possíveis. Escrevendo-se $\cos(\Omega t)$ e $\sin(\Omega t)$ segundo suas definições em termos de séries de Taylor, temos,

$$\Omega^2 = M^{-1/2}BM^{1/2} = M^{-1}K \tag{45.87}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} q(t) &= \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} \Omega^{2l} \right] q_0 + \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} \Omega^{2l} \right] v_0 \\ &= \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} (M^{-1}K)^l \right] q_0 + \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} (M^{-1}K)^l \right] v_0 . \end{aligned} \tag{45.88}$$

Essa é a mesma solução obtida em (45.77), página 2532.

* * *

Para ilustrar os métodos e resultados acima apresentados estudamos com algum detalhe no Exercício E. 44.39, página 2505, o caso em que temos um sistema de duas massas acopladas por molas em movimento unidimensional. Veja também o Exemplo 45.2, página 2535, e os exercícios que lhe seguem.

• **Determinação dos modos normais pelo Teorema Espectral**

A matriz $B^{1/2}$ é simétrica e seus autovalores são $\sqrt{d_i}$, $i = 1, \dots, n$. Seja $\{\omega_1, \dots, \omega_r\}$, com $0 < r \leq n$ o conjunto de autovalores *distintos* de $B^{1/2}$. Pelo Teorema Espectral (Teorema 10.7, página 497), podemos escrever $B^{1/2} = \sum_{a=1}^r \omega_a E_a$, com E_a sendo os projetores espectrais, os quais são matrizes simétricas satisfazendo $E_a E_b = \delta_{a,b} E_a$ e $\sum_{a=1}^r E_a = \mathbb{1}_n$. Cada E_a projeta sobre o subespaço de autovetores de $B^{1/2}$ com autovalor ω_a e são dados explicitamente, segundo a Proposição 10.18, página 500 (vide (10.60)) por

$$E_j = \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{1}{\omega_j - \omega_k} \right) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^r (B^{1/2} - \omega_l \mathbb{1}) ,$$

para todo $j = 1, \dots, r$.

A matriz $\Omega := M^{-1/2}B^{1/2}M^{1/2}$ também possui uma representação espectral: definindo-se $F_a = M^{-1/2}E_aM^{1/2}$, $1 \leq a \leq r$, teremos igualmente $\Omega = \sum_{a=1}^r \omega_a F_a$, sendo que valem $F_a F_b = \delta_{a,b} F_a$ e $\sum_{a=1}^r F_a = \mathbb{1}_n$ (as matrizes F_a não são necessariamente simétricas) e são dadas explicitamente por

$$F_j = \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{1}{\omega_j - \omega_k} \right) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^r (\Omega - \omega_l \mathbb{1}), \tag{45.89}$$

para todo $j = 1, \dots, r$.

Com isso, e recordando que $\Omega^{-1} = \sum_{a=1}^r \omega_a^{-1} F_a$, a solução (45.86) fica

$$q(t) = \sum_{a=1}^r \left[\cos(\omega_a t) F_a q_0 + \frac{1}{\omega_a} \text{sen}(\omega_a t) F_a v_0 \right]. \tag{45.90}$$

Essa é a decomposição de $q(t)$ em seus modos normais, cada um deles sendo $\cos(\omega_a t) F_a q_0 + \frac{1}{\omega_a} \text{sen}(\omega_a t) F_a v_0$, $a = 1, \dots, r$. Se algum dos autovalores, digamos ω_a , for degenerado, os vetores $F_a q_0$ e $F_a v_0$ podem ainda ser decompostos em uma base de vetores no subespaço imagem de F_a .

De forma geral, o uso da decomposição espectral, resultando em (45.90), é o método mais rápido para a determinação dos modos normais de um sistema.

Vemos da relação (45.90) que uma forma de excitarmos apenas o j -ésimo modo normal seria escolher as condições tais que $v_0 = 0$ e $F_a q_0 = 0$ para $a \neq j$. Como $\sum_{a=1}^r F_a = \mathbb{1}_n$, isso equivale a ter-se

$$F_j q_0 = q_0 \quad \text{e} \quad F_a q_0 = 0, \quad a \neq j.$$

Isso significa que q_0 é um autovetor do projetor F_j com autovalor 1. Isso, por sua vez, significa que q_0 é um autovetor de Ω com autovalor ω_j , ou seja, $\Omega q_0 = \omega_j q_0$. Por simplicidade, vamos considerar o caso em que as frequências são não degeneradas (e, portanto, tenhamos $r = n$). A condição $\Omega q_0 = \omega_j q_0$ implica que $\Omega^2 q_0 = (\omega_j)^2 q_0 = d_j q_0$. Como $\Omega^2 \stackrel{(45.87)}{=} M^{-1}K$, concluímos que para o j -ésimo modo devemos ter

$$(d_j M - K) q_0 = 0. \tag{45.91}$$

Essa equação permite, a menos de uma constante multiplicativa, determinar as condições iniciais para que apenas o j -ésimo modo seja excitado. Veremos usos disso no Exercício E. 45.12, página 2536.

• **Os pêndulos planares simples e duplo como exemplo**

Exemplos ilustrativos são os pêndulos planares simples e duplo, que já abordamos anteriormente.

Exemplo 45.1 Considere-se o pêndulo simples planar, cujo Lagrangiano foi obtido no Exercício E. 44.23, página 2461. No regime de pequenas oscilações, quando ϕ é pequeno, obtemos, ao desprezar termos de ordem maior que 2 em (44.188), página 2461 (ou seja, com a aproximação $\cos(\phi) \approx 1 - \frac{1}{2}\phi^2$), o Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \ell^2 (\dot{\phi})^2 - \frac{m}{2} g \ell (\phi)^2 + m g \ell.$$

O termo $m g \ell$ é constante e pode ser negligenciado. A correspondente equação de Euler-Lagrange é

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell} \phi = 0$$

e corresponde à equação de um oscilador harmônico com frequência $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Há aqui apenas um modo normal: o próprio ϕ . \square

Exemplo 45.2 Considere-se agora o pêndulo duplo planar, cujo Lagrangiano foi obtido no Exercício E. 44.24, página 2461. No regime de pequenas oscilações, em que ϕ_1 e ϕ_2 são pequenos, assim como suas derivadas temporais, o Lagrangiano (44.189) transforma-se em

$$\mathcal{L} = \left(\frac{m_1 + m_2}{2} \right) \ell_1^2 (\dot{\phi}_1)^2 + \frac{m_2}{2} \ell_2^2 (\dot{\phi}_2)^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 - \frac{m_1 + m_2}{2} g \ell_1 (\phi_1)^2 - \frac{m_2}{2} g \ell_2 (\phi_2)^2. \tag{45.92}$$

Para obter (45.92), consideramos apenas termos no máximo quadráticos em $\phi_1, \phi_2, \dot{\phi}_1$ e $\dot{\phi}_2$ na aproximação de pequenas oscilações de (44.189) e negligenciamos termos constantes. As matrizes M e K nesse caso são:

$$M = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)\ell_1^2 & m_2\ell_1\ell_2 \\ m_2\ell_1\ell_2 & m_2\ell_2^2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)g\ell_1 & 0 \\ 0 & m_2g\ell_2 \end{pmatrix}.$$

Observe-se que M não é diagonal, mas $\det M > 0$, provando que M é inversível. Analogamente, é trivial que $\det K > 0$ e K tem inversa. \square

E. 45.10 *Exercício.* Mostre que M é positiva. Para tal, mostre que seus autovalores são

$$m_{\pm} := \frac{1}{2} \left(m_2\ell_2^2 + (m_1 + m_2)\ell_1^2 \pm \sqrt{(m_2\ell_2^2 + (m_1 + m_2)\ell_1^2)^2 - 4m_1m_2\ell_1^2\ell_2^2} \right),$$

ambos positivos pois $(m_2\ell_2^2 + (m_1 + m_2)\ell_1^2)^2 - 4m_1m_2\ell_1^2\ell_2^2 < (m_2\ell_2^2 + (m_1 + m_2)\ell_1^2)^2$. A positividade de K é evidente. Mostre que a decomposição espectral de M é

$$M = m_+M_+ + m_-M_-,$$

onde

$$M_+ = \frac{1}{m_+ - m_-} (M - m_- \mathbb{1}_2) \quad \text{e} \quad M_- = \frac{1}{m_- - m_+} (M - m_+ \mathbb{1}_2)$$

são os projetores espectrais de M . \star

E. 45.11 *Exercício.* Obtenha as equações de Euler-Lagrange correspondentes ao Lagrangiano (45.92). Obtenha os modos normais, e suas frequências de oscilação, correspondentes ao mesmo Lagrangiano. Constate que as frequências de oscilação dos modos normais são (de [248])

$$d_{\pm} = \frac{g}{2m_1\ell_1\ell_2} \left((m_1 + m_2)(\ell_1 + \ell_2) \pm \sqrt{\Delta} \right),$$

sendo

$$\begin{aligned} \Delta &= (m_1 + m_2) \left((m_1 + m_2)(\ell_1 + \ell_2)^2 - 4m_1\ell_1\ell_2 \right) \\ &= (m_1 + m_2) \left(m_1(\ell_1 - \ell_2)^2 + m_2(\ell_1 + \ell_2)^2 \right). \end{aligned}$$

Da segunda igualdade para Δ , acima, vê-se claramente que $\Delta > 0$ e, portanto, que $d_+ \neq d_-$. Da primeira, vê-se que d_+ e d_- são positivos, pois $\sqrt{\Delta} = \sqrt{(m_1 + m_2) \left((m_1 + m_2)(\ell_1 + \ell_2)^2 - 4m_1\ell_1\ell_2 \right)} < (m_1 + m_2)(\ell_1 + \ell_2)$. Assim, $0 < d_- < d_+$. \star

E. 45.12 *Exercício dirigido.* As expressões do caso geral dos Exercícios E. 45.10 e E. 45.11 são muito complexas para serem manipuladas sem auxílio de computação algébrica, por isso, vamos considerar, a título de ilustração, o caso particular em que $m_1 = m_2 \equiv m$ e $\ell_1 = \ell_2 \equiv \ell$ (massas iguais e hastes de igual comprimento). Teremos,

$$M = m\ell^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = mg\ell \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de m são

$$m_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} m\ell^2$$

e a decomposição espectral de M é $M = m_+M_+ + m_-M_-$, onde os projetores espectrais M_{\pm} são

$$\begin{aligned} M_+ &= \frac{1}{m_+ - m_-} (M - m_- \mathbb{1}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \\ M_- &= \frac{1}{m_- - m_+} (M - m_+ \mathbb{1}_2) = \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

É claro disso que $M^{\pm 1/2} = m_+^{\pm 1/2} M_+ + m_-^{\pm 1/2} M_-$. Verifique que

$$\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^{\pm 1/2} = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} \quad \text{e} \quad \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^{\pm 1/2} = \frac{\sqrt{5} \mp 1}{2}.$$

(Essas relações estão ligadas a propriedades elementares da chamada *razão áurea*, que já fez uma aparição nestas Notas na Seção 6.1.2, página 317). Usando essas relações, determine explicitamente as matrizes $M^{\pm 1/2}$. O resultado é

$$M^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{ml}} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M^{1/2} = \sqrt{ml} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determine explicitamente a matriz $B := M^{-1/2} K M^{-1/2}$. O resultado é

$$B = \frac{g}{\ell} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Determine a matriz ortogonal O que diagonaliza B : $D = O^T B O$. O resultado pode ser expresso como

$$O = \frac{1}{\sqrt{100 - 10\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 7 & 1 - 5\sqrt{2} \\ -1 + 5\sqrt{2} & 7 \end{pmatrix}.$$

Os elementos da diagonal de $D = \begin{pmatrix} d_- & 0 \\ 0 & d_+ \end{pmatrix}$ são

$$d_{\pm} = (2 \pm \sqrt{2}) \frac{g}{\ell}$$

e são o quadrado das frequências dos modos normais de oscilação. Os modos normais são dados por $\Omega = O^T M^{1/2} q$, com $q = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$. Determine explicitamente os modos normais Ω . O resultado final é que o modo Ω_- é proporcional a $\phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_2$ e o modo Ω_+ é proporcional a $\phi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_2$. As constantes de proporcionalidade são irrelevantes.

Dessa forma, se desejarmos excitar apenas o primeiro modo Ω_- (anulando Ω_+) devemos escolher como condições iniciais $\phi_2 = \sqrt{2} \phi_1$ (e velocidades angulares nulas) e se desejarmos excitar apenas o segundo Ω_+ (anulando Ω_-) modo devemos escolher como condições iniciais $\phi_2 = -\sqrt{2} \phi_1$ (e velocidades angulares nulas). Vide Figura 45.5, página 2538.

Podemos chegar às mesmas conclusões (talvez de forma mais simples) fazendo uso da relação (45.91), página 2535. Para excitarmos apenas o modo Ω_{\pm} uma possibilidade é termos as condições iniciais $v_0 = 0$ e $q_{0\pm}$, com

$$(d_{\pm} M - K) q_{0\pm} = 0, \quad \text{ou seja,} \quad mgl \begin{pmatrix} 2(2 \pm \sqrt{2}) - 2 & (2 \pm \sqrt{2}) \\ (2 \pm \sqrt{2}) & (2 \pm \sqrt{2}) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{0\pm}^1 \\ q_{0\pm}^2 \end{pmatrix} = 0, \quad (45.93)$$

onde escrevemos $q_{0\pm} = \begin{pmatrix} q_{0\pm}^1 \\ q_{0\pm}^2 \end{pmatrix}$. Assim,

$$(2 \pm 2\sqrt{2}) q_{0\pm}^1 + (2 \pm \sqrt{2}) q_{0\pm}^2 = 0 \quad (45.94)$$

(a outra relação é idêntica). Como $q_{0\pm}$ é indeterminado a menos de uma constante, interessa-nos apenas a razão $q_{0\pm}^2/q_{0\pm}^1$, que pode ser lida de (45.94) como sendo

$$\frac{q_{0\pm}^2}{q_{0\pm}^1} = -\frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2 \pm \sqrt{2}} = \mp \sqrt{2}.$$

Assim, para as condições iniciais dos dois modos temos $\phi_2 = \sqrt{2} \phi_1$ (modo $-$) e $\phi_2 = -\sqrt{2} \phi_1$ (modo $+$), como obtivemos acima. \star

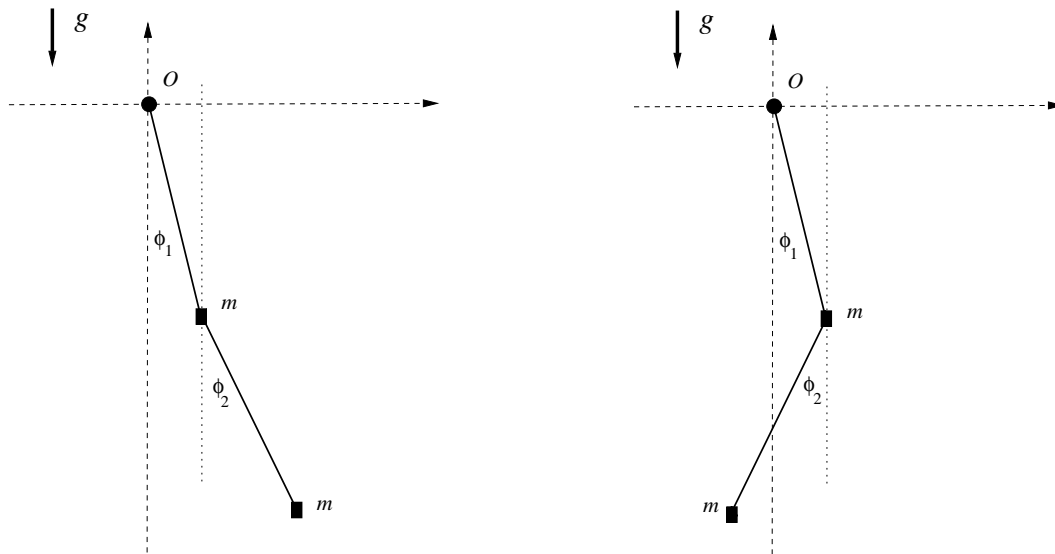


Figura 45.5: Esquema de um pêndulo duplo planar composto por duas hastes de igual comprimento e duas massas iguais. No lado esquerdo temos como condição inicial $\phi_2 = \sqrt{2}\phi_1$ e apenas o primeiro modo normal \mathcal{Q}_- é excitado, e passa a mover-se harmonicamente com frequência $\sqrt{d_-}$. No lado direito temos como condição inicial $\phi_2 = -\sqrt{2}\phi_1$ e apenas o segundo modo normal \mathcal{Q}_+ é excitado, e passa a mover-se harmonicamente com frequência $\sqrt{d_+}$.

45.3.1 Modos Normais e a Energia Mecânica

Apresentemos agora algumas considerações de grande significado físico sobre os modos normais. A energia mecânica do sistema definido pelo Lagrangiano original (45.72), página 2531, é, a menos de uma constante irrelevante,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, M \dot{q} \rangle_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2} \langle q, K q \rangle_{\mathbb{R}}. \tag{45.95}$$

Vamos escrevê-la em termos dos modos normais \mathcal{Q} . Usando, (45.79), temos $q = M^{-1/2} O \mathcal{Q}$ e, portanto,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathcal{Q}}, O^T M^{-1/2} M M^{-1/2} O \dot{\mathcal{Q}} \rangle_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2} \langle \mathcal{Q}, O^T M^{-1/2} K M^{-1/2} O \mathcal{Q} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Agora, $O^T M^{-1/2} M M^{-1/2} O = \mathbb{1}$, pois O é ortogonal. Além disso, $O^T M^{-1/2} K M^{-1/2} O = O^T B O = D$. Assim,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathcal{Q}}, \dot{\mathcal{Q}} \rangle_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2} \langle \mathcal{Q}, D \mathcal{Q} \rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left((\dot{Q}_i)^2 + d_i (Q_i)^2 \right).$$

Essa expressão tem uma interessantíssima interpretação. Como cada modo normal \mathcal{Q}_i satisfaz a equação (45.81), sua energia mecânica é justamente $\mathcal{E}_i := \frac{1}{2} \left((\dot{Q}_i)^2 + d_i (Q_i)^2 \right)$. É claro que, para cada i , trata-se de uma grandeza conservada, como se vê, por exemplo, pelas soluções (45.82). Assim, vemos que a energia mecânica total \mathcal{E} é a soma das energias mecânicas individuais dos modos normais, cada qual é individualmente conservada.

Essa observação vem ao encontro da ideia de que os modos normais são independentes uns dos outros, pois ela afirma que eles não trocam energia durante o movimento. Essa é uma característica um tanto surpreendente de sistemas de osciladores harmônicos acoplados, como os descritos no Lagrangiano original (45.72), página 2531: dentro deles ocorrem modos de oscilação desacoplados que não trocam energia entre si.

• Um breve comentário sobre o experimento computacional de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou

Caso fossem adicionados termos cúbicos ou quárticos ao Lagrangiano (45.72), as equações de Euler-Lagrange (45.81) seriam modificadas, passando a incluir termos não lineares. Um exemplo, seriam as equações

$$\ddot{Q}_i(t) + d_i Q_i(t) = \sum_{j, k=1}^n T_{ijk} Q_j(t) Q_k(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

com constantes T_{ijk} . Em tais casos, os modos normais podem trocar energia uns com os outros. Mesmo aqui, porém, há uma surpresa. Em um experimento computacional realizado na alvorada da computação eletrônica, em 1953 (com o computador MANIAC I, de Los Alamos), Fermi²¹, Pasta²², Ulam²³ e Tsingou²⁴ [126] testaram se a energia de um dos modos normais de uma cadeia unidimensional de osciladores de igual massa seria distribuída uniformemente entre os demais modos normais caso termos não lineares fossem considerados nas correspondentes equações de movimento. Esse era o comportamento esperado de sistemas não lineares, sendo essa hipótese conhecida como *princípio de equipartição de energia*, na Mecânica Estatística. Para surpresa de seus autores, esse comportamento não foi observado, dentro dos limites temporais e de precisão computacionalmente permitidos, com a energia de um modo excitado sendo transferida aos demais, mas retornando de forma quase-periódica ao modo original. Vide Figura 45.6, página 2540. As cadeias unidimensionais de osciladores estudadas em [126] tinham 32 ou 64 massas iguais e tinham os extremos fixados.

Vale observar que experimentos reais com osciladores sempre sofrem de perdas de energia por atrito, dificultando, ou mesmo impedindo, a observação de comportamentos de longo tempo, como a termalização dos modos de oscilação. Tendo trabalhado durante a Segunda Guerra Mundial no projeto Manhattan, no Laboratório de Los Alamos, Fermi tinha acesso a seus computadores e viu neles uma oportunidade de fazer Ciência não aplicada a usos militares, fim esse a que essas máquinas tinham sido majoritariamente destinadas até então. Simulações computacionais de sistemas mecânicos permitem contornar efeitos indesejados, como efeitos de atrito, permitindo que descobertas sejam realizadas mesmo quando a análise matemática dos mesmos sistemas é por demais complexa.

Nas obras coligidas de Fermi, citadas em [126], Ulam escreve:

“Fermi expressed often the belief that future fundamental theories in physics may involve non-linear operators and equations, and that it would be useful to attempt practice in the mathematics needed for the understanding of nonlinear systems. The plan was then to start with the possibly simplest such physical model and to study the results of the calculation of its long-time behavior.... The motivation then was to observe the rates of mixing and thermalization with the hope that the computational results would provide hints for a future theory. One could venture a guess that one motive in the selection of problems could be traced to Fermi’s early interest in the ergodic theory”.

O trabalho de Fermi, Pasta, Ulam e Tsingou [126] foi pioneiro na investigação com base em computadores de sistemas de interesse físico e matemático, abrindo caminho para o estudo de sistemas não lineares, caóticos e inspirando diversos desenvolvimentos teóricos e matemáticos, como os da teoria dos sistemas dinâmicos, em geral, e a teoria dos sólitons, em particular.

Diversos experimentos computacionais posteriores, com melhores recursos computacionais, confirmaram o efeito de recorrência da energia, mesmo para intervalos de tempos extremamente longos (vide, *e.g.*, [426]), desde que a energia total do sistema esteja abaixo de um certo limiar. Se a energia estiver acima de um segundo limiar, mais alto, a evolução do sistema será caótica e uma rápida transição para um regime de equipartição de energia entre os modos será observada²⁵. Além disso, verificou-se que, com o aumento do número de pontos materiais na cadeia, o surgimento do regime caótico e da equipartição de energia se manifesta com um menor limiar de energia, e de modo que, no limite em que o número de pontos materiais vai ao infinito, a equipartição de energia ocorre com qualquer energia inicial. Para uma referência, vide [327].

Até o presente, um entendimento teórico completo desses fenômenos não está disponível, mas acredita-se que o princípio de equipartição de energia não seja válido nos sistemas considerados, em baixas energias, devido à presença de

²¹ Enrico Fermi (1901–1954).

²² John Robert Pasta (1918–1981).

²³ Stanisław Marcin Ulam (1909–1984).

²⁴ Mary Tsingou (1928–). Em um possível caso de misoginia, o nome de Mary Tsingou não fora citado dentre os autores da publicação original [126] que, no entanto, mencionava claramente: *“Report written by Fermi, Pasta and Ulam. Work done by Fermi, Pasta, Ulam and Tsingou”*. Sua contribuição crítica para a descoberta foi apontada posteriormente. Esse lapso não teria sido completamente por culpa dos demais autores (Fermi, por exemplo, falecera um ano antes da publicação), mas em parte devido a regras internas do Laboratório de Los Alamos, onde o *report* foi publicado, que distinguiam entre autores do trabalho (FPU+Tsingou) que aqueles que efetivamente redigiram o texto final (FPU). Vide [95] e [157]. Há atualmente em curso um movimento de recuperar o nome e a contribuição de Tsingou, juntando-o sempre aos demais autores em referência a [126] e aos problemas de pesquisa gerados por aquele trabalho. Tsingou continuou realizando trabalhos sobre os modelos de [126], notadamente [426], de 1972, (com o sobrenome de casada, Menzel), estendendo os resultados a intervalos muito mais longos de tempo.

²⁵ Os regimes estudados nos experimentos numéricos de [126] correspondem à primeira situação, a de baixa energia. Um prenúncio do aparecimento de equipartição de energia para altas energias em sistemas como os de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou foi apresentado em [454]. Segundo os autores *“A further increase in the nonlinearity results in a rapid cascade of energy across the entire modal energy spectrum. For the times considered, however, we fail to attain complete equipartition of the spectral energies”*.

sólitons e à sua integrabilidade. O que se passa com maiores energias ainda escapa à análise matemática.

O experimento de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou é ainda repetido com aperfeiçoamentos e estudado teoricamente, tendo assumido um papel importante na teoria dos sistemas dinâmicos, no estudo de sólitons, no estudo de equações diferenciais parciais e sistemas integráveis, em estudos de ergodicidade de sistemas mecânicos, assim como no estudo de sistemas caóticos. Destacamos também que modelos como os analisados por Fermi, Pasta, Ulam e Tsingou são relevantes para o entendimento de processos de condução de calor em materiais cristalinos, em particular, para o entendimento da chamada *Lei de Fourier*²⁶, que até o presente não foi demonstrada a partir de primeiros princípios, permanecendo uma lei empírica. Esse problema da dedução teórica da Lei de Fourier é um dos grandes problemas abertos da Física.

Para um importante avanço recente no problema de termalização dos modos no experimento de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou, vide [314]. Para um texto de revisão sobre o experimento de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou, vide [41]. Para um texto mais elementar e divulgativo, vide [333]. A referência [327] contém também uma revisão de resultados, assim como resultados originais. Para um texto sobre o *status* teórico e matemático do problema, recomendamos [139].

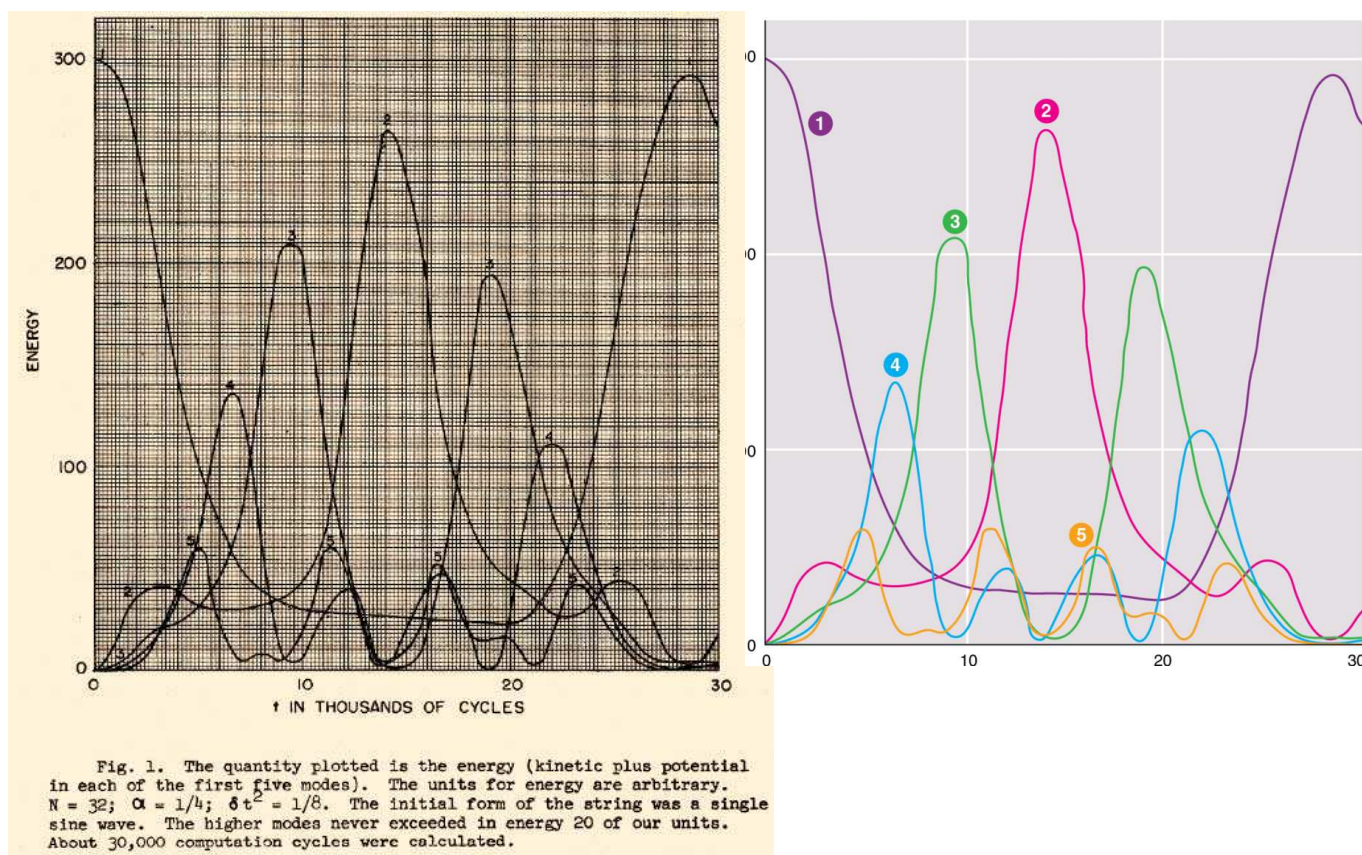


Figura 45.6: **Esquerda:** reprodução de gráfico do artigo original de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou [126], exibindo a evolução com o tempo da energia mecânica dos cinco primeiros modos de oscilação da cadeia unidimensional não linear considerada. O eixo horizontal é o tempo e o vertical a energia. O sistema inicia com toda a energia no primeiro modo, que é, em seguida, distribuída entre os demais modos, mas retorna quase inteiramente ao primeiro após um certo tempo. **Direita:** reprodução moderna dos mesmos resultados, extraída de [333].

45.4 Ângulos de Euler na Mecânica de Corpos Rígidos

Os ângulos de Euler, estudados na Seção 21.4.2.2, página 1085, prestam-se à descrição de matrizes de rotação e também, consequentemente, ao tratamento de alguns problemas envolvendo corpos rígidos. Vamos agora, sob a luz de um exemplo,

²⁶Vide Seção 42.1.1, página 2263. Em particular, vide (42.1), página 2264.

descrever como isso se dá. Ainda no contexto de nosso tratamento de corpos rígidos (vide Seção 44.4, página 2434), seja \mathbf{k} um sistema de referência inercial e \mathbf{K} o sistema de referência fixo no corpo rígido, com origem em seu centro de massa, sendo $R_t \in \text{SO}(3)$ definido como antes.

Usando a descrição de rotações em termos de ângulos de Euler, escrevamos $R_t = R_3(\varphi_t)R_1(\theta_t)R_3(\psi_t)$. Assim, $R_t^{-1} = R_3(-\psi_t)R_1(-\theta_t)R_3(-\varphi_t)$ e

$$\dot{R}_t = \dot{\varphi}_t J_3 R_3(\varphi_t) R_1(\theta_t) R_3(\psi_t) + \dot{\theta}_t R_3(\varphi_t) R_1(\theta_t) J_1 R_3(\psi_t) + \dot{\psi}_t R_3(\varphi_t) R_1(\theta_t) R_3(\psi_t) J_3 .$$

Como $\vec{\Omega}_t \cdot \vec{J} = R_t^{-1} \dot{R}_t$, podemos escrever o vetor velocidade angular intrínseca em termos dos três ângulos de Euler φ_t , θ_t e ψ_t e de suas derivadas. Fazendo uso repetido das relações (21.121), página 1084, temos

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_t \cdot \vec{J} = R_t^{-1} \dot{R}_t &= \dot{\varphi}_t R_3(-\psi_t) \left(R_1(-\theta_t) J_3 R_1(\theta_t) \right) R_3(\psi_t) + \dot{\theta}_t \left(R_3(-\psi_t) J_1 R_3(\psi_t) \right) + \dot{\psi}_t J_3 \\ &= \dot{\varphi}_t \left(\cos(\theta_t) J_3 + \text{sen}(\theta_t) R_3(-\psi_t) J_2 R_3(\psi_t) \right) + \dot{\theta}_t \left(\cos(\psi_t) J_1 - \text{sen}(\psi_t) J_2 \right) + \dot{\psi}_t J_3 \\ &= \dot{\varphi}_t \left(\cos(\theta_t) J_3 + \text{sen}(\theta_t) (\cos(\psi_t) J_2 + \text{sen}(\psi_t) J_1) \right) + \dot{\theta}_t \left(\cos(\psi_t) J_1 - \text{sen}(\psi_t) J_2 \right) + \dot{\psi}_t J_3 \\ &= \left(\dot{\varphi}_t \text{sen}(\theta_t) \text{sen}(\psi_t) + \dot{\theta}_t \cos(\psi_t) \right) J_1 + \left(\dot{\varphi}_t \text{sen}(\theta_t) \cos(\psi_t) - \dot{\theta}_t \text{sen}(\psi_t) \right) J_2 \\ &\quad + \left(\dot{\varphi}_t \cos(\theta_t) + \dot{\psi}_t \right) J_3 . \end{aligned} \tag{45.96}$$

Assim, identificamos

$$(\vec{\Omega}_t)_1 = \dot{\varphi}_t \text{sen}(\theta_t) \text{sen}(\psi_t) + \dot{\theta}_t \cos(\psi_t) , \tag{45.97}$$

$$(\vec{\Omega}_t)_2 = \dot{\varphi}_t \text{sen}(\theta_t) \cos(\psi_t) - \dot{\theta}_t \text{sen}(\psi_t) , \tag{45.98}$$

$$(\vec{\Omega}_t)_3 = \dot{\varphi}_t \cos(\theta_t) + \dot{\psi}_t . \tag{45.99}$$

E. 45.13 *Exercício.* Usando (21.121), página 1084, verifique os passos que conduzem a (45.96). ✱

Por conveniência, escolheremos doravante os eixos de \mathbf{K} como sendo eixos principais do corpo rígido, de sorte que o tensor de momento de inércia I seja diagonal. Com isso, podemos expressar a energia cinética rotacional de um corpo rígido dada em (44.113) em termos dos ângulos de Euler e suas derivadas temporais. Por exemplo, a energia cinética de rotação de um pião esférico (para o qual vale $I_1 = I_2 = I_3$) é $e_{cr}(t) = \frac{I}{2} (\dot{\varphi}_t^2 + \dot{\theta}_t^2 + \dot{\psi}_t^2 + 2\dot{\varphi}_t \dot{\psi}_t \cos(\theta_t))$.

No caso de um pião simétrico, ou seja, para $I_1 = I_2 \neq I_3$, a energia cinética de rotação é dada, usando-se (44.113) e os ângulos de Euler, por

$$e_{cr}(t) = \frac{I_1}{2} \left(\dot{\varphi}_t^2 \text{sen}(\theta_t)^2 + \dot{\theta}_t^2 \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\varphi}_t \cos(\theta_t) + \dot{\psi}_t \right)^2 .$$

É importante notar que o lado direito independe dos ângulos φ_t e ψ_t , apenas de suas derivadas.

E. 45.14 *Exercício.* Verifique as expressões acima para e_{cr} . ✱

45.4.1 Usos dos Ângulos de Euler. O Pião de Lagrange

• Movimento com um ponto fixo. O pião de Lagrange

Vamos agora tratar com algum detalhe de um problema cuja solução exhibe características também encontradas em outros sistemas congêneres. Trata-se de um problema de Mecânica em cujo tratamento o uso dos ângulos de Euler é de real utilidade. Consideremos um *Pião de Lagrange*, um pião simétrico colocado sob a ação de um campo gravitacional

uniforme, tendo um dos pontos de seu eixo de simetria fixo. Esse ponto fixo, em torno do qual o pião pode girar livremente, é denominado *pivô*. Adotaremos o eixo 3 como o eixo de simetria do pião e adotaremos a origem do sistema de coordenadas inercial coincidente com o pivô.

E. 45.15 *Exercício.* Mostre que o Lagrangiano desse sistema mecânico, expresso em termos de ângulos de Euler, é

$$\mathcal{L} = \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}_t^2 \text{sen}(\theta_t)^2 + \dot{\theta}_t^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi}_t \cos(\theta_t) + \dot{\psi}_t)^2 - Mgl \cos(\theta_t), \quad (45.100)$$

onde l é a distância do centro de massa do pião ao pivô e onde I_1 e I_3 são os momentos de inércia principais definidos em relação ao pivô. *Sugestão: inspire-se em (44.114) e em (44.128), páginas 2437 e 2440, respectivamente.* Obtenha as correspondentes equações de Euler-Lagrange e constate que

$$p_\psi := I_3 (\dot{\psi}_t + \dot{\varphi}_t \cos(\theta_t)) \quad (45.101)$$

e que

$$p_\varphi := I_1 \dot{\varphi}_t \text{sen}(\theta_t)^2 + I_3 \cos(\theta_t) (\dot{\psi}_t + \dot{\varphi}_t \cos(\theta_t)), \quad (45.102)$$

ou seja,

$$p_\varphi = I_1 \dot{\varphi}_t \text{sen}(\theta_t)^2 + p_\psi \cos(\theta_t) \quad (45.103)$$

são constantes de movimento. Isso se deve ao fato que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$ para o Lagrangiano acima. Na Mecânica Clássica, coordenadas q com essa propriedade, ou seja, tais que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$, são denominadas *coordenadas cíclicas* e, por força das equações de Euler-Lagrange, seus momentos generalizados $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ são constantes de movimento. Os ângulos de Euler φ e ψ são, portanto, coordenadas cíclicas no problema do pião de Lagrange.

Mostre que a energia mecânica (cinética mais potencial) do pião de Lagrange é dada por

$$e_m = \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}_t^2 \text{sen}(\theta_t)^2 + \dot{\theta}_t^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi}_t \cos(\theta_t) + \dot{\psi}_t)^2 + Mgl \cos(\theta_t)$$

e é também uma constante de movimento. Escrevendo

$$\dot{\varphi}_t = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos(\theta_t)}{I_1 (\text{sen} \theta_t)^2} \quad (45.104)$$

e definindo

$$e' := e_m - \frac{p_\psi^2}{2I_3},$$

que também é, obviamente, uma constante de movimento, mostre que

$$e' = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}_t^2 + \tilde{V}(\theta_t), \quad (45.105)$$

onde

$$\tilde{V}(\theta) = Mgl \cos(\theta) + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos(\theta))^2}{2I_1 (\text{sen} \theta)^2}. \quad (45.106)$$

Obtenha disso que

$$\int_{\theta_0}^{\theta_t} \frac{1}{\sqrt{e' - \tilde{V}(\theta)}} d\theta = \sqrt{\frac{2}{I_1}} t. \quad (45.107)$$

Essa expressão fornece uma solução formal ao nosso problema, como passaremos a descrever. ✦

A relação (45.107) permite obter θ_t em função de t , da seguinte forma. Se $F(\theta)$ for uma primitiva de $\frac{1}{\sqrt{e' - \tilde{V}(\theta)}}$, então (45.107) fica $F(\theta_t) - F(\theta_0) = \sqrt{\frac{2}{I_1}} t$, o que permite escrever

$$\theta_t = F^{-1} \left(\sqrt{\frac{2}{I_1}} t + F(\theta_0) \right),$$

onde F^{-1} seria a função inversa da F . Como descreveremos simplifcadamente adiante, a função inversa F^{-1} pode ser escrita em termos das chamadas *funções elípticas de Weierstrass*²⁷ (vide e.g., [445], [191] ou [60]).

²⁷Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897).

Uma vez obtida a função θ_t , a relação (45.103) permite obter φ_t integrando-se ambos os lados da igualdade

$$\dot{\varphi}_t = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos(\theta_t)}{I_1(1 - \cos^2(\theta_t))}. \tag{45.108}$$

Verifique! Por fim, a relação (45.101) permite obter ψ_t integrando-se ambos os lados da igualdade $\dot{\psi}_t = p_\psi/I_3 - \dot{\varphi}_t \cos(\theta_t)$ que, usando (45.108), também pode ser escrita apenas em termos de $\cos \theta_t$ como

$$\dot{\psi}_t = \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{p_\varphi - p_\psi \cos(\theta_t)}{I_1(1 - \cos^2(\theta_t))} \cos(\theta_t). \tag{45.109}$$

Verifique!

Os comentários postos acima foram feitos para exibir a factibilidade da resolução das equações de movimento. Porém, o cálculo “explícito” do lado esquerdo de (45.107) (e a inversão da função assim obtida) e, especialmente, a integração de (45.108) e de (45.109) são um tanto complicados, mesmo se escritas em termos de funções especiais, como as funções elípticas de Weierstrass (vide abaixo). Modernamente, é por vezes mais útil em situações concretas resolver essas equações usando-se métodos de integração numérica, tema no qual não tocaremos aqui. No entanto, como comentaremos adiante, informações qualitativas relevantes sobre o movimento podem ser inferidas analisando-se propriedades gerais das equações acima.

• **Obtendo θ_t . As funções elípticas de Weierstrass. O movimento de nutação**

Para aprofundar um pouco mais o tratamento da integral do lado esquerdo de (45.107), façamos nela a mudança de variáveis $u = \cos \theta$. Após algumas contas tediosas mas elementares, a mesma fica

$$-\frac{2}{\sqrt{Mgl}} \int_{u_0}^{u_t} \frac{du}{\sqrt{4(u - e'')(u^2 - 1) + (p'_\varphi - p'_\psi u)^2}},$$

onde $u_t := \cos \theta_t$, $e'' := e'/(Mgl)$, $p'_\varphi := 2p_\varphi/\sqrt{Mgl}$ e $p'_\psi := 2p_\psi/\sqrt{Mgl}$. Verifique! O termo dentro da raiz quadrada é um polinômio de grau 3 na variável u e o escrevemos como $p(u) = 4u^3 + a_2u^2 + a_1u + a_0$. As constantes a_0 , a_1 e a_2 podem facilmente ser escritas explicitamente em termos de e_m , p_φ e p_ψ , mas pouco nos interessa fazê-lo aqui. (Faça-o!). Fazendo a mudança de variáveis $s = u + \alpha$ com $\alpha = a_2/12$, obtemos $p(u) = p(s - \alpha) = 4s^3 - c_1s - c_0$, para novas constantes c_0 e c_1 .

E. 45.16 Exercício. Obtenha as constantes c_0 e c_1 em termos das constantes de movimento e_m , p_φ e p_ψ . ✱

O ponto de interesse reside no fato que, com as escolhas acima, eliminou-se convenientemente o termo s^2 . Com isso, nossa integral fica

$$-\frac{2}{\sqrt{Mgl}} \int_{u_0+\alpha}^{u_t+\alpha} \frac{du}{\sqrt{4s^3 - c_1s - c_0}}. \tag{45.110}$$

Evitando entrar em detalhes, como em questões relacionadas a domínios de definição, a integral acima pode ser escrita em termos da chamada *função elíptica de Weierstrass* (vide e.g., [445], [191] ou [60]), denotada tradicionalmente pelo símbolo \wp , e que satisfaz

$$\wp^{-1}(x) = \int_x^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - c_1s - c_0}}, \quad \text{ou seja,} \quad y = \int_{\wp(y)}^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - c_1s - c_0}}. \tag{45.111}$$

Naturalmente, a função $\wp(x) \equiv \wp(x; c_0, c_1)$ depende das constantes c_0 e c_1 , mas essa dependência é costumeiramente omitida da notação. Não entraremos em detalhes sobre a definição das funções elípticas de Weierstrass e comentamos apenas que elas são riquíssimas em propriedades, especialmente quando estendidas ao plano complexo. Por exemplo, elas são duplamente periódicas²⁸ em \mathbb{C} e, portanto, são periódicas em \mathbb{R} , ainda que não sejam necessariamente limitadas. As

²⁸A seguinte expressão é frequentemente tomada como definição das funções elípticas de Weierstrass no plano complexo:

$$\wp(z) \equiv \wp(z, \omega_1, \omega_2) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \left[\frac{1}{(z + m\omega_1 + n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right],$$

constantes c_0 e c_1 são denominadas *invariantes elípticos* e estão relacionadas aos dois períodos de \wp em \mathbb{C} . Para mais detalhes, vide [445], [11], [340], [202], [191] ou [60].

Retomando (45.110) e (45.107), temos que $\wp^{-1}(\cos(\theta_t) + \alpha) - \wp^{-1}(\cos(\theta_0) + \alpha) = t/\tau$, onde τ é a constante $\tau := \sqrt{\frac{2I_1}{Mgt}}$ e, assim,

$$\theta_t = \arccos \left[\wp \left(\frac{t}{\tau} + d_0 \right) - \alpha \right], \tag{45.112}$$

onde $d_0 := \wp^{-1}(\cos(\theta_0) + \alpha)$. Como \wp é uma função periódica de período T em \mathbb{R} , vemos que θ_t também é periódica de período τT . Comentamos que τ tem dimensão de tempo, enquanto que T é uma grandeza adimensional e que depende das constantes c_0 e c_1 que definem \wp . Esse movimento oscilatório periódico do ângulo de Euler θ_t é denominado *nutação*.

• **Obtendo φ_t e ψ_t . Os movimentos de precessão e rotação intrínseca**

Apresentemos agora expressões para φ_t e ψ_t em termos da função elíptica de Weierstrass para em seguida analisarmos qualitativamente os resultados obtidos.

E. 45.17 Exercício. De (45.108) e (45.109) obtenha:

$$\dot{\varphi}_t = \frac{p_\varphi - p_\psi [\wp(\frac{t}{\tau} + d_0) - \alpha]}{I_1 (1 - [\wp(\frac{t}{\tau} + d_0) - \alpha]^2)} \quad \text{e} \quad \dot{\psi}_t = \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{(p_\varphi - p_\psi [\wp(\frac{t}{\tau} + d_0) - \alpha]) [\wp(\frac{t}{\tau} + d_0) - \alpha]}{I_1 (1 - [\wp(\frac{t}{\tau} + d_0) - \alpha]^2)}, \tag{45.113}$$

assim como

$$\varphi_t = \varphi_0 + \frac{\tau}{I_1} \int_{d_0}^{t/\tau + d_0} \frac{p_\varphi - p_\psi [\wp(t') - \alpha]}{1 - [\wp(t') - \alpha]^2} dt', \tag{45.114}$$

$$\psi_t = \psi_0 + \frac{p_\psi}{I_3} t - \frac{\tau}{I_1} \int_{d_0}^{t/\tau + d_0} \frac{p_\varphi - p_\psi [\wp(t') - \alpha]}{1 - [\wp(t') - \alpha]^2} [\wp(t') - \alpha] dt'. \tag{45.115}$$

Com uso dessas expressões, de (45.108), de (45.109) e de (45.112) podemos em princípio obter as componentes de Ω_t dadas em (45.97)–(45.99), mas as expressões assim obtidas são deveras complexas, mais ainda que as acima, e de pouco uso direto. ✱

O movimento associado à variação de φ_t é denominado *precessão* e o associado à variação de ψ_t é denominado *rotação intrínseca* em torno do eixo de simetria do pião.

• **Primeiras considerações qualitativas sobre o movimento do pião de Lagrange**

Façamos agora, na medida do possível, alguns comentários gerais sobre o comportamento qualitativo das soluções obtidas acima. Vamos denotar por $\Phi_{t'}$ e $\Psi_{t'}$ os integrandos de (45.114) e de (45.115), respectivamente:

$$\Phi_{t'} := \frac{p_\varphi - p_\psi [\wp(t') - \alpha]}{1 - [\wp(t') - \alpha]^2} \quad \text{e} \quad \Psi_{t'} := \frac{p_\varphi - p_\psi [\wp(t') - \alpha]}{1 - [\wp(t') - \alpha]^2} [\wp(t') - \alpha].$$

Como \wp é uma função periódica, de período T em \mathbb{R} , ambas as funções $\Phi_{t'}$ e $\Psi_{t'}$ são também periódicas de período T e, portanto, podemos formalmente expandi-las em séries de Fourier (vide Seção 36.4.2, página 1828):

$$\Phi_{t'} = \frac{\widehat{\Phi}_0}{\sqrt{T}} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\widehat{\Phi}_k}{\sqrt{T}} e^{i2\pi kt'/T} \quad \text{e} \quad \Psi_{t'} = \frac{\widehat{\Psi}_0}{\sqrt{T}} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\widehat{\Psi}_k}{\sqrt{T}} e^{i2\pi kt'/T}.$$

onde ω_1 e $\omega_2 \in \mathbb{C}$ são por convenção tais que ω_2/ω_1 tem parte imaginária positiva (o que, em particular, implica que $|m\omega_1 + n\omega_2|$ nunca se anula para $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, nem torna-se arbitrariamente pequena). Essa definição origina-se dos trabalhos do próprio Weierstrass. É elementar constatar que $\wp(z) = \wp(z + m\omega_1 + n\omega_2)$ para todos $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ (daí dizer-se que \wp é duplamente periódica em \mathbb{C}). É também fácil ver que soma acima é absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$, onde $\Lambda := \{m\omega_1 + n\omega_2, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$, sendo, portanto, analítica no domínio $\mathbb{C} \setminus \Lambda$. Nos pontos de Λ a função $\wp(z)$ exhibe polos duplos. As constantes ω_1 e ω_2 estão relacionadas às constantes c_0 e c_0 da representação (45.111).

Com isso, (45.114) e (45.115) se escrevem, respectivamente, como

$$\varphi_t = \varphi_0 + \left(\frac{\widehat{\Phi}_0}{I_1 \sqrt{T}} \right) t + L_\varphi(t), \tag{45.116}$$

$$\psi_t = \psi_0 + \left(\frac{p_\psi}{I_3} - \frac{\widehat{\Psi}_0}{I_1 \sqrt{T}} \right) t + L_\psi(t), \tag{45.117}$$

onde L_φ e L_ψ são as funções periódicas de período $T\tau$ dadas por

$$L_\varphi(t) := \frac{\sqrt{T} \tau}{4\pi I_1} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{\widehat{\Phi}_k e^{i2\pi k d_0/T}}{k} \right) \left(e^{i2\pi k t/(T\tau)} - 1 \right),$$

$$L_\psi(t) := -\frac{\sqrt{T} \tau}{4\pi I_1} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{\widehat{\Psi}_k e^{i2\pi k d_0/T}}{k} \right) \left(e^{i2\pi k t/(T\tau)} - 1 \right).$$

E. 45.18 *Exercício.* Verifique! ✱

Vemos de (45.116) e (45.117) que os ângulos de Euler φ_t e ψ_t crescem em média linearmente com t com velocidades angulares médias

$$w_\varphi := \left(\frac{\widehat{\Phi}_0}{I_1 \sqrt{T}} \right) \quad \text{e} \quad w_\psi := \left(\frac{p_\psi}{I_3} - \frac{\widehat{\Psi}_0}{I_1 \sqrt{T}} \right), \tag{45.118}$$

respectivamente. A esse movimento médio sobrepõem-se oscilações de período $T\tau$ definidas pelas funções L_φ e L_ψ , respectivamente. Como vimos, o movimento de nutação tem a mesma frequência.

O descrito crescimento linear do ângulo de Euler φ_t é um movimento denominado *precessão azimutal* médio, ou simplesmente *precessão média*. O movimento descrito pelo ângulo de Euler ψ_t representa a rotação (intrínseca) instantânea do pião em torno de seu eixo de simetria. Com essa nomenclatura podemos dizer que w_φ é a velocidade angular média de precessão do pião e w_ψ é a velocidade angular média da rotação intrínseca do pião em torno de seu eixo de simetria. Sobre as velocidades angulares médias expressas em (45.118) é relevante observar, da teoria das séries de Fourier (vide (36.59), página 1828), que

$$\frac{\widehat{\Phi}_0}{\sqrt{T}} = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_{t'} dt' \quad \text{e que} \quad \frac{\widehat{\Psi}_0}{\sqrt{T}} = \frac{1}{T} \int_0^T \Psi_{t'} dt',$$

que são os valores médios de $\Phi_{t'}$ e $\Psi_{t'}$, respectivamente, em um intervalo de largura T , o período das mesmas.

As funções θ_t , L_φ e L_ψ são periódicas de mesmo período $T\tau$. No entanto, o movimento do pião só será periódico no caso de os períodos de precessão e rotação intrínseca médios, $2\pi/w_\varphi$ e $2\pi/w_\psi$, respectivamente, forem comensuráveis com $T\tau$, ou seja, se forem múltiplos racionais do mesmo, uma condição um tanto excepcional. De modo geral, o movimento do pião é *almost*-periódico (para a teoria das funções ditas *almost*-periódicas, vide, *e.g.*, [225] ou [87]).

Além do crescimento linear descrito acima, φ_t é sujeita a oscilações periódicas, que podemos descrever qualitativamente a partir do comportamento da velocidade angular $\dot{\varphi}_t$. De acordo com a primeira das relações em (45.113), $\dot{\varphi}_t$ oscila periodicamente e seu sinal é determinado pelo sinal de $p_\varphi - p_\psi [\varphi (\frac{t}{\tau} + d_0) - \alpha]$. Como φ é periódica e oscila entre um valor máximo e um mínimo, há, conseqüentemente, três situações possíveis, dependendo dos valores de p_φ e de p_ψ : 1^a $\dot{\varphi}_t$ é sempre estritamente positiva ou estritamente negativa; 2^a $\dot{\varphi}_t$ troca de sinal periodicamente (e, portanto, anula-se periodicamente em certos instantes); 3^a $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal mas anula-se periodicamente em certos instantes. Simultaneamente, θ_t realiza também um movimento periódico de mesma frequência entre dois valores θ_- e θ_+ (nutação).

A combinação dos movimentos de notação e precessão correspondentes a essas três situações estão descritas na Figura 45.7, página 2546, onde o movimento de um ponto do eixo de simetria do pião é desenhado. No que segue mostraremos como podemos chegar às mesmas conclusões através de uma análise puramente qualitativa das equações que regem esse movimento do pião de Lagrange.

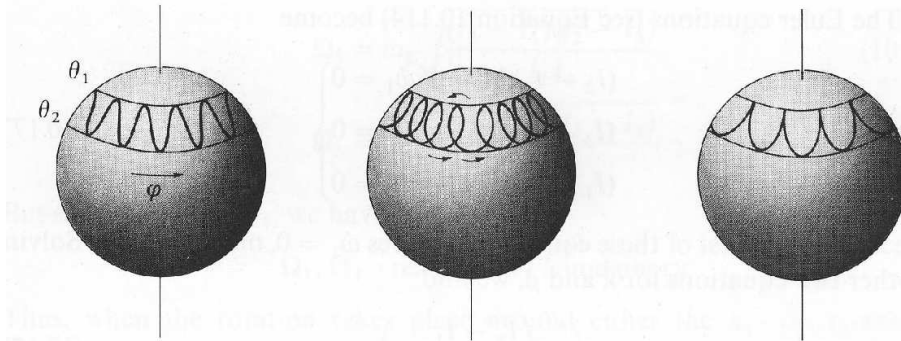


Figura 45.7: Possíveis combinações dos movimentos de nutação e de precessão do pião de Lagrange. Nas três figuras é desenhado o movimento de um ponto do eixo de simetria do pião. Os ângulos θ_- e θ_+ são aqui denominados θ_1 e θ_2 , respectivamente. Na figura da esquerda $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal, na do meio troca de sinal periodicamente e na da direita anula-se periodicamente, mas sem trocas de sinal.

• **Mais sobre a análise qualitativa do movimento do pião de Lagrange**

Como já comentamos, é possível inferir certas propriedades do movimento de um pião de Lagrange, dentre as quais algumas obtidas acima, sem uso direto das soluções “explícitas” que indicamos.

O ponto de partida é a relação (45.105), que pode ser interpretada como a energia mecânica de um sistema unidimensional onde o papel de energia cinética é feito pelo termo $\frac{I_1}{2}\dot{\theta}_t^2$ e o potencial é $\tilde{V}(\theta_t)$. A positividade dessa energia cinética implica que o movimento deve limitar-se à região onde $\tilde{V}(\theta_t) \leq e'$. Para prosseguirmos com a argumentação é importante termos uma noção qualitativa da forma do gráfico da função $\tilde{V}(\theta)$ no intervalo $[0, \pi]$, onde θ está definida.

Consideraremos agora o caso em que $p_\varphi \neq \pm p_\psi$, com ambos p_φ e p_ψ sendo não nulos (para os demais casos, vide adiante). Da definição de \tilde{V} em (45.106) vê-se que $\tilde{V}(\theta)$ diverge para $+\infty$ quando θ aproxima-se de 0 ou de π (os extremos de seu domínio de definição), devido ao fator $1/(\sin\theta)^2$.

Como $\tilde{V}(\theta)$ é contínua, ela deve possuir ao menos um mínimo no seu intervalo de definição. É possível provar, mas não o faremos na corrente versão destas Notas²⁹, que $\tilde{V}(\theta)$ possui um mínimo local único (e, portanto, absoluto) no intervalo $(0, \pi)$, que denotaremos por θ_{min} . Com isso, entendemos que $e' \geq \tilde{V}(\theta_{min})$. Para cada valor de $e' > \tilde{V}(\theta_{min})$ haverá dois ângulos θ_- e θ_+ (dependentes de e'), únicos, com $0 < \theta_- < \theta_{min} < \theta_+ < \pi$ tais que $e' = \tilde{V}(\theta_-)$ e $e' = \tilde{V}(\theta_+)$. Para cada valor de e' o ângulo de Euler θ_t oscilará (periodicamente) entre θ_- e θ_+ . Esse movimento é denominado *nutação*.

Vamos agora analisar o que ocorre com $\dot{\varphi}_t$ ainda na situação em que $e' > \tilde{V}(\theta_{min})$. Observando (45.104) ou (45.108) e sabendo que $\cos\theta_t$ é periódica em t , concluímos que o valor médio de $\dot{\varphi}_t$ é positivo ou negativo, o que implica que φ_t cresce ou decresce em média linearmente com t , podendo sofrer oscilações em torno dessa média.

Esse movimento no qual $|\varphi_t|$ cresce em média linearmente com t é denominado *precessão azimuthal*, ou simplesmente *precessão*. Passemos a analisar as oscilações em torno do movimento de precessão.

Escrevamos (45.104) na forma $\dot{\varphi}_t = p_\psi \frac{\Omega - \cos(\theta_t)}{I_1(\sin\theta_t)^2}$, com $\Omega := p_\varphi/p_\psi$ (aqui assumimos $p_\psi \neq 0$). Como $\cos(\theta_+) \leq \cos(\theta_t) \leq \cos(\theta_-)$, temos o seguinte: 1º, caso $\Omega < \cos(\theta_+)$ ou $\Omega > \cos(\theta_-)$, então $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal durante todo o movimento; 2º, caso $\cos(\theta_+) < \Omega < \cos(\theta_-)$, então $\dot{\varphi}_t$ troca de sinal (periodicamente) ao longo do movimento; 3º, caso $\Omega = \cos(\theta_+)$ ou $\Omega = \cos(\theta_-)$, então $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal, mas anula-se periodicamente. Caso $p_\psi = 0$ o movimento se dá como no 1º caso.

As trajetórias descritas pelo eixo do pião nessas três situações são descritas na Figura 45.7, página 2546. O 1º caso corresponde à figura da esquerda, o 2º caso corresponde à figura do meio e o 3º caso à figura da direita.

O movimento geral do pião combina uma rotação intrínseca em relação ao próprio eixo (descrita por ψ_t), um movimento de precessão (descrita por φ_t) e um movimento de nutação (descrita por θ_t).

²⁹O leitor interessado pode encontrar um demonstrações desse fato na literatura supracitada, mas deve ser advertido que algumas provas estão incompletas ou incorretas. Vide [18] para um tratamento ligeiramente diferente dessa questão, mas que também omite algumas considerações.

Finalmente, no caso especial em que $e' = \tilde{V}(\theta_{min})$ teremos $\dot{\theta}_t = 0$ para todo t . Não ocorre, portanto, o movimento de nutação e θ_t assume o valor constante θ_{min} . Nessa situação, (45.108) e (45.109) dizem-nos que $\dot{\varphi}_t$ e $\dot{\psi}_t$ também são constantes e, portanto, φ_t e ψ_t crescem linearmente com t . Não há nutação e a precessão e a rotação em torno do eixo de simetria se dão com velocidades angulares constantes.

• **O caso $p_\varphi = \pm p_\psi$**

Comentemos o que se passa se $p_\varphi = \pm p_\psi$, com ambos p_φ e p_ψ não nulos. Se $p_\varphi = p_\psi$, ambos não nulos, então

$$\tilde{V}(\theta) = Mgl \cos(\theta) + \frac{p_\varphi^2}{2I_1} \frac{(1 - \cos(\theta))}{(1 + \cos \theta)} .$$

Verifique! O segundo termo diverge (para $+\infty$) em $\theta = \pi$, mas não para $\theta = 0$, quando $\tilde{V}(0) = Mgl$. $\tilde{V}(\theta)$ tem um ponto de mínimo no intervalo $\theta \in [0, \pi)$, mas esse ponto de mínimo pode ser 0. O movimento fica, portanto, limitado à região $\theta_t \in [\theta_-, \theta_+]$, para $0 \leq \theta_- < \theta_+ < \pi$. Como $Q = 1$, temos a situação descrita no 1º caso se $\theta_- > 0$ ou no 3º caso se $\theta_- = 0$. Nessa última situação $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal, mas anula-se periodicamente nos instantes de tempo em que θ_t assume o valor 0.

No caso $p_\varphi = -p_\psi$, ambos não nulos, a divergência (a $+\infty$) de $\tilde{V}(\theta)$ se dá em $\theta = 0$ mas não em $\theta = \pi$. $\tilde{V}(\theta)$ tem um ponto de mínimo no intervalo $\theta \in (0, \pi]$, mas esse ponto de mínimo pode ser π . O movimento fica limitado à região $\theta_t \in [\theta_-, \theta_+]$, para $0 < \theta_- < \theta_+ \leq \pi$. Como $Q = -1$, temos a situação descrita no 1º caso se $\theta_+ < \pi$ ou no 3º caso se $\theta_+ = \pi$. Nessa última situação $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal, mas anula-se periodicamente nos instantes de tempo em que θ_t assume o valor π .

Um movimento sem nutação é em ambos os casos possível, bastando escolher-se e' igual a $\tilde{V}(\theta)$ calculado em seu ponto de mínimo. Note-se que esse pode vir a ser 0 ou π .

E. 45.19 Exercício. Analise qualitativamente o movimento na situação em que $p_\varphi = p_\psi = 0$.

★

*** ** * ** ***



Figura 45.8: Wolfgang Pauli e Niels Bohr observam um “*Tippe Top*”. Foto tirada em 31 de Maio de 1951, durante a inauguração de um novo instituto de Física na Universidade de Lund, Suécia. Créditos: Foto de Erik Gustafson, AIP Emilio Segrè Visual Archives, Margrethe Bohr Collection (photos.aip.org). Um “*Tippe Top*” é um tipo especial de pião simétrico que tem a curiosa propriedade de inverter seu eixo de rotação, erguendo com isso seu centro de massa, ao perder energia. O “*Tippe Top*” foi patenteado em 1891 por Helene Sperrl, sob o nome de “*Wendekreisel*”. O “*Tippe Top*” é até os dias de hoje objeto de estudo. Para um artigo de revisão, vide

- R. J. Cohen, “*The tippe top revisited*”. *American Journal of Physics* **45**: 12 (1977). Bibcode:1977AmJPh..45...12C. doi:10.1119/1.10926.

Para investigações recentes, vide:

- N. M. Bou-Rabee, J. E. Marsden, L. A. Romero, “*Tippe top inversion as a dissipation-induced instability*”, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **3**, 352–377 (2004).
- S. Rauch-Wojciechowski, M. Sköldstam, T. Glad, “*Mathematical analysis of the tippe top*”, *Regul. Chaotic Dyn.* **10**, 333–362 (2005).

45.5 Exercícios Adicionais

E. 45.20 *Exercício*. Obtenha o Lagrangiano associado ao pião de Lagrange em coordenadas definidas por ângulos de Euler e mostre que as equações de Euler-Lagrange assim obtidas coincidem com as equações de Euler (com torque externo). *Sugestão*: escreva as equações de Euler em termos dos ângulos de Euler e compare-as às correspondentes equações de Euler-Lagrange. Conte quantas vezes as palavras “Euler” e “Lagrange” aparecem no enunciado acima em sentidos diversos. *

E. 45.21 *Exercício*. Considere o movimento de um corpo rígido na ausência de forças e torques externos e com seu centro de massa parado. Considere um sistema de referência fixo no corpo tendo como eixos seus eixos principais de inércia. Escreva seu correspondente Lagrangiano usando ângulos de Euler (vide para tal a Seção 45.4, página 2540). Obtenha as correspondentes equações de Euler-Lagrange e, usando-as, reobtenha as equações de Euler (44.137)–(44.139), página 2442. *Sugestão*: escreva as equações de Euler em termos dos ângulos de Euler e compare-as às correspondentes equações de Euler-Lagrange. *

E. 45.22 *Exercício*. Escreva Hamiltoniano associado ao Exercício E. 45.21 e obtenha as correspondentes equações de Hamilton. Compare-as às equações de Euler (44.137)–(44.139), página 2442. *

E. 45.23 *Exercício*. [Equações de Hamilton para o Pião de Lagrange]. Mostre que o Hamiltoniano associado ao pião de Lagrange, cujo Lagrangiano foi dado em (45.100), página 2542, em termos de ângulos de Euler, é

$$\mathcal{H}(\theta, \varphi, \psi, p_\theta, p_\varphi, p_\psi) = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1(\sin \theta)^2} + Mgl \cos \theta. \quad (45.119)$$

Mostre que os momentos generalizados, expressos em termos das velocidades generalizadas, são:

$$p_\theta = I_1 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta, \quad p_\psi = I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}). \quad (45.120)$$

Obtenha de (45.119) as correspondentes equações de Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{I_1}, & \dot{p}_\theta &= \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)(p_\varphi \cos \theta - p_\psi)}{I_1(\sin \theta)^3} + Mgl \sin \theta, \\ \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I_1(\sin \theta)^2}, & \dot{p}_\varphi &= 0, \\ \dot{\psi} &= \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I_1(\sin \theta)^2} \cos \theta, & \dot{p}_\psi &= 0. \end{aligned} \quad (45.121)$$

*

E. 45.24 *Exercício*. [Pião de Lagrange sem Nutação]. Sob a luz das equações de Hamilton (45.121) é interessante analisar sob quais condições o movimento do pião de Lagrange pode ser livre de nutação. Se não ocorre nutação, devemos ter $\dot{\theta} = 0$ ao longo do movimento. Isso implica $\theta = \theta_0$, constante, e, por (45.121), $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ são também constantes, que denotaremos por $\dot{\varphi}_0$ e $\dot{\psi}_0$, respectivamente. Assim, a precessão e a rotação intrínseca se dão com velocidades angulares constantes. Além disso, devemos ter $p_\theta = 0$, o que implica (exceto no caso especial em que $\theta_0 = 0$ ou π)

$$(p_\varphi - p_\psi \cos \theta_0)(p_\varphi \cos \theta_0 - p_\psi) + MglI_1(1 - (\cos \theta_0)^2)^2 = 0. \quad (45.122)$$

Usando (45.120), verifique que essa condição equivale a

$$\dot{\varphi}_0^2(I_1 - I_3) \cos \theta_0 - \dot{\varphi}_0 I_3 \dot{\psi}_0 + Mgl = 0. \quad (45.123)$$

Encarando essa relação como uma equação algébrica de segundo grau para $\dot{\varphi}_0$ (o que pressupõe $(I_1 - I_3) \cos \theta_0 \neq 0$), mostre que as soluções são

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{I_3 \dot{\psi}_0 \pm \sqrt{I_3^2 \dot{\psi}_0^2 - 4Mgl(I_1 - I_3) \cos \theta_0}}{(I_1 - I_3) \cos \theta_0}. \quad (45.124)$$

Observe que as duas soluções são complexas caso $\dot{\psi}_0^2 < 4Mgl \frac{(I_1 - I_3)}{I_3^2} \cos \theta_0$. Nessa situação (rotação lenta em torno do eixo de simetria) um movimento sem nutação não é possível, portanto. Ele é possível, porém, se $\dot{\psi}_0^2 \geq 4Mgl \frac{(I_1 - I_3)}{I_3^2} \cos \theta_0$. No caso em

que $\dot{\psi}_0^2 = 4Mgl \frac{(I_1 - I_3)}{I_3^2} \cos \theta_0$ há exatamente uma solução real para a velocidade angular de precessão $\dot{\varphi}_0$ e para o caso em que $\dot{\psi}_0^2 > 4Mgl \frac{(I_1 - I_3)}{I_3^2} \cos \theta_0$ há duas soluções reais para $\dot{\varphi}_0$, para um mesmo θ_0 e um mesmo $\dot{\psi}_0$. Mostre que essas soluções são

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{I_3 \dot{\psi}_0 \pm \sqrt{I_3^2 \dot{\psi}_0^2 - 4Mgl(I_1 - I_3) \cos \theta_0}}{(I_1 - I_3) \cos \theta_0}.$$

Mostre que essas soluções em (45.124) têm sinais opostos no caso em que $(I_1 - I_3) \cos \theta_0 < 0$ e que ambas têm o sinal de $\dot{\psi}_0$ caso $(I_1 - I_3) \cos \theta_0 > 0$.

É de se notar que se $(I_1 - I_3) \cos \theta_0 < 0$, a condição $\dot{\psi}_0^2 > 4Mgl \frac{(I_1 - I_3)}{I_3^2} \cos \theta_0$ é satisfeita para qualquer valor de $\dot{\psi}_0$, inclusive para $\dot{\psi}_0 = 0$. Essa última observação é digna de nota. Se $\dot{\psi}_0 = 0$ e $(I_1 - I_3) \cos \theta_0 < 0$ as soluções para $\dot{\varphi}_0$ são

$$\dot{\varphi}_0 = \pm \sqrt{\frac{Mgl}{-(I_1 - I_3) \cos \theta_0}}.$$

Nessa situação, o movimento do pião é puramente precessional, sem nutação e sem rotação em torno do próprio eixo.

No caso em que $(I_1 - I_3) \cos \theta_0 = 0$ a relação (45.123) é uma equação algébrica de primeiro grau para $\dot{\varphi}_0$, cuja solução é

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{Mgl}{I_3 \dot{\psi}_0},$$

pressupondo, naturalmente, que $\dot{\psi}_0 \neq 0$.

✦

Apêndices

45.A Seções Cônicas

Nesta Seção recordaremos algumas definições e fatos e elementares a respeito de seções cônicas, ou seja, elipses, círculos, hipérbolas e parábolas, sempre no plano \mathbb{R}^2 . Na Seção 45.B, página 2554, apresentaremos uma representação polar desses objetos em um contexto que interessa particularmente ao problema de Kepler, que discutimos na Seção 45.2.3, página 2522.

Os assuntos aqui tratados são abordados em muitos livros-texto de Geometria Analítica e mesmo de Álgebra Linear (vide, *e.g.*, [55]) e nos limitaremos ao mínimo necessário.

45.A.1 Elipses e Círculos

Consideremos o plano \mathbb{R}^2 . Sejam dois pontos F_1 e F_2 e seja $2f \equiv \|F_2 - F_1\|$ a distância entre os mesmos. Seja também $a > f$. Uma *elipse* é o lugar geométrico dos pontos \vec{x} de \mathbb{R}^2 com a seguinte propriedade:

$$\|\vec{x} - F_1\| + \|\vec{x} - F_2\| = 2a. \tag{45.A.1}$$

Os pontos F_1 e F_2 são denominados *focos elipse*, ou *pontos focais da elipse*, e a é denominado *semieixo maior* da elipse (vide abaixo). A relação (45.A.1) diz-nos que se \vec{x} é um ponto da elipse, então a soma de suas distâncias aos pontos focais é constante, igual a $2a$.

Para equacionar melhor a relação (45.A.1), adotemos um sistema de coordenadas Cartesianas centrado no ponto intermediário entre F_1 e F_2 : $C = (F_1 + F_2)/2$ e com o eixo horizontal ao longo da linha que conecta F_1 a F_2 . Vide Figura 45.B.9, página 2556. Com essa escolha, as coordenadas de F_1 a F_2 são $(-f, 0)$ e $(f, 0)$, respectivamente. Se as coordenadas de \vec{x} forem (x, y) , então (45.A.1) pode ser escrita como

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a.$$

Escrevendo $\sqrt{(x+f)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$ e elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$(x+f)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-f)^2 + y^2} + (x-f)^2 + y^2$$

e, portanto,

$$xf - a^2 = -a\sqrt{(x-f)^2 + y^2}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos,

$$x^2f^2 - 2xfa^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2xf + f^2 + y^2)$$

ou seja,

$$(a^2 - f^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2f^2.$$

donde se extrai facilmente a assim chamada *equação da elipse*:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad \text{onde} \quad b := \sqrt{a^2 - f^2}. \tag{45.A.2}$$

A grandeza b é denominada *semieixo menor da elipse*. Note-se que $b \leq a$. O significado das nomenclaturas “semieixo maior” para a e “semieixo menor” para b fica claro na Figura 45.B.9, página 2556.

Outro parâmetro relevante é o chamado *semi-latus rectum*³⁰ da elipse, que é definido como a altura da elipse em um de seus pontos focais. Vide Figura 45.B.9, página 2556. Assim, adotando $x = f$ e $y = p$ na equação da elipse, tem-se, $\left(\frac{f}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2 = 1$, de onde se extrai

$$p = b\sqrt{1 - \left(\frac{f}{a}\right)^2} = \frac{b^2}{a}.$$

³⁰Semi-lado reto.

A *excentricidade* de uma *elipse* é definida por

$$e := \frac{f}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Note-se que, por essa definição, $0 \leq e < 1$. Com a definição de e e de p podemos escrever também

$$p = b\sqrt{1 - e^2} = a(1 - e^2) \quad e \quad f = \frac{pe}{1 - e^2}.$$

Verifique!

Um *círculo* de raio $a > 0$ é o caso degenerado em que $F_1 = F_2$ e, portanto, $f = e = 0$ e $a = b = p$.

• **A reta diretriz de uma elipse**

A distância de um ponto (x, y) de uma elipse ao ponto focal F_a , com $a = 1, 2$, é $D_{F_a} := \sqrt{(x - (-1)^a f)^2 + y^2}$. Se elevarmos essa expressão ao quadrado e usarmos a equação da elipse (45.A.2), obtemos

$$\begin{aligned} D_{F_a}^2 &= (x - (-1)^a f)^2 + y^2 = (x - (-1)^a f)^2 + b^2 - x^2 \frac{b^2}{a^2} \\ &= x^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) - 2(-1)^a f x + b^2 + f^2 = x^2 e^2 - 2(-1)^a e a x + a^2 \\ &= e^2 \left(x - (-1)^a \frac{a}{e}\right)^2 = e^2 \left(x - (-1)^a \frac{a^2}{f}\right)^2. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$D_{F_a} = e \left| x - (-1)^a \frac{a^2}{f} \right|. \tag{45.A.3}$$

Definimos a reta diretriz d_a associada ao ponto focal F_a , $a = 1, 2$, como a reta paralela ao eixo vertical cuja coordenada horizontal é $(-1)^a \frac{a^2}{f}$:

$$d_a := \left\{ \left((-1)^a \frac{a^2}{f}, y \right), y \in \mathbb{R} \right\}, \quad a = 1, 2.$$

A relação (45.A.3) permite caracterizar uma elipse como o lugar geométrico dos pontos (x, y) de \mathbb{R}^2 cuja distância ao ponto focal F_a , $a = 1, 2$, é e vezes a distância (x, y) à reta diretriz d_a . A excentricidade é, dessa forma, caracterizada como a razão entre as duas distâncias.

45.A.2 Hipérboles

Consideremos o plano \mathbb{R}^2 . Sejam dois pontos distintos F_1 e F_2 e seja $2f \equiv \|F_2 - F_1\|$ a distância entre os mesmos. Seja também $0 < a < f$. Uma *hipérbole* é o lugar geométrico dos pontos \vec{x} de \mathbb{R}^2 com a seguinte propriedade:

$$\|\vec{x} - F_1\| - \|\vec{x} - F_2\| = 2a. \tag{45.A.4}$$

Os pontos F_1 e F_2 são denominados *focos da hipérbole*, ou *pontos focais da hipérbole*. A relação (45.A.4) diz-nos que se \vec{x} é um ponto da hipérbole, então a diferença de suas distâncias aos pontos focais é constante igual a $2a$.

Para equacionar melhor a relação (45.A.4) adotemos um sistema de coordenadas Cartesianas centrado no ponto intermediário entre F_1 e F_2 : $C = (F_1 + F_2)/2$ e com o eixo horizontal ao longo da linha que conecta F_1 a F_2 . Vide Figura 45.B.10, página 2556. Com essa escolha, as coordenadas de F_1 a F_2 são $(-f, 0)$ e $(f, 0)$, respectivamente. Se as coordenadas de \vec{x} forem (x, y) , então (45.A.1) pode ser escrita como

$$\sqrt{(x + f)^2 + y^2} - \sqrt{(x - f)^2 + y^2} = 2a.$$

Escrevendo $\sqrt{(x+f)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$ e elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$(x+f)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-f)^2 + y^2} + (x-f)^2 + y^2$$

e, portanto,

$$xf - a^2 = +a\sqrt{(x-f)^2 + y^2}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos,

$$x^2f^2 - 2xfa^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2xf + f^2 + y^2)$$

ou seja,

$$(f^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2f^2 - a^4.$$

donde se extrai facilmente a assim chamada *equação da hipérbole*:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad \text{onde} \quad b := \sqrt{f^2 - a^2}. \quad (45.A.5)$$

Note-se que $b \leq f$.

Outro parâmetro relevante é o chamado *semi-latus rectum* da hipérbole, que é definido como a altura da hipérbole em um de seus pontos focais. Vide Figura 45.B.10, página 2556. Assim, adotando $x = f$ e $y = p$ na equação da elipse, tem-se, $\left(\frac{f}{a}\right)^2 - \left(\frac{p}{b}\right)^2 = 1$, de onde se extrai

$$p = b\sqrt{\left(\frac{f}{a}\right)^2 - 1} = \frac{b^2}{a}.$$

A *excentricidade de uma hipérbole* é definida por

$$e := \frac{f}{a} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}.$$

Note-se que, por essa definição, $e > 1$.

Com a definição de e e de p podemos escrever também

$$p = b\sqrt{e^2 - 1} = a(e^2 - 1) \quad e \quad f = \frac{pe}{e^2 - 1}.$$

Verifique!

• A reta diretriz de uma hipérbole

A distância de um ponto (x, y) de uma elipse ao ponto focal F_a , com $a = 1, 2$, é $D_{F_a} := \sqrt{(x - (-1)^a f)^2 + y^2}$. Se elevarmos essa expressão ao quadrado e usarmos a equação da hipérbole (45.A.5), obtemos

$$\begin{aligned} D_{F_a}^2 &= (x - (-1)^a f)^2 + y^2 = (x - (-1)^a f)^2 - b^2 + x^2 \frac{b^2}{a^2} \\ &= x^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) - 2(-1)^a f x - b^2 + f^2 = x^2 e^2 - 2(-1)^a e a x + a^2 \\ &= e^2 \left(x - (-1)^a \frac{a}{e}\right)^2 = e^2 \left(x - (-1)^a \frac{a^2}{f}\right)^2. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$D_{F_a} = e \left| x - (-1)^a \frac{a^2}{f} \right|. \quad (45.A.6)$$

Definimos a reta diretriz d_a associada ao ponto focal F_a , $a = 1, 2$, como a reta paralela ao eixo vertical cuja coordenada horizontal é $(-1)^a \frac{a}{e}$:

$$d_a := \left\{ \left((-1)^a \frac{a^2}{f}, y \right), y \in \mathbb{R} \right\}, \quad a = 1, 2.$$

A relação (45.A.6) permite caracterizar uma hipérbole como o lugar geométrico dos pontos (x, y) de \mathbb{R}^2 cuja distância ao ponto focal F_a , $a = 1, 2$, é e vezes a distância (x, y) à reta diretriz d_a . A excentricidade é, dessa forma, novamente caracterizada como a razão entre as duas distâncias.

45.A.3 Parábolas

Uma parábola em \mathbb{R}^2 é caracterizada por um ponto F , denominado *foco da parábola*, ou *ponto focal da parábola*, e uma linha reta d , denominada *diretriz*. Normalmente assume-se que $F \notin d$. Uma *parábola* em \mathbb{R}^2 é o lugar geométrico de todos os pontos que distam de F o mesmo que distam da diretriz.

Vemos por essa definição e pela caracterização que apresentamos anteriormente de elipses e hipérbolos em termos de retas diretrizes, que no caso de parábolas a excentricidade vale 1.

Para equacionar essa definição, adotemos um sistema de coordenadas Cartesianas cujo eixo vertical coincide com a diretriz e cuja origem O seja o ponto de c que menos dista de F . O eixo horizontal é a linha que conecta O a F . Vide Figura 45.B.11, página 2557. Seja f a distância de O a F . As coordenadas de F serão $(-f, 0)$. Assim, a distância de um ponto de coordenadas (x, y) a F será $\sqrt{(x+f)^2 + y^2}$, enquanto que a distância desse ponto de coordenadas (x, y) à diretriz é $|x|$. Portanto, pela definição acima, a parábola consiste nos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} = |x|.$$

Assim, elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$x = -\left(\frac{y^2 + f^2}{2f}\right). \tag{45.A.7}$$

Essa equação é denominada *equação da parábola*.

O *semi-latus rectum* da parábola, denotado por p , é sua altura no ponto focal (vide Figura 45.B.11, página 2557). Pela equação da parábola, adotando-se $x = -f$ e $y = p$, tem-se

$$p = f \quad \text{e com isso (45.A.7) se escreve como} \quad x = -\left(\frac{y^2 + p^2}{2p}\right).$$

A distância de um ponto (x, y) da parábola até a diretriz é $|x| = (y^2 + f^2)/(2f)$ e seu menor valor possível se dá para $y = 0$ e vale $f/2$. Assim, o ponto da parábola cuja distância à diretriz é a menor possível tem coordenadas $v \equiv (-f/2, 0)$. Esse ponto é dito ser o *vértice da parábola*. Claramente, v é o ponto intermediário entre O e F .

45.B Parametrização Polar de Seções Cônicas

Vamos aqui mostrar que a equação (45.39),

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos(\varphi - c'), \tag{45.B.8}$$

descreve seções cônicas, ou seja, círculos, elipses, parábolas ou hipérbolos, dependendo do valor do parâmetro e . Definições e fatos elementares sobre seções cônicas são apresentados na Seção 45.A, página 2551. Esse assunto é abordado em muitos livros-texto de Geometria Analítica e mesmo de Álgebra Linear (vide, *e.g.*, [55]) e nos limitaremos ao mínimo necessário. Em (45.B.8), o parâmetro e é denominado *excentricidade da cônica* e p é denominado *parâmetro da cônica*, ou ainda *semi-latus rectum*.

A expressão (45.B.8) é por vezes denominada *representação polar de uma seção cônica*.

Em (45.B.8) adotamos $c' = 0$, o que corresponde meramente à escolha de uma orientação dos eixos da cônica considerada. A coordenada r mede a distância de um ponto da curva à origem do sistema de coordenadas que, como

constataremos, coincide com um dos pontos focais da cônica considerada. O ângulo φ , denominado *anomalia verdadeira* na Mecânica Celeste, mede o ângulo que a reta que conecta o ponto considerado à origem forma com o eixo horizontal. Vide 45.B.9, página 2556, e 45.B.10, página 2556 e 45.B.11, página 2557.

Multiplicando a equação (45.B.8) por r , teremos $p - er \cos(\varphi) = r$. Como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $r \cos(\varphi) = x$, obtemos, após elevar ambos os lados ao quadrado

$$p^2 - 2pex = (1 - e^2)x^2 + y^2. \tag{45.B.9}$$

Há, novamente, quatro situações a considerar:

1. Caso $e = 0$. Nessa situação, (45.B.9) fica $x^2 + y^2 = p^2$ que descreve um círculo de raio p no plano x - y centrado na origem. Naturalmente, φ pode assumir todos os valores no intervalo $(-\pi, \pi]$.
2. Caso $0 < e < 1$. Nessa situação, podemos reescrever (45.B.9) como

$$\left(\frac{x + \frac{pe}{1-e^2}}{p/(1-e^2)}\right)^2 + \left(\frac{y}{p/\sqrt{1-e^2}}\right)^2 = 1.$$

Verifique! Naturalmente, φ pode assumir todos os valores no intervalo $(-\pi, \pi]$. Esta equação descreve uma elipse de semieixos $a := p/(1 - e^2)$ e $b := p/\sqrt{1 - e^2}$ centrada em $(-\frac{pe}{1-e^2}, 0)$. Vide Figura 45.B.9, página 2556. Notar que aqui $a > b$. A quantidade p é denominada *parâmetro da elipse*, ou *semi-latus rectum*, e e é denominada *excentricidade*. Notar que $e := \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ e que $p = b^2/a$.

Os pontos focais encontram-se deslocados de $\pm f$ do centro da elipse, onde $f = \sqrt{a^2 - b^2} = pe/(1 - e^2)$. Assim, os pontos focais encontram-se nas posições $(0, 0)$ e $(-\frac{2pe}{1-e^2}, 0)$.

Para uma elipse geral, a excentricidade é definida pela razão f/a , que nesse caso vale e , como esperado.

3. Caso $e = 1$. Nessa situação, podemos reescrever (45.B.9) como $x = \frac{p^2 - y^2}{2p}$, que claramente descreve uma parábola. O foco dessa parábola localiza-se em $(0, 0)$.

Como $(1 + \cos(\varphi)) = p/r$, e r pode ser arbitrariamente grande, φ pode assumir todos os valores no intervalo aberto $(-\pi, \pi)$, excluindo $\pm\pi$.

4. Caso $e > 1$. Nessa situação, podemos reescrever (45.B.9) como

$$\left(\frac{x - \frac{pe}{e^2-1}}{p/(e^2-1)}\right)^2 - \left(\frac{y}{p/\sqrt{e^2-1}}\right)^2 = 1.$$

Verifique! Esta equação descreve uma hipérbole com focos no eixo x , centrada no ponto $(\frac{pe}{e^2-1}, 0)$. Aqui, $a = p/(e^2 - 1)$ e $b = p/\sqrt{e^2 - 1}$, sendo $0 < a < b$.

A distância entre os focos é $2\sqrt{a^2 + b^2} = 2pe/(e^2 - 1)$. Assim, os focos estão localizados nos pontos $(0, 0)$ e $(2pe/(e^2 - 1), 0)$.

Como $1 + e \cos(\varphi) = p/r$ e como r pode ser arbitrariamente grande, concluímos que φ pode assumir todos os valores no intervalo aberto $(-\phi_0, \phi_0)$, onde $\phi_0 = \arccos(-1/e)$. Essa é uma distinção observacional relevante entre o caso hiperbólico e o parabólico, pois naquele, como já comentamos, o ângulo φ pode assumir todos os valores no intervalo aberto $(-\pi, \pi)$.

Por fim, observemos que como $\cos \phi_0 = -1/e < 0$ e $x = r \cos \varphi$, concluímos que x pode assumir valores negativos quando φ assume valores em $(-\phi_0, \phi_0)$. Com isso, vemos que a parametrização polar (45.B.8) refere-se ao ramo esquerdo da hipérbole (vide Figura 45.B.10, página 2556), pois para o outro ramo temos sempre $x > 0$.

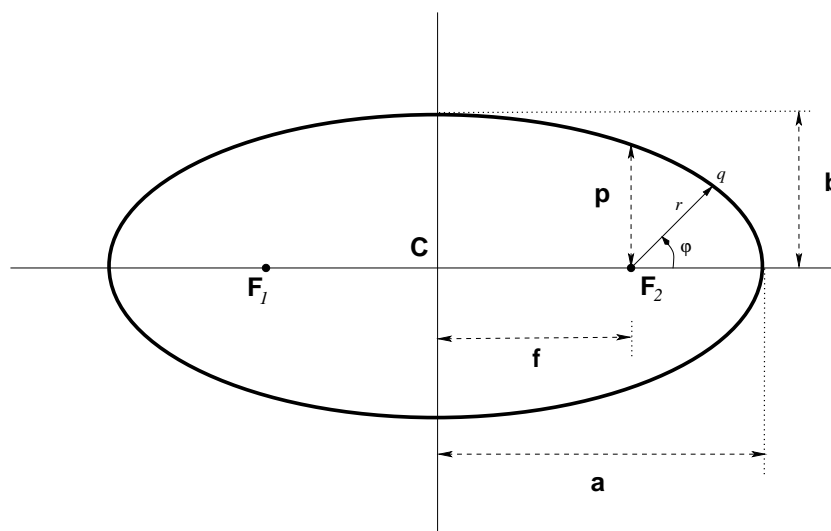


Figura 45.B.9: Esquema indicando uma elipse descrita pela equação $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ e seus parâmetros: a indica o semieixo maior da elipse; b indica o semieixo menor da elipse; p indica o *semi-latus rectum* da elipse, que vale $p = b^2/a$; o ponto C indica o centro da elipse e F_1 e F_2 indicam as posições de seus pontos focais, sendo f a distância desses a C. Tem-se $f^2 = a^2 - b^2$. Dado um ponto genérico q da elipse, r indica sua distância a F_2 e φ (a *anomalia verdadeira*) indica o ângulo do vetor que conecta F_2 a q com o eixo horizontal.

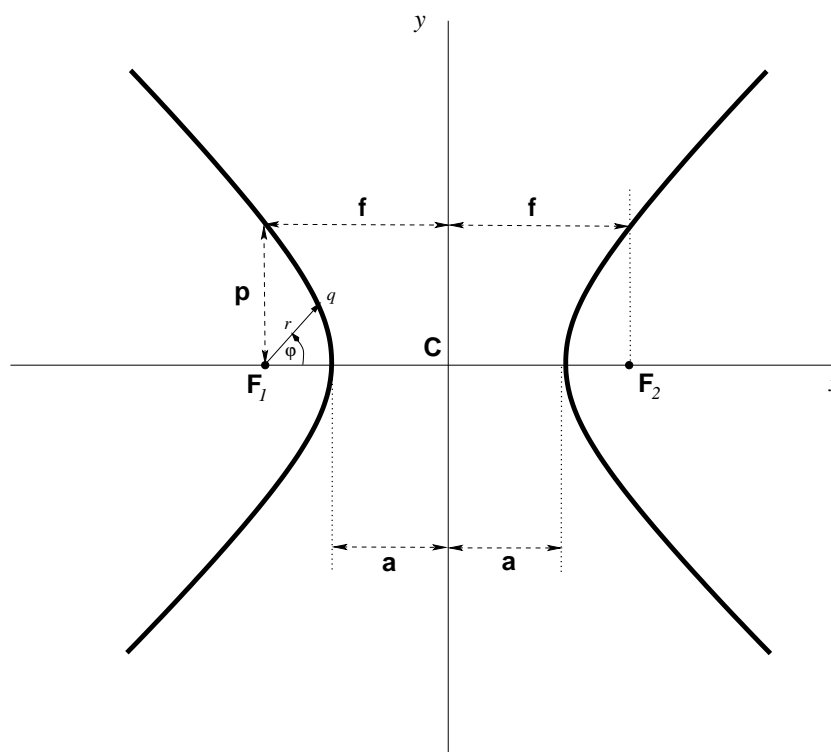


Figura 45.B.10: Esquema indicando uma hipérbole descrita pela equação $(\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 = 1$. O ponto C indica a origem e F_1 e F_2 indicam as posições dos pontos focais da hipérbole, sendo f a distância desses a C. O parâmetro a indica a distância a C dos pontos em que a hipérbole intercepta o eixo horizontal. Note-se que $f > a$. Tem-se $b^2 = f^2 - a^2$. O parâmetro p indica o *semi-latus rectum* da hipérbole, que vale $p = b^2/a = f(e - \frac{1}{e})$, sendo $e > 1$ a excentricidade da hipérbole: $e = f/a$. Dado um ponto genérico q do ramo esquerdo da hipérbole, r indica sua distância a F_1 e φ (a *anomalia verdadeira*) indica o ângulo do vetor que conecta F_1 a q com o eixo horizontal.

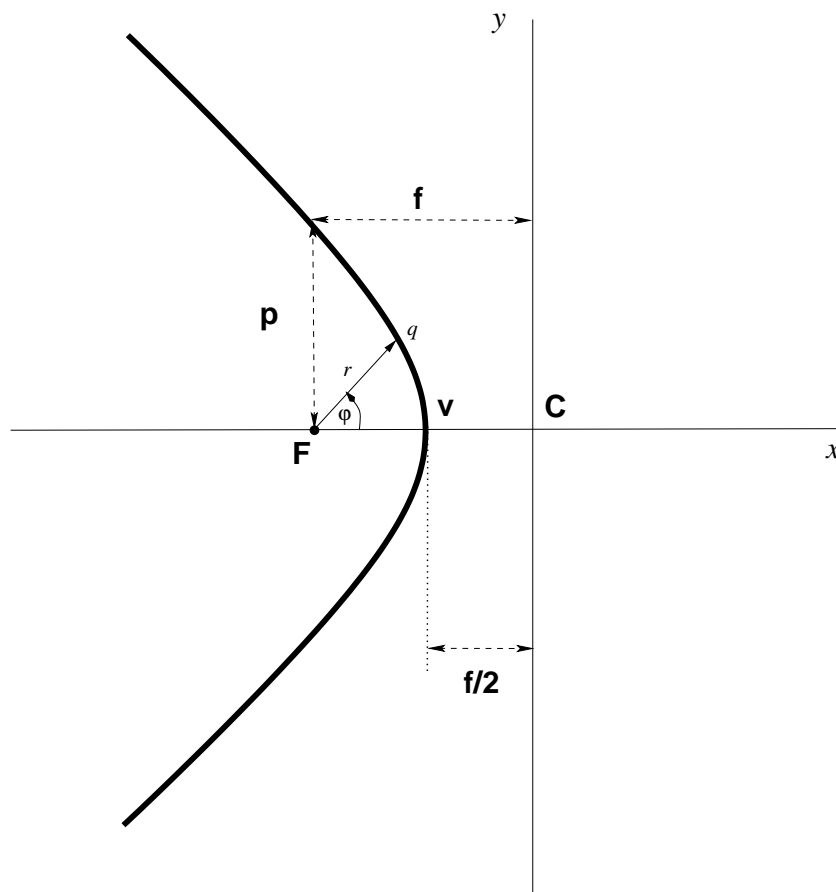


Figura 45.B.11: Esquema indicando a parábola descrita pela equação $x = -\left(\frac{y^2+f^2}{2f}\right)$. O ponto C indica a origem e F indica a posição do ponto focal da parábola, sendo f a distância desse a C. A diretriz da parábola é o eixo vertical. O ponto onde a parábola intercepta o eixo horizontal é o vértice v. Sua distância distância a C e a F é f/2. O vértice é o ponto da parábola mais próximo à diretriz. O parâmetro p indica o *semi-latus rectum* da parábola, que nesse caso vale $p = f$. Dado um ponto genérico q da parábola, r indica sua distância a F e φ (a *anomalia verdadeira*) indica o ângulo do vetor que conecta F a q com o eixo horizontal.