Capítulo 45
Notas Sobre Mecânica Clássica. I

Sumário

45.1 Sistemas de Referência e suas Transformações na Mecânica Clássica. Acelerações Inerciais 2555
45.2 Mecânica de Pontos Materiais . . . 2567
45.3 Interlúdio. Aceleração de Coriolis e a Rotação Diurna da Terra . . . 2575
45.3.1 Experimentos de Queda Livre e Mensuração de seu Desvio . . . 2577
45.3.2 O Experimento do Pêndulo de Foucault sob Pequenas Oscilações . . . 2580
45.4 Mecânica de Corpos Rígidos . . . 2587
45.4.1 Propriedades do Tensor Momento de Inércia . . . 2589
45.4.2 As Equações Dinâmicas para Corpos Rígidos . . . 2591
45.4.2.1 Estabilidade de Rotações em Torno dos Eixos Principais. O Teorema do Eixo Intermediário . . . 2595
45.4.3 Movimento de Piões. Algumas Soluções . . . 2598
45.5 O Formalismo Lagrangiano. Fundamentos . . . 2604
45.5.1 O Princípio de Hamilton e as Equações de Euler-Lagrange em Sistemas sem Vínculos . . . 2606
45.5.2 Invariância das Equações de Euler-Lagrange por Mudanças de Coordenadas e de Sistemas de Referência . . . 2611
45.5.3 Sistemas com Vínculos Holonômicos . . . 2613
45.5.4 O Princípio de D'Alembert e o Tratamento de Forças não Conservativas . . . 2614
45.5.4.1 Partícula Carregada em um Campo Eletromagnético. A Força de Lorentz . . . 2620
45.5.5 Sistemas de Coordenadas Não Inerciais no Formalismo Lagrangiano . . . 2622
45.5.5.1 Uma Constante de Movimento . . . 2624
45.5.6 O Formalismo Lagrangiano em Sistemas Não Autônomos . . . 2625
45.6 O Formalismo Lagrangiano. Simetrias Contínuas e Leis de Conservação. O Teorema de Noether . . . 2627
45.6.1 A Noção de Transformação de Simetria . . . 2629
45.6.2 Simetrias Contínuas com $\gamma = 0$ e Leis de Conservação . . . 2630
45.6.3 Similitude Mecânica . . . 2634
45.6.4 Simetrias Contínuas com $\gamma \neq 0$ . . . 2635
45.7 O Formalismo Hamiltoniano . . . 2636
45.7.1 Derivação Variacional das Equações de Hamilton . . . 2639
45.7.2 Colchetes de Poisson . . . 2640
45.7.3 Transformações Canônicas . . . 2647
45.8 Exercícios Adicionais . . . 2658
APÊNDICES . . . 2660
45.A Mais Algumas Consequências da Proposição 45.1 . . . 2660
45.B Um Lema Útil Sobre Funções Contínuas . . . 2661

Neste capítulo obteremos alguns resultados básicos da Mecânica Clássica, inclusive sobre o movimento de corpos rígidos, fazendo uso nesse tema de alguns resultados sobre o grupo SO(3), tratado na Seção 21.4.2, página 1129. Na Seção 45.5, página 2604, são apresentados e discutidos os ingredientes mais importantes do formalismo Lagrangiano e na Seção 45.7, página 2636, do formalismo Hamiltoniano. O importante Teorema de Noether é demonstrado e discutido na Seção 45.6, página 2627. Para a leitura deste capítulo alguma familiaridade com noções elementares da Mecânica Clássica é recomendada.

É desnecessário dizer que há uma vasta literatura dedicada aos assuntos aqui dispostos e sugerimos alguns textos, todos de alta qualidade. Para textos com maior profundidade matemática: [23], [2], [179] e [546]. Para textos com maior

ênfase em questões de Física: [316], [466], [280], [191], [302], [332], [315], [540]. Um clássico matemático sobre Mecânica Celeste é o texto de Carl Siegel[1] e Jürgen Moser[2] [456]. Um clássico sobre teoria e prática da Mecânica de Corpos Rígidos é a obra de Felix Klein[3] e Arnold Sommerfeld[4] [470].

Este capítulo é continuado no Capítulo 46, página 2663, onde são discutidas soluções de alguns problemas mecânicos especiais e suas aplicações.

Comentários sobre a notação. É comum denotar-se vetores no espaço físico tridimensional com a sobreposição de uma flecha: $\vec{x}$, $\vec{v}$ etc., mas ocasionalmente evitaremos fazê-lo para manter uma certa limpeza gráfica nas expressões. Os produtos escalares usuais entre dois vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^3$ serão aqui denotados tanto por $\vec{x}\cdot\vec{y}$ quanto por $\langle\vec{x},\,\vec{y}\rangle$. Seu produto vetorial será denotado por $\vec{x}\times\vec{y}$. O leitor deve ser informado que alguns textos, denotam o produto vetorial por $\vec{x}\wedge\vec{y}$ e outros, especialmente de autores russos, denotam o mesmo produto vetorial por $[\vec{x},\,\vec{y}]$. Essa última notação decorre do fato, já comentado alhures, de $\mathbb{R}^3$ ser uma álgebra de Lie em relação ao produto vetorial e o colchete usualmente denota a operação de produto em uma álgebra de Lie. Não usaremos essa notação aqui. Como usual na Mecânica Clássica, denotamos a primeira derivada temporal de uma função f pelo símbolo $\dot{f}$, a segunda derivada por $\ddot{f}$ etc., notação esta que só evitaremos se houver perigo de confusão ou ambiguidade. Essa notação teria sido criada pelo próprio Newton. Coordenadas e velocidades generalizadas, frequentemente empregadas no formalismo Lagrangiano, serão designadas com um índice superior, como em q^a ou $\dot{q}^a$, respectivamente. Há exceções para essa regra e o leitor deve estar atento. Momentos generalizados são denotados com um índice inferior, como p_a. ♣

45.1 Sistemas de Referência e suas Transformações na Mecânica Clássica. Acelerações Inerciais

Na Mecânica Clássica, na ausência de vínculos, o espaço físico $\mathcal{E}$ é concebido como uma variedade tridimensional homeomorfa ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$. Isso significa que cada ponto do espaço físico $\mathcal{E}$ pode ser bijetivamente associado a uma tripla de coordenadas Cartesianas que representam uma carta (global) de coordenadas. O espaço físico pode ser mapeado por infinitas dessas cartas globais de coordenadas Cartesianas, que denominamos *sistemas de referência*. Sistemas de referência são como palcos onde os movimentos dos corpos materiais são acompanhados. Fazemos uso deles para descrever e expressar leis físicas. Na Mecânica Clássica o tempo tem um papel absoluto, o que significa dizer que é possível calibrar relógios arbitrários distintos, fixos em sistemas de referência eventualmente distintos, de forma que os mesmos coincidam em suas mensurações dos instantes de ocorrência de eventos. Sistemas de referência podem mover-se uns em relação a outros e logo abaixo discutiremos de que forma tais movimentos são concebidos na Mecânica Clássica.

Como todas as áreas da Física, a Mecânica Clássica formula seus princípios sobre certos conceitos idealizados, os quais, estritamente falando, correspondem apenas de forma aproximada a certos objetos reais. Uma dessas idealizações é a noção de *ponto material*, outra é a noção de *corpo rígido*, do qual trataremos mais adiante. Tais idealizações são úteis por permitirem uma descrição matemática simples do movimento dos objetos idealizados.

Pontos materiais são objetos físicos sem extensão mas dotados de massa. Seu movimento pode ser descrito por *trajetórias* que, em cada sistema de referência, representam funções, contínuas e ao menos uma vez diferenciáveis, definidas em algum intervalo de tempo I e assumindo valores em $\mathbb{R}^3$. É parte da formulação da chamada *segunda lei de Newton*[5] que a trajetória de um ponto material satisfaz uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Assim, sua determinação em um dado sistema de referência necessita de duas informações: a posição e a velocidade do ponto material em um dado instante de tempo nesse sistema de referência. Sob hipóteses adequadas, essas informações definem univocamente as trajetórias e, portanto, descrevem o estado de movimento do ponto material.

Tradicionalmente, na Mecânica Clássica não é costume atribuir a pontos materiais um momento angular intrínseco ("*spin*"), ainda que seja possível fazê-lo. Vide para tal os artigos de Jean–Marc Lévy–Leblond[6] citados na *Nota* da página 1202.

Na Mecânica Clássica, corpos materiais extensos, como gases, líquidos ou sólidos, são idealizados como sendo compostos por (eventualmente infinitos) pontos materiais em estados variados de agregação. O conhecimento das leis de movimento de pontos materiais permite, assim, ao menos em princípio, estudar propriedades Mecânicas de formas mais realistas de matéria.

[1] Carl Ludwig Siegel (1896–1981).
[2] Jürgen Kurt Moser (1928–1999).
[3] Christian Felix Klein (1849–1925).
[4] Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868–1951).
[5] Sir Isaac Newton (1643–1727).
[6] Jean-Marc Lévy-Leblond (1940–).

A chamada *primeira lei de Newton* é uma afirmação de existência: existem sistemas de referência, denominados *sistemas de referência inerciais*, nos quais todo ponto material que se mova sem a ação de forças externas permanece em seu estado de movimento, ou seja, permanece movendo-se com velocidade constante. Os demais sistemas de referência são ditos *sistemas de referência não inerciais*. Essa definição de sistemas de referência inerciais necessita que se tenha definido previamente a noção de força. Não vamos entrar nessa discussão aqui por desviar-nos de nossos propósitos mais pragmáticos, mas afirmamos que essa questão não é de forma alguma desimportante e é, em verdade, parte de uma questão central da Física, a saber, a de entender de que formas objetos materiais interagem entre si de modo a alterar seus estados de movimento.

O chamado *Princípio de Relatividade*, formulado originalmente por Galilei[7] e estendido em seu significado por Einstein[8], afirma que as Leis da Física são identicamente formuladas em sistemas de referência inerciais distintos. Isso aplica-se, em particular, às leis da Mecânica Clássica, como veremos na discussão sobre a segunda lei de Newton.

• **Transição de sistemas de coordenadas**

Vamos considerar que tenhamos dois sistemas de coordenadas $\mathbf{k}$ e $\mathbf{K}$ (vide o esquema da Figura 45.1, página 2557) descrevendo pontos do espaço físico $\mathcal{E}$. Um dado ponto arbitrário P de $\mathcal{E}$ pode ser descrito por dois conjuntos de coordenadas Cartesianas: $\vec{q}_P$, no sistema $\mathbf{k}$ e $\vec{Q}_P$ no sistema $\mathbf{K}$. Denotamos por $A : \mathbf{K} \to \mathbf{k}$ a função que realiza a transição entre as coordenadas dos dois sistemas, ou seja, a função tal que $A\big(\vec{Q}_P\big) = \vec{q}_P$ para todos os pontos $P \in \mathcal{E}$.

• **Sistemas de referência em movimento relativo**

O ponto de partida de nossa análise é a definição de movimentos relativos de sistemas de referência (inerciais ou não) na Mecânica Clássica, tema de fundamental relevância no estudo da Mecânica. Dizemos que um sistema $\mathbf{K}$ move-se continuamente em relação a um sistema $\mathbf{k}$ caso a função de transição A seja continuamente dependente do tempo: A_t, com $t \in \mathbb{R}$. Em verdade, essa definição é ainda muito geral, pois é um fato advindo da experimentação que nem todos os movimentos são permitidos na Mecânica Clássica, apenas os chamados movimentos Euclidianos.

Um movimento de $\mathbf{K}$ em relação a $\mathbf{k}$, denotado por $A_t : \mathbf{K} \to \mathbf{k}$, com $t \in \mathbb{R}$, é dito ser um *movimento Euclidiano* do sistema se $\mathbf{K}$ em relação ao sistema $\mathbf{k}$ se preservar as distâncias entre pontos, ou seja, se para todo $\vec{Q}_1$ e $\vec{Q}_2 \in \mathbf{K}$ e todo $t \in \mathbb{R}$ valer

$$\Big\| A_t\big(\vec{Q}_1\big) - A_t\big(\vec{Q}_2\big) \Big\| \;=\; \big\| \vec{Q}_1 - \vec{Q}_2 \big\| \;. \tag{45.1}$$

Essa hipótese, a de que em cada instante de tempo $\mathbf{K}$ e $\mathbf{k}$ meçam as mesmas distâncias entre pontos, é uma hipótese fundamental de nossa análise e dela extrairemos nossas conclusões básicas sobre a descrição cinemática da Mecânica Clássica. Note-se que essa hipótese é falsa na Mecânica Relativística, onde o ingrediente básico fundamental não é a preservação de distâncias no espaço físico, mas a preservação do *intervalo* entre pontos do espaço-tempo. Vide para tal a discussão da Seção 21.7, página 1175.

Doravante consideraremos todos os movimentos entre sistemas de referência como sendo Euclidianos. Consideraremos também, salvo menção em contrário, que os sistemas $\mathbf{K}$ e $\mathbf{k}$ possuam eixos de coordenadas Cartesianas.

A hipótese expressa em (45.1) fixa a forma geral da função $A_t : \mathbf{K} \to \mathbf{k}$. De fato, o Teorema 21.7, página 1111, informa-nos que A_t é forçosamente da forma $A_t\big(\vec{Q}\big) = R_t\vec{Q} + \vec{c}_t$ onde, para cada $t \in \mathbb{R}$ tem-se $R_t \in \mathrm{SO}(3)$ e $\vec{c}_t \in \mathbb{R}^3$. Em palavras, isso nos diz que os sistemas de referência $\mathbf{K}$ e $\mathbf{k}$ são associados por uma translação $\vec{c}_t \in \mathbb{R}^3$ e por uma rotação $R_t \in \mathrm{SO}(3)$, ambas eventualmente dependentes do tempo.

Ambas as funções R_t e $\vec{c}_t$ são supostas contínuas como funções de t, pois movimentos físicos têm de ter essa propriedade. Supomos $R_t \in \mathrm{SO}(3)$ e não $R_t \in \mathrm{O}(3)$, pois podemos passar do segundo caso ao primeiro por um simples acerto da orientação dos eixos coordenados do sistema $\mathbf{K}$ em relação aos de $\mathbf{k}$.

No que segue, suporemos que R_t e $\vec{c}_t$, como funções de t, são contínuas e tantas vezes diferenciáveis quanto necessário. É importante lembrar que, segundo o já citado Teorema 21.7, página 1111, tanto R_t quanto $\vec{c}_t$ são univocamente determinados.

Temos, portanto, a seguinte situação: se considerarmos um ponto fixo no sistema $\mathbf{K}$ com um vetor de coordenadas $\vec{Q}$, as coordenadas desse mesmo ponto no sistema $\mathbf{k}$ serão dadas por

$$\vec{q}_t \;=\; R_t\vec{Q} + \vec{c}_t \;, \tag{45.2}$$

[7] Galileo di Vincenzo Bonaiuti de' Galilei (1564–1642).
[8] Albert Einstein (1879–1955).

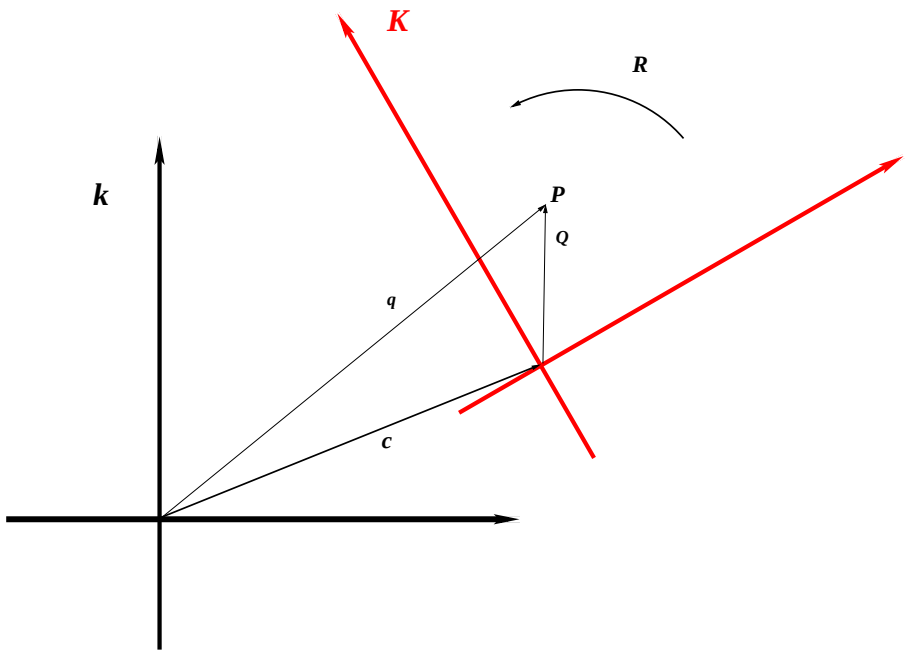

Figura 45.1: Esquema da relação entre dois sistemas de referência Cartesianos **k** e **K**. O vetor $\vec{c}$ é um vetor do sistema **k** que indica a posição da origem de **K**. Ambos os sistemas têm os eixos igualmente orientados, mas que tornam-se paralelos após uma rotação indicada por R. O ponto P é um ponto do espaço físico e possui um vetor de coordenadas $\vec{q}$ no sistema **k** e um vetor de coordenadas $\vec{Q}$ no sistema **K**. Note-se que $\vec{q}$ e $\vec{Q}$ não vivem no mesmo espaço vetorial, a relação entre eles sendo dada em (45.2).

com $R_t \in \mathrm{SO}(3)$.

Com um pouco mais de generalidade, se tivermos um ponto material descrevendo uma trajetória descrita no sistema de referência **K** por uma função $\vec{Q}(t)$, com $t \in I$, sendo I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ (a função $\vec{Q}(t)$ é suposta contínua e tantas vezes diferenciável quanto necessário), então sua trajetória em **k** será descrita pela função $\vec{q}(t)$, com $t \in I$, dada por

$$\vec{q}(t) \;=\; R_t\vec{Q}(t) + \vec{c}_t \;. \tag{45.3}$$

Disso segue que

$$\vec{Q}(t) \;=\; R_t^{-1}\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big) \;=\; R_t^T\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big) \;. \tag{45.4}$$

Assim,

$$\dot{\vec{q}}(t) \;=\; \dot{R}_t\vec{Q}(t) + R_t\dot{\vec{Q}}(t) + \dot{\vec{c}}_t \;\overset{(45.4)}{=}\; \dot{R}_tR_t^T\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big) + R_t\dot{\vec{Q}}(t) + \dot{\vec{c}}_t \;.$$

Como $R_t \in \mathrm{SO}(3)$, tem-se $\mathbb{1} = R_tR_t^T$ para todo t. Diferenciando-se essa identidade em relação a t e usando o fato que $\frac{d}{dt}\big(R_t^T\big) = \big(\dot{R}_t\big)^T$, obtemos $0 = \dot{R}_tR_t^T + R_t\big(\dot{R}_t\big)^T = \dot{R}_tR_t^T + \big(\dot{R}_tR_t^T\big)^T$. Isso prova que $\dot{R}_tR_t^T$ é uma matriz real antissimétrica e, portanto, pode ser escrita na forma

$$\dot{R}_tR_t^T \;=\; \vec{\omega}_t\cdot\vec{\mathsf{J}} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{pmatrix} \;, \tag{45.5}$$

para algum vetor $\vec{\omega}_t \in \mathbb{R}^3$ com componentes Cartesianas $\big(\omega_1(t),\ \omega_2(t),\ \omega_3(t)\big)$. Acima, usamos a notação $\vec{\omega}_t\cdot\vec{\mathsf{J}} := \omega_1(t)\mathsf{J}_1 + \omega_2(t)\mathsf{J}_2 + \omega_3(t)\mathsf{J}_3$. Recordar que as matrizes J_1, J_2 e J_3 (os geradores infinitesimais do grupo SO(3), dadas em (21.92)-(21.94), página 1131) formam uma base no espaço das matrizes reais antissimétricas 3×3 e são explicitamente

dadas por

$$\mathsf{J}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{J}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{J}_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{45.6}$$

O vetor $\vec{\omega}_t \in \mathbb{R}^3$ é muito útil na descrição de movimentos e sua interpretação será discutida mais adiante. Usando o vetor $\vec{\omega}_t$, podemos escrever

$$\dot{\vec{q}}(t) \;=\; \Big(\vec{\omega}_t \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big) + R_t\dot{\vec{Q}}(t) + \dot{\vec{c}}_t \;=\; \vec{\omega}_t \times \big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big) + R_t\dot{\vec{Q}}(t) + \dot{\vec{c}}_t\,, \tag{45.7}$$

onde usamos o fato, mencionado em (21.112), página 1135 (vide também Exercício E. 21.50), que $\Big(\vec{\omega}_t \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)\vec{\alpha} = \omega_t \times \vec{\alpha}$ para qualquer $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$. Verifique!

A relação

$$\dot{\vec{q}}(t) \;=\; \vec{\omega}_t \times \big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big) + R_t\dot{\vec{Q}}(t) + \dot{\vec{c}}_t \tag{45.8}$$

é o ponto de partida de alguns desenvolvimentos da Cinemática e da Dinâmica Clássicas.

• **Interpretação dos termos em (45.8)**

A expressão (45.8) fornece o vetor velocidade $\dot{\vec{q}}(t)$ de um ponto material observado no sistema **k** como soma de três termos.

O termo $\dot{\vec{c}}_t$ em (45.8) é a velocidade translacional do sistema **K** em relação ao sistema **k**. A ele se adiciona o termo $R_t\dot{\vec{Q}}(t)$, que é a velocidade do ponto material em **K**, a saber, $\dot{\vec{Q}}(t)$, transferida para **k** por meio da rotação R_t.

Para entendermos o primeiro termo em (45.8), consideremos em primeiro lugar a situação em que $\vec{c}_t = 0$ e $\dot{\vec{Q}}(t) = 0$ para todo t. Nessa situação, as origens de **k** e **K** coincidem e o ponto material está fixo em **K**. A relação (45.8) fica simplesmente $\dot{\vec{q}}(t) = \vec{\omega}_t \times \vec{q}(t)$, ou seja,

$$\dot{\vec{q}}(t) \;=\; \Big(\vec{\omega}_t \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)\,\vec{q}(t)\,. \tag{45.9}$$

Se $\vec{\omega}_t = \vec{\omega}_0$, constante para todo t, com $\vec{\omega}_0 \neq 0$, a equação (45.9) é um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas a coeficientes constantes e sua solução é

$$\vec{q}(t) \;=\; \exp\Big(t\Big(\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)\Big)\vec{q}(0) \;=\; \exp\Big(\big\|\vec{\omega}_0\big\|t\Big(\hat{\omega}_0 \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)\Big)\vec{q}(0)\,, \quad \text{com} \quad \hat{\omega}_0 := \frac{\vec{\omega}_0}{\big\|\vec{\omega}_0\big\|}\,. \tag{45.10}$$

Vide a discussão sobre soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares no Capítulo 14, página 721. Conforme nossa discussão da Seção 21.4.2, página 1129, a matriz $\exp\Big(\big\|\vec{\omega}_0\big\|t\Big(\hat{\omega}_0 \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)\Big)$ representa uma rotação de um ângulo $\big\|\vec{\omega}_0\big\|t$ em torno do eixo definido pelo vetor unitário $\hat{\omega}_0 := \vec{\omega}_0/\big\|\vec{\omega}_0\big\|$. A expressão (45.9) indica, portanto, que $\vec{q}(t)$ executa no sistema **k** um movimento rotacional uniforme em torno do eixo definido por $\vec{\omega}_0/\big\|\vec{\omega}_0\big\|$ com velocidade angular $\big\|\vec{\omega}_0\big\|$. O eixo de rotação passa pela origem, nesse caso.

O vetor $\vec{\omega}_0$ é, desta forma, interpretado como o vetor que determina o eixo de rotação do sistema **K** em relação ao sistema **k** e sua magnitude, $\big\|\vec{\omega}_0\big\|$, é a velocidade angular dessa rotação. No caso de $\vec{\omega}_t$ não ser constante a interpretação é a mesma: $\vec{\omega}_t$ determina o eixo de rotação instantâneo do sistema **K** em relação ao sistema **k**, no instante t, e sua magnitude, $\big\|\vec{\omega}_t\big\|$, é a velocidade angular instantânea dessa rotação.

Por essa razão, passaremos a denominar $\vec{\omega}_t$ como o vetor *velocidade angular instantânea* de **K** em relação ao sistema **k** no instante t. É importante destacar que o vetor $\vec{\omega}_t$ deve ser interpretado como um vetor no sistema **k**.

• **Eixo de rotação**

No caso em que $\dot{\vec{Q}}(t) = 0$, (45.7) fica $\frac{d}{dt}\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big) = \Big(\vec{\omega}_t \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big)$. Caso ainda $\dot{\vec{c}}_t = 0$ (ou seja, $\vec{c}_t = \vec{c}_0$) e $\vec{\omega}_t = \vec{\omega}_0$, constante, com $\vec{\omega}_0 \neq 0$, a solução é dada por

$$\vec{q}(t) \;=\; \vec{c}_0 + \exp\Big(\big\|\vec{\omega}_0\big\|t\Big(\hat{\omega}_0 \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)\Big)\big(\vec{q}(0) - \vec{c}_0\big)\,. \tag{45.11}$$

Note-se que se $\vec{q}(0) = \vec{c}_0 + \lambda\hat{\omega}_0$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, teremos $\vec{q}(t) = \vec{c}_0 + \lambda\hat{\omega}_0$ para todo t. Verifique! Isso significa que os pontos ao longo da linha reta $\mathcal{E}_{\vec{c}_0,\,\hat{\omega}_0} := \big\{\vec{c}_0 + \lambda\hat{\omega}_0,\ \lambda \in \mathbb{R}\big\}$ permanecem imóveis quando t varia. A linha reta $\mathcal{E}_{\vec{c}_0,\,\hat{\omega}_0}$ é formada pelos pontos que passam por $\vec{c}_0$ e aponta na direção de $\hat{\omega}_0$. Ela é denominada *eixo de rotação* do movimento descrito por (45.11).

Em outras palavras, (45.11) representa, no sistema $\mathbf{k}$, uma rotação em torno do eixo $\mathcal{E}_{\vec{c}_0,\,\hat{\omega}_0} := \big\{\vec{c}_0 + \lambda\hat{\omega}_0,\ \lambda \in \mathbb{R}\big\}$ com velocidade angular $\big\|\vec{\omega}_0\big\|$.

Se considerarmos apenas a condição $\dot{\vec{Q}}(t) = 0$ (ponto material fixo em $\mathbf{K}$), ainda com $\vec{\omega}_t = \vec{\omega}_0$, constante, mas com $\vec{c}_t$ não necessariamente constante, a relação (45.8) fica

$$\frac{d}{dt}\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big) \;=\; \vec{\omega}_0 \times \big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big) \;=\; \Big(\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big)\ ,$$

cuja solução é $\vec{q}(t) = \vec{c}_t + \exp\Big(\big\|\vec{\omega}_0\big\|t\Big(\hat{\omega}_0 \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)\Big)\big(\vec{q}(0) - \vec{c}_0\big)$. Escrevendo isso na forma

$$\vec{q}(t) \;=\; \vec{c}_t - \vec{c}_0 + \Big[\vec{c}_0 + \exp\Big(\big\|\vec{\omega}_0\big\|t\Big(\hat{\omega}_0 \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)\Big)\big(\vec{q}(0) - \vec{c}_0\big)\Big] \tag{45.12}$$

e comparando a (45.11), vemos que trata-se da combinação de dois movimentos: um movimento rotacional em torno do eixo $\mathcal{E}_{\vec{c}_0,\,\hat{\omega}_0} := \big\{\vec{c}_0 + \lambda\hat{\omega}_0,\ \lambda \in \mathbb{R}\big\}$ com velocidade angular $\big\|\vec{\omega}_0\big\|$, em um movimento translacional, descrito pelo termo $\vec{c}_t - \vec{c}_0$.

• **Movimentos Euclidianos, caso geral**

No caso em que $\vec{\omega}_t$ uma função dada, não necessariamente constante, a equação diferencial linear homogênea (45.9) tem solução dada pela série de Dyson[9]:

$$\vec{q}(t) \;=\; D(t)\vec{q}(0)\ , \qquad \text{com} \qquad D(t) \;:=\; \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{k-1}}\Big(\vec{\omega}_{t_1}\cdot\vec{\mathsf{J}}\Big)\cdots\Big(\vec{\omega}_{t_k}\cdot\vec{\mathsf{J}}\Big)\,dt_k\cdots dt_1\ . \tag{45.13}$$

Vide Seção 14.2.2, página 725. A equação (45.5) pode ser lida na forma $\dot{R}_t = \big(\vec{\omega}_t \cdot \vec{\mathsf{J}}\big)R_t$ a qual pode ser encarada como uma equação diferencial ordinária linear homogênea de primeira ordem para R_t. Novamente usando a série de Dyson, obtemos a solução

$$R_t \;=\; D(t)R_0\ , \tag{45.14}$$

onde $D(t)$ é dada em (45.13). Como $D(t) = R_tR_0^{-1}$, com R_t e R_0 elementos de SO(3), segue também que $D(t) \in \mathrm{SO}(3)$.

A interpretação de (45.14) é simples. O fator R_0 faz o ajuste entre os eixos de $\mathbf{K}$ e $\mathbf{k}$ no instante inicial e o fator $D(t)$ implementa a evolução temporal, uma rotação variável com o tempo. Em particular, se $\vec{\omega}_t = \vec{\omega}_0$, constante, temos também, como em (45.10),

$$R_t \;=\; \exp\Big(t\Big(\vec{\omega}_0\cdot\vec{\mathsf{J}}\Big)\Big)R_0 \;=\; \exp\Big(\big\|\vec{\omega}_0\big\|t\Big(\hat{\omega}_0\cdot\vec{\mathsf{J}}\Big)\Big)R_0\ , \qquad \text{com} \qquad \hat{\omega}_0 \;:=\; \frac{\vec{\omega}_0}{\big\|\vec{\omega}_0\big\|}\ . \tag{45.15}$$

No caso geral de $\vec{\omega}_t$ variável, como $D(t) \in \mathrm{SO}(3)$, vale

$$D(t)^{-1} \;=\; D(t)^T \;\overset{(45.13)}{=}\; \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{k-1}}\Big(\vec{\omega}_{t_k}\cdot\vec{\mathsf{J}}\Big)\cdots\Big(\vec{\omega}_{t_1}\cdot\vec{\mathsf{J}}\Big)\,dt_k\cdots dt_1\ , \tag{45.16}$$

o fator $(-1)^k$ em cada termo da somatória se devendo ao fato de as matrizes $\vec{\omega}_t\cdot\vec{\mathsf{J}}$ serem antissimétricas. Observe também a mudança na ordem do produto dessas matrizes em (45.16) se a compararmos a (45.13).

A expressão (45.13) permite obter expressões gerais para $\vec{q}(t)$ em diversos casos de interesse. Considere em (45.13) a situação em que $\vec{\omega}_t$ não muda de direção. Então, por (21.98), página 1132, vale $\Big[\vec{\omega}_t\cdot\vec{\mathsf{J}},\ \vec{\omega}_{t'}\cdot\vec{\mathsf{J}}\Big] = \big(\vec{\omega}_t\times\vec{\omega}_{t'}\big)\cdot\vec{\mathsf{J}} = 0$

[9] Freeman John Dyson (1923–2020).

para todos t e t', já que $\vec{\omega}_t$ e $\vec{\omega}_{t'}$ são sempre paralelos. Por (14.50), página 744, isso implica que nesse caso temos $D(t) = \exp\left[\left(\int_0^t \omega_{t'} dt'\right) \cdot \vec{\mathsf{J}}\right]$ e, portanto,

$$\vec{q}(t) \;=\; \exp\left[\left(\int_0^t \vec{\omega}_{t'} dt'\right) \cdot \vec{\mathsf{J}}\right] \vec{q}(0) \;. \tag{45.17}$$

E. 45.1 *Exercício*. Retornando ao caso geral da equação (45.8), mostre que se $\vec{c}_t$, $\vec{\omega}_t$ e $\vec{Q}(t)$ forem fornecidos, então $\vec{q}(t)$ é dada por

$$\vec{q}(t) \;=\; \vec{c}_t + D(t)\big(\vec{q}(0) - \vec{c}_0\big) + \int_0^t D(t,\, s) R_s \dot{\vec{Q}}(s)\, ds \;, \tag{45.18}$$

onde $D(t)$ é dada em (45.13) e

$$D(t,\, s) \;:=\; \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_s^t \int_s^{t_1} \cdots \int_s^{t_{k-1}} \Big(\vec{\omega}_{t_1} \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big) \cdots \Big(\vec{\omega}_{t_k} \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)\, dt_k \cdots dt_1 \;. \tag{45.19}$$

Sugestão: Estude o Capítulo 14, página 721, e use (14.12), página 725.

Segundo os resultados do Capítulo 14, temos $D(t,\, s) = D(t)D(s)^{-1}$ e, portanto,

$$\vec{q}(t) \;=\; \vec{c}_t + D(t)\left[\vec{q}(0) - \vec{c}_0 + \int_0^t D(s)^{-1} R_s \dot{\vec{Q}}(s)\, ds\right] \tag{45.20}$$

é uma forma alternativa de se escrever (45.18). ✠

Se em (45.8) considerarmos apenas a condição $\dot{\vec{Q}}(t) = 0$ (o ponto material está fixo em $\mathbf{K}$), temos a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big) \;=\; \vec{\omega}_t \times \big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big) \;, \tag{45.21}$$

cuja solução, segundo (45.20), é

$$\vec{q}(t) \;=\; \vec{c}_t + D(t)\big(\vec{q}(0) - \vec{c}_0\big) \;, \tag{45.22}$$

que generaliza (45.12), no sentido de mostrar que nesse caso o movimento é também uma combinação de um movimento rotacional (com eixo variável), representada pelo termo $D(t)\big(\vec{q}(0) - \vec{c}_0\big)$, com uma translação, representada pelo termo $\vec{c}_t$.

E. 45.2 *Exercício*. Usando (45.14) a relação (45.22) significa que $R_t^{-1}\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big) = R_0^{-1}\big(\vec{q}(0) - \vec{c}_0\big)$. Interprete essa relação em termos da transição entre os sistemas $\mathbf{k}$ e $\mathbf{K}$. Compare (45.22) com a relação (45.2). ✠

É claro por (45.22) que $\frac{d}{dt}\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big)$ (que representa a velocidade relativa do ponto material em relação à origem de $\mathbf{K}$) é um vetor ortogonal a $\vec{\omega}_t$ e a $\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big)$ e que vale também

$$\frac{d}{dt}\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big) \;=\; \vec{\omega}_t \times \big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big)^{\perp} \;, \tag{45.23}$$

onde $\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big)^{\perp} = \big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big) - \left\langle \frac{\vec{\omega}_t}{\|\vec{\omega}_t\|},\, \vec{q}(t) - \vec{c}_t \right\rangle \frac{\vec{\omega}_t}{\|\vec{\omega}_t\|}$ é a componente de $\vec{q}(t) - \vec{c}_t$ ortogonal a $\vec{\omega}_t$. Assim,

$$\left\| \frac{d}{dt}\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big) \right\| \;=\; \|\vec{\omega}_t\| \left\| \big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big)^{\perp} \right\| \;. \tag{45.24}$$

• Aditividade do vetor velocidade angular instantânea

Um ponto relevante na interpretação de $\vec{\omega}_t$ como sendo o vetor que representa a rotação instantânea do sistema de referência $\mathbf{K}$ em relação ao sistema $\mathbf{k}$ é o seu caráter aditivo.

Vamos supor que tenhamos um terceiro sistema de referência $\mathbf{K}'$ que se mova em relação a $\mathbf{K}$. Vamos considerar um ponto material em movimento no espaço, e sejam $\vec{q}(t)$, $\vec{Q}(t)$ e $\vec{Q}'(t)$ os vetores que descrevem sua trajetória nos sistemas $\mathbf{k}$, $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}'$, respectivamente. Segundo nossas considerações prévias, teremos as relações $\vec{q}(t) = R_t\vec{Q}(t) + \vec{c}_t$ e

$\vec{Q}(t) = R'_t\vec{Q}'(t) + \vec{c}'_t$ entre essas coordenadas. Assim, $\vec{q}(t) = \widetilde{R}_t\vec{Q}'(t) + \widetilde{\vec{c}}_t$, onde ($\widetilde{R}_t := R_tR'_t$ e $\widetilde{\vec{c}}_t := R_t\vec{c}'_t + \vec{c}_t$) expressa as coordenadas do ponto material no sistema $\mathbf{k}$ em termos das de $\mathbf{K}'$.

Vamos denotar por $\vec{\omega}_t$ o vetor velocidade angular instantâneo de $\mathbf{K}$ em relação a $\mathbf{k}$, por $\vec{\omega}'_t$ o vetor velocidade angular instantâneo de $\mathbf{K}'$ em relação a $\mathbf{K}$ e por $\widetilde{\vec{\omega}}_t$ o vetor velocidade angular instantâneo de $\mathbf{K}'$ em relação a $\mathbf{k}$.

Pela definição (45.5), temos $\dot{R}_t = \big(\vec{\omega}_t\cdot\vec{\mathsf{J}}\big)R_t$, $\dot{R}'_t = \big(\vec{\omega}'_t\cdot\vec{\mathsf{J}}\big)R'_t$ e $\dot{\widetilde{R}}_t = \big(\widetilde{\vec{\omega}}_t\cdot\vec{\mathsf{J}}\big)\widetilde{R}_t$. Portanto,

$$\widetilde{\vec{\omega}}_t\cdot\vec{\mathsf{J}} := \dot{\widetilde{R}}_t\big(\widetilde{R}_t\big)^{-1} = \Big(\dot{R}_tR'_t + R_t\dot{R}'_t\Big)\big(R'_t\big)^{-1}R_t^{-1} = \Big(\big(\vec{\omega}_t\cdot\vec{\mathsf{J}}\big)R_tR'_t + R_t\big(\vec{\omega}'_t\cdot\vec{\mathsf{J}}\big)R'_t\Big)\big(R'_t\big)^{-1}R_t^{-1}$$

$$= \big(\vec{\omega}_t\cdot\vec{\mathsf{J}}\big) + R_t\big(\vec{\omega}'_t\cdot\vec{\mathsf{J}}\big)R_t^{-1} \overset{(21.119)}{=} \big(\vec{\omega}_t\cdot\vec{\mathsf{J}}\big) + \big(R_t\vec{\omega}'_t\big)\cdot\vec{\mathsf{J}} = \big(\vec{\omega}_t + R_t\vec{\omega}'_t\big)\cdot\vec{\mathsf{J}}\,,$$

provando que

$$\widetilde{\vec{\omega}}_t = \vec{\omega}_t + R_t\vec{\omega}'_t\,. \tag{45.25}$$

Observe-se que, pelas definições, $\vec{\omega}_t$ e $\widetilde{\vec{\omega}}_t$ são elementos de $\mathbf{k}$, enquanto que $\vec{\omega}'_t$ é um elemento de $\mathbf{K}$[10]. O aparecimento do fator R_t em (45.25) é necessário para que se faça a transição do sistema $\mathbf{K}$ (onde $\vec{\omega}'_t$ "vive") para o sistema $\mathbf{k}$.

Essa relação mostra que os vetores que descrevem a velocidade angular instantânea compõem-se aditivamente em cada sistema de referência, o que é coerente com a própria noção de vetor.

E. 45.3 *Exercício*. Usando (45.25), mostre que

$$\dot{\widetilde{\vec{\omega}}}_t = \dot{\vec{\omega}}_t + \vec{\omega}_t\times\big(R_t\vec{\omega}'_t\big) + R_t\dot{\vec{\omega}}'_t\,.$$

✠

• **Ainda sobre a interpretação de $\vec{\omega}_t$**

Se $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}'$ diferem apenas por uma translação, ou seja, se $R'_t = \mathbb{1}$, teremos $\vec{\omega}'_t = 0$ (pois $\vec{\omega}'_t\cdot\vec{\mathsf{J}} = \dot{R}'_t\big(R'_t\big)^{-1}$) e, portanto, (45.25) diz-nos que $\widetilde{\vec{\omega}}_t = \vec{\omega}_t$, o que mostra que o vetor velocidade angular instantânea independe da origem adotada no sistema $\mathbf{K}$, mesmo se esta seja posta em movimento.

Se $\mathbf{k}'$ for um sistema de referência que difere de $\mathbf{k}$ apenas por uma rotação constante, teremos entre suas coordenadas $\vec{q} = S\vec{q}\,'$, com $S\in\mathrm{SO}(3)$. Assim, para a transição entre as coordenadas de $\mathbf{k}'$ e $\mathbf{K}$ teremos $\vec{q}\,' = R'_t\vec{Q} + \vec{c}'_t$, com $R'_t = S^{-1}R_t$ e $\vec{c}'_t = S^{-1}\vec{c}_t$. Portanto, $\vec{\omega}'_t\cdot\vec{\mathsf{J}} := \dot{R}'_t\big(R'_t\big)^{-1} = S^{-1}\Big(\dot{R}_tR_t^{-1}\Big)S = S^{-1}\Big(\vec{\omega}_t\cdot\vec{\mathsf{J}}\Big)S \overset{(21.119)}{=} \Big(S^{-1}\vec{\omega}_t\Big)\cdot\vec{\mathsf{J}}$, estabelecendo que

$$\vec{\omega}'_t = S^{-1}\vec{\omega}_t\,. \tag{45.26}$$

Isso mostra que $\vec{\omega}_t$ transforma-se como um vetor por mudanças de sistemas de referência envolvendo apenas rotações constantes.

• **A Segunda Lei de Newton**

Se $\mathbf{k}$ for um sistema de referência inercial, o movimento de um ponto material de massa $m>0$ sujeito à ação de uma força $\vec{f}\big(\vec{q},\,\dot{\vec{q}},\,t\big)$ é regido pela equação

$$m\ddot{\vec{q}}(t) = \vec{f}\big(q(t),\,\dot{\vec{q}}(t),\,t\big)\,. \tag{45.27}$$

Esse é o conteúdo da chamada *Segunda Lei de Newton*. O caso expresso em (45.27) é o mais comum tratado na Mecânica Clássica e considera apenas forças dependentes da posição e da velocidade do ponto material e no mesmo instante de tempo. Outras possibilidades, como forças com retardo, são também possíveis e fisicamente relevantes em certos casos. No caso mais simples, a lei física expressa em (45.27) manifesta-se na forma de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Para sua solução condições iniciais devem também ser adicionadas, tais como aquelas que fornecem a posição $\vec{q}(t_0)$ e a velocidade $\dot{\vec{q}}(t_0)$ do ponto material no sistema inercial $\mathbf{k}$ em um instante "inicial" t_0. Sob condições

[10] Estritamente falando, o correto matematicamente seria dizer que $\vec{\omega}_t$ e $\widetilde{\vec{\omega}}_t$ são elementos do espaço tangente de $\mathbf{k}$, enquanto que $\vec{\omega}'_t$ é um elemento do espaço tangente de $\mathbf{K}$. Como um sistema de referências Euclidiano coincide em certo sentido com seu espaço tangente, evitamos o que poderia ser visto como um preciosismo de linguagem.

adequadas (por exemplo, continuidade e diferenciabilidade de f em relação à variáveis $\vec{q}$ e $\dot{\vec{q}}$), teoremas gerais da teoria das equações diferenciais ordinárias garantem existência e unicidade de soluções (vide a discussão geral do Capítulo 12, página 674).

Observamos aqui *en passant* que na Mecânica Clássica é assumido que a massa de um ponto material é constante no tempo e é a mesma em quaisquer sistemas de referência, inerciais ou não. Como é bem sabido, esse princípio é falso na Mecânica Relativística.

• **O vetor velocidade angular instantânea intrínseco**

Doravante consideraremos $\mathbf{k}$ como um sistema de referência inercial e $\mathbf{K}$ realiza um movimento Euclidiano em relação a $\mathbf{k}$. O vetor

$$\vec{\Omega}_t \ := \ R_t^{-1}\vec{\omega}_t \tag{45.28}$$

é um vetor em $\mathbf{K}$ e ele representa o vetor velocidade angular instantânea nesse sistema de referência. $\vec{\Omega}_t$ é denominado *vetor velocidade angular instantânea intrínseco* de $\mathbf{K}$. É claro que $\mathbf{K}$ não está em rotação em relação a si mesmo mas, mesmo assim, podemos falar de um vetor de velocidade angular intrínseco em $\mathbf{K}$ pois, como veremos, é possível inferir no próprio $\mathbf{K}$ a existência de sua rotação em relação a um sistema inercial (como $\mathbf{k}$) devido ao surgimento em $\mathbf{K}$ de certas acelerações inerciais. De qualquer forma, é útil definir $\vec{\Omega}_t$ como em (45.28) pois essa expressão aparece amiúde, como nos cômputos que faremos a seguir. Vale notar também que $\|\vec{\Omega}_t\| = \|\vec{\omega}_t\|$, pois R_t é uma matriz ortogonal.

Para verificarmos que $\vec{\Omega}_t$ é, de fato, intrínseco a $\mathbf{K}$, consideremos um outro sistema inercial $\mathbf{k}^\diamond$. Como veremos mais abaixo, o fato de $\mathbf{k}^\diamond$ ser inercial significa que sua origem se move em relação à origem de $\mathbf{k}$ com velocidade constante e que $\mathbf{k}^\diamond$ e $\mathbf{k}$ não giram continuamente um em relação ao outro.

Isso significa que temos entre as coordenadas de $\mathbf{k}$ e de $\mathbf{k}^\diamond$ a relação $\vec{q}^\diamond = S\vec{q} + \big(\vec{v}_0 t + \vec{q}_0\big)$, com $S \in \mathrm{SO}(3)$, constante e $\vec{v}_0$ e $\vec{q}_0$ também constantes. Além disso, temos as relações usuais entre $\mathbf{K}$ e $\mathbf{k}$ e entre $\mathbf{K}$ e $\mathbf{k}^\diamond$: $\vec{q} = R_t\vec{Q} + \vec{c}_t$ e $\vec{q}^\diamond = R_t^\diamond\vec{Q} + \vec{c}_t^\diamond$. Disso seque que $\vec{q}^\diamond = S\vec{q} + \vec{v}_0 t + \vec{q}_0 = (SR_t)\vec{Q} + \big(S\vec{c}_t + \vec{v}_0 t + \vec{q}_0\big)$, o que permite concluir que $R_t^\diamond = SR_t$ e $\vec{c}_t^\diamond = S\vec{c}_t + \vec{v}_0 t + \vec{q}_0$. Portanto,

$$\vec{\omega}_t^\diamond \cdot \vec{\mathsf{J}} \ := \ \dot{R}_t^\diamond\big(R_t^\diamond\big)^{-1} \ = \ S\dot{R}_t\big(R_t^\diamond\big)^{-1} \ = \ S\Big(\vec{\omega}_t \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)R_t\big(R_t^\diamond\big)^{-1} \ = \ S\Big(\vec{\omega}_t \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)S^{-1} \ \overset{(21.119)}{=} \ \big(S\vec{\omega}_t\big) \cdot \vec{\mathsf{J}} \ ,$$

o que implica $\vec{\omega}_t^\diamond = S\vec{\omega}_t$. Consequentemente,

$$\vec{\Omega}_t^\diamond \ := \ \big(R_t^\diamond\big)^{-1}\vec{\omega}_t^\diamond \ = \ \big(R_t^\diamond\big)^{-1}S\vec{\omega}_t \ = \ \big(R_t\big)^{-1}\vec{\omega}_t \ =: \ \vec{\Omega}_t \ ,$$

provando que $\vec{\Omega}_t$ independe do sistema de referência inercial em relação ao qual $\mathbf{K}$ move-se.

E. 45.4 *Exercício*. Mostre que a regra de adição de vetores velocidade angular instantânea (45.25) assume a forma

$$\widetilde{\vec{\Omega}}_t \ = \ \big(R_t'\big)^{-1}\vec{\Omega}_t + \vec{\Omega}_t' \tag{45.29}$$

quando é expressa em termos dos correspondentes vetores velocidade angular instantânea intrínsecos. ✠

• **O caráter vetorial de $\vec{\Omega}_t$**

Se $\mathbf{K}'$ for um outro sistema de referência que difere de $\mathbf{K}$ apenas por uma rotação constante, ou seja, se $\vec{Q} = S^{-1}\vec{Q}'$, com $S \in \mathrm{SO}(3)$, teremos $\vec{q} = R_t'\vec{Q}' + \vec{c}_t$ com $R_t' = R_t S^{-1}$ para a transição entre $\mathbf{K}'$ e $\mathbf{k}$. Portanto,

$$\vec{\Omega}_t' \ = \ \big(R_t'\big)^{-1}\vec{\omega}_t \ = \ S\vec{\Omega}_t \ . \tag{45.30}$$

Isso mostra que $\vec{\Omega}_t$ transforma-se como um vetor por mudanças de sistemas de referência envolvendo apenas rotações constantes.

• **Um resultado útil**

Antes de prosseguirmos, vamos apresentar um resultado útil que usaremos em manipulações diversas vezes no que segue:

Proposição 45.1 *Com as definições dadas acima, valem as seguintes relações*

$$\dot{R}_t = \big(\vec{\omega}_t \cdot \vec{\mathsf{J}}\big) R_t \ , \tag{45.31}$$

$$\dot{R}_t = R_t\big(\vec{\Omega}_t \cdot \vec{\mathsf{J}}\big) \ , \tag{45.32}$$

$$\dot{R}_t\vec{\alpha} = \vec{\omega}_t \times \big(R_t\vec{\alpha}\big) \quad e \tag{45.33}$$

$$\dot{R}_t\vec{\alpha} = R_t\big(\vec{\Omega}_t \times \vec{\alpha}\big) \ , \tag{45.34}$$

onde as duas últimas expressões são para $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$, arbitrário. □

Prova. A relação (45.31) é evidente pela definição (45.5). Podemos escrever $\big(\vec{\omega}_t \cdot \vec{\mathsf{J}}\big)R_t = R_t R_t^{-1}\big(\vec{\omega}_t \cdot \vec{\mathsf{J}}\big)R_t \overset{(21.119)}{=} R_t\Big(\big(R_t^{-1}\vec{\omega}_t\big)\cdot\vec{\mathsf{J}}\Big) = R_t\big(\vec{\Omega}_t\cdot\vec{\mathsf{J}}\big)$, provando (45.32). As relações (45.33) e (45.34) seguem de (45.31) e (45.32), respectivamente, e do fato, mencionado em (21.112), página 1135 (vide também Exercício E. 21.50), que $\Big(\vec{\beta}\cdot\vec{\mathsf{J}}\Big)\vec{\alpha} = \big(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}\big)\mathbb{1}$ para quaisquer $\vec{\alpha},\ \vec{\beta} \in \mathbb{R}^3$. ■

No Apêndice 45.A, página 2660, apresentamos algumas consequências da Proposição 45.1 que não são de importância central para o que segue.

• **Acelerações inerciais e forças inerciais**

Partindo de (45.8) e escrevendo $\vec{Q}(t) = R_t^{-1}\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big)$, temos $\dot{\vec{q}}(t) = \vec{\omega}_t \times \big(R_t\vec{Q}(t)\big) + R_t\dot{\vec{Q}}(t) + \dot{\vec{c}}_t$. Usando (21.116) e escrevendo $\vec{\Omega}_t := R_t^{-1}\vec{\omega}_t$, isso fica

$$\dot{\vec{q}}(t) = R_t\Big[\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}(t) + \dot{\vec{Q}}(t)\Big] + \dot{\vec{c}}_t \ . \tag{45.35}$$

Disso segue que

$$\ddot{\vec{q}}(t) = \dot{R}_t\Big[\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}(t) + \dot{\vec{Q}}(t)\Big] + R_t\Big[\dot{\vec{\Omega}}_t \times \vec{Q}(t) + \vec{\Omega}_t \times \dot{\vec{Q}}(t) + \ddot{\vec{Q}}(t)\Big] + \ddot{\vec{c}}_t \ . \tag{45.36}$$

Usando (45.34), obtemos

$$\ddot{\vec{q}}(t) = R_t\Big[\vec{\Omega}_t \times \big(\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}(t)\big) + 2\vec{\Omega}_t \times \dot{\vec{Q}}(t) + \dot{\vec{\Omega}}_t \times \vec{Q}(t) + \ddot{\vec{Q}}(t)\Big] + \ddot{\vec{c}}_t \ . \tag{45.37}$$

Verifique! Assim, multiplicando-se pela massa m do ponto material, teremos

$$m\ddot{\vec{Q}}(t) = R_t^{-1}\big(m\ddot{\vec{q}}(t)\big) - R_t^{-1}\big(m\ddot{\vec{c}}_t\big) - m\vec{\Omega}_t \times \big(\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}(t)\big) - 2m\vec{\Omega}_t \times \dot{\vec{Q}}(t) - m\dot{\vec{\Omega}}_t \times \vec{Q}(t) \ . \tag{45.38}$$

Naturalmente, como $\mathbf{k}$ é um sistema de referência inercial, $m\ddot{\vec{q}}(t)$ é igual (pela Segunda Lei de Newton) à força externa total resultante $\vec{f}\big(\vec{q}(t),\ \dot{\vec{q}}(t),\ t\big)$ agindo sobre o ponto material no sistema de referência $\mathbf{k}$. A expressão $R_t^{-1}\big(m\ddot{\vec{q}}(t)\big) = R_t^{-1}\vec{f}\big(\vec{q}(t),\ \dot{\vec{q}}(t),\ t\big) =: \vec{F}\big(\vec{Q}(t),\ \dot{\vec{Q}}(t),\ t\big)$ representa essa força externa resultante segundo o sistema de referência $\mathbf{K}$.

Para futura referência, destacamos essa relação

$$\vec{F}\big(\vec{Q}(t),\ \dot{\vec{Q}}(t),\ t\big) := R_t^{-1}\vec{f}\big(\vec{q}(t),\ \dot{\vec{q}}(t),\ t\big) \tag{45.39}$$

entre forças $\vec{F}$ e $\vec{f}$, sobre um ponto material, no sistemas $\mathbf{K}$ e $\mathbf{k}$, respectivamente.

Os quatro demais termos de (45.38) são denominados *forças inerciais* e têm denominações específicas, listadas a seguir. Como comentaremos, forças inerciais são nulas em sistemas de referência inerciais e sua existência é, consequentemente, característica de sistemas não inerciais. É importante notar também que todas as quatro forças inerciais sobre um ponto material são proporcionais à sua massa.

- O termo $-R_t^{-1}\big(m\ddot{\vec{c}}_t\big)$ é uma força inercial denominada *força inercial translacional*. Ela se manifesta mesmo em sistemas de referências não girantes, ao contrário das três forças inerciais a seguir. A expressão $-R_t^{-1}\ddot{\vec{c}}_t$ é denominada *aceleração inercial translacional*. O célebre *princípio de equivalência* (discutido na Seção 34.4.4.3, página 1813), um dos princípios físicos da Teoria da Relatividade Geral, foi formulado com base na impossibilidade de se distinguir a *força inercial translacional* da força produzida por um campo gravitacional espacialmente constante.

- O termo $-m\dot{\vec{\Omega}}_t \times \vec{Q}(t)$ é uma força inercial denominada *força de Euler*[11]. A expressão $-\dot{\vec{\Omega}}_t \times \vec{Q}(t)$ é denominada *aceleração de Euler*, ou também *aceleração azimutal* ou ainda *aceleração transversa*. É importante notar que esse termo só pode se manifestar se $\dot{\vec{\Omega}}_t$ for não nulo, ou seja, se houver uma variação temporal no vetor de velocidade angular instantânea intrínseco.

- O termo $-2m\vec{\Omega}_t \times \dot{\vec{Q}}(t)$ é uma força inercial denominada *força de Coriolis*[12]. A expressão $-2\vec{\Omega}_t \times \dot{\vec{Q}}(t)$ é denominada *aceleração de Coriolis*. É importante notar que esse termo depende de $\dot{\vec{Q}}_t$ e, portanto, <u>não</u> se manifesta se o ponto material estiver parado em relação ao referencial girante $\mathbf{K}$.

  Na Seção 45.3.2, página 2580, discutiremos uma aplicação importante da aceleração de Coriolis, a saber, ao chamado *Pêndulo de Foucault*. A aceleração de Coriolis decorrente do movimento de rotação diurno da Terra tem diversas consequências de interesse científico, como na Meteorologia (formação de ciclones e de ventos alísios). Vide para tal, *e.g.*, [280] ou [399].

- O termo $-m\vec{\Omega}_t \times \big(\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}(t)\big)$ é uma força inercial denominada *força centrífuga*. A expressão $-\vec{\Omega}_t \times \big(\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}(t)\big)$ é denominada *aceleração centrífuga*. Note-se que a aceleração centrífuga é sempre ortogonal ao eixo de rotação instantâneo. É relevante lembrar que, por (4.14), página 305, tem-se para $\vec{\Omega}_t \neq 0$,

$$-\vec{\Omega}_t \times \big(\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}(t)\big) \;=\; -\big\langle \vec{\Omega}_t\,, \vec{Q}(t)\big\rangle \vec{\Omega}_t + \big\|\vec{\Omega}_t\big\|^2 \vec{Q}(t) \;=\; \big\|\vec{\Omega}_t\big\|^2 \vec{Q}^{\perp}(t)\;, \tag{45.40}$$

  onde

$$\vec{Q}^{\perp}(t) \;:=\; \vec{Q}(t) - \left\langle \frac{\vec{\Omega}_t}{\|\vec{\Omega}_t\|},\, \vec{Q}(t) \right\rangle \frac{\vec{\Omega}_t}{\|\vec{\Omega}_t\|}\;,$$

  que claramente representa a projeção de $\vec{Q}(t)$ sobre plano ortogonal a $\vec{\Omega}_t$. Assim, a aceleração centrífuga (e a força centrífuga) sobre um ponto material aponta no sentido de $\vec{Q}^{\perp}(t)$ e tem magnitude igual a $\|\vec{\Omega}_t\|^2\big\|\vec{Q}^{\perp}(t)\big\| = \|\vec{\Omega}_t\|^2\big\|\vec{Q}(t)\big\|\,\mathrm{sen}\theta(t)$, onde $\theta(t) \in [0,\,\pi]$ é o ângulo entre $\vec{\Omega}_t$ e $\vec{Q}(t)$.

A relação (45.37) tem outra consequência relevante:

Proposição 45.2 *Se* $\mathbf{k}$ *for um sistema de referência inercial, então um segundo sistema de referência* $\mathbf{K}$*, cujas coordenadas se relacionam às de* $\mathbf{k}$ *por* $\vec{Q} = R_t^{-1}(\vec{q} - \vec{c}_t)$*, será também um sistema inercial se e somente se* R_t *e* $\dot{\vec{c}}_t$ *forem constantes e, portanto, se e somente se a transformação de coordenadas entre os sistemas de* $\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{K}$ *for da forma* $\vec{Q} = R_0^{-1}\vec{q} - \vec{v}_0 t - \vec{q}_0$*, com* $R_0 \in \mathrm{SO}(3)$*, constante, e* $\vec{v}_0,\ \vec{q}_0 \in \mathbb{R}^3$*, ambos constantes.* □

Em outras palavras, se $\mathbf{k}$ for um sistema de referência inercial, então um segundo sistema de referência $\mathbf{K}$ será também um sistema inercial se e somente se $\mathbf{K}$ não estiver girando continuamente em relação a $\mathbf{k}$, mas apenas se transladando com velocidade constante.

Prova da Proposição 45.2. A primeira lei de Newton afirma que um ponto material que mova sob a ação de forças externas resultantes nulas terá aceleração nula em qualquer sistema de referência inercial.

I. Se $\mathbf{k}$ for inercial e as coordenadas de $\mathbf{K}$ se relacionarem às de $\mathbf{k}$ segundo $Q \overset{\text{def}}{=} R^{-1}(\vec{q} - \vec{c}_t)$ com R e $\dot{\vec{c}}_t$ constantes, teremos $\ddot{\vec{Q}}(t) = R^{-1}\ddot{\vec{q}}(t)$. Logo, se $\ddot{\vec{q}}(t) = 0$ teremos também $\ddot{\vec{Q}}(t) = 0$, provando que $\mathbf{K}$ é também inercial.

[11] Leonhard Euler (1707–1783).

[12] Gaspard-Gustave de Coriolis (1792–1843). O trabalho de Coriolis é de 1832, mas teve muitos predecessores, tais como Giovanni Battista Riccioli (1598–1671) e Francesco Maria Grimaldi (1618–1663), que descreveram o efeito da aceleração de Coriolis na obra *"Almagestum Novum"*, de 1651; Claude François Milliet Dechales (1621–1678), que previu, em 1674, o efeito descrito na Seção 45.3.1, página 2577, e Euler, que foi o primeiro a obter a expressão para a aceleração de Coriolis, em 1749. Foi somente nas primeiras décadas do século XX que as expressões "aceleração de Coriolis" e "força de Coriolis" foram popularizadas.

II. Vamos supor agora que **k** e **K** são inerciais e seja um ponto material que mova sob a ação de uma força externa resultante nula. Teremos $\ddot{\vec{q}}(t) = 0$ e $\ddot{\vec{Q}}(t) = 0$, o que implica, segundo (45.37),

$$\vec{\Omega}_t \times \big(\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}(t)\big) + 2\vec{\Omega}_t \times \dot{\vec{Q}}(t) + \dot{\vec{\Omega}}_t \times \vec{Q}(t) + R_t^{-1}\ddot{\vec{c}}_t \;=\; 0\,. \tag{45.41}$$

Essa relação deve ser válida para todos os valores de $\vec{Q}(t)$ e de $\dot{\vec{Q}}(t)$. Assim, os termos $2\vec{\Omega}_t \times \dot{\vec{Q}}(t)$ e $R_t^{-1}\ddot{\vec{c}}_t$ devem ser nulos independentemente dos demais[13]. Isso implica que $\ddot{\vec{c}}_t = 0$ e $\vec{\Omega}_t = 0$ para todo t[14] . A relação $\vec{\Omega}_t = 0$, por definição, implica que $\dot{R}_t$ deve ser nula e implica a nulidade dos termos faltantes: $\vec{\Omega}_t \times \big(\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}(t)\big)$ e $\dot{\vec{\Omega}}_t \times \vec{Q}(t)$. Concluímos que nesse caso devemos ter R_t e $\dot{\vec{c}}_t$ constantes, completando a demonstração. ■

O seguinte corolário é evidente:

Corolário 45.1 *As acelerações inerciais e as forças inerciais são nulas em todos os sistemas de referência inerciais. Logo, um sistema de referência será não inercial se ao menos uma das acelerações ou forças inerciais for não nula.* □

Dessa forma devemos entender que forças inerciais sobre um ponto material em um sistema de referência não inercial são um artefato da descrição do movimento em tais sistemas e não provêm de interações "reais" que ajam sobre ele.

• O Grupo de Galilei não homogêneo

As transformações do tipo $\vec{q} \mapsto R_0^{-1}\vec{q} - \vec{v}_0 t - \vec{q}_0$ com $R_0 \in \mathrm{SO}(3)$, constante, e $\vec{v}_0,\ \vec{q}_0 \in \mathbb{R}^3$, ambos constantes, são denominadas *transformações de Galilei*[15] e compõem um grupo, conhecido como *Grupo de Galilei não homogêneo*, estudado na Seção 21.7.7, página 1200 (vide, em particular, a página 1202). O Grupo de Galilei não homogêneo é, assim, o grupo das transformações (não relativísticas) de sistemas inerciais entre si.

E. 45.5 *Exercício*. Verifique que trata-se realmente de um grupo. ✠

• A Segunda Lei de Newton. Covariância em relação a mudanças de sistemas de referência inerciais

Se **k** e **K** são inerciais, temos para as coordenadas que descrevem a trajetória de um ponto material a relação $\vec{q}(t) = R\vec{Q}(t) + \vec{c}_t$, com $\vec{c}_t = \dot{\vec{c}}_0 t + \vec{c}_0$, dado que $\dot{\vec{c}}_t = \dot{\vec{c}}_0$, por ser constante. Assim, temos por (45.38) que

$$\vec{F}\big(\vec{Q}(t),\ \dot{\vec{Q}}(t),\ t\big) \;=\; R^{-1}\vec{f}\big(\vec{q}(t),\ \dot{\vec{q}}(t),\ t\big)\,, \tag{45.42}$$

ou seja

$$\vec{F}\big(\vec{Q}(t),\ \dot{\vec{Q}}(t),\ t\big) \;=\; R^{-1}\vec{f}\big(\vec{q}(t),\ \dot{\vec{q}}(t),\ t\big) \;=\; R^{-1}\vec{f}\Big(R\vec{Q}(t) + \dot{\vec{c}}_0 t + \vec{c}_0,\ R\dot{\vec{Q}}(t) + \dot{\vec{c}}_0,\ t\Big)\,. \tag{45.43}$$

A relação entre $\vec{F}$ e $\vec{f}$, expressa nas relações (45.42) e (45.43), manifesta a covariância das interações externas que agem sobre o ponto material.

• Movimento de um ponto material visto de um referencial não inercial

Se a trajetória $\vec{q}(t)$ de um ponto material em um sistema de referência **k** for fornecida, essa trajetória no sistema de referência **K** será dada, segundo (45.4) e (45.14), por

$$\vec{Q}(t) \;=\; R_0^{-1}D(t)^{-1}\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big)\,, \tag{45.44}$$

com $D(t)^{-1}$ dado em (45.16).

[13] Por $R_t^{-1}\ddot{\vec{c}}_t$ ser independente de $\vec{Q}(t)$ e de $\dot{\vec{Q}}(t)$ e por $2\vec{\Omega}_t \times \dot{\vec{Q}}(t)$ ser o único termo dependente de $\dot{\vec{Q}}(t)$.

[14] Se $2\vec{\Omega}_t \times \dot{\vec{Q}}(t)$ é nulo para todo $\dot{\vec{Q}}(t)$ então, em particular, é nulo quando $\dot{\vec{Q}}(t)$ é ortogonal a $\vec{\Omega}_t$. Nesse caso, porém, tem-se $\|\vec{\Omega}_t \times \dot{\vec{Q}}(t)\| = \|\vec{\Omega}_t\|\,\|\dot{\vec{Q}}(t)\|$ e, portanto, $\|\vec{\Omega}_t\|$ deve ser nulo.

[15] Galileo di Vincenzo Bonaiuti de' Galilei (1564–1642).

No caso em que $\vec{\omega}_t = \vec{\omega}_0$, constante, e $R_0 = \mathbb{1}$ (o que significa que os eixos de $\mathbf{k}$ e $\mathbf{K}$ são paralelos em $t = 0$) obtemos, fazendo uso da Fórmula de Rodrigues (21.106), página 1133,

$$\vec{Q}(t) = \exp\Big(- \|\vec{\omega}_0\| t \big(\hat{\omega}_0 \cdot \vec{\mathsf{J}}\big)\Big)\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big) \tag{45.45}$$

$$\overset{(21.106)}{=} \cos\big(\|\vec{\omega}_0\| t\big)\big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big) + \Big(1 - \cos\big(\|\vec{\omega}_0\| t\big)\Big)\Big(\hat{\omega}_0 \cdot \big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big)\Big)\hat{\omega}_0$$

$$- \operatorname{sen}\big(\|\vec{\omega}_0\| t\big)\Big(\hat{\omega}_0 \times \big(\vec{q}(t) - \vec{c}_t\big)\Big) . \tag{45.46}$$

Essa relação fornece a trajetória do ponto material no sistema $\mathbf{K}$ a partir de sua trajetória em $\mathbf{k}$ no caso descrito ($\vec{\omega}_t$ constante e $R_0 = \mathbb{1}$).

• **Movimento de um ponto material livre visto de um referencial não inercial**

Considere-se um ponto material livre de forças externas. Sua trajetória $\vec{q}(t)$ no referencial inercial $\mathbf{k}$ é dada por

$$\vec{q}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{q}_0 ,$$

que descreve um movimento retilíneo uniforme. Sua trajetória $\vec{Q}(t)$ em um referencial não inercial $\mathbf{K}$ é dada, segundo (45.44), por

$$\vec{Q}(t) = R_0^{-1} D(t)^{-1}\big(\vec{v}_0 t + \vec{q}_0 - \vec{c}_t\big) . \tag{45.47}$$

Vamos considerar o caso mais simples, onde $\vec{c}_t = 0$, $\vec{\omega}_t = \vec{\omega}_0$, constante e $R_0 = \mathbb{1}$. Logo, as origens de $\mathbf{k}$ e $\mathbf{K}$ coincidem para todo t, assim como seus eixos em $t = 0$ (pois $R_0 = \mathbb{1}$), sendo que $\mathbf{K}$ gira em torno de $\mathbf{k}$ com velocidade angular constante $\vec{\omega}_0$. Temos, por (45.46),

$$\vec{Q}(t) = \exp\Big(- \|\vec{\omega}_0\| t \big(\hat{\omega}_0 \cdot \vec{\mathsf{J}}\big)\Big)\big(\vec{v}_0 t + \vec{q}_0\big) \tag{45.48}$$

$$= \cos\big(\|\vec{\omega}_0\| t\big)\big(\vec{v}_0 t + \vec{q}_0\big) + \Big(1 - \cos\big(\|\vec{\omega}_0\| t\big)\Big)\Big(\hat{\omega}_0 \cdot \big(\vec{v}_0 t + \vec{q}_0\big)\Big)\hat{\omega}_0$$

$$- \operatorname{sen}\big(\|\vec{\omega}_0\| t\big)\Big(\hat{\omega}_0 \times \big(\vec{v}_0 t + \vec{q}_0\big)\Big) . \tag{45.49}$$

E. 45.6 *Exercício*. Na solução (45.49), mostre que se $\vec{v}_0$ e $\vec{q}_0$ são ortogonais a $\hat{\omega}_0$, então $\vec{Q}(t)$ é igualmente ortogonal a $\hat{\omega}_0$ para todo t. Esse resultado é inesperado? Note que nesse caso vale

$$\vec{Q}(t) = \Big[\cos\big(\|\vec{\omega}_0\| t\big)\vec{q}_0 - \operatorname{sen}\big(\|\vec{\omega}_0\| t\big)\Big(\hat{\omega}_0 \times \vec{q}_0\Big)\Big] + t\Big[\cos\big(\|\vec{\omega}_0\| t\big)\vec{v}_0 - \operatorname{sen}\big(\|\vec{\omega}_0\| t\big)\Big(\hat{\omega}_0 \times \vec{v}_0\Big)\Big] ,$$

que combina um movimento circular uniforme com velocidade angular $\|\vec{\omega}_0\|$ (o primeiro termo em $[\cdots]$) com outro movimento circular, mas com raio linearmente crescente com o tempo t (o segundo termo $t[\cdots]$). ✠

É claro por (45.49) que o movimento do ponto material livre visto do sistema não inercial $\mathbf{K}$ não é mais retilíneo e uniforme. Pode-se atribuir isso à ação em $\mathbf{K}$ de duas forças inerciais: a força centrífuga e a força de Coriolis. O exercício E. 45.7, página 2566, ajuda a esclarecer isso.

* ** *** ** *

• **Alguns exercícios**

E. 45.7 *Exercício*. Na expressão (45.49), calcule $\ddot{\vec{Q}}(t)$ e identifique quais termos correspondem à aceleração centrífuga e quais à aceleração de Coriolis, calculando separadamente essas duas acelerações inerciais. ✠

E. 45.8 *Exercício*. Considere um navio N de massa M em movimento ao longo de uma latitude λ, fixa, da Terra, sendo $\lambda \in [-\pi/2,\ \pi/2]$ ($\lambda = 0$ corresponde à linha do Equador e $\lambda = \pi/2$ ao polo Norte). Seja V sua velocidade no sistema de referência da Terra. V é suposta constante ao longo dessa latitude e convencione que V é positiva se o navio move-se no rumo leste e negativa no rumo oeste.

Determine a força centrífuga e a força de Coriolis sobre o navio N. Para qual valor de V a força de Coriolis supera a força centrífuga em magnitude? Para qual valor de V (positivo ou negativo) as duas forças são iguais e opostas.

Um navio de grande porte pode alcançar a velocidade de aproximadamente 28km/h. Para essa velocidade, compare em termos de percentagens o valor da componente vertical da força centrífuga e da força de Coriolis em relação ao peso do navio N.

Em qual situação a linha-d'água do navio N (que é sempre medida de baixo para cima, a partir do fundo do navio) deve ficar mais alta: quando o navio se move em direção ao leste o ao oeste? Justifique. ✠

O efeito descrito no exercício anterior, devido à componente vertical da força de Coriolis, é conhecido como *efeito Eötvös*[16].

E. 45.9 *Exercício*. Os EUA construíram seu maior centro de lançamento de foguetes no sul da Flórida e a França nas Guianas. Por que motivo prático, relacionado à economia de combustíveis dos foguetes, essas escolhas foram feitas? Justifique qualitativa e quantitativamente. ✠

45.2 Mecânica de Pontos Materiais

Nesta seção recordaremos resultados elementares, muito bem conhecidos, da Mecânica de uma coleção finita de pontos materiais. Esses resultados serão adiante usados no tratamento da dinâmica de corpos rígidos.

Considere-se uma coleção $\mathscr{C}$ de $n \geq 1$ pontos materiais cujas trajetórias são descritos em um sistema inercial de coordenadas $\mathbf{k}$ por coordenadas $\vec{q}_i(t)$, $i = 1, \ldots,\ n$, e cujas massas são $m_i > 0$, $i = 1, \ldots,\ n$.

A massa total e o chamado *centro de massa* dessa coleção $\mathscr{C}$ de pontos materiais são definidos por

$$M \ := \ \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad \text{e} \qquad \vec{q}_{\mathrm{cm}}(t) \ := \ \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{q}_i(t)\ .$$

Nosso propósito imediato é expressar grandezas mecânicas, como a energia cinética, o momento linear e o momento angular desse sistema de pontos materiais em termos de suas coordenadas em um outro sistema de referência $\mathbf{K}$, não necessariamente inercial, cujas coordenadas relacionem-se às de $\mathbf{k}$ pela relação $\vec{q}(t) = R_t\vec{Q}(t) + \vec{c}_t$, que já usamos repetidas vezes.

Escolhemos esse sistema $\mathbf{K}$ de sorte que $\vec{c}_t = \vec{q}_{\mathrm{cm}}(t)$, ou seja, escolhemos a origem do sistema de coordenadas $\mathbf{K}$ coincidente com o centro de massa do conjunto $\mathscr{C}$. Essa escolha é realizada por mera conveniência: as expressões que obteremos abaixo ficam muito simplificadas com essa escolha.

Temos para cada ponto material as relações $\vec{q}_i(t) = R_t\vec{Q}_i(t) + \vec{q}_{\mathrm{cm}}(t)$ e $\dot{\vec{q}}_i(t) = R_t\Big[\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}_i(t) + \dot{\vec{Q}}_i(t)\Big] + \dot{\vec{q}}_{\mathrm{cm}}(t)$, onde $\vec{Q}_i(t)$ fornece a trajetória do i-ésimo ponto material no sistema $\mathbf{K}$. Usaremos essas relações sem mais comentários nos cômputos que seguem. É importante notar que com a escolha $\vec{c}_t = \vec{q}_{\mathrm{cm}}(t)$ temos

$$M\vec{q}_{\mathrm{cm}}(t) \ = \ \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{q}_i(t) \ = \ R_t\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{Q}_i(t)\right) + M\vec{q}_{\mathrm{cm}}(t)\ ,$$

o que implica que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{Q}_i(t) \ = \ 0 \qquad \text{e, portanto, que} \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\vec{Q}}_i(t) \ = \ 0 \tag{45.50}$$

para todo t. Essas relações expressam, no sistema $\mathbf{K}$, a condição de que o centro de massa encontra-se fixo na origem de $\mathbf{K}$.

[16] Barão Loránd Eötvös de Vásárosnamény (1848–1919).

• **A energia cinética de uma coleção finita de pontos materiais**

A energia cinética da coleção de pontos materiais $\mathscr{C}$ no sistema $\mathbf{k}$, que denotaremos por $e_c(t)$, é dada por

$$e_c(t) \;:=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \big\|\dot{\vec{q}}_i(t)\big\|^2$$

e pode ser reescrita em termos das coordenadas do sistema $\mathbf{K}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e_c(t) \;:=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \big\|\dot{\vec{q}}_i(t)\big\|^2 \;&=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \Big\|\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}_i(t) + \dot{\vec{Q}}_i(t) + R_t^{-1}\dot{\vec{q}}_{\mathrm{cm}}(t)\Big\|^2 \\ &=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \Bigg[\Big\|\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}_i(t)\Big\|^2 + \big\|\dot{\vec{Q}}_i(t)\big\|^2 + \big\|\dot{\vec{q}}_{\mathrm{cm}}(t)\big\|^2 \\ &\quad +2\big(\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}_i(t)\big)\cdot\dot{\vec{Q}}_i(t) + 2\big(\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}_i(t)\big)\cdot\big(R_t^{-1}\dot{\vec{q}}_{\mathrm{cm}}(t)\big) + 2\dot{\vec{Q}}_i(t)\cdot\big(R_t^{-1}\dot{\vec{q}}_{\mathrm{cm}}(t)\big)\Bigg]\,. \end{aligned}$$

Devido a (45.50), os dois últimos termos são nulos. Com isso,

$$e_c(t) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \Bigg[\Big\|\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}_i(t)\Big\|^2 + \big\|\dot{\vec{Q}}_i(t)\big\|^2 + \big\|\dot{\vec{q}}_{\mathrm{cm}}(t)\big\|^2 + 2\big(\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}_i(t)\big)\cdot\dot{\vec{Q}}_i(t)\Bigg]\,. \tag{45.51}$$

Vamos agora reescrever o primeiro e o último termos da expressão (45.51). Para o último, usamos que

$$\big(\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}_i(t)\big)\cdot\dot{\vec{Q}}_i(t) \;\overset{(4.13)}{=}\; \big(\vec{Q}_i(t) \times \dot{\vec{Q}}_i(t)\big)\cdot\vec{\Omega}_t \tag{45.52}$$

e para o primeiro, escrevemos

$$\begin{aligned} \Big\|\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}_i(t)\Big\|^2 \;&=\; \Big(\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}_i(t)\Big)\cdot\Big(\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}_i(t)\Big) \\ &\overset{(4.16)}{=}\; \|\vec{\Omega}_t\|^2\|\vec{Q}_i(t)\|^2 - \Big(\vec{\Omega}_t\cdot\vec{Q}_i(t)\Big)^2 \;=\; \sum_{a=1}^{3}\sum_{b=1}^{3}\big(\vec{\Omega}_t\big)_a\Big[\|\vec{Q}_i(t)\|^2\delta_{ab} - Q_i(t)_a Q_i(t)_b\Big]\big(\vec{\Omega}_t\big)_b\,, \end{aligned}$$

onde $Q_i(t)_a$ é a a-ésima componente do vetor $\vec{Q}_i(t)$. Denotemos por $I(t)$ a matriz real 3×3 cujo elemento de matriz $I(t)_{ab}$ é definido por

$$I(t)_{ab} \;:=\; \sum_{i=1}^{n} m_i\Big[\big\|\vec{Q}_i(t)\big\|^2\delta_{ab} - Q_i(t)_a Q_i(t)_b\Big]\,. \tag{45.53}$$

Com isso, podemos escrever

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\Big\|\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}_i(t)\Big\|^2 \;=\; \frac{1}{2}\vec{\Omega}_t\cdot\Big(I(t)\vec{\Omega}_t\Big)\,, \tag{45.54}$$

Verifique!

A matriz $I(t)$ é denominada *matriz momento de inércia*, *operador momento de inércia* ou, mais frequentemente, *tensor momento de inércia* do conjunto $\mathscr{C}$. O tensor momento de inércia desempenha um papel importante na descrição do movimento rotacional de corpos rígidos e suas propriedades serão estudadas com mais detalhe futuramente. O tensor momento de inércia aparecerá novamente logo adiante quando tratarmos do momento angular do conjunto $\mathscr{C}$.

Por ora, fazemos notar que o tensor momento de inércia definido em (45.53) deveria, com mais precisão, ser denominado tensor momento de inércia do sistema de pontos materiais no sistema $\mathbf{K}$ com relação à origem.

A razão de $I(t)$ ser denominado um *tensor* será esclarecida adiante, mas é importante frisar que nas manipulações que faremos $I(t)$ é simplesmente uma matriz 3×3 que age em vetores de $\mathbb{R}^3$. Fazemos notar também que, como se vê na definição (45.53)), $I(t)$ é uma matriz simétrica: $I(t)_{ab} = I(t)_{ba}$ para todos $a,\ b \in \{1,\ 2,\ 3\}$.

Retornando com (45.52) e (45.54) a (45.51), temos (verifique!)

$$e_c(t) \;=\; \frac{1}{2}\vec{\Omega}_t\cdot\big(I(t)\vec{\Omega}_t\big)+\vec{\Omega}_t\cdot\vec{L}(t)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\big\|\dot{\vec{Q}}_i(t)\big\|^2+\frac{M}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\big\|^2\;, \tag{45.55}$$

onde introduzimos as grandezas

$$\vec{L}(t)\;:=\;\sum_{i=1}^{n}\vec{\vec{L}}_i(t)\quad\text{ e }\quad \vec{L}_i(t)\;:=\;m_i\vec{Q}_i(t)\times\dot{\vec{Q}}_i(t)\;. \tag{45.56}$$

$\vec{L}_i(t)$ representa o vetor momento angular do i-ésimo ponto material de $\mathscr{C}$ no sistema $\mathbf{K}$ (em relação à origem de $\mathbf{K}$) e $\vec{L}(t)$ representa o vetor momento angular total da coleção $\mathscr{C}$ no sistema $\mathbf{K}$ (também em relação à origem de $\mathbf{K}$).

Notemos que dois dos termos de (45.55) são reconhecíveis: 1º o termo $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\big\|\dot{\vec{Q}}_i(t)\big\|^2=:E_C(t)$ representa a energia cinética da coleção $\mathscr{C}$ de pontos materiais no sistema $\mathbf{K}$. 2º o termo $\frac{M}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\big\|^2$ representa a energia cinética do movimento do centro de massa em $\mathbf{k}$, ou seja, de um ponto material de massa M que se movesse com velocidade $\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)$ no sistema $\mathbf{k}$. Os termos $\frac{1}{2}\vec{\Omega}_t\cdot\big(I(t)\vec{\Omega}_t\big)+\vec{\Omega}_t\cdot\vec{L}(t)$ são contribuições provenientes da rotação do sistema de referência $\mathbf{K}$.

Há dois casos de maior interesse:

1. Caso $\vec{\Omega}_t=0$,
$$e_c(t)\;=\;\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\big\|\dot{\vec{Q}}_i(t)\big\|^2+\frac{M}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\big\|^2\;.$$
O primeiro termo é a energia cinética da coleção de pontos materiais $\mathscr{C}$ no sistema $\mathbf{K}$ enquanto que o segundo é a energia cinética associada ao movimento do centro de massa no sistema $\mathbf{k}$.

2. Caso $\dot{\vec{Q}}_i(t)=0$ para todo i (corpos rígidos),
$$e_c(t)\;=\;\frac{1}{2}\vec{\Omega}_t\cdot\big(I\vec{\Omega}_t\big)+\frac{M}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\big\|^2\;. \tag{45.57}$$
Neste caso I é constante, ou seja, não varia com o tempo, pois os $\vec{Q}_i(s)$ são todos constantes. Como discutiremos melhor adiante, o primeiro termo é a energia cinética associada à rotação (rígida) do conjunto $\mathscr{C}$. O segundo é a energia cinética associada ao movimento do centro de massa de $\mathscr{C}$ no sistema $\mathbf{k}$.

• **Transformações por rotações de sistemas de coordenadas**

Consideremos agora a situação, já discutida acima, na qual temos dois sistemas $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}'$ que diferem por uma rotação constante, ou seja, tem-se $\vec{Q}=S^{-1}\vec{Q}'$ com $S\in\mathrm{SO}(3)$, e tem-se $\vec{\Omega}'_t=S\vec{\Omega}_t$, segundo (45.30). A energia cinética obtida em (45.55) deve, evidentemente, ser a mesma em $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}'$. É claro que $\big\|\dot{\vec{Q}}_i(t)\big\|$ e $\big\|\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\big\|$ não mudam com a passagem de $\mathbf{K}$ a $\mathbf{K}'$, mas da invariância dos demais termos concluímos que

$$\Big\langle\vec{\Omega}_t,\,I(t)\vec{\Omega}_t\Big\rangle\;=\;\Big\langle\vec{\Omega}'_t,\,I'(t)\vec{\Omega}'_t\Big\rangle\qquad\text{e que}\qquad\Big\langle\vec{\Omega}_t,\,\vec{L}(t)\Big\rangle\;=\;\Big\langle\vec{\Omega}'_t,\,\vec{L}'(t)\Big\rangle\;,$$

ou seja,

$$\Big\langle\vec{\Omega}_t,\,I(t)\vec{\Omega}_t\Big\rangle\;=\;\Big\langle\vec{\Omega}_t,\,S^{-1}I'(t)S\vec{\Omega}_t\Big\rangle\qquad\text{e}\qquad\Big\langle\vec{\Omega}_t,\,\vec{L}(t)\Big\rangle\;=\;\Big\langle\vec{\Omega}_t,\,S^{-1}\vec{L}'(t)\Big\rangle\;.$$

Concluímos que $\vec{L}'(t)=S\vec{L}(t)$, fato esse que pode ser provado diretamente da definição de $\vec{L}(t)$ (faça-o!), e que

$$I'(t)\;=\;SI(t)S^{-1}\;. \tag{45.58}$$

Essa última relação é importante, por mostrar como a matriz momento de inércia transforma-se por rotações do sistema de referência $\mathbf{K}$. Escrevendo-se de forma explícita o produto de matrizes (45.58) (e usando o fato que $S^{-1}=S^T$), temos para os elementos de matriz a seguinte regra de transformação:

$$I'(t)_{ab}\;=\;\sum_{c=1}^{3}\sum_{d=1}^{3}S_{ac}S_{bd}\;I(t)_{cd}\;. \tag{45.59}$$

Verifique! É importante comparar essa regra de transformação com a regra correspondente para a transformação de componentes de vetores, como $\vec{\Omega}_t$, que, pela a relação $\vec{\Omega}'_t = S\vec{\Omega}_t$, são da forma

$$\left(\vec{\Omega}'_t\right)_a \;=\; \sum_{b=1}^{3} S_{ab}\,\left(\vec{\Omega}_t\right)_b\,. \tag{45.60}$$

Uma grandeza física cujas componentes se transformam por rotações (constantes) segundo (45.59) é dita ser um *tensor de segunda ordem*. Um vetor é um tensor de primeira ordem. Vários tipos de tensores ocorrem de forma importante na Física, como no Eletromagnetismo, na Teoria da Relatividade e na Mecânica dos Corpos Elasticamente Deformáveis (para referências sobre essa última área, de onde o próprio vocábulo "tensor" se originou, vide [306] ou [469]). A definição matemática, mais geral e abstrata, da noção de tensor é apresentada e desenvolvida no Capítulo 2, página 111.

Essas considerações justificam por que I é também denominado *tensor de momento de inércia*.

• **O momento linear de uma coleção finita de pontos materiais**

O momento linear da coleção $\mathscr{C}$ de pontos materiais no sistema $\mathbf{k}$ é dado simplesmente por

$$\vec{p}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\vec{q}}_i(t) \;=\; M\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\,. \tag{45.61}$$

Ele corresponde, portanto, ao momento linear associado ao movimento do centro de massa.

• **O momento angular de uma coleção finita de pontos materiais**

O momento angular do i-ésimo ponto material da coleção $\mathscr{C}$ no sistema $\mathbf{k}$, em relação à origem desse sistema é definido por

$$\vec{l}_i(t) \;:=\; m_i\vec{q}_i(t)\times\dot{\vec{q}}_i(t)\,.$$

O momento angular da coleção $\mathscr{C}$ no sistema $\mathbf{k}$, em relação à origem desse sistema, é definido por

$$\vec{l}(t) \;:=\; \sum_{i=1}^{n}\vec{l}_i(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{q}_i(t)\times\dot{\vec{q}}_i(t)$$

e pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\vec{l}(t) \;&=\; \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{q}_i(t)\times\dot{\vec{q}}_i(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} m_i\big(R_t\vec{Q}_i(t)+\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)\times\Big(R_t\Big[\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_i(t)+\dot{\vec{Q}}_i(t)\Big]+\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\Big)\\
&=\; R_t\sum_{i=1}^{n} m_i\big(\vec{Q}_i(t)+R_t^{-1}\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)\times\Big(\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_i(t)+\dot{\vec{Q}}_i(t)+R_t^{-1}\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\Big)\\
&=\; R_t\Bigg[\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{Q}_i(t)\times\big(\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_i(t)\big)+\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{Q}_i(t)\times\dot{\vec{Q}}_i(t)+\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{Q}_i(t)\right)}_{=0}\times\big(R_t^{-1}\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\big)\\
&\qquad+\big(R_t^{-1}\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)\times\left(\vec{\Omega}_t\times\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{Q}_i(t)\right)}_{=0}\right)+\big(R_t^{-1}\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)\times\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\vec{Q}}_i(t)\right)}_{=0}+M\big(R_t^{-1}\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)\times\big(R_t^{-1}\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\big)\Bigg]\\
&=\; R_t\Bigg[\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{Q}_i(t)\times\big(\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_i(t)\big)+\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{Q}_i(t)\times\dot{\vec{Q}}_i(t)\Bigg]+M\vec{q}_{\rm cm}(t)\times\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\,.
\end{aligned}$$

Consideremos na última expressão o termo

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{Q}_i(t)\times\big(\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_i(t)\big) \;\overset{(4.14)}{=}\; \sum_{i=1}^{n} m_i\big\|\vec{Q}_i(t)\big\|^2\vec{\Omega}_t-\sum_{i=1}^{n} m_i\Big(\vec{Q}_i(t)\cdot\vec{\Omega}_t\Big)\,\vec{Q}_i(t)\,. \tag{45.62}$$

A a-ésima componente do vetor do lado direito de (45.62) é

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Big[\big\|\vec{Q}_i(t)\big\|^2 \big(\vec{\Omega}_t\big)_a - \big(\vec{Q}_i(t)\cdot\vec{\Omega}_t\big)\big(\vec{Q}_i(t)\big)_a \Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{b=1}^{3} \Big[\big\|\vec{Q}_i(t)\big\|^2 \delta_{ab} - \big(\vec{Q}_i(t)\big)_b \big(\vec{Q}_i(t)\big)_a \Big] \big(\vec{\Omega}_t\big)_b \;=\; \sum_{b=1}^{3} I_{ab}(t) \big(\vec{\Omega}_t\big)_b \;=\; \big(I(t)\vec{\Omega}_t\big)_a \,.$$

Assim,

$$\vec{l}(t) \;=\; R_t\,\vec{J}(t) + M\vec{q}_{\rm cm}(t)\times\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\,, \tag{45.63}$$

com

$$\vec{J}(t) \;:=\; I(t)\vec{\Omega}_t + \vec{L}(t)\,, \tag{45.64}$$

sendo $\vec{L}(t)$ definido em (45.56). Os termos acima têm interpretações específicas. O termo $M\vec{q}_{\rm cm}(t)\times\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)$ corresponde ao momento angular do movimento do centro de massa no sistema inercial $\mathbf{k}$, em relação à origem de $\mathbf{k}$. Esse termo é por vezes denominado *momento angular orbital* da coleção $\mathscr{C}$. O termo $\vec{J(t)} := I(t)\vec{\Omega}_t + \vec{L}(t)$ compõe o que se denomina *momento angular intrínseco* da coleção de pontos materiais $\mathscr{C}$ no sistema de referência $\mathbf{K}$. Note-se que o termo $I(t)\vec{\Omega}_t$ é obviamente nulo no caso em que $\vec{\Omega}_t = 0$. O termo $\vec{L}(t)$ é o momento angular da coleção $\mathscr{C}$ no sistema $\mathbf{K}$, em relação à origem desse sistema, ou seja, em relação ao centro de massa. Note-se que esse termo é nulo no caso de corpos rígidos.

Há, assim, dois casos de maior interesse:

1. Caso $\vec{\Omega}_t = 0$, temos $\vec{J}(t) = \vec{L}(t)$ e
$$\vec{l}(t) \;=\; R_t\vec{L}(t) + M\vec{q}_{\rm cm}(t)\times\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\,.$$

2. Caso $\dot{\vec{Q}}_i(t) = 0$ para todo i (corpos rígidos), temos $\vec{J}(t) = I\vec{\Omega}_t$ (nesse caso I é constante, ou seja, não varia com o tempo) e
$$\vec{l}(t) \;=\; R_t I\vec{\Omega}_t + M\vec{q}_{\rm cm}(t)\times\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\,.$$
Chamamos a atenção para o fato que $\vec{J}(t) = I\vec{\Omega}_t$ e $\vec{\Omega}_t$ não são necessariamente vetores paralelos, notadamente se I não for proporcional à matriz identidade. Tal ocorre especialmente no caso de corpos rígidos assimétricos.

• **As equações dinâmicas**

Suporemos que cada ponto material da coleção $\mathscr{C}$ considerado esteja sujeito, quando analisado do sistema inercial $\mathbf{k}$, a uma força $\vec{f}_i^{\,e}$ resultante da interação com o exterior e de forças internas resultantes da interação dos próprios pontos materiais da coleção $\mathscr{C}$ entre si. Denotaremos por $\vec{f}_{j\to i}$ a força que o j-ésimo ponto material exerce sobre o i-ésimo. Adotaremos também a convenção que $\vec{f}_{i\to i} = 0$ para todo i. A força total resultante será, portanto $\vec{f}_i^{\,e} + \sum_{j=1}^{n}\vec{f}_{j\to i}$.

As forças $\vec{f}_{j\to i}$ podem ser funções de t, das coordenadas $\vec{q}_k$, e das velocidades $\dot{\vec{q}}_k$, com $k = 1, \ldots, n$, mas sobre elas faremos duas hipóteses: que vale $\vec{f}_{j\to i} = -\vec{f}_{i\to j}$ e que o vetor $\vec{f}_{j\to i}$ é paralelo ao vetor $\vec{q}_i - \vec{q}_j$.

Pela segunda lei de Newton, temos

$$m_i\ddot{\vec{q}}_i(t) \;=\; \vec{f}_i^{\,e} + \sum_{j=1}^{n}\vec{f}_{j\to i}\,, \tag{45.65}$$

e, portanto, para o momento linear total da coleção $\mathscr{C}$ de pontos materiais, dado em (45.61),

$$\dot{\vec{p}}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\vec{f}_i^{\,e} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{f}_{j\to i}\,.$$

A condição $\vec{f}_{j\to i} = -\vec{f}_{i\to j}$ implica $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{f}_{j\to i} = 0$, pois

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{f}_{j\to i} \;=\; \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{f}_{j\to i} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\vec{f}_{i\to j}\right] \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\big(\underbrace{\vec{f}_{j\to i} + \vec{f}_{i\to j}}_{=0}\big) \;=\; 0\,,$$

sendo que na primeira igualdade simplesmente trocamos as letras $i \leftrightarrow j$ na segunda somatória. Assim,

$$\dot{\vec{p}}(t) \;=\; \vec{f}^{Te}\;, \qquad \text{com} \qquad \vec{f}^{Te} \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i^{\,e}\;. \tag{45.66}$$

$\vec{f}^{Te}$ representa a força externa total agindo sobre a coleção de pontos materiais $\mathscr{C}$. Note-se que a relação (45.66) diz-nos também que

$$M\ddot{\vec{q}}_{\rm cm}(t) \;=\; \vec{f}^{Te}\;, \tag{45.67}$$

ou seja, o movimento do centro de massa obedece a segunda lei de Newton e se dá como se um ponto material de massa M e coordenadas $\vec{q}_{\rm cm}$ se movesse sob a ação da força externa total $\vec{f}^{Te}$. Sob as hipóteses, as interações internas não afetam o movimento do centro de massa.

Estudemos agora a variação temporal do momento angular total do conjunto $\mathscr{C}$ de pontos materiais (em relação à origem do sistema $\mathbf{k}$). Para o i-ésimo ponto material, temos $\dot{\vec{l}}_i(t) \;:=\; m_i\vec{q}_i(t)\times\ddot{\vec{q}}_i(t) = \vec{q}_i(t)\times\Big(\vec{f}_i^{\,e} + \sum_{j=1}^{n}\vec{f}_{j\to i}\Big)$. Assim, para o momento angular total, vale

$$\dot{\vec{l}}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{l}}_i(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\vec{q}_i(t)\times\vec{f}_i^{\,e} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{q}_i(t)\times\vec{f}_{j\to i}\;.$$

Escrevemos,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{q}_i(t)\times\vec{f}_{j\to i} \;&=\; \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{q}_i(t)\times\vec{f}_{j\to i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{q}_j(t)\times\vec{f}_{i\to j}\right]\\
&=\; \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{q}_i(t)\times\vec{f}_{j\to i} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{q}_j(t)\times\vec{f}_{j\to i}\right]\\
&=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\vec{q}_i(t)-\vec{q}_j(t)\Big)\times\vec{f}_{j\to i} \;=\; 0\;,
\end{aligned}$$

pela hipótese que $\vec{f}_{j\to i}$ e $\vec{q}_i(t)-\vec{q}_j(t)$ são paralelos. Novamente, na primeira igualdade simplesmente fizemos a troca $i\leftrightarrow j$ na segunda somatória. Logo,

$$\dot{\vec{l}}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\vec{q}_i(t)\times\vec{f}_i^{\,e}\;.$$

Se agora escrevermos $\vec{q}_i(t) = R_t\vec{Q}_i(t) + q_{\rm cm}(t)$, e definirmos $\vec{F}_i^{\,e} := R_t^{-1}\vec{f}_i^{\,e}$, teremos

$$\dot{\vec{l}}(t) \;=\; R_t\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{Q}_i(t)\times\vec{F}_i^{\,e}\right) + \vec{q}_{\rm cm}(t)\times\vec{f}^{Te}\;.$$

Usando-se em seguida a relação (45.63), obtemos

$$\dot{\vec{l}}(t) \;=\; \frac{d}{dt}\Big(R_t\,\vec{J}(t)\Big) + M\vec{q}_{\rm cm}(t)\times\ddot{\vec{q}}_{\rm cm}(t) \;=\; R_t\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{Q}_i(t)\times\vec{F}_i^{\,e}\right) + \vec{q}_{\rm cm}(t)\times\vec{f}^{Te}\;, \tag{45.68}$$

com $\vec{J}(t)$ definido em (45.64). Essa expressão contém duas igualdades distintas. Sabemos que

$$M\vec{q}_{\rm cm}(t)\times\ddot{\vec{q}}_{\rm cm}(t) \;\overset{(45.67)}{=}\; \vec{q}_{\rm cm}(t)\times\vec{f}^{Te}\;,$$

o que iguala dois dos termos de (45.68). (A expressão $\vec{q}_{\rm cm}(t)\times\vec{f}^{Te}$ representa o torque exercido pelas forças externas sobre o centro de massa (sempre em relação à origem de $\mathbf{k}$)). Consequentemente, (45.71) reduz-se a

$$\frac{d}{dt}\Big(R_t\,\vec{J}(t)\Big) \;=\; R_t\sum_{i=1}^{n}\vec{Q}_i(t)\times\vec{F}_i^{\,e}\;, \tag{45.69}$$

relação esta que expressa a variação do momento angular intrínseco do corpo rígido no sistema de referência **k**, expresso por

$$\vec{\jmath}(t) \;:=\; R_t\,\vec{J}(t)\;.$$

Note-se que na ausência de torque resultante das forças externas, temos de (45.69) a lei de conservação

$$\vec{\jmath}(t) \;=\; \text{constante}, \tag{45.70}$$

que expressa a lei de conservação do momento angular *em um sistema de referência inercial*. O estudante deve entender que, embora $\vec{\jmath}(t)$ seja conservado quando da ausência de torque das forças externas, $\vec{J}(t)$ não necessariamente o é. A conservação de $\vec{\jmath}(t)$ reflete a simetria de rotações do sistema inercial **k**. O sistema **K**, porém, não é geralmente inercial, e portanto, não deve necessariamente refletir essa propriedade de simetria.

Usando (45.34) para expressar $\dot{R}_t$, a relação (45.68) fica

$$\dot{\vec{l}}(t) \;=\; R_t\dot{\vec{J}}(t) + R_t\big(\vec{\Omega}_t\times\vec{J}(t)\big) + M\vec{q}_{\rm cm}(t)\times\ddot{\vec{q}}_{\rm cm}(t) \;=\; R_t\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{Q}_i(t)\times\vec{F}_i^e\right) + \vec{q}_{\rm cm}(t)\times\vec{f}^{Te}\;, \tag{45.71}$$

ou seja,

$$\dot{\vec{J}}(t) + \vec{\Omega}_t\times\vec{J}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\vec{Q}_i(t)\times\vec{F}_i^e\;, \tag{45.72}$$

com $\vec{J}(t)$ definido em (45.64). O lado esquerdo é a derivada temporal do momento angular intrínseco (no sistema **K**) do conjunto $\mathscr{C}$ de pontos materiais que consideramos. O lado direito é o torque exercido pelas forças externas no sistema de referência **K** do centro de massa (em relação à origem de **K**).

A relação (45.72) expressa a lei de variação do momento angular intrínseco da coleção $\mathscr{C}$ de pontos materiais no sistema **K** e é denominada *equação de Euler*. Outras versões particulares dessa equação serão vistas no que segue.

Há dois casos particulares relevantes a considerar:

1. No caso em que $\vec{\Omega}_t = 0$ tem-se $\vec{J}(t) = \vec{L}(t)$ e a relação (45.72) reduz-se a

$$\dot{\vec{L}}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\vec{Q}_i(t)\times\vec{F}_i^e\;. \tag{45.73}$$

2. No caso em que $\dot{\vec{Q}}_i(t) = 0$ (que ocorre em corpos rígidos), tem-se $\vec{J}(t) = I\vec{\Omega}_t$ (recordar que I é constante nesse caso) e a relação (45.72) reduz-se a

$$\frac{d}{dt}\big(I\vec{\Omega}_t\big) \;=\; \big(I\vec{\Omega}_t\big)\times\vec{\Omega}_t + \sum_{i=1}^{n}\vec{Q}_i\times\vec{F}_i^e\;. \tag{45.74}$$

Na ausência de forças externas isso reduz-se a

$$\frac{d}{dt}\big(I\vec{\Omega}_t\big) \;=\; \big(I\vec{\Omega}_t\big)\times\vec{\Omega}_t\;. \tag{45.75}$$

As relações (45.74) e (45.75) são as célebres *equações de Euler da Mecânica de Corpos Rígidos*, as quais serão discutidas com mais detalhe adiante. Note-se que (45.74) e (45.75) são expressas no sistema de coordenadas **K**.

• **A energia mecânica e sua conservação**

Em um sistema de referência inercial, uma força $\vec{f}$, dependente apenas da posição, é dita ser conservativa se houver uma função U, denominada *potencial*, tal que $\vec{f}(q) = -(\vec{\nabla}U)(\vec{q})$.

Vamos retornar a (45.65) com as seguintes hipóteses adicionais: a força externa $\vec{f}_i^e \equiv \vec{f}_i^e\big(\vec{q}_1,\,\ldots,\,\vec{q}_n\big)$ é conservativa, ou seja, existe um potencial $U^e\big(\vec{q}_1,\,\ldots,\,\vec{q}_n\big)$ tal que $\vec{f}_i^e\big(\vec{q}_1,\,\ldots,\,\vec{q}_n\big) = -\big(\vec{\nabla}_iU^e\big)\big(\vec{q}_1,\,\ldots,\,\vec{q}_n\big)$. (Aqui $\vec{\nabla}_i$ é o gradiente relativo às coordenadas de $\vec{q}_i$).

As forças internas $\vec{f}_{j\to i}$ dependem apenas do vetor $\vec{q}_i - \vec{q}_j$, são conservativas e existem, para cada par $\{i,\, j\}$, potenciais $U_{ji}\big(\|\vec{q}\|\big) = U_{ij}\big(\|\vec{q}\|\big)$ (as funções $U_{ji} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ são funções de uma variável) tais que

$$\vec{f}_{j\to i} \;=\; -\vec{\nabla}_i\Big(U_{ji}\big(\|\vec{q}_i - \vec{q}_j\|\big)\Big) \;=\; -U'_{ij}\big(\|\vec{q}_i - \vec{q}_j\|\big)\frac{\vec{q}_i - \vec{q}_j}{\|\vec{q}_i - \vec{q}_j\|}\,.$$

Com isso, temos satisfeita a condição $\vec{f}_{j\to i} = -\vec{f}_{i\to j}$, e a condição que $\vec{f}_{j\to i}$ e $\vec{q}_i - \vec{q}_j$ são vetores paralelos, ambas já supostas acima quando tratamos da conservação do momento linear e do momento angular.

Note-se que, como $\vec{f}_{i\to i} = 0$, adotamos U_{ii} como a função identicamente nula.

Segundo (45.65), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_i(t)\big\|^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\vec{q}}_i(t)\cdot\ddot{\vec{q}}_i(t) \;&\overset{(45.65)}{=}\; \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{\vec{q}}_i(t)\cdot\vec{f}_i^{\,e} + \sum_{j=1}^{n}\dot{\vec{q}}_i(t)\cdot\vec{f}_{j\to i}\right)\\
&=\; -\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{q}}_i(t)\cdot\big(\vec{\nabla}_i U^e\big)\big(\vec{q}_1(t),\,\ldots,\,\vec{q}_n(t)\big)\\
&\quad -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\dot{\vec{q}}_i(t)\cdot\vec{\nabla}_i\Big(U_{ji}\big(\|\vec{q}_i(t) - \vec{q}_j(t)\|\big)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Escrevemos agora

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{q}}_i(t)\cdot\big(\vec{\nabla}_i U^e\big)\big(\vec{q}_1(t),\,\ldots,\,\vec{q}_n(t)\big) \;=\; \frac{d}{dt}U^e\big(\vec{q}_1(t),\,\ldots,\,\vec{q}_n(t)\big)$$

e

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_i(t)\cdot\vec{\nabla}_i\Big(U_{ji}\big(\|q_i(t) - q_j(t)\|\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\dot{\vec{q}}_i(t)\cdot\vec{\nabla}_i\Big(U_{ji}\big(\|\vec{q}_i(t)-\vec{q}_j(t)\|\big)\Big)+\dot{\vec{q}}_j(t)\cdot\vec{\nabla}_j\Big(U_{ji}\big(\|\vec{q}_i(t)-\vec{q}_j(t)\|\big)\Big)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}U_{ji}\big(\|\vec{q}_i(t) - \vec{q}_j(t)\|\big)\right)\,,$$

(acima, na primeira igualdade, usamos que $U_{ji} = U_{ij}$) e com isso concluímos que

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_i(t)\big\|^2 + U^e\big(\vec{q}_1(t),\,\ldots,\,\vec{q}_n(t)\big) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}U_{ji}\big(\|\vec{q}_i(t) - \vec{q}_j(t)\|\big)\right) \;=\; 0\,. \tag{45.76}$$

A grandeza

$$e_m(t) \;:=\; \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_i(t)\big\|^2 + U^e\big(\vec{q}_1(t),\,\ldots,\,\vec{q}_n(t)\big) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}U_{ji}\big(\|\vec{q}_i(t) - \vec{q}_j(t)\|\big) \tag{45.77}$$

é denominada *energia mecânica* do sistema de n pontos materiais e (45.76) ensina-nos que ela é uma constante de movimento.

Observe-se que podemos escrever

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}U_{ji}\big(\|\vec{q}_i(t) - \vec{q}_j(t)\|\big) \;=\; \sum_{1\le i<j\le n}U_{ji}\big(\|\vec{q}_i(t) - \vec{q}_j(t)\|\big) \;=\; \sum_{\text{pares }\{i,\,j\}\text{ distintos}}U_{ji}\big(\|\vec{q}_i(t) - \vec{q}_j(t)\|\big)\,.$$

Essa grandeza é a *energia potencial interna* dos n pontos materiais, enquanto que $U^e\big(\vec{q}_1(t),\,\ldots,\,\vec{q}_n(t)\big)$ é a *energia potencial externa* desses pontos.

Uma situação muito comum é aquela na qual

$$U^e\big(\vec{q}_1,\ \ldots,\ \vec{q}_n\big) \ = \ \sum_{i=1}^{n} U_i^e(\vec{q}_i)\ , \tag{45.78}$$

quando a energia potencial externa é a soma de energia potenciais individuais de cada ponto material. Naturalmente, em ambos os casos a energia mecânica é conservada. Consideraremos apenas o caso (45.78) no que segue.

Vamos agora expressar a energia mecânica em termos de grandezas do sistema **K**. Usando a expressão (45.55) para a energia cinética, temos

$$e_m(t) \ = \ \frac{1}{2}\vec{\Omega}_t\cdot\big(I(t)\vec{\Omega}_t\big)+\vec{\Omega}_t\cdot\vec{L}(t)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\big\|\dot{\vec{Q}}_i(t)\big\|^2+\frac{M}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\big\|^2$$

$$+\sum_{i=1}^{n} U_i^e\Big(R_t\vec{Q}_i(t)+\vec{q}_{\rm cm}(t)\Big)+\sum_{1\leq i<j\leq n} U_{ji}\Big(\big\|\vec{Q}_i(t)-\vec{Q}_j(t)\big\|\Big)\ , \tag{45.79}$$

Acima, usamos o fato que $U_{ji}\Big(\big\|\vec{q}_i(t)-\vec{q}_j(t)\big\|\Big)=U_{ji}\Big(\big\|R_t\big(\vec{Q}_i(t)-\vec{Q}_j(t)\big)\big\|\Big)=U_{ji}\Big(\big\|\vec{Q}_i(t)-\vec{Q}_j(t)\big\|\Big)$.

Há dois casos de maior interesse:

1. Caso $\vec{\Omega}_t=0$,

$$e_m \ = \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\big\|\dot{\vec{Q}}_i(t)\big\|^2+\frac{M}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\big\|^2+\sum_{i=1}^{n} U_i^e\Big(R_0\vec{Q}_i(t)+\vec{q}_{\rm cm}(t)\Big)+\sum_{1\leq i<j\leq n} U_{ji}\Big(\big\|\vec{Q}_i(t)-\vec{Q}_j(t)\big\|\Big)\ ,$$

   com $R_t=R_0\in{\rm SO}(3)$, constante.

2. Caso $\dot{\vec{Q}}_i(t)=0$ para todo i (corpos rígidos),

$$e_m \ = \ \frac{1}{2}\vec{\Omega}_t\cdot\big(I\vec{\Omega}_t\big)+\frac{M}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\big\|^2+\sum_{i=1}^{n} U_i^e\Big(R_t\vec{Q}_i+\vec{q}_{\rm cm}(t)\Big)+\sum_{1\leq i<j\leq n} U_{ji}\Big(\big\|\vec{Q}_i-\vec{Q}_j\big\|\Big)\ . \tag{45.80}$$

   Neste caso I é constante, ou seja, não varia com o tempo. No caso de corpos rígidos, as distâncias $\|\vec{q}_i(t)-\vec{q}_j(t)\|=\|\vec{Q}_i-\vec{Q}_j\|$ são constantes ao longo do movimento. Assim, para corpos rígidos a *energia potencial interna* é uma constante e a energia mecânica pode ser reduzida, por subtração de uma constante, a

$$e_m \ = \ \frac{1}{2}\vec{\Omega}_t\cdot\big(I\vec{\Omega}_t\big)+\frac{M}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\big\|^2+\sum_{i=1}^{n} U_i^e\Big(R_t\vec{Q}_i+q_{\rm cm}(t)\Big)\ , \tag{45.81}$$

   que, naturalmente, é também uma constante de movimento.

45.3 Interlúdio. Aceleração de Coriolis e a Rotação Diurna da Terra

A esfericidade da Terra é conhecida desde a Antiguidade, tendo sua circunferência sido medida pela primeira vez por Eratóstenes[17], com impressionante precisão, em cerca de 240 a.C. O movimento de rotação diurna do Sol e das estrelas é um fato de constatação imediata e reconhecido desde o princípio dos tempos. Sua interpretação, porém, foi objeto de controvérsias que se estenderam por séculos, ou mesmo milênios. Será que a Terra gira em torno de um eixo próprio de rotação ou estará ela parada, com o restante do universo girando em seu redor? Concepções filosóficas e mesmo religiosas dificultaram por longo tempo a aceitação da ideia de a Terra encontrar-se em movimento e em uma posição secundária

[17] Eratóstenes de Cirene, 276 a.C.–194 a.C.

no cosmos, levando à criação de modelos astronômicos, ditos "geocêntricos", nos quais a Terra era colocada imóvel no centro do universo, com este movendo-se ao seu redor, de modo a dar conta das observações.

Alguns poucos, porém, desenvolveram a percepção de que modelos que colocavam a Terra girando diariamente em torno de um eixo próprio e movendo-se anualmente em torno do Sol, com os demais planetas fazendo o mesmo, forneciam explicações mais simples para as observações astronômicas. Um dos primeiros registros medievais contrários à ideia de uma Terra estacionária partiu do filósofo, teólogo, astrônomo e matemático Nicolau de Oresme[18], que rejeitou o argumento de que o movimento de rotação da Terra causaria um forte vento para Oeste indicando como solução que a atmosfera deveria acompanhar essa rotação, e apontou que a suposição da rotação da Terra explicaria de forma mais simples os fenômenos observados no movimento diurno do Sol e das estrelas do que a suposição que o Universo inteiro rodaria. Essa primazia dada à economia dos argumentos parece atestar a influência do filósofo franciscano britânico Guilherme de Ockham[19] sobre o pensamento de Nicolau de Oresme, mas este último ponderou que a ausência de evidências diretas deixava a crença final a critério daqueles que se debruçassem sobre essas questões. Em um passo audaz para seu tempo, Nicolau de Oresme também rejeitou uma passagem bíblica, que afirmava estar a Terra parada, com a argumentação de que *"essa passagem está em conformidade com o uso costumeiro do discurso popular"*, não devendo, portanto, ser tomada em sentido literal, um argumento que seria repetido por muitos posteriormente, como por Galilei. Para um texto sobre as raízes medievais da Ciência moderna, vide [197].

Embora modelos "heliocêntricos" (com o Sol no centro do Universo, em torno do qual os planetas e a Terra moviam-se, tendo esta também um movimento diurno de rotação em torno de um seu eixo) tenham sido sugeridos já na Antiguidade (na antiga Grécia, por Aristarco de Samos[20]; na antiga Índia, em textos védicos), foi somente com Copérnico[21] que um modelo matemático foi apresentado que evidenciava a simplicidade dessas ideias.

Simplicidade, porém, não é evidência de realidade e colocou-se a questão de se apresentar uma prova empírica da existência desses movimentos.

A procura de evidência empírica da rotação diurna da Terra tornou-se, assim, uma questão científica fundamental, tendo sido perseguida por longo tempo, como por Galilei, um grande defensor de Copérnico, e seus sucessores. Uma grande parte da dificuldade em se decidir essa questão residiu na ausência de distinção entre sistemas de referência inerciais e não inerciais, conceitos que somente surgiram com os escritos de Galilei sobre a Dinâmica e com o advento da Mecânica Newtoniana.

A proposta que foi lentamente se assentando, ainda que não tenha sido formulada nesses termos, foi a de se demonstrar a realidade do movimento de rotação diurna da Terra por meio da mensuração das acelerações inerciais por ele geradas em um sistema de referência fixo a ela.

Nesta Seção, discutimos duas classes de experimentos que procuraram evidenciar o movimento de rotação diurna da Terra por meio da mensuração de efeitos da aceleração de Coriolis induzidos por essa rotação no sistema de referência não inercial fixo à Terra. São os experimentos de desvio da queda livre e os experimento do pêndulo de Foucault.

Façamos antes um breve comentário sobre medições do movimento de translação anual da Terra em torno do Sol.

• A realidade do movimento de translação anual da Terra

Ao contrário do que ocorre com o movimento de rotação diurno da Terra, a realidade do movimento de translação anual da Terra em torno do Sol não pode evidenciada facilmente por meio de mensuração de acelerações inerciais, por essas serem muitíssimo pequenas.

O movimento de translação anual da Terra em torno do Sol tornou-se difícil de ser contrariado após a previsão teórica, feita por Newton, de que suas ideias sobre a dinâmica combinadas à sua teoria sobre a força gravitacional tinham como implicação que o movimento de planetas em torno do Sol (desprezando-se as perturbações que estes exercem entre si) deveria seguir trajetórias elípticas, fato já anteriormente constatado para a trajetória de Marte, por Kepler[22], em 1604.

A confirmação da realidade desse movimento de translação, porém, surgiu da observação de dois efeitos: a *aberração estelar* e a *paralaxe anual de estrelas*.

A aberração estelar é um fenômeno que produz um deslocamento aparente de estrelas de suas posições na esfera celeste, dependendo da velocidade do observador, devido à alteração da frente de ondas da luz (ou seja, do ângulo

[18] Nicolau de Oresme (ci. 1320 ou 1325–1382). Sua obra astronômica denomina-se *"Le Livre du ciel et du monde"*, publicada em 1377.
[19] William of Ockham (ci. 1287–1347).
[20] Aristarco de Samos (ci. 310 a.C.–ci. 230 a.C.).
[21] Nicolau Copérnico (1473–1543).
[22] Johannes Kepler (1571–1630).

de incidência da luz) causada pelo movimento do observador. É um efeito periódico, de período anual, pois o vetor velocidade da Terra muda de sentido à medida que ela gira em torno do Sol. O primeiro a observar esse efeito em estrelas, e constatar sua periodicidade, foi Bradley[23] em 1729.

A primeira observação da paralaxe anual de estrelas foi realizada por Bessel[24], em 1838, para a estrela *61 Cygni*. Medidas de paralaxe estelar são muito difíceis, por serem as distâncias do sistema solar às estrelas muito grandes. Na verdade, a aparente ausência de paralaxes estelares fora anteriormente usada como argumento *contra* o heliocentrismo, já que parecia inconcebível que as distâncias interestelares fossem tão gigantescas a ponto de minimizar esses efeitos e torná-los não observáveis. Foi somente com desenvolvimentos tecnológicos do início do século XIX que essas medidas foram possíveis em algumas estrelas mais próximas ao Sol.

Vale lembrar aqui um princípio enunciado por Planck[25] e que grandemente elucida o verdadeiro processo por trás dos avanços na Ciência e de outras áreas:

> *"Uma nova verdade científica não triunfa convencendo seus oponentes e fazendo-os ver a luz, mas sim porque esses oponentes acabam morrendo e cresce uma nova geração familiarizada com ela...*
>
> *Uma importante inovação científica raramente abre caminho conquistando e convertendo gradualmente seus oponentes: raramente acontece de Saulo se tornar Paulo. O que ocorre é que seus oponentes gradualmente desaparecem, e que a geração crescente está familiarizada com as ideias desde o início: outro exemplo do fato de que o futuro está com a juventude".*
>
> - Max Planck, in [404].

Ou seja, a Ciência avança um funeral por vez.

45.3.1 Experimentos de Queda Livre e Mensuração de seu Desvio

Consideremos um ponto P da superfície da Terra com latitude $\lambda \in [-\pi/2,\ \pi/2]$ ($\lambda = \pi/2$ corresponde ao polo Norte e $\lambda = 0$ à linha do Equador). Consideremos um sistema de eixos ortogonais centrado em P, fixo à Terra, com versores ortogonais $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3$, com $\mathbf{e}_3$ sendo o versor vertical em P, apontando no sentido radial a partir do centro da Terra, com $\mathbf{e}_1$ apontando no sentido Norte-Sul e $\mathbf{e}_2$ no sentido Oeste-Leste. O ponto P, naturalmente, tem coordenadas $(0,\ 0,\ 0)$ no sistema $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$.

Um ponto material de massa m é solto de uma altura h, medida a partir do solo e pequena em comparação ao raio da Terra. Sua velocidade inicial em relação à Terra é nula. No sistema de referência acima seu vetor-posição como função do tempo é $\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3$, sendo $\vec{r}(0) = h\mathbf{e}_3$.

O vetor velocidade angular instantânea da Terra é $\vec{\Omega}^T$. No sistema $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$, o eixo de rotação da Terra encontra-se no plano $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3)$ e o vetor velocidade angular intrínseca é dado por

$$\vec{\Omega}^T \ = \ -\Omega^T \cos(\lambda)\mathbf{e}_1 + \Omega^T \operatorname{sen}(\lambda)\mathbf{e}_3 \ ,$$

(verifique!) onde $\Omega^T \equiv \|\vec{\Omega}^T\|$ é a velocidade angular de rotação da Terra: $\Omega^T \approxeq 2\pi/(24\text{h}) \approxeq 7,2 \times 10^{-5}\text{s}^{-1}$. Recordar que a Terra gira no sentido oeste-leste com um período diurno de aproximadamente $23\text{h}59\text{m}59,9997848\text{s}$.

Consideraremos que, em seu movimento de queda, agem duas forças sobre o ponto material: a força peso $-mg\mathbf{e}_3$ (com $g \approxeq 9,8/s^2$ sendo a aceleração da gravidade próximo à superfície da Terra) e a força de Coriolis

$$-2m\vec{\Omega}^T \times \dot{\vec{r}}(t) \ = \ 2m\Omega^T\Big(\dot{y}(t)\operatorname{sen}(\lambda)\mathbf{e}_1 - \big(\dot{x}(t)\operatorname{sen}(\lambda) + \dot{z}(t)\cos(\lambda)\big)\mathbf{e}_2 + \dot{y}(t)\cos(\lambda)\mathbf{e}_3\Big) \ .$$

Como nos limitaremos a cálculos em primeira ordem em Ω^T (que é "pequeno"), não consideraremos a força centrífuga proveniente da rotação da Terra, por ela ser proporcional a $(\Omega^T)^2$ (vide (45.40), página 2564)). O máximo valor da aceleração centrífuga em um ponto da superfície da Terra se dá na linha do Equador e vale $(\Omega^T)^2 R_T \approxeq 3,3 \times 10^{-2}\text{m/s}^2$ (vide (45.40), página 2564), portanto apenas cerca de $0,3\%$ da aceleração da gravidade na superfície da Terra.

[23] James Bradley (1692–1762).
[24] Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846).
[25] Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947).

As equações de movimento que regem a queda do ponto material são, portanto,

$$\ddot{\vec{r}}(t) \;=\; -g\mathbf{e}_3 + 2\Omega^T\Big(\dot{y}(t)\,\mathrm{sen}(\lambda)\mathbf{e}_1 - \big(\dot{x}(t)\,\mathrm{sen}(\lambda) + \dot{z}(t)\cos(\lambda)\big)\mathbf{e}_2 + \dot{y}(t)\cos(\lambda)\mathbf{e}_3\Big)\;,$$

ou, em termos das componentes,

$$\ddot{x}(t) \;=\; 2\dot{y}(t)\Omega^T\,\mathrm{sen}(\lambda)\;, \tag{45.82}$$

$$\ddot{y}(t) \;=\; -2\Omega^T\big(\dot{x}(t)\,\mathrm{sen}(\lambda) + \dot{z}(t)\cos(\lambda)\big)\;, \tag{45.83}$$

$$\ddot{z}(t) \;=\; -g + 2\dot{y}(t)\Omega^T\cos(\lambda)\;. \tag{45.84}$$

Vamos usar as ideias da Teoria de Perturbações para resolver esse sistema até primeira ordem em Ω^T, escrevendo $\vec{r}$ na forma $\vec{r}_0 + \vec{r}_1$ com $\vec{r}_0$ contendo termos de ordem zero em Ω^T e $\vec{r}_1$ contendo termos de ordem um em Ω^T. Para $\Omega^T = 0$ o sistema acima reduz-se a

$$\ddot{x}_0(t) \;=\; 0\;, \tag{45.85}$$

$$\ddot{y}_0(t) \;=\; 0\;, \tag{45.86}$$

$$\ddot{z}_0(t) \;=\; -g\;, \tag{45.87}$$

cuja solução, sob as condições iniciais dadas, é $x_0(t) = 0$, $y_0(t) = 0$ e $z_0(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$. Substituindo isso no sistema (45.82)–(45.84) temos para os termos de primeira ordem o sistema

$$\ddot{x}_1(t) \;=\; 0\;, \tag{45.88}$$

$$\ddot{y}_1(t) \;=\; -2\Omega^T\dot{z}_0(t)\cos(\lambda) \;=\; 2g\Omega^T\cos(\lambda)\,t\;, \tag{45.89}$$

$$\ddot{z}_1(t) \;=\; 0\;. \tag{45.90}$$

sendo que desprezamos termos como $x_1\Omega^T$, $y_1\Omega^T$ e $z_1\Omega^T$ por serem de segunda ordem em Ω^T. A solução do sistema (45.88)–(45.90) é

$$x_1(t) \;=\; 0, \qquad y_1(t) \;=\; \frac{g}{3}\Omega^T\cos(\lambda)\,t^3 \quad \text{e} \quad z_1(t) \;=\; 0\;.$$

Assim, considerando os termos de ordem zero e um, temos a solução

$$x(t) \;=\; 0, \qquad y(t) \;=\; \frac{g}{3}\Omega^T\cos(\lambda)\,t^3 \quad \text{e} \quad z(t) \;=\; h - \frac{1}{2}gt^2\;,$$

já com as condições iniciais satisfeitas.

É claro que o ponto material atingirá o solo no instante de tempo em que $z(t) = 0$, ou seja, nessa aproximação, no instante de tempo $t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Nesse instante de tempo teremos $x(t_s) = 0$ e

$$y(t_s) \;=\; \frac{g}{3}\Omega^T\cos(\lambda)t_s^3 \;=\; \frac{2}{3}\Omega^T\cos(\lambda)\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\;.$$

Concluímos que, devido à força de Coriolis relacionada à rotação diurna da Terra, nas aproximações consideradas, o ponto de queda devia-se do ponto P para Leste de

$$\delta(h) \;=\; \frac{2}{3}\Omega^T\cos(\lambda)\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\;. \tag{45.91}$$

(Lembrar que $\cos(\lambda) \geq 0$, sendo nulo apenas nos polos).

Adotando os valores $\Omega^T \approxeq 2\pi/24\,\mathrm{h} \approxeq 7,2 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$ e $g \approxeq 9,8\,\mathrm{m/s}^2$, temos nas unidades do Sistema Internacional (SI):

$$\delta(h) \;=\; \left(2,1 \times 10^{-5}\right) \cos(\lambda)\, h^{3/2} \;,$$

com h e $\delta(h)$ medidos em metros.

Para a cidade de São Paulo, por exemplo, temos a latitude $\lambda \approxeq -23°33'$ e $\cos(\lambda) \approxeq 0,917$. Assim, a título de ilustração, temos os seguintes valores para os desvios de quedas de alturas $h = 10\,\mathrm{m}$, $50\,\mathrm{m}$, $100\,\mathrm{m}$ e $1\,\mathrm{km}$:

$$\delta(10\,\mathrm{m}) \;=\; 0,6\,\mathrm{mm}\;, \qquad \delta(50\,\mathrm{m}) \;=\; 6,8\,\mathrm{mm}\;, \qquad \delta(100\,\mathrm{m}) \;=\; 19\,\mathrm{mm}\;, \qquad \delta(1000\,\mathrm{m}) \;=\; 61\,\mathrm{cm}\;.$$

E. 45.10 *Exercício*. É interessante resolver o mesmo problema obtendo o desvio δ do ponto de vista de um sistema de referência inercial. Faça-o! **Sugestão para esse caso:** para obter o fator $2/3$, acima, é importante levar em conta a conservação, durante a queda, do momento angular da massa m em relação ao centro da Terra. ✠

• Nota histórica sobre medições do desvio

O efeito, descrito acima, do desvio para Leste de um corpo em queda livre devido à rotação da Terra, parece ter sido primeiramente previsto em 1674 por Dechales[26], tendo sido possivelmente antecipado por Descartes[27] e Mersenne[28], em 1638 (!), que propuseram e executaram um experimento similar: o de se observar o desvio de uma bala de canhão lançada verticalmente para cima, um experimento que fracassou totalmente em produzir resultados positivos ou negativos (a primeira bala disparada, por exemplo, desapareceu misteriosamente no ar, para a perplexidade de todos).

Em 1679 Newton chegou à mesma conclusão, sobre o desvio para Leste de um objeto em queda livre, apresentando suas ideias em carta à *Royal Society* de Londres. A partir daí diversos experimentadores tentaram observar esse efeito. O primeiro deles, diretamente influenciado pela carta de Newton, foi Hooke[29], que lançou objetos de uma altura de $8,2$ metros, o que corresponderia a um desvio teórico para Leste de $0,5\,\mathrm{mm}$. Os experimentos de Hooke foram, porém, inconclusivos.

Novas tentativas foram realizadas por Guglielmini[30], em 1791, na histórica e impressionante *Torre degli Asinelli*, em Bolonha, com uma queda de cerca de 78 metros de altura[31], obtendo um desvio de $16\,\mathrm{mm}$ para Leste, sendo o valor teórico esperado de $10,7\,\mathrm{mm}$.

Subsequentemente, Benzenberg[32] realizou, em 1802, lançamentos na também histórica Igreja de *Sankt Michaelis*, em Hamburgo, de uma altura de $76,3\,\mathrm{m}$. O desvio observado foi de $8,7\,\mathrm{mm}$ e corresponde ao valor teórico (calculado, a pedido, por Gauss), mas havia também um pequeno desvio para o Sul, de $3,5\,\mathrm{mm}$, que deveria teoricamente ser inexistente, mas que também fora observado por Hooke e Guglielmini.

Benzenberg repetiu suas medidas em 1804 em uma mina de carvão, com queda de uma altura de $80,4\,\mathrm{m}$, com desvio teórico de $9,9\,\mathrm{mm}$. O desvio medido foi de $11,4\,\mathrm{mm}$ para Leste e $1,5\,\mathrm{mm}$ para o Sul. Na trilha de Benzenberg, Reich[33] fez em 1831 lançamentos de um poço de uma mina em Freiberg, com $158,5\,\mathrm{m}$ de profundidade, observando um desvio de $27,4\,\mathrm{mm}$, sendo o valor teórico de $28,1\,\mathrm{mm}$.

Quase todos os experimentos realizados antes da metade do século XIX apresentavam um inexplicável desvio para o Sul e não permitiam uma indicação experimental limpa e livre de dúvidas da rotação diurna da Terra, por serem impregnados de fontes de erro, como a presença de vento e outros distúrbios do ar, por falhas de isolamento de toda espécie, e por não permitirem assegurar que o objeto em queda não sofresse nenhum impulso horizontal inicial que

[26] Claude François Milliet Dechales (1621–1678).
[27] René Descartes (1596–1650).
[28] Marin Mersenne (1588–1648).
[29] Robert Hooke (1635–1703).
[30] Giovanni Battista Guglielmini (1763–1817).
[31] A *Torre degli Asinelli*, construída entre 1109 e 1119, tem cerca de 97 metros de altura mas é envolta, próxima ao solo, por uma construção, uma espécie de sacada, de cerca de 20 metros de altura, o que limita a altura de uma queda vertical a cerca de 80 metros. A *Torre degli Asinelli* fora também usada mais de cem anos antes de Guglielmini, em 1640, pelo astrônomo jesuíta Giovanni Battista Riccioli (1598–1671) para demonstrar que corpos lançados simultaneamente sem impulsos iniciais (ignorando-se efeitos de atrito com o ar) atingem o solo também simultaneamente. Esse foi um experimento marcante no desenvolvimento da Física e que uma tradição historicamente incorreta (originada com Vincenzo Viviani (1622–1703), em seu livro *Racconto istorico della vita di Galileo Galilei* (composto em 1654 e publicado em 1717)) atribui a Galilei, na *Torre inclinada de Pisa*. vide [112], cap. 2.
[32] Johann Friedrich Benzenberg (1777–1846).
[33] Ferdinand Reich (1799–1882).

perturbasse as conclusões. A certificação empírica do movimento de rotação diurna da Terra teve de esperar por ideias de outra natureza, com os experimentos de Foucault, de 1851, que detalhamos na Seção 45.3.2, página 2580.

Fontes: [5] e https://de.wikipedia.org/wiki/Fallexperimente_zum_Nachweis_der_Erdrotation

45.3.2 O Experimento do Pêndulo de Foucault sob Pequenas Oscilações

Nesta breve seção, vamos ilustrar nosso estudo de forças inerciais – especificamente, da força de Coriolis – discutindo um sistema físico muito relevante: o chamado *Pêndulo de Foucault*[34]. Esse sistema desempenhou um papel científico histórico, por permitir, em 1851, uma primeira demonstração empírica, intrínseca[35], do movimento de rotação diurno da Terra em torno de seu eixo, ou seja, em termos mais precisos, que a Terra é um sistema de referência não inercial em rotação, resolvendo assim, além de qualquer dúvida razoável, uma questão que arrastou-se por séculos, ou mesmo milênios, e envolveu controvérsias filosóficas e mesmo religiosas.

• **Comentários históricos**

No experimento concebido por Foucault considerava-se um pêndulo longo, capaz de oscilar livremente em qualquer direção (pêndulo esférico), oscilando com pequenas oscilações em um plano inicial sob ausência de vento e outras perturbações menores. Esse pêndulo era então mantido oscilando por várias horas, com a observação resultando em que o plano de oscilação rodava lentamente em torno do eixo vertical com um período de aproximadamente 31h50m (na latitude de Paris), uma evidência direta da rotação diurna da Terra. O experimento de Foucault foi originalmente realizado no início de 1851, primeiramente no porão de sua residência, na Rue d'Assas, em Paris e, logo depois, no *Observatoire de Paris* (onde Foucault pode usar um pêndulo de 11 metros), com o apoio de François Arago[36], diretor do Observatório, para um público restrito. No mesmo ano, o experimento foi reapresentado para um público amplo no Panteão de Paris[37] (onde Foucault pode usar um pêndulo de 67 metros, correspondendo a um período de oscilação era de cerca de 16s)[38]. Vide [5] ou [112], cap. 7.

Historiadores apontam que o fenômeno constatado no experimento de Foucault – a rotação do plano de oscilação do pêndulo – fora observado anteriormente por Viviani[39], um discípulo e colaborador de Galilei, no ano de 1661 (190 anos antes de Foucault!). Viviani, porém, não inferiu de seus experimentos evidência da rotação da Terra, provavelmente pois a noção de força de Coriolis não era ainda de conhecimento comum. Os experimentos de Viviani tinham como propósito a medição, com boa precisão, da velocidade do som, usando pêndulos de grande período para a medição de intervalos de tempo entre a partida e chegada de ondas sonoras proveniente de uma fonte distante. Similarmente a Foucault, esses pêndulos eram pendurados sob cúpulas de igrejas, sendo por vezes deixados a oscilar por muitas horas, dando espaço para a observação da rotação do plano de oscilação. Viviani não tinha, desse modo, a pretensão de verificar a rotação da Terra, nem possuia essa interpretação para suas observações, mas deixou registrado o fenômeno, sem explicá-lo.

Historiadores também comentam que Foucault provavelmente não conhecia os trabalhos de Coriolis, de 1832, e projetou seu experimento com base em pura intuição sobre os efeitos da rotação da Terra. Foucault era um autodidata, iniciara seus estudos em Medicina, mas tivera de abandoná-los por não conseguir sobrepujar sua aversão a sangue. Deu em vida diversas outras contribuições à Ciência, entre as quais a descoberta das chamadas *correntes de Foucault*, a invenção do Giroscópio (com o qual forneceu outras provas experimentais da rotação da Terra, em 1852) e medições da velocidade da luz (as mais precisas de seu tempo, com uma variação de apenas $1,5\%$ em relação ao valor aceito atualmente). Contribuiu também com a construção de telescópios e com desenvolvimentos da fotografia (*daguerreotipia*) e da astrofotografia[40].

Como comentaremos, os resultados de experimentos como os de Foucault servem também de suporte à afirmação de que a Terra tem formato aproximadamente esférico, fato banal e conhecido desde a antiguidade, mas estranhamente questionado nos tempos de cultivo à ignorância em que vivemos. Independentemente disso, vamos aos fatos.

[34] Jean Bernard Léon Foucault (1819–1868). Para uma biografia recente centrada no experimento do pêndulo, vide [5].

[35] Ou seja, localmente, sem levar em conta observações astronômicas externas, como a rotação diurna conjunta das estrelas.

[36] François Jean Dominique Arago (1786–1853).

[37] Até recentemente uma cópia em funcionamento do experimento original podia ser observada no mesmo Panteão.

[38] Um dos pêndulos originais de Foucault encontra-se agora no *Musée des Arts et Métiers*, de Paris, parte do *Conservatoire national des arts et métiers (Cnam)*. Foi uma visita a esse museu que inspirou Umberto Eco (1932–2016) a escrever sua obra literária *"O Pêndulo de Foucault"*, de 1988.

[39] Vincenzo Viviani (1622–1703).

[40] A primeira foto (*daguerreótipo*) de manchas solares foi obtida por Foucault e Fizeau (Armand Hyppolyte Louis Fizeau (1819–1896)), em 1845 [5].

• Descrição geométrica

Na análise que segue partiremos do modelo de que a Terra é perfeitamente esférica e gira em torno de um de seus eixos com velocidade angular intrínseca constante. Nenhuma precessão desse eixo é considerada. Outras possibilidades, como o modelo de Terra plana, são brevemente discutidas, e são descartadas pelos resultados experimentais que apresentaremos. A perfeita esfericidade da Terra e ausência de precessão estão entre as diversas aproximações aqui consideradas.

A Figura 45.2, página 2582, apresenta toda a descrição geométrica que segue.

Consideremos um sistema de coordenadas esféricas $(r,\ \theta,\ \phi)$ centrado no centro de massa da Terra, com $r \geq 0$, $\theta \in [0,\ \pi]$ e $\phi \in [0,\ 2\pi)$ (ambos em radianos), com a coordenada ϕ sendo periódica e crescente no sentido oeste-leste. Na superfície da Terra, que consideraremos como esférica, temos $r = R_T \approxeq 6,4 \times 10^6$m e os polos Norte e Sul são caracterizados por $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, respectivamente. Por convenção, a latitude λ de um ponto da superfície é medida a partir da linha do Equador, de sorte que vale $\lambda = \pi/2 - \theta$ (o ângulo θ é por vezes denominado *colatitude*). Assim, o polo Norte tem latitude $\lambda = \pi/2$ e o Sul $\lambda = -\pi/2$. O ângulo ϕ representa a longitude e pode ter sua origem escolhida, por exemplo, no meridiano de Greenwich, como de costume.

A esse sistema de coordenadas associamos um conjunto de versores ortogonais $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ que apontam nas direções definidas pelas linhas (são vetores tangentes a essas linhas) com:

1º para $\hat{r}$ tem-se $(\theta,\ \phi)$ constantes e r crescente;

2º para $\hat{\theta}$ tem-se $(r,\ \phi)$ constantes e θ crescente;

3º para $\hat{\phi}$ tem-se $(r,\ \theta)$ constantes e ϕ crescente.

Consideremos um ponto P da superfície da Terra preferencialmente fora da linha do Equador. Denominemos os versores ortogonais $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ no ponto P por

$$\hat{\theta} \equiv \mathbf{e}_1 , \qquad \hat{\phi} \equiv \mathbf{e}_2 , \qquad \hat{r} \equiv \mathbf{e}_3 .$$

Com essa convenção, temos $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k$, indicando que o sistema de versores ortogonais $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3$ é positivamente orientado. Aqui, ε_{ijk} são os símbolos de Levi-Civita, introduzidos na Seção 4.1, página 303.

No sistema $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$ o eixo de rotação da Terra encontra-se no plano $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3)$ e o vetor velocidade angular intrínseca é dado por

$$\vec{\Omega}^T = \Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_3\mathbf{e}_3 ,$$

onde

$$\Omega_1 = -\Omega^T \operatorname{sen}\theta = -\Omega^T \cos\lambda \qquad \text{e} \qquad \Omega_3 = \Omega^T \cos\theta = \Omega^T \operatorname{sen}\lambda ,$$

sendo Ω^T a velocidade angular de rotação da Terra: $\Omega^T \approxeq 2\pi/(24\text{h}) \approxeq 7,2 \times 10^{-5}\text{s}^{-1}$. Recordar que a Terra gira no sentido oeste-leste com um período diurno de aproximadamente 23h59m59,9997848s.

Consideremos um ponto Q, localizado acima do ponto P, no qual é fixada uma haste rígida de massa desprezível e de comprimento fixo $L = \|P - Q\| > 0$, a distância de P a Q. Na outra extremidade encontra-se um ponto material de massa m. A haste pode girar livremente em torno de Q, sem vergar ou estender seu comprimento, e as coordenadas do ponto material no sistema $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$ são

$$\vec{\ell} = \ell_1\mathbf{e}_1 + \ell_2\mathbf{e}_2 - \ell_3\mathbf{e}_3 .$$

Com essa convenção de sinais, $\ell_3 > 0$ para pequenas oscilações. Note-se que $\|\vec{\ell}\| = L$.

Com a massa m posta em movimento, suas coordenadas tornam-se funções do tempo: $\ell_1(t)$, $\ell_2(t)$ e $\ell_3(t)$. Como a haste é inextensível, seu comprimento não se altera com o tempo. Assim,

$$0 = \frac{d}{dt}L^2 = \frac{d}{dt}\|\vec{\ell}\|^2 = 2\big(\ell_1\dot{\ell}_1 + \ell_2\dot{\ell}_2 + \ell_3\dot{\ell}_3\big) .$$

Eliminando-se termos quadráticos "pequenos", como $\ell_1\dot{\ell}_1$ e $\ell_2\dot{\ell}_2$, temos que, em primeira aproximação, $\dot{\ell}_3 = 0$, relação decorrente das condições de não extensibilidade e pequenas oscilações.

• Aproximações e idealizações consideradas

No que segue, consideraremos as seguintes aproximações/idealizações. A Terra é considerada perfeitamente esférica (e com uma distribuição de massas esfericamente simétrica). A haste do pêndulo tem massa desprezível e é inextensível,

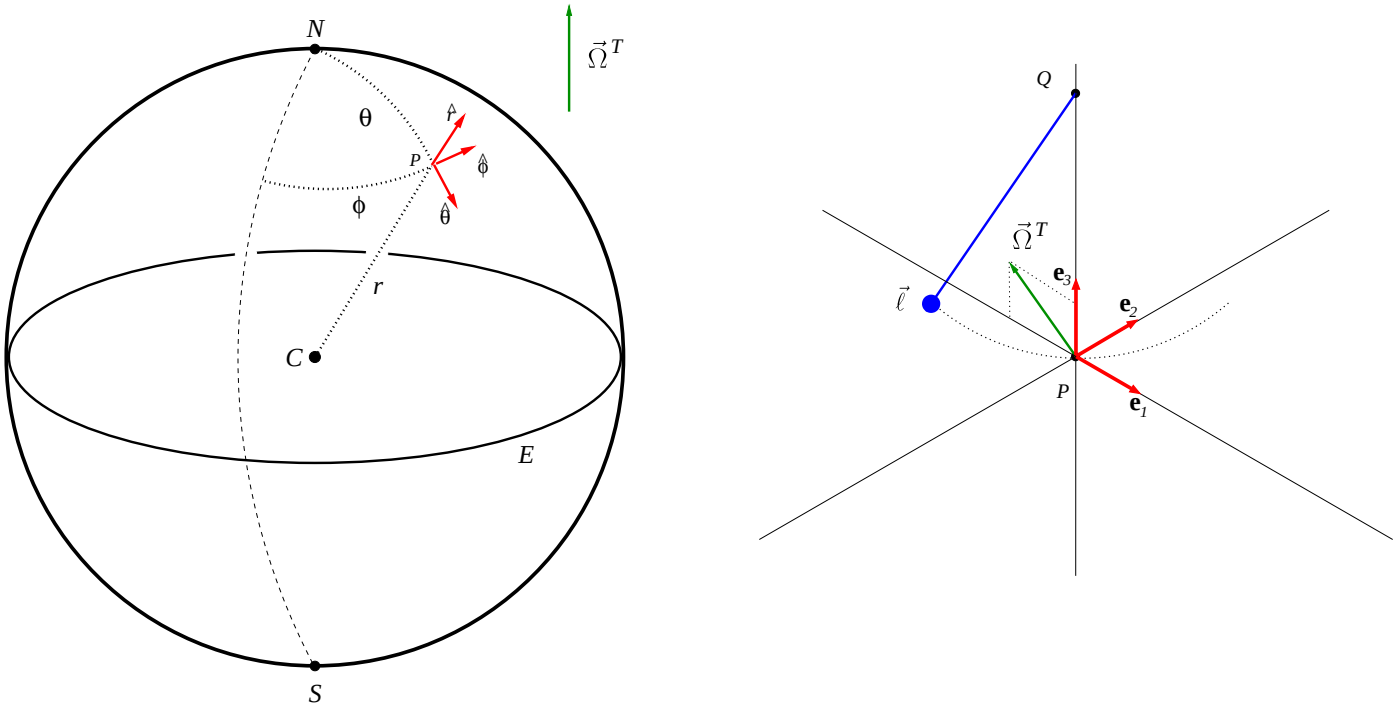

Figura 45.2: **Figura da esquerda.** Os pontos N, S e C representam o polo Norte, Sul e o centro da Terra, respectivamente. A curva E representa a linha do Equador. A linha tracejada conectando N e S representa o meridiano de Greenwich. O ponto P é um ponto genérico da superfície da Terra com coordenadas esféricas r, θ e ϕ, como indicado. Os versores ortogonais $\hat{\theta} \equiv \mathbf{e}_1$, $\hat{\phi} \equiv \mathbf{e}_2$ e $\hat{r} \equiv \mathbf{e}_3$ são indicados no mesmo ponto P e apontam nas direções das coordenadas θ, ϕ e r crescentes, respectivamente. O vetor velocidade angular intrínseco de rotação diurna da Terra, $\vec{\Omega}^T$, é também indicado e aponta no sentido sul-norte. Em cada ponto, a aceleração da gravidade aponta no sentido de $-\hat{r}$ (Terra perfeitamente esférica).
Figura da direita. O pêndulo de massa m oscila livremente em torno de Q, onde está afixado. P e Q estão na mesma linha vertical. O vetor posição da massa m (medido a partir de Q) é $\vec{\ell}$, com $\|\vec{\ell}\| = L = \|P - Q\|$, constante. A força peso sobre m aponta no sentido de $-\mathbf{e}_3$, com o plano $\mathbf{e}_1$–$\mathbf{e}_2$ sendo o plano horizontal, em P. O vetor velocidade angular intrínseco $\vec{\Omega}^T$ encontra-se no plano $\mathbf{e}_1$–$\mathbf{e}_3$. Sua componente na direção 3 (a direção vertical em P) é $\Omega_3 = \|\vec{\Omega}^T\| \cos\theta$, como facilmente se vê, sendo $\|\vec{\Omega}^T\| \equiv \Omega^T \approxeq 2\pi/24\text{h} \approxeq 7,2 \times 10^{-5}\text{s}$. Sobre a linha do Equador $\Omega_3 = 0$, sendo ainda $\Omega_3 > 0$ no hemisfério norte e $\Omega_3 < 0$ no hemisfério sul. Nos polos N e S tem-se $\Omega_3 = \pm\Omega^T$, respectivamente.

possuindo comprimento fixo. Não há forças de atrito de nenhum tipo sendo consideradas nem outros fatores de perda de energia[41]. Particularmente, não consideraremos nenhum efeito Magnus[42] sobre a massa m (que, geralmente, é uma peça metálica de alguns centímetros de dimensão e alguns kg de peso. No caso do experimento original de Foucault, 28kg). A ação do vento é também desconsiderada. O experimento deve ser feito em ambiente fechado e isolado, a temperatura constante, para evitar-se correntes de convecção de ar e a dilatação da haste. A velocidade angular de rotação da Terra é considerada constante (não ocorre a Força de Euler). Em particular, ignora-se o efeito de precessão do eixo de rotação da Terra (por ter um período muito longo, na casa de dezenas de milhares de anos) e despreza-se o movimento de translação da Terra em torno do sol, assim como efeitos provenientes do movimento lunar.

[41] Em versões modernas do experimento de Foucault, que operam em regime quase permanente, com o objetivo de exposição pública (há um operando no mesmo Panteão de Paris, onde o experimento original ocorreu), perdas de energia por atrito são restauradas por um dispositivo eletromecânico esperto que impulsiona a haste sem induzir um movimento de rotação do plano de oscilação.

[42] Heinrich Gustav Magnus (1802–1870). Isso pode ser obtido experimentalmente com muito boa aproximação se a massa m for esfericamente simétrica, ou cilíndrica, e se a haste não exercer nenhuma torção sobre a massa. Recordando, o efeito Magnus é o efeito de desvio da trajetória de um objeto lançado em um fluido (como o ar) e submetido a um movimento de rotação em torno de um de seus eixos. Essa rotação produz um desbalanceamento na pressão do fluido sobre as laterais do objeto, causando um desvio de sua trajetória. Esse efeito é frequentemente observado em partidas de tênis, tênis de mesa e futebol. Já foram projetados e construídos barcos e navios (notadamente, pelo engenheiro Anton Flettner (1885–1961)) que, em lugar de velas, têm seu impulso e direcionamento controlados por cilindros verticais girantes, fazendo uso do efeito Magnus.

Um ponto que merece mais comentários é que, por simplicidade, ignoraremos também o efeito da força centrífuga proveniente da rotação diurna da Terra sobre o movimento do pêndulo. O máximo valor da aceleração centrífuga em um ponto da superfície da Terra se dá na linha do Equador e vale $(\Omega^T)^2 R_T \approxeq 3,3 \times 10^{-2}\,\mathrm{m/s^2}$ (vide (45.40), página 2564), portanto apenas cerca de $0,3\%$ da aceleração da gravidade na superfície da Terra. Assim, ignoraremos a força centrífuga causada pela rotação da Terra sobre o pêndulo, ainda que sua inclusão não oferecesse nenhuma dificuldade, nem alteraria de forma qualitativa os resultados.

Por fim, fazemos notar também que não apenas consideraremos a haste do pêndulo inextensível, mas consideraremos apenas o regime de pequenas oscilações. O tratamento do caso geral não é impossível (na pior das hipóteses, por meio da resolução numérica das equações dinâmicas) e também não alteraria de forma qualitativa os resultados. O regime de pequenas oscilações é facilmente alcançável experimentalmente com pêndulos muito longos. No experimento original de Foucault, no Panteão de Paris, o comprimento da haste era de $L = 67$m e a amplitude de oscilação não excedia 6m.

Todos os efeitos listados acima são espúrios e contribuem de forma mínima com o resultado quantitativo. Todos foram minuciosamente estudados nos mais de 170 anos de literatura a respeito do experimento de Foucault, notadamente na tese de doutorado de Kamerlingh Onnes[43], de 1879.

Nosso objetivo no que segue é usar essas aproximações e encontrar uma versão linearizada das equações dinâmicas de movimento para, em seguida, resolvê-las e analisar a solução.

• As equações dinâmicas

No sistema de referência da Terra são exercidas sobre a massa m do pêndulo as seguintes forças: seu peso $\vec{P}$, a força de Coriolis $\vec{F}_{\mathrm{cor}}$ e a força exercida pela haste $\vec{F}_{\mathrm{has}}$. Como afirmamos acima, outras forças, como a força centrífuga, são negligenciadas. As equações dinâmicas (segunda lei de Newton) são

$$m\ddot{\vec{\ell}} \;=\; \vec{P} + \vec{F}_{\mathrm{cor}} + \vec{F}_{\mathrm{has}} \;.$$

Devido à condição de inextensibilidade, a força exercida pela haste deve contrabalançar exatamente a componente de $\vec{P} + \vec{F}_{\mathrm{cor}}$ na direção de $\vec{\ell}$. Assim,

$$\vec{F}_{\mathrm{has}} \;=\; -\mathsf{P}_{\hat{\ell}}\Big(\vec{P} + \vec{F}_{\mathrm{cor}}\Big) \;,$$

onde $\mathsf{P}_{\hat{\ell}}$ é o projetor na direção de $\hat{\ell}$:

$$\mathsf{P}_{\hat{\ell}}\vec{u} \;=\; \big(\hat{\ell}\cdot\vec{u}\big)\hat{\ell} \;=\; \frac{\big(\vec{\ell}\cdot\vec{u}\big)}{\|\vec{\ell}\|^2}\vec{\ell} \tag{45.92}$$

para qualquer vetor $\vec{u}$. Assim, o movimento da massa m é regido pela equação

$$m\ddot{\vec{\ell}} \;=\; \big(\mathbb{1} - \mathsf{P}_{\hat{\ell}}\big)\Big(\vec{P} + \vec{F}_{\mathrm{cor}}\Big) \;. \tag{45.93}$$

• O regime de pequenas oscilações

Escrevendo (45.92) de forma explícita, temos

$$\Big(\mathbb{1} - \mathsf{P}_{\hat{\ell}}\Big)\vec{u} \;=\; \big(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3\big) - \frac{1}{L^2}\big(\ell_1 u_1 + \ell_2 u_2 - \ell_3 u_3\big)\big(\ell_1\mathbf{e}_1 + \ell_2\mathbf{e}_2 - \ell_3\mathbf{e}_3\big) \;.$$

No regime de pequenas oscilações, para uma haste inextensível e para um vetor $\vec{u}$ independente de $\vec{\ell}$, consideramos apenas termos lineares em ℓ_1 e ℓ_2, obtendo a aproximação

$$\Big(\mathbb{1} - \mathsf{P}_{\hat{\ell}}\Big)\vec{u} \;=\; \big(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2\big) + \frac{1}{L}\big(\ell_1 u_1 + \ell_2 u_2\big)\mathbf{e}_3 + \frac{1}{L}u_3\big(\ell_1\mathbf{e}_1 + \ell_2\mathbf{e}_2\big) \;. \tag{45.94}$$

Acima, aproximamos ℓ_3 por L, no mesmo regime. Note-se por (45.94) que, na 0-ésima aproximação em ℓ_1, ℓ_2 tem-se $\mathbb{1} - \mathsf{P}_{\hat{\ell}} = \mathbb{1} - \mathsf{P}_{\mathbf{e}_3}$.

[43] Heike Kamerlingh Onnes (1853–1926). O título da tese é: H. Kamerlingh Onnes, "Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der aarde". Ph.D. dissertation. Groningen, Netherlands, 1879.

• **O pêndulo esférico sob pequenas oscilações**

Se ignorarmos a força de Coriolis temos o chamado *pêndulo esférico*. Assim, se considerarmos apenas a força peso, teremos de (45.94)

$$\Big(\mathbb{1}-\mathsf{P}_{\hat{\ell}}\Big)\vec{P} \;=\; -mg\Big(\mathbb{1}-\mathsf{P}_{\hat{\ell}}\Big)\mathbf{e}_3 \;\overset{(45.94)}{=}\; -m\frac{g}{L}\big(\ell_1\mathbf{e}_1+\ell_2\mathbf{e}_2\big)$$

e a equação dinâmica (45.93) fica

$$\ddot{\vec{\ell}} \;=\; -\frac{g}{L}\big(\ell_1\mathbf{e}_1+\ell_2\mathbf{e}_2\big)\;. \tag{45.95}$$

De forma mais explícita, isso representa

$$\ddot{\ell}_1 \;=\; -\frac{g}{L}\ell_1\;.$$

$$\ddot{\ell}_2 \;=\; -\frac{g}{L}\ell_2\;.$$

$$\ddot{\ell}_3 \;=\; 0\;.$$

Verifique! A equação $\ddot{\ell}_3=0$ é compatível com as aproximações de inextensibilidade e pequenas oscilações, que impõem l_3 aproximadamente constante. As duas primeiras são equações independentes para ℓ_1 e ℓ_2 que representam movimentos harmônicos independentes com frequência $\omega_0 := \sqrt{\frac{g}{L}}$. Suas soluções em termos de condições iniciais $\ell_1(0)\equiv\ell_{10}$, $\ell_2(0)\equiv\ell_{20}$, $\dot{\ell}_1(0)\equiv v_{10}$ e $\dot{\ell}_2(0)\equiv v_{20}$ são

$$\begin{pmatrix}\ell_1(t)\\ \ell_2(t)\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}\ell_{10}\cos(\omega_0 t)+\left(\frac{v_{10}}{\omega_0}\right)\operatorname{sen}(\omega_0 t)\\ \ell_{20}\cos(\omega_0 t)+\left(\frac{v_{20}}{\omega_0}\right)\operatorname{sen}(\omega_0 t)\end{pmatrix}\;. \tag{45.96}$$

Caso $v_{10}=\gamma\ell_{10}$ $v_{20}=\gamma\ell_{20}$ para uma mesma constante γ, teremos $\ell_1(t)/\ell_2(t)=\ell_{10}/\ell_{20}$, constante, e o movimento do pêndulo se dará ao longo de um plano vertical. Nas demais situações o movimento do pêndulo será elíptico (podendo mesmo ser circular), sempre com frequência de oscilação ω_0.

• **O Pêndulo de Foucault sob pequenas oscilações**

Vamos agora considerar a contribuição da força de Coriolis. Temos

$$\vec{F}_{\text{cor}} \;=\; -2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{\ell}} \;=\; -2m\Big(\big(\Omega_2\dot{\ell}_3-\Omega_3\dot{\ell}_2\big)\mathbf{e}_1+\big(\Omega_3\dot{\ell}_1-\Omega_1\dot{\ell}_3\big)\mathbf{e}_2+\big(\Omega_1\dot{\ell}_2-\Omega_2\dot{\ell}_1\big)\mathbf{e}_3\Big)\;.$$

Com as condições de não extensibilidade e de pequenas oscilações, podemos assumir $\dot{\ell}_3=0$. Assim, usando a aproximação (45.94),

$$-2m\Big(\mathbb{1}-\mathsf{P}_{\hat{\ell}}\Big)\vec{\Omega}\times\dot{\vec{\ell}} \;=\; -2m\left[\Omega_3\dot{\ell}_1\mathbf{e}_2-\Omega_3\dot{\ell}_2\mathbf{e}_1+\frac{\Omega_3}{L}\Big(\ell_2\dot{\ell}_1-\ell_1\dot{\ell}_2\Big)\mathbf{e}_3+\frac{1}{L}\big(\Omega_1\dot{\ell}_2-\Omega_2\dot{\ell}_1\big)\big(\ell_1\mathbf{e}_1+\ell_2\mathbf{e}_2\big)\right]\;. \tag{45.97}$$

Se agora desconsiderarmos também termos proporcionais a $\ell_i\dot{\ell}_j\Omega_k$, com $i,\,j=1,\,2$, $k=1,\,2,\,3$, que são "pequenos" em relação aos demais no regime de pequenas oscilações, e quadráticos nas variáveis de posição e velocidade, ficamos com

$$-2m\Big(\mathbb{1}-\mathsf{P}_{\hat{\ell}}\Big)\vec{\Omega}\times\dot{\vec{\ell}} \;=\; -2m\Omega_3\left[\dot{\ell}_1\mathbf{e}_2-\dot{\ell}_2\mathbf{e}_1\right]\;. \tag{45.98}$$

As equações de movimento ficam, portanto,

$$\ddot{\ell}_1\mathbf{e}_1+\ddot{\ell}_2\mathbf{e}_2 \;=\; -\omega_0^2\big(\ell_1\mathbf{e}_1+\ell_2\mathbf{e}_2\big)-2\Omega_3\Big(\dot{\ell}_1\mathbf{e}_2-\dot{\ell}_2\mathbf{e}_1\Big)\;, \tag{45.99}$$

$$\ddot{\ell}_3 \;=\; 0\;, \tag{45.100}$$

onde $\omega_0 := \sqrt{\frac{g}{L}}$. Essa é a versão linearizada das equações de movimento do Pêndulo de Foucault.

A equação (45.100) é compatível com a já mencionada condição de inextensibilidade e pequenas oscilações, $\dot{\ell}_3 = 0$, de sorte que apenas (45.99) é relevante. Em termos das suas componentes, (45.99) se escreve

$$\ddot{\ell}_1 = -\omega_0^2 \ell_1 + 2\Omega_3 \dot{\ell}_2 \ , \tag{45.101}$$

$$\ddot{\ell}_2 = -\omega_0^2 \ell_2 - 2\Omega_3 \dot{\ell}_1 \ . \tag{45.102}$$

• **Solução das equações linearizadas do Pêndulo de Foucault**

Há diversas formas de tratar o par de equações lineares acopladas (45.101)–(45.102), o mais simples e direto sendo o seguinte. Defina-se a função complexa $z(t) := \ell_1(t) + i\ell_2(t)$. As equações (45.101)–(45.102) tornam-se

$$\ddot{z} + 2\Omega_3 i\, \dot{z} + \omega_0^2 z = 0 \ . \tag{45.103}$$

Suas soluções podem ser obtidas com o *Ansatz* $z(t) = e^{i\alpha t}$, com o qual obtemos para α a simples equação algébrica de segundo grau

$$\alpha^2 + 2\Omega_3 \alpha - \omega_0^2 = 0 \ .$$

Suas soluções são

$$\alpha_\pm = -\Omega_3 \pm \omega_1 \ , \qquad \text{com} \qquad \omega_1 := \sqrt{\Omega_3^2 + \omega_0^2} \ .$$

Observe-se que, sob as hipóteses com que trabalhamos, ambas as soluções são reais e distintas. Assim, a solução geral de (45.103) é

$$z(t) = e^{-i\Omega_3 t}\Big(Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t}\Big) \ ,$$

com A e B sendo constantes. Já podemos ver nessa expressão que o fator $Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t}$ representa um movimento harmônico oscilatório no plano $\ell_1 - \ell_2$ (plano horizontal) com frequência ω_1, enquanto que o fator $e^{-i\Omega_3 t}$ representa uma rotação desse plano com frequência $-\Omega_3$.

Para tornar isso mais claro, escrevemos

$$Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t} \equiv x(t) + iy(t) \ , \tag{45.104}$$

com $x(t)$ e $y(t)$ <u>reais</u>, e temos

$$z(t) = \Big[\cos\big(\Omega_3 t\big)x(t) + \operatorname{sen}\big(\Omega_3 t\big)y(t)\Big] + i\Big[-\operatorname{sen}\big(\Omega_3 t\big)x(t) + \cos\big(\Omega_3 t\big)y(t)\Big] \ . \tag{45.105}$$

Está claro da definição de $x(t)$ e $y(t)$ em (45.104) que

$$x(t) = a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \operatorname{sen}(\omega_1 t) \ , \tag{45.106}$$

$$y(t) = b_1 \cos(\omega_1 t) + b_2 \operatorname{sen}(\omega_1 t) \ , \tag{45.107}$$

para constantes reais $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$.

Em termos das componentes $\ell_1(t)$ e $\ell_2(t)$, (45.105) fica

$$\begin{pmatrix} \ell_1(t) \\ \ell_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\big(\Omega_3 t\big) & \operatorname{sen}\big(\Omega_3 t\big) \\ -\operatorname{sen}\big(\Omega_3 t\big) & \cos\big(\Omega_3 t\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \ .$$

Essa relação já exibe mais claramente o fato de $\ell_1(t)$ e $\ell_2(t)$ sofrerem uma rotação com frequência $-\Omega_3$, como afirmamos, pois a matriz $\begin{pmatrix} \cos(\Omega_3 t) & \operatorname{sen}(\Omega_3 t) \\ -\operatorname{sen}(\Omega_3 t) & \cos(\Omega_3 t) \end{pmatrix}$ é uma matriz de rotação no plano (um elemento do grupo SO(2)). De (45.106)–(45.107) vemos que $x(t)$ e $y(t)$ representam movimentos harmônicos com frequência ω_1.

Comentamos que na maioria das situações práticas (como no experimento original de Foucault, de 1851), tem-se $\Omega_3 \ll \omega_0$ (os números são apresentados adiante) e, por isso, vale a aproximação $\omega_1 \approxeq \omega_0$.

Para prosseguirmos, é conveniente escrevermos as constantes $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ em termos das condições iniciais $\ell_1(0) \equiv \ell_{10}$, $\ell_2(0) \equiv \ell_{20}$, $\dot{\ell}_1(0) \equiv v_{10}$ e $\dot{\ell}_2(0) \equiv v_{20}$. Após alguns cálculos maçantes, mas simples, obtém-se

$$a_1 \ = \ \ell_{10}\ , \qquad b_1 \ = \ \ell_{20}\ , \qquad a_2 \ = \ \frac{v_{10} - \ell_{20}\Omega_3}{\omega_1}\ , \qquad b_2 \ = \ \frac{v_{20} + \ell_{10}\Omega_3}{\omega_1}\ .$$

Dessa forma, vemos que a solução completa do movimento do pêndulo de Foucault no regime de pequenas oscilações, e em termos de condições iniciais (em $t = 0$), é

$$\begin{pmatrix} \ell_1(t) \\ \ell_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\big(\Omega_3 t\big) & \operatorname{sen}\big(\Omega_3 t\big) \\ -\operatorname{sen}\big(\Omega_3 t\big) & \cos\big(\Omega_3 t\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{10}\cos(\omega_1 t) + \left(\frac{v_{10}-\ell_{20}\Omega_3}{\omega_1}\right)\operatorname{sen}(\omega_1 t) \\ \ell_{20}\cos(\omega_1 t) + \left(\frac{v_{20}+\ell_{10}\Omega_3}{\omega_1}\right)\operatorname{sen}(\omega_1 t) \end{pmatrix}\ . \tag{45.108}$$

Consideremos o movimento do vetor $\left(\begin{smallmatrix} x(t) \\ y(t) \end{smallmatrix}\right)$. Caso

$$\frac{v_{10} - \ell_{20}\Omega_3}{\omega_1} \ = \ \gamma\ell_{10} \qquad \text{e} \qquad \frac{v_{20} + \ell_{10}\Omega_3}{\omega_1} \ = \ \gamma\ell_{20} \tag{45.109}$$

para alguma constante γ, teremos $\ell_1(t)/\ell_2(t) = \ell_{10}/\ell_{20}$, constante, e o movimento de $\left(\begin{smallmatrix} x(t) \\ y(t) \end{smallmatrix}\right)$ se dará ao longo de uma linha reta. Nas demais situações o movimento de $\left(\begin{smallmatrix} x(t) \\ y(t) \end{smallmatrix}\right)$ será elíptico (podendo mesmo ser circular), sempre com frequência de oscilação ω_1.

Em essência, aprendemos que a solução representa uma combinação de uma rápida oscilação harmônica com frequência ω_1 no plano ℓ_1–ℓ_2 acompanhada por uma lenta rotação desse plano com frequência $-\Omega_3 = -\Omega^T \operatorname{sen}\lambda$, rotação essa devida, portanto, à rotação diurna da Terra em torno de seu eixo.

• **Análise qualitativa**

No experimento idealizado por Foucault e posto em prática em uma primeira exibição pública em 1851, no Panteão de Paris (e depois reproduzido em inúmeros outros locais, na França e no exterior[44]), o pêndulo era inicialmente posto em movimento ao longo de um plano (sob a condição (45.109)). Ao longo do tempo, o plano de oscilação começava a rodar com frequência $-\Omega_3$. Temos que $\Omega_3 = \Omega^T \operatorname{sen}\lambda$, onde Ω^T é a frequência de rotação da Terra: $\Omega^T \approxeq 2\pi/(24\text{h}) = 7,2\times 10^{-5}\text{s}$. λ é a latitude da localidade do experimento (contada a partir da linha do Equador) e, no caso de Paris, temos $\lambda \approxeq 48°52'$, com $\operatorname{sen}\lambda \approxeq 0,75$.

Assim, o período de rotação do experimento original de Foucault foi de aproximadamente $24\text{h}/\operatorname{sen}\lambda \approxeq 31\text{h}50\text{m}$, o que corresponde a cerca de $11°$ por hora. A rotação seria no sentido horário. O pêndulo era composto por uma massa metálica esférica de cerca de 28kg pendurada em uma haste metálica de cerca de $L = 67\text{m}$ de comprimento. O período de oscilação, portanto, era de $2\pi\sqrt{L/g} \approxeq 16,5\text{s}$, o que corresponde a $\omega_0 = \sqrt{g/L} \approxeq 0,38/\text{s}$. Note-se que, nesse caso, $\Omega_3/\omega_0 \approxeq 1,5\times 10^{-4}$.

[44] É um fato aparentemente pouco conhecido no Brasil, que um dos primeiros experimentos reproduzindo o de Foucault foi realizado no Rio de Janeiro, e no mesmo ano de 1851 (mais precisamente, entre setembro e os primeiros dias de outubro daquele ano), por Cândido Batista (ou Baptista) de Oliveira (1801–1865), engenheiro, diplomata e político brasileiro. Sua publicação original sobre esse experimento [382] pode ser encontrada em [378] ou no repositório francês *Gallica* (https://gallica.bnf.fr). Para mais informações sobre esse experimento e seu autor, vide [360], [361], [5], ou o artigo da *Wikipedia*: https://pt.wikipedia.org/wiki/Cândido_Batista_de_Oliveira

Oliveira trabalhou com um pêndulo de comprimento $4,365\,\text{m}$ e massa de $10,5\,\text{kg}$ localizado no Rio de Janeiro (latitude $-22°\,54'$), tendo realizado medições entre setembro e o início de outubro de 1851. Ao deixar seu pêndulo partir no direção Norte-Sul (ao longo do meridiano local) e oscilar livremente por 30 minutos, Oliveira mediu o ângulo de precessão do plano de rotação como sendo aproximadamente $5°\,9'$ (no sentido anti-horário), o que corresponde a aproximadamente $10°\,18'$ por hora. Ao lançar o pêndulo partir ao longo direção Leste-Oeste, as medidas indicam uma rotação do plano de oscilação de $5°\,12'$ para o período de meia hora, ou seja, $10°\,24'$ por hora.

Para a latitude em questão, a previsão teórica seria de cerca de $5°\,30'$ por hora. Assim, as medidas de Oliveira parecem desviar-se por um fator 2 da previsão. Podemos especular que trata-se de um erro espúrio e que a duração das oscilações fora de uma hora e não de meia hora. Além disso, porém, Oliveira afirma que, quando o lançamento era feito a certos ângulos da direção Leste-Oeste (especificamente $11°\,18'\,40''$), não ocorria nenhuma rotação do plano do oscilação (planos invariantes). Esses efeitos são certamente decorrência de uma montagem insatisfatória (o pêndulo era provavelmente muito curto e sofria de torques espúrios). Segundo [360] e [361], Oliveira teria retirado e corrigido essas afirmações em publicações realizadas no ano seguinte.

Um outro ponto a se estranhar, apontado por comentadores como [5], é que o artigo de Oliveira não faz qualquer menção ao nome de Foucault, o que possivelmente se explicaria pela grande relutância com que a Academia de Ciências da França recebeu os anúncios de Foucault, cujas qualificações acadêmicas pareceriam insuficientes àquele ambiente presunçoso.

Para a cidade de São Paulo, tem-se $\lambda \approxeq -23°33'$. Com isso, nessa localidade o período de rotação do Pêndulo de Foucault torna-se aproximadamente 60h, ou dois dias e meio. Isso corresponde a cerca de 6° por hora. A rotação seria no sentido anti-horário.

Para Belém, PA, tem-se $\lambda \approxeq -1°27'$, e o período de rotação seria de aproximadamente 917h, ou cerca de 38 dias. Sobre a linha do Equador o período é infinito, ou seja, não há rotação do plano de oscilação.

• **Terra plana?**

Um fato relevante no experimento de Foucault é a dependência do período de rotação do plano de oscilação com a latitude λ onde o experimento é realizado: 24h/ senλ. Em um modelo de Terra plana tal dependência com a latitude não ocorre. No entanto, essa dependência com a latitude é, sim, confirmada em experimentos realizados desde os tempos de Foucault em posições diferentes do planeta, corroborando a hipótese de uma Terra aproximadamente esférica.

45.4 Mecânica de Corpos Rígidos

Vamos transpor os resultados gerais acima para o caso específico de corpos rígidos. Um corpo rígido é um objeto material extenso, ocupando uma região compacta do espaço, com massa finita e dotado da propriedade de que ao longo de qualquer movimento a distância entre quaisquer de seus pontos permanece constante. É relevante dizer que a noção de corpo rígido é uma das muitas idealizações existentes na Física. Estritamente falando, eles não existem no mundo real, mas fornecem boas aproximações para a descrição do movimento não relativístico de corpos sólidos.

A propriedade básica de um corpo rígido é a constância ao longo do tempo das distâncias entre seus pontos. Isso permite associar um corpo rígido a sistemas de referências **K** (não necessariamente inerciais) onde o mesmo está fixo e, assim, colocam à nossa disposição todas as considerações anteriores sobre sistemas de referência.

Um corpo rígido é também caracterizado por uma distribuição de massa, definido por uma função ρ, que representa a densidade de massa do corpo. ρ não precisa ser constante em nossa formulação. É um dos princípios da Mecânica Clássica que a densidade de massa em um ponto de um corpo rígido independe do sistema de referência que o observa.

Seja **K** um sistema de referência (não necessariamente inercial) onde o corpo está fixo e seja $V \subset \mathbf{K}$ a região do espaço que o mesmo ocupa. A massa total M do corpo rígido é definida por

$$M := \int_V d^3Q\, \rho(\vec{Q}) \ .$$

O centro de massa do corpo rígido em **K** é definido por

$$Q_{\rm cm} := \frac{1}{M}\int_V d^3Q\ \rho(\vec{Q})\, \vec{Q} \ .$$

A ideia intuitiva por trás das últimas definições é a de generalizar as definições correspondentes para coleções de pontos materiais considerando que um corpo rígido é um agregado de pontos materiais de dimensões infinitesimais, indexados pelas coordenadas $\vec{Q} \in V$, e com massa $\rho(\vec{Q})d^3Q$.

Seja **k** um sistema de referência, que doravante consideraremos como inercial, no qual o movimento do referencial **K** (e, portanto, do corpo rígido) é observado. Denotemos por $\vec{q}_Q(t)$ o vetor posição em **k** associado ao ponto $\vec{Q}$ do corpo rígido. Em concordância com (45.2), tem-se

$$\vec{q}_Q(t) \ = \ R_t\vec{Q} + \vec{c}_t \ . \tag{45.110}$$

Para cada t, a expressão $\vec{q}_Q(t)$ deve ser encarada como uma função de $\vec{Q} \in V \subset \mathbf{K}$ em **k**. O centro de massa do corpo rígido no sistema de referência **k** é definido por

$$\vec{q}_{\rm cm}(t) := \frac{1}{M}\int_V d^3Q\ \rho(\vec{Q})\, \vec{q}_Q(t) \ .$$

Assim, por (45.110), tem-se

$$\vec{q}_{\rm cm}(t) \ = \ R_t\vec{Q}_{\rm cm} + \vec{c}_t \ .$$

Analogamente ao que fizemos anteriormente, é conveniente escolher-se o sistema **K** de sorte que sua origem coincida com a posição do centro de massa do corpo rígido. Isso significa escolher

$$0 \;=\; \vec{Q}_{\rm cm} \;=\; \frac{1}{M}\int_V d^3Q\;\rho(\vec{Q})\,\vec{Q} \qquad \text{e, portanto,} \qquad \vec{c}_t \;=\; \vec{q}_{\rm cm}(t)\;.$$

Com essas considerações, e tendo em vista os resultados anteriores sobre coleções de pontos materiais, é relativamente fácil em um sistema inercial **k** expressar grandezas como a energia cinética, o momento linear e o momento angular de um corpo rígido em movimento nesse sistema.

• **O espaço das configurações de um corpo rígido**

Como dissemos, a posição de um corpo rígido em um sistema de referência inercial **k** é inteiramente fixada pela posição de seu centro de massa e pelos eixos Cartesianos de um sistema de referência **K** fixo no corpo (e com origem no seu centro de massa). A orientação dos eixos de **K** é inteiramente determinada por um elemento do grupo de rotações SO(3) (vide Proposição 21.10, página 1139, e a discussão em torno da mesma). Esse elemento de SO(3) é, a cada instante de tempo, a matriz R_t acima. Assim, o espaço de coordenadas de um corpo rígido é $\mathcal{M} \equiv \mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$, que vem a ser uma variedade de dimensão 6 (lembrar que SO(3) é uma variedade tridimensional, como vimos). No jargão da Física, diz-se por essa razão que um corpo rígido possui seis graus de liberdade: são necessárias seis coordenadas para determinar sua posição, três para o centro de massa e três para sua orientação no espaço. O espaço de fase (que inclui os momentos generalizados) de um corpo rígido é, portanto, o fibrado cotangente $T^*_{\mathcal{M}}$ da variedade $\mathcal{M}$, que vem a ser uma variedade de dimensão doze. Como discutiremos mais adiante (Seção 46.5, página 2710) é, em certos casos, interessante utilizar ângulos de Euler (tratados na Seção 21.4.2.2, página 1140) para coordenatizar R_t e, portanto, descrever a orientação de corpos rígidos no espaço e sua dinâmica.

As noções de variedade diferenciável, fibrado tangente etc. são estudadas no Capítulo 33, página 1678.

Na referência [23] o leitor encontrará uma fina discussão sobre como certas propriedades topológicas do fibrado tangente $T_{\mathcal{M}}$ permitem inferir propriedades gerais do movimento de corpos rígidos, como por exemplo a ausência de pontos singulares no movimento rotacional ou o número de quantidades conservadas.

• **A energia cinética de um corpo rígido**

Num corpo rígido os pontos materiais que o compõem não se movem no sistema **K**. Temos, portanto, uma situação como aquela descrita no tratamento de conjuntos finitos de pontos materiais quando adotamos $\dot{Q}_i(t) = 0$ para todo t e todo i.

Assim, segundo (45.57), temos para a energia cinética do corpo rígido em **k** a expressão

$$e_c(t) \;=\; \frac{1}{2}\vec{\Omega}_t\cdot\big(I\vec{\Omega}_t\big) + \frac{M}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\big\|^2\;, \tag{45.111}$$

onde I é o *tensor momento de inércia*, que consiste na matriz com elementos

$$I_{ab} \;:=\; \int_V d^3Q\;\rho(\vec{Q})\Big[\big\|\vec{Q}\big\|^2\delta_{ab} - Q_aQ_b\Big]\;, \tag{45.112}$$

$a,\;b\in\{1,\;2,\;3\}$, com Q_a sendo as componentes de $\vec{Q}$. Neste caso, I é constante, ou seja, não varia com o tempo. O primeiro termo em (45.111) é a energia cinética associada à rotação (rígida) do corpo rígido. O segundo termo em (45.111) é a energia cinética associada ao movimento do centro de massa no sistema **k**.

É quase desnecessário recordar que as regras de transformação (45.58) e (45.59) permanecem válidas no caso de corpos rígidos.

• **O momento linear de um corpo rígido**

O momento linear do corpo rígido no sistema **k** é dado simplesmente por $\vec{p}(t) = M\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)$. Ele corresponde, portanto, ao momento linear associado ao movimento do centro de massa.

• **O momento angular de um corpo rígido**

Especializando nossa discussão anterior de conjuntos de pontos materiais para corpos rígidos, temos que o momento

angular de um corpo rígido em relação à origem em um sistema de referência inercial $\mathbf{k}$ é dado por

$$\vec{l}(t) \;=\; R_t\big(I\vec{\Omega}_t\big) + M\vec{q}_{\rm cm}(t)\times\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\;,$$

com I sendo novamente o tensor momento de inércia em relação à origem dado em (45.112). O segundo termo acima, $M\vec{q}_{\rm cm}(t)\times\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)$, claramente representa o momento angular (em relação à origem de $\mathbf{k}$) devido ao movimento do centro de massa do corpo. Essa parte do momento angular total é denominada *momento angular orbital*. Segundo nossas considerações anteriores (vide (45.64), página 2571, e comentários que se lhe seguem), a expressão

$$\vec{J}(t) \;:=\; I\vec{\Omega}_t$$

representa o momento angular intrínseco do corpo rígido. É relevante mencionar que os vetores $\vec{J}(t)$ e $\vec{\Omega}_t$ não necessariamente apontam na mesma direção. Esse fato é relevante no estudo de propriedades do movimento rotacional de corpos rígidos assimétricos, como por exemplo, sua estabilidade. Trataremos dessas questões adiante.

45.4.1 Propriedades do Tensor Momento de Inércia

Conforme já discutimos acima, a transformação que leva o tensor de momento de inércia de um sistema $\mathbf{K}$, fixo no corpo rígido, a um outro $\mathbf{K}'$, também fixo no corpo e com a mesma origem é (45.58), com $S\in\mathrm{SO}(3)$. Por um teorema bem conhecido (vide Seção 10.4, página 536), a matriz I, por ser simétrica, pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal. Os elementos da diagonal são autovalores de I e seus autovetores em $\mathbb{R}^3$ podem ser escolhidos ortonormais.

Assim, existe um sistema $\mathbf{K}'$ (não necessariamente único) onde I é diagonal. Os eixos desse sistema $\mathbf{K}'$, que são escolhidos como os autovetores normalizados de I em $\mathbb{R}^3$, são denominados *eixos principais de inércia* e são, naturalmente, ortogonais entre si. Os elementos diagonais de I', que denotaremos por I_1, I_2 e I_3, são denominados *momentos principais de inércia*, ou simplesmente *momentos de inércia*, do corpo rígido. Eles são os autovalores de I (e, portanto, de I') e evidentemente são expressos como

$$I_1 \;:=\; \int_{V'} d^3\vec{Q}'\,\rho\big(\vec{Q}'\big)\,\big((Y')^2+(Z')^2\big)\;,\quad I_2 \;:=\; \int_{V'} d^3Q'\,\rho\big(\vec{Q}'\big)\,\big((X')^2+(Z')^2\big)\;,\quad I_3 \;:=\; \int_{V'} d^3Q'\,\rho\big(\vec{Q}'\big)\,\big((X')^2+(Y')^2\big)\;,$$

onde $(X',\,Y',\,Z')$ são as coordenadas Cartesianas de $\vec{Q}'\in\mathbf{K}'$ e V' é o volume ocupado pelo corpo rígido em $\mathbf{K}'$.

A energia cinética rotacional no sistema dos eixos principais é simplesmente

$$e_{cr} \;=\; \frac{1}{2}\Big(I_1\big(\vec{\Omega}_t\big)_1^2 + I_2\big(\vec{\Omega}_t\big)_2^2 + I_3\big(\vec{\Omega}_t\big)_3^2\Big)\;, \tag{45.113}$$

onde, $\big(\vec{\Omega}_t\big)_k$, $k=1,\,2,\,3$ são as componentes de $\vec{\Omega}_t$ (por simplicidade omitiremos doravante a linha "$'$" em referência às quantidades do sistema $\mathbf{K}'$). As componentes do momento angular intrínseco são simplesmente dadas por

$$\vec{J}_1(t) \;=\; I_1\big(\vec{\Omega}_t\big)_1\;,\quad \vec{J}_2(t) \;=\; I_2\big(\vec{\Omega}_t\big)_2\;,\quad \vec{J}_3(t) \;=\; I_3\big(\vec{\Omega}_t\big)_3\;.$$

• **Movimento com um ponto fixo**

Uma situação que é frequentemente encontrada é a de um corpo rígido de massa M que se move de forma que um de seus pontos, o, encontre-se fixo em relação a um sistema de referência inicial $\mathbf{k}$. Em tal situação o corpo rígido é dito ser um *pião* e o ponto fixo o, em torno do qual o pião pode girar livremente, é denominado *pivô*. Consideremos como antes um sistema de referência $\mathbf{K}$ fixo no corpo com origem no seu centro de massa. Denotemos por $I_{\rm cm}$ o seu tensor momento de inércia em relação a seu centro de massa. Queremos saber de que forma o tensor momento de inércia deve ser modificado levando em conta que um dos pontos do corpo é fixo.

A energia cinética do corpo rígido é dada por $e_c=\frac{1}{2}\langle\vec{\Omega}_t,\;I_{\rm cm}\vec{\Omega}_t\rangle+\frac{M}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_{\rm cm}\big\|^2$. Denotemos por $\vec{q}_o$ e $\vec{Q}_o$ os vetores posição do ponto o nos sistemas $\mathbf{k}$ e $\mathbf{K}$, respectivamente. Segundo (45.35), temos $\dot{\vec{q}}_o(t)=R_t\Big[\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_0+\dot{\vec{Q}}_o\Big]+\dot{\vec{q}}_{\rm cm}$, mas como $\dot{\vec{q}}_o(t)=0$ (o ponto o está fixo em $\mathbf{k}$) e $\dot{\vec{Q}}_o=0$ (o ponto o pertence ao ponto rígido e está fixo em $\mathbf{K}$), obtemos $\dot{\vec{q}}_{\rm cm}=-R_t\big(\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_0\big)$. Assim, $e_c=\frac{1}{2}\langle\vec{\Omega}_t,\;I_{\rm cm}\vec{\Omega}_t\rangle+\frac{M}{2}\big\|\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_0\big\|^2$. Fazendo uso do mesmo tipo de manipulações que empregamos anteriormente, podemos escrever

$$M\big\|\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_0\big\|^2 \;=\; M\sum_{a=1}^{3}\sum_{b=1}^{3}\big(\vec{\Omega}_t\big)_a\Big(\big\|\vec{Q}_0\big\|^2\delta_{ab}-(Q_0)_a(Q_0)_b\Big)\big(\vec{\Omega}_t\big)_b\;.$$

Definindo um novo tensor I_0 cujas componentes são dadas por

$$\big(I_o\big)_{ab} := \big(I_{\rm cm}\big)_{ab} + M\Big(\big\|\vec{Q}_0\big\|^2\delta_{ab} - (Q_0)_a(Q_0)_b\Big) ,$$

$a,\ b \in \{1,\,2,\,3\}$, vemos que podemos escrever

$$e_c = \frac{1}{2}\langle\vec{\Omega}_t,\ I_o\vec{\Omega}_t\rangle . \tag{45.114}$$

Isso permite interpretar I_0 como o tensor de momento de inércia desse corpo rígido com um ponto fixo.

• **Movimento com um eixo fixo. O teorema dos eixos paralelos**

Considere-se a situação em que há um eixo, fixo no corpo, e também imóvel em um sistema de referência inercial $\mathbf{k}$, e que o corpo gire em relação a esse eixo. No sistema $\mathbf{k}$ esse eixo é descrito por $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \{h + \lambda\vec{\eta}_{\mathbf{k}},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, com $h \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{\eta}_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}^3$ com $\big\|\vec{\eta}_{\mathbf{k}}\big\| = 1$. No sistema $\mathbf{K}$, que é fixo no corpo e tem como origem o seu centro de massa, o eixo é descrito por $\mathcal{E}_{\mathbf{K}} = \{H + \lambda\vec{\eta}_{\mathbf{K}},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, com $H \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{\eta}_{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^3$ com $\big\|\vec{\eta}_{\mathbf{K}}\big\| = 1$.

No sistema de referência inercial $\mathbf{k}$ o corpo rígido gira com velocidade angular $\vec{\omega}_t = \|\vec{\omega}_t\|\vec{\eta}_{\mathbf{k}}$. De acordo com (45.8), tomando-se $\vec{q}$, fixo, ao longo do eixo $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$ (para o que tem-se também $\dot{\vec{Q}} = 0$, já que o eixo está fixo no corpo) e $\vec{c}_t = \vec{q}_{\rm cm}$, teremos

$$\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t) \ = \ -\vec{\omega}_t \times \big(\vec{q} - \vec{q}_{\rm cm}(t)\big) .$$

Essa expressão evidentemente independe do ponto q tomado ao longo de $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$, pois um outro ponto diferirá de q por um múltiplo de $\vec{\eta}_{\mathbf{k}}$, que aponta na direção de $\vec{\omega}_t$. Em termos de grandezas do sistema de referência $\mathbf{K}$, fixo no corpo rígido, e com origem no centro de massa, isso fica

$$\dot{q}_{\rm cm}(t) \ = \ -R_t\Big(\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}\Big) ,$$

com Q sendo qualquer ponto situado sobre o eixo de rotação $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}$. A energia cinética rotacional fica, portanto,

$$e_{cr} \ = \ \frac{1}{2}\langle\vec{\Omega}_t,\ I_{\rm cm}\vec{\Omega}_t\rangle + \frac{M}{2}\big\|\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}\big\|^2 .$$

Escrevendo novamente

$$M\big\|\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}\big\|^2 \ = \ M\sum_{a=1}^{3}\sum_{b=1}^{3}\big(\vec{\Omega}_t\big)_a\Big(\big\|\vec{Q}\big\|^2\delta_{ab} - (Q)_a(Q)_b\Big)\big(\vec{\Omega}_t\big)_b ,$$

temos

$$e_{cr} \ = \ \frac{1}{2}\langle\vec{\Omega}_t,\ I_{\mathcal{E}_{\mathbf{K}}}\vec{\Omega}_t\rangle ,$$

onde $I_{\mathcal{E}_{\mathbf{K}}}$ tem suas componentes dadas por

$$\big(I_{\mathcal{E}_{\mathbf{K}}}\big)_{ab} := \big(I_{\rm cm}\big)_{ab} + M\Big(\big\|\vec{Q}\big\|^2\delta_{ab} - (Q)_a(Q)_b\Big) .$$

Esses desenvolvimentos podem ser apresentados de outra forma. Escrevendo $\vec{\Omega}_t = \|\vec{\Omega}_t\|\vec{\eta}_{\mathbf{K}}$ e adotando o vetor posição $Q \in \mathcal{E}_{\mathbf{K}}$ ortogonal ao eixo $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}$ e, portanto, a $\vec{\Omega}_t$ (isso é sempre possível tomando-se Q como o ponto de $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}$ mais próximo à origem de $\mathbf{K}$), então $\big\|\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}\big\|^2 = \big\|\vec{\Omega}_t\big\|^2\big\|\vec{Q}\big\|^2$ e, portanto,

$$e_{cr} \ = \ \frac{I_{\mathcal{E}}}{2}\big\|\vec{\Omega}_t\big\|^2 ,$$

onde

$$I_{\mathcal{E}} \ := \ \big\langle\vec{\eta}_{\mathbf{K}},\ I_{\rm cm}\vec{\eta}_{\mathbf{K}}\big\rangle + MD^2 , \tag{45.115}$$

onde $D = \big\|\vec{Q}\big\|$ é a menor distância da origem de $\mathbf{K}$ ao eixo $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}$. Se $\vec{\eta}_{\mathbf{K}}$ for paralelo ao k-ésimo eixo principal do corpo rígido, então

$$I_{\mathcal{E}} \ = \ I_k + MD^2 ,$$

onde I_k é k-ésimo momento de inércia (de $I_{\rm cm}$). Esse resultado é conhecido como *teorema dos eixos paralelos*, ou *teorema de Huygens*[45]*–Steiner*[46]. A relação (45.115) é uma generalização para o caso de o eixo de rotação não ser paralelo a nenhum dos eixos principais.

A expressão $\big\langle\vec{\eta},\ I_{\rm cm}\vec{\eta}\big\rangle$, com $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$ e $\big\|\vec{\eta}\big\| = 1$ é denominada *momento de inércia em relação ao eixo* $\vec{\eta}$.

[45] Christiaan Huygens (1629–1695).
[46] Jakob Steiner (1796–1863).

45.4.2 As Equações Dinâmicas para Corpos Rígidos

Como já comentamos, também no caso de corpos rígidos temos

$$M\ddot{\vec{q}}_{\rm cm}(t) \;=\; \vec{f}^{Te}(t)\;, \tag{45.116}$$

ou seja, o movimento do centro de massa obedece a segunda lei de Newton e se dá como se um ponto material de massa M e coordenadas $\vec{q}_{\rm cm}$ se movesse sob a ação da força externa total $\vec{f}^{Te}(t)$. Se $\vec{\phi}^e$ representa, no sistema inercial $\mathbf{k}$, a força externa por unidade de volume agindo em cada ponto do corpo rígido considerado em cada instante de tempo, teremos

$$\vec{f}^{Te}(t) \;=\; \int_V d^3Q\;\vec{\phi}^e\big(\vec{q}_Q(t),\;t\big) \;=\; \int_V d^3Q\;\vec{\phi}^e\big(R_t\vec{Q}+\vec{q}_{\rm cm}(t),\;t\big)\;, \tag{45.117}$$

onde usamos (45.110) adotando $\vec{c}_t=\vec{q}_{\rm cm}(t)$. Para a variação do momento angular orbital, tem-se também, portanto,

$$\frac{d}{dt}\Big(M\vec{q}_{\rm cm}(t)\times\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\Big) \overset{(45.67)}{=} \vec{q}_{\rm cm}(t)\times\vec{f}^{Te}t(t)\;. \tag{45.118}$$

Definindo-se

$$\vec{\Phi}^e\big(\vec{Q},\,t\big) \;:=\; R_t^{-1}\vec{\phi}^e\big(\vec{q}_Q(t),\;t\big) \;=\; R_t^{-1}\vec{\phi}^e\big(R_r\vec{Q}+\vec{q}_{\rm cm}(t),\;t\big)\;,$$

(vide (45.39)) teremos para a variação do momento angular intrínseco do corpo rígido, conforme adiantado em (45.74), a relação

$$\frac{d}{dt}\vec{J}(t) \;=\; \vec{J}(t)\times\vec{\Omega}_t+\Theta(t)\;,$$

ou seja,

$$I\dot{\vec{\Omega}}_t \;=\; \big(I\vec{\Omega}_t\big)\times\vec{\Omega}_t+\vec{\Theta}(t)\;, \tag{45.119}$$

onde

$$\vec{\Theta}(t) \;:=\; \int_V d^3Q\;\vec{Q}\times\vec{\Phi}^e(Q,\;t)\;, \tag{45.120}$$

que representa o torque total, no sistema K, exercido pelas forças externas que agem no corpo rígido.

A importante equação (45.119) é denominada *equação de Euler*. Para a história da descoberta da equação de Euler na Mecânica dos corpos rígidos, vide [517] e [132]. Na ausência de forças externas (45.119) reduz-se a

$$\frac{d}{dt}\vec{J}(t) \;=\; \vec{J}(t)\times\vec{\Omega}_t\;,$$

ou seja,

$$I\dot{\vec{\Omega}}_t \;=\; \big(I\vec{\Omega}_t\big)\times\vec{\Omega}_t\;, \tag{45.121}$$

relação essa que também é denominada *equação de Euler* (sem torque externo).

A equação de Euler é um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares de primeira ordem para $\vec{\Omega}_t$ (ou também para $\vec{J}(t)$). Ela descreve a dinâmica de rotações de um corpo rígido e pode ser usada para a dedução de propriedades desse movimento e também, em alguns casos específicos, para a determinação explícita desses movimentos. Uma maneira alternativa relevante de determinação desses movimentos usa o formalismo Lagrangiano, adotando-se como as coordenadas dos corpos rígidos um conjunto de ângulos de Euler, que descrevem seu estado de rotação. Exemplos desse tratamento serão exibidos na Seção 46.5, página 2710.

• **Constantes de movimento para as equações de Euler sem torque**

Na ausência de torques externos, duas leis de conservação podem ser facilmente obtidas de (45.121). Tomando-se o produto escalar de ambos os lados de (45.121) com $\vec{\Omega}_t$ conclui-se que $\frac{d}{dt}\langle\vec{\Omega}_t,\;I\vec{\Omega}_t\rangle=0$. Verifique! Tomando-se o produto escalar de ambos os lados de (45.121) com $I\vec{\Omega}_t$ conclui-se que $\frac{d}{dt}\big\|I\vec{\Omega}_t\big\|^2=0$. Verifique! Assim,

$$\big\langle\vec{\Omega}_t,\;\vec{J}(t)\big\rangle \qquad \text{e} \qquad \big\|\vec{J}(t)\big\|^2\;,$$

ou seja,

$$\big\langle\vec{\Omega}_t,\;I\vec{\Omega}_t\big\rangle \qquad \text{e} \qquad \big\|I\vec{\Omega}_t\big\|^2 \tag{45.122}$$

são constantes de movimento. A primeira lei de conservação afirma que a energia cinética rotacional, $\frac{1}{2}\langle\vec{\Omega}_t,\ I\vec{\Omega}_t\rangle$, é conservada. A segunda afirma que o módulo do vetor momento angular intrínseco é conservado.

As duas quantidades conservadas $\langle\vec{\Omega}_t,\ I\vec{\Omega}_t\rangle = \text{constante}$ e $\langle I\vec{\Omega}_t,\ I\vec{\Omega}_t\rangle = \text{constante}$, definem dois elipsoides no espaço tridimensional $\Big((\vec{\Omega})_1,\ (\vec{\Omega})_2,\ (\vec{\Omega})_3\Big)$, ambos centrados na origem. O movimento de $\vec{\Omega}_t$ se dá, consequentemente, no lugar geométrico formado pela intersecção desses dois elipsoides. Exceto em casos degenerados[47], a intersecção dos dois elipsoides é formada por duas curvas fechadas disjuntas e o movimento de $\vec{\Omega}_t$ se dá em apenas uma delas (por continuidade) a ser fixada pelas condições iniciais.

No sistema de referência dos eixos principais de inércia, onde o tensor momento de inércia I é diagonal, as equações dos dois elipsoides são

$$I_1\big(\vec{\Omega}_t\big)_1^2 + I_2\big(\vec{\Omega}_t\big)_2^2 + I_3\big(\vec{\Omega}_t\big)_3^2 \ = \ E_1 \qquad \text{e} \qquad (I_1)^2\big(\vec{\Omega}_t\big)_1^2 + (I_2)^2\big(\vec{\Omega}_t\big)_2^2 + (I_3)^2\big(\vec{\Omega}_t\big)_3^2 \ = \ E_2\ ,$$

onde E_1 e E_2 são constantes não negativas. É por vezes conveniente expressar as equações dos elipsoides, acima, em termos das componentes do momento angular intrínseco $\vec{J}(t) = I\vec{\Omega}_t$. Obtém-se, como facilmente se vê,

$$\frac{\big(\vec{J}(t)_1\big)^2}{I_1} + \frac{\big(\vec{J}(t)_2\big)^2}{I_2} + \frac{\big(\vec{J}(t)_3\big)^2}{I_3} \ = \ E_1 \qquad \text{e} \tag{45.123}$$

$$\big(\vec{J}(t)_1\big)^2 + \big(\vec{J}(t)_2\big)^2 + \big(\vec{J}(t)_3\big)^2 \ = \ E_2\ . \tag{45.124}$$

No espaço das componentes de $\vec{J}(t)$, o elipsoide em (45.123), acima, é denominado *elipsoide de inércia*, ou *elipsoide de Poinsot*[48], ou ainda *elipsoide de Binet*[49], por alguns autores. O elipsoide em (45.124) é uma esfera e o movimento de $\vec{J}(t)$ se dá na intersecção do primeiro elipsoide com essa esfera. Exceto em casos degenerados, essa intersecção é composta por duas curvas fechadas disjuntas. O movimento de $\vec{J}(t)$ se dá em apenas uma delas (por continuidade) a ser fixada pelas condições iniciais. O fato de $\vec{J}(t)$ ser uma curva fechada é um indício (não uma prova!) de que o movimento é periódico, fato que será extraído da solução das equações de movimento, adiante.

Para verificar que os dois elipsoides se interceptam, observe-se que o elipsoide em (45.123) tem semieixos $\sqrt{I_1E_1}$, $\sqrt{I_2E_1}$ e $\sqrt{I_3E_1}$, enquanto que o elipsoide em (45.124) é uma esfera de raio $\sqrt{E_2}$. Consideremos o caso de um pião com os eixos numerados de sorte que $I_3 \geq I_2 \geq I_1$. Teremos,

$$I_1E_1 \ = \ \big(\vec{J}(t)_1\big)^2 + \big(\vec{J}(t)_2\big)^2\frac{I_1}{I_2} + \big(\vec{J}(t)_3\big)^2\frac{I_1}{I_3} \ \leq \ \big(\vec{J}(t)_1\big)^2 + \big(\vec{J}(t)_2\big)^2 + \big(\vec{J}(t)_3\big)^2 \ = \ E_2$$

e

$$E_2 \ = \ \big(\vec{J}(t)_1\big)^2 + \big(\vec{J}(t)_2\big)^2 + \big(\vec{J}(t)_3\big)^2 \ \leq \ \big(\vec{J}(t)_1\big)^2\frac{I_3}{I_1} + \big(\vec{J}(t)_2\big)^2\frac{I_3}{I_2} + \big(\vec{J}(t)_3\big)^2 \ = \ I_3E_1\ .$$

Assim,

$$\sqrt{I_1E_1} \ \leq \ \sqrt{E_2} \ \leq \ \sqrt{I_3E_1}\ ,$$

o que significa que o raio da esfera (45.124) possui um valor intermediário entre dois dos semieixos do elipsoide (45.123). Isso implica que os elipsoides (45.123) e (45.124) devem se interceptar em ao menos um ponto, ou em duas curvas fechadas, caso uma das desigualdades acima for estrita. Caso $I_1 = I_2 = I_3$ (pião simétrico) os dois elipsoides coincidem.

• Constantes de movimento em um sistema inercial

As constantes de movimento referidas acima dizem respeito à evolução temporal definida pelas equações de Euler (45.121), definida no sistema de referência não inercial $\mathbf{K}$, fixo no corpo rígido, e com origem no centro de massa. É interessante nos perguntarmos quais são as grandezas conservadas no sistema inercial $\mathbf{k}$ e qual sua relação com as de acima.

Uma das grandezas conservadas é $\langle\vec{\Omega}_t,\ I\vec{\Omega}_t\rangle$, que como dissemos, é duas vezes a energia cinética de rotação do corpo rígido, que deve ser conservada na ausência de forças externas resultantes. Passando ao sistema inercial $\mathbf{k}$, escrevemos

$$\langle\vec{\Omega}_t,\ I\vec{\Omega}_t\rangle \ = \ \langle\vec{\Omega}_t,\ \vec{J}(t)\rangle \ = \ \langle R_t^{-1}\vec{\omega}_t,\ R_t^{-1}\vec{\jmath}(t)\rangle \ = \ \langle\vec{\omega}_t,\ \vec{\jmath}(t)\rangle$$

[47] Como, por exemplo, no caso de um corpo esfericamente simétrico, quando $I_1 = I_2 = I_3$ e os dois elipsoides resumem-se à esfera $\big(\vec{\Omega}_t\big)_1^2 + \big(\vec{\Omega}_t\big)_2^2 + \big(\vec{\Omega}_t\big)_3^2$ constante.

[48] Louis Poinsot (1777–1859).

[49] Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856).

com a última igualdade sendo novamente devida à ortogonalidade de R_t.

A outra grandeza conservada em $\mathbf{k}$ é o momento angular $j(t)$, conforme estabelecido em (45.70). Como $\vec{J}(t) = R_t^{-1}\vec{\jmath}(t)$, segue que $\|\vec{\jmath}(t)\|^2 = \|\vec{J}(t)\|^2$, pois R_t é uma matriz ortogonal. Isso esclarece o porquê de $\|\vec{J}(t)\|^2$ ser conservado em $\mathbf{K}$ (note-se, porém, que o vetor $\vec{J}(t)$ não é necessariamente conservado em $\mathbf{K}$, como já comentamos).

Resumindo, as quantidades conservadas em $\mathbf{k}$ são

$$\big\langle \vec{\omega}_t,\ \vec{\jmath}(t)\big\rangle \qquad \text{e} \qquad \vec{\jmath}(t)\ .$$

Observar que a primeira se escreve simplesmente como $\big\langle \vec{\omega}_t,\ \vec{\jmath}\big\rangle$, por $\vec{\jmath}$ ser constante. Trata-se, como se vê, de quatro quantidades conservadas.

A análise dessas leis de conservação leva a um método geométrico de visualização do movimento de $\vec{\omega}_t$ denominado *construção de Poinsot*, ou *método de Poinsot*, sobre o qual não entraremos em mais detalhes na presente versão destas Notas. Vide, por exemplo, [23], [2], [466] e [540].

• **A energia mecânica de um corpo rígido e sua conservação**

A relação (45.81) forneceu a energia mecânica de um sistema de n pontos materiais, cada qual sob um potencial externo U_i^e, sendo constantes ao longo do tempo as distâncias entre os mesmos. Suporemos aqui que esses potenciais U_i^e independam de i, ou seja, sejam os mesmos para todos ao pontos materiais infinitesimais que compõem um corpo rígido. Pelo procedimento já descrito de substituir somas por integrais, obtemos, de (45.81) a energia mecânica de um corpo rígido:

$$e_m \ = \ \frac{1}{2}\vec{\Omega}_t\cdot\big(I\vec{\Omega}_t\big) + \frac{M}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\big\|^2 + \int_V U^e\big(R_t\vec{Q}+\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)\ d^3Q\ , \tag{45.125}$$

com V, como antes, sendo o volume ocupado pelo corpo rígido em $\mathbf{K}$, um referencial no qual o corpo está fixo. Acima, U^e é o potencial externo por unidade de volume ao qual o corpo está submetido.

Assim, a força por unidade de volume no sistema inercial $\mathbf{k}$ de um ponto cujas coordenadas no sistema $\mathbf{K}$ são $\vec{Q}$ é dada por

$$\phi^e\big(R_t\vec{Q}+\vec{q}_{\rm cm}(t)\big) \ = \ -\big(\vec{\nabla}U^e\big)\big(R_t\vec{Q}+\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)\ . \tag{45.126}$$

Segundo (45.39), essa mesma força será dada, no sistema $\mathbf{K}$, por

$$\Phi^e\big(\vec{Q},\,t\big) \ := \ -R_t^{-1}\big(\vec{\nabla}U^e\big)\big(R_t\vec{Q}+\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)\ . \tag{45.127}$$

Um exemplo importante é o seguinte. Se o corpo está sob o potencial gravitacional aproximadamente constante da superfície da terra, teremos $U^e(q) = \rho\big(\vec{q}\big)gq_3$ mais constante, com q_3 sendo a componente vertical (ou seja, na direção de $\vec{g}$) de $\vec{q}$. Logo,

$$\begin{aligned} e_m \ &= \ \frac{1}{2}\vec{\Omega}_t\cdot\big(I\vec{\Omega}_t\big) + \frac{M}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\big\|^2 + \int_V \rho\big(\vec{Q}\big)g\Big(R_t\vec{Q}+\vec{q}_{\rm cm}(t)\Big)_3\ d^3Q \\ &= \ \frac{1}{2}\vec{\Omega}_t\cdot\big(I\vec{\Omega}_t\big) + \frac{M}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\big\|^2 + gR_t\left(\underbrace{\int_V \rho\big(\vec{Q}\big)\vec{Q}\ d^3Q}_{=0}\right)_3 + Mg\big(\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)_3 \\ &= \ \frac{1}{2}\vec{\Omega}_t\cdot\big(I\vec{\Omega}_t\big) + \frac{M}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\big\|^2 + Mg\big(\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)_3\ , \end{aligned} \tag{45.128}$$

pois convencionamos até aqui que a origem de $\mathbf{K}$ coincide com o centro de massa do corpo e, portanto, $\int_V \rho\big(\vec{Q}\big)\vec{Q}\ d^3Q = 0$.

E. 45.11 *Exercício*. Verifique! ⋆

De volta ao um potencial geral, já sabemos que no caso de um sistema com um número finito de pontos materiais a energia mecânica é conservada. É interessante provarmos isso também para o caso de corpos rígidos usando as correspondentes equações dinâmicas. Temos

$$\frac{d}{dt}e_m \ = \ \vec{\Omega}_t\cdot\Big(I\dot{\vec{\Omega}}_t\Big) + M\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\cdot\ddot{\vec{q}}_{\rm cm}(t) + \frac{d}{dt}\int_V U^e\big(R_t\vec{Q}+\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)\ d^3Q\ . \tag{45.129}$$

Passemos a analisar cada um dos três termos acima. Seguindo (45.126) e (45.127), usaremos que

$$-\Big(\vec{\nabla}U^e\Big)\big(R_t\vec{Q}+\vec{q}_{\rm cm}(t)\big) \;=\; \vec{\phi}^e\big(R_t\vec{Q}+\vec{q}_{\rm cm}(t)\big) \;=\; R_t\vec{\Phi}^e\big(\vec{Q},\,t\big)\;.$$

I. Para o termo $\vec{\Omega}_t\cdot\Big(I\dot{\vec{\Omega}}_t\Big)$, vale

$$\vec{\Omega}_t\cdot\big(I\dot{\vec{\Omega}}_t\big) \overset{(45.119)}{=} \underbrace{\vec{\Omega}_t\cdot\Big(\big(I\vec{\Omega}_t\big)\times\vec{\Omega}_t\Big)}_{=0}+\vec{\Omega}_t\cdot\vec{\Theta}(t) \;=\; \vec{\Omega}_t\cdot\vec{\Theta}(t) \tag{45.130}$$

onde $\vec{\Theta}(t)=\int_V d^3Q\,\Big(\vec{Q}\times\vec{\Phi}^e\big(\vec{Q},\,t\big)\Big)$. Vide (45.120).

II. Para o termo $M\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\cdot\ddot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)$, vale

$$M\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\cdot\ddot{\vec{q}}_{\rm cm}(t) \;=\; \dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\cdot\vec{f}^{Te}(t)\;, \tag{45.131}$$

sendo que $\vec{f}^{Te}(t)=\int_V d^3Q\;\vec{\phi}^e\big(R_t\vec{Q}+\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)$. Vide (45.117).

III. Para o último termo, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}U^e\Big(R_t\vec{Q}+\vec{q}_{\rm cm}(t)\Big) \quad &= \quad \Big(\dot{R}_t\vec{Q}+\dot{q}_{\rm cm}(t)\Big)\cdot\Big(\vec{\nabla}U^e\Big)\big(R_t\vec{Q}+\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)\\
&\overset{(45.127)}{=} \quad -\Big(\dot{R}_t\vec{Q}\Big)\cdot\Big(R_t\vec{\Phi}^e\big(\vec{Q},\,t\big)\Big)-\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\cdot\Big(\vec{\phi}^e\big(R_t\vec{Q}+\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)\Big)\\
&\overset{(45.34)}{=} \quad -\Big(R_t\big(\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}\big)\Big)\cdot\Big(R_t\vec{\Phi}^e\big(\vec{Q},\,t\big)\Big)-\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\cdot\vec{\phi}^e\big(R_t\vec{Q}+\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)\\
&= \quad -\Big(\big(\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}\big)\Big)\cdot\Phi^e\big(\vec{Q},\,t\big)-\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\cdot\phi^e\big(R_t\vec{Q}+\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)\\
&\overset{(4.13)}{=} \quad -\vec{\Omega}_t\cdot\Big(\vec{Q}\times\vec{\Phi}^e\big(\vec{Q},\,t\big)\Big)-\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\cdot\vec{\phi}^e\big(R_tQ\vec{+}\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)\;.
\end{aligned}$$

E. 45.12 *Exercício*. Verifique! Sugestão: para a primeira igualdade use a regra da cadeia. ✠

Com isso, o último termo de (45.129) é

$$\begin{aligned}
\int_V\frac{d}{dt}U^e\Big(R_t\vec{Q}+\vec{q}_{\rm cm}(t)\Big)\,d^3Q \;&=\; -\vec{\Omega}_t\cdot\int_V\Big(\vec{Q}\times\vec{\Phi}^e\big(\vec{Q},\,t\big)\Big)\,d^3Q-\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\cdot\int_V\vec{\phi}^e\big(R_tQ\vec{+}\vec{q}_{\rm cm}(t)\big)\,d^3Q\\
&=\; -\vec{\Omega}_t\cdot\vec{\Theta}(t)-\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\cdot\vec{f}^{Te}(t)\;.
\end{aligned} \tag{45.132}$$

De (45.130), (45.131) e (45.132) conclui-se diretamente que $\frac{d}{dt}e_m=0$, confirmando que a energia mecânica de um corpo rígido, definida em (45.125), é uma constante de movimento.

• **Trabalho realizado por forças externas**

Temos de (45.131) que $\frac{d}{dt}\frac{M}{2}\big\|\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\big\|^2=\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t)\cdot\vec{f}^{Te}(t)$. O lado esquerdo é a derivada da energia cinética orbital (ou seja, do centro de massa) do corpo rígido. Assim,

$$\mathcal{W}^{\rm cm}_{t_0,\,t_1}\;:=\;\int_{t_0}^{t_1}\dot{\vec{q}}_{\rm cm}(t')\cdot\vec{f}^{Te}(t')\;dt'$$

representa o trabalho realizado pelas forças externas resultantes sobre o corpo rígido entre dois instantes de tempo t_0 e t_1. Esse trabalho é igual à variação de energia cinética orbital no mesmo intervalo de tempo.

• **Trabalho realizado por um torque**

Vemos diretamente de (45.130) que $\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\Big\langle \vec{\Omega}_t,\ I\vec{\Omega}_t\Big\rangle = \vec{\Omega}_t\cdot\vec{\Theta}(t)$. O lado esquerdo é a derivada da energia cinética rotacional do corpo rígido considerado. Assim,

$$\mathcal{W}^r_{t_0,\,t_1} \ := \ \int_{t_0}^{t_1} \vec{\Omega}_{t'}\cdot\vec{\Theta}(t')\ dt'$$

representa o trabalho realizado pelo torque resultante das forças externas sobre o corpo rígido entre dois instantes de tempo t_0 e t_1. Esse trabalho é igual à variação de energia cinética rotacional no mesmo intervalo de tempo.

É interessante notar também o seguinte. Para a quantidade $\big\|\vec{J}(t)\big\|^2 = \|I\vec{\Omega}_t\|^2$ tem-se

$$\frac{d}{dt}\big\|\vec{J}(t)\big\|^2 \ = \ 2\big(I\vec{\Omega}_t\big)\cdot\big(I\dot{\vec{\Omega}}_t\big) \ \overset{(45.119)}{=} \ 2\underbrace{\big(I\vec{\Omega}_t\big)\cdot\Big(\big(I\vec{\Omega}_t\big)\times\vec{\Omega}_t\Big)}_{=0}+2\big(I\vec{\Omega}_t\big)\cdot\Theta(t)\ .$$

Já vimos que na ausência de torques externos a quantidade $\big\|\vec{J}(t)\big\|^2$ é conservada. A última relação mostra, assim, que na presença de torques externos vale

$$\frac{d}{dt}\big\|\vec{J}(t)\big\|^2 \ = \ 2\vec{J}(t)\cdot\Theta(t)\ . \tag{45.133}$$

Não há, até onde sabemos, uma denominação para a expressão $\int_{t_0}^{t_1}\vec{J}(t')\cdot\vec{\Theta}(t')\ dt'$, mas ela fornece, como vimos, a variação da quantidade $\big\|\vec{J}(t)\big\|^2$ no intervalo de tempo $[t_0,\ t_1]$.

• **Diagonalização de I e as equações dinâmicas**

Em um sistema de referência onde I é diagonal as equações de Euler (45.119) adquirem uma forma mais simples e útil:

$$I_1\Big(\dot{\vec{\Omega}}_t\Big)_1 \ = \ (I_2-I_3)\big(\vec{\Omega}_t\big)_2\big(\vec{\Omega}_t\big)_3+\vec{\Theta}_1\ , \tag{45.134}$$

$$I_2\Big(\dot{\vec{\Omega}}_t\Big)_2 \ = \ (I_3-I_1)\big(\vec{\Omega}_t\big)_3\big(\vec{\Omega}_t\big)_1+\vec{\Theta}_2\ , \tag{45.135}$$

$$I_3\Big(\dot{\vec{\Omega}}_t\Big)_3 \ = \ (I_1-I_2)\big(\vec{\Omega}_t\big)_1\big(\vec{\Omega}_t\big)_2+\vec{\Theta}_3\ . \tag{45.136}$$

Na ausência de torques externos, isso reduz-se a

$$I_1\Big(\dot{\vec{\Omega}}_t\Big)_1 \ = \ (I_2-I_3)\big(\vec{\Omega}_t\big)_2\big(\vec{\Omega}_t\big)_3\ , \tag{45.137}$$

$$I_2\Big(\dot{\vec{\Omega}}_t\Big)_2 \ = \ (I_3-I_1)\big(\vec{\Omega}_t\big)_3\big(\vec{\Omega}_t\big)_1\ , \tag{45.138}$$

$$I_3\Big(\dot{\vec{\Omega}}_t\Big)_3 \ = \ (I_1-I_2)\big(\vec{\Omega}_t\big)_1\big(\vec{\Omega}_t\big)_2\ . \tag{45.139}$$

Faremos uso dessa forma simplificada das equações de Euler.

45.4.2.1 Estabilidade de Rotações em Torno dos Eixos Principais. O Teorema do Eixo Intermediário

Decorre das equações de Euler (45.137)–(45.139) que um corpo rígido posto a girar em torno de um de seus eixos principais de inércia, na ausência de forças externas, permanecerá nesse estado de movimento. De fato, é claro que $\big(\vec{\Omega}_t\big)_1=\big(\vec{\Omega}_t\big)_2=0$ com $\big(\vec{\Omega}_t\big)_3\neq 0$, constante, é uma solução das equações (45.137)–(45.139). O mesmo se dá para os casos em que $\big(\vec{\Omega}_t\big)_1=\big(\vec{\Omega}_t\big)_3=0$ com $\big(\vec{\Omega}_t\big)_2\neq 0$, constante, ou $\big(\vec{\Omega}_t\big)_2=\big(\vec{\Omega}_t\big)_3=0$ com $\big(\vec{\Omega}_t\big)_1\neq 0$, constante.

A questão que desejamos discutir aqui é se esses estados de movimento são estáveis por pequenas perturbações. No que segue assumiremos que $I_1 > 0$ e $I_2 > 0$ e que $I_1 \neq I_3$ e $I_2 \neq I_3$ (não sendo excluído ter-se $I_1 = I_2$). Ao final trataremos do caso $I_1 = I_3 \neq I_2$.

Vamos considerar, sem perda de generalidade, a solução $\big(\vec{\Omega}_t\big)_1 = \big(\vec{\Omega}_t\big)_2 = 0$ com $\big(\vec{\Omega}_t\big)_3 \equiv \Omega^3 \neq 0$, constante. E consideremos uma perturbação da mesma, na forma

$$\big(\vec{\Omega}_t\big)_1 \;=\; \delta\Omega_1(t)\;, \qquad \big(\vec{\Omega}_t\big)_2 \;=\; \delta\Omega_2(t)\;, \qquad \big(\vec{\Omega}_t\big)_3 \;=\; \Omega^3 + \delta\Omega_3(t)$$

onde as funções $\delta\Omega_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, são "pequenas", ou seja, muito menores em módulo que $\big|\Omega^3\big|$. Substituindo em (45.137)–(45.139) e desprezando termos quadráticos nas funções $\delta\Omega_k(t)$ (ou seja, considerando uma versão linearizada das expressões em (45.137)–(45.139)), obtemos:

$$\frac{d}{dt}\big(\delta\Omega_1(t)\big) \;=\; \frac{(I_2 - I_3)}{I_1}\Omega^3\,\delta\Omega_2(t)\;, \tag{45.140}$$

$$\frac{d}{dt}\big(\delta\Omega_2(t)\big) \;=\; \frac{(I_3 - I_1)}{I_2}\Omega^3\,\delta\Omega_1(t)\;, \tag{45.141}$$

$$\frac{d}{dt}\big(\delta\Omega_3(t)\big) \;=\; 0\;. \tag{45.142}$$

A última equação tem por solução $\delta\Omega_3(t) =$ constante. As duas primeiras equações compõem um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares que pode ser escrito como

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\delta\Omega_1(t)\\ \delta\Omega_2(t)\end{pmatrix} \;=\; A\begin{pmatrix}\delta\Omega_1(t)\\ \delta\Omega_2(t)\end{pmatrix}\;, \qquad \text{com} \qquad A \;:=\; \begin{pmatrix}0 & \frac{(I_2-I_3)}{I_1}\Omega^3\\ \frac{(I_3-I_1)}{I_2}\Omega^3 & 0\end{pmatrix}\;.$$

A solução desse sistema é dada por (vide Seção 14.3, página 732)

$$\begin{pmatrix}\delta\Omega_1(t)\\ \delta\Omega_2(t)\end{pmatrix} \;=\; e^{tA}\Delta_0\;, \qquad \text{com} \qquad \Delta_0 \;:=\; \begin{pmatrix}\delta\Omega_1(0)\\ \delta\Omega_2(0)\end{pmatrix}\;. \tag{45.143}$$

Concentremo-nos agora em determinar a exponencial e^{tA}.

Os autovalores de A podem ser obtidos encontrando-se as raízes de seu polinômio característico: $q_A(x) = \det(x\mathbb{1} - A) = x^2 - \frac{(I_2-I_3)}{I_1}\frac{(I_3-I_1)}{I_2}\big(\Omega^3\big)^2$, que são

$$\lambda_+ \;=\; \sqrt{\frac{(I_2 - I_3)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2}}\big|\Omega^3\big| \qquad \text{e} \qquad \lambda_- \;=\; -\sqrt{\frac{(I_2 - I_3)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2}}\big|\Omega^3\big|\;.$$

Pelas hipóteses, ambos são não nulos e, portanto, distintos. É importante observar que ou ambos são reais ou ambos são imaginários puros. De fato, se $(I_2 - I_3)(I_3 - I_1) < 0$, então $\lambda_\pm = \pm i\lambda_0$, com

$$\lambda_0 := \sqrt{\frac{|I_2 - I_3|\,|I_3 - I_1|}{I_1 I_2}}\big|\Omega^3\big| \;>\; 0$$

e se $(I_2 - I_3)(I_3 - I_1) > 0$, então $\lambda_\pm = \pm\lambda_0$.

O fato de os autovalores serem distintos implica que A é uma matriz diagonalizável (Proposição 10.22, página 548). Vale, portanto, o Teorema Espectral (Teorema 10.7, página 539)[50], que afirma que A pode ser escrita na forma

$$A \;=\; \lambda_+ E_+ + \lambda_- E_-\;,$$

[50] Toda a Seção 10.4, página 536 é dedicada a esse importante teorema.

onde $E_\pm$ são os chamados *projetores espectrais* de A, que satisfazem $E_+ + E_- = \mathbb{1}$, $E_+^2 = E_+$, $E_-^2 = E_-$ e $E_+E_- = E_-E_+ = 0$, sendo explicitamente dados por (vide Proposição 10.18, página 542, e, particularmente a relação (10.60))

$$E_+ = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}(A - \lambda_-\mathbb{1}) \qquad \text{e} \qquad E_- = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+}(A - \lambda_+\mathbb{1}) \ .$$

Logo, pelo cálculo funcional para matrizes, Teorema 10.8, página 541, tem-se

$$e^{tA} \ = \ e^{t\lambda_+}E_+ + e^{t\lambda_-}E_- \ .$$

Com isso, temos duas situações: 1º , caso $(I_2 - I_3)(I_3 - I_1) < 0$, temos

$$\begin{pmatrix} \delta\Omega_1(t) \\ \\ \delta\Omega_2(t) \end{pmatrix} \ = \ e^{it\lambda_0}\mathbf{e}_+ + e^{-it\lambda_0}\mathbf{e}_- \tag{45.144}$$

e, 2º , caso $(I_2 - I_3)(I_3 - I_1) > 0$, temos

$$\begin{pmatrix} \delta\Omega_1(t) \\ \\ \delta\Omega_2(t) \end{pmatrix} \ = \ e^{t\lambda_0}\mathbf{e}_+ + e^{-t\lambda_0}\mathbf{e}_- \ , \tag{45.145}$$

sendo que em ambos os casos $\mathbf{e}_\pm := E_\pm\Delta_0$.

No primeiro caso, a perturbação oscila periodicamente com frequência λ_0, permanecendo "pequena", portanto. No segundo caso, porém, a perturbação crescerá exponencialmente na direção do vetor $\mathbf{e}_+$ (caso este seja não nulo) sendo, por consequência, uma perturbação instável. O estudante deve entender que esse crescimento exponencial não pode ser eterno já que, ao crescer nesse regime, a perturbação fatalmente deixará de ser "pequena", saindo fora, portanto, do regime de validade aproximada das equações linearizadas (45.140)–(45.142). Ademais, sabemos que devido à conservação da energia cinética e do momento angular que as soluções das equações de Euler são limitadas como função de t.

Mais do que isso, sabemos também (vide, por exemplo, o tratamento do pião assimétrico livre, adiante) que as soluções exatas das equações de Euler livres para $\vec{\Omega}_t$ são *periódicas* em t, o que significa que após um tempo finito, $\vec{\Omega}_t$ torna a se aproximar da situação de instabilidade para afasta-se exponencialmente rápido da mesma, sendo esse processo repetido periodicamente infinitas vezes.

A condição de estabilidade é, assim, $(I_2 - I_3)(I_3 - I_1) < 0$. Essa condição é alcançada em dois casos: **a)** $I_2 > I_3$ e $I_1 > I_3$ e **b)** $I_2 < I_3$ e $I_1 < I_3$. No caso em que $(I_2 - I_3)(I_3 - I_1) > 0$ tem-se instabilidade, e isso se dá caso $I_1 < I_3 < I_2$ ou caso $I_1 > I_3 > I_2$.

Resumindo, nossa conclusões são as seguintes. Teremos estabilidade por perturbações para a rotação em torno do eixo principal 3 caso I_3 seja o menor ou o maior dos três momentos de inércia principais $\{I_1,\ I_2,\ I_3\}$, ou seja, se $I_2 > I_3$ e $I_1 > I_3$ ou se $I_2 < I_3$ e $I_1 < I_3$. Caso contrário, ou seja, se $I_1 < I_3 < I_2$ ou se $I_1 > I_3 > I_2$, a rotação em torno do eixo principal 3 será instável por perturbações.

Essa última afirmação é por vezes denominada *Teorema do Eixo Intermediário*: rotações em torno de um eixo principal cujo momento de inércia tenha um valor intermediário entre os dois outros são instáveis por pequenas perturbações.

Nota histórica. Em tempos mais recentes o Teorema do Eixo Intermediário foi popularizado como "*Teorema da Raquete de Tênis*" ou como "*Efeito Dzhanibekov*", em honra ao cosmonauta russo Vladimir Aleksandrovich Dzhanibekov (1942–), que o observou em 1985 em certos objetos em movimento de rotação dentro de uma cápsula espacial. O Teorema do Eixo Intermediário, porém, já era conhecido desde 1834, pelo menos, tendo sido descrito na obra *"Theorie Nouvelle de la Rotation des Corps"* (Bachelier, Paris, 1834), de Poinsot[51]. O nome "Teorema da Raquete de Tênis" decorre de uma raquete de tênis possuir um eixo intermediário (como ocorre, alias, com a maioria dos objetos assimétricos) exibindo, portanto, o efeito de instabilidade acima descrito. ♣

Um fato muito interessante, mas sobre o qual nada mais falaremos aqui, é que a instabilidade descrita acima pode ser transformada em *estabilidade* se o corpo rígido estiver sob a ação de torques externos periódicos adequados. Esse tipo de fenômeno é conhecido em diversos sistemas dinâmicos, mesmo se descritos por equações diferenciais não lineares. Há

[51] Louis Poinsot (1777–1859).

até mesmo um bem conhecido truque circense de malabarismo, conhecido como "*prato chines*" que se baseia nesse tipo de efeito: um prato girante é suspenso sobre uma longa haste segura por um malabarista, que a faz vibrar de modo a equilibrar o prato e impedi-lo de cair. Para uma discussão teórica geral desse tipo de fenômeno, vide *e.g.*, [521] ou [23].

E. 45.13 *Exercício*. O que se pode afirmar sobre a estabilidade do movimento de rotação diurno da Terra? Existe o perigo de alguém, digamos, mover um braço e, com isso, desestabilizar o eixo de rotação do planeta? ✠

Consideremos, por fim o caso $I_1 = I_3 \neq I_2$ (o caso $I_2 = I_3 \neq I_1$ é análogo). Nessa situação a matriz A torna-se

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{(I_2-I_3)}{I_1}\Omega^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

que não é mais uma matriz diagonalizável, mas é nilpotente (pois $A^2 = 0$). Assim, $e^{tA} = \mathbb{1} + tA$ e, portanto,

$$\begin{pmatrix} \delta\Omega_1(t) \\ \delta\Omega_2(t) \end{pmatrix} = \big(\mathbb{1} + tA\big) \begin{pmatrix} \delta\Omega_1(0) \\ \delta\Omega_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\Omega_1(0) + t\frac{(I_2-I_3)}{I_1}\Omega^3\,\delta\Omega_2(0) \\ \delta\Omega_2(0) \end{pmatrix} .$$

Como se vê, a solução em geral cresce linearmente com t e, assim, temos novamente uma situação de instabilidade da perturbação, ainda que não seja uma instabilidade exponencial, como anteriormente encontramos.

45.4.3 Movimento de Piões. Algumas Soluções

Trataremos aqui de algumas soluções explícitas para o movimento de piões. O chamado *pião de Lagrange* será tratado com uso do formalismo Lagrangiano e ângulos de Euler na Seção 46.5, página 2710.

• **Pião esférico livre**

Um corpo rígido é dito ser um *pião esférico* se $I_1 = I_2 = I_3$. Nesse caso, as relações (45.137)–(45.139) dizem-nos que $\big(\dot{\vec{\Omega}}_t\big)_k = 0$ para $k = 1, 2, 3$. Assim, tem-se simplesmente, nesse caso, a solução $\vec{\Omega}_t = \vec{\Omega}_0$ constante.

Nessa situação, a solução de (45.32), página 2563, é $R_t = R_0 e^{t\vec{\Omega}_0\cdot\vec{\mathrm{J}}}$ (verifique!), onde R_0 é uma matriz de rotação constante. Como, em geral, $\vec{\omega}_t = R_t\vec{\Omega}_t$ e $e^{t\vec{\Omega}_0\cdot\vec{\mathrm{J}}}\vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}_0$, concluímos que

$$\vec{\omega}_t = R_0\vec{\Omega}_0 .$$

Assim, $\vec{\omega}_t \equiv \vec{\omega}_0$ é igualmente constante e difere de $\vec{\Omega}_0$ apenas por uma rotação constante que associa, em $t = 0$, os eixos de $\mathbf{K}$ aos de $\mathbf{k}$.

E. 45.14 *Exercício*. Usando a Proposição 21.9, página 1138, mostre que $R_t = e^{t\vec{\omega}_0\cdot\vec{\mathrm{J}}}R_0$. ✠

• **Pião simétrico livre**

Um corpo rígido é dito ser um pião simétrico se $I_1 = I_2 \neq I_3$. Nesse caso, e na ausência de torques externos, a relação (45.139) tem por solução $\big(\vec{\Omega}_t\big)_3 \equiv \Omega^3$, constante. No que segue, assumiremos $I_1 > 0$.

No caso em que $\Omega_3 = 0$, as equações (45.137) e (45.138) dizem-nos que também tem-se $\big(\vec{\Omega}_t\big)_1 \equiv \Omega^1$ e $\big(\vec{\Omega}_t\big)_2 \equiv \Omega^2$, ambos constantes. Assim, nesse caso as equações (45.137)–(45.139) dizem-nos que $\vec{\Omega}_t$ é um vetor constante, fixo no plano 1–2 do sistema $\mathbf{K}$ (um sistema de referência dos eixos principais) e, portanto, o movimento do pião é um movimento de rotação em torno de um eixo fixo, ortogonal ao eixo 3, e com velocidade angular constante.

No caso em que $\Omega_3 \neq 0$, as equações (45.137) e (45.138) ficam

$$I_1\Big(\dot{\vec{\Omega}}_t\Big)_1 = -\gamma\big(\vec{\Omega}_t\big)_2 \quad \text{e} \quad I_2\Big(\dot{\vec{\Omega}}_t\Big)_2 = \gamma\big(\vec{\Omega}_t\big)_1 , \quad \text{onde} \quad \gamma := \frac{(I_3 - I_1)}{I_1}\Omega^3 .$$

A resolução dessas equações é bem simples. Definindo-se $W_t := \big(\vec{\Omega}_t\big)_1 + i\big(\vec{\Omega}_t\big)_2$ as equações acima assumem a forma $\dot{W}_t = i\gamma W_t$, cuja solução é $W_t = e^{i\gamma t}W_0$. Separando novamente as partes real e imaginária, obtemos

$$\big(\vec{\Omega}_t\big)_1 \;=\; \cos(\gamma t)\Omega^1 - \operatorname{sen}(\gamma t)\Omega^2 \qquad \text{e} \qquad \big(\vec{\Omega}_t\big)_2 \;=\; \operatorname{sen}(\gamma t)\Omega^1 + \cos(\gamma t)\Omega^2 \;, \tag{45.146}$$

onde $\Omega^1 \equiv \big(\vec{\Omega}_0\big)_1$ e $\Omega^2 \equiv \big(\vec{\Omega}_0\big)_2$.

Como se percebe, a projeção de $\vec{\Omega}_t$ sobre o eixo 3 é constante (e não nula) e a projeção de $\vec{\Omega}_t$ no plano 1–2 gira em um círculo com velocidade angular γ. Assim, o vetor $\vec{\Omega}_t$ executa um movimento de precessão em torno do eixo 3 e temos

$$\vec{\Omega}_t \;=\; R_3(\gamma t)\vec{\Omega}_0 \;.$$

E. 45.15 *Exercício*. Sabemos que, no caso do planeta Terra, tem-se $\frac{(I_3-I_1)}{I_1} \approxeq 1/300$. Mostre que o período de precessão associado ao movimento de rotação diurno da Terra é de aproximadamente 10 meses. Ignore os torques exercidos exercidos pelo Sol e pela Lua, pois eles exercem pouca influência durante esse curto período de tempo (o período da precessão causada por esses torques, denominada *precessão equinocial*, é da ordem de 26 mil anos).

O período de precessão associado ao movimento de rotação diurno da Terra que é efetivamente medido é de cerca de 14 meses. Essa discrepância é essencialmente devida a quatro efeitos, todos associados ao fato de a Terra não ser, estritamente falando, um corpo rígido: a presença do Manto (líquido) em seu interior, deformações elásticas da crosta terrestre produzidas pela atração lunar, grandes movimentações sazonais de massas de ar (especialmente entre a Ásia e o Pacífico), a deformação na distribuição de massas de água dos oceanos produzida pela marés. ✠

Para as componentes do momento angular intrínseco temos

$$J_1(t) \;=\; \cos(\gamma t)I_1\Omega^1 - \operatorname{sen}(\gamma t)I_1\Omega^2 \;, \quad J_2(t) \;=\; \operatorname{sen}(\gamma t)I_1\Omega^1 + \cos(\gamma t)I_1\Omega^2 \qquad \text{e} \qquad J_3(t) \;=\; I_3\Omega^3 \;.$$

Indicando que J executa o mesmo tipo de movimento precessional e indicando que

$$\vec{J}(t) \;=\; R_3(\gamma t)\vec{J}(0) \;.$$

Das expressões acima segue que $\big\|\vec{J}(t)\big\|^2 = I_1^2\Big(\big(\Omega^1\big)^2 + \big(\Omega^2\big)^2\Big) + I_3^2\big(\vec{\Omega}^3\big)^2$, que é constante no tempo, como já sabíamos.

Vamos agora procurar entender o que se passa num sistema de referência inercial $\mathbf{k}$.

Sabemos que num sistema inercial $\mathbf{k}$ o momento angular $\vec{\jmath} = R_t^{-1}\vec{J}(t)$ é constante. Vamos escolher os eixos de $\mathbf{k}$ de sorte que o eixo 3 aponte na direção de $\vec{\jmath}$. Assim, em $\mathbf{k}$ teremos $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \|\vec{\jmath}\| \end{pmatrix}$.

Afirmamos que R_t é nesse caso dado por

$$R_t \;=\; R_3(\gamma_1 t)SR_3(-\gamma t)$$

com $\gamma_1 := \big\|\vec{J}\big\|/I_1$ e com $S \in \mathrm{SO}(3)$ tal que $S\vec{J}(0) = \vec{\jmath}$. Para provar essa afirmativa, notemos que para a R_t dada acima vale $\dot{R}_t = R_3(\gamma_1 t)\big(\gamma_1 \mathsf{J}_3 S - \gamma S\mathsf{J}_3\big)R_3(-\gamma t)$ e, portanto,

$$R_t^{-1}\dot{R}_t \;=\; R_3(\gamma t)\Big(\gamma_1 S^{-1}\mathsf{J}_3 S - \gamma\mathsf{J}_3\Big)R_3(-\gamma t) \;.$$

Verifique!

Agora, $\gamma_1 S^{-1}\mathsf{J}_3 S = \frac{1}{I_1}S^{-1}\Big(\vec{\jmath}\cdot\vec{\mathsf{J}}\Big)S = \frac{1}{I_1}\Big(S^{-1}\vec{\jmath}\Big)\cdot\vec{\mathsf{J}} = \frac{1}{I_1}\vec{J}(0)\cdot\vec{\mathsf{J}}$. Logo, mostramos que

$$R_t^{-1}\dot{R}_t \;=\; R_3(\gamma t)\Big(\frac{1}{I_1}J(0)\cdot\vec{\mathsf{J}} - \gamma\mathsf{J}_3\Big)R_3(-\gamma t) \;=\; \frac{1}{I_1}J(t)\cdot\vec{\mathsf{J}} - \gamma\mathsf{J}_3 \;.$$

O lado direito é

$$\big(\vec{\Omega}_t\big)_1\mathsf{J}_1 + \big(\vec{\Omega}_t\big)_2\mathsf{J}_2 + \left(\frac{I_3}{I_1}\vec{\Omega}^3 - \gamma\right)\mathsf{J}_3 \;=\; \big(\vec{\Omega}_t\big)_1\mathsf{J}_1 + \big(\vec{\Omega}_t\big)_2\mathsf{J}_2 + \vec{\Omega}^3\mathsf{J}_3 \;=\; \vec{\Omega}_t\cdot\vec{\mathsf{J}} \;.$$

Assim, provamos que $\dot{R}_t = R_t(\vec{\Omega}_t\cdot\vec{\mathsf{J}})$, satisfazendo, portanto (45.32), sendo que $R_0 = S$.

A escolha mais geral de S é

$$S \;=\; R_3(\alpha)R\big(\vec{\eta}_0,\;\phi_0\big)\;, \tag{45.147}$$

onde $\vec{\eta}_0$ é o vetor unitário $\vec{\eta}_0 = \big(\vec{J}(0)\times\vec{\jmath}\big)/\big\|\vec{J}\big\|^2$ e ϕ_0 é o ângulo entre $\vec{J}(0)$ e $\vec{\jmath}$. A expressão (45.147) é explicada da seguinte forma. O fator $R\big(\vec{\eta}_0,\;\phi_0\big)$ roda $\vec{J}(0)$ até $\vec{\jmath}$ em torno do eixo indicado pelo vetor ortogonal a ambos pelo ângulo que eles formam entre si. O fator $R_3(\alpha)$ realiza uma rotação em torno de $\vec{\jmath}$ até que os demais eixos de $\mathbf{K}$ coincidam com os de $\mathbf{k}$.

Notar que

$$\gamma_1 \;=\; \frac{\big\|\vec{J}\big\|}{I_1} \;=\; \sqrt{\big(\Omega^1\big)^2+\big(\Omega^2\big)^2+\left(\frac{I_3}{I_1}\Omega^3\right)^2} \;=\; \sqrt{\big(\Omega^1\big)^2+\big(\Omega^2\big)^2+\big(\Omega^3+\gamma\big)^2}\;.$$

Verifique! Podemos escrever

$$R_t \;=\; R_3\big((\gamma_1-\gamma)t\big)S_t\;,$$

onde

$$S_t \;:=\; R_3(\gamma t)SR_3(-\gamma t) \;=\; R_3(\alpha)R_3(\gamma t)R\big(\vec{\eta}_0,\;\phi_0\big)R_3(-\gamma t) \;=\; R_3(\alpha)R\big(\vec{\eta}_t,\;\phi_0\big)\;,$$

com $\vec{\eta}_t := R_3(\gamma t)\vec{\eta}_0 = \big(\vec{J}(t)\times\vec{\jmath}\big)/\big\|\vec{J}\big\|^2$. Entendemos das relações acima que R_t tem a seguinte interpretação: o fator S_t roda os eixos de $\mathbf{K}$ de sorte que, em cada instante t, o vetor $\vec{J}(t)$ é rodado de forma a coincidir com o eixo 3 de $\mathbf{k}$.

E. 45.16 *Exercício*. Complete os detalhes dos cômputos acima. ✠

Com isso, temos

$$\vec{\omega}_t \;=\; R_t\vec{\Omega}_t \;=\; R_3(\gamma_1 t)S\vec{\Omega}_0\;.$$

O vetor $S\vec{\Omega}_0$ não aponta na direção de $\vec{\jmath}$, ou seja, na direção 3 de $\mathbf{k}$, pois $\vec{\Omega}_0$ e $\vec{J}(0)$ não são paralelos. Vemos, porém, dessa expressão que $\vec{\omega}_t$ roda em torno do eixo 3 com velocidade angular γ_1, indicando que em $\mathbf{k}$ ocorre um movimento de precessão do pião simétrico em torno do eixo 3, com velocidade angular de precessão γ_1 mas com $\big\|\vec{\omega}_t\big\| = \big\|\vec{\Omega}_0\big\|$. Note-se que vale $\gamma_1 > \big\|\vec{\Omega}_0\big\|$ caso $I_3 > I_1$ e vale $\gamma_1 < \big\|\vec{\Omega}_0\big\|$ caso $I_3 < I_1$.

• Pião assimétrico livre

Um corpo rígido para o qual os três momentos de inércia I_1, I_2 e I_3 sejam diferentes é denominado um *pião assimétrico*, ou um *pião totalmente assimétrico*. Na ausência de forças e torques externos, o movimento de um tal pião é regido pelas equações de Euler (45.137)–(45.139).

Consideremos, sem perda de generalidade, que $I_1 > I_2 > I_3$ (o que sempre pode ser obtido renumerando-se os eixos principais do pião).

E. 45.17 *Exercício*. Definindo-se

$$W_1(t) \;=\; \sqrt{\frac{(I_1-I_3)(I_1-I_2)}{I_2I_3}}\,(\vec{\Omega}_t)_1\;,$$

$$W_2(t) \;=\; \sqrt{\frac{(I_2-I_3)(I_1-I_2)}{I_1I_3}}\,(\vec{\Omega}_t)_2\;,$$

$$W_3(t) \;=\; \sqrt{\frac{(I_2-I_3)(I_1-I_3)}{I_1I_2}}\,(\vec{\Omega}_t)_3\;,$$

verifique que as equações de Euler (45.137)–(45.139), página 2595, assumem a seguinte forma:

$$\dot{W}_1(t) \;=\; W_2(t)W_3(t)\;, \tag{45.148}$$

$$\dot{W}_2(t) \;=\; -W_3(t)W_1(t)\;, \tag{45.149}$$

$$\dot{W}_3(t) \;=\; W_1(t)W_2(t)\;, \tag{45.150}$$

equações estas que apresentam a interessante propriedade de serem completamente independentes de parâmetros.

Isso reflete um caráter *universal* dos movimentos do piões assimétricos, pois todos podem ser obtidos de soluções de (45.148)–(45.150) por reescalonamentos e ajustes nas condições iniciais. ✠

Nota. O autor aprendeu sobre a validade das equações (45.148)–(45.150) com o Prof. Nestor Caticha, a quem agradece. É interessante notar que, apesar de sua evidente elegância, simplicidade e utilidade, aquelas equações parecem ter passado desapercebidas em toda a literatura consultada pelo autor. ♣

• Rascunho sobre a integração das equações do pião assimétrico livre

Vamos agora mostrar como as equações (45.148)–(45.150) podem ser resolvidas. Por simplicidade, na presente versão destas Notas contornaremos certos detalhes não essenciais à discussão (como escolhas de certos sinais ou casos especiais onde podem ocorrer divisões por zero) e nos concentraremos nas ideias mais importantes. Tais detalhes podem ser encontrados, *e.g.*, em [302] ou, especialmente, em [540].

É fácil ver que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, as expressões

$$S_\lambda \ := \ (1-\lambda)W_1(t)^2 + W_2(t)^2 + \lambda W_3(t)^2$$

são constantes de movimento do sistema (45.148)–(45.150). Verifique! Assim,

$$S_0 \ := \ W_1(t)^2 + W_2(t)^2 \qquad \text{e} \qquad S_1 \ := \ W_2(t)^2 + W_3(t)^2$$

definem duas constantes de movimento independentes para aquelas equações. Essas duas constantes de movimento definem duas superfícies cilíndricas, ortogonais uma a outra, no espaço tridimensional $\big(W_1,\ W_2,\ W_3\big)$. A superfície cilíndrica correspondente a S_0 é paralela ao eixo 3 e centrada no mesmo e a superfície cilíndrica correspondente a S_1 é paralela ao eixo 1 e centrada no mesmo. O movimento do pião assimétrico se dará, assim, na intersecção dessas duas superfícies cilíndricas. Essa intersecção define duas curvas unidimensionais fechadas disjuntas, exceto se $S_0 = S_1$, quando então elas não são disjuntas.

E. 45.18 *Exercício*. Tente visualizar as duas curvas acima descritas. Também no caso $S_0 = S_1$. ✠

Observe-se que $S_0 \geq 0$ e $S_1 \geq 0$. Para o que segue é suficiente, porém, considerar apenas o caso em que $S_0 > 0$ e $S_1 > 0$. De fato, se $S_0 = 0$ temos $W_1(t) = W_2(t) = 0$ e, por (45.150), $W_3(t) =$ constante. Analogamente, se $S_1 = 0$ temos $W_2(t) = W_3(t) = 0$ e, por (45.148), $W_1(t) =$ constante. A solução em cada um desses casos é, assim, trivial.

Adotemos, pois, $S_0 > 0$ e $S_1 > 0$. Escrevendo

$$W_1(t)^2 \ = \ S_0 - W_2(t)^2 \qquad \text{e} \qquad W_3(t)^2 \ = \ S_1 - W_2(t)^2$$

a relação (45.149) fica na forma[52]

$$\frac{dW_2}{dt}(t) \ = \ -\sqrt{\Big(S_0 - W_2(t)^2\Big)\Big(S_1 - W_2(t)^2\Big)}\ . \tag{45.151}$$

Definindo-se ainda $U(t) := W_2(t)/\sqrt{S_0}$ e $\kappa := \sqrt{S_0/S_1}$, obtemos de (45.151):

$$\frac{dU}{dt}(t) \ = \ -\sqrt{S_1}\sqrt{\Big(1 - U(t)^2\Big)\Big(1 - \kappa^2 U(t)^2\Big)}\ . \tag{45.152}$$

Comentamos de passagem que assumimos acima que $\kappa^2 < 1$. No caso em que $\kappa^2 > 1$ definimos $V(t) := \kappa U(t) = W_2(t)/\sqrt{S_1}$ e teremos,

$$\frac{dV}{dt}(t) \ = \ -\sqrt{S_0}\sqrt{\Big(1 - V(t)^2\Big)\Big(1 - \kappa^{-2} V(t)^2\Big)}\ ,$$

que é similar a (45.152) com $\kappa^{-2} < 1$.

Retornando a (45.152), supondo que $U(0) = 0$ (essa suposição pode ser corrigida trivialmente, caso não válida), temos

$$\sqrt{S_1}\ t \ = \ -\int_0^{U(t)} \frac{du}{\sqrt{\big(1-u^2\big)\big(1-\kappa^2 u^2\big)}}\ .$$

[52] Aqui é feita a escolha de sinais positivos nas raízes quadradas. Um tratamento mais geral e detalhado, mas que conduz aos mesmos resultados essenciais, será omitido na presente versão destas Notas.

A função inversa da integral do lado direito é conhecida como *função elíptica de Jacobi*[53], denotada pelo símbolo sn. Mais precisamente, sn satisfaz

$$y \;=\; \int_0^{\mathrm{sn}(y,\,\kappa)} \frac{dx}{\sqrt{\big(1-x^2\big)\big(1-\kappa^2x^2\big)}}\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad \mathrm{sn}^{-1}(y,\,\kappa) \;=\; \int_0^{y} \frac{dx}{\sqrt{\big(1-x^2\big)\big(1-\kappa^2x^2\big)}}\,,$$

com $0 \leq \kappa^2 < 1$ (a função inversa acima refere-se apenas à dependência na primeira variável). Para mais desenvolvimentos sobre as funções elípticas de Jacobi, vide *e.g.*, [539], [238] ou [73]. Vide também Figura 45.3, página 2602, para gráficos esquemáticos dessas funções. Assim, obtemos

$$U(t) \;=\; -\mathrm{sn}\Big(\sqrt{S_1}\,t,\,\kappa\Big)\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad W_2(t) \;=\; -\sqrt{S_0}\,\mathrm{sn}\Big(\sqrt{S_1}\,t,\,\kappa\Big)\,.$$

Acima, usamos o fato de a função sn ser ímpar na primeira variável: $\mathrm{sn}(-t,\,\kappa) = -\mathrm{sn}(t,\,\kappa)$. (No caso mais geral, temos simplesmente $W_2(t) = -\sqrt{S_0}\,\mathrm{sn}\Big(\sqrt{S_1}\,t,\,\kappa\Big) + W_2(0)$). Com isso, temos também, ignorando questões de sinais,

$$W_1(t) \;=\; \sqrt{S_0 - W_2(t)^2} \;=\; \sqrt{S_0}\sqrt{1-\mathrm{sn}\Big(\sqrt{S_1}\,t,\,\kappa\Big)^2} \;=\; \sqrt{S_0}\,\mathrm{cn}\Big(\sqrt{S_1}\,t,\,\kappa\Big)\,,$$

onde a função cn, também denominada função elíptica de Jacobi, é definida por

$$\mathrm{cn}(t,\,\kappa) \;:=\; \sqrt{1-\mathrm{sn}\big(t,\,\kappa\big)^2}\,.$$

Por fim, usando $W_3(t)^2 = S_1 - W_2(t)^2$, temos

$$W_3(t) \;=\; \sqrt{S_1 - S_0\,\mathrm{sn}\Big(\sqrt{S_1}\,t,\,\kappa\Big)^2} \;=\; \sqrt{S_1}\sqrt{1-\kappa^2\,\mathrm{sn}\Big(\sqrt{S_1}\,t,\,\kappa\Big)^2} \;=\; \sqrt{S_1}\,\mathrm{dn}\Big(\sqrt{S_1}\,t,\,\kappa\Big)\,,$$

onde a função dn, outra função denominada função elíptica de Jacobi, é definida por

$$\mathrm{dn}(t,\,\kappa) \;:=\; \sqrt{1-\kappa^2\mathrm{sn}\big(t,\,\kappa\big)^2}\,.$$

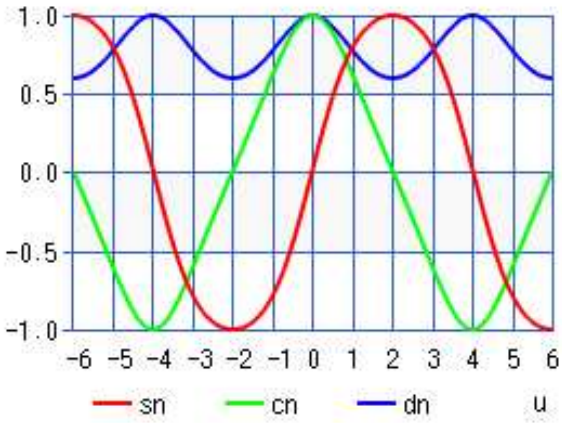

Figura 45.3: Gráfico ilustrativo das funções elípticas de Jacobi $\mathrm{sn}(u,\,\kappa)$, $\mathrm{cn}(u,\,\kappa)$ e $\mathrm{dn}(u,\,\kappa)$ para um mesmo valor de κ ($\kappa = 0,8$), com u variando entre -6 e 6. (Imagem encontrada na internet).

Em resumo, temos sob a condição inicial $W_2(0) = 0$ as soluções

$$W_1(t) \;=\; \sqrt{S_0}\,\mathrm{cn}\Big(\sqrt{S_1}\,t,\,\kappa\Big)\,, \qquad W_2(t) \;=\; -\sqrt{S_0}\,\mathrm{sn}\Big(\sqrt{S_1}\,t,\,\kappa\Big) \quad \text{e} \qquad W_3(t) \;=\; \sqrt{S_1}\,\mathrm{dn}\Big(\sqrt{S_1}\,t,\,\kappa\Big)\,. \tag{45.153}$$

[53] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851).

Com isso, podemos finalmente escrever, recuperando as expressões deixadas pelo caminho,

$$\left(\vec{\Omega}_t\right)_1 = \sqrt{\frac{I_2 I_3}{(I_1-I_3)(I_1-I_2)}}\sqrt{S_0}\,\mathrm{cn}\Big(\sqrt{S_1}t,\ \kappa\Big)\ , \tag{45.154}$$

$$\left(\vec{\Omega}_t\right)_2 = -\sqrt{\frac{I_1 I_3}{(I_2-I_3)(I_1-I_2)}}\sqrt{S_0}\,\mathrm{sn}\Big(\sqrt{S_1}t\,,\ \kappa\Big)\ , \tag{45.155}$$

$$\left(\vec{\Omega}_t\right)_3 = \sqrt{\frac{I_1 I_2}{(I_2-I_3)(I_1-I_3)}}\sqrt{S_1}\,\mathrm{dn}\Big(\sqrt{S_1}t\,,\ \kappa\Big)\ . \tag{45.156}$$

Essa é a solução das equações de Euler (45.137)–(45.139), página 2595, sob a condição inicial $\left(\vec{\Omega}_0\right)_2 = 0$, assumindo $I_1 > I_2 > I_3$.

E. 45.19 *Exercício*. Com $W_2(0) = 0$, temos também $\sqrt{S_0} = |W_1(0)|$ e $\sqrt{S_1} = |W_3(0)|$. Constate com isso que de (45.154) e (45.156) extraímos que $\left(\vec{\Omega}_0\right)_1 = |\left(\vec{\Omega}_0\right)_1|$ e $\left(\vec{\Omega}_0\right)_3 = |\left(\vec{\Omega}_0\right)_3|$, ou seja, as escolhas de sinais que fizemos correspondem à situação em que as condições iniciais $\left(\vec{\Omega}_0\right)_1$ e $\left(\vec{\Omega}_0\right)_3$ são não negativas. ✠

Para o caso em que $W_2(0) \neq 0$ (e, portanto, $\left(\vec{\Omega}_0\right)_2 \neq 0$) as soluções podem ser escritas como

$$W_1(t) = \sqrt{S_0 - W_2(t)^2} = \sqrt{S_0 - \Big[\sqrt{S_0}\,\mathrm{sn}\Big(\sqrt{S_1}\,t,\ \kappa\Big) - W_2(0)\Big]^2}\ , \tag{45.157}$$

$$W_2(t) = -\sqrt{S_0}\,\mathrm{sn}\Big(\sqrt{S_1}\,t,\ \kappa\Big) + W_2(0) \quad \text{e} \tag{45.158}$$

$$W_3(t) = \sqrt{S_1 - W_2(t)^2} = \sqrt{S_1 - \Big[\sqrt{S_0}\,\mathrm{sn}\Big(\sqrt{S_1}\,t,\ \kappa\Big) - W_2(0)\Big]^2}\ . \tag{45.159}$$

Novamente, temos

$$\left(\vec{\Omega}_t\right)_1 = \sqrt{\frac{I_2 I_3}{(I_1-I_3)(I_1-I_2)}}\,W_1(t)\ , \tag{45.160}$$

$$\left(\vec{\Omega}_t\right)_2 = \sqrt{\frac{I_1 I_3}{(I_2-I_3)(I_1-I_2)}}\,W_2(t)\ , \tag{45.161}$$

$$\left(\vec{\Omega}_t\right)_3 = \sqrt{\frac{I_1 I_2}{(I_2-I_3)(I_1-I_3)}}\,W_3(t)\ , \tag{45.162}$$

com os W_k's dados em (45.157)–(45.159).

E. 45.20 *Exercício*. Como $S_0 = W_1(0)^2 + W_2(0)^2$ e $S_1 = W_2(0)^2 + W_3(0)^2$ (pois ambos são constantes), verifique de (45.157)–(45.159) que $W_1(0) = |W_1(0)|$ e $W_3(0) = |W_3(0)|$. Assim, novamente constatamos que as escolhas de sinais que fizemos correspondem à situação em que as condições iniciais $W_1(0)$ e $W_3(0)$ (e, portanto, $\left(\vec{\Omega}_0\right)_1$ e $\left(\vec{\Omega}_0\right)_3$) são não negativas. ✠

Essas complexas expressões reservam uma surpresa. É um fato bem conhecido (vide *e.g.*, [539], [238] ou [73]) que as funções elípticas de Jacobi $\mathrm{sn}(t,\ \kappa)$, $\mathrm{cn}(t,\ \kappa)$ e $\mathrm{dn}(t,\ \kappa)$ são periódicas e de mesmo período na variável t. Assim, concluímos, talvez inesperadamente, que as componentes de $\vec{\Omega}_t$ são igualmente funções periódica de t e de mesmo período[54].

[54] Note-se, porém, que isso não implica que o movimento do pião assimétrico no espaço seja periódico em t, pois para tal é necessário que as componentes do vetor $\vec{\Omega}_t$ satisfaçam certas condições de comensurabilidade. No caso, por exemplo, de as componentes de $\vec{\Omega}_t$ serem constantes o movimento espacial do corpo só será periódico se as razões $(\vec{\Omega}_0)_i/(\vec{\Omega}_0)_j$ forem números racionais para todos $i,\ j \in \{1,\ 2,\ 3\}$.

O período das funções elípticas de Jacobi é $4K(\kappa)$, onde

$$K(\kappa) \;:=\; \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\big(1-u^2\big)\big(1-\kappa^2u^2\big)}}\;.$$

Vide *e.g.*, [539], [238] ou [73]. Assim, o período T do movimento das componentes de $\vec{\Omega}_t$ é, portanto,

$$T \;=\; \frac{4}{\sqrt{S_1}}K(\kappa)\;.$$

E. 45.21 *Exercício*. Expresse as constantes de movimento S_0 e S_1 em termos da energia cinética rotacional e de $\|J\|^2$, ambas também, como já vimos, constantes de movimento. Com isso, reexpresse a solução acima em termos dessas quantidades. ✠

O leitor interessado em exercícios poderá encontrar em [302] problemas de interesse físico tratados com uso das soluções acima obtidas.

45.5 O Formalismo Lagrangiano. Fundamentos

Além do formalismo Newtoniano, normalmente apresentado em cursos introdutórios de Física, a Mecânica Clássica possui outras formulações que apresentam vantagens no tratamento de questões teóricas ou aplicadas.

Nesta seção apresentaremos um apanhado sucinto do formalismo Lagrangiano e do formalismo Hamiltoniano da Mecânica Clássica de sistemas com um número finito de graus de liberdade. O texto que aqui apresentamos não deve ser tido como introdutório ou completo. Sua leitura pressupõe um certo conhecimento prévio dos assuntos tratados. Há uma extensa lista de referências sobre os temas aqui desenvolvidos e listaremos apenas algumas mais reconhecidas ou recomendadas. Para textos com maior profundidade matemática: [23], [2], [179] e [546]. Para textos com maior ênfase em questões de Física: [316], [466], [280], [191], [302], [332], [315] e [540].

• **Vínculos holonômicos e não holonômicos. Coordenadas e velocidades generalizadas**

Se considerarmos um sistema mecânico composto por p partículas pontuais a descrição do movimento é feita por meio da atribuição de vetores posição $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \ldots, p$, a cada uma das partículas em cada instante de tempo. Em certos casos, porém, as partículas estão sujeitas a *vínculos* que restringem sua movimentação no espaço.

Vínculos em sistemas mecânicos podem ser classificados em dois grandes grupos, os chamados *vínculos holonômicos* e os *vínculos não holonômicos*. Sistemas mecânicos dotados de vínculos holonômicos são denominados simplesmente *sistemas holonômicos* e sistemas mecânicos dotados de vínculos não holonômicos são denominados *sistemas não holonômicos*. De modo direto, podemos dizer que sistemas holonômicos são aqueles em que o espaço de configurações (onde o movimento se dá) é uma *variedade diferenciável*. Vamos esclarecer isso.

Vínculos holonômicos são aqueles que podem ser descritos matematicamente pela imposição de um conjunto finito de condições do tipo

$$R_1\big(\vec{x}_1,\,\ldots,\,\vec{x}_p,\,t\big) \;=\; 0\;,\qquad \ldots\;,\qquad R_q\big(\vec{x}_1,\,\ldots,\,\vec{x}_p,\,t\big) \;=\; 0\;, \tag{45.163}$$

onde $R_1, \ldots, R_q$ são funções independentes que assumimos serem contínuas e suficientemente diferenciáveis.

As condições (45.163) podem ou não depender de t. Caso ocorra essa dependência o sistema mecânico é dito *forçado*, ou *reonômico*. Caso a dependência com o tempo não ocorra nas relações de vínculo o sistema mecânico é dito *natural*, ou *esclerônomo*[55].

A palavra holonomia deriva dos radicais gregos, *hólos* ("inteiro", "total", "completo") e *nómos* ("regra", "norma", "lei"), em referência ao fato de os vínculos serem inteiramente fixados por relações como (45.163)[56]. Tipicamente essas funções representam restrições geométricas ao movimento, tal como ocorre no caso do pêndulo simples, onde uma partícula de massa m é mantida por uma haste rígida, de massa desprezível, a uma distância fixa de um ponto O, em torno do qual a haste gira, carregando consigo o ponto material. Vide Figura 45.4, página 2606.

[55] As expressões reonômico e esclerônomo estão lentamente caindo em desuso.

[56] De acordo com Sommerfeld em [466], o termo foi cunhado por Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894) em 1894 em seu livro [224]. Hertz é conhecido por evidenciar empiricamente a existência de ondas eletromagnéticas.

A expressão "restrições geométricas", acima, é um modo de dizer, pois essas restrições são invariavelmente impostas por forças físicas entre os componentes do sistema, como a força elástica, originária de interações atômicas (no caso do pêndulo, da haste sobre o ponto material e sobre o ponto O, em torno do qual ela gira). Há claramente uma idealização presente no tratamento de vínculos como imposições de origem geométrica. A própria noção de ponto material, aliás, é também uma idealização.

Matematicamente, a imposição das q restrições (45.163) às coordenadas cartesianas $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p$ significa que o movimento do sistema se dá em uma *variedade diferenciável* de dimensão $n = 3p - q$, que denotaremos por $\mathcal{M}$. Essa variedade é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{3p}$. A noção de variedade diferenciável é estudada nos Capítulos 33 e 34 destas Notas, páginas 1678 e 1747, respectivamente. Vide também a extensa lista de referências lá apontadas. Assim, dizer que um sistema mecânico possui vínculos holonômicos equivale a dizer que em cada instante de tempo as posições de seus componentes encontram-se em uma subvariedade de dimensão $3p - q$ de $\mathbb{R}^{3p}$. O número $n = 3p - q$ é dito ser o *número de graus de liberdade* do sistema holonômico considerado. Como discutiremos, corpos rígidos movendo-se sem contacto com outros corpos são também sistemas holonômicos com $n = 6$ graus de liberdade.

Como sistemas holonômicos têm suas posições vinculadas a variedades, podemos sem perdas utilizar um sistema de coordenadas locais dessa variedade para descrever o movimento do sistema. Na linguagem física, tais coordenadas são denominadas *coordenadas generalizadas*. É comum denotá-las por uma n-úpla $q \equiv (q^1, \ldots, q^n)$. A variedade n-dimensional $\mathcal{M}$ onde o movimento se dá é denominada *espaço de configurações*. A dimensão n do espaço de configurações, que é a dimensão da variedade $\mathcal{M}$, é dito ser o número de *graus de liberdade* do sistema mecânico.

No estudo do movimento de sistemas mecânicos descritos por coordenadas generalizadas $q \equiv (q^1, \ldots, q^n)$ estamos interessados em estudar as trajetórias descritas pelo sistema como função das interações existentes entre elas ou com o meio externo, levando em conta também condições iniciais. Por uma *trajetória* entendemos uma função do tempo t, definido em algum intervalo I da reta real (eventualmente podemos ter $I \equiv \mathbb{R}$), no espaço de configurações: $I \ni t \mapsto q(t) \equiv (q^1(t), \ldots, q^n(t)) \in \mathcal{M}$. Essa função deve ser suposta contínua e também, na maioria dos problemas, suficientemente diferenciável.

Ao longo de uma trajetória em $\mathcal{M}$ as derivadas temporais $\dot{q}^1(t), \ldots, \dot{q}^n(t)$ são denominadas *velocidades generalizadas*. É importante notar que o vetor $\big(\dot{q}^1(t), \ldots, \dot{q}^n(t)\big)$ é um elemento do espaço tangente a $\mathcal{M}$ no ponto de coordenadas $\big(q^1(t), \ldots, q^n(t)\big)$. O espaço das coordenadas e de todas as correspondentes velocidades generalizadas é uma variedade diferenciável $2n$-dimensional que pode ser identificada com o fibrado tangente de $\mathcal{M}$, denotado por $\mathsf{T}\mathcal{M}$.

Nem todos os vínculos comummente encontrados em sistemas mecânicos são do tipo holonômico. Um exemplo, apresentado e discutido, por exemplo, em [466], é o de um disco fino rígido de raio R que rola sem escorregar em contacto com um plano e sob a ação de um campo gravitacional constante.

Nestas Notas vamos nos limitar ao tratamento de sistemas holonômicos e remetemos o leitor interessado à literatura supracitada para o tratamento de alguns sistemas não holonômicos.

• Pêndulos como exemplo de sistemas holonômicos

As ideias acima podem ser bem ilustradas no caso do pêndulo (planar, simples e duplo, e esférico).

Exemplo 45.1 *Pêndulo esférico simples.* Um ponto material de massa $m > 0$ e vetor posição $\vec{x}$ (com componentes Cartesianas x^1, x^2 e x^3) é restrito, por meio de uma haste rígida de massa desprezível, a mover-se a uma distância fixa $\ell > 0$ de um ponto O, onde a haste é fixada, podendo girar livremente. Um campo gravitacional constante aponta na direção do eixo 3. Adotando-se a origem do sistema de coordenadas no ponto O, a equação de vínculo é $R_1(\vec{x}) := \|\vec{x}\|^2 - \ell^2 = 0$, ou seja, $\big(x^1\big)^2 + \big(x^2\big)^2 + \big(x^3\big)^2 - \ell^2 = 0$. O movimento do ponto material é, portanto, restrito à superfície da esfera de raio ℓ centrada em O. Essa é a variedade $\mathcal{M}$ que corresponde ao espaço de configurações desse sistema. O movimento pode ser descrito por meio de duas coordenadas: o *ângulo polar* (ou *latitudinal*) θ e o *ângulo azimutal* φ, referentes a um sistema de coordenadas esféricas centradas em O. A Figura 45.4, página 2606, indica os detalhes. Os ângulos θ e φ são possíveis coordenadas generalizadas para esse sistema. ♦

Exemplo 45.2 *Pêndulo planar simples.* Esse caso é similar ao anterior, mas o movimento se dá em um plano, digamos, o plano $1-3$ da Figura 45.4, página 2606. Um campo gravitacional constante aponta na direção do eixo 3. Além da condição de vínculo anterior $R_1(\vec{x}) = \big(x^1\big)^2 + \big(x^2\big)^2 + \big(x^3\big)^2 - \ell^2 = 0$ temos adicionalmente a condição de vínculo $R_2(\vec{x}) = x^2 = 0$, que limita o movimento do ponto material ao plano $1-3$. O ponto material, assim, move-se em um círculo no plano $1-3$, de raio ℓ e centrado em O. Essa é a variedade $\mathcal{M}$ que corresponde ao espaço de configurações desse sistema. Podemos adotar como coordenada generalizada o ângulo $\phi \in [0, 2\pi)$, esquematizado na Figura 45.5, página 2607. ♦

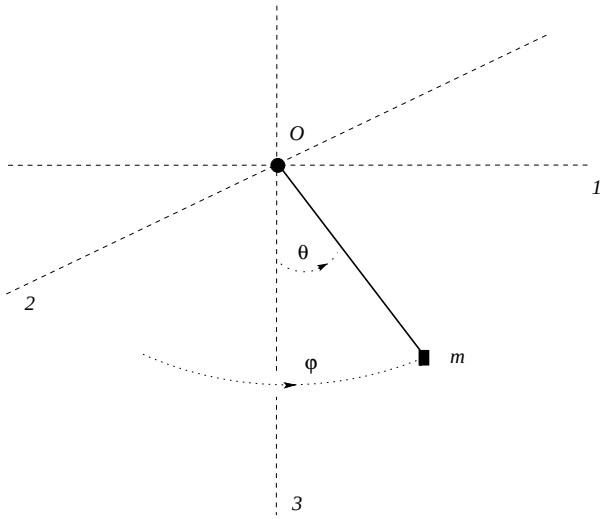

Figura 45.4: Pêndulo esférico. A letra m indica o ponto material. O ângulo azimutal $\varphi \in [0,\ 2\pi)$ é medido a partir do plano $2-3$ e o ângulo polar $\theta \in [0,\ \pi]$ a partir do eixo 3, como indicado. O comprimento da haste conectando O a m é ℓ.

Exemplo 45.3 *Pêndulo duplo planar.* O pêndulo duplo planar envolve dois pontos materiais m_1 e m_2, o primeiro fixo a uma haste rígida móvel de comprimento ℓ_1 podendo girar em torno de um ponto O, onde é fixada. O segundo ponto material m_2 é fixado ao primeiro por uma haste rígida móvel de comprimento ℓ_2, podendo girar independentemente em torno de m_1. Ambos se movem no plano $1-3$ da Figura 45.4, página 2606.

Assim, o ponto material m_1, move-se em um círculo no plano $1-3$, de raio ℓ_1 e centrado em O, enquanto que o ponto material m_2, move-se em um círculo no plano $1-3$, de raio ℓ_2 e centrado em m_1. As condições de vínculo são:

$$
\begin{aligned}
R_1(\vec{x}_1,\ \vec{x}_2) &= \left(x_1^1\right)^2 + \left(x_1^2\right)^2 + \left(x_1^3\right)^2 - \ell_1^2 \ = \ 0\ , \\
R_2(\vec{x}_1,\ \vec{x}_2) &= \left(x_1^1 - x_2^1\right)^2 + \left(x_1^2 - x_2^2\right)^2 + \left(x_1^3 - x_2^2\right)^2 - \ell_2^2 \ = \ 0\ , \\
R_3(\vec{x}_1,\ \vec{x}_2) &= x_1^2 \ = \ 0\ , \qquad R_4(\vec{x}_1,\ \vec{x}_2) \ = \ x_2^2 \ = \ 0\ .
\end{aligned}
$$

A variedade $\mathcal{M}$ que corresponde ao espaço de configurações desse sistema é, portanto, um toro bidimensional. Um campo gravitacional constante aponta na direção do eixo 3. Podemos adotar como coordenadas generalizadas os ângulos ϕ_1 e $\phi_2 \in [0,\ 2\pi)$, esquematizados na Figura 45.6, página 2608. ♦

45.5.1 O Princípio de Hamilton e as Equações de Euler-Lagrange em Sistemas sem Vínculos

Nesta seção consideraremos sistemas mecânicos compostos por p pontos materiais movendo-se sem sujeição a vínculos no espaço físico tridimensional $\mathbb{R}^3$. A descrição das posições desse sistema requer, portanto, $n = 3p$ coordenadas Cartesianas. O espaço $\mathbb{R}^{3p}$ assim considerado é denominado *espaço de configurações* na literatura física e o movimento do sistema é uma curva nesse espaço parametrizada pelo tempo t. Mais adiante consideraremos generalizações dessa situação onde as coordenadas não são necessariamente Cartesianas ou estão sujeitas a vínculos.

• **A função Lagrangiana**

Considere um sistema de p pontos materiais movendo-se no espaço físico tridimensional sem a presença de vínculos e sob a ação de forças conservativas (generalizações virão depois). Seja $\vec{x}_i = (x_i^1,\ x_i^2,\ x_i^3)$ o vetor posição do i-ésimo ponto material. De acordo com a Segunda Lei de Newton, o movimento é regido pela equação

$$
\mathsf{m}_i \ddot{\vec{x}}_i \ = \ -\vec{\nabla}_i U\ , \qquad i = 1,\ \ldots,\ p\ , \tag{45.164}
$$

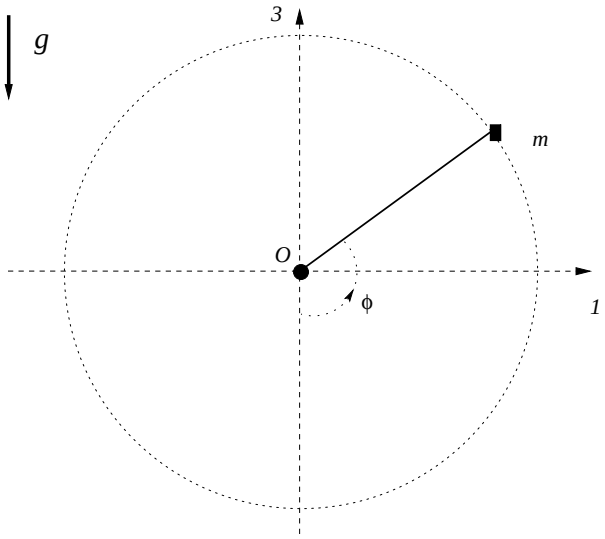

Figura 45.5: Pêndulo plano. A letra m indica a massa do ponto material. O ângulo $\phi \in [0,\ 2\pi)$ é medido a partir do eixo 3, como indicado. O comprimento da haste conectando O a m é ℓ.

onde $\mathsf{m}_i > 0$ é a massa do i-ésimo ponto material e $U \equiv U\big(\vec{x}_1,\ \ldots,\ \vec{x}_p\big)$ é o potencial (que pode também depender do tempo). Acima, $\vec{\nabla}_i U$ é o vetor com componentes $\Big(\frac{\partial}{\partial x_i^1}U,\ \frac{\partial}{\partial x_i^2}U,\ \frac{\partial}{\partial x_i^3}U\Big)$.

Se enumerarmos as $3p \equiv n$ coordenadas dos vetores $\vec{x}_i$ na forma

$$\big(q^1,\ \ldots,\ q^n\big) \equiv \big(x_1^1,\ x_1^2,\ x_1^3,\ x_2^1,\ x_2^2,\ x_2^3,\ \ldots,\ x_p^1,\ x_p^2,\ x_p^3\big)$$

podemos escrever as equações (45.164) como

$$m_j \ddot{q}_j \ = \ -\frac{\partial}{\partial q^j} U(q^1,\ \ldots,\ q^n) \qquad j \ = \ 1,\ \ldots,\ n\ . \tag{45.165}$$

Aqui, m_j é a massa associada à partícula com coordenada j, ou seja,

$$\big(m_1,\ \ldots,\ m_n\big) = \big(\mathsf{m}_1,\ \mathsf{m}_1,\ \mathsf{m}_1,\ \mathsf{m}_2,\ \mathsf{m}_2,\ \mathsf{m}_2,\ \ldots,\ \mathsf{m}_p,\ \mathsf{m}_p,\ \mathsf{m}_p\big)\ .$$

O ponto relevante nessa renomeação das coordenadas do sistema é que com ela podemos reescrever as equações de movimento (45.165). Para tal, considere-se a energia cinética do sistema de p partículas:

$$T \ := \ \sum_{i=1}^{p} \frac{\mathsf{m}_i}{2} \|\dot{\vec{x}}_i\|^2 \ = \ \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{2} \big(\dot{q}^j\big)^2\ . \tag{45.166}$$

Trata-se de uma função das velocidades $\dot{q}^j$, ou seja, $T \equiv T\big(\dot{q}^1,\ \ldots,\ \dot{q}^n\big)$. Temos que $\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} T = m_j \dot{q}^j$ e, com isso, (45.165) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} T + \frac{\partial}{\partial q^j} U \ = \ 0\ , \qquad j \ = \ 1,\ \ldots,\ n\ . \tag{45.167}$$

Considerando que T não depende das coordenadas q^j (apenas de suas velocidades) e U depende apenas das coordenadas q^j (e não, para forças conservativas, de suas velocidades), podemos escrever (45.167) como

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \mathscr{L} - \frac{\partial}{\partial q^j} \mathscr{L} \ = \ 0\ , \qquad j \ = \ 1,\ \ldots,\ n\ , \tag{45.168}$$

onde

$$\mathscr{L} \ \equiv \ \mathscr{L}\big(q^1,\ \ldots,\ q^n,\ \dot{q}^1,\ \ldots,\ \dot{q}^n\big) \ = \ T - U$$

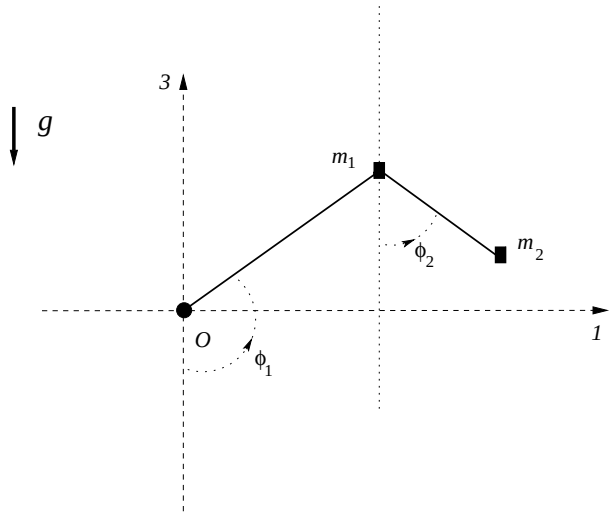

Figura 45.6: Pêndulo duplo planar. As letras m_1 e m_2 indicam os pontos materiais. Os ângulos $\phi_1,\ \phi_2 \in [0,\ 2\pi)$ são medidos a partir da vertical, como indicado. O comprimento da haste conectando O a m_1 é ℓ_1 e o comprimento da haste conectando m_1 a m_2 é ℓ_2.

é denominada *função Lagrangiana*[57], ou *Lagrangiano*, do sistema de p partículas.

Em princípio, reescrever a Segunda Lei de Newton na forma (45.168) não representa nada de mais. O fato, porém, é que (45.168) admite generalizações que permitem incorporar forças não conservativas, coordenadas não Cartesianas e vínculos holonômicos (e mesmo não holonômicos, em certos casos especiais). A inclusão de vínculos no tratamento é de grande importância, pois há muitos sistemas físicos desse tipo e seu tratamento nem sempre pode ser adequadamente feito em coordenadas Cartesianas. O tratamento dessas questões permitirá uma visão mais profunda de sistemas mecânicos, independente do particular tipo de coordenadas empregadas. Nossos guias são dois princípios, o Princípio de Hamilton e o Princípio de D'Alembert, que fornecem formulações alternativas das leis da Mecânica.

• **O Princípio de Hamilton. Uma primeira visão**

Consideremos um sistema mecânico de p partículas como descrito acima, com coordenadas de posição Cartesianas $q \equiv \big(q^1,\ \ldots,\ q^n\big)$ e velocidades $\dot{q} \equiv \big(\dot{q}^1,\ \ldots,\ \dot{q}^n\big)$, com $n = 3p$, movendo-se sem vínculos e sob a ação de forças conservativas.

O objeto básico do formalismo Lagrangiano é a função Lagrangiana $\mathscr{L}(q,\ \dot{q},\ t) \equiv \mathscr{L}\big(q^1,\ \ldots,\ q^n,\ \dot{q}^1,\ \ldots,\ \dot{q}^n,\ t\big) = T - U$, que é suposta possuir todas as informações necessárias sobre a dinâmica do sistema mecânico estudado.

Sejam $t_1 < t_2$ dois instantes de tempo e seja $\gamma := [t_1,\ t_2] \ni t \mapsto q_\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável no espaço de configurações $\mathbb{R}^n$. Definimos a *ação* associada ao Lagrangiano $\mathscr{L}$ e à curva γ como sendo a integral

$$S[\gamma] \ := \ \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\big(t,\ q_\gamma(t),\ \dot{q}_\gamma(t)\big)\ dt\ . \tag{45.169}$$

Podemos nos perguntar: qual é, segundo as leis da Mecânica e segundo as interações a que está submetido, a trajetória real de um sistema mecânico que inicia seu movimento no instante t_1 em uma posição $q(t_1)$ e termina-o no instante t_2 em uma posição $q(t_2)$?[58] Ou, em outras palavras, qual a curva γ que é efetivamente seguida pela trajetória real do sistema mecânico considerado? A resposta a essa questão é dada pelo chamado *Princípio de Hamilton*[59], ou *princípio de ação mínima*, que passamos a descrever.

Seja $[t_1,\ t_2] \ni t \to \delta q(t) \in \mathbb{R}^n$ uma função definida no espaço de configurações que seja infinitamente diferenciável e

[57] Joseph-Louis Lagrange (1736–1813). Seu nome de nascimento foi Giuseppe Luigi Lagrangia.

[58] No formalismo Lagrangiano é implícita a suposição de que, dados $(t_1,\ q(t_1))$ e $(t_2,\ q(t_2))$, com $q(t_1)$ e $q(t_2)$ *arbitrários* no espaço de configurações, existe uma trajetória real que inicia-se em $q(t_1)$ no instante t_1 e termina em $q(t_2)$ no instante t_2. Por trajetória real entendemos uma trajetória que respeite as leis da Mecânica e seja compatível com as interações às quais o sistema mecânico está sujeito.

[59] William Rowan Hamilton (1805–1865).

se anule nos extremos do seu intervalo de definição t_1 e t_2, ou seja, $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Denotemos $\frac{d}{dt}\delta q(t)$ por $\delta\dot{q}(t)$. Adicionalmente, suporemos também que $\delta q(t)$ seja suficientemente pequena em todo o intervalo $[t_1,\ t_2]$.

Denotemos simbolicamente por γ_λ a curva definida pela função $[t_1,\ t_2] \ni t \mapsto q_\gamma(t) + \lambda\delta q(t)$, com $\lambda \in [-1,\ 1]$. Pela definição de δq sabemos que essa curva também conecta o ponto $q(t_1)$ no instante t_1 ao ponto $q(t_2)$ no instante t_2. Quando $\lambda = 0$ a curva γ_λ coincide com γ. Assim, a diferença $S[\gamma] - S[\gamma_\lambda]$ anula-se para $\lambda = 0$. Desejamos saber o quão rapidamente essa diferença afasta-se de zero quando λ torna-se não nulo, mas "pequeno".

Para tal, definimos a *variação da ação $S[\gamma]$ na direção de δq* por

$$\delta_{\delta q} S[\gamma] \ := \ \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\Big(S[\gamma_\lambda] - S[\gamma]\Big) \ .$$

$\delta_{\delta q} S[\gamma]$ expressa a taxa de variação de $S[\gamma]$ quanto a curva γ é "deformada" pela adição de δq a q_γ. Naturalmente, essa taxa depende da função δq adotada. Por definição, temos

$$\delta_{\delta q} S[\gamma] \ = \ \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathscr{L}\Big(t,\ q_\gamma(t) + \lambda\delta q(t),\ \dot{q}_\gamma(t) + \lambda\delta\dot{q}(t)\Big) - \mathscr{L}\Big(t,\ q_\gamma(t),\ \dot{q}_\gamma(t)\Big)\right] dt \ .$$

Assumindo que $\mathscr{L}$ é uma função duas vezes diferenciável de q e $\dot{q}$, podemos escrever, pela expansão em série de Taylor em λ,

$$\mathscr{L}\Big(t,\ q_\gamma(t) + \lambda\delta q(t),\ \dot{q}_\gamma(t) + \lambda\delta\dot{q}(t)\Big) - \mathscr{L}\Big(t,\ q_\gamma(t),\ \dot{q}_\gamma(t)\Big) \ = \ \lambda \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i}\delta q^i(t) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i}\delta\dot{q}^i(t)\right] + O(\lambda^2) \ .$$

(Doravante vamos frequentemente omitir o índice γ de expressões como $q_\gamma(t)$ e $\dot{q}_\gamma(t)$). Assim,

$$\delta_{\delta q} S[\gamma] \ = \ \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i}\delta q^i(t) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i}\delta\dot{q}^i(t)\right] dt \ .$$

Efetuando integração por partes, temos que

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i}\delta\dot{q}^i(t)\ dt \ = \ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i}\delta q^i(t)\bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i}\right)\delta q^i(t)\ dt \ .$$

Como, por hipótese, $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$, obtemos

$$\delta_{\delta q} S[\gamma] \ = \ \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i}\right]\delta q^i(t)\ dt \ . \tag{45.170}$$

Dizemos que a variação da ação $S[\gamma]$ é nula sobre a curva γ, em símbolos $\delta S[\gamma] = 0$, se $\delta_{\delta q} S[\gamma] = 0$ para toda função δq do tipo especificado acima. Assim, vemos de (45.170) que $\delta S[\gamma] = 0$ ao longo de uma curva γ se e somente se q_γ satisfizer as equações diferenciais

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i} \ = \ 0 \tag{45.171}$$

para todo $i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$. Nessa conclusão também fizemos uso do Lema 45.1 e do Corolário 45.2, página 2661. Essas equações são denominadas *equações de Euler-Lagrange* e ocupam uma posição central na Mecânica Clássica.

O chamado *Princípio de Hamilton* consiste na afirmação que $\delta S[\gamma] = 0$ se e somente se γ for a trajetória real do sistema mecânico considerado que conecta o ponto $q(t_1)$ no instante t_1 e o ponto $q(t_2)$ no instante t_2. Assim, concluímos que ao longo da trajetória são satisfeitas as equações de Euler-Lagrange. Assim, vemos que o Princípio de Hamilton é equivalente no contexto aqui tratado às equações (45.168), que expressam a Segunda Lei de Newton para forças conservativas.

Sob esse princípio entendemos que as equações de Euler-Lagrange são a expressão das leis físicas fundamentais de um sistema mecânico com um número finito de graus de liberdade em forma de um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem.

Essa é a essência do chamado *formalismo Lagrangiano da Mecânica Clássica*. Seu ponto central reside na natureza invariante de sua formulação, isto é, na sua independência do sistema de coordenadas adotado no espaço de configurações, como discutiremos na Seção 45.5.2, logo adiante.

• **Sistemas autônomos e não autônomos**

Quando $\mathscr{L}$ não depende explicitamente de t, ou seja, quando $\mathscr{L} \equiv \mathscr{L}\big(q,\ \dot{q}\big)$ dizemos que o sistema mecânico considerado é um *sistema autônomo*. De outra forma, se $\mathscr{L}$ também depende explicitamente de t, o sistema é dito ser um *sistema não autônomo*. Sistemas não autônomos ocorrem, por exemplo, se um potencial externo varia com o tempo.

Na Seção 45.5.6, página 2625, mostraremos que todo sistema não autônomo pode ser transformado em um sistema autônomo por um truque que, em sua essência, consiste em considerar o tempo t como uma coordenada independente.

• **Forma explícita das equações de Euler-Lagrange**

Para o caso de um sistema não autônomo, expandindo-se a derivada total em relação a t em (45.171), as equações de Euler-Lagrange assumem a forma explícita do seguinte sistema de equações ordinárias de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i\partial t}\big(t,\ q(t),\ \dot{q}(t)\big)+\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i\partial q^j}\big(t,\ q(t),\ \dot{q}(t)\big)\ \dot{q}^j(t)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j}\big(t,\ q(t),\ \dot{q}(t)\big)\ddot{q}^j(t)\right]-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i}\big(t,\ q(t),\ \dot{q}(t)\big)\ =\ 0\ , \tag{45.172}$$

para $i\ =\ 1,\ \ldots,\ n$.

No caso de sistemas autônomos, onde $\mathscr{L}$ não depende da variável independente t, as equações (45.172) se reduzem a

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i\partial q^j}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)\ \dot{q}^j(t)+\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)\ddot{q}^j(t)\right]-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)\ =\ 0\ , \tag{45.173}$$

para $i\ =\ 1,\ \ldots,\ n$.

• **A Identidade de Beltrami**

Nesse contexto é interessante apresentar uma identidade, conhecida como *fórmula de Beltrami*[60], ou *identidade de Beltrami*.

Consideremos um sistema autônomo, ou seja, um sistema para o qual não haja dependência explícita de $\mathscr{L}$ com o tempo t e, portanto, $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}=0$. Derivando-se $\mathscr{L}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)$ em relação a t, temos

$$\frac{d}{dt}\mathscr{L}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)\ =\ \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^j}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)\dot{q}^j(t)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^j}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)\ddot{q}^j(t)\right]\ . \tag{45.174}$$

Pelas equações de Euler-Lagrange podemos escrever $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_j}$. Assim, (45.174) fica

$$\frac{d}{dt}\mathscr{L}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)\ =\ \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^j}\right)\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)\dot{q}^j(t)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^j}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)\ddot{q}^j(t)\right]\ =\ \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^j}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)\dot{q}^j(t)\right]\ . \tag{45.175}$$

Dessa igualdade, concluímos que

$$\mathscr{L}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)-\sum_{j=1}^{n}\dot{q}^j(t)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^j}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)\ =\ K\ , \tag{45.176}$$

onde K é uma constante. Essa é identidade é denominada *identidade de Beltrami* e, no caso de sistemas mecânicos autônomos, ela está ligada à conservação de energia mecânica ao longo de um movimento, como veremos à página 2628. A identidade, porém, é válida em qualquer problema variacional no qual a função de Lagrange não dependa da variável independente. Veremos uma aplicação ao problema da *curva braquistócrona*, na Seção 46.1, página 2663.

[60] Eugenio Beltrami (1835–1900).

45.5.2 Invariância das Equações de Euler-Lagrange por Mudanças de Coordenadas e de Sistemas de Referência

• **A invariância das equações de Euler-Lagrange por mudanças de coordenadas**

A característica mais importante das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i}\,, \qquad i \in \{1,\ \ldots,\ n\}\,,$$

e que é a razão de ser do formalismo Lagrangiano, é o fato de as mesmas serem invariantes quando realizamos uma transformação de coordenadas no espaço de configurações. Vamos esclarecer o que isso significa.

Suponhamos que ao invés do sistema de coordenadas $(q^1,\ \ldots,\ q^n)$ utilizemos um outro sistema de coordenadas $(Q^1,\ \ldots,\ Q^n)$ para descrever nosso nosso sistema mecânico de n graus de liberdade. Então, afirmamos as equações de Euler-Lagrange permanecem as mesmas nesse novo sistema, ou seja, valerão também as equações

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}^j} = \frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial Q^j}\,, \qquad \text{para todo } j \in \{1,\ \ldots,\ n\}\,,$$

onde $\widehat{\mathscr{L}}\big(Q,\ \dot{Q},\ t\big) := \mathscr{L}\big(q(Q,\ t),\ \dot{q}(Q,\ \dot{Q},\ t),\ t\big)$, que é o Lagrangiano original $\mathscr{L}$ escrito em termos das novas coordenadas.

A maneira mais simples e direta de provar essa afirmação é observar que o princípio de Hamilton $\delta\int_{t_1}^{t^2}\mathscr{L}dt = 0$ está expresso de forma independente do particular sistema de coordenadas empregado no espaço de configurações e, portanto, deve conduzir às mesmas equações — as equações de Euler-Lagrange — em qualquer sistema de coordenadas.

Para satisfazer um leitor eventualmente cético quanto a essa argumentação, ou insatisfeito com ela, vamos apresentar uma prova direta da invariância das equações de Euler-Lagrange.

Sejam $Q^j \equiv Q^j(q^1,\ \ldots,\ q^n,\ t)$, $j \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, as expressões que fornecem as "novas" coordenadas Q em função das "antigas" coordenadas q e, eventualmente, do tempo t. Vamos supor que essa transformação de coordenadas seja ao menos duas vezes diferenciável e que essa mudança de variáveis seja, para cada t, inversível. Essa última hipótese significa que a matriz Jacobiana $n \times n$, de elementos de matriz $\frac{\partial Q^j}{\partial q^i}$, $i,\ j \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, é uma matriz inversível.

As velocidades generalizadas das novas coordenadas são definidas por

$$\dot{Q}^j\big(q,\ \dot{q},\ t\big) := \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial Q^j}{\partial q^k}(q,\ t)\dot{q}^k + \frac{\partial Q^j}{\partial t}(q,\ t)\,. \tag{45.177}$$

Assim,

$$\frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial q^i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 Q^j}{\partial q^i \partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial^2 Q^j}{\partial q^i \partial t} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial Q^j}{\partial q^k}\,, \tag{45.178}$$

sendo que a última igualdade decorre de $\dot{Q}^j$ depender linearmente dos $\dot{q}^k$'s. Ao longo de uma curva $q(t)$, temos, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{\partial Q^j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^k + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Q^j}{\partial q^i}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 Q^j}{\partial q^i \partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial^2 Q^j}{\partial q^i \partial t}$$

e, portanto, mostramos que ao longo de uma curva $q(t)$ vale

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} = \frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial q^i}\,. \tag{45.179}$$

Agora, novamente pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial Q^j}\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}^j}\frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial q^i}\,. \tag{45.180}$$

Por outro lado, temos também que $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}^j}\frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial \dot{q}^i}$. Em (45.178) vimos que $\frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial Q^j}{\partial q^k}$. Assim,

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}^j}\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} .$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}^j}\right)\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}^j}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial Q^j}{\partial q^i}\right) \overset{(45.179)}{=} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}^j}\right)\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}^j}\frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial q^i} . \tag{45.181}$$

Assim, obtemos de (45.180) e de (45.181) que, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, vale

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}^j}\right)\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}^j}\frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial Q^j}\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}^j}\frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial q^i}$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}^j} - \frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial Q^j}\right)\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} . \tag{45.182}$$

Dessa forma, assumindo a validade das equações de Euler-Lagrange para o sistema de coordenadas q, ou seja, assumindo que $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i} = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}^j} - \frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial Q^j}\right)\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} = 0 ,$$

também para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como a matriz Jacobiana, de elementos de matriz $\frac{\partial Q^j}{\partial q^i}$, é inversível, segue imediatamente disso que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}^j} - \frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial Q^j} = 0 , \quad j \in \{1, \ldots, n\} ,$$

que são as equações de Euler-Lagrange nas "novas" coordenadas Q. Isso estabeleceu a invariância das equações de Euler-Lagrange por mudança de coordenadas no espaço de configurações.

Futuramente, se houver perigo de confusão, nem sempre iremos distinguir notacionalmente $\mathscr{L}$ de $\widehat{\mathscr{L}}$.

- **A energia cinética e a expressão de $\widehat{\mathscr{L}}$**

Seguindo (45.166), na ausência de vínculos temos

$$T = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{2}(\dot{q}^j)^2 = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{2}\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial q^j}{\partial Q^k}\dot{Q}^k\right)^2 = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{2}\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n \frac{\partial q^j}{\partial Q^k}\frac{\partial q^j}{\partial Q^l}\dot{Q}^k\dot{Q}^l . \tag{45.183}$$

Assim, energia cinética expressa nas coordenadas generalizadas Q e nas velocidades generalizadas $\dot{Q}$ é

$$\widehat{T}(Q^1, \ldots, Q^n, \dot{Q}^1, \ldots, \dot{Q}^n) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n M_{kl}(Q^1, \ldots, Q^n)\,\dot{Q}^k\dot{Q}^l ,$$

sendo

$$M_{kl}(Q^1, \ldots, Q^n) = \sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial q^j}{\partial Q^k}\frac{\partial q^j}{\partial Q^l} .$$

A dependência em $Q^1, \ldots, Q^n$ está nas derivadas $\frac{\partial q^a}{\partial Q^b}$. As quantidades M_{kl} são por vezes denominadas *massas generalizadas*.

Observe-se que $\widehat{T}$ é uma forma quadrática nas velocidades generalizadas (como no caso de coordenadas Cartesianas), mas pode depender das coordenadas generalizadas (ao contrário do caso de coordenadas Cartesianas).

Dessa forma, em termos mais precisos, o Lagrangiano $\widehat{\mathscr{L}}$ é dado por

$$\widehat{\mathscr{L}}(Q,\ \dot{Q},\ t) \ = \ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} M_{kl}(Q^1,\ \ldots,\ Q^n)\,\dot{Q}^k\dot{Q}^l - U\Big(q^1(Q^1,\ \ldots,\ Q^n),\ \ldots,\ q^n(Q^1,\ \ldots,\ Q^n),\ t\Big)\ .$$

• **Exemplos simples**

Tratemos de exibir um exemplo da invariância das equações de Euler-Lagrange.

Exemplo 45.4 Considere-se um ponto material de massa m movendo-se em uma dimensão sob um potencial $V(x) = \alpha\tanh x$, com α constante. O Lagrangiano é $\mathscr{L}(x,\ \dot{x}) = \frac{m}{2}\big(\dot{x}\big)^2 - \alpha\tanh x$ e a correspondente equação de Euler-Lagrange é

$$m\ddot{x} \ = \ -\alpha\big(1-(\tanh x)^2\big)\ . \tag{45.184}$$

Adotemos novas coordenadas $X = \tanh x$, que mapeiam bijetivamente $\mathbb{R}$ no intervalo $(-1,\ 1)$. Teremos $\dot{X} = \big(1-(\tanh x)^2\big)\dot{x}$ e $\dot{x} = \dot{X}/\big(1-X^2\big)$. Assim, $\widehat{\mathscr{L}}(X,\ \dot{X}) = \frac{m}{2\big(1-X^2\big)^2}\big(\dot{X}\big)^2 - \alpha X$. Logo,

$$\frac{\partial\widehat{\mathscr{L}}}{\partial\dot{X}} \ = \ \frac{m}{\big(1-X^2\big)^2}\dot{X} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\widehat{\mathscr{L}}}{\partial X} \ = \ \frac{2mX}{\big(1-X^2\big)^3}\big(\dot{X}\big)^2 - \alpha$$

e, portanto, a nova equação de Euler-Lagrange é

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\big(1-X^2\big)^2}\dot{X}\right) \ = \ \frac{2mX}{\big(1-X^2\big)^3}\big(\dot{X}\big)^2 - \alpha\ . \tag{45.185}$$

Expandindo-se a derivada do lado esquerdo e realizando-se alguns cômputos elementares, essa equação assume a forma

$$m\big(1-X^2\big)\ddot{X} + 2mX\big(\dot{X}\big)^2 \ = \ -\alpha\big(1-X^2\big)^3\ . \tag{45.186}$$

Desejamos verificar que as equações (45.186) e (45.184) são equivalentes. Para isso, substituamos $X = \tanh x$ em (45.186). Temos $\dot{X} = \big(1-(\tanh x)^2\big)\dot{x}$ e $\ddot{X} = \big(1-(\tanh x)^2\big)\ddot{x} - 2\tanh x\big(1-(\tanh x)^2\big)\big(\dot{x}\big)^2$. Assim, (45.186) fica

$$m\big(1-(\tanh x)^2\big)\Big[\big(1-(\tanh x)^2\big)\ddot{x} - 2\tanh x\big(1-(\tanh x)^2\big)\big(\dot{x}\big)^2\Big] + 2m\tanh x\big(1-(\tanh x)^2\big)^2\big(\dot{x}\big)^2 \ = \ -\alpha\big(1-(\tanh x)^2\big)^3$$

que, após cancelamentos, se simplifica para $m\ddot{x} = -\alpha\big(1-(\tanh x)^2\big)$, que é (45.184), como desejávamos mostrar. ♦

E. 45.22 *Exercício*. Considere-se um ponto material de massa m movendo-se em uma dimensão sob um potencial $V(x) = \alpha x^4$, com α constante. O Lagrangiano é $\mathscr{L}(x,\ \dot{x}) = \frac{m}{2}\big(\dot{x}\big)^2 - \alpha x^4$ Mostre que a correspondente equação de Euler-Lagrange é $m\ddot{x} = -4\alpha x^3$. Considere novas coordenadas definidas em $\mathbb{R}$ dadas por $X = x^3$. Mostre que o Lagrangiano nessas coordenadas é $\widehat{\mathscr{L}}(X,\ \dot{X}) = \frac{m}{18}X^{-4/3}\big(\dot{X}\big)^2 - \frac{4\alpha}{3}X^{4/3}$. Mostre que as equações de Euler-Lagrange nessas coordenadas assumem a forma $mX\ddot{X} - \frac{2m}{3}\big(\dot{X}\big)^2 = -12\alpha X^{8/3}$. Substituindo $X = x^3$ nessa última equação, reobtenha a Euler-Lagrange original do sistema de coordenadas original. ✠

45.5.3 Sistemas com Vínculos Holonômicos

No tratamento que apresentamos até agora consideramos sistemas com p pontos materiais movendo-se sem restrições de vínculos e aprendemos a descrever seu movimento por meio das equações de Euler-Lagrange ou, equivalentemente, do Princípio de Hamilton. Sistemas com vínculos, porém, são abundantes na Física, especialmente os holonômicos, e vamos agora mostrar como eles podem ser analisados no formalismo Lagrangiano.

Na seção corrente apresentaremos um argumento um tanto informal para justificar que as equações de Euler-Lagrange (e o Princípio de Hamilton) são também válidas sob vínculos holonômicos. Uma argumentação mais formal (e um pouco mais geral) será apresentada na Seção 45.5.4, página 2614, onde desenvolvermos o Princípio de D'Alembert.

Como já comentamos, vínculos decorrem de forças produzidas por corpos materiais sobre os pontos materiais que compõem nosso sistema. Podemos, assim, implementá-los da seguinte forma. Seja $\mathscr{V}$ a superfície n-dimensional de $\mathbb{R}^{3p}$ que resulta da implementação de q relações de vínculo, como em (45.163). Aqui, $n = 3p - q$. Podemos implementar os vínculos por meio de um potencial λV, onde λ é um número real e V tem as seguintes características: V anula-se em $\mathscr{V}$ e cresce rapidamente à medida em que nos afastamos de $\mathscr{V}$. Assim, ao tomarmos o limite $\lambda \to \infty$ o sistema fica confinado à superfície $\mathscr{V}$ de $\mathbb{R}^{3p}$ e o vínculo é implementado. Antes desse limite, podemos considerar o sistema como movimentando-se em $\mathbb{R}^{3p}$ de acordo com o Princípio de Hamilton e com as equações de Euler-Lagrange, como tratamos anteriormente. Devido à invariância, estabelecida acima, das equações de Euler-Lagrange, podemos expressá-las em um sistema de coordenadas do seguinte tipo: As primeiras n coordenadas $q^1, \ldots, q^n$ são coordenadas que descrevem a variedade $\mathscr{V}$ e as demais $q^{n+1}, \ldots, q^{3p}$ descrevem o espaço complementar a $\mathscr{V}$, por exemplo, crescendo à medida que nos afastamos de $\mathscr{V}$ e sendo nulas em $\mathscr{V}$. No limite em que $\lambda \to \infty$ essas coordenadas $q^{n+1}, \ldots, q^{3p}$ congelam em 0, pois o sistema mecânico não consegue afastar-se de $\mathscr{V}$, devido à finitude da energia mecânica e o vínculo é implementado. As equações de Euler-Lagrange que sobrevivem são apenas aquelas que envolvem as n-primeiras variáveis, $q^1, \ldots, q^n$ e são

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\mathscr{L} - \frac{\partial}{\partial q^j}\mathscr{L} = 0 , \qquad j = 1, \ldots, n , \tag{45.187}$$

onde

$$\mathscr{L} \equiv \mathscr{L}\big(q^1, \ldots, q^n, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n\big) = T - U .$$

Segue disso também que, na situação considerada, vale também o Princípio de Hamilton para trajetórias restritas à superfície $\mathscr{V}$: a trajetória efetivamente seguida pelo sistema em $\mathscr{V}$ extremiza a integral de ação dentre todas as trajetórias em $\mathscr{V}$ com os mesmos pontos inicial e final.

Na literatura física as coordenadas $q^1, \ldots, q^n$ empregadas para coordenatizar $\mathscr{V}$ são denominadas *coordenadas generalizadas* e as derivadas temporais $\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n$ são denominadas *velocidades generalizadas*.

Um ponto muito importante, e que é uma das razões de ser do formalismo, é que nesse contexto de vínculos vale também a propriedade de invariância das equações de Euler-Lagrange: elas são as mesmas em qualquer outro sistema de coordenadas empregado em $\mathscr{V}$. A demonstração desse fato é idêntica à demonstração que apresentamos em (45.182) e não precisamos reproduzi-la aqui. Vale notar também que o próprio Princípio de Hamilton aponta para essa invariância, por sua formulação ser independente das particulares coordenadas usadas em $\mathscr{V}$.

E. 45.23 *Exercício*. Considere o pêndulo simples planar descrito na Figura 45.5, página 2607. Considerando a força gravitacional constante vertical (no sentido indicado na figura), mostre que a função de Lagrange do sistema é

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}\,\ell^2\big(\dot{\phi}\big)^2 + mg\ell\cos(\phi) . \tag{45.188}$$

Conclua que a correspondente equação de Euler-Lagrange é

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}(\phi) = 0 .$$

Essa equação corresponde à igualdade entre a variação do momento angular do ponto material e o torque da força peso, ambos em relação à origem O. Verifique! ✠

E. 45.24 *Exercício*. Considere o pêndulo duplo planar descrito na Figura 45.6, página 2608. Considerando a força gravitacional constante vertical (no sentido indicado na figura) mostre que a função de Lagrange do sistema é

$$\mathscr{L} = \left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)\ell_1^2\big(\dot{\phi}_1\big)^2 + \frac{m_2}{2}\ell_2^2\big(\dot{\phi}_2\big)^2 + m_2\ell_1\ell_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos(\phi_2-\phi_1) + (m_1+m_2)g\ell_1\cos(\phi_1) + m_2 g\ell_2\cos(\phi_2) . \tag{45.189}$$

Obtenha as correspondentes equações de Euler-Lagrange. ✠

45.5.4 O Princípio de D'Alembert e o Tratamento de Forças não Conservativas

No caso de sistemas holonômicos, o *Princípio de D'Alembert*[61], que agora apresentaremos, conduz a resultados idênticos aos do Princípio de Hamilton, permitindo, porém, incluir também forças não conservativas. Ele também aplica-se a certos sistemas não holonômicos, mas não discutiremos esse ponto na presente versão destas Notas.

[61] Jean Le Rond D'Alembert (1717–1783).

Consideremos um sistema holonômico de p pontos materiais com $n = 3p - q$ graus de liberdade, sujeito, portanto, a condições de vínculo que restrinjam seu movimento a uma subvariedade n-dimensional de $\mathbb{R}^{3p}$. Fisicamente, esses vínculos são impostos por forças exercidas por átomos ou moléculas fixas em corpos que atuam sobre os pontos materiais do sistema que consideramos.

Esse tratamento físico é, em muitos casos, de difícil implementação, por exigir um conhecimento detalhado das componentes interagentes dos corpos de produzem o vínculo (a haste, no exemplo do pêndulo) e a massa m.

Um bom exemplo a se ter em mente é o do pêndulo esférico simples, composto de uma massa pontual m, que gira em torno de um ponto O, fixo, presa a uma haste rígida de massa desprezível e comprimento ℓ, tal como na Figura 45.4, página 2606. Podemos descrevê-lo matematicamente tratando o movimento como restrito à superfície esférica de raio ℓ centrada em O, ou podemos descrevê-lo fisicamente considerando as forças elásticas exercidas pela haste (*i.e.*, pelos átomos da haste e da massa m que interagem entre si) e que mantém constante a distância entre m e O. A observação importante, é que essas forças elásticas agem sempre na direção da haste e, portanto, são ortogonais, em cada ponto, à trajetória.

Essa descrição física traz-nos, porém, uma informação que é de relevância para o que segue: na ausência de atrito as forças exercidas pelo corpo físico que produz o vínculo são ortogonais à trajetória do mesmo e, portanto, são ortogonais à velocidade em cada ponto. É aqui que se inicia a apresentação do Princípio de D'Alembert.

Seja um sistema $\mathcal{S}$ de p pontos materiais, cada um com massa $m_i > 0$, $i = 1, \ldots, p$. Seja $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^3$ o vetor posição do i-ésimo ponto material. A Segunda Lei de Newton afirma que

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i(t) \;=\; \vec{F}_i(t) + \vec{f}_i(t)\;, \tag{45.190}$$

onde $\vec{f}_i(t)$ representa a resultante das forças que produzem o vínculo sobre o i-ésimo ponto material e $\vec{F}_i(t)$ representa a resultante das demais forças aplicadas sobre o i-ésimo ponto material, o que pode incluir interações dos diversos pontos materiais de $\mathcal{S}$ entre si, forças externas aplicadas (como as forças peso, forças eletromagnéticas etc.) e mesmo forças inerciais.

Um ponto importante nos sistemas que trataremos é a imposição que a força $\vec{f}_i(t)$ aja sobre a i-ésima partícula sempre em uma direção ortogonal à sua velocidade, de modo a impor-lhe o vínculo sem impor-lhe uma aceleração na direção tangencial.

As forças $\vec{F}_i(t)$ resultam de forças externas aplicadas à i-ésima partícula ou a forças das partículas entre si, ou mesmo de forças de atrito entre o objeto que produz o vínculo e a i-ésima partícula. Sua natureza não é inicialmente especificada, mas após a obtenção de nossos resultados gerais trataremos, como exemplos, dos casos em que essas forças são conservativas, ou provêm de um campo eletromagnético, ou são forças inerciais.

• Formulação do Princípio de D'Alembert

Consideremos um sistema de p partículas movendo-se sob vínculos holonômicos no espaço físico tridimensional $\mathbb{R}^3$. Como comentamos, os vínculos podem restringir o movimento a uma subvariedade n dimensional de $\mathbb{R}^{3p}$ que denotamos por $\mathscr{V}$. Suporemos que essa variedade possa ser coordenatizada (ao menos localmente) por coordenadas (ditas generalizadas) $q^1, \ldots, q^n$, com $n \leq 3p$. Denotemos por $m_i > 0$ e $\vec{x}_i \in \mathscr{V}$ a massa e, respetivamente, o vetor posição da i-ésima partícula, com $i = 1, \ldots, p$. Cada vetor $\vec{x}_i \in \mathscr{V}$ pode ser escrito como função das coordenadas generalizadas $q^1, \ldots, q^n$:

$$\vec{x}_i\big(q^1, \ldots, q^n\big) \in \mathbb{R}^3, \quad i = 1, \ldots, p\,.$$

Assumimos também que a associação entre os pontos de $\mathscr{V}$ e as coordenadas generalizadas seja biunívoca.

Para cada $i = 1, \ldots, p$ consideremos curvas contínuas e diferenciáveis $I \ni \lambda \mapsto \mathscr{V}$, que denotamos por $\vec{x}_i(\lambda)$. Aqui I é algum intervalo da reta real. Como essas curvas estão completamente em $\mathscr{V}$, elas são compatíveis com os vínculos, sendo denominadas *movimentos virtuais* (ou *deslocamentos virtuais*) na literatura física. Os vetores tangentes a essas curvas $\frac{\partial}{\partial\lambda}\vec{x}_i(\lambda) \in \mathbb{R}^3$ são possíveis vetores velocidade de movimentos reais satisfazendo as leis de Newton (45.190). Assim, pelas nossas hipóteses (e isso é crucial para o que segue), devemos ter $\vec{f}_i \cdot \frac{\partial}{\partial\lambda}\vec{x}_i(\lambda) = 0$ para todo i e todo λ, sendo que "$\cdot$" denota o produto escalar usual em $\mathbb{R}^3$.

Consideremos que por cada ponto dessa curva passa uma trajetória do sistema mecânico que analisamos, de modo que tenhamos funções $\vec{x}_i(t, \lambda)$, com t sendo o tempo e $\vec{x}_i(0, \lambda) = \vec{x}_i(\lambda)$ para todo λ.

Às funções $\vec{x}_i(t, \lambda)$ correspondem funções $q^1(t, \lambda), \ldots, q^n(t, \lambda)$ que descrevem as coordenadas generalizadas em

função de t e λ, de sorte que

$$\vec{x}_i(t,\ \lambda)\ =\ \vec{x}_i\Big(q^1(t,\ \lambda),\ \ldots,\ q^n(t,\ \lambda)\Big)\ .$$

No que segue vamos frequentemente abreviar $\big(q^1(t,\ \lambda),\ \ldots,\ q^n(t,\ \lambda)\big)$ por $q(t,\ \lambda)$.

Para cada λ fixo a função $t \mapsto \vec{x}_i(t,\ \lambda)$ é a trajetória de um sistema mecânico. Os vetores velocidade e aceleração são

$$\vec{v}_i(t,\ \lambda)\ :=\ \frac{\partial}{\partial t}\vec{x}_i(t,\ \lambda) \qquad \text{e} \qquad \vec{a}_i(t,\ \lambda)\ :=\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{x}_i(t,\ \lambda)\ .$$

• **Algumas relações preparatórias**

É relevante expressarmos $\vec{v}_i(t,\ \lambda)$ em termos das funções $q^j(t,\ \lambda)$ e suas derivadas parciais temporais. Pela regra da cadeia, temos

$$\vec{v}_i(t,\ \lambda)\ :=\ \frac{\partial}{\partial t}\vec{x}_i(t,\ \lambda)\ =\ \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^k}\big(q^1(t,\ \lambda),\ \ldots,\ q^n(t,\ \lambda)\big)\left(\frac{\partial}{\partial t}q^k(t,\ \lambda)\right)\ . \tag{45.191}$$

Vemos que que $\vec{v}_i(t,\ \lambda)$ são funções dos q's e de suas derivadas parciais em relação a t:

$$\vec{v}_i(t,\ \lambda)\ =\ \vec{v}_i\Big(q^1(t,\ \lambda),\ \ldots,\ q^n(t,\ \lambda),\ \dot{q}^1(t,\ \lambda),\ \ldots,\ \dot{q}^n(t,\ \lambda)\Big)\ \equiv\ \vec{v}_i\Big(q(t,\ \lambda),\ \dot{q}(t,\ \lambda)\Big)\ ,$$

onde $\dot{q}^k$ é uma abreviação para $\frac{\partial}{\partial t}q^k(t,\ \lambda)$. De (45.191) vemos que a dependência com as derivadas temporais $\dot{q}^k$ é linear e extraímos que

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}^k}\ =\ \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^k}\big(q^1(t,\ \lambda),\ \ldots,\ q^n(t,\ \lambda)\big)\ . \tag{45.192}$$

Temos também por (45.191) que

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q^j}\ =\ \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial q^k \partial q^j}\big(q(t,\ \lambda)\big)\left(\frac{\partial}{\partial t}q^k(t,\ \lambda)\right)\ . \tag{45.193}$$

De forma análoga a (45.191), temos também

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\vec{x}_i(t,\ \lambda)\ =\ \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^k}\big(q(t,\ \lambda)\big)\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}q^k(t,\ \lambda)\right)\ . \tag{45.194}$$

• **Desenvolvendo Princípio de D'Alembert**

Pela condição de ortogonalidade entre $\vec{f}_i$ e $\frac{\partial}{\partial \lambda}\vec{x}_i(t,\ \lambda)$, temos, por (45.190),

$$\left[m_i\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{x}_i\right)-\vec{F}_i\right]\cdot\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\vec{x}_i(\lambda)\right)\ =\ 0$$

para todo $i = 1,\ \ldots,\ n$. Assim, segue que

$$\sum_{i=1}^{p}\left[m_i\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{x}_i\right)-\vec{F}_i\right]\cdot\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\vec{x}_i(\lambda)\right)\ =\ 0\ . \tag{45.195}$$

Essa é a expressão matemática do *Princípio de D'Alembert*.

Usando (45.194), isso fica

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\left[m_i\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{x}_i(t,\ \lambda)\right)-\vec{F}_i\right]\cdot\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^j}\big(q(t,\ \lambda)\big)\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}q^j(t,\ \lambda)\right)\ =\ 0$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n}\big(A_j - G_j\big)\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}q^j(t,\ \lambda)\right)\ =\ 0 \tag{45.196}$$

sendo

$$A_j \;:=\; \sum_{i=1}^{p} m_i \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{x}_i(t,\,\lambda)\right)\cdot\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q^j}\big(q(t,\,\lambda)\big) \qquad \text{e} \tag{45.197}$$

$$G_j \;:=\; \sum_{i=1}^{p} \vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q^j}\big(q(t,\,\lambda)\big)\;. \tag{45.198}$$

Na literatura física as funções A_j são por vezes denominadas *acelerações generalizadas* e as funções G_j são por vezes denominadas *forças generalizadas*. O fato relevante é que, como (45.196) é supostamente válida para todas as funções $q^j(t,\,\lambda)$ e essas são <u>*independentes*</u>, segue que

$$A_j \;=\; G_j \qquad \text{para todo } j\,=\,1,\,\ldots,\,n\;. \tag{45.199}$$

Essa é a principal consequência do Princípio de D'Alembert e no que segue vamos explicitar seu significado, procurando expressões mais adequadas para A_j.

• **<u>Desenvolvendo a expressão para A_j</u>**

Tratemos de A_j, $j=1,\,\ldots,\,n$. Podemos escrever

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{x}_i(t,\,\lambda)\right)\cdot\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q^j}\big(q(t,\,\lambda)\big) \;&=\; \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{x}_i(t,\,\lambda)\right)\cdot\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q^j}\big(q(t,\,\lambda)\big)\right]-\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{x}_i(t,\,\lambda)\right)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q^j}\big(q(t,\,\lambda)\big)\right]\\
&\overset{\vec{v}_i:=\frac{\partial}{\partial t}\vec{x}_i}{=}\; \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{v}_i(t,\,\lambda)\;\cdot\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q^j}\big(q(t,\,\lambda)\big)\right]-\vec{v}_i(t,\,\lambda)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q^j}\big(q(t,\,\lambda)\big)\right]\\
&\overset{(45.192)}{=}\; \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{v}_i(t,\,\lambda)\;\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial \dot{q}^j}\big(q(t,\,\lambda)\big)\right]-\vec{v}_i(t,\,\lambda)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q^j}\big(q(t,\,\lambda)\big)\right]\;.
\end{aligned} \tag{45.200}$$

Agora,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q^j}\big(q(t,\,\lambda)\big)\right] \;=\; \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\vec{x}_i}{\partial q^j\partial q^k}\big(q(t,\,\lambda)\big)\left(\frac{\partial}{\partial t}q^k(t,\,\lambda)\right) \tag{45.201}$$

e comparando com o lado direito de (45.193), concluímos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q^j}\big(q(t,\,\lambda)\big)\right] \;=\; \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q^j}\;. \tag{45.202}$$

Retornando com (45.202) a (45.200), obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{x}_i(t,\,\lambda)\right)\cdot\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q^j}\big(q(t,\,\lambda)\big) \;&=\; \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{v}_i(t,\,\lambda)\;\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial \dot{q}^j}\big(q(t,\,\lambda)\big)\right]-\vec{v}_i(t,\,\lambda)\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q^j}\\
&=\; \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\|\vec{v}_i\|^2}{\partial\dot{q}^j}-\frac{\partial\|\vec{v}_i\|^2}{\partial q^j}\right]\;.
\end{aligned}$$

Coletando as expressões obtidas, temos para cada $j=1,\,\ldots,\,n$,

$$A_j \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}^j}T\right)-\frac{\partial}{\partial q^j}T\;,$$

T sendo a energia cinética do sistema de p partículas:

$$T \;:=\; \sum_{i=1}^{p}\frac{m_i}{2}\|\vec{v}_i\|^2 \;\overset{(45.191)}{=}\; \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}M_{kl}\,\dot{q}^k\dot{q}^l\;, \tag{45.203}$$

para

$$M_{kl} \equiv M_{kl}\big(q^1,\ \ldots,\ q^n\big) := \sum_{i=1}^{p} m_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^l} \ . \tag{45.204}$$

Dessa forma, a igualdade (45.199) significa que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} T\right) - \frac{\partial}{\partial q^j} T = G_j \ , \qquad j = 1,\ \ldots,\ n \ . \tag{45.205}$$

Nessas relações podemos desconsiderar a dependência em λ, pois (45.205) vale em todo ponto de $\mathscr{V}$, e escrever as derivadas parciais $\frac{\partial}{\partial t}$ como derivadas totais:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} T\right) - \frac{\partial}{\partial q^j} T = G_j \ , \qquad j = 1,\ \ldots,\ n \ . \tag{45.206}$$

As relações (45.206) devem ser entendidas como generalizações das equações de Euler-Lagrange, generalizações em dois sentidos: primeiramente por valerem mesmo para forças não conservativas e segundamente por envolverem apenas as coordenadas generalizadas $q^1,\ \ldots,\ q^n$, que descrevem $\mathscr{V}$, e não as coordenadas do sistema sem vínculos em $\mathbb{R}^{3p}$.

• **O caso de forças conservativas**

Suponhamos que $\vec{F}_i$ seja, para cada $i = 1,\ \ldots,\ p$, da forma $\vec{F}_i = \vec{F}_i^c + \vec{F}_i^n$, onde $\vec{F}_i^c$ é conservativa, ou seja, existe uma função $U\big(\vec{x}_1,\ \ldots\ \vec{x}_p\big)$ tal que $\vec{F}_i^c = -\vec{\nabla}_i U$. A contribuição das forças conservativas $\vec{F}_i^c$ à G_j será, segundo (45.198),

$$-\sum_{i=1}^{p} \vec{\nabla}_i U \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^j}\big(q(t,\ \lambda)\big) = -\frac{\partial}{\partial q^j} V\big(q^1,\ \ldots,\ q^n\big) \ , \tag{45.207}$$

sendo

$$V\big(q^1,\ \ldots,\ q^n\big) := U\Big(\vec{x_1}(q^1,\ \ldots,\ q^n),\ \ldots,\ \vec{x_p}(q^1,\ \ldots,\ q^n)\Big) \ . \tag{45.208}$$

A relação (45.207) decorre meramente da regra da cadeia. Assim, como V independe as velocidades generalizadas $\dot{q}^j$, a relação (45.206) fica

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \mathscr{L}\right) - \frac{\partial}{\partial q^j} \mathscr{L} = H_j \ , \qquad j = 1,\ \ldots,\ n \ , \tag{45.209}$$

com

$$\mathscr{L} := T - V, \qquad \text{sendo } V \text{ dado em (45.208).}$$

e

$$H_j := \sum_{i=1}^{p} \vec{F}_i^n \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^j}\big(q(t,\ \lambda)\big) \ .$$

H_j contém a contribuição das forças não conservativas e $\mathscr{L}$ é o Lagrangiano.

• **Generalizações para algumas forças não conservativas**

Um caso que desperta particular interesse é aquele no qual as forças generalizadas G_j tem a seguinte forma:

$$G_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} W - \frac{\partial}{\partial q^j} W \ , \qquad j = 1,\ \ldots,\ n \ , \tag{45.210}$$

onde $W \equiv W\big(q^1,\ \ldots,\ q^n,\ \dot{q}^1,\ \ldots,\ \dot{q}^n\big)$ é uma função que pode depender das coordenadas e das velocidades generalizadas. Nesse caso, (45.206) fica

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \mathscr{L}\right) - \frac{\partial}{\partial q^j} \mathscr{L} = 0 \ , \qquad j = 1,\ \ldots,\ n \ , \tag{45.211}$$

onde, aqui, $\mathscr{L} := T\big(q^1,\ \ldots,\ q^n,\ \dot{q}^1,\ \ldots,\ \dot{q}^n\big) - W\big(q^1,\ \ldots,\ q^n,\ \dot{q}^1,\ \ldots,\ \dot{q}^n\big)$. Assim, as equações de Euler-Lagrange usuais também aplicam-se nesse caso e, portanto, também o Princípio de Hamilton. A função W é por vezes denominada (inadequadamente) "*potencial*" ou, "*potencial generalizado*". Uma situação como essa ocorre no tratamento das forças de Lorentz do Eletromagnetismo, como veremos adiante.

• **As equações de Euler-Lagrange para forças conservativas sob vínculos holonômicos**

No caso em que as forças não conservativas não estão presentes o que temos em (45.209) são as equações de Euler-Lagrange para sistemas com vínculos holonômicos, que apresentamos anteriormente em (45.187), página 2614. Assim, o Princípio de D'Alembert fornece um caminho alternativo para deduzir essas equações. Consequentemente, vale também o Princípio de Hamilton nesse caso. De fato, sob essas circunstâncias, o Princípio de D'Alembert e o Princípio de Hamilton são equivalentes. Para mais a respeito dessa equivalência, vide [23].

• **Invariância das equações de Euler-Lagrange generalizadas**

Um ponto muito importante a ser destacado é que as equações de Euler-Lagrange generalizadas, na forma (45.205) ou (45.209), são covariantes por mudanças de sistemas de coordenadas em $\mathscr{V}$.

Consideremos novas coordenadas $Q^1,\ \ldots,\ Q^n$ em $\mathscr{V}$, com a mudança de coordenadas $(q^1,\ \ldots,\ q^n) \to (Q^1,\ \ldots,\ Q^n)$ sendo suave e bijetora. Defina-se $\widehat{\mathscr{L}}\big(Q,\ \dot{Q},\ t\big) := \mathscr{L}\big(q(Q,\ t),\ \dot{q}(Q,\ \dot{Q},\ t),\ t\big)$ o Lagrangiano expresso no novo sistema de coordenadas. Repetindo o mesmo procedimento que nos conduziu a (45.182), página 2612, obtemos também aqui a igualdade

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^j} \;=\; \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}^k} - \frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial Q^k}\right)\frac{\partial Q^k}{\partial q^j}\ ,$$

para todo $j \in \{1,\ \ldots,\ n\}$. Para as forças generalizadas G_j ou H_j temos, porém, usando mais uma vez a regra da cadeia,

$$H_j \;=\; \sum_{i=1}^{p} \vec{F}_i^n \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^j} \;=\; \sum_{i=1}^{p} \vec{F}_i^n \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial Q^k}\frac{\partial Q^k}{\partial q^j}\right] \;=\; \sum_{k=1}^{n} \widehat{H}_k \frac{\partial Q^k}{\partial q^j}\ ,$$

onde

$$\widehat{H}_j \;:=\; \sum_{i=1}^{p} \vec{F}_i^n \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial Q^j}\ .$$

Assim, assumindo (45.209),

$$0 \;=\; \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\mathscr{L}\right) - \frac{\partial}{\partial q^j}\mathscr{L}\right] - H_j \;=\; \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}^k} - \frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial Q^k}\right) - \widehat{H}_k\right]\frac{\partial Q^k}{\partial q^j}\ .$$

Como a matriz Jacobiana, de elementos de matriz $\frac{\partial Q^k}{\partial q^j}$, é inversível, segue que

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}^k} - \frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial Q^k}\right) \;=\; \widehat{H}_k$$

para todo $k = 1,\ \ldots,\ n$. Isso demonstra a afirmação sobre a covariância de (45.209).

• **Simetrias do Lagrangiano e invariância das equações de Euler-Lagrange**

As equações de Euler-Lagrange na forma (45.187) são invariantes por um tipo de transformação do Lagrangiano que, por exemplo, abordaremos quando tratarmos da força de Lorentz. A transformação a que nos referimos é a transformação

$$\mathscr{L}\big(q,\ \dot{q},\ t\big) \;\to\; \mathscr{L}\big(q,\ \dot{q},\ t\big) + \frac{d}{dt}h\big(q(t),\ t\big)\ , \tag{45.212}$$

onde ao Lagrangiano é acrescentada uma função que é uma derivada temporal total de uma função dependente do tempo.

A maneira mais simples de entender essa invariância é observar que a integral de ação $S = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\big(q,\ \dot{q},\ t\big)dt$, calculada em uma curva $[t_1,\ t_2] \ni t \mapsto q(t)$, com extremos fixos $q(t_1)$ e $q(t_2)$, respectivamente, é transformada para

$$S \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\big(q,\ \dot{q},\ t\big)dt + h\big(q(t_2),\ t_2\big) - h\big(q(t_1),\ t_1\big)\ .$$

Quando considerarmos variações da ação por variações $q(t) \mapsto q(t) + \delta q(t)$ com $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ a variação do termo $h\big(q(t_2),\ t_2\big) - h\big(q(t_1),\ t_1\big)$ é nula, pois os pontos $q(t_1)$ e $q(t_2)$ são fixados na variação das curvas. Assim, as equações de Euler-Lagrange para ambos os Lagrangianos são as mesmas.

Outra maneira, um pouco mais geral, de ver isso envolve escrever explicitamente $\frac{d}{dt}h\big(q(t),\ t\big)$. Para o caso de n coordenadas generalizadas independentes $q^1,\ \ldots,\ q^n$, temos

$$\frac{d}{dt}h\big(q(t),\ t\big) \ = \ \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial q^j}\big(q(t),\ t\big)\dot{q}^j(t) + \frac{\partial h}{\partial t}\big(q(t),\ t\big)\ . \tag{45.213}$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}\left(\frac{d}{dt}h\big(q(t),\ t\big)\right) \ = \ \frac{\partial h}{\partial q^k}\big(q(t),\ t\big)$$

e, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}\left(\frac{d}{dt}h\big(q(t),\ t\big)\right)\right) \ = \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h}{\partial q^k}\big(q(t),\ t\big)\right) \ = \ \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 h}{\partial q^j\partial q^k}\big(q(t),\ t\big)\dot{q}^j(t) + \frac{\partial^2 h}{\partial t\partial q^k}\big(q(t),\ t\big)\ . \tag{45.214}$$

Por outro lado, temos também por (45.213), que

$$\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{d}{dt}h\big(q(t),\ t\big)\right) \ = \ \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 h}{\partial q^k\partial q^j}\big(q(t),\ t\big)\dot{q}^j(t) + \frac{\partial^2 h}{\partial q^k\partial t}\big(q(t),\ t\big)\ . \tag{45.215}$$

Comparando (45.214) a (45.215) vemos que para todo $k = 1,\ \ldots,\ n$, vale

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}\left(\frac{dh}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{dh}{dt}\right) \ = \ 0\ ,$$

provando novamente que a transformação (45.212) não altera as equações de movimento. Nesse sentido ela é considerada uma transformação de simetria do Lagrangiano.

Observe-se que esse segundo argumento aplica-se também a equações como (45.209), para forças generalizadas não conservativas, quando princípios variacionais não necessariamente podem ser aplicados.

45.5.4.1 Partícula Carregada em um Campo Eletromagnético. A Força de Lorentz

Vamos agora apresentar uma das mais importantes consequências das expressões (45.210) e (45.211), página 2618, a saber, a descrição dentro do formalismo Lagrangiano das equações de movimento de uma partícula carregada movendo-se em um campo eletromagnético. As consequências do que apresentaremos estendem-se à Teoria da Relatividade e à Mecânica Quântica. No que segue usaremos o sistema de unidades SI[62] e sistemas de coordenadas Cartesianas em $\mathbb{R}^3$.

É um fato bem sabido do Eletromagnetismo (vide, *e.g.*, [260]) que o campo elétrico $\mathbb{E}$ e o campo magnético podem ser expressos em termos do potencial elétrico ϕ e do potencial vetor $\mathbb{A} = (A_1,\ A_2,\ A_3)$, na forma

$$\mathbb{E} \ = \ -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}\ , \qquad \mathbb{B} \ = \ \vec{\nabla}\times\mathbb{A}\ . \tag{45.216}$$

Outro fato bem sabido do Eletromagnetismo é que se considerarmos um ponto material de carga elétrica e em um campo eletromagnético seu movimento será sujeito a uma força, dita *força de Lorentz*[63] dada por:

$$\vec{F} \ = \ e\Big(\mathbb{E} + \vec{v}\times\mathbb{B}\Big)\ .$$

Trata-se de uma força dependente da velocidade $\vec{v}$ do ponto material. Expressando essa força diretamente em termos de ϕ e $\mathbb{A}$, temos

$$\vec{F} \ = \ -e\left(\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} - \vec{v}\times\Big(\vec{\nabla}\times\mathbb{A}\Big)\right)\ .$$

Vamos agora escrever isso em termos mais convenientes para nossos propósitos. Para a i-ésima componente, temos

$$F_i \ = \ -e\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} - \sum_{j,\,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\,v_j\big(\vec{\nabla}\times\mathbb{A}\big)_k\right)\ .$$

[62] Sistema Internacional de Unidades.
[63] Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928).

Agora, $\left(\vec{\nabla}\times\mathbb{A}\right)_k = \sum_{l,\,m=1}^{3}\varepsilon_{klm}\dfrac{\partial A_m}{\partial x^l}$. Assim,

$$F_i \;=\; -e\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i}+\frac{\partial A_i}{\partial t}-\sum_{j,\,k=1}^{3}\sum_{l,\,m=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}v_j\frac{\partial A_m}{\partial x^l}\right)\;.$$

Segundo (4.7), página 304, vale a identidade $\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} \;=\; \delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$. Assim,

$$\begin{aligned}
F_i \;&=\; -e\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i}+\frac{\partial A_i}{\partial t}-\sum_{j,\,l,\,m=1}^{3}\Big(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\Big)v_j\frac{\partial A_m}{\partial x^l}\right)\\
&=\; -e\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i}+\frac{\partial A_i}{\partial t}-\sum_{j=1}^{3}v_j\frac{\partial A_j}{\partial x^i}+\sum_{j=1}^{3}v_j\frac{\partial A_i}{\partial x^j}\right)\\
&=\; -e\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\phi-\vec{v}\cdot\mathbb{A}\Big)+\frac{\partial A_i}{\partial t}+\big(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\big)A_i\right)\;.
\end{aligned}$$

Agora,

$$A_i \;=\; \frac{\partial}{\partial v_i}\big(\vec{v}\cdot\mathbb{A}\big) \;=\; \frac{\partial}{\partial v_i}\big(\vec{v}\cdot\mathbb{A}-\phi\big)\;,$$

sendo que na última igualdade usamos o fato de ϕ ser independe de $\vec{v}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_i}{\partial t}+\big(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\big)A_i \;&=\; \left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\big(\vec{v}\cdot\mathbb{A}-\phi\big)\right)\\
&=\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\big(\vec{v}\cdot\mathbb{A}-\phi\big)\right)\;.
\end{aligned}$$

Acima, identificamos o operador $\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}$ com a derivada total $\frac{d}{dt}$. Justifique! Dessa forma, concluímos que

$$F_i \;=\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial v_i}e\Big(\phi-\vec{v}\cdot\mathbb{A}\Big)\right)-\frac{\partial}{\partial x^i}e\Big(\phi-\vec{v}\cdot\mathbb{A}\Big)\;.$$

Vemos aqui que F_i é uma força generalizada do tipo expresso em (45.210), página 2618, com um potencial generalizado, denominado *potencial de Lorentz*,

$$W \;:=\; e\Big(\phi-\vec{v}\cdot\mathbb{A}\Big)\;. \tag{45.217}$$

Seguindo as consequências apontadas em (45.211), vemos que a equação de movimento para a força de Lorentz é uma equação de Euler-Lagrange com um Lagrangiano

$$\mathscr{L}\big(\vec{x},\,\vec{v}\big) \;=\; T-W \;=\; \frac{m}{2}\big\|\vec{v}\big\|^2-e\Big(\phi\big(\vec{x},\,t\big)-\vec{v}\cdot\mathbb{A}\big(\vec{x},\,t\big)\Big)\;, \tag{45.218}$$

com T sendo a energia cinética.

Comentamos ainda que sabemos pela Teoria da Relatividade Especial que a expressão $\phi-\vec{v}\cdot\mathbb{A}$ é um invariante relativístico: é a contração do quadrivetor velocidade $(c,\,\vec{v})$ com o quadrivetor potencial eletromagnético $\big(c^{-1}\phi,\,\mathbb{A}\big)$. É natural, portanto, que essa expressão surja como potencial generalizado, mesmo no contexto não relativístico.

• **Invariância por transformações de calibre**

As relações (45.216) gozam de uma importante propriedade. Seja $\Lambda\equiv\Lambda(\vec{x},\,t)$ uma função ao menos duas vezes continuamente diferenciável. Se simultaneamente substituirmos

$$\phi\;\to\;\phi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\qquad\text{e}\qquad\mathbb{A}\;\to\;\mathbb{A}+\vec{\nabla}\Lambda$$

os campos $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$ permanecem inalterados.

As transformações acima são denominadas *transformações de calibre*[64] ou *transformações de gauge*. Como os campos $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$ são fisicamente observáveis, essas transformações são interpretadas como transformações de simetria do Eletromagnetismo.

Podemos nos perguntar: como o potencial de Lorentz (45.217) se transforma por essas transformações? Um simples cômputo mostra que a transformação é

$$W \;\to\; W + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}(e\Lambda) + \frac{\partial}{\partial t}(e\Lambda)\right) \;=\; W + \frac{d}{dt}(e\Lambda)\;.$$

Assim, a transformação para W e, portanto, para o Lagrangiano (45.218), corresponde ao acréscimo de uma derivada temporal total. Ora, como elucidamos quando discutimos transformações de simetria do Lagrangiano à página 2619, esse tipo de transformação é uma simetria do Lagrangiano, por manter invariantes as equações de movimento.

Assim, vemos que as duas transformações lindamente se encaixam para produzir uma transformação de simetria do campo eletromagnético **e** do sistema mecânico a ele acoplado. Essa observação é de grande profundidade e está na base de importantes desenvolvimentos da Teoria Quântica de Campos e da Física das Partículas Elementares.

45.5.5 Sistemas de Coordenadas Não Inerciais no Formalismo Lagrangiano

Uma das virtudes do formalismo Lagrangiano é permitir lidar no mesmo pé de igualdade com sistemas de referência inerciais e não inerciais, e num nível de generalidade ainda maior que aquele tratado na Seção 45.1, página 2555. Isso se deve à invariância das equações de Euler-Lagrange por mudanças de coordenadas, da qual tratamos acima, invariância essa válida mesmo em se tratando de coordenadas dependentes do tempo, como vimos.

Essa invariância da formulação das equações da Mecânica Clássica por transformações gerais de sistemas de referência, e que coloca sistemas de referência inerciais e não inerciais em pé de igualdade, é uma importante inspiração para a Teoria da Relatividade Geral.

No que segue mostraremos que as equações dinâmicas em um sistema de referência não inercial específico, do tipo considerado na Seção 45.1, que gira e desloca-se em relação a um sistema inercial, podem ser obtidas com uso da invariância estabelecida acima por mudanças de coordenadas dependentes do tempo.

Seja uma coleção de n pontos materiais de massa m_i, $i \in \{1,\,\ldots,\,n\}$, movendo-se em um sistema de referência inercial sob a ação de um potencial U. Em coordenadas Cartesianas $\vec{q}_i \in \mathbb{R}^3$, seu Lagrangiano é dado por

$$\mathscr{L}\big(q,\,\dot{q},\,t\big) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\big\|\dot{q}_i\big\|^2 - U\big(q_1,\,\ldots,\,q_n,\,t\big)\;.$$

As correspondentes equações de Euler-Lagrange são $m_i\ddot{\vec{q}}_i = -\mathrm{grad}_i U\big(\vec{q}_1,\,\ldots,\,\vec{q}_n,\,t\big)$. (Nota: aqui e adiante grad_i refere-se ao gradiente em relação às coordenadas *espaciais* do i-ésimo ponto material).

No espírito da Seção 45.1, página 2555, e usando a mesma notação, consideremos novas coordenadas $\vec{Q}_i \in \mathbb{R}^3$, $i \in \{1,\,\ldots,\,n\}$, definidas por

$$\vec{Q}_i \;=\; \vec{Q}_i\big(\vec{q},\,t\big) \;\equiv\; R_t^{-1}\big(\vec{q}_i - \vec{c}_t\big)\;, \qquad i \in \{1,\,\ldots,\,n\}\;,$$

com $R_t \in \mathrm{SO}(3)$. Como em (45.35), página 2563, teremos

$$\dot{\vec{q}}(t) \;=\; R_t\Big[\vec{\Omega}_t \times \vec{Q}(t) + \dot{\vec{Q}}(t)\Big] + \dot{c}_t\;. \tag{45.219}$$

Assim, definindo também

$$V\big(\vec{Q}_1,\,\ldots,\,\vec{Q}_n,\,t\big) \;:=\; U\Big(R_t\vec{Q}_1 + \vec{c}_t,\,\ldots,\,R_t\vec{Q}_n + \vec{c}_t,\,t\Big) \tag{45.220}$$

[64] A expressão provém de Hermann Weyl (1885–1955) e originalmente denominavam outras transformações similares encontradas em conexões em variedades diferenciáveis. Vide Seção 34.2.3.4, página 1779.

temos

$$\begin{aligned}\widehat{\mathscr{L}}(Q,\,\dot{Q},\,t) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\Big\|\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_i+\dot{\vec{Q}}_i+R_t^{-1}\dot{\vec{c}}_t\Big\|^2 - V\big(\vec{Q}_1,\,\ldots,\,\vec{Q}_n,\,t\big)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\Big[\Big\|\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_i\Big\|^2+\|\dot{\vec{Q}}_i\|^2+\|\dot{\vec{c}}_t\|^2\\ &\qquad +2\big(\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_i\big)\cdot\dot{\vec{Q}}_i+2\big(\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_i\big)\cdot\big(R_t^{-1}\dot{\vec{c}}_t\big)+2\dot{\vec{Q}}_i\cdot\big(R_t^{-1}\dot{\vec{c}}_t\big)\Big]-V\big(\vec{Q}_1,\,\ldots,\,\vec{Q}_n,\,t\big)\,,\end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\widehat{\mathscr{L}}(Q,\,\dot{Q},\,t) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\Bigg[\|\dot{\vec{Q}}_i\|^2+2\dot{\vec{Q}}_i\cdot\Big(\big(R_t^{-1}\dot{\vec{c}}_t\big)+\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_i\Big)\\ &\qquad +\Big\|\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_i\Big\|^2+2\Big(\big(R_t^{-1}\dot{\vec{c}}_t\big)\times\vec{\Omega}_t\Big)\cdot\vec{Q}_i+\|\dot{\vec{c}}_t\|^2\Bigg]-V\big(\vec{Q}_1,\,\ldots,\,\vec{Q}_n,\,t\big)\,. \qquad (45.221)\end{aligned}$$

Além de reordenar os termos, colocando juntos na primeira linha os termos dependentes de $\dot{Q}$, usamos também a identidade (4.13), página 305, em dois dos termos.

Com a expressão para $\widehat{\mathscr{L}}$ estabelecida, podemos obter as correspondentes equações de Euler-Lagrange. Isso é obtido no exercício que segue:

E. 45.25 *Exercício*. Para o Lagrangiano $\widehat{\mathscr{L}}$ dado em (45.221), obtenha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widehat{\mathscr{L}}}{\partial\dot{Q}_i^a} &= m_i\Big(\dot{Q}_i^a+\big(R_t^{-1}\dot{\vec{c}}_t\big)^a+\big(\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_i\big)^a\Big) \qquad \text{e}\\ \frac{\partial\widehat{\mathscr{L}}}{\partial Q_i^a} &= m_i\Bigg[\Big(\Big(\dot{\vec{Q}}_i+\big(R_t^{-1}\dot{\vec{c}}_t\big)\Big)\times\vec{\Omega}_t\Big)^a+\|\vec{\Omega}_t\|^2Q_i^a-\big(\vec{\Omega}_t\cdot\vec{Q}_i\big)\big(\vec{\Omega}_t\big)^a\Bigg]-\frac{\partial V}{\partial Q_i^a}\\ &= m_i\Bigg[\Big(\dot{\vec{Q}}_i+\big(R_t^{-1}\dot{\vec{c}}_t\big)\Big)\times\vec{\Omega}_t-\vec{\Omega}_t\times\big(\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_i\big)\Bigg]^a-\frac{\partial V}{\partial Q_i^a}\,.\end{aligned}$$

Acima, $i\in\{1,\,\ldots,\,n\}$ mas $a\in\{1,\,2,\,3\}$. Mostre disso que as equações de Euler-Lagrange são (em notação vetorial):

$$m_i\ddot{\vec{Q}}_i = m_i\Bigg[-R_t^{-1}\ddot{\vec{c}}_t-\frac{d}{dt}\big(R_t^{-1}\big)\dot{\vec{c}}_t-\dot{\vec{\Omega}}_t\times\vec{Q}_i-\vec{\Omega}_t\times\dot{\vec{Q}}_i+\Big(\dot{\vec{Q}}_i+\big(R_t^{-1}\dot{\vec{c}}_t\big)\Big)\times\vec{\Omega}_t-\vec{\Omega}_t\times\big(\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_i\big)\Bigg]-\mathrm{grad}_iV\,, \qquad (45.222)$$

para $i\in\{1,\,\ldots,\,n\}$. ✠

Usando o fato que $R_t\frac{d}{dt}\big(R_t^{-1}\big)+\big(\frac{d}{dt}R_t\big)R_t^{-1}=0$ e, portanto, $\frac{d}{dt}\big(R_t^{-1}\big)=-R_t^{-1}\big(\frac{d}{dt}R_t\big)R_t^{-1}$, temos por (45.34) que

$$-\frac{d}{dt}\big(R_t^{-1}\big)\dot{\vec{c}}_t = R_t^{-1}\dot{R}_tR_t^{-1}\dot{\vec{c}}_t \overset{(45.34)}{=} \vec{\Omega}_t\times\big(R_t^{-1}\dot{\vec{c}}_t\big)\,.$$

Com isso, dois dos termos em (45.222) cancelam-se e obtemos,

$$m_i\ddot{\vec{Q}}_i = m_i\Bigg[-R_t^{-1}\ddot{\vec{c}}_t-\dot{\vec{\Omega}}_t\times\vec{Q}^i-2\vec{\Omega}_t\times\dot{\vec{Q}}_i-\vec{\Omega}_t\times\big(\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_i\big)\Bigg]-\mathrm{grad}_iV\,,$$

para $i\in\{1,\,\ldots,\,n\}$. Como o leitor pode facilmente constatar, o termo entre $[\cdots]$ contém todas as acelerações inerciais identificadas em (45.38), página 2563, e discutidas nas páginas subsequentes àquela.

O termo $\mathrm{grad}_i V$ corresponde às forças reais, internas e externas ao sistema de pontos materiais, que agem sobre o i-ésimo deles. As componentes de $\mathrm{grad}_i V$ são

$$\frac{\partial V}{\partial Q_i^a} = \frac{\partial}{\partial Q_i^a} U\Big(R_t\vec{Q}_1 + \vec{c}_t,\ \ldots,\ R_t\vec{Q}_n + \vec{c}_t,\ t\Big) = \Big(R_t^{-1}\mathrm{grad}_i U\Big)^a\big(\vec{q}_1,\ \ldots,\ \vec{q}_n,\ t\big)\ .$$

Verifique! Como $m_i\ddot{\vec{q}}_i = -\mathrm{grad}_i U$, concluímos que $-\mathrm{grad}_i V = R_t^{-1}\big(m_i\ddot{\vec{q}}_i\big)$ e, assim

$$m_i\ddot{\vec{Q}}_i = R_t^{-1}\big(m_i\ddot{\vec{q}}_i\big) + m_i\Big[-R_t^{-1}\ddot{\vec{c}}_t - \dot{\vec{\Omega}}_t\times\vec{Q}_i - 2\vec{\Omega}_t\times\dot{\vec{Q}}_i - \vec{\Omega}_t\times\big(\vec{\Omega}_t\times\vec{Q}_i\big)\Big]\ , \tag{45.223}$$

para $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$. Essa relação é idêntica a (45.38).

O ponto relevante por trás de tudo isso é a constatação que fizemos acima de que o Lagrangiano $\widehat{\mathscr{L}}$ realmente descreve o sistema de pontos materiais sob o ponto de vista de um sistema de referência não inercial, como aquele considerado, com as novas coordenadas dadas por $\vec{Q} = R_t^{-1}\big(\vec{q}-\vec{c}_t\big)$, na qual passamos de um sistema Cartesiano de coordenadas a outro sistema Cartesiano, mas que gira e se desloca em relação ao primeiro.

Vemos nisso mais uma virtude de formalismo Lagrangiano: o de colocar num mesmo pé de igualdade sistemas inerciais e não inerciais. Essa virtude é consequência direta da invariância das equações de Euler-Lagrange por mudanças de sistemas de coordenadas, mesmo as dependentes do tempo.

Note-se que essa invariância não se limita à classe de transformações que consideramos em $\vec{Q} = R_t^{-1}\big(\vec{q}-\vec{c}_t\big)$, na qual passamos de um sistema Cartesiano de coordenadas a outro sistema Cartesiano, mas que gira e se desloca em relação ao primeiro. Ela vale, como provamos acima, para quaisquer transformações de coordenadas, mesmo as dependentes do tempo.

45.5.5.1 Uma Constante de Movimento

Consideremos uma situação na qual $\vec{\Omega}_t\equiv\vec{\Omega}$ seja constante e $\vec{c}_t = 0$. Adicionalmente, consideremos a situação na qual o potencial $U(\vec{q}_1,\ \ldots,\ \vec{q}_n,\ t)$ seja independente de t e satisfaça a condição de invariância rotacional

$$U\big(R\vec{q}_1,\ \ldots,\ R\vec{q}_n\big) = U\big(\vec{q}_1,\ \ldots,\ \vec{q}_n\big)$$

para todo $R\in\mathrm{SO}(3)$. Sob essas condições o potencial V definido em (45.220), página 2622, também não é explicitamente dependente do tempo.

Sob essas hipóteses, o Lagrangiano (45.221), página 2623, assume a forma

$$\widehat{\mathscr{L}}(Q,\ \dot{Q}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\big\|\dot{\vec{Q}}_i\big\|^2 + 2\dot{\vec{Q}}_i\cdot\Big(\vec{\Omega}\times\vec{Q}_i\Big) + \Big\|\vec{\Omega}\times\vec{Q}_i\Big\|^2\right] - V\big(\vec{Q}_1,\ \ldots,\ \vec{Q}_n\big)\ . \tag{45.224}$$

Trata-se de um Lagrangiano de um sistema autônomo e sabemos, pelos resultados discutidos em (45.176), página 2610 e (45.236), página 2628 que a quantidade

$$\widehat{e}_m := \sum_{j=1}^{n}\sum_{a=1}^{3}\dot{Q}_j^a\frac{\partial\widehat{\mathscr{L}}}{\partial\dot{Q}_j^a}(Q,\ \dot{Q}) - \widehat{\mathscr{L}}(Q,\ \dot{Q}) \tag{45.225}$$

é uma constante de movimento. Aqui, $\big(Q_j^1,\ Q_j^2,\ Q_j^3\big)$ são as componentes de $\vec{Q}_j$. Um cálculo explícito mostra que

$$\widehat{e}_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\Big\|\dot{\vec{Q}}_i\Big\|^2 - \Big\|\vec{\Omega}\times\vec{Q}_i\Big\|^2\right] + V\big(\vec{Q}_1,\ \ldots,\ \vec{Q}_n\big)\ . \tag{45.226}$$

É instrutivo expressar $\widehat{e}_m$ de volta em termos das coordenadas do sistema inercial original. Escrevendo $\Omega = R_t^{-1}\omega$, $\vec{Q}_i = R_t^{-1}\vec{q}_i$, $i=1,\ \ldots,\ n$, e reescrevendo (45.219) na forma $\dot{\vec{q}}_i(t) = \Big[\vec{\omega}\times\vec{q}_i(t) + R_t\dot{\vec{Q}}_i(t)\Big]$, $i=1,\ \ldots,\ n$, o que permite

escrever $\dot{\vec{Q}}_i(t) = R_t^{-1}\Big[\dot{\vec{q}}_i(t) - \vec{\omega}\times\vec{q}_i(t)\Big]$, $i = 1,\ \ldots,\ n$, temos

$$\begin{aligned}
\widehat{e}_m &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\left\|\dot{\vec{q}}_i - \vec{\omega}\times\vec{q}_i\right\|^2 - \left\|\vec{\omega}\times\vec{q}_i\right\|^2\right] + U\big(\vec{q}_1,\ \ldots,\ \vec{q}_n\big)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\left\|\dot{\vec{q}}_i\right\|^2 - 2\dot{\vec{q}}_i\cdot\Big(\vec{\omega}\times\vec{q}_i\Big)\right] + U\big(\vec{q}_1,\ \ldots,\ \vec{q}_n\big)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left\|\dot{\vec{q}}_i\right\|^2 - \vec{\omega}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{q}_i\times\dot{\vec{q}}_i\right) + U\big(\vec{q}_1,\ \ldots,\ \vec{q}_n\big)\ . \qquad (45.227)
\end{aligned}$$

A soma do primeiro e do terceiro termos produzem a energia mecânica do sistema de n pontos materiais. O segundo termo é $\vec{\omega}\cdot\vec{l}$, com $\vec{l}$ sendo o momento angular total em relação à origem do sistema de n pontos materiais.

A conservação de $\widehat{e}_m$ pode ser explicada pela conservação da energia mecânica e pela conservação do momento angular total do sistema de n pontos materiais, fato esse devido à invariância rotacional do potencial U. Vide para tal discussão sobre o Teorema de Noether na Seção 45.6, página 2627, em particular, o Exemplo 45.7, página 2632.

Comentário. Chegaríamos às mesmas conclusões sobre a conservação da quantidade $\vec{\omega}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{q}_i\times\dot{\vec{q}}_i\right)$ se supuséssemos para U apenas a propriedade de invariância por rotações em torno do eixo definido por $\vec{\omega}$. Vide a discussão do Exemplo 45.7, página 2632. ♣

Essa discussão terá relevância quando apresentarmos a chamada *integral de Jacobi* na nossa discussão do problema de três corpos restrito da Seção 46.3.3, página 2696.

45.5.6 O Formalismo Lagrangiano em Sistemas Não Autônomos

Sistemas autônomos e não autônomos foram definidos à página 2610. Vamos aqui mostrar que sistemas não autônomos podem ser transformados em autônomos por meio de um truque que aumenta de 1 a dimensão do espaço de configurações. Esse fato é relevante em certas considerações teóricas e será usado em nossa discussão sobre o Teorema de Noether na Seção 45.6, página 2627.

O primeiro passo para tal é estudar a transformação de um Lagrangiano e das equações de Euler-Lagrange sob reparametrizações do tempo.

• **Transformação de um Lagrangiano por reparametrizações do tempo**

Se realizarmos na integral de ação (45.169) uma mudança de variáveis, escrevendo $t = f(\overline{t})$, onde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função bijetora, diferenciável e com inversa diferenciável (ou seja, é um difeomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre si mesmo), teremos

$$S[\gamma]\ :=\ \int_{t_1}^{t_2}\mathscr{L}\big(t,\ q_\gamma(t),\ \dot{q}_\gamma(t)\big)\ dt\ =\ \int_{\overline{t}_1}^{\overline{t}_1}\overline{\mathscr{L}}\big(\overline{t},\ \overline{q}_\gamma(\overline{t}),\ \dot{\overline{q}}_\gamma(\overline{t})\big)\ d\overline{t}\ , \qquad (45.228)$$

onde

$$\overline{\mathscr{L}}\big(\overline{t},\ \overline{q}_\gamma(\overline{t}),\ \dot{\overline{q}}_\gamma(\overline{t})\big)\ :=\ \mathscr{L}\left(f(\overline{t}),\ \overline{q}_\gamma(\overline{t}),\ \frac{\dot{\overline{q}}_\gamma(\overline{t})}{f'(\overline{t})}\right)\ f'(\overline{t})\ , \qquad (45.229)$$

sendo $\overline{t}_1 := f^{-1}(t_1)$, $\overline{t}_2 := f^{-1}(t_2)$ e

$$\overline{q}_\gamma(\overline{t})\ :=\ q_\gamma\big(f(\overline{t})\big)\ ,\qquad \dot{\overline{q}}_\gamma(\overline{t})\ :=\ \frac{d}{d\overline{t}}\overline{q}_\gamma(\overline{t})\ =\ \frac{d}{d\overline{t}}q_\gamma\big(f(\overline{t})\big)\ =\ \dot{q}_\gamma\big(f(\overline{t})\big)f'(\overline{t})\ . \qquad (45.230)$$

O princípio de Hamilton afirma, assim, a validade das equações de Euler-Lagrange na forma

$$\frac{d}{d\overline{t}}\left(\frac{\partial\overline{\mathscr{L}}}{\partial\dot{\overline{q}}^i}\big(\overline{t},\ \overline{q}(\overline{t}),\ \dot{\overline{q}}(\overline{t})\big)\right) - \frac{\partial\overline{\mathscr{L}}}{\partial\overline{q}^i}\big(\overline{t},\ \overline{q}(\overline{t}),\ \dot{\overline{q}}(\overline{t})\big)\ =\ 0\ ,\qquad i\ =\ 1,\ \ldots,\ n\ . \qquad (45.231)$$

Apesar de óbvia (se considerarmos a independência do Princípio de Hamilton com a particular parametrização das trajetórias), é instrutivo constatarmos a equivalência de (45.231) às equações de Euler-Lagrange originais. Usando (45.229), (45.230) e as equações de Euler-Lagrange originais, temos

$$\frac{\partial\overline{\mathscr{L}}}{\partial\overline{q}^i}\Big(\overline{t},\ \overline{q}(\overline{t}),\ \dot{\overline{q}}\Big) \ = \ f'(\overline{t})\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i}\left(f(\overline{t}),\ \overline{q}(\overline{t}),\ \frac{\dot{\overline{q}}(\overline{t})}{f'(\overline{t})}\right) \ = \ f'(\overline{t})\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i}\big(t,\ q(t),\ \dot{q}(t)\big)$$

$$\stackrel{\text{Euler-Lagrange}}{=} \ f'(\overline{t})\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i}\big(t,\ q(t),\ \dot{q}(t)\big)\right] \ = \ \frac{d}{d\overline{t}}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i}\left(f(\overline{t}),\ \overline{q}(\overline{t}),\ \frac{\dot{\overline{q}}(\overline{t})}{f'(\overline{t})}\right)\right]$$

$$= \ \frac{d}{d\overline{t}}\left[f'(\overline{t})\frac{\partial}{\partial\dot{\overline{q}}^i}\left(\mathscr{L}\left(f(\overline{t}),\ \overline{q}(\overline{t}),\ \frac{\dot{\overline{q}}(\overline{t})}{f'(\overline{t})}\right)\right)\right] \ = \ \frac{d}{d\overline{t}}\left(\frac{\partial\overline{\mathscr{L}}}{\partial\dot{\overline{q}}^i}\big(\overline{t},\ \overline{q}(\overline{t}),\ \dot{\overline{q}}(\overline{t})\big)\right) \ ,$$

coincidindo com (45.231), como esperado, e confirmando a consistência de (45.231) com as equações de Euler-Lagrange originais.

• **Convertendo sistemas não autônomos em sistemas autônomos**

Seja um sistema não autônomo definido por uma Lagrangiana $\mathscr{L}\big(t,\ q(t),\ \dot{q}(t)\big)$, sendo o espaço de configurações uma variedade n-dimensional $\mathcal{M}$ e $\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big) \in \mathsf{T}\mathcal{M}$. Afirmamos que esse sistema é equivalente ao sistema autônomo definido na variedade $(n+2)$-dimensional $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{M}$ cuja Lagrangiana é

$$\widetilde{\mathscr{L}}\big(\tau(t),\ q(t),\ \dot{\tau}(t),\ \dot{q}(t),\ \Lambda(t)\big) \ := \ \mathscr{L}\left(\tau(t),\ q(t),\ \frac{\dot{q}(t)}{\dot{\tau}(t)}\right)\dot{\tau}(t) + \Lambda(t)\big(\dot{\tau}(t)-1\big) \ . \tag{45.232}$$

Aqui foram introduzidas duas novas coordenadas: τ e Λ. O truque consiste em substituir-se a dependência explícita de $\mathscr{L}$ com o tempo t por uma nova coordenada $\tau \in \mathbb{R}$ que fazemos depender do tempo. O primeiro termo em (45.232) é inspirado em (45.229) e na ideia que o mapa $t \mapsto \tau(t)$ deve ser, ao menos localmente, um difeomorfismo. O papel do segundo termo $\Lambda(t)\big(\dot{\tau}(t)-1\big)$ é similar ao de um multiplicador de Lagrange (vide *e.g.*, [108]): ele presta-se a impor $\dot{\tau}(t)=1$, ou seja, $\tau(t)=t$ (a menos de uma constante aditiva), fazendo, portanto, que $\tau(t)$ e t coincidam. Vide adiante.

Apesar dessas considerações é necessário realmente provar que o sistema autônomo $(n+2)$-dimensional descrito pelo Lagrangiano (45.232) equivale ao sistema não autônomo descrito por $\mathscr{L}$. Para tal, obtenhamos as equações de Euler-Lagrange associadas a $\widetilde{\mathscr{L}}$, que são as equações Euler-Lagrange associadas às coordenadas Λ, q^i, $i=1,\ \ldots,\ n$ e τ.

I. Como não ocorre dependência na derivada $\dot{\Lambda}$ no Lagrangiano de (45.232), as equações de Euler-Lagrange para essa variável reduzem-se a $\frac{\partial\widetilde{\mathscr{L}}}{\partial\Lambda}=0$, ou seja, $\dot{\tau}(t)-1=0$. Assim, vemos que essa equação impões que $\tau(t)=t+k$, com k sendo uma constante (que pode ser fixada a 0 por condições iniciais).

II. Para as coordenadas q^i, $i=1,\ \ldots,\ n$, temos as equações de Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial\widetilde{\mathscr{L}}}{\partial\dot{q}^i}-\frac{\partial\widetilde{\mathscr{L}}}{\partial q^i}=0$. Agora, $\frac{\partial\widetilde{\mathscr{L}}}{\partial\dot{q}^i} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\left(\tau(t),\ q(t),\ \frac{\dot{q}(t)}{\dot{\tau}(t)}\right)$ e $\frac{\partial\widetilde{\mathscr{L}}}{\partial q^i} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i}\left(\tau(t),\ q(t),\ \frac{\dot{q}(t)}{\dot{\tau}(t)}\right)\dot{\tau}(t)$. Verifique! Assim, as equações de Euler-Lagrange assumem a forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\left(\tau(t),\ q(t),\ \frac{\dot{q}(t)}{\dot{\tau}(t)}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i}\left(\tau(t),\ q(t),\ \frac{\dot{q}(t)}{\dot{\tau}(t)}\right)\dot{\tau}(t) \ = \ 0 \ , \qquad i \ = \ 1,\ \ldots,\ n \ . \tag{45.233}$$

Note-se que para $\tau(t)=t$ ($\dot{\tau}(t)=1$), isso reduz-se a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\,(t,\ q(t),\ \dot{q}(t)) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i}\,(t,\ q(t),\ \dot{q}(t)) \ = \ 0 \ , \qquad i \ = \ 1,\ \ldots,\ n \ , \tag{45.234}$$

que são as equações de Euler-Lagrange originais.

II. Para a coordenada τ, temos a equação de Euler-Lagrange

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial\widetilde{\mathscr{L}}}{\partial\dot{\tau}} - \frac{\partial\widetilde{\mathscr{L}}}{\partial\tau} \\
&= \frac{d}{dt}\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{\dot{q}^i(t)}{\dot{\tau}(t)}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\left(\tau(t),\ q(t),\ \frac{\dot{q}(t)}{\dot{\tau}(t)}\right) + \mathscr{L}\left(\tau(t),\ q(t),\ \frac{\dot{q}(t)}{\dot{\tau}(t)}\right) + \Lambda(t)\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}\left(\tau(t),\ q(t),\ \frac{\dot{q}(t)}{\dot{\tau}(t)}\right)\dot{\tau}(t)\ .
\end{aligned}
\tag{45.235}
$$

Agora, pela regra da cadeia,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathscr{L}\left(\tau(t),\ q(t),\ \frac{\dot{q}(t)}{\dot{\tau}(t)}\right) &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}\left(\tau(t),\ q(t),\ \frac{\dot{q}(t)}{\dot{\tau}(t)}\right)\dot{\tau}(t) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i}\left(\tau(t),\ q(t),\ \frac{\dot{q}(t)}{\dot{\tau}(t)}\right)\dot{q}^i(t) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\left(\tau(t),\ q(t),\ \frac{\dot{q}(t)}{\dot{\tau}(t)}\right)\frac{d}{dt}\frac{\dot{q}^i(t)}{\dot{\tau}(t)}\right]\ .
\end{aligned}
$$

Verifique! Substituindo isso de volta no lado direito de (45.235), temos, após alguns cancelamentos evidentes,

$$
0 = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\dot{q}^i(t)}{\dot{\tau}(t)}\left[-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\left(\tau(t),\ q(t),\ \frac{\dot{q}(t)}{\dot{\tau}(t)}\right) + \dot{\tau}(t)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i}\left(\tau(t),\ q(t),\ \frac{\dot{q}(t)}{\dot{\tau}(t)}\right)\right] + \dot{\Lambda}(t)\ .
$$

Verifique! Pela relação (45.233), os termos entre $[\cdots]$, acima, são nulos e, portanto, a equação reduz-se a $\dot{\Lambda}(t) = 0$, implicando que Λ é meramente uma constante.

Com isso, vemos que as equações de Euler-Lagrange do sistema não autônomo original são recuperadas, provando o que desejávamos.

Adiante, na Seção 45.6.3, página 2634, faremos uso do tratamento acima para estudar uma transformação de simetria que ocorre em certos sistemas mecânicos especiais, denominada *similitude mecânica*.

45.6 O Formalismo Lagrangiano. Simetrias Contínuas e Leis de Conservação. O Teorema de Noether

Um dos entendimentos fundamentais da física teórica do século XX foi o da existência de uma relação entre certas leis de conservação, como da energia, do momento angular e do momento linear, e certas simetrias contínuas presentes nos sistemas físicos considerados. Esse resultado foi demonstrado pela matemática Emmy Noether[65] em 1918[66]. Nesta seção demonstraremos o Teorema de Noether para o caso de sistemas mecânicos com finitos graus de liberdade descritos pelo formalismo Lagrangiano. Generalizações para Teorias Clássicas de Campos (*e.g.*, o Eletromagnetismo) também existem e podem ser encontradas em quaisquer bons livros sobre o tema (para um tratamento matemático, vide [2]). Para uma extensão ao contexto de Teorias Quânticas de Campos vide [80].

O resultado de Noether é geral, no sentido que envolve qualquer sistema descrito por um princípio variacional (de segunda ordem, ao menos) e para qualquer simetria contínua desse sistema, no sentido a ser definido.

A apresentação que faremos depende de uma definição precisa da noção de simetria e de simetrias contínuas em sistemas Lagrangianos e nos dedicaremos ao tema no que segue. Para um texto divulgativo da relevância de simetrias em Física e sobre o papel de Emmy Noether na elucidação de sua relação com leis de conservação, vide [37].

[65] Amalie Emmy Noether (1882–1935).

[66] Referência original: Emmy Noether, "Invariante Variationsprobleme", Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, 235-257 (1918). Uma tradução para o inglês pode ser encontrada em M. A. Tavel; Emmy Noether, "Invariant Variation Problems". https://arxiv.org/abs/physics/0503066

Nota histórica. A história por trás do trabalho de Noether sobre simetrias é deveras interessante e relaciona-se aos problemas surgidos no processo de dedução por Einstein[67], das equações de campo que levam seu nome na Teoria da Relatividade Geral, processo esse essencialmente encerrado em 1915. Naquele processo, um papel muito importante foi desempenhado pela lei de conservação do tensor de energia-momento, que parecia implicar em propriedades do tensor de curvatura[68] que eram desconhecidas de Einstein. Einstein procurou aconselhar-se com David Hilbert[69] e Felix Klein[70] a respeito, os quais, por sua vez, incluíram Emmy Noether na discussão. Foi em meio a isso que Noether encontrou seu teorema, cuja relevância foi celebrada por Einstein desde seu surgimento. Ironicamente, a peça que faltava na compreensão do problema era a chamada *segunda identidade de Bianchi*[71], ou *identidade de Bianchi diferencial*, do tensor de curvatura, que já havia sido descoberta[72], mas era desconhecida de Einstein, Hilbert e Klein. Para uma discussão histórica mais extensa, vide [390]. A identidade de Bianchi é obtida na Seção 34.3.1, página 1789. Vide, em particular a Proposição 34.9, página 1790. Vide também a Seção 34.3.5, página 1799, para a conexão com as equações de Einstein.

O teorema descoberto por Noether contribuiu fortemente para colocar a noção de simetria dentre os paradigmas da Física Teórica do século XX.

Encerrando esta breve nota, vale dizer também que o trabalho de Noether teve por base (como mencionado por ela própria no artigo original) o trabalho de Sophus Lie[73] sobre simetrias contínuas em equações diferenciais. Uma boa referência sobre o tema é [385]. A noção de simetria contínua foi introduzida pelo próprio Lie e deu origem à Teoria dos Grupos de Lie (assunto do Capítulo 22, página 1239). ♣

Nossa apresentação do Teorema de Noether em sistemas mecânicos segue ideias de [23], demonstrando primeiramente o teorema para o caso de sistemas autônomos para em seguida usar esse resultado para tratar do caso de sistemas não autônomos. Alguns detalhamentos adicionais e extensões, porém, e uma correção[74], são acrescentados.

Na página 2643 revisitaremos o Teorema de Noether dentro do formalismo Hamiltoniano.

• Leis de conservação em sistemas mecânicos. Casos simples

Seja um sistema Lagrangiano com equações de Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Caso uma das coordenadas, digamos q^j, seja tal que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} = 0$, segue das próprias equações de Euler-Lagrange que a grandeza $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j}$ é uma constante de movimento, ou seja, é conservada ao longo do movimento.

A existência de constantes de movimento é importante, primeiro pelo próprio significado físico dela decorrente (como exemplificam a conservação de energia, a do momento linear e a do momento angular), mas também por auxiliar, em certos casos, a resolução das próprias equações de movimento.

Coordenadas para as quais tem-se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} = 0$ são denominadas *coordenadas cíclicas*. Elas se manifestam em diversos sistemas mecânicos, por exemplo, no chamado *pião de Lagrange*, tratado nas Seções 46.5 e 46.5.1, páginas 2710 e 2712, respectivamente.

Em uma situação mais geral, a existência de constantes de movimento decorre da existência de transformações de simetria[75], tema que passamos a discutir.

• A conservação da energia mecânica

Em nossa apresentação da *identidade de Beltrami*, relação (45.176), página 2610, concluímos que em sistemas autônomos, ou seja, em sistemas nos quais o Lagrangiano $\mathscr{L}\big(q,\ \dot{q}\big)$ não depende explicitamente do tempo, a grandeza

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{q}^j(t)\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^j}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big) - \mathscr{L}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big) \tag{45.236}$$

é uma constante de movimento. Mostremos que essa grandeza pode ser identificada com a energia mecânica no caso de sistemas mecânicos autônomos e conservativos.

Em uma situação típica o Lagrangiano é dado por $\mathscr{L} = T - U$, com T sendo a energia cinética e U a energia potencial

[67] Albert Einstein (1879–1955).
[68] Mais especificamente, do tensor de Einstein.
[69] David Hilbert (1862–1943).
[70] Felix Christian Klein (1849–1925).
[71] Luigi Bianchi (1856–1928).
[72] Luigi Bianchi, "Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann", Rend. Acc. Naz. Lincei, **11** (5): 3-7 (1902).
[73] Marius Sophus Lie (1842–1899).
[74] Em nosso julgamento, a transformação realizada em [23] de sistemas Lagrangianos não autônomos em autônomos não está feita de forma inteiramente correta.
[75] A existência de coordenadas cíclicas pode também ser consequência de transformações de simetria.

do sistema, dependente apenas das coordenadas $q^1, \ldots, q^n$. A energia cinética, por sua vez, é dada por uma forma quadrática nas velocidades generalizadas, tal como vimos em (45.203)-(45.204), página 2617. Assim, a expressão (45.236) pode ser escrita como

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{q}^j(t) \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big) - T\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big) + U\big(q(t)\big) \ .$$

Por ser uma forma quadrática nas velocidades generalizadas, $T\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)$ é uma função homogênea de grau 2 nessas variáveis e o Teorema de Euler sobre funções homogêneas, Teorema 21.13, página 1220, nos informa que

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{q}^j(t) \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big) \ = \ 2T\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big) \ .$$

(Isso também pode ser verificado diretamente da referida expressão (45.203)).

Com isso, vemos que a grandeza conservada (45.236) coincide com $T+U$, a *energia mecânica* do sistema considerado.

É interessante também considerar o caso de um sistema não conservativo: o de uma partícula carregada movendo-se em um campo eletromagnético constante no tempo. Seu Lagrangiano é dado por (45.218), página 2621, com os potenciais ϕ e $\mathbb{A}$ independentes do tempo. Logo, nesse caso, a grandeza conservada indicada em (45.236) é

$$\sum_{j=1}^{3} v^j \frac{\partial}{\partial v^j}\Big(T - e\big(\phi - \vec{v}\cdot\mathbb{A}\big)\Big) - T + e\big(\phi - \vec{v}\cdot\mathbb{A}\big) \ = \ T + e\phi \ ,$$

onde $\vec{v} = (v^1,\ v^2,\ v^3)$ é o vetor velocidade da partícula. Assim, a grandeza conservada é $T + e\phi$ (também denominada *energia mecânica* da partícula) e ela não depende do potencial vetor $\mathbb{A}$ e, assim, não depende do campo magnético aplicado.

45.6.1 A Noção de Transformação de Simetria

Vamos aqui apresentar algumas noções de transformação de simetria de sistemas mecânicos. Uma delas será empregada na demonstração do já mencionado Teorema de Noether, que relaciona transformações de simetria contínuas a leis de conservação.

• **Transformações de simetria. O caso de sistemas autônomos**

Seja um sistema mecânico com finitos graus de liberdade, a saber $n \in \mathbb{N}$, e cujo espaço de configurações seja uma variedade n-dimensional suave $\mathcal{M}$. Seja $\mathscr{L} : \mathsf{T}\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ o Lagrangiano desse sistema mecânico.

Seja $\mathbf{f} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ um difeomorfismo de $\mathcal{M}$. Dizemos que $\mathbf{f}$ é uma *transformação de simetria* do sistema mecânico considerado se houver uma constante não nula A tal que

$$\mathscr{L}\big(\mathbf{f}(q),\ d\mathbf{f}(v)\big) \ = \ A\mathscr{L}(q,\ v) \ , \tag{45.237}$$

para todos $(q,\ v) \in \mathsf{T}\mathcal{M}$. Acima, $d\mathbf{f}$ é o *pushforward* (ou *aplicação diferencial*, vide Seção 33.2.4.1, página 1706) associado a $\mathbf{f}$ no espaço tangente a $\mathcal{M}$. Em uma carta local de coordenadas, tem-se simplesmente $\big(d\mathbf{f}(v)\big)^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{f}^i}{\partial q^j} v^j$.

Uma das principais razões para se denominar os difeomorfismos satisfazendo (45.237) *transformações de simetria* reside no fato que tais difeomorfismos transformam soluções das equações de movimento em outras soluções das equações de movimento.

Para vermos isso, seja $q(t)$, $t \in \mathbb{R}$, uma solução das equações de Euler-Lagrange associadas a $\mathscr{L}$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big) \ = \ 0 \ , \qquad i \ = \ 1,\ \ldots,\ n \ . \tag{45.238}$$

Vamos agora considerar a função $\mathbb{R} \ni t \mapsto \phi(t) \in \mathcal{M}$ definida por

$$\phi(t) \ := \ \mathbf{f}\big(q(t)\big) \ , \tag{45.239}$$

com $q(t)$ sendo uma solução de (45.238). Afirmamos que, por $\mathbf{f}$ ser uma transformação de simetria, ϕ é igualmente uma solução das equações de Euler-Lagrange (45.238), pois

$$\dot{\phi}(t) \;=\; \frac{d}{dt}\mathbf{f}\big(q(t)\big) \;=\; \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^j}\dot{q}^j(t) \;\equiv\; d\mathbf{f}\big(\dot{q}(t)\big)$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big(\phi(t),\,\dot{\phi}(t)\big) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i}\big(\phi(t),\,\dot{\phi}(t)\big) \;=\; \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\Big(\mathbf{f}\big(q(t)\big),\,d\mathbf{f}\big(\dot{q}(t)\big)\Big) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i}\Big(\mathbf{f}\big(q(t)\big),\,d\mathbf{f}\big(\dot{q}(t)\big)\Big)$$

$$\overset{(45.237)}{=}\; A\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big(q(t),\,\dot{q}(t)\big) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i}\big(q(t),\,\dot{q}(t)\big)\right] \;=\; 0\,, \qquad (45.240)$$

para todo $i = 1,\,\ldots,\,n$, provando que $\phi(t)$ é também solução das Equações de Euler-Lagrange.

• **Simetrias contínuas**

Seja $\big\{\mathbf{f}^s : \mathcal{M}\to\mathcal{M},\; s\in\mathbb{R}\big\}$ um grupo contínuo a um parâmetro de difeomorfismos de $\mathcal{M}$, satisfazendo, portanto, $\mathbf{f}^{s_1}\circ\mathbf{f}^{s_2} = \mathbf{f}^{s_1+s_2}$ para todos $s_1,\; s_2\in\mathbb{R}$, e ainda $\mathbf{f}^0 = \mathbf{id}$, o difeomorfismo identidade[76] .

Dizemos que $\big\{\mathbf{f}^s : \mathcal{M}\to\mathcal{M},\; s\in\mathbb{R}\big\}$ é um grupo contínuo uniparamétrico de simetrias do sistema mecânico considerado se existir uma função $A(s)$, com $A(s)\neq 0$ para todo s, tal que

$$\mathscr{L}\big(\mathbf{f}^s(q),\,d\mathbf{f}^s(v)\big) \;=\; A(s)\mathscr{L}(q,\,v) \qquad (45.241)$$

para todo $s\in\mathbb{R}$ e para todos $(q,\,v)\in\mathsf{T}\mathcal{M}$.

Como facilmente se vê, a regra de composição $\mathbf{f}^{s_1}\circ\mathbf{f}^{s_2} = \mathbf{f}^{s_1+s_2}$ implica $A(s_1+s_2) = A(s_1)A(s_2)$ para todos $s_1,\; s_2\in\mathbb{R}$. Fora isso, o fato que $\mathbf{f}^0 = \mathbf{id}$ implica que $A(0) = 1$. Como A deve ser contínua (pois $s\mapsto\mathbf{f}^s$ o é), concluímos que a função A é da forma[77]

$$A(s) \;=\; e^{\gamma s}\,,$$

para alguma constante $\gamma\in\mathbb{R}$.

Se $q(t)$, $t\in\mathbb{R}$, é uma solução das equações de Euler-Lagrange associadas a $\mathscr{L}$, temos, pelo observado anteriormente, que para cada s a função $t\mapsto\mathbf{f}^s\big(q(t)\big)\equiv\phi^s(t)$ é também das equações de Euler-Lagrange.

45.6.2 Simetrias Contínuas com $\gamma = 0$ e Leis de Conservação

Aqui consideraremos o caso particular de transformações de simetria para as quais $A(s) = 1$ para todo s, ou seja, para as quais $\gamma = 0$. É nesse caso que transformações de simetria estão relacionadas a leis de conservação. O caso $\gamma\neq 0$ será retomado na Seção 45.6.4, página 2635 e no Exercício E. 45.27, página 2635.

Pela hipótese de simetria (45.241) (com $\gamma = 0$ e, portanto, para $A(s)\equiv 1$), temos

$$\mathscr{L}\big(\phi^s(t),\,\dot{\phi}^s(t)\big) - \mathscr{L}\big(q(t),\,\dot{q}(t)\big) \;=\; 0\,, \qquad (45.242)$$

pois $\mathscr{L}\big(\phi^s(t),\,\dot{\phi}^s(t)\big) = \mathscr{L}\Big(\mathbf{f}^s\big(q(t)\big),\,d\mathbf{f}^s\big(\dot{q}(t)\big)\Big) \overset{(45.241)}{=} \mathscr{L}\big(q(t),\,\dot{q}(t)\big)$. Diferenciando ambos os lados de (45.242) em relação a s, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big(\phi^s(t),\,\dot{\phi}^s(t)\big)\left(\frac{\partial}{\partial s}\big(\dot{\phi}^s(t)\big)^i\right) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i}\big(\phi^s(t),\,\dot{\phi}^s(t)\big)\left(\frac{\partial}{\partial s}\big(\phi^s(t)\big)^i\right)\right] \;=\; 0\,. \qquad (45.243)$$

Agora, por um lado, temos que

$$\frac{\partial}{\partial s}\big(\dot{\phi}^s(t)\big)^i \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial s}\big(\phi^s(t)\big)^i\right)$$

[76] Estritamente falando, não é necessário para o que segue, que $\big\{\mathbf{f}^s : \mathcal{M}\to\mathcal{M},\; s\in\mathbb{R}\big\}$ seja um *grupo* de difeomorfismos. Basta que se tenha um *grupo local* de difeomorfismos, ou seja, que parâmetro s seja limitado a uma vizinhança aberta de 0.

[77] Isso é uma consequência fácil de um teorema devido a Cauchy: a Proposição 2.16, página 196.

e por outro lado, temos que[78]

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i}\big(\phi^s(t),\ \dot{\phi}^s(t)\big) \ = \ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big(\phi^s(t),\ \dot{\phi}^s(t)\big)\right) \ ,$$

pelas equações de Euler-Lagrange (vide (45.240)). Substituindo esses fatos em (45.243), obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big(\phi^s(t),\ \dot{\phi}^s(t)\big)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial s}\big(\phi^s(t)\big)^i\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big(\phi^s(t),\ \dot{\phi}^s(t)\big)\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\big(\phi^s(t)\big)^i\right)\right] \ = \ 0 \ ,$$

donde se conclui que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big(\phi^s(t),\ \dot{\phi}^s(t)\big)\frac{\partial}{\partial s}\big(\phi^s(t)\big)^i\right) \ = \ 0$$

e, portanto, que as quantidades

$$\mathcal{N}_a(s) \ \equiv \ \mathcal{N}_a(s,\ t) \ := \ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big(\phi^s(t),\ \dot{\phi}^s(t)\big)\frac{\partial}{\partial s}\big(\phi^s(t)\big)^i \tag{45.244}$$

são, para cada s, constantes de movimento (ou seja, independentes de t). Como para cada s a função $t \mapsto \phi^s(t) \in \mathcal{M}$ é uma possível trajetória do sistema (*i.e.*, uma solução das equações de Euler-Lagrange), podemos considerar apenas o caso $s = 0$ e afirmar que para cada trajetória a quantidade $\mathcal{N}_a \equiv \mathcal{N}_a(0)$, ou seja,

$$\mathcal{N}_a \ := \ \sum_{i=1}^{n}\Upsilon^i(t)\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big) \tag{45.245}$$

é uma constante de movimento. Acima,

$$\Upsilon^i(t) \ := \ \frac{\partial}{\partial s}\big(\phi^s(t)\big)^i\Big|_{s=0} \ , \qquad i \ = \ 1,\ \ldots,\ n \ .$$

As quantidades $p_i(t) := \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)$, $i \ = \ 1,\ \ldots,\ n$, são denominadas *momentos generalizados* e desempenham um papel especial no formalismo Hamiltoniano, como veremos na Seção 45.7, página 2636. Com eles podemos expressar (45.245) na forma

$$\mathcal{N}_a \ = \ \sum_{i=1}^{n}\Upsilon^i(t)p_i(t) \ . \tag{45.246}$$

Comentemos, por fim, que o lado direito de (45.244) (e, portanto, de (45.245) e (45.246)) é invariante por mudanças locais de coordenadas em $\mathcal{M}$. De fato, $\frac{\partial}{\partial s}\big(\phi^s(t)\big)$ é claramente um elemento do espaço tangente a $\mathcal{M}$ em $\phi^s(t)$, enquanto que as derivadas parciais $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}$ são componentes de um covetor no mesmo ponto. Assim, o lado direito de (45.244) é o emparelhamento (*"pairing"*) de um vetor com um covetor e, portanto, é um invariante.

• **Discussão de exemplos**

Vejamos agora alguns exemplos básicos de aplicações da lei de conservação obtidas acima pela identificação de simetrias contínuas de um sistema mecânico Lagrangiano.

Exemplo 45.5 Consideremos um sistema autônomo não relativístico de n partículas movimentando-se em $\mathbb{R}^3$. Seja $\vec{x_i} \in \mathbb{R}^3$, $i = 1,\ \ldots,\ n$, o vetor posição da i-ésima partícula e seja x_i^j , $j = 1,\ 2,\ 3$, a j-ésima componente desse vetor em um sistema Cartesiano inercial. Claro está que, neste caso, o espaço de configurações é $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{3n}$. Consideremos o Lagrangiano

$$\mathscr{L} \ = \ \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\big(\vec{v}_i\big)^2 - V\big(\vec{x}_1,\ \ldots,\ \vec{x}_n\big) \ = \ \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\sum_{j=1}^{3}\big(v_i^j\big)^2 - V\big(\vec{x}_1,\ \ldots,\ \vec{x}_n\big) \ ,$$

onde $v_i^j \equiv \dot{x}_i^j$, onde $m_i > 0$ é a massa da n-ésima partícula e onde V é o potencial.

[78] E adequado aqui escrever as equações de Euler-Lagrange em termos de derivadas parciais em relação a t, e não em termos de derivadas totais, devido a dependência adicional com o parâmetro s.

Se V for independente da coordenada k de todos os vetores $\vec{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$, então a aplicação

$$\mathbf{f}^s\big(x_i^j\big) \;=\; x_i^j + \delta^{jk} s \tag{45.247}$$

$i = 1, \ldots, n$, $j = 1, 2, 3$, é um grupo a um parâmetro de difeomorfismos em $\mathcal{M}$ do tipo considerado e temos $d\mathbf{f}^s\big(v_i^j\big) \;=\; v_i^j$. Assim, é elementar constatar (faça-o!) que a condição de simetria (45.241) é satisfeita com $A(s) \equiv 1$ e a quantidade conservada dada em (45.245) é, nesse caso,

$$\mathcal{N}_a \;=\; \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_i^k} \;=\; \sum_{i=1}^n m_i v_i^k \;.$$

Verifique! Vemos assim que se $\mathscr{L}$ for invariante por translações na direção k a componente k do momento linear total do sistema de partículas é conservada. ♦

Exemplo 45.6 Considere a mesma situação do Exemplo 45.5, mas com o potencial V dependendo apenas das diferenças $\vec{x}_i - \vec{x}_j$, para todos $i \neq j$. Então, $\mathscr{L}$ é igualmente invariante para todos os difeomorfismos (45.247), para todos os índices $k = 1, 2, 3$, resultando na conservação do momento linear total $\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$. Verifique! ♦

Exemplo 45.7 Considere a mesma situação do Exemplo 45.6, mas com o potencial V invariante por rotações em torno de um certo eixo, isto é, tal que $V\big(R\vec{x}_1, \ldots, R\vec{x}_n\big) = V\big(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\big)$, $i = 1, \ldots, n$, onde $R \in \mathrm{SO}(3)$ representa uma rotação por um ângulo arbitrário que em torno de um eixo que passa pela origem e é definido pelo vetor unitário $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$.

Considere-se o difeomorfismo de $\mathcal{M}$ dado por $\mathbf{f}^s\big(\vec{x}_i\big) = \exp\big(s\vec{\eta}\cdot\vec{\mathsf{J}}\big)\vec{x}_i$, onde[79] $\exp\big(s\vec{\eta}\cdot\vec{\mathsf{J}}\big)$ representa o elemento de SO(3) que corresponde a uma rotação de $s \in \mathbb{R}$ em torno do eixo definido pelo vetor unitário $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$. Aqui $\vec{\mathsf{J}} = \big(\mathsf{J}_1, \mathsf{J}_2, \mathsf{J}_3\big)$ são as matrizes antissimétricas definidas em (45.6), página 2558, e que compõem os geradores infinitesimais do grupo SO(3). É fácil ver que $d\mathbf{f}^s\big(\vec{v}_i\big) = \exp\big(s\vec{\eta}\cdot\vec{\mathsf{J}}\big)\vec{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$, assim como que $\mathscr{L}$ é invariante pela ação de $\mathbf{f}^s$.

É também fácil constatar que $\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{f}^s\big(\vec{x}_i\big)\big|_{s=0} = \big(\vec{\eta}\cdot\vec{\mathsf{J}}\big)\vec{x}_i \overset{(21.112)}{=} \vec{\eta}\times\vec{x}_i$. Assim, a correspondente quantidade conservada segundo o Teorema de Noether é

$$\mathcal{N}_a \;=\; \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \cdot \big(\vec{\eta}\times\vec{x}_i\big) \;\overset{(4.13)}{=}\; \vec{\eta}\cdot\left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i \times \vec{v}_i\right) \;.$$

Verifique!

Reconhecemos que a quantidade $\sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i \times \vec{v}_i$ representa o vetor momento angular total do sistema (em relação à origem do sistema de coordenadas). Vemos assim que se $\mathscr{L}$ for invariante por rotações em torno de um eixo a componente do momento angular total do sistema de partículas na direção desse eixo é conservada. ♦

Mais adiante (Exemplo 45.8, página 2634) mostraremos que também a conservação de energia está associada a uma simetria, a de translações temporais. Para isso, porém, precisamos estender nosso formalismo a sistemas não autônomos.

• **O caso de sistemas não autônomos**

Consideremos um Lagrangiano de um sistema não autônomo com n graus de liberdade $\mathscr{L}\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big)$, onde $q(t)$ é uma n-úpla de coordenadas generalizadas $q(t) \equiv \big(q^1(t), \ldots, q^n(t)\big)$. Como antes, os pontos q do espaço de configurações compõem uma variedade diferenciável n-dimensional que denotamos por $\mathcal{M}$. O correspondente espaço de fases é $\mathsf{T}(\mathcal{M})$.

Como discutimos na Seção 45.5.6, página 2625, esse sistema equivale a um sistema autônomo com $n+1$ graus de liberdade descritos por coordenadas $\tilde{q}(t) := \big(\tau(t), q^1(t), \ldots, q^n(t)\big) \in \mathbb{R}\times\mathcal{M}$, sendo $\tilde{q}^0(t) \equiv \tau(t)$ e $\tilde{q}^i(t) \equiv q^i(t)$ para $i = 1, \ldots, n$, e regido pelo Lagrangiano (vide (45.232))

$$\widetilde{\mathscr{L}}\big(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t)\big) \;=\; \mathscr{L}\big(\tau(t), q(t), \dot{q}(t)/\dot{\tau}(t)\big)\dot{\tau}(t) + \frac{\Lambda}{2}\big(\dot{\tau}(t) - 1\big)^2 \;, \tag{45.248}$$

onde $\Lambda > 0$ é uma constante em princípio arbitrária (um multiplicador de Lagrange). Nessa descrição, o espaço de configurações é a variedade $(n+1)$-dimensional $\mathbb{R}\times\mathcal{M}$ e o correspondente espaço de fases é $\mathsf{T}(\mathbb{R}\times\mathcal{M}) \simeq \mathbb{R}\oplus\mathsf{T}(\mathcal{M})$.

Como se trata agora de um sistema autônomo (em uma dimensão a mais no espaço de configurações), aplica-se o Teorema de Noether na forma anteriormente tratada e, portanto, se houver um grupo contínuo de difeomorfismos $\big\{\mathbf{f}^s : \mathbb{R}\times\mathcal{M} \to \mathbb{R}\times\mathcal{M}\big\}$ a um parâmetro que mantém $\widetilde{\mathscr{L}}$ invariante, a quantidade

$$\mathcal{N}_{na} \;:=\; \Upsilon^0(t)\frac{\partial\widetilde{\mathscr{L}}}{\partial\dot{\tau}}\big(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t)\big) + \sum_{i=1}^n \Upsilon^i(t)\frac{\partial\widetilde{\mathscr{L}}}{\partial v^i}\big(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t)\big) \tag{45.249}$$

[79] Seguimos aqui o estudo do grupo SO(3) da Seção 21.4.2, página 1129 e a correspondente notação

é uma constante de movimento, onde aqui $\phi^s(t) := \mathbf{f}^s\big(\tilde{q}(t)\big)$ sendo ainda

$$\Upsilon^k(t) \;:=\; \frac{\partial}{\partial s}\big(\phi^s(t)\big)^k\Big|_{s=0}\;, \qquad k \,=\, 0,\, 1,\, \ldots,\, n\,.$$

Agora, uma conta simples usando (45.248) mostra que

$$\frac{\partial\widetilde{\mathscr{L}}}{\partial\dot{\tau}}\big(\tilde{q}(t),\, \dot{\tilde{q}}(t)\big) \;=\; -\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\dot{q}^j(t)}{\dot{\tau}(t)}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^j}\big(\tau(t),\, q(t),\, \dot{q}(t)/\dot{\tau}(t)\big)\right) + \mathscr{L}\big(\tau(t),\, q(t),\, \dot{q}(t)/\dot{\tau}(t)\big) + \Lambda\big(\dot{\tau}(t)-1\big)\;,$$

$$\frac{\partial\widetilde{\mathscr{L}}}{\partial v^i}\big(\tilde{q}(t),\, \dot{\tilde{q}}(t)\big) \;=\; \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\big(\tau(t),\, q(t),\, \dot{q}(t)/\dot{\tau}(t)\big)\;.$$

Usando isso e o fato de que ao longo de uma trajetória do sistema não autônomo temos $\tau(t) = t$, a expressão (45.249) para $\mathcal{N}_{na}$ reduz-se a

$$\mathcal{N}_{na} \;:=\; \Upsilon^0(t)\mathscr{L}\big(t,\, q(t),\, \dot{q}(t)\big) + \sum_{i=1}^{n}\Big[\Upsilon^i(t) - \dot{q}^i(t)\Upsilon^0(t)\Big]\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\big(t,\, q(t),\, \dot{q}(t)\big)\;. \tag{45.250}$$

E. 45.26 *Exercício importante.* Verifique! ✠

Comentário. Interessantemente, faça-se notar que (45.250) independe do multiplicador de Lagrange Λ, como dever-se-ia esperar. ♣

O caso de sistemas autônomos é um caso particular do caso acima. Isso pode ser visto considerando-se um difeomorfismo satisfazendo $\big(\phi^s(\tau)\big) = \tau$ e tal que, agindo nas demais coordenadas, o Lagrangiano é mantido invariante. Para tal, teremos $\Upsilon^0(t) = 0$ e vê-se facilmente que as expressões para $\mathcal{N}_{na}$ e $\mathcal{N}_a$ coincidem (comparar (45.245) e (45.250)).

No Exemplo 45.8 analisaremos um outro difeomorfismo aplicável a sistemas autônomos e que conduz à conservação da energia mecânica.

• **Enunciado do Teorema de Noether**

Resumimos os resultados obtidos acima no seguinte enunciado:

Teorema 45.1 (Teorema de Noether) *Considere-se um sistema mecânico, não necessariamente autônomo, descrito em um espaço de configurações n-dimensional $\mathcal{M}$ com um Lagrangiano $\mathscr{L}\big(t,\, q(t),\, \dot{q}(t)\big)$. Considere-se o sistema mecânico autônomo associado descrito no espaço de configurações $(n+1)$-dimensional $\mathbb{R}\times\mathcal{M}$, com o Lagrangiano*

$$\widetilde{\mathscr{L}}\big(\tilde{q}(t),\, \dot{\tilde{q}}(t)\big) \;=\; \mathscr{L}\big(\tau(t),\, q(t),\, \dot{q}(t)/\dot{\tau}(t)\big)\dot{\tau}(t) + \Lambda\,\big(\dot{\tau}(t)-1\big)\;, \tag{45.251}$$

onde $\tilde{q} \equiv (\tau,\, q) \in \mathbb{R}\times\mathcal{M}$. Seja $\mathbf{f^s} : \mathbb{R}\times\mathcal{M} \to \mathbb{R}\times\mathcal{M}$, $s\in\mathbb{R}$, um grupo a um parâmetro de difeomorfismos que mantém $\widetilde{\mathscr{L}}$ invariante:

$$\widetilde{\mathscr{L}}\Big(\mathbf{f^s}\big(\tilde{q}(t)\big),\, d\mathbf{f^s}\big(\dot{\tilde{q}}(t)\big)\Big) \;=\; \widetilde{\mathscr{L}}\big(\tilde{q}(t),\, \dot{\tilde{q}}(t)\big)\;.$$

Então, a quantidade

$$\mathcal{N}_{na} \;:=\; \Upsilon^0(t)\mathscr{L}\big(t,\, q(t),\, \dot{q}(t)\big) + \sum_{i=1}^{n}\Big[\Upsilon^i(t) - \dot{q}^i(t)\Upsilon^0(t)\Big]\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\big(t,\, q(t),\, \dot{q}(t)\big)\;, \tag{45.252}$$

(sendo $v^i \equiv \dot{q}^i(t)$), onde

$$\Upsilon^o(t) \;:=\; \frac{\partial}{\partial s}\Big(\mathbf{f}^s\big(\tau(t)\big)\Big)\Big|_{s=0} \qquad e \qquad \Upsilon^i(t) \;:=\; \frac{\partial}{\partial s}\Big(\mathbf{f}^s\big(q^i(t)\big)\Big)\Big|_{s=0}\;, \quad i \,=\, 1,\, \ldots,\, n\,.$$

é uma constante de movimento. □

Na página 2643 o Teorema de Noether é reapresentado dentro do formalismo Hamiltoniano.

• **Invariância por translações temporais e a conservação da energia mecânica**

Como já antecipamos, a lei de conservação de energia também pode ser abrangida pelo Teorema de Noether, ou seja, é também decorrência da invariância do Lagrangiano por translações temporais.

Exemplo 45.8 Considere-se o mesmo sistema Lagrangiano descrito no Exercício 45.5 página 2631. Apesar de tratar-se de um sistema autônomo, podemos proceder de forma idêntica ao nosso tratamento de sistemas não autônomos, adicionando uma coordenada adicional τ, passando ao Lagrangiano (45.248) (que, naturalmente, não dependerá de τ) e obtendo a grandeza conservada (45.250).

Nesse caso, o difeomorfismo do espaço de configurações $\mathbb{R}\times\mathcal{M}$ que mantém o Lagrangiano (45.248) invariante é $\mathbf{f}^s(\tau)=\tau+s$, $\mathbf{f}^s(\vec{x}_i)=\vec{x}_i$, $i=1,\ \ldots,\ n$. Esse difeomorfismo implementa translações temporais. Para esse difeomorfismo temos $\Upsilon^0(t)=1$ e $\vec{\Upsilon}^i(t)=0$, $i=1,\ \ldots,\ n$. Com isso, a quantidade conservada (45.250) é dada por

$$\mathcal{N}_{na} \;=\; \mathscr{L}(\vec{x},\ \vec{v}) - \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i \;=\; \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\big\|\vec{v}_i\big\|^2 + V(\vec{x}_1,\ \ldots,\ \vec{x}_n)\ .$$

Verifique! Como se vê, trata-se da energia mecânica do sistema.

Vemos assim que se $\mathscr{L}$ for independente do tempo, a energia mecânica do sistema é conservada como consequência da invariância por translações temporais. ♦

45.6.3 Similitude Mecânica

Propriedades de similitude – isto é, propriedades de invariância de sistemas físicos por mudanças de escala espaciais e temporais – são usadas na Mecânica de Fluidos (*número de Reynolds*[80], em fluidos viscosos) e em áreas da Engenharia. Aqui trataremos de duas das formas em que essas transformações ocorrem na Mecânica.

• **Similitude nas equações de Euler**

Considere-se as equações de Euler (45.121), página 2591, que regem o movimento de um corpo rígido na ausência de torques externos. Se, para $\alpha>0$, constante, efetuarmos as transformações $\vec{\Omega}_t\to\alpha\vec{\Omega}_t$ e $t\to\alpha^{-1}t$, a forma da equação (45.121) permanece invariante. Isso significa que se $\vec{\Omega}_t$ é uma solução de (45.121) a função $\vec{\Omega}'_t := \alpha\vec{\Omega}_{\alpha^{-1}t}$ também é solução de (45.121). Assim, novas soluções de (45.121) podem ser obtidas de anteriores por meio um reescalonamento do vetor velocidade angular instantânea intrínseco, acompanhado de um reescalonamento temporal adequado.

Essas mesmas considerações aplicam-se à forma (45.148)–(45.150), página 2600, das equações de Euler.

• **Similitude em sistemas sob potenciais homogêneos**

Aqui a apresentação é similar à da referência [302] e trata de uma simpática aplicação das ideias que desenvolvemos sobre a noção de simetria de sistemas Lagrangianos.

Consideremos um sistema mecânico composto por p pontos materiais, definido em $\mathbb{R}^{3p}$, sob um potencial $U(\vec{x}_1,\ \ldots,\ \vec{x}_p)$ que seja uma função homogênea de grau κ de suas coordenadas, ou seja, que satisfaça

$$U(\beta\vec{x}_1,\ \ldots,\ \beta\vec{x}_p) \;=\; \beta^{\kappa}U(\vec{x}_1,\ \ldots,\ \vec{x}_p)$$

para todo $\beta>0$. Um exemplo relevante é o potencial gravitacional de um sistema de p pontos materiais de massas m_i, $i=1,\ \ldots,\ p$,

$$U(\vec{x}_1,\ \ldots,\ \vec{x}_p) \;=\; -G\sum_{1\le i<j\le p}\frac{m_im_j}{\big\|\vec{x}_i-\vec{x}_j\big\|}\ ,$$

que é uma função homogênea de grau $\kappa=-1$. Outro exemplo é o potencial do oscilador harmônico (com $p=1$): $U(x)=\frac{k}{2}x^2$, que é uma função homogênea de grau $\kappa=2$.

Seja $q\equiv(\vec{x}_1,\ \ldots,\ \vec{x}_p)\in\mathbb{R}^{3p}$ e $v=(\vec{v}_1,\ \ldots,\ \vec{v}_p)\equiv(\dot{\vec{x}}_1,\ \ldots,\ \dot{\vec{x}}_p)\in\mathbb{R}^{3p}$. O Lagrangiano desse sistema será

$$\mathcal{L}(q,\ v) \;=\; \sum_{i=1}^{p}\frac{m_i}{2}\big\|\vec{v}_i\big\|^2 - U(\vec{x}_1,\ \ldots,\ \vec{x}_p)\ . \tag{45.253}$$

[80] Osborne Reynolds (1842–1912).

Se para $\beta > 0$, constante, realizarmos simultaneamente as transformações $\vec{x}_i \to \beta\vec{x}_i$ (para todo $i = 1, \ldots, n$) e $t \to \beta^{1-\kappa/2}t$, o Lagrangiano se transformará como

$$\mathcal{L}(q,\ v)\ \to\ \beta^{\kappa}\mathcal{L}(q,\ v)\ .$$

Vemos, dessa forma, que as transformações mencionadas são uma espécie de transformação de simetria, com as transformações levando soluções das equações de Euler-Lagrange para $\mathcal{L}(q,\ v)$ em novas soluções das equações de Euler-Lagrange para o mesmo Lagrangiano. Assim, para uso posterior, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 45.3 *Se $\big(\vec{x}_1(t),\ \ldots,\ \vec{x}_p(t)\big)$ é solução das equações de movimento associadas ao Lagrangiano (45.253), com $U\big(\vec{x}_1,\ \ldots,\ \vec{x}_p\big)$ sendo uma função homogênea de grau κ, então $\Big(\beta\vec{x}_1\big(\beta^{1-\kappa/2}t\big),\ \ldots,\ \beta\vec{x}_p\big(\beta^{1-\kappa/2}t\big)\Big)$ também é solução dessas mesmas equações.* □

Esse fato tem algumas consequências. Se as soluções $\vec{x}(t)$ são periódicas de período T_1, então as soluções $\beta\vec{x}\big(\beta^{1-\kappa/2}t\big)$ também são periódicas de período $T_2 = \beta^{1-\kappa/2}T_1$. Assim, se $L_1 = \max_{t\in[0,\ T_1]}\|\vec{x}(t)\|$ é a máxima amplitude da solução $\vec{x}(t)$, teremos que a máxima amplitude da solução $\beta\vec{x}\big(\beta^{1-\kappa/2}t\big)$ será

$$L_2\ =\ \max_{t\in[0,\ T_2]}\Big\|\beta\vec{x}\big(\beta^{1-\kappa/2}t\big)\Big\|\ =\ \max_{t\in[0,\ T_1]}\big\|\beta\vec{x}(t)\big\|\ =\ \beta L_1\ .$$

Assim,

$$\frac{T_1}{T_2}\ =\ \beta^{\kappa/2-1}\ =\ \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{1-\kappa/2}\qquad \text{e, portanto,}\qquad \frac{(L_1)^{2-\kappa}}{(T_1)^2}\ =\ \frac{(L_2)^{2-\kappa}}{(T_2)^2}\ . \tag{45.254}$$

Há ao menos duas implicações relevantes de (45.254). Para a interação gravitacional temos $\kappa = -1$ e (45.254) fica

$$\frac{(L_1)^3}{(T_1)^2}\ =\ \frac{(L_2)^3}{(T_2)^2}\ . \tag{45.255}$$

O leitor há de reconhecer que essa relação expressa o conteúdo da *Terceira Lei de Kepler*[81], formulada em 1609 e que teve enorme importância nos desenvolvimentos posteriores da Teoria da Gravitação. No caso de potenciais quadráticos, como o do oscilador harmônico simples, com $k = 2$, temos analogamente por (45.254),

$$\frac{T_1}{T_2}\ =\ 1\ ,$$

o que manifesta o fato bem conhecido[82] da constância do período de oscilações harmônicas quando sua amplitude varia.

Assim, entendemos que essas duas regras bem conhecidas, a Terceira Lei de Kepler e a constância do período de osciladores harmônicos simples, são também consequências de princípios de simetria (de similitude) associados a potenciais homogêneos.

45.6.4 Simetrias Contínuas com $\gamma \neq 0$

Vamos agora retornar ao tratamento de sistemas autônomos, considerando transformações de simetria com $\gamma \geq 0$. Aqui vale

$$e^{-\gamma s}\mathscr{L}\big(\phi^s(t),\ \dot{\phi}^s(t)\big) - \mathscr{L}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)\ =\ 0\ . \tag{45.256}$$

E. 45.27 *Exercício*. Procedendo como no caso $\gamma = 0$, mostre usando (45.256) que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\big(\phi^s(t),\ \dot{\phi}^s(t)\big)\frac{\partial}{\partial s}\big(\phi^s(t)\big)^i\right)\ =\ \gamma\mathscr{L}\big(\phi^s(t),\ \dot{\phi}^s(t)\big)\ . \tag{45.257}$$

[81] Johannes Kepler (1571–1630).
[82] Desde observação empírica de Galilei da oscilação de candelabros da Catedral de Pisa, em 1581.

Para $s = 0$, em particular, tem-se

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\Upsilon^i(t)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)\right) \ = \ \gamma\mathscr{L}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big)\ , \tag{45.258}$$

que não é uma lei de conservação, mas uma identidade satisfeita pelas soluções. Vide Exercício E. 45.28, abaixo, para um exemplo.

Retornando a (45.257) e usando (45.256) no lado direito obtenha

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{-\gamma s}}{\gamma}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\big(\phi^s(t),\ \dot{\phi}^s(t)\big)\frac{\partial}{\partial s}\big(\phi^s(t)\big)^i\right)\right] \ = \ 0\ , \tag{45.259}$$

que afirma que as quantidades

$$\mathcal{M}(s) \ = \ \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{-\gamma s}}{\gamma}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\big(\phi^s(t),\ \dot{\phi}^s(t)\big)\frac{\partial}{\partial s}\big(\phi^s(t)\big)^i\right) \ = \ \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{-\gamma s}}{\gamma}\mathcal{N}_a(s,\ t)\right) \tag{45.260}$$

são, para cada s, constantes de movimento. Observe-se que essa afirmação pode não ser trivial, pois a constância de $\mathcal{N}_a(s,\ t)$ com t só foi demonstrada no caso $\gamma = 0$.

Derivando (45.260) em relação a t e usando que $\frac{\partial\mathcal{M}}{\partial t} = 0$, mostre que

$$\frac{\partial\mathcal{N}_a}{\partial t}(s,\ t) \ = \ \gamma e^{\gamma s}F(t)\ , \tag{45.261}$$

com F em princípio arbitrária. Mostre que a integração de (45.261) informa que $\mathcal{N}_a(s,\ t) = \gamma e^{\gamma s}G(t) + H(s)$, onde G é uma primitiva de F e H satisfazendo $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{-\gamma s}}{\gamma}H(s)\right) = \mathcal{M}(s)$. Assim, $H(s) = \gamma e^{\gamma s}M(s)$, sendo M uma primitiva de $\mathcal{M}$. Conclua disso que $\mathcal{N}_a(s,\ t) = \gamma e^{\gamma s}\big(G(t) + M(s)\big)$. ✠

E. 45.28 *Exercício*. Considere o caso do oscilador harmônico unidimensional, com Lagrangiano $\mathscr{L}\big(q(t),\ \dot{q}(t)\big) = \frac{m}{2}\dot{q}(t)^2 - \frac{k}{2}q(t)^2$, sendo $m > 0$ e $k > 0$, constantes. Constate que as transformações $\mathbf{f}^s(q) = e^{\alpha s}q$ são transformações de simetria com $\gamma = 2\alpha$.

Verifique que (45.258) consiste na afirmação que

$$m\frac{d}{dt}\big(q(t)\dot{q}(t)\big) + kq(t)^2 - m\dot{q}(t)^2 \ = \ 0\ . \tag{45.262}$$

Usando a equação de movimento $m\ddot{q}(t) = -kq(t)$ constate a veracidade de (45.262). Mostre também que $\mathcal{N}_a(s,\ t) = \frac{m\gamma}{2}e^{\gamma s}q(t)\dot{q}(t)$, que não é uma constante de movimento nesse caso (nem deveria necessariamente ser, pois aqui $\gamma \neq 0$).

Constate que, nesse caso, a quantidade $\mathcal{M}(s)$ dada em (45.260) é identicamente nula, trivializando assim sua lei de conservação. ✠

45.7 O Formalismo Hamiltoniano

Além do formalismo Newtoniano, normalmente apresentado em cursos introdutórios de Física, e do formalismo Lagrangiano que resumimos acima, a Mecânica Clássica possui outras formulações que podem apresentar vantagens no tratamento de questões teóricas ou aplicadas. O chamado *formalismo Hamiltoniano* é de particular importância, entre outras razões, por trazer a Mecânica Clássica mais próximo da formulação operatorial da Mecânica Quântica. A ele dedicamos a seção que aqui se inicia.

• Momentos generalizados

Consideremos o Lagrangiano $\mathscr{L}\big(q^1,\ \ldots,\ q^n,\ \dot{q}^1,\ \ldots,\ \dot{q}^n,\ t\big)$ de um sistema mecânico com n graus de liberdade, descrito por coordenadas generalizadas $q \equiv \big(q^1,\ \ldots,\ q^n\big)$ e velocidades generalizadas $\dot{q} \equiv \big(\dot{q}^1,\ \ldots,\ \dot{q}^n\big)$ e eventualmente do tempo t. As correspondentes equações de Euler-Lagrange, que regem a dinâmica desse sistema mecânico, são

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i} \ = \ 0\ , \qquad i = 1,\ \ldots,\ n\ . \tag{45.263}$$

Os chamados *momentos generalizados* são definidos por

$$p_i \ := \ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i}\big(q^1,\ \ldots,\ q^n,\ \dot{q}^1,\ \ldots,\ \dot{q}^n,\ t\big)\ . \tag{45.264}$$

Cada momento generalizado p_i é, naturalmente, uma função de q, de $\dot{q}$ e de t: $p_i \equiv p_i\big(q^1,\ \ldots,\ q^n,\ \dot{q}^1,\ \ldots,\ \dot{q}^n,\ t\big)$. Denotamos também $p \equiv \big(p_1,\ \ldots,\ p_n\big)$. Com essa definição, as equações de Euler-Lagrange ficam

$$\dot{p}_i \ = \ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i}\ , \qquad i = 1,\ \ldots,\ n\ . \tag{45.265}$$

Um ponto importante, e que é básico para o formalismo Hamiltoniano que desenvolveremos, é a suposição que essas funções sejam inversíveis, no sentido de que possamos escrever as velocidades generalizadas $\dot{q}^i$ em termos das coordenadas q e dos momentos generalizados p e, eventualmente, do tempo: $\dot{q}^i \equiv \dot{q}^i\big(q^1,\ \ldots,\ q^n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n,\ t\big)$. Como é bem sabido, a condição para que tal seja possível é a de que o determinante da matriz Jacobiana, de elementos de matriz $\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$, com $i,\ j \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, seja não nulo. Assumiremos implicitamente a validade dessa condição em tudo o que segue, salvo menção em contrário. Com isso, é implícito que as coordenadas generalizadas $\big(q^1,\ \ldots,\ q^n\big)$ e os momentos generalizados $\big(p_1,\ \ldots,\ p_n\big)$ são entendidas como *independentes* na descrição de um sistema mecânico pelo formalismo Hamiltoniano.

Sistemas onde essas condições de invertibilidade não são alcançadas são tratados por meio da teoria dos sistemas Hamiltonianos com vínculos (desenvolvida notoriamente por Dirac[83]), tema esse que não abordaremos na presente versão destas Notas. Vide, *e.g.*, [124].

• Espaço de configurações e o espaço de fase

O conjunto de todos os valores possíveis das coordenadas q que descrevem um sistema mecânico é um espaço n-dimensional denominado *espaço de configurações* do sistema.

Por meio da inversão comentada acima, os momentos generalizados p passam a ser considerados, juntamente com as coordenadas q, como variáveis independentes do sistema mecânico. O conjunto de todos os valores possíveis de q e p é um espaço $2n$-dimensional denominado *espaço de fases* do sistema mecânico, uma noção de grande importância.

Como já dissemos, na linguagem da Geometria Diferencial, que não empregaremos amiúde aqui (vide, porém [23] e [2]), o espaço de configurações é suposto compor uma variedade diferenciável n-dimensional real $\mathcal{M}$, enquanto que o espaço de todas as coordenadas e velocidades generalizadas $(q,\ \dot{q})$ é uma variedade diferenciável $2n$-dimensional que pode ser identificada com o fibrado tangente de $\mathcal{M}$, denotado por $\mathsf{T}\mathcal{M}$. Já o espaço de fases, o espaço de todas as coordenadas e momentos generalizadas $(q,\ p)$, é uma variedade diferenciável $2n$-dimensional que pode ser identificada com o fibrado cotangente de $\mathcal{M}$, denotado por $\mathsf{T}^*\mathcal{M}$.

Dessa forma, podemos afirmar que o formalismo Lagrangiano é descrito no fibrado tangente $\mathsf{T}\mathcal{M}$, enquanto que o formalismo Hamiltoniano, que desenvolveremos no que segue, é descrito no fibrado cotangente $\mathsf{T}^*\mathcal{M}$.

Noções sobre Geometria Diferencial, variedades diferenciáveis, fibrados tangentes e cotangentes, são desenvolvidas nos Capítulos 33 e 34 destas Notas, páginas 1678 e 1747, respectivamente. Vide também a extensa lista de referências lá apontadas.

• O Hamiltoniano e as equações de Hamilton

O chamado *Hamiltoniano*[84][85] de um sistema mecânico descrito por uma Lagrangiana $\mathscr{L}$ é a função definida no espaço de fases dada por

$$\mathscr{H}\big(q^1,\ \ldots,\ q^n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n,\ t\big) \ := \ \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i\big(q,\ p,\ t\big)\right) - \mathscr{L}\Big(q,\ \dot{q}\big(q,\ p,\ t\big),\ t\Big)\ . \tag{45.266}$$

As coordenadas q e os momentos generalizados p são tomadas como independentes e as velocidades generalizadas são tomadas como funções $\dot{q}\big(q,\ p,\ t\big)$ de q e p (e de t, se for o caso).

Uma diferença básica entre o formalismo Lagrangiano e o Hamiltoniano é que no formalismo Lagrangiano as equações dinâmicas (as equações de Euler-Lagrange) compõem um sistema de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, enquanto que no formalismo Hamiltoniano as equações dinâmicas (as equações de Hamilton, que obteremos abaixo) compõem um sistema de $2n$ equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Partindo da definição (45.266), vamos agora obter as equações dinâmicas correspondentes ao formalismo Hamiltoniano, as chamadas *equações de Hamilton*. Essas equações podem ser obtidas de diversas formas (trataremos de outras a seguir),

[83] Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984).
[84] William Rowan Hamilton (1805–1865).
[85] O Hamiltoniano é também denominado *função Hamiltoniana*, *função de Hamilton*, ou *Hamiltoniana*.

mas vamos obtê-las inicialmente calculando as derivadas parciais de $\mathscr{H}$ em relação às variáveis independentes das quais depende.

Para a primeira equação de Hamilton, consideremos

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i} \overset{(45.266)}{=} \dot{q}^i\big(q,\ p,\ t\big) + \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial p_i} \overset{(45.264)}{=} \dot{q}^i\big(q,\ p,\ t\big) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} = \dot{q}^i\big(q,\ p,\ t\big)\ .$$

O conjunto de equações

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i}\ , \qquad i \in \{1,\ \ldots,\ n\}\ , \tag{45.267}$$

é uma das *equações de Hamilton*. Chamamos a atenção para o fato de que a dedução não faz uso das equações dinâmicas, as equações de Euler-Lagrange, mas apenas da definição de momento generalizado em (45.264) e da definição de Hamiltoniano $\mathscr{H}$ em (45.266).

Para tratarmos do segundo conjunto de equações de Hamilton, fazemos uso das equações de Euler-Lagrange. Usando a definição (45.264), temos

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^i} \overset{(45.266)}{=} \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} \overset{(45.264)}{=} -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i} \overset{(45.263)}{=} -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i} \overset{(45.264)}{=} -\dot{p}_i\ .$$

O conjunto assim obtido de equações

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^i}\ , \qquad i \in \{1,\ \ldots,\ n\}\ , \tag{45.268}$$

é também parte das *equações de Hamilton*.

De importância também é considerarmos a derivada parcial do Hamiltoniano em relação a t:

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} \overset{(45.264)}{=} \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial t} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial t} \overset{(45.264)}{=} -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}\ .$$

Em resumo, as equações de Hamilton são

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i}\ , \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^i}\ , \qquad i \in \{1,\ \ldots,\ n\}\ , \tag{45.269}$$

e adicionalmente, temos

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}\ .$$

Como dissemos, as equações de Hamilton (45.269) compõem um sistema de $2n$ equações diferenciais ordinárias no espaço de fase.

• **O Hamiltoniano como constante de movimento**

Ao longo de uma trajetória, isto é, de uma solução das equações de Hamilton, temos o seguinte:

$$\frac{d}{dt}\mathscr{H}\big(q(t),\ p(t),\ t\big) = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_j}\dot{p}_j + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^j}\dot{q}^j\right] + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} \overset{(45.269)}{=} \sum_{j=1}^{n}\left[-\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_j}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^j} + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^j}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_j}\right] + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t}\ ,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\mathscr{H}\big(q(t),\ p(t),\ t\big) = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t}\big(q(t),\ p(t),\ t\big) = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}\big(q(t),\ \dot{q}(t),\ t\big)\ .$$

Portanto, se o Lagrangiano não depende de t, o Hamiltoniano é uma constante de movimento ao longo de qualquer trajetória real do sistema mecânico considerado.

• **O Hamiltoniano de uma partícula carregada em um campo eletromagnético**

Um tema muito relevante em aplicações à Física é a obtenção do Hamiltoniano para um ponto material de massa m e carga elétrica e em um campo eletromagnético. O Lagrangiano desse sistema foi apresentado em (45.218), página 2621:

$$\mathscr{L}\big(\vec{x},\ \vec{v},\ t\big) = \frac{m}{2}\|\vec{v}\|^2 - e\Big(\phi\big(\vec{x},\ t\big) - \vec{v}\cdot\mathbb{A}\big(\vec{x},\ t\big)\Big)\ ,$$

onde ϕ é o potencial elétrico e $\mathbb{A} = (A_1,\ A_2,\ A_3)$ é o potencial vetor. Os momentos generalizados são, por definição,

$$p_i \ = \ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_i} \ = \ mv_i + eA_i\big(\vec{x},\ t\big)\ , \quad i = 1,\ 2,\ 3,$$

e, daí, a relação inversa que expressa as velocidades em termos dos momentos generalizados é facilmente obtida:

$$v_i\big(\vec{x},\ p_i,\ t\big) \ = \ \frac{1}{m}\Big(p_i - eA_i\big(\vec{x},\ t\big)\Big)\ , \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Com isso, a correspondente função de Hamilton é, segundo a definição (45.266), página 2637,

$$\begin{aligned}\mathscr{H}\big(\vec{x},\ \vec{p},\ t\big) \ &= \ \sum_{i=1}^{3} p_i v_i\big(\vec{x},\ p_i,\ t\big) - \mathscr{L}\left(\vec{x},\ \frac{1}{m}\Big(\vec{p} - e\mathbb{A}\big(\vec{x},\ t\big)\Big),\ t\right) \\ &= \ \frac{1}{m}\vec{p}\cdot\Big(\vec{p} - e\mathbb{A}\big(\vec{x},\ t\big)\Big) - \frac{m}{2}\left\|\frac{1}{m}\Big(\vec{p} - \mathbb{A}\big(\vec{x},\ t\big)\Big)\right\|^2 + e\phi\big(\vec{x},\ t\big) - \frac{e}{m}\Big(\vec{p} - e\mathbb{A}\big(\vec{x},\ t\big)\Big)\cdot\mathbb{A}\big(\vec{x},\ t\big)\ ,\end{aligned}$$

onde $\vec{p} = \big(p_1,\ p_2,\ p_3\big)$. Assim, cancelando e simplificando termos, obtemos

$$\mathscr{H}\big(\vec{x},\ \vec{p},\ t\big) \ = \ \frac{m}{2}\Big\|\vec{p} - \mathbb{A}\big(\vec{x},\ t\big)\Big\|^2 + e\phi\big(\vec{x},\ t\big)\ . \tag{45.270}$$

Verifique! Essa forma do Hamiltoniano, com sua dependência em $\mathbb{A}$ e ϕ, é também empregada na Mecânica Quântica.

45.7.1 Derivação Variacional das Equações de Hamilton

As equações de Euler-Lagrange são obtidas a partir de um princípio variacional, o princípio de Hamilton. Como veremos na presente seção, o mesmo se passa com as equações de Hamilton elas mesmas. Essa maneira de obtê-las será útil adiante quando discutirmos as chamadas transformações canônicas.

• **Formalização no espaço de configurações a partir do princípio de Hamilton**

De maneira idêntica àquela empregada no princípio de Hamilton, consideramos a coleção de todas as curvas contínuas e diferenciáveis $q(t)$ no espaço de configurações, com $t \in [t_2,\ t_2]$ (sendo $t_2 < t_2$) conectando pontos fixados $q(t_1)$ e $q(t_2)$. Para tais curvas, consideramos o funcional ação

$$S \ := \ \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\big(q(t),\ \dot{q}(t),\ t\big)\, dt\ .$$

O princípio de Hamilton é a afirmação que $\delta\int_{t_1}^{t_2}\mathscr{L}(q,\ \dot{q},\ t)\, dt = 0$, quando o funcional é calculado sobre a trajetória real do sistema considerado. Com base em (45.266), escrevemos

$$\mathscr{L}\Big(q,\ \dot{q},\ t\Big) \ = \ \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\big(q,\ \dot{q},\ t\big)\dot{q}^i\right) - \mathscr{H}\big(q,\ p\big(q,\ \dot{q},\ t\big),\ t\big) \ \equiv \ \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}^i\right) - \mathscr{H}\big(q,\ p,\ t\big)\ ,$$

onde, seguindo (45.264), os momentos generalizados p_i são tomados ao longo de cada curva no espaço de configurações como função de q, $\dot{q}$ e eventualmente de t. Para a variação da ação, obtemos

$$\delta S \ = \ \delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}^i\right) - \mathscr{H}\big(q,\ p,\ t\big)\right)\, dt \ = \ \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\delta(p_i)\dot{q}^i + p_i\delta(\dot{q}^i) - \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q^i}\delta(q^i) - \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_i}\delta(p_i)\right)\, dt\ . \tag{45.271}$$

Deveríamos agora escrever $\delta(p_i) \ = \ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial p_1}{\partial q^j}\delta(q^j) + \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}_j}\delta(\dot{q}^j)\right)$, expressando assim a variação de p_i em termos das variações das coordenadas generalizadas e de suas derivadas. Seguimos, no entanto, um outro caminho, mantendo

provisoriamente a expressão em termos de $\delta(p_i)$. Como $\delta(\dot{q}^i) = \frac{d}{dt}\delta(q^j)$, com integração por partes podemos escrever em (45.271) $\int_{t_1}^{t_2} p_i\delta(\dot{q}^i)\,dt = \underbrace{p_i\delta(q^i)\big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i\delta(q^i)\,dt$. E assim,

$$\delta S \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(-\left[\dot{p}_i + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^i}\right]\delta(q^i) + \left[\dot{q}^i - \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i}\right]\delta(p_i)\right)\,dt\;.$$

Neste ponto, impomos o princípio de Hamilton, que afirma que $\delta S = 0$ sobre a trajetória real no espaço de configurações seguida pelo sistema mecânico. No entanto, seria precipitado se simplesmente declarássemos que ambos os fatores entre colchetes são nulos pois, em verdade, as variações $\delta(q^i)$ e $\delta(p^i)$ não são independentes. Sucede, porém, como já comentamos quando da dedução de (45.267), que a expressão $\dot{q}^i - \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i}$ é nula para cada $i \in \{1,\,\ldots,\,n\}$, como consequência das definições de $\mathscr{H}$ e dos momentos generalizados, sem uso das equações de Euler-Lagrange. Assim, o termo que multiplica $\delta(p_i)$ é trivialmente nulo, e o princípio de Hamilton reduz-se a

$$0 \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\dot{p}_i + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^i}\right]\delta(q^i)\,dt\;,$$

conduzindo finalmente à equação de Hamilton faltante: $\dot{p}_i + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^i} = 0$ para cada $i \in \{1,\,\ldots,\,n\}$.

* * *

Nota. Curiosamente, a dedução das equações de Hamilton a partir de um princípio variacional é apresentada de forma um tanto defeituosa em alguns livros-texto modernos, os quais não deixam claro se a variação é tomada em curvas no espaço de configurações ou no de fases. O livro de Sommerfeld [466], que muito reputamos, faz sua apresentação no espaço de configurações e aponta cuidadosamente para o problema da falta de independência entre as variações $\delta(q^i)$ e $\delta(p_j)$ que ocorre nesse caso, indicando a solução que apresentamos. ♣

45.7.2 Colchetes de Poisson

Seja um sistema mecânico cuja dinâmica seja definida por um Hamiltoniano $\mathscr{H}(q,\,p,\,t)$. Seja $f \equiv f(q,\,p,\,t)$ uma função definida no espaço de fases (e eventualmente dependente também de t). Sua derivada temporal ao longo de uma trajetória definida pelo Hamiltoniano $\mathscr{H}$ é dada, segundo as equações de Hamilton, por

$$\frac{d}{dt}f\big(q(t),\,p(t),\,t\big) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial f}{\partial t}\big(q(t),\,p(t),\,t\big) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}\big(q(t),\,p(t),\,t\big)\;.$$

Essa expressão motiva a seguinte definição. Sejam $g(q,\,p,\,t)$ e $h(q,\,p,\,t)$ funções ao menos uma vez diferenciáveis definidas no espaço de fases e, eventualmente, também dependentes do tempo. Definimos os *colchetes de Poisson*[86] de g e h, denotados por $\{g,\,h\}$ como a função definida no espaço de fases (e eventualmente dependente também do tempo t) dada por[87]

$$\big\{g,\,h\big\}(q,\,p,\,t) \;:=\; \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q^i} - \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\right)(q,\,p,\,t)\;. \tag{45.272}$$

Com isso, podemos escrever

$$\frac{d}{dt}f\big(q(t),\,p(t)\big) \;=\; \big\{\mathscr{H},\,f\big\}\big(q(t),\,p(t),\,t\big) + \frac{\partial f}{\partial t}\big(q(t),\,p(t),\,t\big)\;. \tag{45.273}$$

Os colchetes de Poisson são um instrumento muito útil, como veremos no que seguirá, e suas propriedades refletem estruturas matemáticas importantes subjacentes à Mecânica Clássica (relacionadas ao grupo simplético, apresentado na Seção 21.3.3.3, página 1117, e na Seção 21.9, página 1209). Antes de prosseguirmos, é muito importante listarmos algumas de suas propriedades.

• **Propriedades dos colchetes de Poisson**

Listamos a seguir as propriedades fundamentais dos colchetes de Poisson. Abaixo, f, g, h, g_1, g_2, h_1 e h_2 são funções arbitrárias definidas no espaço de fase (e eventualmente dependentes também do tempo t) que sejam ao menos uma ou duas vezes diferenciáveis (conforme a necessidade).

[86] Siméon Denis Poisson (1781–1840).

[87] O estudante deve ser advertido que, infelizmente, alguns textos definem $\big\{g,\,h\big\}$ como em (45.272), mas com os sinais trocados.

1. Antissimetria:
$$\{g,\ h\} \ = \ -\{h,\ g\}\ .$$
2. Se g ou h forem constantes como funções de q's e p's, $\{g,\ h\} = 0$.
3. Linearidade:
$$\{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2,\ h\} \ = \ \alpha_1\{g_1,\ h\} + \alpha_2\{g_2,\ h\}\ ,$$
onde α_1 e α_2 são constantes. Segue da antissimetria que também vale $\{h,\ \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2\} = \alpha_1\{h,\ g_1\} + \alpha_2\{h,\ g_2\}$.
4. Identidade de Leibniz[88]:
$$\{g,\ h_1 h_2\} = \{g,\ h_1\}h_2 + h_1\{g,\ h_2\}\ .$$
Pela antissimetria vale também $\{h_1 h_2,\ g\} = \{h_1,\ g\}h_2 + h_1\{h_2,\ g\}$.
5. Identidade de Jacobi[89]:
$$\Big\{f,\ \{g,\ h\}\Big\} + \Big\{h,\ \{f,\ g\}\Big\} + \Big\{g,\ \{h,\ f\}\Big\} \ = \ 0\ . \tag{45.274}$$
6. Identidade para a derivada temporal:
$$\frac{\partial}{\partial t}\{g,\ h\} \ = \ \left\{\frac{\partial g}{\partial t},\ h\right\} + \left\{g,\ \frac{\partial h}{\partial t}\right\}\ . \tag{45.275}$$
7. Colchetes de Poisson canônicos: para todos $i,\ j \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, valem
$$\{q^i,\ q^j\} \ = \ 0\ , \qquad \{p_i,\ p_j\} \ = \ 0\ , \qquad \{p_i,\ q^j\} \ = \ \delta_{ij}\ . \tag{45.276}$$

Incentivamos o estudante a provar essas propriedades. Todas elas seguem diretamente da definição dos colchetes de Poisson e suas demonstrações são simples e pouco trabalhosas, exceto a da identidade de Jacobi (45.274), que tratamos logo abaixo.

• **Prova de identidade de Jacobi**

Das propriedades listadas acima, a única cuja demonstração é mais difícil é a identidade de Jacobi (45.274). Uma maneira de prová-la é à força bruta: expandindo-se o lado esquerdo de (45.274) de acordo com a definição (45.272) e constatando-se que disso obtém-se zero. Aconselhamos todo estudante a fazer isso uma (e somente uma) vez na vida.

Vamos aqui, no entanto, apresentar uma demonstração mais simples e elegante, usando apenas algumas das demais propriedades dos colchetes de Poisson listadas acima.

Consideremos os colchetes $\{f,\ g\}$ e vamos supor que a dinâmica do sistema seja definida pela função h, ou seja, que h seja o Hamiltoniano de algum sistema mecânico. Seja $(q(t),\ p(t))$ uma trajetória no espaço de fases definida pelo Hamiltoniano h, Por um lado, teremos por (45.273),
$$\frac{d}{dt}\{f,\ g\}\big(q(t),\ p(t),\ t\big) \ = \ \big\{h,\ \{f,\ g\}\big\}\big(q(t),\ p(t),\ t\big) + \frac{\partial}{\partial t}\{f,\ g\}\big(q(t),\ p(t),\ t\big)\ . \tag{45.277}$$
Por outro lado, como $\frac{df}{dt} = \big\{h,\ f\big\} + \frac{\partial f}{\partial t}$ e $\frac{dg}{dt} = \big\{h,\ g\big\} + \frac{\partial g}{\partial t}$, temos também
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{f,\ g\}\big(q(t),\ p(t),\ t\big) \quad &= \quad \left\{\{h,\ f\} + \frac{\partial f}{\partial t},\ g\right\}\big(q(t),\ p(t),\ t\big) + \left\{f,\ \{h,\ g\} + \frac{\partial g}{\partial t}\right\}\big(q(t),\ p(t),\ t\big) \\ &\overset{(45.275)}{=} \quad \big\{\{h,\ f\},\ g\big\}\big(q(t),\ p(t),\ t\big) + \big\{f,\ \{h,\ g\}\big\}\big(q(t),\ p(t),\ t\big) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial t}\{f,\ g\}\big(q(t),\ p(t),\ t\big)\ .\end{aligned} \tag{45.278}$$
Assim, igualando-se os lados direitos de (45.277) e de (45.278), temos
$$\big\{h,\ \{f,\ g\}\big\} \ = \ \big\{\{h,\ f\},\ g\big\} + \big\{f,\ \{h,\ g\}\big\}$$

[88] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716).
[89] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851).

ao longo de uma trajetória $\big(q(t),\ p(t)\big)$. Essa relação coincide com a identidade de Jacobi (45.274), como é fácil de ser verificado. Faça-o! Como as trajetórias $\big(q(t),\ p(t)\big)$ podem ser feitas passar por qualquer ponto do espaço de fase (pois qualquer ponto do espaço de fase pode ser tomado como condição inicial de qualquer movimento), concluímos que a identidade de Jacobi vale em toda parte.

• **Constantes de movimento e integrais primeiras**

Seja um sistema mecânico cuja dinâmica é definida por um Hamiltoniano $\mathscr{H}$. Uma função $F(q,\ p,\ t)$ é dita ser uma *constante de movimento* se ao longo de qualquer trajetória $\big(q(t),\ p(t)\big)$ definida por $\mathscr{H}$ valer

$$\frac{dF}{dt}\big(q(t),\ p(t),\ t\big) \ = \ 0\ ,$$

ou seja, se $F\big(q(t),\ p(t),\ t\big)$ for constante ao longo de qualquer trajetória definida por $\mathscr{H}$.

Uma *integral primeira* é uma função $F(q,\ p)$, definida no espaço de fase, mas independente de t, que é uma constante de movimento. Integrais primeiras são também denominadas *integrais de movimento*.

Por (45.273) uma função $F(q,\ p)$ é uma integral primeira se e somente se

$$\big\{\mathscr{H},\ F\big\}\big(q(t),\ p(t)\big) \ = \ 0\ .$$

Integrais primeiras desempenham um papel particularmente importante no processo de resolução ("integração") das equações de movimento de certos sistemas ditos *sistemas integráveis*. Um teorema importante nesse contexto é o chamado Teorema de Poisson, que demonstraremos a seguir.

• **O Teorema de Poisson**

Se f é uma constante de movimento, então

$$0 \ = \ \frac{d}{dt}f\big(q(t),\ p(t),\ t\big) \ = \ \big\{\mathscr{H},\ f\big\}\big(q(t),\ p(t),\ t\big) + \frac{\partial f}{\partial t}\big(q(t),\ p(t),\ t\big)\ .$$

Como isso se dá para quaisquer $\big(q(t),\ p(t)\big)$, concluímos que

$$\big\{\mathscr{H},\ f\big\}\big(q,\ p,\ t\big) + \frac{\partial f}{\partial t}\big(q,\ p,\ t\big) \ = \ 0$$

para quaisquer pontos $(q,\ p)$ do espaço de fase.

O *Teorema de Poisson* consiste na seguinte afirmação: se f e g são constantes de movimento, então $\{f,\ g\}$ também o é. Prova:

$$\frac{d}{dt}\Big(\{f,\ g\}\big(q(t),\ p(t),\ t\big)\Big) \ = \ \big\{\mathscr{H},\ \{f,\ g\}\big\}\big(q(t),\ p(t),\ t\big) + \frac{\partial\{f,\ g\}}{\partial t}\big(q(t),\ p(t),\ t\big)\ .$$

Agora, por um lado, temos

$$\frac{\partial\{f,\ g\}}{\partial t} \ \overset{(45.275)}{=} \ \left\{\frac{\partial f}{\partial t},\ g\right\} + \left\{f,\ \frac{\partial g}{\partial t}\right\}\ .$$

Por outro lado, pela identidade de Jacobi e pela antissimetria, temos

$$\big\{\mathscr{H},\ \{f,\ g\}\big\} \ = \ -\big\{g,\ \{\mathscr{H},\ f\}\big\} - \big\{f,\ \{g,\ \mathscr{H}\}\big\} \ = \ \big\{\{\mathscr{H},\ f\},\ g\big\} + \big\{f,\ \{\mathscr{H},\ g\}\big\}\ .$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\Big(\{f,\ g\}\big(q(t),\ p(t),\ t\big)\Big) \ = \ \left\{\underbrace{\{\mathscr{H},\ f\} + \frac{\partial f}{\partial t}}_{=0},\ g\right\}\big(q(t),\ p(t),\ t\big) + \left\{f,\ \underbrace{\{\mathscr{H},\ g\} + \frac{\partial g}{\partial t}}_{=0}\right\}\big(q(t),\ p(t),\ t\big) \ = \ 0\ ,$$

demonstrando que $\{f,\ g\}$ é uma constante de movimento.

Esse teorema nos informa que se estivermos de posse de duas constantes de movimento f e g, podemos obter uma terceira tomando seus colchetes de Poisson $\{f,\ g\}$, e assim por diante. Em verdade, é preciso que se diga que nem sempre

obtemos dessa forma novas constantes de movimento, pois pode ocorrer de $\{f,\ g\}$ ser nulo ou ser uma combinação de f e g.

De qualquer forma, o Teorema de Poisson revela um significado profundo por trás dos colchetes de Poisson, e que vai além da motivação de sua definição em (45.273), significado esse ligado a noções de simetria e a princípios de conservação em sistemas mecânicos. Isso talvez fique mais claro no tópico que segue, envolvendo o Teorema de Noether.

• **O fluxo Hamiltoniano**

Uma noção importante no tratamento Hamiltoniano de sistemas mecânicos é a noção de *fluxo Hamiltoniano*. Essa noção permite iluminar muitas propriedades importantes de sistemas Hamiltonianos, como sua estabilidade, existência de pontos, ou trajetórias, limite, existência de trajetórias caóticas etc.

Na maioria dos problemas mecânicos as equações de Hamilton (45.269) vêm acompanhadas de condições iniciais que especificam os valores das soluções $\big(q(t),\ p(t)\big)$ em um instante de tempo, digamos, em $t=0$: $\big(q(0),\ p(0)\big) = (q_0,\ p_0)$. Trata-se, portanto, de problemas de valor inicial, ou problemas de Cauchy. Nas situações mais comuns assumimos que esses problemas admitam a existência e unicidade de soluções, ao menos em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ (e assumimos $0 \in I$). Sabemos que condições *suficientes* para tal são fornecidas pelo Teorema de Picard-Lindelöf, Teorema 12.2, página 693 (demonstrado no Capítulo 25, página 1369, mais especificamente, na Seção 25.2.4.1, página 1386). Em nosso caso, esse Teorema afirma que as equações de Hamilton com condições iniciais terão solução única se as derivadas parciais $\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_i}$ e $\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i}$ forem, para todo i, contínuas e diferenciáveis (nas variáveis q e p) em uma vizinhança aberta em torno da condição inicial. Assim, devemos supor que todas as derivadas parciais segundas de $\mathscr{H}$ nas variáveis q e p sejam contínuas em uma vizinhança aberta em torno da condição inicial.

Sob essas hipóteses, podemos garantir que trajetórias $t \mapsto \big(q(t),\ p(t)\big)$ distintas, ou seja, com condições iniciais distintas, nunca se cruzam, pois isso violaria a unicidade de soluções. Note-se soluções periódicas são, naturalmente, permitidas.

Uma outra questão relevante em muitos casos é saber se o problema de valor inicial produzido pelas equações de Hamilton tem soluções globais, ou seja, para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todas as condições iniciais (em cujo caso podemos tomar $I = \mathbb{R}$). Condições *suficientes* para a existência de soluções globais de problemas de valor inicial são fornecidas no Teorema 12.3, página 694. Traduzidas para sistemas Hamiltonianos, essas condições suficientes afirmam que teremos soluções globais se as derivadas parciais segundas de $\mathscr{H}$ forem funções limitadas de q e p em cada faixa $\mathcal{F}_{a,\,0} = \Big\{ (t,\ q,\ p) \in \mathbb{R}^{2n+1} :\ |t| \leq a\ ,\ \ (q,\ p) \in \mathbb{R}^{2n} \text{ arbitrário} \Big\}$. Alertamos que essas não as condições suficientes mais gerais conhecidas e outras condições mais específicas podem ser encontradas na literatura, mas aqui não nos preocuparemos, normalmente, com essas questões, procurando nos concentrar em pontos mais essenciais.

Em uma situação ideal, mas comum, em que as soluções das equações de Hamilton consideradas admitem soluções globais e únicas para todas as possíveis condições iniciais, o fluxo Hamiltoniano é o conjunto de todas trajetórias $\mathbb{R} \ni t \mapsto \big(q(t), p(t)\big)$ que resolvem as equações de Hamilton para todas as possíveis condições iniciais. Como, em princípio, todas as condições iniciais no espaço de fase são admissíveis, e como as trajetórias nunca se cruzam, segue que a coleção de todas as trajetórias, ou seja, o fluxo Hamiltoniano, cobre todo o espaço de fase.

• **O Teorema de Noether revisitado**

O célebre Teorema de Noether, que associa simetrias contínuas de um Lagrangiano e leis de conservação, foi estudado na Seção 45.6, página 2627. Aqui apresentaremos uma versão desse teorema dentro do formalismo Hamiltoniano.

Seja $\mathscr{H}(q,\ p)$ um Hamiltoniano independente de t e seja $F(q,\ p)$ uma função não constante definida no espaço de fases cujo fluxo é dado pelas soluções do sistema

$$\frac{d}{ds}p_i(s) \ = \ -\frac{\partial F}{\partial q^i}\big(q(s),\ p(s)\big)\ , \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{ds}q^i(s) \ = \ \frac{\partial F}{\partial p_i}\big(q(s),\ p(s)\big)\ , \qquad i\ =\ 1,\ \ldots,\ n\ , \qquad s \in \mathbb{R}\ . \tag{45.279}$$

Naturalmente, suporemos F tal que o fluxo acima exista globalmente no espaço de fases.

Vamos assumir que o Hamiltoniano $\mathscr{H}$ seja invariante por esse fluxo, ou seja,

$$\frac{d}{ds}\mathscr{H}\big(q(s),\ p(s)\big) \ = \ 0$$

para todo s. Então, $\big\{F,\ \mathscr{H}\big\} = 0$. Como $0 = \big\{F,\ \mathscr{H}\big\} = -\big\{\mathscr{H},\ F\big\}$ concluímos por (45.273) que F é uma integral primeira para a evolução temporal definida por $\mathscr{H}$, ou seja, é uma constante de movimento.

Temos, portanto, a seguinte afirmação, que pode ser considerada como uma versão, dentro do formalismo Hamiltoniano, do *Teorema de Noether*: *se um Hamiltoniano for invariante pelo fluxo de uma função no espaço de fases essa função é uma constante de movimento para a evolução temporal definida pelo Hamiltoniano.*

O fluxo de F faz o papel do difeomorfismo que mantém invariante o Lagrangiano na apresentação da Seção 45.6, página 2627. A condição de simetria (invariância pelo difeomorfismo) é aqui a condição de constância de $\mathscr{H}$ no fluxo de F, que equivale a condição $\big\{F,\ \mathscr{H}\big\} = 0$.

O caso em que $F = \mathscr{H}$ pode ser interpretado na seguinte linha: a família de difeomorfismos gerada por $\mathscr{H}$ coincide com a evolução temporal. Assim, vemos que a invariância por translações temporais implica a conservação do próprio $\mathscr{H}$, ou seja, da energia.

O que as considerações acima não cobrem, se comparadas ao tratamento do Teorema de Noether apresentado via formalismo Lagrangiano na Seção 45.6, página 2627, é que elas não apresentam uma forma explícita para as grandezas conservadas. Elas poderiam ser obtidas se tratarmos a equação $\big\{F,\ \mathscr{H}\big\} = 0$ como uma equação a derivadas parciais para F (para um Hamiltoniano dado). Vejamos isso em dois exemplos simples.

Exemplo 45.9 Seja um ponto material de massa $m > 0$ em movimento unidimensional sob um potencial $U(x) = 0$. O Hamiltoniano é $\mathcal{H}(x,\ p) = \frac{p^2}{2m}$ e a equação $\big\{F,\ \mathscr{H}\big\} = 0$ é $-\frac{p}{m}\frac{\partial F}{\partial x} = 0$. Sua solução é $F(x,\ p) = A(p)$, com A sendo uma função arbitrária, que suporemos diferenciável mas não constante. Com isso, as equações (45.279) para o fluxo definido por F são $\frac{d}{ds}p(s) = 0$ e $\frac{d}{ds}x(s) = A'(p)$, cujas soluções são $p(s) = p_0$, constante e $x(s) = \alpha s + \beta$, sendo β uma constante arbitrária e $\alpha = A'(p_0)$, que também é uma constante arbitrária, mas não nula. Assim, os difeomorfismos definidos por F no espaço de fase são $\big(x,\ p\big) \mapsto \big(x(s),\ p(s)\big) = \big(x + \alpha s,\ p\big)$, para $s \in \mathbb{R}$. Aqui seguimos a convenção que $\big(x(0),\ p(0)\big) = \big(x,\ p\big)$ para cada ponto $\big(x,\ p\big)$ do espaço de fases. Vemos que esses difeomorfismos representam translações na coordenada x, com p mantido constante. A integral de movimento F associada é $F(x,\ p) = A(p)$. Como A é arbitrária e não constante, concluímos que p é uma integral de movimento associada, pois $0 = \frac{d}{dt}F\big(x(t),\ p(t)\big) = A'\big(p(t)\big)\dot{p}(t)$ implica $\dot{p}(t) = 0$ ao longo de uma trajetória. Assim, vemos que a invariância do sistema por translações da posição x do ponto material implica a conservação de seu momento linear. ♦

Exemplo 45.10 Sejam dois pontos materiais de massas m_1 e m_2 em movimento unidimensional sob um potencial $U(x_1 - x_2)$. O Hamiltoniano é $\mathcal{H}(x,\ p) = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + U(x_1 - x_2)$ e a equação $\big\{F,\ \mathscr{H}\big\} = 0$ é

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p_1} - \frac{\partial F}{\partial p_2}\right) V'(x_1 - x_2) - \frac{p_1}{m_1}\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{p_2}{m_2}\frac{\partial F}{\partial x_2} \ = \ 0\ .$$

Uma solução particular dessa equação é obtida com $F\big(x_1,\ x_2,\ p_1,\ p_2\big) = C(p_1 + p_2)$. Verifique! Com ela as equações (45.279) ficam

$$\frac{d}{ds}p_1(s) \ = \ 0\ , \qquad \frac{d}{ds}p_2(s) \ = \ 0\ , \qquad \frac{d}{ds}x_1(s) \ = \ C'(p_1 + p_2)\ , \qquad \frac{d}{ds}x_2(s) \ = \ C'(p_1 + p_2)\ .$$

Assim, $p_1(s)$ e $p_2(s)$ são constantes e $x_1(s) = \alpha s + \beta_1$ e $x_2(s) = \alpha s + \beta_2$, onde $\alpha = C(p_1 + p_2)$, constante ao longo do fluxo de F (pois p_1 e p_2 são constantes ao longo desse fluxo, como afirmam as duas primeiras equações acima) e β_1 e β_2 são constantes. Assim, impondo como antes que os difeomorfismos induzidos por F sejam iguais à identidade quando $s = 0$, eles ficam da forma $\big(x_1,\ x_2,\ p_1,\ p_2\big) \mapsto \big(x_1(s),\ x_2(s),\ p_1(s),\ p_2(s)\big) = \big(x_1 + \alpha s,\ x_2 + \alpha s,\ p_1,\ p_2\big)$. Eles correspondem a translações simultâneas no espaço das coordenadas x_1 e x_2, com os momentos ficando constantes. A integral primeira é $F\big(x_1,\ x_2,\ p_1,\ p_2\big) = C(p_1 + p_2)$ e sua constância significa que o momento total $p_1 + p_2$ é constante. Assim, novamente vemos que a invariância do potencial $V(x_1 - x_2)$ por translações simultâneas e idênticas de x_1 e x_2 implica a conservação do momento linear total. ♦

• O operador de Liouville

A Mecânica Clássica admite ser formulada em termos de um formalismo operatorial semelhante ao da Mecânica Quântica. Esse formalismo apresenta algumas vantagens quando se discutem propriedades mais profundas de sistemas mecânicos, como a propriedade de ergodicidade (vide para tal [412]). Não pretendemos explorar esse tema de forma exaustiva aqui, nem entrar em questões matemáticas importantes, como o domínio de definição de certos operadores, mas apresentar alguns de seus rudimentos.

Seja f uma função infinitamente diferenciável definida no espaço de fases e, por simplicidade, suponhamos que f não dependa explicitamente de t. Se considerarmos sua evolução ao longo de uma trajetória real $\big(q(t),\ p(t)\big)$, definida por um Hamiltoniano $\mathscr{H}$ (que suporemos, por simplicidade, independente do tempo), teremos

$$\frac{d}{dt}f\big(q(t),\ p(t)\big) \ = \ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) \ = \ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q^i} \ - \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) \ = \ (\mathsf{L}f)\big(q(t),\ p(t)\big)\ ,$$

onde L é o operador diferencial, denominado *operador de Liouville*[90], ou *Liouvilliano*, definido por

$$\mathsf{L} := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) , \tag{45.280}$$

ou seja,

$$\big(\mathsf{L}f\big)(q,\, p) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) . \tag{45.281}$$

Observe-se *en passant* que $\mathsf{L}f = \{\mathscr{H},\, f\}$, mas nessa formalização preferimos tratar L como um operador diferencial agindo num espaço adequado de funções definidas no espaço de fases, explorando as propriedades específicas de operadores diferenciais.

A condição inicial em $t = t_0$ é $f(q_0,\, p_0)$, onde $(q_0,\, p_0)$ é uma abreviação para $\big(q^1(t_0),\, \ldots,\, q^n(t_0),\, p_1(t_0),\, \ldots,\, p_n(t_0)\big)$, que são as condições iniciais para coordenadas e momentos generalizados em $t = t_0$. O ponto relevante da expressão

$$\frac{d}{dt} f\big(q(t),\, p(t)\big) = (\mathsf{L}f)\big(q(t),\, p(t)\big) ,$$

ou seja, $\dot{f} = \mathsf{L}f$, é que essa equação linear, com a condição inicial $f(q_0,\, p_0)$, possui uma solução formalmente expressa por

$$f\big(q(t),\, p(t)\big) = \Big(e^{(t-t_0)\mathsf{L}} f\Big)(q_0,\, p_0) = f(q_0,\, p_0) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \big(L^n f\big) \right) (q_0,\, p_0) . \tag{45.282}$$

E. 45.29 *Exercício*. Justifique informalmente por que essa expressão apresenta a solução desejada. ✠

Para Hamiltonianos dependentes do tempo devemos considerar, alternativamente, a solução expressa em termos de uma séria de Dyson, analogamente ao discutido na Seção 14.2.2, página 725.

Como ilustração do uso de (45.282), vamos exibir dois sistemas elementares para os quais a solução das equações de movimento pode ser explicitamente obtida com as expressões acima: o ponto material livre em uma dimensão e o oscilador harmônico em uma dimensão. Um terceiro exemplo, o de um ponto material em uma dimensão sujeito a uma força constante, será tratado no Exercício E. 45.30, em seguida.

Exemplo 45.11 No caso de um ponto material livre de massa m em um movimento unidimensional, temos o Hamiltoniano $\mathscr{H} = \frac{p^2}{2m}$. Assim, o operador de Liouville é

$$\mathsf{L} = \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} .$$

O operador de derivação $\frac{\partial}{\partial q}$ é o gerador das translações na variável q no espaço das funções que dela dependam (vide Seção 21.10, página 1218). Dessa forma, vale formalmente

$$\Big(e^{t\mathsf{L}} f\Big)(q_0,\, p_0) = \Big(e^{t\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q}} f\Big)(q_0,\, p_0) = f\left(q_0 + \frac{p_0}{m} t,\, p_0\right) .$$

Assim, em particular, para $f(q,\, p) = q$, concluímos

$$q(t) = q_0 + \frac{p_0}{m} t \qquad \text{e} \qquad p(t) = p_0 ,$$

a bem conhecida expressão que descreve a evolução de um ponto material livre. ♦

Exemplo 45.12 Para o oscilador harmônico unidimensional o Hamiltoniano é $\mathscr{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2$. O operador de Liouville correspondente é

$$\mathsf{L} = m^{-1} p \frac{\partial}{\partial q} - kq \frac{\partial}{\partial p} .$$

Para simplificar um pouco as coisas, definamos $p' = p/\sqrt{m}$ e $q' = \sqrt{k} q$. O operador L fica

$$\mathsf{L} = \omega_0 \left(p' \frac{\partial}{\partial q'} - q' \frac{\partial}{\partial p'} \right) ,$$

[90] Joseph Liouville (1809–1882).

com $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. O operador $\mathsf{L}' \equiv p'\frac{\partial}{\partial q'} - q'\frac{\partial}{\partial p'}$ é o gerador das rotações no espaço $(q',\ p')$. Logo, $e^{t\mathsf{L}} = e^{t\omega_0\mathsf{L}'}$ representa uma rotação de um ângulo $\omega_0 t$ nesse espaço. Logo, definindo $\tilde{f}(q',\ p') = f(q,\ p)$, ou seja, $\tilde{f}\big(\sqrt{k}q,\ p/\sqrt{m}\big) = f(q,\ p)$

$$f\big(q(t),\ p(t)\big) \ = \ \Big(e^{t\mathsf{L}}f\Big)(q_0,\ p_0) \ = \ \tilde{f}\Big(\cos(\omega_0 t){q_0}' + \operatorname{sen}(\omega_0 t){p_0}',\ \cos(\omega_0 t){p_0}' - \operatorname{sen}(\omega_0 t){q_0}'\Big)$$

$$= \ f\Big(\cos(\omega_0 t)q_0 + \operatorname{sen}(\omega_0 t)\frac{p_0}{m\omega_0},\ \cos(\omega_0 t)p_0 - \operatorname{sen}(\omega_0 t)m\omega_0 q_0\Big) \ . \qquad (45.283)$$

Em particular, para $f(q,\ p) = q$ e para $f(q,\ p) = p$ temos, respectivamente,

$$q(t) \ = \ \cos(\omega_0 t)q_0 + \operatorname{sen}(\omega_0 t)\frac{p_0}{m\omega_0} \qquad \text{e} \qquad p(t) \ = \ \cos(\omega_0 t)p_0 - \operatorname{sen}(\omega_0 t)m\omega_0 q_0 \ ,$$

um resultado bem conhecido. ♦

O exercício a seguir exibe mais um caso simples que pode ser tratado por esse método operatorial: o do ponto material sob uma força constante.

E. 45.30 *Exercício*. Considere-se um ponto material de massa m movendo-se em uma dimensão sob a a ação de uma força constante F_0. O Hamiltoniano desse sistema é $\mathscr{H}(q,\ p) = \frac{p^2}{2m} - F_0 q$. Verifique que o correspondente operador de Liouville é

$$\mathsf{L} \ = \ \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q} + F_0\frac{\partial}{\partial p} \ .$$

Seja $\mathsf{A} := t\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q}$ e $\mathsf{B} := tF_0\frac{\partial}{\partial p}$, de sorte que $e^{t\mathsf{L}} = e^{\mathsf{A}+\mathsf{B}}$. Verifique que

$$[\mathsf{A},\ \mathsf{B}] \ = \ -t^2\frac{F_0}{m}\frac{\partial}{\partial q} \ .$$

Verifique também que

$$\big[[\mathsf{A},\ \mathsf{B}],\ \mathsf{A}\big] \ = \ \big[[\mathsf{A},\ \mathsf{B}],\ \mathsf{B}\big] \ = \ 0$$

e, portanto, que $\big[[\mathsf{A},\ \mathsf{B}],\ \mathsf{A}+\mathsf{B}\big] = 0$. Devido a esses fatos, podemos evocar a utilíssima fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff[91] (vide equação (11.4), página 629),[92] que afirma neste caso que $e^{\mathsf{A}}e^{\mathsf{B}} = e^{\mathsf{A}+\mathsf{B}+\frac{1}{2}[\mathsf{A},\ \mathsf{B}]}$. Como os operadores $\mathsf{A}+\mathsf{B}$ e $[\mathsf{A},\ \mathsf{B}]$ formalmente comutam, escrevemos $e^{\mathsf{A}}e^{\mathsf{B}} = e^{\mathsf{A}+\mathsf{B}}\,e^{\frac{1}{2}[\mathsf{A},\ \mathsf{B}]}$. Prove disso e dos demais fatos acima que $e^{t\mathsf{L}} = e^{\mathsf{A}+\mathsf{B}} = e^{\mathsf{A}}e^{\mathsf{B}}e^{-\frac{1}{2}[\mathsf{A},\ \mathsf{B}]} = e^{\mathsf{A}}e^{-\frac{1}{2}[\mathsf{A},\ \mathsf{B}]}e^{\mathsf{B}} = e^{\mathsf{A}-\frac{1}{2}[\mathsf{A},\ \mathsf{B}]}e^{\mathsf{B}}$, ou seja,

$$\begin{aligned} e^{t\mathsf{L}} \ &= \ \exp\left(t\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q}\right)\exp\left(tF_0\frac{\partial}{\partial p}\right)\exp\left(t^2\frac{F_0}{2m}\frac{\partial}{\partial q}\right) \\ &= \ \exp\left(t\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q}\right)\exp\left(t^2\frac{F_0}{2m}\frac{\partial}{\partial q}\right)\exp\left(tF_0\frac{\partial}{\partial p}\right) \\ &= \ \exp\left(\left(t\frac{p}{m} + t^2\frac{F_0}{2m}\right)\frac{\partial}{\partial q}\right)\exp\left(tF_0\frac{\partial}{\partial p}\right) \ . \end{aligned}$$

Verifique com isso que para uma função f infinitamente diferenciável definida no espaço de fases, teremos

$$f\big(q(t),\ p(t)\big) \ = \ \Big(e^{t\mathsf{L}}f\Big)(q_0,\ p_0) \ = \ \left(\exp\left(\left(t\frac{p}{m} + t^2\frac{F_0}{2m}\right)\frac{\partial}{\partial q}\right)\exp\left(tF_0\frac{\partial}{\partial p}\right)f\right)(q_0,\ p_0)$$

$$= \ f\left(q_0 + t\frac{p_0}{m} + t^2\frac{F_0}{2m},\ p_0 + tF_0\right) \ . \qquad (45.284)$$

Em particular, para $f(q,\ p) = q$ e $f(q,\ p) = p$, conclua que

$$q(t) \ = \ q_0 + \frac{p_0}{m}t + \frac{F_0}{2m}t^2 \qquad \text{e} \qquad p(t) \ = \ p_0 + F_0 t \ ,$$

respectivamente, fórmulas essas que — o leitor há de reconhecer — são muito bem conhecidas da Física elementar. ✠

[91] Henry Frederick Baker (1866–1956). John Edward Campbell (1862–1924). Felix Hausdorff (1868–1942).

[92] Sua demonstração (para matrizes ou operadores limitados em espaços de Banach) é apresentada ma Seção 11.5, página 659.

• **Evolução temporal em termos dos colchetes de Poisson**

É claro pela definição (45.281) que

$$(\mathsf{L}f)(q,\ p)\ =\ \big\{\mathscr{H},\ f\big\}(q,\ p)\ .$$

Com isso, a expressão (45.282) também escreve-se como

$$f\big(q(t),\ p(t)\big)\ =\ f(q_0,\ p_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}\underbrace{\Big\{\mathscr{H},\ \Big\{\mathscr{H},\ \cdots\Big\{\mathscr{H},}_{n\ \text{vezes}}\ f\Big\}\cdots\Big\}\Big\}(q_0,\ p_0)\ . \tag{45.285}$$

Essa expressão fornece a evolução temporal da função f em termos de uma série infinita contendo colchetes de Poisson múltiplos com o Hamiltoniano. Ela pode ser usada tanto na obtenção de propriedades gerais do movimento quanto na solução de certos problemas gentis, como aqueles indicados no Exercício E. 45.31, abaixo, ou no Exercício E. 45.36, página 2658 (oscilador harmônico simples).

Não discutiremos aqui, todavia, sob quais condições gerais a série em (45.285) é convergente e para quais valores de $|t-t_0|$ isso se dá. A questão de convergência é, porém, uma questão matemática importante para que possamos realmente validar a solução expressa em (45.285). O Exercício E. 45.37, página 2658, exibe casos onde a solução expressa em (45.285) é válida para todo t e casos onde ela é válida apenas em um intervalo finito de valores de t.

Há alguns problemas relativamente simples que podem ser resolvidos com uso da expansão (45.285), como mostra o próximo exercício.

E. 45.31 *Exercício*. Obtenha, com o uso de (45.285), a posição como função do tempo, $q(t)$, para os seguintes sistemas elementares: 1º ponto material livre de massa m em uma dimensão; 2º ponto material de massa m sob uma força F_0, constante, em uma dimensão.

Sugestões. constate que se $f(q,\ p)=q$, então no primeiro e no segundo problemas a série em (45.285) tem um número finito de termos não nulos. No primeiro caso, $\underbrace{\{\mathscr{H},\ \{\mathscr{H},\ \cdots\{\mathscr{H},}_{n\ \text{vezes}}\ q\}\cdots\}\}$ anula-se para todo $n\geq 2$ e, no segundo caso, para $n\geq 3$. ✠

No Exercício dirigido E. 45.36, página 2658, mostramos como o problema do oscilador harmônico unidimensional pode ser resolvido com uso de (45.285). No Exercício dirigido E. 45.37, página 2658, discutimos um problema um tanto menos trivial que também pode ser resolvido com uso da expansão (45.285).

45.7.3 Transformações Canônicas

Transformações canônicas são um tipo especial de transformação de simetria no espaço de fases exibidas por sistemas mecânicos. A expressão "transformação de simetria" talvez seja aqui um abuso de linguagem, mas no que segue tentaremos esclarecer em que sentido ela deve ser entendida. A melhor abordagem desse tema faz uso da linguagem de formas diferenciais e da Geometria Diferencial, como adotada em textos como [23] e [2], mas não usaremos essa linguagem na corrente versão dessas Notas, pois isso multiplicaria as exigências matemáticas para um estudante ainda não suficientemente avançado.

• **Alguma notação**

Vamos iniciar essa discussão introduzindo uma notação conveniente. Localmente, os pontos do espaço de fase de um sistema mecânico com n graus de liberdade são descritos por $2n$ coordenadas $(q,\ p)\equiv\big(q^1,\ \ldots,\ q^n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n\big)\in\mathbb{R}^{2n}$. Vamos designar por X a $2n$-úpla $\begin{pmatrix} q^1\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}$ composto pelas $2n$ componentes do espaço de fase $\big(q^1,\ \ldots,\ q^n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n\big)$. Está claro que $X^i=q^i$ e $X^{n+i}=p_i$ para cada $i=1,\ \ldots,\ n$.

Se f é uma função diferenciável definida no espaço de fase, denotamos por $\nabla_X f$ o gradiente $2n$-dimensional de f nas coordenadas X. Assim, em componentes, temos para cada $i=1,\ \ldots,\ n$: $\big(\nabla_X f\big)_i=\frac{\partial f}{\partial X^i}=\frac{\partial f}{\partial q^i}$ e $\big(\nabla_X f\big)_{i+n}=\frac{\partial f}{\partial X^{i+n}}=$

$\frac{\partial f}{\partial p_i}$. Assim, na forma de um vetor-coluna, temos

$$\nabla_X f \;:=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial q^n} \\ \frac{\partial f}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial p_n} \end{pmatrix} .$$

Vamos também definir uma matriz $2n \times 2n$, denotada por J ou por J_{2n}, por meio da seguinte representação em blocos:

$$J \;\equiv\; J_{2n} \;:=\; \begin{pmatrix} 0_n & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0_n \end{pmatrix} , \tag{45.286}$$

onde $\mathbb{1}_n \equiv \mathbb{1}$ é a matriz identidade $n \times n$ e $0_n \equiv 0$ é a matriz $n \times n$ identicamente nula. Por exemplo, para $n = 1$ temos $J_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, para $n = 2$ temos $J_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ etc.

E. 45.32 *Exercício*. Mostre que a matriz J_{2n} definida em (45.286) possui as seguintes propriedades:

$$J_{2n}^2 \;=\; -\mathbb{1}_{2n} , \qquad J_{2n}^T \;=\; -J_{2n} , \qquad J_{2n} \;=\; J_2 \otimes \mathbb{1}_n \qquad \text{e} \qquad \det J_{2n} \;=\; 1 .$$

Sugestões. A prova da afirmação que $\det J_{2n} = 1$ pode ser realizada por meio de uso repetido da expansão de determinantes em linhas ou colunas (relações (10.21) ou (10.22), página 513), ou observando que J_{2n} pode ser escrita como o produto tensorial $J_{2n} = J_2 \otimes \mathbb{1}_n$. Pela regra (10.209), página 620, segue disso que $\det J_{2n} = \big(\det J_2\big)^n \big(\det \mathbb{1}_n\big)^2$ e como $\det J_2 = 1$, segue que $\det J_{2n} = 1$. Produtos tensoriais de matrizes são tratados na Seção 10.10, página 618. ✠

Doravante, denotaremos J_{2n} por J, salvo se houver perigo de confusão.

Com a notação acima as equações de Hamilton do sistema mecânico que consideramos, ou seja, o sistema de equações $\dot{q}^i = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i}$ e $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^i}$, $i = 1, \ldots, n$, podem ser escritas como

$$\dot{X}(t) \;=\; J\Big(\nabla_X \mathscr{H}\Big)\big(X(t)\big) . \tag{45.287}$$

Verifique! Essa notação não foi introduzida meramente por ser sintética, mas por tornar mais transparentes algumas das manipulações que faremos.

Ela é útil, por exemplo, na representação de colchetes de Poisson. Sejam $f(q, p)$ e $g(q, p)$ duas funções diferenciáveis definidas no espaço de fase. Denotemos por $\{f, g\}_X$ seu colchetes de Poisson nas coordenadas X, definido por $\{f, g\}_X = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right)$. Então, podemos escrever

$$\{f, g\}_X \;=\; -\Big(\nabla_X f\Big)^T J\Big(\nabla_X g\Big) . \tag{45.288}$$

A prova segue imediatamente da simples observação que o produto $J\Big(\nabla_X g\Big)$ pode ser representado em forma vetorial como

$$J\nabla_X g \quad := \quad \begin{pmatrix} 0_n & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial q^n} \\ \frac{\partial g}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_n} \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_n} \\ -\frac{\partial g}{\partial q^1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial g}{\partial q^n} \end{pmatrix} .$$

E. 45.33 *Exercício*. Mostre que os colchetes de Poisson canônicos

$$\big\{q^i, q^j\big\} \;=\; 0, \qquad \big\{p_i, p_j\big\} \;=\; 0 \quad \text{e} \quad \big\{p_i, q^j\big\} \;=\; \delta_{ij}, \qquad i, j \in \{1, \ldots, n\} ,$$

podem ser escritos de maneira compacta como

$$\{X^a,\, X^b\} \;=\; -J_{ab}\;, \qquad a,\, b \in \{1,\, \ldots,\, 2n\}\;, \tag{45.289}$$

onde J_{ab} é o elemento de matriz ab da matriz J. ✠

• **Transformações de coordenadas no espaço de fase**

A descrição dos pontos do espaço de fase pode ser feita por outras coordenadas que não as coordenadas $(q,\, p)$ que usamos acima. Consideremos um novo sistema $(Q,\, P)$ que permita descrever localmente pontos do espaço de fase, de sorte que as novas coordenadas possam ser obtidas univocamente e de forma diferenciável das anteriores e vice-versa. Isso significa dizer as funções

$$Q^i\big(q^1,\, \ldots,\, q^n,\, p_1,\, \ldots,\, p_n\big) \quad \text{e} \quad P_i\big(q^1,\, \ldots,\, q^n,\, p_1,\, \ldots,\, p_n\big)\;, \qquad i \,=\, 1,\, \ldots,\, n\;,$$

são diferenciáveis, assim como suas inversas

$$q^i\big(Q^1,\, \ldots,\, Q^n,\, P_1,\, \ldots,\, P_n\big) \quad \text{e} \quad p_i\big(Q^1,\, \ldots,\, Q^n,\, P_1,\, \ldots,\, P_n\big)\;, \qquad i \,=\, 1,\, \ldots,\, n\;.$$

Analogamente ao vetor X, denotemos por Y o vetor-coluna composto pelas novas coordenadas, ou seja, Y é o vetor-coluna com $2n$ componentes dadas por $Y^i = Q^i$ e $Y^{n+i} = P_i$ para cada $i = 1,\, \ldots,\, n$.

Definamos agora a matriz Jacobiana da transformação $X \to Y$, como sendo a matriz $\mathcal{J}$ cujos elementos de matriz são $\big(\mathcal{J}\big)_{ab} := \frac{\partial Y^a}{\partial X^b}$. Por exemplo, no caso $n = 2$,

$$\mathcal{J} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial Y^1}{\partial X^1} & \frac{\partial Y^1}{\partial X^2} & \frac{\partial Y^1}{\partial X^3} & \frac{\partial Y^1}{\partial X^4} \\ \frac{\partial Y^2}{\partial X^1} & \frac{\partial Y^2}{\partial X^2} & \frac{\partial Y^2}{\partial X^3} & \frac{\partial Y^2}{\partial X^4} \\ \frac{\partial Y^3}{\partial X^1} & \frac{\partial Y^3}{\partial X^2} & \frac{\partial Y^3}{\partial X^3} & \frac{\partial Y^3}{\partial X^4} \\ \frac{\partial Y^4}{\partial X^1} & \frac{\partial Y^4}{\partial X^2} & \frac{\partial Y^4}{\partial X^3} & \frac{\partial Y^4}{\partial X^4} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial Q^1}{\partial q^1} & \frac{\partial Q^1}{\partial q^2} & \frac{\partial Q^1}{\partial p_1} & \frac{\partial Q^1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial Q^2}{\partial q^1} & \frac{\partial Q^2}{\partial q^2} & \frac{\partial Q^2}{\partial p_1} & \frac{\partial Q^2}{\partial p_2} \\ \frac{\partial P_1}{\partial q^1} & \frac{\partial P_1}{\partial q^2} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \frac{\partial P_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial q^1} & \frac{\partial P_2}{\partial q^2} & \frac{\partial P_2}{\partial p_1} & \frac{\partial P_2}{\partial p_2} \end{pmatrix}\;.$$

Sabemos também que a inversa $\mathcal{J}^{-1}$ da matriz Jacobiana tem como elementos de matriz $\Big(\mathcal{J}^{-1}\Big)_{ab} = \frac{\partial X^a}{\partial Y^b}$ pois, de fato, com essas definições, e com uso da regra da cadeia,

$$\sum_{b=1}^{2n} \Big(\mathcal{J}^{-1}\Big)_{ab}\Big(\mathcal{J}\Big)_{bc} \;=\; \sum_{b=1}^{2n} \frac{\partial X^a}{\partial Y^b}\frac{\partial Y^b}{\partial X^c} \;=\; \frac{\partial X^a}{\partial X^c} \;=\; \delta_{ac}\;,$$

confirmando que $\mathcal{J}^{-1}\mathcal{J} = \mathbb{1}_{2n}$.

Seja $f(q,\, p)$ uma função diferenciável definida no espaço de fase. Seja uma transformação de coordenadas diferenciável $X \equiv (q,\, p) \to (Q,\, P) \equiv Y$ no espaço de fases. Defina-se $\hat{f}(Q,\, P) := f\big(q(Q,\, P),\, p(Q,\, P)\big)$, que representa a função f e g nas novas coordenadas. Pela regra da cadeia, sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial X^i} \;=\; \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial Y^j}{\partial X^i}\frac{\partial \hat{f}}{\partial Y^j}\;.$$

Com uso da matriz Jacobiana podemos escrever isso como

$$\nabla_X f \;=\; \mathcal{J}^T \nabla_Y \hat{f}\;. \tag{45.290}$$

Verifique!

• **Transformações canônicas de coordenadas no espaço de fase**

Denotemos por $\widehat{\mathscr{H}}$ o Hamiltoniano nas novas coordenadas:

$$\widehat{\mathscr{H}}(Q,\, P) \;=\; \mathscr{H}\big(q(Q,\, P),\, p(Q,\, P)\big)\;.$$

A pergunta que nos colocamos é: sob quais condições as equações de movimento do sistema mecânico possuem, quando expressas nas novas coordenadas, a forma Hamiltoniana

$$\dot{Y}(t) \;=\; J\left(\nabla_Y \widehat{\mathscr{H}}\right)\big(Y(t)\big)\;,$$

ou, mais explicitamente, $\dot{Q}^i(t) = \frac{\partial \widehat{\mathscr{H}}}{\partial P_i}$ e $\dot{P}_i(t) = -\frac{\partial \widehat{\mathscr{H}}}{\partial Q^i}$, $i \,=\, 1,\,\ldots,\,n$?

Note-se que, ao colocarmos essa questão, não estamos a perguntar quando as equações dinâmicas permanecem invariantes, mas sim quando elas descrevem um <u>novo</u> sistema Hamiltoniano.

Transformações de coordenadas no espaço de fase que satisfaçam essas condições são denominadas *transformações canônicas*. Uma transformação canônica representa um certo tipo de transformação de simetria onde o caráter Hamiltoniano da evolução é preservado.

Vamos procurar saber quando transformações de coordenadas no espaço de fase são canônicas. Pela regra da cadeia, sabemos que

$$\dot{X}_i \;=\; \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial X^i}{\partial Y^j}\,\dot{Y}_j\;. \tag{45.291}$$

Fazendo uso da matriz Jacobiana e de (45.290), temos, portanto, $\dot{X} = \mathcal{J}^{-1}\dot{Y}$ e $\nabla_X \mathscr{H} = \mathcal{J}^T \nabla_Y \widehat{\mathscr{H}}$. Verifique! Assim, as equações de Hamilton (45.287) implicam

$$\dot{Y} \;=\; \mathcal{J} J \mathcal{J}^T \left(\nabla_Y \widehat{\mathscr{H}}\right)\;,$$

donde se conclui que uma condição necessária e suficiente para que as equações dinâmicas nas novas variáveis sejam Hamiltonianas é que a matriz Jacobiana $\mathcal{J}$ da transformação $X \to Y$ satisfaça

$$\mathcal{J} J \mathcal{J}^T \;=\; J\;. \tag{45.292}$$

<u>*Nota*</u>. Uma matriz $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{R},\,2n)$ é dita ser uma *matriz simplética* se satisfizer $AJA^T = J$. Uma tal matriz preserva a forma simplética definida por J. Vide página 3.1.1 e Lema 3.2, página 289. Transformações canônicas em espaços de fase são modernamente denominadas *simplectomorfismos* na literatura matemática.

As matrizes simpléticas reais $2n \times 2n$ compõem um grupo, denominado *grupo simplético* e denotado por $\mathrm{Sp}(2n,\,\mathbb{R})$. O grupo simplético é estudado na Seção 21.3.3.3, página 1117, e na Seção 21.9, página 1209. ♣

E. 45.34 <u>*Exercício*</u>. Para transformações canônicas as novas variáveis Q e P não têm necessariamente o caráter de coordenadas espaciais e momenta, respectivamente, que naturalmente associamos a elas. O seguinte exemplo é significativo: mostre que as transformações $Q^i = p_i$ e $P_i = -q^i$, $i = 1,\,\ldots,\,n$, são canônicas. ✠

• <u>O caso de transformações lineares simpléticas no espaço de fases</u>

Como ilustração, consideremos o caso de transformações lineares no espaço de fases $Y = AX$, onde $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{R},\,2n)$ é uma matriz simplética. Consideremos um sistema mecânico descrito por um vetor posição $q = \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, sendo $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ o vetor descrevendo os momentos canonicamente conjugados, sendo satisfeitos os colchetes de Poisson canônicos $\{q^i,\,p_j\} = -\delta_{ij}$, para $i,\,j \in \{1,\,\ldots,\,n\}$. Afirmamos que a transformação linear no espaço de fases

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\;, \tag{45.293}$$

com $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}(\mathbb{R},\,2n)$, com $a,\,b,\,c,\,d \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{R},\,n)$, satisfazendo (21.54)–(21.59), página 1120, preserva os

colchetes de Poisson canônicos. De fato, $Q = aq + bp$ e $P = cq + dp$ e, em termos de suas componentes,

$$\{Q^i,\ P_j\} \ = \ \left\{\sum_{k=1}^{n}\big(a_{ik}q^k + b_{ik}p_k\big),\ \sum_{l=1}^{n}\big(c_{jl}q^l + d_{jl}p_l\big)\right\} \ = \ \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}d_{jl}\{q^k,\ p_l\} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_{ik}c_{jl}\{p_k,\ q^l\}$$

$$= \ -\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\big(a_{ik}d_{jl} - b_{ik}c_{jl}\big)\delta_{kl} \ = \ -\sum_{k=1}^{n}\big(a_{ik}d_{jk} - b_{ik}c_{jk}\big) \ = \ -\Big(\big(ad^T\big) - \big(bc^T\big)\Big)_{ij} \overset{(21.59)}{=} -\big(\mathbb{1}_n\big)_{ij} \ = \ -\delta_{ij}\ .$$

A preservação dos colchetes de Poisson por transformações canônicas será estabelecida com mais generalidade, não apenas para transformações lineares, na Proposição 45.4, logo adiante.

• **Transformações canônicas dependentes do tempo**

Comentamos aqui sem maiores detalhes que a condição (45.292) é também válida no caso de transformações canônicas dependentes do tempo. Não apresentaremos a demonstração dessa afirmação na presente versão destas Notas e remetemos o estudante à literatura básica listada às páginas 2554 ou 2604.

• **Transformações canônicas e colchetes de Poisson**

Uma característica importante de transformações canônicas é preservar colchetes de Poisson. Isso é o conteúdo da seguinte proposição:

Proposição 45.4 *Sejam $f(q,\,p)$ e $g(q,\,p)$ duas funções diferenciáveis definidas no espaço de fase. Seja uma transformação de coordenadas diferenciável $X \equiv (q,\ p) \to (Q,\ P) \equiv Y$ no espaço de fases. Defina-se $\hat{f}(Q,\,P) := f\big(q(Q,\,P),\ p(Q,\,P)\big)$ e $\hat{g}(Q,\,P) := g\big(q(Q,\,P),\ p(Q,\,P)\big)$, que representam as funções f e g, respectivamente, nas novas coordenadas. Então, se a transformação $X \to Y$ for canônica, vale*

$$\big\{\hat{f},\,\hat{g}\big\}_Y \ = \ \big\{f,\,g\big\}_X\ . \tag{45.294}$$

Em palavras, isso diz que os colchetes de Poisson são preservados por transformações canônicas. □

Logo abaixo trataremos de uma recíproca da afirmação acima.

Prova da Proposição 45.4. Por (45.288) temos

$$\big\{f,\,g\big\}_X \ = \ -\Big(\nabla_X f\Big)^T J\Big(\nabla_X g\Big) \overset{(45.290)}{=} -\Big(\mathcal{J}^T\nabla_Y\hat{f}\Big)^T J\Big(\mathcal{J}^T\nabla_Y\hat{g}\Big) \ = \ -\Big(\nabla_Y\hat{f}\Big)^T \mathcal{J}J\mathcal{J}^T\Big(\nabla_Y\hat{g}\Big)$$

$$\overset{(45.292)}{=} -\Big(\nabla_Y\hat{f}\Big)^T J\Big(\nabla_Y\hat{g}\Big) \ = \ \big\{\hat{f},\,\hat{g}\big\}_Y\ ,$$

completando a prova. ■

A seguinte proposição é de importância fundamental no estudo das transformações canônicas e suas consequências:

Proposição 45.5 *Uma transformação de coordenadas diferenciável $(q,\ p) \to (Q,\ P)$ no espaço de fases é uma transformação canônica se e somente se valerem*

$$\big\{Q^i,\ Q^j\big\}_X \ = \ 0, \qquad \big\{P_i,\ P_j\big\}_X \ = \ 0 \quad e \quad \big\{P_i,\ Q^j\big\}_X \ = \ \delta_{ij}\ , \tag{45.295}$$

para todos $i,\ j \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, ou seja, se e somente se ela preservar os colchetes de Poisson (no sistema de coordenadas X!) de posições e momentos generalizados. □

Nota. Observemos que, pela definição dos colchetes de Poisson, é evidente que

$$\big\{Q^i,\ Q^j\big\}_Y \ = \ 0, \qquad \big\{P_i,\ P_j\big\}_Y \ = \ 0 \quad \text{e} \quad \big\{P_i,\ Q^j\big\}_Y \ = \ \delta_{ij}\ . \tag{45.296}$$

Essas relações não devem ser confundidos com (45.295). Na notação compacta de (45.289), as relações (45.296) se escrevem como

$$\big\{Y^a,\, Y^b\big\}_Y \;=\; -J_{ab}\;, \qquad a,\, b\in\{1,\,\ldots,\,2n\}\;. \tag{45.297}$$

Com essa notação, as relações (45.295) equivalem, porém, à relação não evidente $\big\{Y^a,\, Y^b\big\}_X = -J_{ab}$, para todos $a,\, b\in\{1,\,\ldots,\,2n\}$. ♣

Prova da Proposição 45.5. Temos que $\hat{Y}_a = Y^a$ para todo $a\in\{1,\,\ldots,\,2n\}$. Logo, se a transformação for canônica, a Proposição 45.4 garante que

$$-J_{ab} \overset{(45.297)}{=} \big\{Y^a,\, Y^b\big\}_Y \;=\; \big\{\hat{Y}_a,\, \hat{Y}_b\big\}_Y \overset{(45.294)}{=} \big\{Y^a,\, Y^b\big\}_X\;,$$

o que equivale a provar (45.295).

Vamos agora supor válidas as relações (45.295). Na notação compacta de (45.289), isso significa que supomos $\big\{Y^a,\, Y^b\big\}_X \;=\; -J_{ab}$ para todos $a,\, b\in\{1,\,\ldots,\,2n\}$. Sabemos que, de modo geral, vale

$$\big\{f,\, g\big\}_X = -\Big(\nabla_X f\Big)^T J\Big(\nabla_X g\Big) = -\Big(\mathcal{J}^T\nabla_Y \hat{f}\Big)^T J\Big(\mathcal{J}^T\nabla_Y \hat{g}\Big) = -\Big(\nabla_Y \hat{f}\Big)^T\Big(\mathcal{J}J\mathcal{J}^T\Big)\Big(\nabla_Y \hat{g}\Big)\;.$$

Assim, para todos $a,\, b\in\{1,\,\ldots,\,2n\}$ vale

$$-J_{ab} \;=\; =\; \big\{Y^a,\, Y^b\big\}_X \;=\; -\Big(\nabla_Y Y^a\Big)^T\Big(\mathcal{J}J\mathcal{J}^T\Big)\Big(\nabla_Y Y^b\Big) \;=\; -\Big(\mathcal{J}J\mathcal{J}^T\Big)_{ab}\;,$$

provando que $\mathcal{J}J\mathcal{J}^T = J$ e, portanto, que a transformação é canônica, como desejávamos estabelecer. Acima, usamos o fato evidente que a i-ésima componente do vetor $\Big(\nabla_Y Y^a\Big)$ vale $\delta_{i\,,a}$. ■

• Conservação de volumes por transformações canônicas

Seja R uma região do espaço de fases, que assumimos ser compacta. Seu volume em um sistema de coordenadas $(q,\, p)$ será dado por $|R| = \int_R dq^1\cdots dq^n dp_1\cdots dp_n$. Por uma transformação de coordenadas $(q,\, p)\to(Q,\, P)$ essa região será levada bijetivamente em uma outra região R', cujo volume nas novas coordenadas será dado por

$$|R'| \;=\; \int_{R'} dQ^1\cdots dQ^n dP_1\cdots dP_n \;=\; \int_R \big|\det(\mathcal{J})\big|\, dq^1\cdots dq^n dp_1\cdots dp_n\;,$$

sendo $\mathcal{J}$, como antes, a matriz Jacobiana da transformação $(q,\, p)\to(Q,\, P)$. Se a transformação em questão for canônica, teremos $\mathcal{J}J\mathcal{J}^T = J$. Tomando-se o determinante de ambos os lados, teremos que $\det(\mathcal{J})^2 = 1$, o que implica $\big|\det(\mathcal{J})\big| = 1$. Assim, $|R'| = \int_R \big|\det(\mathcal{J})\big|\, dq^1\cdots dq^n dp_1\cdots dp_n = \int_R dq^1\cdots dq^n dp_1\cdots dp_n = |R|$.

Concluímos disso que o volume de uma região do espaço de fase permanece inalterado sob uma transformação canônica. Essa fato será relevante adiante quando discutirmos o Teorema de Liouville, à página 2657.

• Funções geratrizes de transformações canônicas

A dedução variacional das equações de Hamilton discutida na Seção 45.7.1, página 2639, permite uma abordagem das transformações canônicas a qual oferece algumas vantagens.

Como vimos, as equações de Hamilton equivalem ao princípio variacional $\delta\int_{t_1}^{t_2}\Big(\big(\sum_{i=1}^n p_i\dot{q}^i\big) - \mathscr{H}\big(q,\, p,\, t\big)\Big)\; dt = 0$. Se uma transformação canônica conduz igualmente a equações de Hamilton nas novas variáveis, devemos ter a igualdade

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i\dot{q}^i\right) - \mathscr{H}\big(q,\, p,\, t\big) \;=\; \alpha\left[\left(\sum_{i=1}^n P_i\dot{Q}^i\right) - \mathscr{H}'\big(Q,\, P,\, t\big)\right] + \frac{dF_1}{dt}\;, \tag{45.298}$$

onde α é uma constante real e F_1 uma função, em princípio arbitrária, definida no espaço de fases. Isso se justifica por implicar na equivalência dos princípios variacionais

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\left(\sum_{i=1}^n p_i\dot{q}^i\right) - \mathscr{H}\big(q,\, p,\, t\big)\right)\, dt \;=\; 0 \qquad\Leftrightarrow\qquad \delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\left(\sum_{i=1}^n P_i\dot{Q}^i\right) - \mathscr{H}'\big(Q,\, P,\, t\big)\right)\, dt \;=\; 0\;. \tag{45.299}$$

Alguns autores chegam a tomar (45.298) como a definição mesma de transformações canônicas, mas não seguimos essa lógica aqui.

A constante α em (45.298) é inócua e pode ser absorvida na definição de P, Q e $\mathscr{H}'$, de modo que, sem perda de generalidade, tomaremos $\alpha = 1$. A derivada total $\frac{dF_1}{dt}$, por sua vez, é relevante. Lembremos que um tal termo sempre pode ser incluído em (45.298) pois a variação de uma derivada total é sempre nula (pois as variações são sempre feitas de sorte a manter fixos os pontos localizados nos limites de integração, quer no espaço de fase quer no de configurações).

De forma geral, F_1 pode ser considerada como uma função dos quatro conjuntos de variáveis q, p, Q, P e eventualmente também de t. Como essas não são independentes (pois as coordenadas $(q,\ p)$ podem ser bijetivamente mapeadas nas coordenadas $(Q,\ P)$), é suficiente considerar apenas dois conjuntos de coordenadas independentes. Se tomarmos F_1 como função de q e de Q, a relação (45.298) (já com $\alpha = 1$) pode ser reescrita como

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i\right) - \mathscr{H}\big(q,\ p,\ t\big) \ = \ \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}^i\right) - \mathscr{H}'\big(Q,\ P,\ t\big) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial q^i}\dot{q}^i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial Q^i}\dot{Q}^i + \frac{\partial F_1}{\partial t} \ . \tag{45.300}$$

Supondo a validade dessa relação para todas as possíveis trajetórias do sistema mecânico considerado, concluímos que devem valer as seguintes relações:

$$\frac{\partial F_1}{\partial q^i} \ = \ p_i \ , \tag{45.301}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q^i} \ = \ -P_i \quad \text{e} \tag{45.302}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} \ = \ \mathscr{H}'\big(Q,\ P,\ t\big) - \mathscr{H}\big(q,\ p,\ t\big) \ . \tag{45.303}$$

Funções como F_1 desempenham um papel relevante no estudo de transformações canônicas e são denominadas *funções geratrizes das transformações canônicas.*

Funções geratrizes não são únicas, pois podemos modificá-las, por exemplo, alterando as variáveis das quais dependem, da forma que ilustraremos a seguir. Explorando o fato que

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}^i \ = \ \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i Q^i\right) - \sum_{i=1}^{n} \dot{P}_i Q^i \ ,$$

podemos reescrever (45.298) na forma

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i\right) - \mathscr{H}\big(q,\ p,\ t\big) \ = \ -\left(\sum_{i=1}^{n} Q^i \dot{P}_i\right) - \mathscr{H}'\big(Q,\ P,\ t\big) + \frac{dF_2}{dt} \ , \tag{45.304}$$

onde definimos

$$F_2 \ := \ F_1 + \sum_{i=1}^{n} P_i Q^i \ .$$

Agora, tomando $F_2 \equiv F_2(q,\ P,\ t)$ como função de q e de P e t, escrevemos

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i\right) - \mathscr{H}\big(q,\ p,\ t\big) \ = \ -\left(\sum_{i=1}^{n} Q^i \dot{P}_i\right) - \mathscr{H}'\big(Q,\ P,\ t\big) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial q^i}\dot{q}^i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} \ , \tag{45.305}$$

o que nos permite identificar as relações

$$\frac{\partial F_2}{\partial q^i} \ = \ p_i \ , \tag{45.306}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_i} \ = \ Q^i \quad \text{e} \tag{45.307}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} \ = \ \mathscr{H}'\big(Q,\ P,\ t\big) - \mathscr{H}\big(q,\ p,\ t\big) \ . \tag{45.308}$$

Acima, as variáveis Q e p são tomadas como funções de q e P.

Naturalmente, podemos efetuar diversas outras transformações desse tipo, obtendo funções geratrizes F_3, F_4 etc., mas, como exemplo, as funções geratrizes acima bastam.

Como veremos, uma das vantagens do uso de funções geratrizes reside no fato de que é por vezes possível identificar uma função satisfazendo as relações acima para uma dada transformação, o que nos leva à conclusão que essa transformação é canônica.

• **O funcional ação como função definida no espaço de configurações**

Na expressão (45.169), página 2608. definimos a noção de ação associada a uma curva γ que une pontos $q(t_1)$ e $q(t_2)$ em instantes de tempo distintos t_1 e t_2, respectivamente. Vamos agora explorar algumas propriedades dessa definição estudando sua dependência com relação aos pontos inicial e final quando a curva γ é uma trajetória real do sistema mecânico. Essa discussão é importante por duas razões: por nos apresentar a uma importante classe de transformações canônicas e por nos conduzir a uma equação importante, a equação de Hamilton-Jacobi, porta de entrada de mais um formalismo da Mecânica Clássica.

Sejam fixos os instantes de tempo inicial $\underline{t}$ e a posição inicial $q(\underline{t})$, que doravante denotaremos por $\underline{t}$ e $\underline{q}$, respectivamente. Denotemos também o instante final por $\overline{t}$ e a posição final por $\overline{q}$. Seja $S(\overline{q},\ \overline{t})$ a ação como função do pontos e do instante de tempo finais:

$$S(\overline{q},\ \overline{t}) \ = \ \int_{\underline{t}}^{\overline{t}} \mathscr{L}\big(q(t'),\ \dot{q}(t'),\ t'\big)\, dt' \ , \tag{45.309}$$

com a integral tomada ao longo da curva que conecta $(\underline{q},\ \underline{t})$ a $(\overline{q},\ \overline{t})$ ao longo da trajetória que minimiza a ação, ou seja, que satisfaz as equações de Euler-Lagrange.

Se fixarmos $\overline{t}$ e variarmos $\overline{q}$ de uma quantidade $\Delta\overline{q}$, a a trajetória que conecta $(\underline{q},\ \underline{t})$ a $(\overline{q}+\Delta\overline{q},\ \overline{t})$ ao longo da trajetória que minimiza a ação será alterada de $q(t')$ para $q(t')+\delta q(t')$, com $\delta q(\underline{t})=0$ e $\delta q(\overline{t})=\Delta\overline{q}$. A diferença entre as duas ações será, portanto,

$$S(\overline{q}+\Delta\overline{q},\ \overline{t}) - S(\overline{q},\ \overline{t}) \ = \ \int_{\underline{t}}^{\overline{t}} \Big[\mathscr{L}\big(q(t')+\delta q(t'),\ \dot{q}(t')+\delta\dot{q}(t'),\ t'\big) - \mathscr{L}\big(q(t'),\ \dot{q}(t'),\ t'\big)\Big]\, dt' \ .$$

Assim,

$$S(\overline{q}+\Delta\overline{q},\ \overline{t}) - S(\overline{q},\ \overline{t}) \ = \ \sum_{i=1}^{n}\int_{\underline{t}}^{\overline{t}} \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i}\delta q^i(t') + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i}\delta\dot{q}^i(t')\right] dt' + O\Big(\|\Delta\overline{q}\|^2\Big) \ .$$

Por integração por partes, teremos

$$\int_{\underline{t}}^{\overline{t}} \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i}\delta\dot{q}^i(t')\, dt' \ = \ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i}(\overline{t})\underbrace{\delta q^i(\overline{t})}_{=\Delta\overline{q}^i} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i}(\underline{t})\underbrace{\delta q^i(\underline{t})}_{=0} - \int_{\underline{t}}^{\overline{t}}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i}\right)\delta\dot{q}^i(t')\, dt' \ .$$

Definindo $\overline{p}\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i}(\overline{t})$, o momento generalizado no instante $\overline{t}$, escrevemos

$$S(\overline{q}+\Delta\overline{q},\ \overline{t}) - S(\overline{q},\ \overline{t}) \ = \ \sum_{i=1}^{n}\overline{p}_i\Delta\overline{q}^i + \sum_{i=1}^{n}\int_{\underline{t}}^{\overline{t}}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i}(t') - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^i}\right)(t')\right]\delta q^i(t')\, dt' + O\Big(\|\Delta\overline{q}\|^2\Big) \ .$$

O termo entre $[\cdots]$ anula-se sob a hipótese supracitada de que a trajetória satisfaz as equações de Euler-Lagrange. Logo, concluímos dessa análise que

$$\frac{\partial S}{\partial\overline{q}^i}(\overline{q},\ \overline{t}) \ = \ \overline{p}_i \ , \qquad i\in\{1,\ \ldots,\ n\} \ . \tag{45.310}$$

Além disso, temos também da própria definição (45.309)

$$\frac{d}{d\overline{t}}S\big(\overline{q}(\overline{t}),\ \overline{t}\big) \ = \ \mathscr{L}\big(\overline{q}(\overline{t}),\ \dot{\overline{q}}(\overline{t}),\ \overline{t}\big) \ .$$

Como

$$\frac{d}{d\overline{t}}S\big(\overline{q}(\overline{t}),\ \overline{t}\big) \ = \ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial\overline{q}^i}\big(\overline{q}(\overline{t}),\ \overline{t}\big)\dot{\overline{q}}^i(\overline{t}) + \frac{\partial S}{\partial\overline{t}}\big(\overline{q}(\overline{t}),\ \overline{t}\big) \ ,$$

concluímos que

$$\frac{\partial S}{\partial \overline{t}}(\overline{q},\ \overline{t}) \ = \ \mathscr{L}(\overline{q},\ \dot{\overline{q}},\ \overline{t}) - \sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i \dot{\overline{q}}^i \ = \ -\mathscr{H}(\overline{q},\ \overline{p},\ \overline{t}) \ . \tag{45.311}$$

• **A equação de Hamilton-Jacobi**

Obtivemos em (45.310) e em (45.311) as derivadas parciais primeiras de $S(\overline{q},\ \overline{t})$. Com uso de (45.310), a equação (45.311) fica

$$\frac{\partial S}{\partial \overline{t}}(\overline{q}^1,\ \ldots,\ \overline{q}^n,\ \overline{t}) + \mathscr{H}\left(\overline{q}^1,\ \ldots,\ \overline{q}^n,\ \frac{\partial S}{\partial \overline{q}^1}(\overline{q}^1,\ \ldots,\ \overline{q}^n,\ \overline{t}),\ \ldots,\ \frac{\partial S}{\partial \overline{q}^n}(\overline{q}^1,\ \ldots,\ \overline{q}^n,\ \overline{t}),\ \overline{t}\right) \ = \ 0 \ , \tag{45.312}$$

ou, em notação simplificada,

$$\frac{\partial S}{\partial \overline{t}}(\overline{q},\ \overline{t}) + \mathscr{H}\left(\overline{q},\ \frac{\partial S}{\partial \overline{q}}(\overline{q},\ \overline{t}),\ \overline{t}\right) \ = \ 0 \ . \tag{45.313}$$

A equação (45.312) é denominada *equação de Hamilton-Jacobi* e em torno dela nasce um novo formalismo da Mecânica denominado *formalismo de Hamilton-Jacobi*. É de se notar que (45.312) é uma equação a derivadas parciais de primeira ordem, fato relevante em seu tratamento e solução.

Para uma partícula de massa m em movimento unidimensional sob um potencial $V(x)$, seu Hamiltoniano é $\mathscr{H}(x,\ p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ e a correspondente equação de Hamilton-Jacobi é

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x,\ t) + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}(x,\ t)\right)^2 + V(x) \ . \tag{45.314}$$

(Aqui simplificamos a notação, retirando as barras sobre as coordenadas e o tempo). No caso em que $V \equiv 0$, tem-se que para cada $p \in \mathbb{R}$ a função $S(x,\ t) = -\frac{p^2}{2m}t + px + S_0$ é solução de (45.314), com S_0 sendo uma constante.

A equação de Hamilton-Jacobi, associada a ideias da Óptica Geométrica, foi fundamental para a descoberta da equação de Schrödinger[93] da Mecânica Quântica não relativística. Para um texto acessível, com referências, vide [289].

E. 45.35 *Exercício*. Seja $S(x,\ t)$ satisfazendo (45.314) e considere a função $\psi(x,\ t) := \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(x,\ t)\right)$. Mostre que, desprezando o termo $\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, a função ψ satisfaz a equação diferencial

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} \ = \ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi \ .$$

Essa é a *equação de Schrödinger* da Mecânica Quântica para o sistema em questão. ✠

• **A ação como função das coordenadas de ambos os extremos da integração que a define**

Podemos proceder de forma análoga e considerar também a dependência da ação com os pontos iniciais $\underline{t}$ e $\underline{q}$. Denotando a ação por $S(\underline{q},\ \underline{t},\ \overline{q},\ \overline{t})$ temos adicionalmente, de forma totalmente análoga ao que expusemos acima,

$$S(\underline{q} + \Delta\underline{q},\ \underline{t},\ \overline{q},\ \overline{t}) - S(\underline{q},\ \underline{t},\ \overline{q},\ \overline{t}) \ = \ \sum_{i=1}^{n}\int_{\underline{t}}^{\overline{t}}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i}\delta q^i(t') + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i(t')\right] dt' + O\Big(\|\Delta\underline{q}\|^2\Big) \ .$$

Por integração por partes, teremos

$$\int_{\underline{t}}^{\overline{t}} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i(t')\, dt' \ = \ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}(\overline{t})\underbrace{\delta q^i(\overline{t})}_{=0} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}(\underline{t})\underbrace{\delta q^i(\underline{t})}_{=\Delta\underline{q}^i} - \int_{\underline{t}}^{\overline{t}}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i(t')\, dt' \ .$$

Definindo $\underline{p} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}(\underline{t})$, o momento generalizado no instante $\overline{t}$, escrevemos

$$S(\overline{q} + \Delta\underline{q},\ \overline{t}) - S(\overline{q},\ \overline{t}) \ = \ -\sum_{i=1}^{n}\underline{p}_i\Delta\underline{q}^i + \sum_{i=1}^{n}\int_{\underline{t}}^{\overline{t}}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i}(t') - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}\right)(t')\right]\delta q^i(t')\ dt' + O\Big(\|\Delta\overline{q}\|^2\Big) \ .$$

[93] Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887–1961).

O termo entre $[\cdots]$ anula-se sob a hipótese supracitada de que a trajetória satisfaz as equações de Euler-Lagrange. Dessa forma, concluímos que

$$\frac{\partial S}{\partial \underline{q}^i}\big(\underline{q},\, \underline{t},\, \overline{q},\, \overline{t}\big) \;=\; \underline{p}_i\;, \qquad i\in\{1,\,\ldots,\,n\}\;. \tag{45.315}$$

Para a derivada temporal porém, há uma outra diferença de sinal, pois dependência da integral que define a ação em $\underline{t}$ está no limite inferior de integração. Portanto,

$$\frac{d}{d\underline{t}}S\big(\underline{q}(\underline{t}),\, \underline{t},\, \overline{q},\, \overline{t}\big) \;=\; -\mathscr{L}\big(\underline{q},\, \dot{\underline{q}},\, \underline{t}\big)\;.$$

Como

$$\frac{d}{d\underline{t}}S\big(\underline{q}(\underline{t}),\, \underline{t},\, \overline{q},\, \overline{t}\big) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial \underline{q}^i}\big(\underline{q}(\underline{t}),\, \underline{t},\, \overline{q},\, \overline{t}\big)\dot{\underline{q}}^i(\underline{t}) + \frac{\partial S}{\partial \underline{t}}\big(\underline{q}(\underline{t}),\, \underline{t},\, \overline{q},\, \overline{t}\big)\;,$$

concluímos que

$$\frac{\partial S}{\partial \underline{t}}\big(\underline{q},\, \underline{t},\, \overline{q},\, \overline{t}\big) \;=\; -\mathscr{L}\big(\underline{q},\, \dot{\underline{q}},\, \underline{t}\big) + \sum_{i=1}^{n}\underline{p}_i\dot{\underline{q}}^i \;=\; \mathscr{H}\big(\underline{q},\, \underline{p},\, \underline{t}\big)\;. \tag{45.316}$$

Vamos agora escrever $\underline{t}=t$ e $\overline{t}=\tau+t$, definindo duas novas variáveis temporais $t\equiv\underline{t}$ e $\tau =\equiv \overline{t}-\underline{t}$. A ação fica $S\big(\underline{q}(t),\, t,\, \overline{q}(\tau+t),\, \tau+t\big)$ e valerá:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}S\big(\underline{q}(t),\, t,\, \overline{q}(\tau+t),\, \tau+t\big) \;&=\; \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial \underline{q}^i}\big(\underline{q}(t),\, t,\, \overline{q}(\tau+t),\, \tau+t\big)\dot{\underline{q}}^i(t) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial \overline{q}^i}\big(\underline{q}(t),\, t,\, \overline{q}(\tau+t),\, \tau+t\big)\dot{\overline{q}}^i(t+\tau)\\
&\quad + \frac{\partial S}{\partial \underline{t}}\big(\underline{q}(t),\, t,\, \overline{q}(\tau+t),\, \tau+t\big) + \frac{\partial S}{\partial \overline{t}}\big(\underline{q}(t),\, t,\, \overline{q}(\tau+t),\, \tau+t\big)\\
&=\; \sum_{i=1}^{n}\Big(\underline{p}_i(t)\dot{\underline{q}}^i(t) - \overline{p}_i(t)\dot{\overline{q}}^i(t)\Big) + \mathscr{H}\big(\underline{q}(t),\, \underline{p}(t),\, t\big) - \mathscr{H}\big(\overline{q}(\tau+t),\, \overline{p}(\tau+t),\, \tau+t\big)\;.
\end{aligned}$$

Segue disso que

$$\frac{\partial S}{\partial \underline{q}^i} \;=\; \underline{p}_i(t)\;, \qquad \frac{\partial S}{\partial \overline{q}^i} \;=\; -\overline{p}_i(t+\tau)\;, \qquad i\in\{1,\,\ldots,\,n\}\;,$$

e

$$\frac{\partial S}{\partial t} \;=\; \mathscr{H}\big(\underline{q}(t),\, \underline{p}(t),\, t\big) - \mathscr{H}\big(\overline{q}(\tau+t),\, \overline{p}(\tau+t),\, \tau+t\big)\;.$$

Note-se, porém, que se o Lagrangiano não depender explicitamente do tempo, a conservação do Hamiltoniano implica que $\mathscr{H}\big(\underline{q}(t),\, \underline{p}(t),\, t\big) = \mathscr{H}\big(\overline{q}(\tau+t),\, \overline{p}(\tau+t),\, \tau+t\big)$. Nesse caso, portanto, teremos

$$\frac{\partial S}{\partial \underline{q}^i} \;=\; \underline{p}_i(t)\;, \qquad \frac{\partial S}{\partial \overline{q}^i} \;=\; -\overline{p}_i(t+\tau)\;, \qquad i\in\{1,\,\ldots,\,n\}\;, \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial t} \;=\; 0\;.$$

Comparando cuidadosamente essa expressão a (45.300) e (45.301)-(45.303), concluímos que, no caso em que o Lagrangiano não depende explicitamente do tempo, a ação S é a função geratriz de uma transformação canônica entre as variáveis $\big(\underline{q},\, \underline{p}\big)$ e as variáveis $\big(\overline{q}_\tau,\, \overline{p}_\tau\big)$ — as coordenadas $\big(\underline{q},\, \underline{p}\big)$ evoluídas de um tempo $\tau>0$ (aqui $\tau>0$, pois $\underline{t}<\overline{t}$). Concluímos disso que a evolução temporal de um sistema Hamiltoniano é uma transformação canônica. A consequência mais importante dessa revelação é o Teorema de Liouville, o qual discutiremos a seguir.

** ** **

Comentemos antes que a afirmação que fizemos acima pode ser demonstrada de forma mais rápida, ainda que carente de rigor, da seguinte forma.

Para $\tau > 0$ fixo, defina-se $Q^i = q^i\big(\tau,\ q_0,\ p_0\big)$ e $P_i = p_i\big(\tau,\ q_0,\ p_0\big)$, onde q_0 e p_0 são condições iniciais em $t = 0$ da evolução de um sistema mecânico. Na notação compacta $Y^a = X^a\big(\tau,\ X_0\big)$, $a \in \{1,\ \ldots,\ 2n\}$. Temos,

$$\big\{Y^a,\ Y^b\big\}_X(\tau) \ = \ \underbrace{\big\{Y^a,\ Y^b\big\}_X(0)}_{=-J_{ab}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \underbrace{\Big\{\mathscr{H},\ \Big\{\mathscr{H},\ \cdots \Big\{\mathscr{H},}_{n \text{ vezes}}\ \big\{Y^a,\ Y^b\big\}_X \Big\}_X \cdots \Big\}_X \Big\}_X(0)\ . \tag{45.317}$$

Sucede que $\big\{Y^a,\ Y^b\big\}_X(0)$ é constante e igual a $-J_{ab}$. Assim, seus colchetes de Poisson com $\mathscr{H}$ são nulos e, portanto, apenas o primeiro termo acima sobrevive, fornecendo $\big\{Y^a,\ Y^b\big\}_X(\tau) = -J_{ab}$. Logo, pela Proposição 45.5, a transformação $(q_0,\ p_0) \to \Big(q\big(\tau,\ q_0,\ p_0\big),\ p\big(\tau,\ q_0,\ p_0\big)\Big)$ é canônica para todo τ.

O problema matemático com essa demonstração gira em torno da convergência no caso geral da série em (45.317), cujas condições não foram estabelecidas aqui.

• **O Teorema de Liouville**

Consideremos um sistema mecânico cujo Lagrangiano não depende explicitamente do tempo (e, portanto, o Hamiltoniano também não). Seja $\mathcal{R}$ uma região de volume finito $|\mathcal{R}|$ do espaço de fases em um instante de tempo $t = 0$: $|\mathcal{R}| = \int_{\mathcal{R}} d^n q\, d^n p$. Após um intervalo de tempo τ, os pontos de $\mathcal{R}$ evoluirão a um novo conjunto $\mathcal{R}_\tau$ do espaço de fases. Como a evolução temporal induz uma transformação canônica, concluímos da nossa discussão da página 2652 (que volumes no espaço de fase são conservados por transformações canônicas) que $|\mathcal{R}| = |\mathcal{R}_\tau|$, ou seja: *em sistemas mecânicos com um número finito de graus de liberdade em que o Lagrangiano (e, portanto, o Hamiltoniano) não depende explicitamente do tempo a evolução temporal preserva volumes no espaço de fases.*

Essa afirmação é conhecida como *Teorema de Liouville*[94] e desempenha um papel importante no estudo de propriedades qualitativas de sistemas Hamiltonianos, tais como a ergodicidade, caos, estabilidade etc.

[94] Joseph Liouville (1809–1882).

45.8 Exercícios Adicionais

E. 45.36 *Exercício*. Considere o Hamiltoniano do oscilador harmônico simples unidimensional $\mathscr{H}(q,\ p) = \frac{\mu_1}{2}p^2 + \frac{\mu_2}{2}q^2$, com $\mu_1 = 1/m$ e $\mu_2 = k$, como usual. Usando (45.285), vamos determinar a trajetória $q(t)$ a partir de condições iniciais $(q_0,\ p_0)$, fixadas em $t_0 = 0$.

Mostre que $\{\mathscr{H}, q\} = \mu_1 p$ e que $\{\mathscr{H}, p\} = -\mu_2 q$. Com isso, mostre por indução que

$$\underbrace{\Big\{\mathscr{H},\ \Big\{\mathscr{H},\ \cdots\Big\{\mathscr{H},}_{n \text{ vezes}}\ q\Big\}\cdots\Big\}\Big\} = \begin{cases} \mu_1\big(-\mu_1\mu_2\big)^{(n-1)/2}p\ , & \text{para } n \geq 1, \text{ ímpar}\ , \\ \big(-\mu_1\mu_2\big)^{n/2}q\ , & \text{para } n \geq 2, \text{ par}\ . \end{cases}$$

Conclua de (45.285), escrevendo os termos com n par na forma $n = 2j$ e os termos com n par na forma $n = 2j-1$, com $j \in \mathbb{N}$ em ambos os casos, que temos

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 + \left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^{2j}}{(2j)!}\big(-\mu_1\mu_2\big)^j\right)q_0 + \left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^{2j-1}}{(2j-1)!}\big(-\mu_1\mu_2\big)^{j-1}\right)\mu_1 p_0 \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\big(\sqrt{\mu_1\mu_2}t\big)^{2j}}{(2j)!}\right)q_0 + \left(\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{\big(\sqrt{\mu_1\mu_2}t\big)^{2l+1}}{(2l+1)!}\right)\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}p_0 \\ &= \cos\Big(\sqrt{\mu_1\mu_2}t\Big)q_0 + \operatorname{sen}\Big(\sqrt{\mu_1\mu_2}t\Big)\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}p_0 \end{aligned}$$

Acima, na segunda igualdade, o termo q_0 foi absorvido na primeira somatória (que passa a começar com $j = 0$) e na segunda somatória fizemos a mudança de variáveis $l = j-1$. Portanto, obtivemos

$$q(t) = \cos\big(\omega_0 t\big)q_0 + \operatorname{sen}\big(\omega_0 t\big)\frac{p_0}{m\omega_0}\ ,$$

onde $\omega_0 := \sqrt{\mu_1\mu_2} = \sqrt{\frac{k}{m}}$, recuperando a bem conhecida solução do oscilador harmônico simples unidimensional. ✠

E. 45.37 *Exercício*. Considere-se o Hamiltoniano $\mathscr{H}(q,\ p) = \mu q^a p^b$, com $q,\ p \in \mathbb{R}$, com $a,\ b \in \mathbb{N}_0$ e com μ sendo uma constante real. Vamos determinar a trajetória $q(t)$ a partir de condições iniciais $(q_0,\ p_0)$, fixadas em $t_0 = 0$, usando (45.285). Mostre que

$$\{\mathscr{H},\ q\} = \mu b q^a p^{b-1} \tag{45.318}$$

e mostre por indução que para todo $n \geq 2$ vale

$$\underbrace{\Big\{\mathscr{H},\ \Big\{\mathscr{H},\ \cdots\Big\{\mathscr{H},}_{n \text{ vezes}}\ q\Big\}\cdots\Big\}\Big\} = \mu^n b\left[\prod_{k=0}^{n-2}\big(a + k(a-b)\big)\right]q^{n(a-1)+1}p^{n(b-1)}\ . \tag{45.319}$$

Para prosseguirmos deste ponto, há dois casos a se considerar: $a \neq b$ e $a = b$.

I. Caso $a \neq b$. No caso em que $a \neq b$, mostre que podemos escrever

$$\prod_{k=0}^{n-2}\big(a + k(a-b)\big) = (a-b)^{n-1}\prod_{k=0}^{n-2}\big(\alpha + 1 + k\big) = (a-b)^{n-1}\frac{(\alpha)_n}{\alpha}\ ,$$

com $\alpha := b/(a-b)$, de sorte que $\alpha + 1 = a/(a-b)$. Acima, $(x)_n$ são os *símbolos de Pochhammer*, definidos em (15.148), página 844. Assim, para $n \geq 2$ temos

$$\begin{aligned} \underbrace{\Big\{\mathscr{H},\ \Big\{\mathscr{H},\ \cdots\Big\{\mathscr{H},}_{n \text{ vezes}}\ q\Big\}\cdots\Big\}\Big\} &= \mu^n b(a-b)^{n-1}\frac{(\alpha)_n}{\alpha}q^{n(a-1)+1}p^{n(b-1)} \\ &= q\,(\alpha)_n\Big(\mu(a-b)q^{a-1}p^{b-1}\Big)^n\ , \end{aligned} \tag{45.320}$$

sendo que usamos $\frac{b}{(a-b)(\alpha)} = 1$. Constate, comparando com (45.318), que (45.320) é também válida para $n = 1$ e obtenha

$$q(t) \;=\; q_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} \Big(t\mu(a-b) q_0^{a-1} p_0^{b-1} \Big)^n \right] , \tag{45.321}$$

sendo a expansão em série de potências acima absolutamente convergente na região $\big| t\mu(a-b) q_0^{a-1} p_0^{b-1} \big| < 1$. Identificando com a expansão binomial na forma (15.169), página 853, obtemos, finalmente, a solução

$$q(t) \;=\; q_0 \Big(1 - t/T_0 \Big)^{-\alpha} , \tag{45.322}$$

onde $T_0 := 1/\Big(\mu(a-b) q_0^{a-1} p_0^{b-1} \Big)$, ao menos na região $\big| t/T_0 \big| < 1$. Caso $\alpha \leq 0$ a solução (45.322) pode ser estendida para todo t real. Caso $\alpha > 0$ a solução é singular em $t = T_0$. Assim, se $T_0 > 0$ a solução $q(t)$ será limitada a um intervalo $[0,\, T_0)$, a partir do instante 0, onde foi fixada a condição inicial. Se $T_0 < 0$ a solução acima para pode ser estendida a todo $\mathbb{R}_+$. Os seguintes casos particulares ilustram essas situações.

A. Caso $a = 2$ e $b = 1$ (o que corresponde a $\mathscr{H} = \mu q^2 p$), teremos $\alpha = 1$ e $T_0 = 1/(\mu q_0)$. Assim,

$$q(t) \;=\; q_0 \big(1 - t\mu q_0 \big)^{-1} ,$$

sendo essa igualdade limitada à região $|t\mu q_0| < 1$. Caso $q_0 > 0$, a solução é limitada ao intervalo $\big[0,\; 1/(\mu q_0)\big)$ e diverge para $t = 1/(\mu q_0)$. Isso exibe uma situação na qual a solução provida pela série (45.285) tem sua validade limitada no tempo.

B. Caso $a = 0$ e $b = 2$ (o que corresponde a $\mathscr{H} = \mu p^2$, o Hamiltoniano de um ponto material de massa $1/(2\mu)$ se movendo livremente em uma dimensão), teremos $\alpha = -1$ e $T_0 = -1/\big(2\mu q_0^{-1} p_0\big)$. Assim,

$$q(t) \;=\; q_0 \big(1 - t/T_0 \big) \;=\; q_0 + 2t\mu p_0 ,$$

que corresponde ao bem conhecido movimento retilíneo uniforme unidimensional de um ponto material livre, de massa $1/(2\mu)$. Naturalmente, a solução pode ser estendida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Retornemos agora a (45.319) para tratar do caso faltante $a = b$.

II. Caso $a = b$. No caso em que $a = b$, podemos escrever o lado direito de (45.319) como

$$\underbrace{\Big\{ \mathscr{H},\, \Big\{ \mathscr{H},\, \cdots \Big\{ \mathscr{H},}_{n \text{ vezes}}\, q \Big\} \cdots \Big\} \Big\}} \;=\; \mu^n a^n q^{n(a-1)+1} p^{n(a-1)} ,$$

para $n \geq 2$. Logo,

$$q(t) \;=\; q_0 + t\mu a q_0^a p_0^{a-1} + q_0 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Big(t\mu a (q_0 p_0)^{a-1} \Big)^n}{n!} , \qquad \text{ou seja,} \qquad q(t) \;=\; q_0 \exp\Big(t\mu a (q_0 p_0)^{a-1} \Big) . \tag{45.323}$$

Essa solução é válida para todo t. Vale observar que ela pode ser obtida de (45.322), tomando-se o limite $|a - b| \to 0$. Mostre isso! ✠

E. 45.38 *Exercício*. Sob as condições do Exercício E. 45.37, e seguindo passos similares, obtenha $p(t)$. O resultado é

$$p(t) \;=\; p_0 \Big(1 - t/T_0 \Big)^{\alpha+1} , \quad \text{para } a \neq b \text{ e} \quad p(t) \;=\; p_0 \exp\Big(-t\mu a (q_0 p_0)^{a-1} \Big) \quad \text{para } a = b .$$

Verifique que as equações de Hamilton são satisfeitas para tais funções $q(t)$ e $p(t)$. ✠

Apêndices

45.A Mais Algumas Consequências da Proposição 45.1

As expressões (45.13) e (45.14), página 2559, fornecem R_t em termos de uma série de Dyson envolvendo a função $\vec{\omega}_t$. O mesmo pode ser feito com a função $\vec{\Omega}_t$, como indicaremos a seguir.

Seja $\mathbb{R} \ni t \mapsto \vec{\alpha}_t \in \mathbb{R}^3$ uma função contínua. Considere-se as matrizes antissimétricas $\vec{\alpha}_t \cdot \vec{\mathsf{J}}$ e considere-se a série de Dyson (vide (14.10), página 725)

$$D(t,\ s;\ \vec{\alpha}) \ := \ \mathbb{1}_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t \int_s^{t_1} \cdots \int_s^{t_{n-1}} \Big(\vec{\alpha}_{t_1} \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)\Big(\vec{\alpha}_{t_2} \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big) \cdots \Big(\vec{\alpha}_{t_n} \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)\, dt_n dt_{n-1} \cdots dt_1 \ .$$

Defina-se também

$$D\big(t;\ \vec{\alpha}\big) \ := \ D\big(t,\ 0;\ \vec{\alpha}\big) \ := \ \mathbb{1}_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} \Big(\vec{\alpha}_{t_1} \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)\Big(\vec{\alpha}_{t_2} \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big) \cdots \Big(\vec{\alpha}_{t_n} \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)\, dt_n dt_{n-1} \cdots dt_1 \ .$$

Sabemos de (14.13), página 726 e (14.15), página 727, que

$$\frac{\partial}{\partial t} D\big(t,\ s;\ \vec{\alpha}\big) \ = \ \Big(\vec{\alpha}_t \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big) D\big(t,\ s;\ \vec{\alpha}\big) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial s} D\big(t,\ s;\ \vec{\alpha}\big) \ = \ -D\big(t,\ s;\ \vec{\alpha}\big)\Big(\vec{\alpha}_s \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big) \tag{45.A.1}$$

e sabemos ainda de (14.21), página 731, que

$$D\big(t,\ s;\ \vec{\alpha}\big) \ = \ D\big(t;\ \vec{\alpha}\big) D\big(s;\ \vec{\alpha}\big)^{-1}$$

e sabemos do Corolário 14.1, página 731, que $D\big(t,\ s;\ \vec{\alpha}\big)$ e $D\big(t;\ \vec{\alpha}\big)$ são matrizes ortogonais.

Vemos, com isso, que a relação (45.31), página 2563, implica que

$$R_t \ = \ D\big(t,\ s;\ \vec{\omega}\big) R_s \quad \text{ e, em particular, } \quad R_t \ = \ D\big(t;\ \vec{\omega}\big) R_0 \ .$$

Por outro lado, a relação (45.32), página 2563, implica que

$$R_t \ = \ R_s D\big(s,\ t;\ -\vec{\Omega}\big) \ .$$

De fato, diferenciando o lado direito em relação a t, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(R_s D\big(s,\ t;\ -\vec{\Omega}\big)\Big) \overset{(45.A.1)}{=} -R_s D\big(s,\ t;\ -\vec{\Omega}\big)\big(-\vec{\Omega}_t \cdot \vec{\mathsf{J}}\big) \ = \ R_s D\big(s,\ t;\ -\vec{\Omega}\big)\Big(\vec{\Omega}_t \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big) \ ,$$

Provando que $R_s D\big(s,\ t;\ -\vec{\Omega}\big)$ satisfaz a equação diferencial (45.32) e a condição inicial de valer R_s para $t = s$. Em particular, isso estabeleceu que

$$R_t \ = \ R_0 D\big(0,\ t;\ -\vec{\Omega}\big) \ .$$

Observe-se agora que, por (14.22) do Corolário 14.1, página 731,

$$D\big(0,\ t;\ -\vec{\Omega}\big) \overset{(14.22)}{=} D\big(t,\ 0;\ -\vec{\Omega}\big)^{-1} \ = \ D\big(t;\ -\vec{\Omega}\big)^{-1} \overset{(14.25)}{=}$$

$$\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} \Big(\vec{\Omega}_{t_n} \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big) \cdots \Big(\vec{\Omega}_{t_2} \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big)\Big(\vec{\Omega}_{t_1} \cdot \vec{\mathsf{J}}\Big) \cdots \ dt_n dt_{n-1} \cdots dt_1 \ .$$

Resumindo, temos

$$R_t \ = \ R_0 D\big(t;\ -\vec{\Omega}\big)^{-1} \ = \ D\big(t;\ \vec{\omega}\big) R_0$$

e concluímos também que

$$D\big(t;\ \vec{\omega}\big) \ = \ R_0 D\big(t;\ -\vec{\Omega}\big)^{-1} R_0^{-1} \ ,$$

relacionando as duas séries de Dyson.

45.B Um Lema Útil Sobre Funções Contínuas

Em diversas situações fazemos uso do seguinte lema:

Lema 45.1 (Lema Fundamental do Cálculo de Variações) *Para $-\infty < a < b < \infty$, seja $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f satisfaz $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$ para toda função contínua $g : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ com $g(a) = g(b) = 0$, então f é identicamente nula.* □

Comentário. Fica claro pela demonstração que as funções g podem ser restritas às funções continuas e continuamente diferenciáveis ou mesmo às funções infinitamente diferenciáveis. Para outras generalizações aplicáveis também a Cálculo de Variações, vide [109, 110]. ♣

Prova do Lema 45.1. Se f não for identicamente nula, certamente haverá $t_0 \in (a,\ b)$ com $f(t_0) \neq 0$. Se, por exemplo, $f(a)$ (ou $f(b)$) for não nula, haverá, devido à continuidade, um ponto $t_0 \in (a,\ b)$ próximo a a (ou a b) onde $f(t_0) \neq 0$.

Sem perda de generalidade, podemos supor $f(t_0) > 0$ (se $f(t_0) < 0$, basta trocarmos f por $-f$ e o argumento segue analogamente). Por continuidade, isso implica que há uma vizinhança de t_0 onde f é positiva. Mais que isso, a continuidade garante-nos também a seguinte afirmação: para um α satisfazendo $0 < \alpha < f(t_0)$ existe um intervalo $I = [t_0 - \beta,\ t_0 + \beta] \subset (a,\ b)$, com $\beta > 0$, tal que $f(t) > \alpha$ para todo $t \in I$.

Considere-se, o intervalo $I' = [t_0 - \beta/2,\ t_0 + \beta/2] \subset I$ e considere-se $g : [a,\ b] \to \mathbb{R}$, contínua, definida da seguinte forma:

$$g(t) \ = \ \begin{cases} 1\ , & \text{em } I'\ , \\ 0\ , & \text{fora de } I\ , \\ \frac{2}{\beta}\big((t_0+\beta)-t\big)\ , & \text{para } t \in [t_0+\beta/2,\ t_0+\beta]\ , \\ \frac{2}{\beta}\big(t-(t_0-\beta)\big)\ , & \text{para } t \in [t_0-\beta,\ t_0-\beta/2]\ . \end{cases} \tag{45.B.2}$$

Vide Figura 45.B.7, página 2662. Para essa função g e pelas hipóteses, temos

$$0 \ = \ \int_a^b f(t)g(t)\,dt \ = \ \int_{t_0-\beta}^{t_0+\beta} f(t)g(t)\,dt \ > \ \int_{t_0-\beta/2}^{t_0+\beta/2} f(t)g(t)\,dt \ = \ \int_{t_0-\beta/2}^{t_0+\beta/2} f(t)\,dt \ > \ \alpha\beta\ ,$$

o que é uma contradição, trazendo como implicação que f deve ser identicamente nula. Na primeira igualdade, acima, usamos o fato de g ser nula fora de $I = [t_0 - \beta,\ t_0 + \beta]$. Na desigualdade a seguir, usamos o fato de ambas f e g serem positivas em I e $I' \subset I$. Na igualdade a seguir usamos o fato de g valer 1 em I' e na última desigualdade usamos o fato de $f(t) > \alpha$ em $I' \subset I$ e de o intervalo I' ter largura $\beta > 0$. ■

Corolário 45.2 *Para $-\infty < a < b < \infty$ e $N \in \mathbb{N}$, seja $\mathbf{f} : [a,\ b] \to \mathbb{R}^N$ contínua. Se $\mathbf{f}$ satisfaz $\int_a^b \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t)dt = 0$ para toda função contínua $\mathbf{g} : [a,\ b] \to \mathbb{R}^N$ com $\mathbf{g}(a) = \mathbf{g}(b) = 0$, então $\mathbf{f}$ é identicamente nula.* □

Prova. Escolhamos funções $\mathbf{g}$, como no enunciado, tal que todas as suas componentes sejam nulas, exceto a i-ésima. Concluiríamos que $\int_a^b f_i(t)g_i(t)dt = 0$. O Lema 45.1, página 2661, implicaria que a componente f_i é identicamente nula. Como o índice i foi escolhido arbitrariamente, concluímos que $\mathbf{f}$ é identicamente nula. ■

Comentário. Outros argumentos podem ser empregados na prova do Lema 45.1 e do Corolário 45.2. Por exemplo, como as funções contínuas são densas em $L^2\big([a,\ b],\ dt\big)$ a condição $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$ para toda g contínua implica que f é o vetor nulo nesse espaço de Hilbert e, por ser contínua, deve ser uma função identicamente nula. ♣

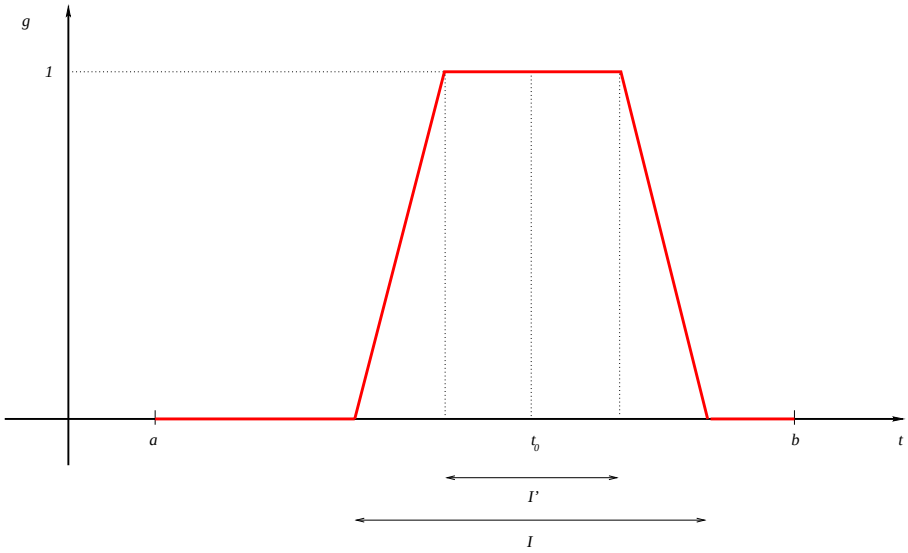

Figura 45.B.7: Gráfico da função g dada em (45.B.2) (em vermelho). O intervalo I é centrado em t_0 e tem largura 2β: $I = [t_0 - \beta,\ t_0 + \beta]$. O intervalo I' é também centrado em t_0, mas tem largura β: $I' = [t_0 - \beta/2,\ t_0 + \beta/2]$.