Capítulo 46
Notas Sobre Mecânica Clássica. II. Problemas e Aplicações

Sumário

46.1 As Curvas Tautócrona, Cicloide e Braquistócrona . . . 2663
46.2 Movimento em Potenciais Centrais e o Problema de Kepler . . . 2670
46.2.1 O Problema de Um Corpo sob Forças Centrais . . . 2670
46.2.2 O Problema de Dois Corpos sob Forças Centrais . . . 2673
46.2.3 O Problema de Kepler. Determinação das Órbitas . . . 2673
46.2.4 O Problema de Kepler. Determinação das Trajetórias. A Equação de Kepler . . . 2677
46.3 O Problema de Três Corpos e os Pontos de Lagrange . . . 2682
46.3.1 Os Pontos de Lagrange . . . 2683
46.3.1.1 As Soluções das Equações de Equilíbrio (46.77). O Caso Equilátero . . . 2685
46.3.1.2 As Soluções das Equações de Equilíbrio (46.77). O Caso Não Equilátero . . . 2687
46.3.1.3 Os Pontos de Lagrange L_1, L_2 e L_3 quando $m_1 \gg m_2 \gg m_3$ . . . 2691
46.3.2 Generalizações das Soluções Periódicas de Lagrange . . . 2693
46.3.3 O Problema de Três Corpos Restrito e a Integral de Jacobi . . . 2696
46.4 Modos Normais de Oscilação . . . 2701
46.4.1 Modos Normais e a Energia Mecânica . . . 2708
46.5 Ângulos de Euler na Mecânica de Corpos Rígidos . . . 2710
46.5.1 Usos dos Ângulos de Euler. O Pião de Lagrange . . . 2712
46.6 Exercícios Adicionais . . . 2719
APÊNDICES . . . 2724
46.A Seções Cônicas . . . 2724
46.A.1 Elipses e Círculos . . . 2724
46.A.2 Hipérboles . . . 2725
46.A.3 Parábolas . . . 2727
46.A.4 Parametrização Polar de Seções Cônicas . . . 2727
46.B Soluções Colineares para Pontos de Lagrange . . . 2731
46.C Cálculo dos Pontos de Lagrange L_1, L_2 e L_3 quando $m_1 \gg m_2 \gg m_3$ . . . 2733

Este capítulo dá continuidade ao Capítulo 45, página 2554, e dedica-se à resolução de problemas selecionados da Mecânica Clássica com importante conteúdo físico. Suas várias Seções são independentes entre si e podem ser lidas separadamente em qualquer ordem. Os problemas tratados lidam com o movimento sob forças centrais, como o Problema de Kepler, de grande importância na Mecânica Celeste e na Física Atômica, com o movimento do pião de Lagrange, com os chamados modos normais de oscilação etc. Os métodos foram desenvolvidos no Capítulo 45 e servem de ilustração à teoria lá desenvolvida. Iniciamos com os problemas históricos da determinação das curvas tautócrona e braquistócrona, cujas soluções envolvem métodos variacionais. Recomendamos as mesmas referências listadas no início do Capítulo 45. Para um compêndio de problemas, vide [293]. Para uma coleção extensa de notas históricas sobre diversos temas ligados à Mecânica Celeste, vide [364].

46.1 As Curvas Tautócrona, Cicloide e Braquistócrona

A solução do problema que aqui trataremos envolve a propriedade de covariância das equações de Euler-Lagrange por mudanças de coordenadas do Lagrangiano.

Considere-se um ponto material de massa m movendo-se sob a ação de uma força gravitacional constante (como nas proximidades da superfície da Terra), em um plano vertical $x-z$, com z denotando o eixo vertical e x o eixo horizontal. Vamos supor que o ponto material mova-se ao longo de uma curva $\big(x(\tau),\ z(\tau)\big)$ no plano, parametrizada por τ, com τ em algum intervalo adequado de $\mathbb{R}$. Como o ponto material se move ao longo de uma curva, trata-se de um sistema unidimensional e seu Lagrangiano é

$$\mathcal{L} \ = \ \frac{m}{2}\|\vec{v}\|^2 - mgz \ .$$

Escrevendo-o em termos do parâmetro τ, ficamos com

$$\mathcal{L}\big(\tau,\ \dot{\tau}\big) \ = \ \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{d\tau}(\tau)\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}(\tau)\right)^2\right]\dot{\tau}^2 - mgz(\tau) \ .$$

Com isso, a trajetória do sistema é descrita pela função $\tau(t)$ (com t sendo o tempo). Desejamos determinar qual a curva $\tau \mapsto \big(x(\tau),\ z(\tau)\big)$ com a propriedade de admitir trajetórias periódicas cujo período não dependa das condições iniciais.

Para resolver isso, tenhamos em mente que o oscilador harmônico simples, com Lagrangiano $\frac{m}{2}\big(\dot{x}\big)^2 - \frac{k}{2}x^2$ tem precisamente essa propriedade: tem trajetórias periódicas cujo período não depende das condições iniciais, mas apenas dos parâmetros m e k, a saber, $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Inspirados nisso, teremos sucesso se pudermos escolher o parâmetro τ e a curva $\tau \mapsto \big(x(\tau),\ z(\tau)\big)$ de sorte que $\mathcal{L}\big(\tau,\ \dot{\tau}\big)$ seja como o Lagrangiano do oscilador harmônico simples no parâmetro τ, ou seja, da forma $\mathcal{L}\big(\tau,\ \dot{\tau}\big) = \frac{m}{2}(\dot{\tau})^2 - \frac{mg}{2\ell}\tau^2$. Aqui, $\ell > 0$ é uma constante, em princípio arbitrária, escolhida com a dimensão de comprimento. A constante ℓ pode ser fixada de acordo com o período de movimento desejado Vide adiante.

Para tal, precisamos ter

$$\left(\frac{dx}{d\tau}(\tau)\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}(\tau)\right)^2 \ = \ 1 \quad \text{e} \tag{46.1}$$

$$z(\tau) \ = \ \frac{1}{2\ell}\tau^2 \ . \tag{46.2}$$

De (46.2) temos $\frac{dz}{d\tau} = \frac{\tau}{\ell}$ e inserindo em (46.1), temos

$$\frac{dx}{d\tau}(\tau) \ = \ \sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{\ell}\right)^2} \ .$$

Essa expressão nos mostra, *en passant*, que τ deve ser limitada ao intervalo $[-\ell,\ \ell]$.

A solução dessa equação é $x(\tau) = \int \sqrt{1-(\tau/\ell)^2}d\tau + c$, onde c é uma constante de integração. Essa integral pode ser calculada explicitamente (faça-o!), resultando em

$$x(\tau) \ = \ \frac{\ell}{2}\left(\frac{\tau}{\ell}\sqrt{1-\left(\frac{\tau}{\ell}\right)^2} + \operatorname{arcsen}\left(\frac{\tau}{\ell}\right)\right) + c \ .$$

Escolhendo $x(0) = 0$ (para que a curva tenha um mínimo em $(0,\ 0)$) resulta em $c = 0$ e assim, finalmente, a curva procurada é

$$\big(x(\tau),\ z(\tau)\big) \ = \ \frac{\ell}{2}\left(\frac{\tau}{\ell}\sqrt{1-\left(\frac{\tau}{\ell}\right)^2} + \operatorname{arcsen}\left(\frac{\tau}{\ell}\right),\ \left(\frac{\tau}{\ell}\right)^2\right) \ , \qquad \tau \in [-\ell,\ \ell] \ . \tag{46.3}$$

O correspondente Lagrangiano é

$$\mathcal{L}\big(\tau,\ \dot{\tau}\big) \ = \ \frac{m}{2}\big(\dot{\tau}\big)^2 - \frac{mg}{2\ell}\tau^2 \ .$$

A correspondente equação de Euler Lagrange tem por solução $\tau(t) = A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t)$, com A e B sendo constantes dependentes das condições iniciais e $\omega = \sqrt{g/\ell}$, resultando que o período de oscilação é $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, quaisquer que sejam as condições iniciais. Observe que T independe da massa m, em contraste com o que ocorre no oscilador harmônico simples.

Na curva (46.3) a variável horizontal x estende-se no intervalo $[-\ell\pi/4,\ \ell\pi/4]$ e a variável vertical z passeia no intervalo $[0,\ \ell/2]$. É claro de (46.1) que o parâmetro τ, que descreve a curva, deve ser identificado com seu comprimento

(começando pelo ponto de mínimo em $(0,\ 0)$ e assumindo valores positivos (negativos) para $x > 0$ ($x < 0$)). Fica claro com isso que o comprimento total da curva é 2ℓ.

A curva (46.3) é denominada *curva tautócrona*[1], ou *curva tautocrônica*, ou ainda *curva isócrona*, e é uma curva *cicloide*. Vide Figura 46.1, página 2665.

E. 46.1 *Exercício*. Os pontos da curva tautócrona $\big(x(\tau),\, z(\tau)\big)$ têm um limite finito quando τ aproxima-se dos extremos $\pm\ell$. Mostre, porém, que a derivada $\frac{dz}{dx}$ diverge quando τ aproxima-se de $\pm\ell$. ✠

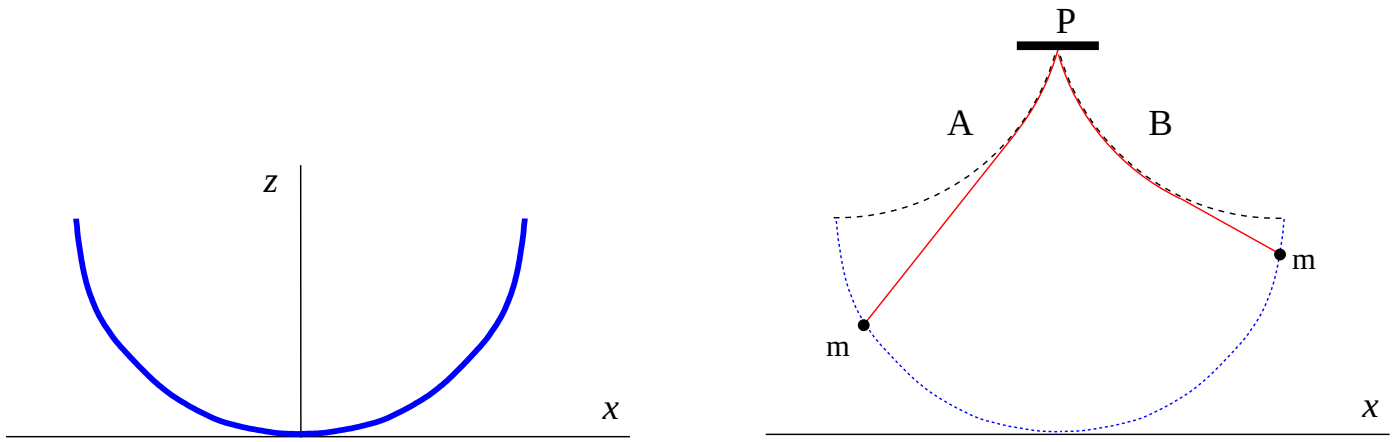

Figura 46.1: **Esquerda:** esquema aproximado de uma curva tautócrona (em azul). **Direita:** esquema do pêndulo isócrono de Huygens. A haste flexível é indicada em vermelho em duas posições. Ela é pendurada no ponto P e é limitada pelas curvas A e B (que, por coincidência, também são cicloides), de sorte que seu ponto final, onde localiza-se a massa m, mova-se sobre a curva tautócrona (pontilhada em azul).

• Relação com a curva cicloide

A máxima altura (máximo valor de $z(\tau)$) da curva (46.3) é $\ell/2$, obtida para $\tau = \pm\ell$. Consideremos a curva $\big(x(\tau),\ \ell/2 - z(\tau)\big)$, que é a curva original (46.3) refletida em torno do eixo horizontal e transladada verticalmente de $\ell/2$, com sua altura máxima agora em $\tau = 0$. Consideremos também uma translação horizontal de $x(\ell) = \pi\ell/4$ para a direita. Obtemos assim a curva

$$\big(x_1(\tau),\ z_1(\tau)\big) \;=\; \frac{\ell}{2}\left(\frac{\tau}{\ell}\sqrt{1-\left(\frac{\tau}{\ell}\right)^2} + \operatorname{arcsen}\left(\frac{\tau}{\ell}\right) - \frac{\pi}{2},\ \ 1-\left(\frac{\tau}{\ell}\right)^2\right)\ , \qquad \tau \in [-\ell,\ \ell]\ . \tag{46.4}$$

Vide Figura 46.2, página 2666.

Façamos em (46.4) a mudança de parametrização $\tau/\ell = \operatorname{sen}(\theta/2)$, para $\theta \in [-\pi,\ \pi]$. Ficamos com

$$\begin{aligned}\big(x_1(\theta),\ z_1(\theta)\big) \;&=\; \frac{\ell}{2}\left(\operatorname{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2) + \frac{\theta-\pi}{2},\ \ \cos^2(\theta/2)\right)\\ &=\; \frac{\ell}{4}\Big(\operatorname{sen}(\theta) + (\theta-\pi),\ \cos(\theta)+1\Big)\ , \qquad \theta \in [-\pi,\ \pi]\ .\end{aligned}$$

Com a troca $\theta \to \theta + \pi$, ficamos finalmente com a parametrização

$$\big(x_1(\theta),\ z_1(\theta)\big) \;=\; \frac{\ell}{4}\Big(\theta - \operatorname{sen}(\theta),\ 1-\cos(\theta)\Big)\ , \qquad \theta \in [0,\ 2\pi]\ . \tag{46.5}$$

Observe-se que, com essa parametrização, vale $z_1(\theta) = \frac{dx_1}{d\theta}(\theta)$. Mais importante, observe-se que, definindo-se $R := \ell/4$,

[1] Do grego "tauto" (mesmo, idêntico) + "khronos" (tempo).

a relação (46.5) fica

$$\begin{pmatrix} x_1(\theta) \\ z_1(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\theta \\ R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} . \tag{46.6}$$

A interpretação disso é que o vetor $\left(\begin{smallmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ é transladado de $\left(\begin{smallmatrix} R\theta \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e simultaneamente rodado em torno do ponto $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ R \end{smallmatrix}\right)$ de um ângulo θ no sentido horário.

E. 46.2 *Exercício*. Justifique essa afirmação! ✠

Uma *cicloide* é uma a curva definida no plano por um ponto de uma circunferência que rola sem deslizar sobre uma reta horizontal. Vide o esquema da Figura 46.2, página 2666. Para uma circunferência de raio $\ell/4$ uma tal curva pode ser parametrizada como (46.5), com θ sendo o ângulo rodado pela circunferência. Verifique! Concluímos de (46.5) ou de (46.6) que a curva tautócrona (46.3) é, a menos de uma reflexão e translações, uma curva cicloide.

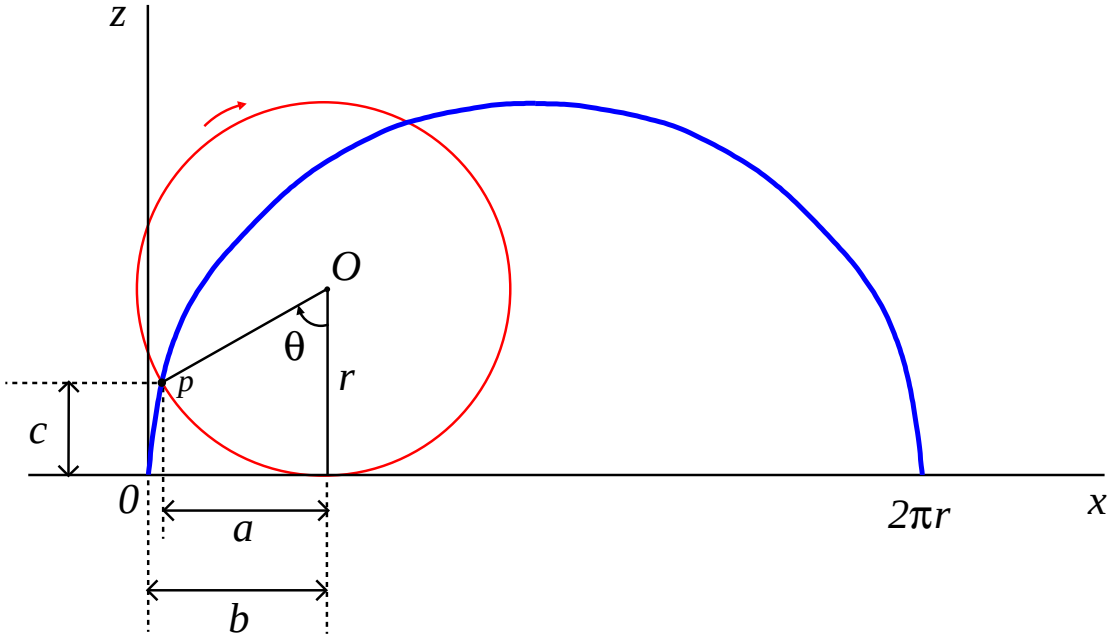

Figura 46.2: Em azul, curva cicloide de altura $2r$ e largura $2\pi r$. Em vermelho, círculo que roda para a direita, sem deslizar, ao longo do eixo horizontal x, sendo θ o ângulo rodado a partir da posição inicial, quando o centro do círculo O encontra-se sobre o eixo vertical z. A distância a vale $r\operatorname{sen}\theta$. A distância b vale $r\theta$ e $c = r - r\cos\theta$). Assim, as coordenadas $\big(x_1(\theta),\ z_1(\theta)\big)$) do ponto p da cicloide valem $\big(r\theta - r\operatorname{sen}\theta,\ r - r\cos\theta\big)$.

E. 46.3 *Exercício*. Mostre que a área sob a curva cicloide da Figura 46.2, página 2666, é $3\pi r^2$. Esse resultado foi obtido primeiramente por Torricelli[2] em 1644, usando métodos geométricos, e não Cálculo Diferencial e Integral, que surgiria posteriormente. O resultado fora antecipado por medidas empíricas (!) da área, feitas por Galilei, do qual Torricelli fora discípulo. Mostre também que o comprimento da mesma cicloide é $8r$. ✠

• Nota histórica

Curvas cicloides foram estudadas nos séculos XVI e XVII em conexão com as curvas tautócrona e braquistócrona, mas eram conhecidas desde a Antiguidade. O nome *cicloide* foi cunhado por Galilei.

A curva tautócrona foi encontrada por Christiaan Huygens[3] em 1659, por outros meios. Huygens procurava construir

[2] Evangelista Torricelli (1608–1647).
[3] Christiaan Huygens (1629–1695).

um pêndulo cujo período fosse independente da amplitude (isso só ocorre em pêndulos normais para pequenas oscilações) e essa procura levou-o à curva tautócrona.

Huygens inventara o relógio de pêndulo em 1656 ou 1657 e apercebeu-se de um problema: o período do pêndulo varia com a amplitude, permanecendo constante apenas para pequenas oscilações. Sua ideia para resolver esse problema, esquematizada na Figura 46.1, página 2665, foi a de produzir um pêndulo cuja massa não se movesse em um arco de círculo, como os pêndulos comuns. Para tal, concebeu que a haste do pêndulo fosse flexível e tivesse seu movimento limitado por cima por duas curvas A e B, escolhidas de forma a garantir que a massa m sempre percorresse uma tautócrona, garantindo assim a independência do período com a amplitude.

A intenção de Huygens era produzir um pêndulo que pudesse ser empregado em barcos para a determinação precisa do tempo, mesmo sob balanços do mar, permitindo assim determinar a longitude na qual o barco encontrava-se, um importante problema técnico de seu tempo do qual dependia o crescente tráfego marítimo internacional[4]. Huygens produziu e testou protótipos de seus pêndulos isócronos e, em 1664, enviou-os em uma expedição de ida e volta às ilhas de Cabo Verde. Os resultados foram bons, mas o tempo mostrou que eles não operavam bem em mares mais agitados[5]. Para a história do problema da longitude e sua solução, vide [451].

E. 46.4 *Exercício-desafio.* Determine as curvas A e B e o ponto P da Figura 46.1, página 2665, para as quais a massa m mova-se ao longo da curva tautócrona. A resposta é que A e B são cicloides. *Sugestão:* comece determinando a altura do ponto P e, assim, o comprimento L da haste. Esse comprimento deve ser tal que o período do pêndulo sob pequenas oscilações coincida com o período da curva tautócrona. ✠

A identificação da curva tautócrona como uma cicloide foi anunciada pelo mesmo Huygens em 1673. O pêndulo de Huygens é por vezes denominado *pêndulo cicloidal*. A curva tautócrona é também relacionada à curva *braquistócrona*, que fornece o caminho mais rápido para o movimento entre dois pontos sob um campo gravitacional constante.

• A curva braquistócrona

Considere-se um ponto material de massa m que seja restrito a mover-se no plano $x-z$ (x sendo o eixo horizontal e z o eixo vertical), sob a ação de um campo gravitacional constante. Considere-se dois pontos $p_1 = (x_1,\ z_1)$ e $p_2 = (x_2,\ z_2)$ nesse plano, sendo $x_1 < x_2$ e $z_1 \geq z_2$ (ou seja, a altura de p_1 é maior ou igual à de p_2). Se pudermos restringir o movimento do ponto material a uma curva no plano $x-z$ que conecta p_1 a p_2 e se o ponto material for solto em repouso de p_1, qual seria a forma dessa curva para que o tempo percorrido pelo ponto material seja o menor possível? Vide Figura 46.3, página 2669.

Essa questão foi levantada em 1696 por Johann Bernoulli[6], que denominou a curva "*braquistócrona*"[7].

São conhecidas diversas soluções desse problema, sendo as primeiras publicadas em 1697: a de seu irmão (e rival) Jacob Bernoulli[8], a de Leibniz[9], a de L'Hôpital[10] e a de Isaac Newton (anonimamente), além da própria solução de Johann Bernoulli. Vamos apresentar uma solução variacional desse problema mecânico, empregando resultados anteriormente aqui obtidos. Essa solução, desenvolvida independentemente por Euler e Lagrange em meados do século XVIII, foi uma das primeiras soluções de problemas matemáticos a fazer uso do que viria a ser chamado *Cálculo de Variações*.

Seja a curva procurada descrita por uma função $z = f(x)$, com $x_1 \leq x \leq x_2$. A energia cinética do ponto material será $\frac{m}{2}\big(\dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2\big) = \frac{m}{2}\Big[1 + f'\big(x(t)\big)^2\Big]\dot{x}(t)^2$. Sua energia potencial é $mgf\big(x(t)\big)$. Com isso, a energia mecânica do

[4] Se o barco possuísse um relógio confiável, sua longitude podia ser determinada medindo-se a diferença entre o tempo marcado no relógio desde a passagem por um meridiano padrão e o tempo local, que podia ser obtido pela posição do Sol ao meio-dia ou pela posição de estrelas. Cada hora de diferença após a passagem pelo meridiano padrão, corresponde a 15° graus de longitude em relação a esse meridiano. A escolha de qual seria o meridiano padrão é uma questão política e, devido à influência do Império Britânico, adota-se atualmente o Meridiano de Greenwich, que passa por uma vila com esse nome às margens do Tâmisa, próxima a Londres, onde localiza-se um Observatório Real. No passado, vários outros padrões foram considerados. A dificuldade prática nesse método estava em construir-se um relógio confiável, problema primeiramente resolvido por John Harrison (1693–1776), um relojoeiro autodidata. Vide [451].

[5] Vale comentar que o problema tinha múltiplos aspectos. Mudanças de temperatura e pressão atmosférica podem afetar o funcionamento de relógios mecânicos, alterando, por exemplo, qualidades dos óleos lubrificantes empregados nesses dispositivos ou afetando as dimensões de suas peças. Mesmo variações na aceleração da gravidade local podem ter efeitos sensíveis em medições de tempo. Em um pêndulo, por exemplo, o período é $2\pi\sqrt{\ell/g}$, que depende de g, que apresenta variações ao longo da superfície da Terra, e do comprimento do pêndulo ℓ, que pode variar com a temperatura. Juntos, esses efeitos tornavam as medidas de tempo e longitude muitos imprecisas para uso eficiente.

[6] Johann Bernoulli (1667–1748).

[7] De "tempo" (*khrónos*) "mais curto" (*brakhystós*), em Grego.

[8] Jacob Bernoulli (1654–1705).

[9] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716).

[10] Guillaume François Antoine, Marquês de l'Hôpital (1661–1704).

ponto material (que é constante ao longo do movimento) é

$$E \;=\; \frac{m}{2}\Big[1+f'\big(x(t)\big)^2\Big]\,\dot{x}(t)^2 + mgf\big(x(t)\big)\;.$$

Eliminando $\dot{x}(t)$, temos

$$\dot{x}(t) \;=\; \sqrt{2g}\sqrt{\frac{E'-f\big(x(t)\big)}{1+f'\big(x(t)\big)^2}}\;, \tag{46.7}$$

sendo $E' \equiv E/(mg)$. Acima, escolhemos a raiz positiva da raiz quadrada sob o entendimento que, pelas hipóteses, a partícula se move da esquerda para a direita.

Como o ponto material é solto em repouso de p_1, sua energia mecânica é $E = mgz_1$. Assim, é convenente definir-se $h(x) := E' - f(x) = z_1 - f(x)$, com o que (46.7) fica

$$\dot{x}(t) \;=\; \sqrt{2g}\sqrt{\frac{h\big(x(t)\big)}{1+h'\big(x(t)\big)^2}}\;. \tag{46.8}$$

Observe-se que $z_1 - f(x) \geq 0$ durante o movimento pois, pela conservação de energia, o ponto p_1 é o mais elevado da trajetória. Assim, a raiz quadrada, acima, está bem definida.

Com isso, obtemos que o tempo $T_{p_1\to p_2}$ que o ponto material leva para percorrer a curva de p_1 e p_2 é

$$T_{p_1\to p_2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+h'(x)^2}{h(x)}}\,dx\;. \tag{46.9}$$

Com isso, o problema de determinar a curva braquistócrona transforma-se no problema de encontrar a função h que minimiza o funcional do lado direito de (46.9), cuja Função de Lagrange é

$$\mathscr{L}(h,\,h') \;=\; \sqrt{\frac{1+h'(x)^2}{h(x)}} \tag{46.10}$$

(o fator $1/\sqrt{2g}$ é irrelevante para o que segue). Poderíamos prosseguir daqui escrevendo as equações de Euler-Lagrange correspondentes, o que é um tanto trabalhoso, mas existe um atalho. A Função de Lagrange de (46.10) não depende explicitamente da variável independente x. Assim, aplica-se aqui a Identidade de Beltrami (45.176), página 2610 (lembrar que aqui a variável independente é x, não t), que afirma que a quantidade $\mathcal{L} - h'\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial h'}$ é uma constante, que, por conveniência, escrevemos como $1/\sqrt{2R}$, sendo $R>0$ constante:

$$\mathscr{L}\big(h(x),\,h'(x)\big) - h'(x)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial h'}\big(h(x),\,h'(x)\big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2R}}\;.$$

Assim, temos

$$\sqrt{\frac{1+h'(x)^2}{h(x)}} - \frac{h'(x)^2}{\sqrt{\big(1+h'(x)^2\big)h(x)}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2R}}\;. \tag{46.11}$$

Elevando-se ambos os lados ao quadrado, obtemos, após algumas manipulações simples,

$$h(x)\big(1+h'(x)^2\big) \;=\; 2R\;. \tag{46.12}$$

Trata-se de uma equação diferencial de primeira ordem para h. Para resolvê-la isolamos h', obtendo

$$h'(x)^2 \;=\; \frac{2R}{h(x)} - 1 \qquad \text{e, assim,} \qquad x - c \;=\; \int\frac{dh}{\sqrt{\frac{2R}{h}-1}}\;,$$

com c sendo uma constante de integração. Definindo-se $u = h/(2R)$, temos

$$x - c \;=\; 2R\int\sqrt{\frac{u}{1-u}}du \;=\; 2R\int \operatorname{sen}(\theta/2)^2 d\theta \;=\; R\Big(\theta - \operatorname{sen}(\theta)\Big)\;,$$

onde fizemos a mudança de variável $u = \operatorname{sen}^2(\theta/2) = \frac{1}{2}\big(1-\cos(\theta)\big)$. Note-se aqui que $\theta - \operatorname{sen}(\theta)$ é uma função crescente (sua derivada é $1-\cos(\theta) > 0$ para $\theta \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$) e, portanto, é inversível, permitindo escrever $\theta(x)$. Como x é limitada ao intervalo $[x_1,\ x_2]$, a variável θ é limitada correspondentemente a um intervalo que denotaremos por $[\theta_1,\ \theta_2]$.

Resumindo, escrevendo x e $h(x)$ em termos de θ, temos

$$x \;=\; c + R\Big(\theta - \operatorname{sen}(\theta)\Big) \qquad \text{e} \qquad h(x) \;=\; 2Ru \;=\; R\big(1-\cos(\theta)\big)\ .$$

É novamente de se observar que

$$h\big(x(\theta)\big) \;=\; \frac{d}{d\theta}x(\theta)\ , \tag{46.13}$$

como no caso da curva tautócrona.

A curva $(x,\ h(x))$ procurada, portanto, é

$$\Big(c + R\big(\theta - \operatorname{sen}(\theta)\big),\ R\big(1-\cos(\theta)\big)\Big)\ , \qquad \theta \in [\theta_1,\ \theta_2]\ .$$

Comparando a (46.5), vemos que trata-se de um trecho da curva cicloide descrita em (46.5), com a identificação $R = \frac{\ell}{4}$. Assim, a curva braquistócrona é também obtida de uma cicloide com círculo gerador de raio R.

Se retornarmos às variáveis originais e escrevermos $f(x) = z_1 - h(x)$, temos que a curva procurada é

$$\Big(c + R\big(\theta - \operatorname{sen}(\theta)\big),\ z_1 - R\big(1-\cos(\theta)\big)\Big)\ , \qquad \theta \in [\theta(x_1),\ \theta(x_2)]\ . \tag{46.14}$$

Verificamos, por comparação, que trata-se de um trecho uma curva tautócrona (a menos de translações).

Desejamos agora fixar os parâmetros R, c, θ_1 e θ_2 de forma a impor que essa curva passe pelos pontos $(x_1,\ z_1)$ (para $\theta = \theta_1$) e $(x_2,\ z_2)$ (para $\theta = \theta_2$). Devemos, assim, ter

$$x_1 \;=\; c + R\big(\theta_1 - \operatorname{sen}(\theta_1)\big), \quad z_1 \;=\; z_1 - R\big(1-\cos(\theta_1)\big), \quad x_2 \;=\; c + R\big(\theta_2 - \operatorname{sen}(\theta_2)\big), \quad z_2 \;=\; z_1 - R\big(1-\cos(\theta_2)\big)\ .$$

A segunda relação implica $\theta_1 = 0$ e, com isso, a primeira relação implica $c = x_1$. Assim, as duas últimas ficam

$$\frac{\cos(\theta_2)-1}{\theta_2 - \operatorname{sen}(\theta_2)} \;=\; \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{e} \qquad R \;=\; \frac{z_2 - z_1}{\cos(\theta_2)-1}\ . \tag{46.15}$$

A primeira determina θ_2 (observar aqui que a função $(\cos(\theta)-1)/(\theta - \operatorname{sen}(\theta))$ é inversível no intervalo $(0,\ 2\pi]$, sendo negativa nesse intervalo, o que vem ao encontro da hipótese que $z_2 \leq z_1$) e a segunda determina R.

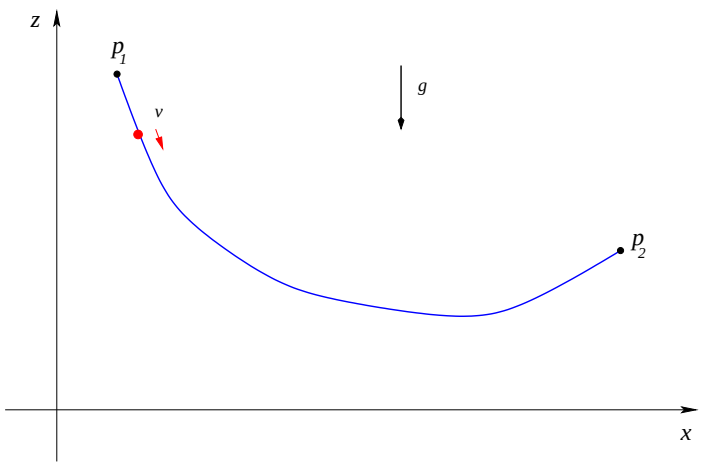

Figura 46.3: Em azul, curva conectando os pontos p_1 e p_2 com a propriedade que um ponto material (em vermelho, com velocidade v) partindo de p_1 e impulsionado pela força da vertical da gravidade chega a p_2 no menor tempo possível. Como desenvolvido no texto, essa curva, denominada *braquistócrona*, é um pedaço de uma cicloide, ou seja, de uma tautócrona.

Se retornarmos a (46.9) com (46.12), obtemos

$$T_{p_1\to p_2} \;=\; \sqrt{\frac{R}{g}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{h(x)}\,dx \;=\; \sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\theta_2}\frac{1}{h\big(x(\theta)\big)}\,\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \;\overset{(46.13)}{=}\; \theta_2\sqrt{\frac{R}{g}}\,,$$

com θ_2 e R determinados em (46.15).

46.2 Movimento em Potenciais Centrais e o Problema de Kepler

Nesta Seção trataremos da solução de sistemas mecânicos que se movam sob a ação de forças centrais, ou seja, de forças derivadas de potenciais que dependam apenas da distância entre as partículas participantes. Trataremos de sistemas de um ou dois pontos materiais sob tais forças e comentaremos também alguns aspectos do que ocorre no caso de três pontos materiais. Problemas com forças centrais são são de grande importância na Mecânica Celeste – particularmente o chamado *Problema de Kepler* – e na Física Atômica.

Uma breve revisão de seções cônicas pode ser encontrada no Apêndice 46.A, página 2724.

• **Nota histórica**

O Problema de Kepler – a determinação do movimento de pontos materiais sob a ação de uma força que varie com o inverso do quadrado da distância – foi um dos mais importantes problemas da História da Física e da Astronomia e sua resolução, atribuída a Newton e, parcialmente, a Hooke, contribuiu de forma decisiva para a aceitação da Lei de Gravitação Universal, proposta por Newton, dando início a uma nova era da Astronomia. O feito mais importante foi provar que as órbitas nesse caso seguiam seções cônicas, ou seja, círculos, elipses, parábolas ou hipérboles. Que planetas descreviam aproximadamente elipses em seu movimento, com o Sol em um de seus focos, foi constatado observacionalmente por Kepler (*Primeira Lei de Kepler*) e divulgado por esse autor entre 1609 e 1619, junto com as duas outras leis do movimento planetário que levam seu nome.

Certos aspectos do Problema de Kepler, como a determinação aproximada da trajetória como função do tempo, foram tratados pelo próprio Kepler, antes mesmo das contribuições de Newton. Trataremos disso adiante.

Fazemos notar que, em situações reais, como no sistema solar, o fato de o movimento de planetas ser restrito a seções cônicas não é exato, pois as órbitas podem ser perturbadas pela atração dos outros planetas, pelo fato de Sol não ser exatamente esférico e sim uma esfera oblata (o que introduz correções à lei $F \propto -1/r^2$) e por efeitos da Teoria da Relatividade Geral. O estudo dessas correções é objeto da Teoria de Perturbações.

46.2.1 O Problema de Um Corpo sob Forças Centrais

Consideremos um ponto material de massa m movendo-se em $\mathbb{R}^3$, sendo $\vec{x}$ seu vetor-posição. Consideremos um sistema de coordenadas Cartesianas fixo em $\mathbb{R}^3$, com versores ortogonais $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$, de sorte que escrevemos $\vec{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3$, em termos de componentes x^1, x^2 e x^3.

Trataremos aqui da situação de particular interesse físico na qual esse ponto material move-se sob um potencial esfericamente simétrico, ou seja, da forma $U(\vec{x}) = V\big(\|\vec{x}\|\big)$, com V sendo uma função de uma variável, usualmente suposta contínua e diferenciável por partes, $V : (0,\ \infty) \to \mathbb{R}$ (em alguns casos o ponto 0 pode ser incluído no domínio de V). Um tal potencial que dependa apenas de $\|\vec{x}\|$ é dito ser um *potencial central* e a força por ele produzida é dita ser uma *força central*, ou *campo central*.

O Lagrangiano que descreve esse sistema mecânico é $\mathscr{L}(\vec{x},\ \dot{\vec{x}}) = \frac{m}{2}\|\dot{\vec{x}}\|^2 - V\big(\|\vec{x}\|\big)$ e as correspondentes equações de Euler-Lagrange são

$$m\ddot{\vec{x}}(t) \;=\; -V'\big(\|\vec{x}(t)\|\big)\,\frac{\vec{x}(t)}{\|\vec{x}(t)\|}\,, \tag{46.16}$$

as quais expressam a segunda lei de Newton para o problema, sendo o lado direito (a menos do sinal) a força central produzida pelo potencial V.

Como $\mathscr{L}\big(\vec{x},\ \dot{\vec{x}}\big)$ é invariante por rotações da coordenada $\vec{x}$, o momento angular $\vec{\ell} = \vec{x}\times(m\dot{\vec{x}})$ é uma constante de movimento. Isso decorre também diretamente de (46.16), pois $\dot{\vec{\ell}} = \vec{x}\times(m\ddot{\vec{x}}) = -\vec{x}\times\left(V\big(\|\vec{x}\|\big)\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right) = 0$, onde usamos que $\dot{\vec{x}}\times\dot{\vec{x}} = 0$ e que $\vec{x}\times\vec{x} = 0$. Esse fato permite-nos uma importante simplificação no tratamento do problema, que passa a depender de duas possíveis situações:

1. Caso $\vec{\ell} = \vec{0}$. Nesse caso $\vec{x}$ e $\dot{\vec{x}}$ são paralelos ao longo de todo o movimento (pois $\vec{\ell}$ é constante) e (46.16) reduz-se a um problema unidimensional.
2. Caso $\vec{\ell} \neq \vec{0}$. Nesse caso $\vec{x}$ e o vetor não nulo $\vec{\ell}$ são ortogonais e como $\vec{\ell}$ é constante, o vetor posição $\vec{x}$ deve estar sempre em um mesmo plano e a trajetória deve ser planar.

• **Caso $\vec{\ell} \neq \vec{0}$**

Vamos convencionar que $\vec{\ell}$ aponta na direção de $\mathbf{e}_3$ do sistema de coordenadas Cartesiano adotado em $\mathbb{R}^3$ e que o plano de movimento seja o plano $1-2$, ou seja, $\vec{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2$. Temos também $\dot{\vec{x}} = \dot{x}^1\mathbf{e}_1 + \dot{x}^2\mathbf{e}_2$ e $\vec{\ell} = m\big(x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1\big)\mathbf{e}_3$.

É conveniente adotarmos um sistema de coordenadas polares no plano $1-2$, escrevendo

$$x^1 \;=\; r\cos(\phi), \qquad x^2 \;=\; r\,\mathrm{sen}(\phi)\ ,$$

onde $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ e $\phi = \arctan\big(x^2/x^1\big)$. Os correspondentes versores ortogonais desse sistema são

$$\mathbf{e}_r \;=\; \cos(\phi)\mathbf{e}_1 + \mathrm{sen}(\phi)\mathbf{e}_2 \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_\phi \;=\; -\,\mathrm{sen}(\phi)\mathbf{e}_1 + \cos(\phi)\mathbf{e}_2\ . \tag{46.17}$$

É fácil verificar que $\mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_3$. De (46.17) segue também

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r \;=\; \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}\mathbf{e}_\phi \;=\; -\dot{\phi}\mathbf{e}_r\ .$$

Dessa forma, temos

$$\vec{x} \;=\; r\mathbf{e}_r\ , \tag{46.18}$$

$$\dot{\vec{x}} \;=\; \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \qquad \text{e} \tag{46.19}$$

$$\ddot{\vec{x}} \;=\; \Big(\ddot{r} - r(\dot{\phi})^2\Big)\mathbf{e}_r + \Big(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\Big)\mathbf{e}_\phi\ . \tag{46.20}$$

Consequentemente, temos

$$\vec{\ell} \;=\; m\vec{x}\times\dot{\vec{x}} \;=\; mr\mathbf{e}_r\times\Big(\dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi\Big) \;=\; mr^2\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi \tag{46.21}$$

e, portanto,

$$\ell^2 \;=\; m^2r^4(\dot{\phi})^2\ , \tag{46.22}$$

onde

$$\ell \;\equiv\; \|\vec{\ell}\|\ .$$

Com isso, (46.16) fica $m\big(\ddot{r} - r(\dot{\phi})^2\big)\mathbf{e}_r + m\big(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\big)\mathbf{e}_\phi = -V'\big(r\big)\mathbf{e}_r$. Naturalmente, isso implica

$$m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \;=\; 0 \qquad \text{e} \tag{46.23}$$

$$m\Big(\ddot{r} - r(\dot{\phi})^2\Big) \;=\; -V'\big(r\big)\ . \tag{46.24}$$

A relação (46.23) significa $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\big(mr^2\dot{\phi}\big) = 0$, do que se conclui que $mr^2\dot{\phi}$ é constante, que é a já observada conservação do momento angular. A relação (46.24) pode ser escrita com uso de (46.22) como

$$m\ddot{r} \;=\; -V'(r) + \frac{\ell^2}{mr^3} \;=\; -V'_{\mathrm{ef}}(r)\ , \qquad \text{onde} \qquad V_{\mathrm{ef}}(r) \;:=\; V(r) + \frac{\ell^2}{2m}\frac{1}{r^2} \tag{46.25}$$

é o chamado *potencial efetivo* associado e esse problema de força central.

A energia mecânica do sistema é dada por

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\|\dot{\vec{x}}\|^2 + V(r) \\ &\overset{(46.19)}{=} \frac{m}{2}\Big(\dot{r}^2 + r^2\big(\dot{\phi}\big)^2\Big) + V(r) \\ &\overset{(46.22)}{=} \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V(r) + \frac{\ell^2}{2m}\frac{1}{r^2} \\ &\equiv \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r)\ . \end{aligned} \tag{46.26}$$

Resumindo, concluímos de (46.25) e de (46.26) que o movimento sob a ação de uma força central reduz-se, a um movimento angular sob a conservação do momento angular e a um movimento radial unidimensional sob o potencial efetivo V_{ef}.

• **Solução das equações de movimento sob forças centrais para $\vec{\ell} \neq 0$**

A expressão (46.26) permite-nos resolver a equação diferencial (46.25). De fato, isolando-se $\dot{r}$ em (46.26), temos $\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\big(E - V_{\text{ef}}(r)\big)$. Assim, em um trecho da trajetória em que $\dot{r} > 0$, temos

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V_{\text{ef}}(r)\big)}\ . \tag{46.27}$$

Isso é um exemplo de uma equação separável, cuja solução geral é exposta na Seção 13.3, página 708. Segue que

$$t + c = \int \left[\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2m}\frac{1}{r^2}\right)\right]^{-1/2} dr\ , \tag{46.28}$$

sendo c uma constante de integração. A determinação da integral do lado direito permite expressar a solução da equação diferencial (46.25). Se a integral do lado direito, que denotaremos por F, for uma função inversível em algum intervalo, teremos a solução $r(t) = F^{-1}(t + c)$. Veremos essas ideias em ação no caso do Problema de Kepler, adiante. É de se observar que a solução oferecida em (46.28) depende das constantes de movimento E e ℓ.

De (46.28) se extrai, por exemplo, que

$$T_{1\to 2} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V_{\text{ef}}(r)\big)}}\, dr = \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2m}\frac{1}{r^2}\right)\right]^{-1/2} dr\ ,$$

onde $T_{1\to 2}$ é o tempo necessário para o ponto material transitar de r_1 a r_2 (com $r_2 > r_1$).

Para um movimento em sentido anti-horário a relação (46.21), página 2671, diz-nos que

$$\ell = mr^2\dot{\phi} \tag{46.29}$$

o que nos fornece $\phi(t)$ a partir da integral de $\ell/\big(mr(t)^2\big)$ na variável t. Em muitos, casos, porém, é mais importante determinar a relação entre r e ϕ, ou seja, a curva no espaço descrita pelo movimento.

Vamos supor que haja algum intervalo de tempo onde as funções $t \mapsto r(t)$ e $t \mapsto \phi(t)$ sejam bijetoras (o que é de se supor com as hipóteses que fazemos sobre o potencial)[11]. Podemos então, nesse intervalo, escrever ϕ como função de r na forma de uma função $\varphi(r)$, especificamente, $\phi(t) = \varphi\big(r(t)\big)$, e valerá

$$\frac{d\varphi}{dr}\big(r(t)\big) = \frac{\dot{\phi}(t)}{\dot{r}(t)} \overset{(46.27),(46.29)}{=} \frac{\ell}{mr(t)^2\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V_{\text{ef}}\big(r(t)\big)\big)}}$$

[11] A limitação a um intervalo é devida à possibilidade de autocruzamentos da trajetória.

e, assim,

$$\varphi(r) \;=\; c + \ell\sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{1}{r^2\sqrt{E - V(r) - \frac{\ell^2}{2m}\frac{1}{r^2}}}\,dr\;, \tag{46.30}$$

com c sendo uma constante de integração. A integral em r do lado direito fornecerá $\varphi(r)$ e, assim, a curva no espaço descrita pelo movimento. Exibiremos um cálculo explícito no caso do Problema de Kepler, adiante.

46.2.2 O Problema de Dois Corpos sob Forças Centrais

Consideremos dois pontos materiais com massas m_1 e m_2 e vetores-posição $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$, respectivamente, se movimentando no espaço $\mathbb{R}^3$ sob um potencial $U(\vec{x}_1,\,\vec{x}_2) = V(\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|)$. É conveniente tratar esse sistema introduzindo as coordenadas $\vec{y} := \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ e $\vec{X} := \frac{1}{M}(m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)$, onde $M := m_1 + m_2$. A coordenada $\vec{X}$ é a coordenada do centro de massa do par de pontos materiais. Com isso, obtém-se

$$\vec{x}_1 \;=\; \vec{X} - \frac{m_2}{M}\vec{y} \qquad \text{e} \qquad \vec{x}_2 \;=\; \vec{X} + \frac{m_1}{M}\vec{y}\;,$$

como facilmente se verifica. Analogamente, para as velocidades temos $\dot{\vec{x}}_1 = \dot{\vec{X}} - \frac{m_2}{M}\dot{\vec{y}}$ e $\dot{\vec{x}}_2 = \dot{\vec{X}} + \frac{m_1}{M}\dot{\vec{y}}$. Assim, a energia cinética desse sistema pode ser escrita, após cancelamentos triviais, como

$$T \;=\; \frac{m_1}{2}\|\dot{\vec{x}}_1\|^2 + \frac{m_2}{2}\|\dot{\vec{x}}_2\|^2 \;=\; \frac{M}{2}\|\dot{\vec{X}}\|^2 + \frac{\mu}{2}\|\dot{\vec{y}}\|^2\;,$$

(verifique!) onde $\mu := m_1m_2/M$ é denominada *massa reduzida* (ou *efetiva*) do par de pontos materiais. Com isso, podemos escrever o Lagrangiano do sistema nas novas coordenadas $\vec{X}$, $\dot{\vec{X}}$, $\vec{y}$ e $\dot{\vec{y}}$:

$$\mathscr{L}(\vec{X},\,\dot{\vec{X}},\,\vec{y},\,\dot{\vec{y}}) \;=\; \mathscr{L}_{cm}(\vec{X},\,\dot{\vec{X}}) + \mathscr{L}_r(\vec{y},\,\dot{\vec{y}})\;, \quad \text{sendo} \quad \mathscr{L}_{cm}(\vec{X},\,\dot{\vec{X}}) \;:=\; \frac{M}{2}\|\dot{\vec{X}}\|^2 \quad \text{e} \quad \mathscr{L}_r(\vec{y},\,\dot{\vec{y}}) \;:=\; \frac{\mu}{2}\|\dot{\vec{y}}\|^2 - V(\|\vec{y}\|)\;.$$

Podemos interpretar essas relações como afirmando que o movimento do centro de massa $\vec{X}$ é independente do movimento da coordenada relativa $\vec{y}$, o primeiro sendo regido pelo Lagrangiano $\mathscr{L}_{cm}(\vec{X},\,\dot{\vec{X}})$ e o segundo pelo Lagrangiano $\mathscr{L}_r(\vec{y},\,\dot{\vec{y}})$. As correspondentes equações de Euler-Lagrange nos informam que o momento total $M\dot{\vec{X}}$ é uma constante de movimento (lembrar que $\mathscr{L}_{cm}$ independe de $\vec{X}$ e, portanto, o momento generalizado associado é conservado) e que

$$\mu\ddot{\vec{y}} \;=\; -V'(\|\vec{y}\|)\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}\;. \tag{46.31}$$

Como se vê, esse problema é idêntico ao de uma partícula de massa μ movendo-se sob um potencial central, como em (46.16), página 2670. O momento angular $\vec{\ell} = \vec{y}\times(\mu\dot{\vec{y}})$ é uma constante de movimento (o que decorre também de $\mathscr{L}_r(\vec{y},\,\dot{\vec{y}})$ ser invariante por rotações da coordenada $\vec{y}$), assim como a energia mecânica $E = \frac{\mu}{2}\|\dot{\vec{y}}\|^2 + V(\|\vec{y}\|)$.

A equação para a coordenada radial $r = \|\vec{y}\|$ é fornecida como em em (46.28), página 2672:

$$t + c \;=\; \int\left[\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\right)\right]^{-1/2} dr\;, \tag{46.32}$$

sendo necessário inverter a função de r do lado direito. Discutiremos isso com mais detalhe no caso do Problema de Kepler, adiante.

46.2.3 O Problema de Kepler. Determinação das Órbitas

O *Problema de Kepler* consiste em determinar a solução da equação de movimento no caso de um potencial da forma $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, com $\kappa > 0$ (potencial atrativo) na região $r > 0$. Esse é um problema de grande importância na Física e que encontra aplicações na Mecânica Celeste e no Eletromagnetismo (força de Coulomb[12]).

[12] Charles-Augustin de Coulomb (1736–1806).

• **Análise qualitativa do movimento**

O potencial efetivo é dado por $V_{\rm ef}\big(r\big) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{\ell^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}$. É relevante analisarmos o gráfico dessa função na região $r > 0$. Ele encontra-se representado na Figura 46.4, página 2674.

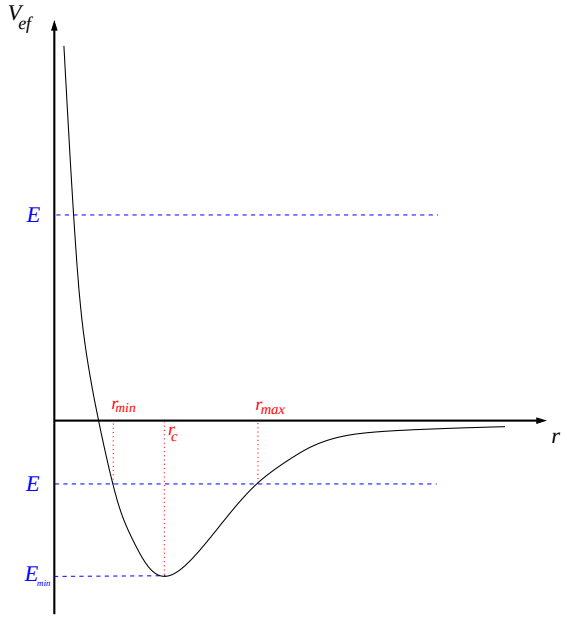

Figura 46.4: O potencial efetivo $V_{\rm ef}\big(r\big) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{\ell^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}$. São indicados (em azul) dois níveis de energia, (1) um para $E_{min} < E < 0$, sendo $E_{min} := -\frac{1}{2}\frac{\mu\kappa^2}{\ell^2}$ (E_{min} é o valor de $V_{\rm ef}$ no seu mínimo r_c, dados em (46.33); e outro para (2) $E > 0$. Para cada valor de E o movimento se dá na região na qual $V_{\rm ef}\big(r\big) \leq E$. No caso $E = E_{min}$ o movimento é circular com raio r_c. No caso (1), o movimento é limitado ao intervalo $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ (com $r_{min/max}$ dados em (46.34)). No caso (2) o movimento é ilimitado, havendo apenas um valor mínimo para r. O mesmo se dá caso $E = 0$. Como veremos, a órbita é circular caso $E = E_{min}$, elíptica caso $E_{min} < E < 0$, parabólica caso $E = 0$ e hiperbólica caso $E > 0$.

O mínimo de $V_{\rm ef}\big(r\big)$ se dá r_c no ponto onde $V'_{\rm ef}\big(r_c\big) = 0$, que vem a ser

$$r_c \;=\; \frac{\ell^2}{\mu\kappa}\;, \qquad \text{sendo que} \qquad V_{\rm ef}(r_c) \;=\; -\frac{1}{2}\frac{\mu\kappa^2}{\ell^2}\;, \tag{46.33}$$

como se verifica facilmente. De (46.26), página 2672, concluímos que

$$E \;\geq\; -\frac{1}{2}\frac{\mu\kappa^2}{\ell^2}\;.$$

A Figura 46.4, página 2674, ajuda-nos também a entender qualitativamente como são as trajetórias. Há quatro casos a se considerar:

1º Caso $E = -\frac{1}{2}\frac{\mu\kappa^2}{\ell^2}$. Devido a (46.26), esse caso só ocorre se trajetória for tal que $r(t) = r_c$ para todo t, e, portanto, $\dot{r}(t) = 0$ também para todo t. Dessa forma, trajetória é um *círculo* de raio r_c, e o movimento se dá com velocidade angular, também constante no tempo,

$$\dot{\phi}(t) \;=\; \frac{\ell}{\mu(r_c)^2} \;=\; \frac{\mu\kappa^2}{\ell^3}\;,$$

como segue de (46.29), página 2672, e de (46.33).

2º Caso $-\frac{1}{2}\frac{\mu\kappa^2}{\ell^2} < E < 0$. O movimento é radialmente limitado e se dá na região $r_{min} \leq r \leq r_{max}$. Os pontos $r_{min/max}$ são *pontos de retorno*, ou seja, são pontos da trajetória em que $V_{\rm ef}(r) = E$ (e, portanto, $\dot{r} = 0$). Como

facilmente se vê, a equação algébrica $V_{\rm ef}(r) = E$ tem por soluções nesse caso

$$r_{\rm min} \;=\; \frac{-\kappa + \sqrt{\kappa^2 + \frac{2E\ell^2}{\mu}}}{2E} \qquad \text{e} \qquad r_{\rm max} \;=\; \frac{-\kappa - \sqrt{\kappa^2 + \frac{2E\ell^2}{\mu}}}{2E} \;. \tag{46.34}$$

Como veremos, a trajetória nesse caso é fechada e se dá em uma *elipse*.

3º Caso $E = 0$. O movimento não é mais radialmente limitado e se dá na região $r \geq r_{min}$, onde agora o ponto de retorno, onde $V_{\rm ef}(r) = E = 0$, é único e vale

$$r_{min} \;=\; \frac{\ell^2}{2\mu\kappa} \;. \tag{46.35}$$

A solução r_{min} pode ser obtida de r_{min} dada em (46.34) tomando-se o limite $E \to 0_-$. Nesse caso, o mesmo limite para r_{max} diverge. A trajetória nesse caso é aberta e, como veremos, se dá em uma *parábola*.

4º Caso $E > 0$. O movimento não é mais radialmente limitado e se dá na região $r \geq r_{min}$, onde agora o ponto de retorno, onde $V_{\rm ef}(r) = E \geq 0$, é único e vale

$$r_{\rm min} \;=\; \frac{-\kappa + \sqrt{\kappa^2 + \frac{2E\ell^2}{\mu}}}{2E} \;. \tag{46.36}$$

Trata-se da mesma expressão que em (46.34), mas aqui teríamos $r_{max} < 0$ e essa solução, portanto, deve ser excluída. A trajetória nesse caso é aberta e, como veremos, se dá em uma *hipérbole*.

• **Determinação das órbitas**

Nesse caso, a integral do lado direito de (46.30) pode ser calculada explicitamente e sua inversa pode ser determinada.

$$\begin{aligned}
\varphi(r) \quad &= \quad c + \sqrt{\frac{\ell^2}{2\mu}} \int \frac{1}{r^2\sqrt{E + \frac{\kappa}{r} - \frac{\ell^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}}}\, dr \\
&\overset{y:=1/r}{=} \quad c - \sqrt{\frac{\ell^2}{2\mu}} \int \left[E + \kappa y - \frac{\ell^2}{2\mu} y^2\right]^{-1/2} dy \;.
\end{aligned} \tag{46.37}$$

Escrevemos, completando quadrados,

$$E + \kappa y - \frac{\ell^2}{2\mu} y^2 \;=\; \left(E + \frac{\mu\kappa^2}{2\ell^2}\right)\left[1 - z^2\right] \;, \qquad \text{onde} \qquad z \;:=\; \frac{\sqrt{\frac{\ell^2}{2\mu}}\, y - \kappa\sqrt{\frac{\mu}{2\ell^2}}}{\left(E + \frac{\mu\kappa^2}{2\ell^2}\right)^{1/2}} \;.$$

Verifique! Inserindo isso em (46.37), ficamos com

$$\varphi(r) \;=\; c - \int \left[1 - z^2\right]^{-1/2} dz \;=\; c' + \arccos(z) \;,$$

onde c' é também uma constante de integração. Consequentemente,

$$\varphi(r) \;=\; c' + \arccos\left(\frac{\frac{\ell}{r} - \frac{\kappa\mu}{\ell}}{\left(2\mu E + \frac{\mu^2\kappa^2}{\ell^2}\right)^{1/2}}\right) \;, \tag{46.38}$$

Com isso, temos, finalmente,

$$\frac{\mathsf{p}}{r} \;=\; 1 + \mathsf{e}\cos(\varphi - c') \;, \tag{46.39}$$

onde

$$\mathsf{p} := \frac{\ell^2}{\mu\kappa} \qquad \text{e} \qquad \mathsf{e} := \sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{\mu\kappa^2}}\,. \tag{46.40}$$

Verifique! Como demonstraremos adiante e na Seção 46.A.4, página 2727, a equação (46.39) mostra que as órbitas possíveis são seções cônicas, *i.e.*, círculos, elipses, parábolas ou hipérboles, a depender do valor de e. Vide também Seção 46.A para uma revisão dos conceitos geométricos necessários.

A grandeza adimensional e é denominada *excentricidade da órbita* e a grandeza p é denominada *parâmetro da cônica*, ou ainda *semi-latus rectum*, na Geometria[13]. Pela expressão (46.40), p possui dimensão de comprimento e é tal que $\mathsf{p}/(1+\mathsf{e})$ é a distância à origem do *periastro*, ou *periápside*[14] da órbita, ou seja, o mínimo valor de r como função de φ, e que é alcançado quando $\varphi = c'$. Vide adiante. Em função disso, podemos convencionar que $c' = 0$, o que significa que a coordenada angular φ é medida a partir da linha onde r assume seu valor mínimo.

Na linguagem da Mecânica Celeste, o ângulo φ é denominado *anomalia verdadeira*, ou *anomalia real*, e mede o ângulo a partir da origem (do Sol, no caso do sistema solar) entre a posição de um planeta e a posição na qual a distância deste ao Sol é mínima (periastro).

As coordenadas Cartesianas da órbita $(x,\ y)$, centradas na origem e com o eixo x apontando no sentido que liga a origem ao periastro, podem ser facilmente relacionadas a r e φ, pois $x = r\cos(\varphi)$. Tem-se

$$x \;=\; r\cos(\varphi) \overset{(46.39)}{=} \frac{\mathsf{p}-r}{\mathsf{e}} \qquad \text{e} \qquad y \;=\; \sqrt{r^2-x^2} \;=\; \sqrt{r^2-\frac{(\mathsf{p}-r)^2}{\mathsf{e}^2}}\,. \tag{46.41}$$

Verifique!

Observe-se que, em geral, $\mathsf{e} \geq 0$. Novamente, há quatro casos a se analisar. Os fatos relevantes sobre seções cônicas são apresentados nos Apêndices 46.A, página 2724, e 46.A.4, página 2727.

(a) Caso $\mathsf{e} = 0$. Isso se dá somente se $E = -\frac{\mu\kappa^2}{2\ell^2}$, o que ocorre com uma órbita circular. De fato, vê-se de (46.39) que $r = \mathsf{p}$, constante, e o movimento é circular. Comparando-se a (46.33) vê-se sem surpresa que $\mathsf{p} = r_c$. O ângulo φ pode assumir todos os valores no intervalo semiaberto $(-\pi,\ \pi]$.

(b) Caso $0 < \mathsf{e} < 1$. Isso se dá somente se $-\frac{\mu\kappa^2}{2\ell^2} < E < 0$ e nesse caso a trajetória é elíptica. De fato, a expressão (46.39) no caso $0 < \mathsf{e} < 1$ representa uma elipse. O ângulo φ pode assumir todos os valores no intervalo semiaberto $(-\pi,\ \pi]$.

Os pontos focais encontram-se nas posições $\big(0,\ 0\big)$ e $\Big(-\frac{2\mathsf{pe}}{1-\mathsf{e}^2},\ 0\Big)$.

(c) Caso $\mathsf{e} = 1$. Isso se dá somente se $E = 0$ e nesse caso a trajetória é órbita parabólica. De fato, a expressão (46.39) no caso $\mathsf{e} = 1$ representa uma parábola, cujo foco localiza-se em $(0,\ 0)$. O ângulo φ pode assumir todos os valores no intervalo aberto $(-\pi,\ \pi)$.

(d) Caso $\mathsf{e} > 1$. Isso se dá somente se $E > 0$ e nesse caso a trajetória é órbita hiperbólica. De fato, a expressão (46.39) no caso $\mathsf{e} > 1$ representa uma hipérbole. Os focos da hipérbole estão localizados nos pontos $(0,\ 0)$ e $\big(2\mathsf{pe}/\big(\mathsf{e}^2-1\big),\ 0\big)$. O ângulo φ pode assumir todos os valores no intervalo aberto $(-\phi_0,\ \phi_0)$, onde $\phi_0 = \arccos\big(-1/\mathsf{e}\big)$.

É de se observar que a origem, o ponto $(0,\ 0)$ do plano $x-y$, é sempre um ponto focal das cônicas que descrevem as órbitas do Problema de Kepler.

[13] O *semi-latus rectum* de uma cônica é a metade do comprimento do segmento ortogonal ao semieixo maior que passa pelo ponto focal e intercepta a cônica. Vide Seção 46.A, página 2724.

[14] Segundo os dicionários o periastro, ou periápside, "é o ponto da órbita de um corpo celeste ou de uma nave espacial, em que ele se encontra mais próximo do astro em torno do qual gravita" [365]. Dependendo dos astros envolvidos, outros nomes podem ser adotados: *periélio* para o movimento da Terra, ou quaisquer outros planetas, em torno do Sol; *perigeu* para o movimento da Lua ou de satélites artificiais em torno da Terra; *periselene* ou *perilúnio* para o movimento de satélites ou naves espaciais em torno da Lua; *perizene* ou *perijove* para o movimento de satélites em torno de Júpiter; *periares* para o movimento de satélites em torno de Marte; *pericrone* para o movimento de satélites em torno de Saturno; *perigalacticon* para o movimento de estrelas em torno do centro da galáxia a que pertencem etc.

46.2.4 O Problema de Kepler. Determinação das Trajetórias. A Equação de Kepler

Aqui damos continuidade à Seção 46.2.3, página 2673, tratando agora de obter as trajetórias como função do tempo, uma questão de grande relevância na Astronomia Planetária, no estudo do movimento de satélites artificiais, naves especiais, Astronáutica etc.

• **A trajetória como função do tempo. Uma primeira abordagem**

Em primeiro lugar observemos que obteremos a função $\phi(t)$ por meio da relação

$$\phi(t) \;=\; \varphi\big(r(t)\big) \;,$$

com $\varphi(r)$ dada em (46.38) (podemos adotar $c' = 0$) e $r(t)$ obtida por (46.32). Para o Problema de Kepler, a relação (46.32) fica

$$t + c \;=\; \int \left[\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{\kappa}{r} - \frac{\ell^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\right)\right]^{-1/2} dr \;. \tag{46.42}$$

A integral do lado direito pode ser calculada de forma explícita[15]. O resultado sendo:

$$t + c \;=\; \frac{r}{E}\sqrt{\frac{\mu}{2}\big(E - V_{\text{ef}}(r)\big)} - \frac{\kappa}{2}\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{1}{E^{3/2}}\,\text{argtanh}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{E - \frac{\kappa}{2r}}{\sqrt{E - V_{\text{ef}}(r)}}\right) \;, \quad \text{para} \quad E > 0 \;, \tag{46.43}$$

$$t + c \;=\; \frac{r}{E}\sqrt{\frac{\mu}{2}\big(E - V_{\text{ef}}(r)\big)} - \frac{\kappa}{2}\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{1}{(-E)^{3/2}}\,\text{arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{-E}}\frac{E - \frac{\kappa}{2r}}{\sqrt{E - V_{\text{ef}}(r)}}\right) \;, \quad \text{para} \quad E < 0 \;, \tag{46.44}$$

$$t + c \;=\; \frac{1}{3\kappa^2}\sqrt{\frac{2}{\mu}}\big(\ell^2 + \kappa\mu r\big)\sqrt{\kappa r - \frac{\ell^2}{2\mu}} \;, \quad \text{para} \quad E = 0 \;, \tag{46.45}$$

sendo as expressões acima sempre válidas para valores de r para os quais $V_{\text{ef}}(r) < E$.

Nos casos $E > 0$ e $E < 0$ não é possível, infelizmente, inverter a função do lado direito de forma explícita, isto é sem uso de funções transcendentes, de modo a se obter $r(t)$. No caso parabólico, $E = 0$, a inversão é mais fácil, mas ainda assim envolve a resolução de uma equação algébrica de terceiro grau para r.

O problema de obter $r(t)$ nesses casos foi tratado por Kepler (para o caso elíptico, sem uso de Cálculo Diferencial), que elaborou um método engenhoso de abordá-lo, introduzindo certos parâmetros que permitem a inversão após a resolução de uma equação transcendente (no caso elíptico e hiperbólico; no caso parabólico a solução da equação é explícita). Em sua análise, Kepler fez uso de suas três Leis e de ideias geométricas, mas é mais interessante hoje apresentarmos seus resultados de outra forma, como apresentamos a seguir.

• **A trajetória como função do tempo. Uma abordagem paramétrica e a equação de Kepler**

Como comentamos, a tentativa de usar (46.42) para escrever-se uma expressão para a trajetória, expressando r e ϕ como função de t, conduz a equações transcendentes que não podem ser expressas em termos de funções elementares. Kepler enfrentou problemas similares, que resolveu com uso de uma parametrização conveniente que motivou geometricamente. Apresentaremos agora essa parametrização, mas que obteremos do uso do Cálculo Diferencial e Integral. Há três casos a considerar:

1. Caso circular ou elíptico, com $E_{min} \leq E < 0$, sendo $E_{min} := -\frac{1}{2}\frac{\mu\kappa^2}{\ell^2}$.

O primeiro passo é escrever (46.42) na forma

$$t \;=\; \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}}\int \frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\kappa}{|E|}r - \frac{\ell^2}{2\mu|E|}}} \;. \tag{46.46}$$

[15] O cálculo é trabalhoso e seus detalhes não serão apresentados aqui, podendo ser feitos com consulta a tabelas de integrais ou por meio de programas de computação algébrica.

Verifique! Como antes, definimos

$$\mathsf{p} := \frac{\ell^2}{\mu\kappa}\,, \qquad \mathsf{e} := \sqrt{1-\frac{2|E|\ell^2}{\mu\kappa^2}}\,, \qquad \mathsf{a} := \frac{\mathsf{p}}{1-\mathsf{e}^2} = \frac{\kappa}{2|E|} \qquad \text{e} \qquad \mathsf{b} := \frac{\mathsf{p}}{\sqrt{1-\mathsf{e}^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{2\mu|E|}}\,, \tag{46.47}$$

com o que, temos

$$\frac{\ell^2}{2\mu|E|} = \mathsf{pa} = \mathsf{a}^2\big(1-\mathsf{e}^2\big)\,. \tag{46.48}$$

Com isso, temos de (46.34)

$$r_{min} = \frac{\mathsf{p}}{1+\mathsf{e}} = \mathsf{a}(1-\mathsf{e}) \qquad \text{e} \qquad r_{max} = \frac{\mathsf{p}}{1-\mathsf{e}} = \mathsf{a}(1+\mathsf{e})\,.$$

Verifique! Vale notar aqui que

$$r_{min} + r_{max} = 2\mathsf{a}\,,$$

o que é plenamente coerente com a interpretação de $2\mathsf{a}$ como eixo maior da elipse.

A relação (46.46) fica

$$t = \sqrt{\frac{\mu\mathsf{a}}{\kappa}}\int \frac{r\,dr}{\sqrt{\mathsf{a}^2\mathsf{e}^2-(r-\mathsf{a})^2}}\,. \tag{46.49}$$

Nesse ponto introduzimos a parametrização de Kepler, escrevendo

$$r = \mathsf{a}\big(1-\mathsf{e}\cos(\xi)\big)\,. \tag{46.50}$$

O parâmetro ξ variará entre 0 a 2π, sendo que no intervalo $[0,\ \pi]$, r varia entre os valores $\mathsf{a}\big(1-\mathsf{e}\big) = r_{min}$ e $\mathsf{a}\big(1+\mathsf{e}\big) = r_{max}$. Introduzindo a mudança de variáveis (46.50) em (46.49), temos

$$t = \sqrt{\frac{\mu\mathsf{a}^3}{\kappa}}\int \big(1-\mathsf{e}\cos(\xi)\big)\,d\xi$$

e, portanto,

$$t = \sqrt{\frac{\mu\mathsf{a}^3}{\kappa}}\big(\xi-\mathsf{e}\,\mathrm{sen}(\xi)\big) = \frac{\kappa}{2}\sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}}\big(\xi-\mathsf{e}\,\mathrm{sen}(\xi)\big)\,. \tag{46.51}$$

A constante de integração foi escolhida de sorte que $t=0$ quando $\xi=0$, ou seja, quando $r=r_{min}$ e o ponto material se encontra no periastro da órbita.

A equação (46.51) é denominada *equação de Kepler* e a função $K(\xi) := \xi - \mathsf{e}\,\mathrm{sen}(\xi)$ que surge em (46.51) é denominada *função de Kepler*. Na linguagem da Mecânica Celeste, ξ é denominado *anomalia excêntrica* e $K(\xi)$ é denominado *anomalia média*. Ambas as grandezas têm interpretações geométrica, introduzidas por Kepler, mas essas não são relevantes aqui[16]. A função $K:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é inversível, pois $K'(\xi) = 1-\mathsf{e}\cos(\xi) > 0$ para todo $\xi\in\mathbb{R}$ (lembrar que $0\leq\mathsf{e}<1$), o que permite escrever ξ como função de t em (46.51). A função $K^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função transcendente, mas pode ser facilmente calculada numericamente, e por diversos outros métodos, com alta precisão (para uma referência, vide [97]). No caso de órbita circular, com $\mathsf{e}=0$, a função K é simplesmente a função identidade: $K(\xi)=\xi$.

Assim, no caso geral, teremos

$$\xi(t) = K^{-1}\left(\frac{2}{\kappa}\sqrt{\frac{2|E|^3}{\mu}}t\right) \tag{46.52}$$

e, por (46.50),

$$r(t) = \mathsf{a}\left[1-\mathsf{e}\cos\left(K^{-1}\left(\frac{2}{\kappa}\sqrt{\frac{2|E|^3}{\mu}}t\right)\right)\right]\,. \tag{46.53}$$

[16] Supondo-a circular ou elíptica, a anomalia média, por exemplo, é o arco de uma circunferência de raio a (o semieixo maior da elipse) centrada no centro da elipse, que o ponto material descreveria desde sua passagem pelo periastro no instante 0 até o instante t se estivesse se movendo com a velocidade angular média da trajetória real, $2\pi/T$, onde T é o período da órbita.

Além disso,

$$\phi(t) \;=\; \varphi\big(r(t)\big)\;, \tag{46.54}$$

com φ dado em função de r em (46.38) (adotamos $c' = 0$). A expressão para $\phi(t)$ assim obtida não é muito iluminante, mas é explícita e é útil em cálculos astronômicos. Mais interessante é utilizar o parâmetro de Kepler ξ para expressar as coordenadas Cartesianas $(x,\ y)$ da órbita.

Para x temos que $x = r\cos(\varphi)$ e, com uso de (46.39), obtemos $x = \frac{\mathsf{p}-r}{\mathsf{e}}$. Com isso e com (46.50), obtemos após algumas contas simples,

$$x(\xi) \;=\; \mathsf{a}\big(\cos(\xi) - \mathsf{e}\big)\;.$$

Como $x^2 + y^2 - r^2$, temos também

$$y(\xi) \;=\; \mathsf{a}\sqrt{1-\mathsf{e}^2}\,\mathrm{sen}(\xi) \;=\; \mathsf{b}\,\mathrm{sen}(\xi)\;.$$

Verifique!

Assim, em coordenadas Cartesianas a trajetória é

$$\Big(x(t),\ y(t)\Big) \;=\; \mathsf{a}\left(\ \cos\left[K^{-1}\left(\frac{2}{\kappa}\sqrt{\frac{2|E|^3}{\mu}}t\right)\right] - \mathsf{e},\ \ \sqrt{\mathsf{e}^2-1}\,\mathrm{sen}\left[K^{-1}\left(\frac{2}{\kappa}\sqrt{\frac{2|E|^3}{\mu}}t\right)\right]\ \right)\;. \tag{46.55}$$

Como $K(\xi+2\pi) = K(\xi) + 2\pi$, percebemos das diversas fórmulas acima, por exemplo, de (46.51), que o período da trajetória é

$$T \;=\; \kappa\pi\sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}}$$

e com uso de (46.47), obtemos

$$T^2 \;=\; \frac{4\pi^2\mu}{\kappa}\,\mathsf{a}^3$$

(lembrar que a é o semieixo maior da elipse). O leitor há de identificar essa relação com a *Terceira Lei de Kepler*, já aludida em (45.255), página 2635, em nosso tratamento da similitude mecânica da Seção 45.6.3, página 2634.

2. Caso parabólico, com $E = 0$.

Para $E = 0$ a relação (46.42), página 2677, fica

$$t \;=\; \sqrt{\frac{\mu}{2\kappa}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{r-\frac{\mathsf{p}}{2}}}\;, \tag{46.56}$$

onde $\mathsf{p} = \frac{\ell^2}{\mu\kappa}$. Seguindo as mesmas ideias do caso elíptico, procuramos uma parametrização adequada para r. Sugere-se escrever

$$r \;=\; \frac{\mathsf{p}}{2}\big(1+\tan(\xi/2)^2\big) \;=\; \frac{\mathsf{p}}{2}\frac{1}{\cos(\xi/2)^2}\;, \tag{46.57}$$

com $\xi \in (-\pi,\ \pi)$. A equação (46.56) fica

$$t \;=\; \sqrt{\frac{\mu}{2\kappa}}\left(\frac{\mathsf{p}}{2}\right)^{3/2}\int\left(\frac{1+\tan(\xi/2)^2}{\tan(\xi/2)}\right)\frac{\tan(\xi/2)}{\cos(\xi/2)^2}\,d\xi$$

$$= \sqrt{\frac{\mu\mathsf{p}^3}{16\kappa}}\left[\int\frac{1}{\cos(\xi/2)^2}\,d\xi + \int\frac{\mathrm{sen}(\xi/2)^2}{\cos(\xi/2)^4}\,d\xi\right] \;=\; 2\sqrt{\frac{\mu\mathsf{p}^3}{16\kappa}}\left[\tan(\xi/2) + \frac{1}{3}\tan(\xi/2)^3\right]\;.$$

Assim,

$$t \;=\; \frac{1}{2}\frac{\ell^3}{\mu\kappa^2}\left[\tan(\xi/2) + \frac{1}{3}\tan(\xi/2)^3\right]\;. \tag{46.58}$$

A equação (46.58) é a análoga à equação de Kepler (46.51), mas é denominada *equação de Barker*[17].

[17] Thomas Barker (1722–1809). Trabalho original: *"An Account of the Discoveries concerning Comets, with the Way to find their Orbits, and some Improvements in constructing and calculating their Places"*, de 1757.

O parâmetro ξ é aqui também denominado *anomalia excêntrica* e varia no intervalo $(-\pi,\ \pi)$, divergindo nos extremos. A *função de Barker* $B : (-\pi,\ \pi) \to \mathbb{R}$ dada por $B(\xi) := \tan(\xi/2) + \frac{1}{3}\tan(\xi/2)^3$ é inversível, pois $B'(\xi) = 1/\big(2\cos(\xi/2)^4\big) > 0$ em $(-\pi,\ \pi)$. Ao contrário do que ocorre no caso elíptico, a inversa $B^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi,\ \pi)$ pode ser expressa em termos de funções elementares. Mostremos como isso se faz.

Seja a equação $B(\xi) = y$, ou seja, $\tan(\xi/2) + \frac{1}{3}\tan(\xi/2)^3 = y$. Definindo $v = \tan(\xi/2)$, temos a equação cúbica

$$v^3 + 3v - 3y \ = \ 0 \ .$$

Sua única solução real é fornecida pela bem conhecida *fórmula de Cardano*[18] (para sua dedução, vide *e.g.*, [473]), com a qual obtemos

$$v \ = \ \left[\frac{3}{2}y + \sqrt{\frac{9}{4}y^2 + 1}\right]^{1/3} + \left[\frac{3}{2}y - \sqrt{\frac{9}{4}y^2 + 1}\right]^{1/3} \ .$$

Verifique! É um exercício banal verificar também que

$$\left[\frac{3}{2}y - \sqrt{\frac{9}{4}y^2 + 1}\right]^{1/3} \ = \ -\left[\frac{3}{2}y + \sqrt{\frac{9}{4}y^2 + 1}\right]^{-1/3} \ ,$$

de sorte que também podemos escrever

$$v \ = \ \left[\frac{3}{2}y + \sqrt{\frac{9}{4}y^2 + 1}\right]^{1/3} - \left[\frac{3}{2}y + \sqrt{\frac{9}{4}y^2 + 1}\right]^{-1/3} \ .$$

Assim, obtemos

$$\xi \ = \ 2\arctan(v) \ = \ 2\arctan\left(\left[\frac{3}{2}y + \sqrt{\frac{9}{4}y^2 + 1}\right]^{1/3} - \left[\frac{3}{2}y + \sqrt{\frac{9}{4}y^2 + 1}\right]^{-1/3}\right) \ \equiv \ B^{-1}(y) \ .$$

No caso da equação (46.58), temos $y = \alpha t$, com $\alpha := \frac{2\mu\kappa^2}{\ell^3}$. Portanto, temos a solução explícita

$$\xi(t) \ = \ B^{-1}\big(\alpha t\big) \ = \ 2\arctan\left(\left[\frac{3}{2}\alpha t + \sqrt{\frac{9}{4}(\alpha t)^2 + 1}\right]^{1/3} - \left[\frac{3}{2}\alpha t + \sqrt{\frac{9}{4}(\alpha t)^2 + 1}\right]^{-1/3}\right) \ . \tag{46.59}$$

Por (46.57), temos

$$r \ = \ \frac{\mathsf{p}}{2\cos(\xi/2)^2} \ = \ \frac{\mathsf{p}}{1 + \cos(\xi)} \ . \tag{46.60}$$

Porém, (46.39) para o caso $E = 0$ (ou seja, $\mathsf{e} = 1$), informa que $r = \mathsf{p}/\big(1 + \cos(\varphi)\big)$ (novamente, adotamos $c' = 0$). Por comparação, concluímos que

$$\varphi \ = \ \xi \ , \tag{46.61}$$

o que nos informa que, no caso parabólico, a anomalia verdadeira coincide com a anomalia excêntrica.

Observemos agora que de (46.60), (46.59) e (46.61) extraímos

$$r(t) \ = \ \frac{\ell^2}{\mu\kappa}\frac{1}{1 + \cos\left(B^{-1}\left(\frac{2\mu\kappa^2}{\ell^3}\,t\right)\right)} \ . \tag{46.62}$$

Como $\cos\big(2\arctan(\zeta)\big) = \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}$, podemos também escrever

$$r(t) \ = \ \frac{\mathsf{p}}{2}\big(1 + \zeta(t)^2\big) \ = \ \frac{\ell^2}{2\mu\kappa}\big(1 + \zeta(t)^2\big) \ , \tag{46.63}$$

[18] Gerolamo Cardano (1501–1576).

com

$$\zeta(t) \;:=\; \left[\frac{3}{2}\alpha t + \sqrt{\frac{9}{4}(\alpha t)^2+1}\right]^{1/3} - \left[\frac{3}{2}\alpha t + \sqrt{\frac{9}{4}(\alpha t)^2+1}\right]^{-1/3} . \tag{46.64}$$

Coerentemente com resultados anteriores (vide (46.35), página 2675), obtém-se disso que

$$r_{min} \;=\; \frac{\ell^2}{2\mu\kappa} .$$

Para finalizar, as coordenadas Cartesianas da trajetória $\big(x(t),\ y(t)\big)$ podem ser obtidas da seguinte forma. De (46.38), (46.60) e (46.61) e do fato que $x = r\cos(\varphi)$,

$$x(t) \;=\; \mathsf{p} - r(t) \;=\mathsf{p}\frac{\cos\big(\xi(t)\big)}{1+\cos\big(\xi(t)\big)} \qquad \text{e} \qquad y(t) \;=\; \sqrt{r(t)^2 - x(t)^2} \;=\; \mathsf{p}\frac{\operatorname{sen}\big(\xi(t)\big)}{1+\cos\big(\xi(t)\big)} ,$$

com $\xi(t)$ dado em (46.59). Como uso de (46.63), podemos escrever também

$$x(t) \;=\; \frac{\mathsf{p}}{2}\big(1-\zeta(t)^2\big) \qquad \text{e} \qquad y(t) \;=\; \mathsf{p}\,\zeta(t) ,$$

com $\zeta(t)$ dado em (46.64).

3. Caso hiperbólico, com $E > 0$.

O tratamento deste caso é similar ao do caso elíptico. Escrevemos a relação (46.42), página 2677, na forma

$$t \;=\; \sqrt{\frac{\mu}{2E}}\int \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+\frac{\kappa}{E}r-\frac{\ell^2}{2\mu E}}} \;=\; \sqrt{\frac{\mu\mathsf{a}}{\kappa}}\int \frac{r\,dr}{\sqrt{(r+\mathsf{a})^2-\mathsf{a}^2\mathsf{e}^2}} , \tag{46.65}$$

onde agora definimos

$$\mathsf{p} \;:=\; \frac{\ell^2}{\mu\kappa} , \qquad \mathsf{e} \;:=\; \sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{\mu\kappa^2}} , \qquad \mathsf{a} \;:=\; \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{e}^2-1} \;=\; \frac{\kappa}{2E} \qquad \text{e} \qquad \mathsf{b} \;:=\; \frac{\mathsf{p}}{\sqrt{\mathsf{e}^2-1}} \;=\; \frac{\ell}{\sqrt{2\mu E}} . \tag{46.66}$$

Na integral em (46.65), façamos agora a mudança de variáveis

$$r \;=\; \mathsf{a}\big(\mathsf{e}\cosh(\xi)-1\big) , \tag{46.67}$$

com ξ assumindo valores em $\mathbb{R}$. Temos

$$t \;=\; \sqrt{\frac{\mu\mathsf{a}}{\kappa}}\int \mathsf{a}\big(\mathsf{e}\cosh(\xi)-1\big)\,d\xi \;=\; \sqrt{\frac{\mu\mathsf{a}^3}{\kappa}}\Big(\mathsf{e}\operatorname{senh}(\xi)-\xi\Big) . \tag{46.68}$$

Como antes, ξ é denominada *anomalia excêntrica*. A *função de Kepler hiperbólica* $K_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $K_h(\xi) := \mathsf{e}\operatorname{senh}(\xi) - \xi$ e como $K_h'(\xi) = \mathsf{e}\cosh(\xi) - 1 > 0$ (pois $\mathsf{e} > 1$ e $\cosh(\xi) > 1$), temos novamente que K_h é inversível, com a inversa sendo uma função transcendente. Assim, a equação de Kepler hiperbólica (46.68) tem por solução

$$\xi(t) \;=\; K_h^{-1}\left(\sqrt{\frac{\kappa}{\mu\mathsf{a}^3}}t\right) . \tag{46.69}$$

e de (46.67) temos, portanto,

$$r(t) \;=\; \mathsf{a}\left[\mathsf{e}\cosh\left(K_h^{-1}\left(\sqrt{\frac{\kappa}{\mu\mathsf{a}^3}}t\right)\right)-1\right] . \tag{46.70}$$

A anomalia verdadeira $\varphi(t)$ nesse caso é dada novamente por (46.38), página 2675, com $r(t)$ dada em (46.70).

Para as coordenadas Cartesianas da trajetória, temos novamente de (46.39), página 2675, que $x = \big(\mathsf{p}-r\big)/\mathsf{e}$ e $y = \sqrt{r^2-x^2}$. Portanto,

$$x(t) \;=\; \mathsf{a}\Big(\mathsf{e}-\cosh\big(\xi(t)\big)\Big) \qquad \text{e} \qquad y(t) \;=\; \mathsf{a}\sqrt{\mathsf{e}^2-1}\operatorname{senh}\big(\xi(t)\big) ,$$

(verifique!) com $\xi(t)$ dado em (46.69).

46.3 O Problema de Três Corpos e os Pontos de Lagrange

Nesta seção escreveremos o potencial gravitacional entre duas massas m_1 e m_2 separadas por uma distância r na forma usual:

$$U(r) \;=\; -G\frac{m_1 m_2}{r}\;, \qquad\qquad \text{com} \quad G \;\cong\; 6,67430(15)\times 10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$$

sendo a *constante de gravitação universal*, cuja primeira medição precisa foi primeiramente realizada por Cavendish[19] em um famoso experimento datado de 1798. Vide [450] e [112]. Para uma descrição dos problemas atuais de determinação empírica da constante de gravitação universal, G, vide [421] e referências lá citadas.

• **O problema de n corpos**

Consideremos um conjunto de n pontos materiais de massas m_i, e vetores posição $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1,\ \ldots,\ n$. O potencial gravitacional desse sistema é dado por

$$U\big(\vec{x}_1,\ \ldots,\ \vec{x}_n\big) \;=\; -G\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{m_i m_j}{\big\|\vec{x}_i-\vec{x}_j\big\|}\;.$$

O problema de determinar o movimento desse sistema em um sistema de referência inercial é conhecido como *problema de n corpos*. Trata-se de um problema de grande importância em Astronomia, mais especificamente, na Mecânica Celeste e na Astronáutica, por abarcar de forma idealizada o problema da determinação do movimento de planetas do sistema solar (ou de sistemas extrassolares) e de sondas espaciais e satélites artificiais.

As equações diferenciais que regem esse sistema são, pela Segunda Lei de Newton,

$$\ddot{\vec{x}}_i(t) \;=\; G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_j\frac{\vec{x}_j(t)-\vec{x}_i(t)}{\big\|\vec{x}_j(t)-\vec{x}_i(t)\big\|^3}\;, \qquad i\;=\;1,\ \ldots,\ n\;. \tag{46.71}$$

Para $n \geq 3$ esse sistema de equações diferenciais ordinárias é deveras complexo, exibindo até mesmo um comportamento caótico em muitos casos. Vide [157], [90] e [369] para excelentes revisões atualizadas dessas questões, com uma extensa lista de referências adicionais. Para discussões gerais sobre o temas ligados a caos em Mecânica e em Sistemas Dinâmicos, vide também, [546], [239], [327] e [10]. Para uma coleção extensa de notas históricas sobre diversos temas ligados à Mecânica Celeste, vide [364]. Para um extenso tratamento da Mecânica Celeste e aplicações ao sistema solar, vide [368].

Uma solução global do sistema de equações diferenciais (46.71) foi apresentada para o caso $n = 3$ por Sundman[20] entre 1907 e 1912 [497], contrariando a crença ainda hoje difundida de que esse problema não seria tratável por meios analíticos[21]. Sundman fez uso de hipóteses adequadas, devidas a Painlevé[22], para prevenir colisões dos constituintes (especialmente colisões simultâneas dos três corpos). A solução de Sundman expressa as trajetórias em termos de uma série infinita de funções do tempo, série essa que converge uniformemente, mas muito lentamente, sendo de uso prático limitado. Para um tratamento, vide [456] e para uma perspectiva histórica, vide [40].

A solução de Sundman para $n = 3$ foi generalizada para $n > 3$ por Levon K. Babadzanjanz em 1979 [34] e Qiu Dong Wang em 1991 [526].

Vários nomes contribuíram no estudo do problema de n corpos, em particular do problema de três corpos. Começando por Newton (o primeiro a abordar o problema, sem muito sucesso), podemos listar as contribuições historicamente relevantes de nomes como Euler e Lagrange (que identificaram soluções periódicas do problema de três corpos; vide adiante), Laplace[23] (que formulou o problema de estabilidade do sistema solar), Delaunay[24] (que empreendeu um detalhado estudo do sistema Sol-Terra-Lua, com contribuições teóricas originais) e Poincaré (que contribuiu com muitas ideias originais de natureza topológica sobre estabilidade e caos em sistemas dinâmicos e apresentou uma demonstração, infelizmente incorreta, da convergência da série perturbativa para sistemas de n corpos). Além das contribuições já citadas de Sundman,

[19] Henry Cavendish (1731–1810).
[20] Karl Frithiof Sundman (1873–1949).
[21] O que é demonstradamente impossível é resolver esse problema por meio de quadraturas, por não haver aqui um número suficiente de integrais de movimento (para uma discussão a respeito, vide, *e.g.*, [364]). Essa, porém, não foi a abordagem de Sundman.
[22] Paul Painlevé (1863–1933).
[23] Pierre-Simon Laplace (1749–1827).
[24] Charles-Eugène Delaunay (1816–1872).

Babadzanjanz e Wang, destacaríamos no Século XX o desenvolvimento do chamado *Teorema KAM*, de Kolmogorov[25], Arnold[26] e Moser[27] (vide, *e.g.*, [546, 456, 23, 157, 364, 368, 90, 369]), que aplica-se em um contexto muito mais geral.

No que segue, apresentaremos resultados devidos a Euler e Lagrange sobre a existência de soluções periódicas do problema de três corpos planar ligados aos chamados *pontos de Lagrange* e suas generalizações. Esse resultado possui aplicações importantes na Astronomia, no posicionamento de satélites artificiais, na Astronáutica etc. Generalizações das soluções de Euler e Lagrange são apresentadas na Seção 46.3.2, página 2693.

Comentário. Além dessa classe de soluções devida a Euler e Lagrange, são conhecidas mais três classes de soluções periódicas do problema de três corpos, sobre as quais não falaremos nestas Notas. Uma, descoberta nos anos 70 e devida a Roger Broucke[28] e Michel Hénon[29], uma descoberta em 1993 por Cristopher Moore[30] [359], denominada "*figura em oito*", pois a órbita dos três pontos materiais descreve um "8" no espaço (vide Figura 46.5, página 2683) e, mais recentemente, a classe de Milovan Šuvakov and Veljko Dmitrašinović, descoberta em 2013 [499]. No caso do problema de n corpos com $n > 3$, diversas soluções periódicas foram descobertas nas últimas décadas, ficando conhecidas pelo nome de *coreografias*.

Vale ainda comentar que, embora tais soluções periódicas formem um conjunto de medida nula no espaço de soluções, as mesmas despertam interesse por serem úteis na criação de sistemas estáveis de satélites artificiais, sendo procuradas observacionalmente mesmo em sistemas estelares e planetários reais. ♣

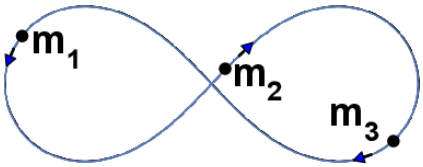

Figura 46.5: Solução periódica do problema de três corpos conhecida como "*figura em oito*".

46.3.1 Os Pontos de Lagrange

Os chamados *pontos de Lagrange*[31], L_1 a L_5, são cinco pontos de equilíbrio do problema de três corpos planar, manifestos em órbitas periódicas circulares. Eles foram descobertos por Euler (L_1, L_2 e L_3) e por Lagrange (L_4 e L_5). Há várias abordagens para seu estudo (algumas das mais simples fazem uso do equilíbrio de forças gravitacionais e das forças centrífugas agindo sobre os três componentes) e, em parte por razões pedagógicas, seguiremos aqui [456], por ser aquele tratamento uma boa exemplificação do uso de transformações canônicas[32], por ser mais elegante e, provavelmente, mais simples. Acrescentamos, porém, muitos detalhes ao tratamento de [456]. Como referência adicional recomendamos o capítulo 4, "The three-body problem and the Lagrangian solutions", de [90], assim como [369] e [368].

Na Seção 46.3.2, página 2693, veremos como os pontos de Lagrange se generalizam para órbitas periódicas, mas não circulares.

Sejam assim três pontos materiais de massas m_1, m_2 e m_3 movendo-se em um plano e interagindo entre si apenas por forças gravitacionais. O Hamiltoniano do sistema é

$$\mathscr{H}\big(\vec{x},\ \vec{p},\ t\big) \ = \ \sum_{i=1}^{3} \frac{\big\|\vec{p}_i\big\|^2}{2m_i} - G \sum_{1\leq i<j\leq 3} \frac{m_i m_j}{\big\|\vec{x}_j - \vec{x}_i\big\|} \ ,$$

sendo $\vec{x}_i$ e $\vec{p}_i$, $i = 1,\ 2,\ 3$, vetores bidimensionais cujas componentes Cartesianas em um sistema de referência inercial são denotadas por x_i^a e p_i^a, $a = 1,\ 2$, respectivamente.

Vamos também assumir estarmos no sistema de referência do centro de massa, localizado na origem do sistema de referência, de sorte que $m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 + m_3\vec{x}_3 = \vec{0}$.

[25] Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987).
[26] Vladimir Igorevich Arnold (1937–2010).
[27] Jürgen Kurt Moser (1928–1999).
[28] Roger A. Broucke (1932–2005).
[29] Michel Hénon (1931–2013).
[30] Cristopher David Moore (1968–).
[31] Também denominados *pontos de libração*.
[32] Usamos, porém, uma notação distinta daquele texto.

Vamos considerar uma transformação dependente do tempo de coordenadas no espaço de fase na qual novas coordenadas são definidas por

$$\vec{Q}_i \ := \ R(\omega t)\vec{x}_i \qquad \text{e} \qquad \vec{P}_i \ := \ R(\omega t)\vec{p}_i \qquad \text{com} \quad i = 1,\ 2,\ 3\ .$$

Aqui, ω é uma constante a ser especificada e

$$R(\theta) \ := \ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ = \ \exp\big(\theta J_2\big)\ , \qquad \text{com} \qquad J_2 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,$$

é uma matriz de rotação no plano por um ângulo θ.

Como veremos mais adiante, a adoção dessas novas coordenadas corresponde à adoção de um sistema de referência girante com velocidade angular ω. O valor preciso de ω a ser usado será também determinado no que segue.

Antes de prosseguir, comentemos que se trata, de fato, de uma transformação canônica, pois sua matriz Jacobiana é a matriz 12×12 em blocos diagonais

$$\mathcal{J} \ = \ \begin{pmatrix} R(\omega t) & & & & & \\ & R(\omega t) & & & & \\ & & R(\omega t) & & & \\ & & & R(\omega t) & & \\ & & & & R(\omega t) & \\ & & & & & R(\omega t) \end{pmatrix}\ ,$$

a qual, devido ao fato de $R(\omega t)$ ser uma matriz ortogonal 2×2, satisfaz a condição (45.292), como facilmente se verifica (faça-o!).

A função geratriz F_2 associada à essa transformação é

$$F_2\big(\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3,\ \vec{P}_1,\ \vec{P}_2,\ \vec{P}_3,\ t\big) \ = \ \sum_{i=1}^{3} \Big\langle \vec{P}_i,\ R(\omega t)\vec{x}_i \Big\rangle\ , \tag{46.72}$$

com o que, podemos facilmente verificar as relações (45.306) e (45.307), página 2653. Por (45.308), página 2653, o novo Hamiltoniano é dado por

$$\mathscr{H}'\big(\vec{Q},\ \vec{P},\ t\big) \ = \ \mathscr{H}\big(\vec{x},\ \vec{p},\ t\big) + \frac{\partial F_2}{\partial t}\big(\vec{x},\ \vec{P},\ t\big)\ ,$$

sendo que devemos expressar as velhas coordenadas $\vec{x}$ e $\vec{p}$ em termos das novas $\vec{Q}$ e $\vec{P}$. Como $\frac{d}{dt}R(\omega t) = \omega J_2 R(\omega t)$, temos por (46.72)

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} \ = \ \omega \sum_{i=1}^{3} \Big\langle \vec{P}_i,\ J_2 R(\omega t)\vec{x}_i \Big\rangle \ = \ \omega \sum_{i=1}^{3} \Big\langle \vec{P}_i,\ J_2 \vec{Q}_i \Big\rangle\ .$$

Portanto, temos para o novo Hamiltoniano,

$$\mathscr{H}'\big(\vec{Q},\ \vec{P},\ t\big) \ = \ \sum_{i=1}^{3} \frac{\big\|\vec{P}_i\big\|^2}{2m_i} - G \sum_{1 \le i < j \le 3} \frac{m_i m_j}{\big\|\vec{Q}_j - \vec{Q}_i\big\|} + \omega \sum_{i=1}^{3} \Big\langle \vec{P}_i,\ J_2 \vec{Q}_i \Big\rangle\ .$$

Consequentemente, as novas equações de movimento são (em notação vetorial),

$$\dot{\vec{Q}}_i \ = \ \frac{\partial \mathscr{H}'}{\partial \vec{P}_i} \ = \ \frac{1}{m_i}\vec{P}_i + \omega J_2 \vec{Q}_i\ , \tag{46.73}$$

$$\dot{\vec{P}}_i \ = \ -\frac{\partial \mathscr{H}'}{\partial \vec{Q}_i} \ = \ G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} m_i m_j \frac{\vec{Q}_j - \vec{Q}_i}{\big\|\vec{Q}_j - \vec{Q}_i\big\|^3} - \omega J_2 \vec{P}_i\ , \tag{46.74}$$

$i = 1,\ 2,\ 3$. Acima, usou-se que $J_2^T = -J_2$.

Nós procuramos soluções de equilíbrio dessas equações, para as quais, portanto, tenha-se $\dot{\vec{Q}}_i = 0$ e $\dot{\vec{P}}_i = 0$ para todos

$i = 1,\ 2,\ 3$. Logo, deve valer,

$$\frac{1}{m_i}\vec{P}_i + \omega J_2 \vec{Q}_i \ = \ \vec{0} \qquad \text{e} \tag{46.75}$$

$$G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} m_i m_j \frac{\vec{Q}_j - \vec{Q}_i}{\left\|\vec{Q}_j - \vec{Q}_i\right\|^3} - \omega J_2 \vec{P}_i \ = \ \vec{0}\ , \tag{46.76}$$

$i = 1,\ 2,\ 3$. Essas totalizam 12 condições sobre as 12 coordenadas $\vec{Q}$ e $\vec{P}$. De (46.75) escrevemos $\vec{P}_i = m_i \omega J_2 \vec{Q}_i$ e inserindo isso em (46.76) e usando que $(J_2)^2 = -\mathbb{1}_2$, temos, finalmente,

$$\omega^2 \vec{Q}_i \ = \ -G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} m_j \frac{\vec{Q}_j - \vec{Q}_i}{\left\|\vec{Q}_j - \vec{Q}_i\right\|^3}\ , \qquad i = 1,\ 2,\ 3\ . \tag{46.77}$$

Essa é a equação de equilíbrio procurada e envolve apenas as novas coordenadas $\vec{Q}$ e a constante ω, ainda a ser adequadamente fixada. É relevante recordarmos que, pela hipótese de equilíbrio, as coordenadas $\vec{Q}_i$ são constantes no tempo para cada $i = 1,\ 2,\ 3$.

Fisicamente, as relações (46.77) representam as relações de equilíbrio entre as forças de atração gravitacional mútuas entre os corpos e as forças centrífugas experimentadas pelos corpos em um sistema não inercial girante com velocidade angular ω.

O leitor há de convencer-se que as relações de equilíbrio (46.77) geneneralizam-se facilmente para o caso de um sistema de n pontos materiais, assumindo a forma

$$\omega^2 \vec{Q}_i \ = \ -G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_j \frac{\vec{Q}_j - \vec{Q}_i}{\left\|\vec{Q}_j - \vec{Q}_i\right\|^3}\ , \qquad i = 1,\ \ldots,\ n\ . \tag{46.78}$$

Na Seção 46.3.2, página 2693, apresentaremos um segundo método de deduzir as relações de equilíbrio (46.77) e (46.78), devido a Lagrange.

E. 46.5 *Exercício*. Novamente para o caso $n = 3$, como $m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 + m_3\vec{x}_3 = \vec{0}$ e $\vec{Q}_i = R(\omega t)\vec{x}_i$, $i = 1,\ 2,\ 3$, devemos ter $m_1\vec{Q}_1 + m_2\vec{Q}_2 + m_3\vec{Q}_3 = \vec{0}$. Usando diretamente (46.77), verifique a validade dessa última relação. ✠

Denominemos $R_{ij} \equiv R_{ji} := \left\|\vec{Q}_j - \vec{Q}_i\right\|$, $i,\ \in \{1,\ 2,\ 3\}$ com $i \neq j$. Como já comentamos, cada R_{ij} é constante no tempo.

Nas Seções que seguem, Seções 46.3.1.1 e 46.3.1.2, vamos analisar as soluções da equação algébrica apresentada em (46.77). Há dois casos a se considerar, mutuamente exclusivos: **1º** os pontos $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ e $\vec{Q}_3$ compõem um triângulo equilátero; **2º** os pontos $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ e $\vec{Q}_3$ não compõem um triângulo equilátero (em cujo caso demonstraremos que eles são colineares).

46.3.1.1 As Soluções das Equações de Equilíbrio (46.77). O Caso Equilátero

Nesse caso, a condição de termos um triângulo equilátero significa $R_{12} = R_{13} = R_{23} \equiv R$. Com isso, (46.77) fica

$$\omega^2 \vec{Q}_i \ = \ -\frac{G}{R^3}\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} m_j \vec{Q}_j - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} m_j \vec{Q}_i\right]\ , \qquad i = 1,\ 2,\ 3\ .$$

Como $m_1\vec{Q}_1 + m_2\vec{Q}_2 + m_3\vec{Q}_3 = \vec{0}$, tem-se $\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} m_j \vec{Q}_j = -m_i \vec{Q}_i$ e obtemos

$$\omega^2 \vec{Q}_i \ = \ \frac{G}{R^3}\left(\sum_{j=1}^{3} m_j\right)\vec{Q}_i \ = \ \frac{GM}{R^3}\vec{Q}_i\ , \qquad i = 1,\ 2,\ 3\ ,$$

onde $M := m_1 + m_2 + m_3$. Consequentemente, devemos ter

$$\omega \;=\; \pm\sqrt{\frac{GM}{R^3}}\;.$$

O período de rotação do triângulo, $T = 2\pi/\omega$, satisfaz $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}R^3$, o que é mais uma manifestação da *Terceira Lei de Kepler*. Para um entendimento dessa ocorrência, vide Seção 45.6.3, página 2634.

Retornando às coordenadas originais $\vec{x}_i = R(-\omega t)\vec{Q}_i$, concluímos que o triângulo formado por $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ e $\vec{x}_3$ é também equilátero de lados iguais a R. Cada ponto gira com velocidade angular constante $-\omega = \mp\sqrt{\frac{GM}{R^3}}$ em torno do centro de massa que, por escolha, coincide com a origem. Essa situação é ilustrada na Figura 46.6, página 2686.

Essa solução periódica e de equilíbrio do problema de três corpos foi encontrada por Lagrange em 1772 [298].

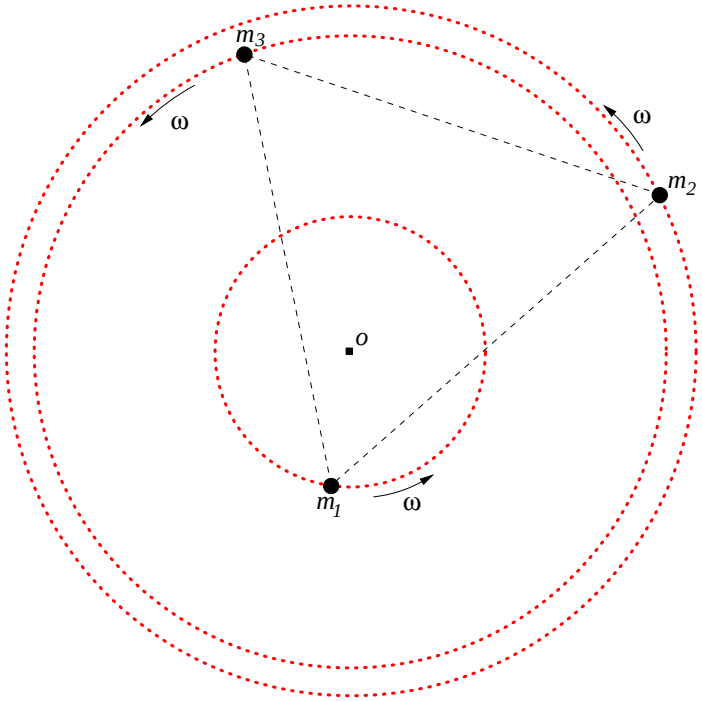

Figura 46.6: Ilustração dos pontos de equilíbrio encontrados por Lagrange para o problema de três corpos planar. Nos vértices do triângulo equilátero encontram-se pontos materiais de massas m_1, m_2 e m_3, os quais giram com velocidade angular ω em torno da origem O, que coincide com o centro de massa dos três pontos. Os três círculos indicam as órbitas dos pontos materiais e são todos centrados no centro de massa O. Seus raios podem ser diferentes. Se a distância entre os pontos (ou seja, o lado do triângulo) for R, então $\omega \;=\; \pm\sqrt{\frac{GM}{R^3}}$, com $M = m_1 + m_2 + m_3$.

Caso m_1 seja muito maior que m_2 e m_3, o centro de massa é praticamente coincidente com a posição de m_1. A Figura 46.7, página 2687, ilustra a situação neste caso. Se considerarmos um segundo ponto material de massa $m_2 \ll m_1$ haverá dois outros pontos de equilíbrio, denominados *pontos de Lagrange* L_4 *e* L_5, ambos formando um triângulo equilátero com m_1 e m_2, um deles, L_4, 60° à frente do movimento de m_2 e outro, L_5, 60° atrás de m_2. Na situação de equilíbrio, uma massa $m_3 \ll m_1$ colocada em L_4 ou L_5 se moverá, conjuntamente com m_2 em um movimento de rotação com velocidade angular ω em torno de m_1, sendo $\omega \;=\; \pm\sqrt{\frac{GM}{R^3}}$, onde R o lado do triângulo equilátero (que coincide com o raio da órbita circular de m_2 e m_3 indicada na figura).

No sistema solar uma situação análoga a essa é conhecida considerando-se o Sol (a massa m_1), Júpiter (a massa m_2) e dois conjuntos de asteroides ocupando as proximidades dos pontos de Lagrange L_4 e L_5, denominados *Troianos* (de massa desprezível face aos dois outros componentes). Como veremos adiante, os pontos L_4 e L_5 nem sempre são pontos de equilíbrio estável, mas no caso do sistema Sol-Júpiter o são.

Atualmente (ano de 2022) são conhecidos asteroides Troianos acompanhando os seguintes planetas: Vênus (1 em L_4),

Terra (2 em L_4, descobertos em 2010 e 2020, respectivamente), Marte (1 em L_4, 15 em L_5), Júpiter (7508 em L_4, 4044 em L_4), Urano (2 em L_4) e Netuno (24 em L_4, 4 em L_5), ou seja, todos exceto Mercúrio e Saturno, embora duas das Luas de Saturno exibam Troianos.

Desde 1961 é também sabido que os pontos L_4 e L_5 do sistema Terra-Lua são ocupados por poeira cósmica, uma descoberta do astrônomo Kordylewski[33]. Outro fenômeno relacionado é a existência de uma região luminosa do céu noturno, de formato aproximadamente ovalado, denominada *Gegenschein*, sempre observada (sob boas condições atmosféricas e sem Lua) em oposição ao Sol, especialmente próximo à meia-noite. Trata-se de uma concentração de poeira cósmica orbitando a vizinhança do ponto de Lagrange L_2 (vide adiante) do sistema Sol-Terra e que reflete luz solar. O Gegenschein foi primeiramente observado por diversos astrônomos ao longo do século XIX[34].

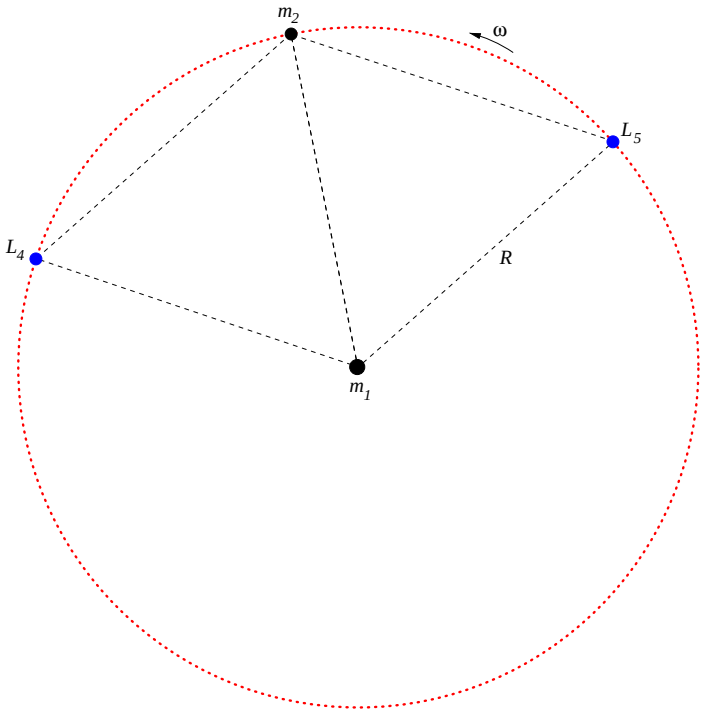

Figura 46.7: A situação em que $m_1 \gg m_2$ e $m_1 \gg m_3$. O centro de massa praticamente coincide com a posição de m_1. Os pontos de equilíbrio L_4 e L_5 (em azul), denominados *pontos de Lagrange*, formam dois triângulos equiláteros com m_1 e m_2. Ambos os triângulos giram em torno de m_1 com velocidade angular de rotação $\omega = \pm\sqrt{\frac{GM}{R^3}}$, sendo R o lado dos triângulos equiláteros (que coincide com o raio da órbita circular de m_2 e m_3 indicada na figura).

46.3.1.2 As Soluções das Equações de Equilíbrio (46.77). O Caso Não Equilátero

O caso não equilátero fornecerá mais três pontos de equilíbrio. Esse foi historicamente o primeiro conjunto de pontos de equilíbrio com órbitas periódicas encontrado, feito devido a Euler, em 1767 [147].

• **Colinearidade**

Primeiramente mostremos que caso as soluções $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ e $\vec{Q}_3$ de (46.77) não formarem um triângulo equilátero, então eles são colineares. Como $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ e $\vec{Q}_3$ formam um triângulo equilátero, ao menos uma das distâncias R_{ij} é diferente das demais. Sem perda de generalidade, vamos supor que $R_{23} \neq R_{13}$.

[33] Kazimierz Kordylewski (1903–1981).

[34] O Gegenschein é similar em sua natureza a outro fenômeno luminoso observado no céu noturno, denominado *Luz Zodiacal*, o qual também é produzido por reflexão de luz solar por poeira cósmica mas, no caso, dispersa ao longo de todo o céu, sendo melhor visível ao longo do plano da eclíptica. A *Luz Zodiacal*, descrita ao menos desde o século XVII, foi objeto da tese de doutoramento de Brian Harold May (1947–), defendida no Imperial College de Londres em 2007, intitulada "A Survey of Radial Velocities in the Zodiacal Dust Cloud". Brian May é mais conhecido por ter sido guitarrista e compositor do grupo *Queen*.

Se escrevermos explicitamente a equação (46.77) para $i = 1,\ 2,\ 3$, temos

$$\omega^2\vec{Q}_1 \;=\; -\frac{Gm_2}{R_{12}^3}(\vec{Q}_2-\vec{Q}_1)-\frac{Gm_3}{R_{13}^3}(\vec{Q}_3-\vec{Q}_1)\ , \tag{46.79}$$

$$\omega^2\vec{Q}_2 \;=\; -\frac{Gm_1}{R_{12}^3}(\vec{Q}_1-\vec{Q}_2)-\frac{Gm_3}{R_{23}^3}(\vec{Q}_3-\vec{Q}_2)\ , \tag{46.80}$$

$$\omega^2\vec{Q}_3 \;=\; -\frac{Gm_1}{R_{13}^3}(\vec{Q}_1-\vec{Q}_3)-\frac{Gm_2}{R_{23}^3}(\vec{Q}_2-\vec{Q}_3)\ . \tag{46.81}$$

A relação (46.81) pode ser reescrita como

$$\vec{0} \;=\; -\frac{m_1}{R_{13}^3}\vec{Q}_1-\frac{m_2}{R_{23}^3}\vec{Q}_2+\left(-\frac{\omega^2}{G}+\frac{m_1}{R_{13}^3}+\frac{m_2}{R_{23}^3}\right)\vec{Q}_3\ . \tag{46.82}$$

Pela condição do centro de massa, podemos escrever $m_1\vec{Q}_1 = -m_2\vec{Q}_2 - m_3\vec{Q}_3$ e substituindo isso em (46.82), temos

$$\left(\frac{1}{R_{13}^3}-\frac{1}{R_{23}^3}\right)m_2\vec{Q}_2 \;=\; \left(\frac{\omega^2}{G}-\frac{m_1+m_3}{R_{13}^3}-\frac{m_2}{R_{23}^3}\right)\vec{Q}_3\ . \tag{46.83}$$

Como $R_{23} \neq R_{13}$, o coeficiente que multiplica $\vec{Q}_2$ é não nulo e, com isso, concluímos que $\vec{0}$, $\vec{Q}_2$ e $\vec{Q}_3$ são colineares. Como $m_1\vec{Q}_1 = -m_2\vec{Q}_2 - m_3\vec{Q}_3$, concluímos que os vetores $\vec{0}$, $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ e $\vec{Q}_3$ são colineares.

Uma vez estabelecida a colinearidade no caso não equilátero, podemos dispensar a condição específica $R_{23} \neq R_{13}$ e fazer uso apenas do fato de $\vec{0}$, $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ e $\vec{Q}_3$ serem colineares.

Como $\vec{0}$, $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ e $\vec{Q}_3$ são colineares, existe um versor $\hat{\zeta}$ tal que $\vec{Q}_i = z_i\hat{\zeta}$, com $z_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1,\ 2,\ 3$. A condição de centro de massa $m_1\vec{Q}_1 + m_2\vec{Q}_2 + m_3\vec{Q}_3 = \vec{0}$ significa que $m_1z_2 + m_2z_2 + m_3z_3 = 0$. Com isso, um dos z_i deve ter um sinal distinto dos outros dois.

• **Três soluções colineares**

Temos a considerar três casos distintos: $z_1 < z_2 < z_3$, $z_1 < z_3 < z_2$ e $z_3 < z_1 < z_2$. Os três demais casos repetem esses. Por exemplo, a solução com $z_3 < z_2 < z_1$ é idêntica à solução com $z_1 < z_2 < z_3$, pois equivale a trocar-se o versor $\hat{\zeta}$ por $-\hat{\zeta}$.

Nos três casos que consideramos procuraremos expressar as soluções em termos de R_{12}, pois iremos posteriormente analisar o que ocorre no limite em que m_3 é muito pequena se comparada a m_1 e m_2, uma situação de particular interesse na Astronomia (*e.g.*, sistema Sol-Terra-satélite artificial).

A. A solução para $z_1 < z_2 < z_3$.

Aqui temos $z_1 < z_2 < z_3$, ou seja, o ponto material de massa m_2 seja intermediário aos demais. Com isso, temos

$$z_3 - z_2 \;=\; R_{23} > 0\ , \quad z_2 - z_1 \;=\; R_{12} > 0 \quad \text{e} \quad z_3 - z_1 \;=\; R_{13} > 0\ . \tag{46.84}$$

Agora, por (46.84), é claro que $R_{23} = R_{13} - R_{12}$. Definimos

$$\rho \;:=\; \frac{R_{12}}{R_{13}} \qquad \text{e temos} \qquad \frac{R_{23}}{R_{13}} \;=\; 1-\rho\ .$$

A resolução é apresentada em detalhe no Apêndice 46.B, página 2731. Como consequência daquela análise, temos

para $z_1 < z_2 < z_3$, a solução

$$\omega^2 = \frac{MG}{R_{13}^3}\left(\frac{m_2\rho_0^{-2}+m_3}{m_2\rho_0+m_3}\right) = \frac{MG}{R_{12}^3}\left(\frac{m_2\rho_0+m_3\rho_0^3}{m_2\rho_0+m_3}\right) , \tag{46.85}$$

$$z_1 = -\frac{R_{13}}{M}\big(m_2\rho_0+m_3\big) = -\frac{R_{12}}{M}\rho_0^{-1}\big(m_2\rho_0+m_3\big) , \tag{46.86}$$

$$z_2 = \frac{R_{13}}{M}\big(m_1\rho_0-m_3(1-\rho_0)\big) = \frac{R_{12}}{M}\rho_0^{-1}\big(m_1\rho_0-m_3(1-\rho_0)\big) , \tag{46.87}$$

$$z_3 = \frac{R_{13}}{M}\big(m_2(1-\rho_0)+m_1\big) = \frac{R_{12}}{M}\rho_0^{-1}\big(m_2(1-\rho_0)+m_1\big) , \tag{46.88}$$

em termos de R_{13} (ou R_{12}), sendo ρ_0 o (único!) zero da função

$$f_{II}(\rho) := \frac{m_2\rho^{-2}+m_3}{m_2\rho+m_3} - \frac{m_2(1-\rho)^{-2}+m_1}{m_2(1-\rho)+m_1} , \qquad \rho\in(0,\ 1) , \tag{46.89}$$

que é contínua em $(0,\ 1)$. No Apêndice 46.B, página 2731, provamos que essa função f_{II} possui, como função de ρ, um zero no intervalo $(0,\ 1)$ e que esse zero é único, que denotamos por ρ_0. Acima, $R_{12}/R_{13}=\rho_0$ e $R_{23}/R_{13}=1-\rho_0$.

E. 46.6 *Exercício*. Constate usando (46.86)–(46.88) que, sem surpresa, temos $z_3-z_1=R_{13}$, $z_3-z_2=R_{23}$, $z_2-z_1=R_{12}$. ✠

B. A solução para $z_1 < z_3 < z_2$.

Aqui temos $z_1 < z_3 < z_2$, ou seja, o ponto material de massa m_3 é intermediário aos demais. A solução pode ser obtida da solução do item **A** pela permuta de índices $2 \leftrightarrow 3$. Com isso, temos

$$z_2-z_3 = R_{23}>0 , \quad z_3-z_1 = R_{13}>0 \quad \text{e} \quad z_2-z_1 = R_{12}>0 . \tag{46.90}$$

Agora, por (46.90), é claro que $R_{23}=R_{12}-R_{13}$. Definimos

$$\rho := \frac{R_{13}}{R_{12}} \qquad \text{e temos} \qquad \frac{R_{23}}{R_{12}} = 1-\rho .$$

Obtemos da solução do item **A**,

$$\omega^2 = \frac{MG}{R_{12}^3}\left(\frac{m_3\rho_0^{-2}+m_2}{m_3\rho_0+m_2}\right) , \tag{46.91}$$

$$z_1 = -\frac{R_{12}}{M}\big(m_3\rho_0+m_2\big) , \tag{46.92}$$

$$z_2 = \frac{R_{12}}{M}\big(m_3(1-\rho_0)+m_1\big) , \tag{46.93}$$

$$z_3 = \frac{R_{12}}{M}\big(m_1\rho_0-m_2(1-\rho_0)\big) , \tag{46.94}$$

em termos de R_{12}, sendo ρ_0 o (único!) zero da função $f_I(\rho)$ no intervalo $(0,\ 1)$, onde

$$f_I(\rho) := \frac{m_3\rho^{-2}+m_2}{m_3\rho+m_2} - \frac{m_3(1-\rho)^{-2}+m_1}{m_3(1-\rho)+m_1} , \qquad \rho\in(0,\ 1) . \tag{46.95}$$

Aqui, $R_{13}/R_{12}=\rho_0$ e $R_{23}/R_{12}=1-\rho_0$. O fato de f_I possuir, como função de ρ, um zero no intervalo $(0,\ 1)$ e que esse zero é único é demonstrado no Apêndice 46.B, página 2731.

C. A solução para $z_3 < z_1 < z_2$.

Aqui temos $z_3 < z_1 < z_2$, ou seja, o ponto material de massa m_1 é intermediário aos demais. Essa solução pode ser obtida da solução do item **B** pela permuta de índices $1 \leftrightarrow 3$. Com isso, temos

$$z_2 - z_1 \;=\; R_{12} > 0\,, \quad z_1 - z_3 \;=\; R_{13} > 0 \quad \text{e} \quad z_2 - z_3 \;=\; R_{23} > 0\,. \tag{46.96}$$

Agora, por (46.96), é claro que $R_{12} = R_{23} - R_{13}$. Definimos

$$\rho \;:=\; \frac{R_{13}}{R_{23}} \qquad \text{e temos} \qquad \frac{R_{12}}{R_{23}} \;=\; 1 - \rho\,.$$

Obtemos, da solução do item **B**,

$$\omega^2 \;=\; \frac{MG}{R_{23}^3}\left(\frac{m_1\rho_0^{-2} + m_2}{m_1\rho_0 + m_2}\right) \;=\; \frac{MG}{R_{12}^3}\left(\frac{m_1(1-\rho_0) + m_3(1-\rho_0)^3}{m_1(1-\rho_0) + m_3}\right)\,, \tag{46.97}$$

$$z_1 \;=\; \frac{R_{23}}{M}\big(m_3\rho_0 - m_2(1-\rho_0)\big) \;=\; \frac{R_{12}}{M}(1-\rho_0)^{-1}\big(m_3\rho_0 - m_2(1-\rho_0)\big)\,, \tag{46.98}$$

$$z_2 \;=\; \frac{R_{23}}{M}\big(m_1(1-\rho_0) + m_3\big) \;=\; \frac{R_{12}}{M}(1-\rho_0)^{-1}\big(m_1(1-\rho_0) + m_3\big)\,, \tag{46.99}$$

$$z_3 \;=\; -\frac{R_{23}}{M}\big(m_1\rho_0 + m_2\big) \;=\; -\frac{R_{12}}{M}(1-\rho_0)^{-1}\big(m_1\rho_0 + m_2\big)\,, \tag{46.100}$$

em termos de R_{23} ou R_{12}, sendo ρ_0 o (único!) zero da função $f_{III}(\rho)$ no intervalo $(0,\ 1)$, onde

$$f_{III}(\rho) \;:=\; \frac{m_1\rho^{-2} + m_2}{m_1\rho + m_2} - \frac{m_1(1-\rho)^{-2} + m_3}{m_1(1-\rho) + m_3}\,, \qquad \rho \in (0,\ 1)\,. \tag{46.101}$$

Aqui, $R_{13}/R_{23} = \rho_0$ e $R_{12}/R_{23} = 1 - \rho_0$. Em (46.97) usamos que $\frac{m_1\rho_0^{-2}+m_2}{m_1\rho_0+m_2} = \frac{m_1(1-\rho_0)^{-2}+m_3}{m_1(1-\rho_0)+m_3}$, por ρ_0 ser um zero de f_{III}.

Novamente, o fato de f_{III} possuir, como função de ρ, um zero no intervalo $(0,\ 1)$ e que esse zero é único é demonstrado no Apêndice 46.B, página 2731.

• **Os Pontos de Lagrange L_1, L_2 e L_3**

Em Astronomia e no posicionamento de satélites artificiais as três situações acima descritas têm particular interesse. Consideremos a situação em que m_1 é maior que m_2 e m_3 é desprezível face aos outros dois. Isso ocorre, por exemplo, se m_1 é a massa do Sol, m_2 a massa da Terra e m_3 é a massa de um satélite artificial ou sonda espacial.

1. No caso $z_1 < z_3 < z_2$ o ponto de equilíbrio z_3 é denominado *ponto de Lagrange* L_1.
2. No caso $z_1 < z_2 < z_3$ o ponto de equilíbrio z_3 é denominado *ponto de Lagrange* L_2.
3. No caso $z_3 < z_1 < z_2$ o ponto de equilíbrio z_3 é denominado *ponto de Lagrange* L_3.

Vide Figura 46.9, página 2692. Como dissemos, esses pontos L_1, L_2 e L_3 foram primeiramente identificados por Euler, na obra já citada, anteriormente à descoberta dos pontos L_4 e L_5 por Lagrange.

Várias missões espaciais foram instaladas em órbita do ponto L_2 do par Sol-Terra, o mais notório e recente (2022) é o *Telescópio Espacial James Webb*, da NASA. Outra missão importante instalada em órbita do ponto L_2 do par Sol-Terra foi a sonda *WMAP*, também da NASA, atuante entre 2001 e 2010, responsável por medidas precisas da distribuição da radiação cósmica de fundo em micro-ondas. A sonda *WMAP* foi substituída por outra sonda denominada *Planck*, da ESA, atuante entre 2009 e 2013 e também instalada em órbita do ponto L_2 do par Sol-Terra. A sonda *Planck* também destinava-se a medir a distribuição da radiação cósmica de fundo em micro-ondas e no infravermelho. Também o ponto L_1 do par Sol-Terra recebeu diversas missões, como a sonda *SOHO*, da ESA, dedicada à observação da atividade solar, e planejam-se missões de observação de atividade solar para os pontos L_4 e L_5. O ponto L_3 não foi ainda considerado por ficar oposto ao Sol (vide Figura 46.9, página 2692). Há também missões espaciais no ponto de Lagrange L_2 do par Terra-Lua[35].

[35] Vide https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_objects_at_Lagrange_points para uma lista maior de objetos e missões espaciais a diversos pontos de Lagrange.

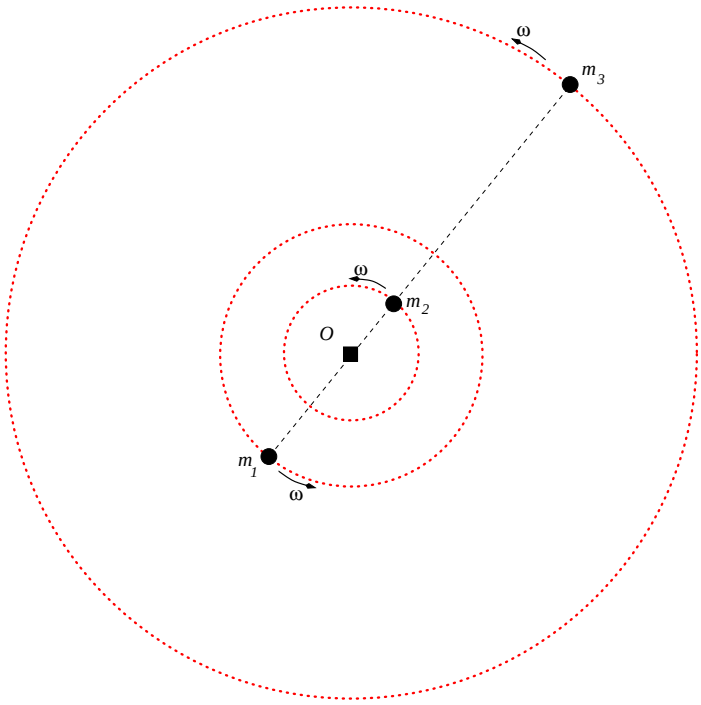

Figura 46.8: Uma solução colinear de equilíbrio do problema de três corpos planar. O ponto O é o centro de massa dos três pontos materiais de massas m_1, m_2 e m_3, que revolvem em torno do centro de massa com a mesma velocidade angular, ω, de modo a permanecerem colineares. Aqui temos o caso $z_1 < z_2 < z_3$, sendo $\hat{\zeta}$ o versor que aponta no sentido de m_1 a m_3.

46.3.1.3 Os Pontos de Lagrange L_1, L_2 e L_3 quando $m_1 \gg m_2 \gg m_3$

O problema de três corpos é dito *restrito* quando uma das massas é desprezível face as demais. Aqui consideraremos os pontos de Lagrange L_1, L_2 e L_3 na situação em que $m_1 \gg m_2 \gg m_3$, quando m_1 é denominada *massa primária*, m_2 *massa secundária* e m_3 *massa de teste*.

Uma situação de interesse é aquela que m_1 é a massa do Sol, m_2 é a massa da Terra e m_3 a massa de uma sonda espacial ou satélite artificial (por exemplo, um telescópio espacial) a ser colocado em um dos pontos de Lagrange L_1, L_2 ou L_3 do sistema Sol-Terra. Um parâmetro relevante é a razão m_2/m_1. No caso do sistema Sol-Terra temos $m_2/m_1 \cong 2,99 \times 10^{-6}$.

Vamos agora analisar o que ocorre com as soluções colineares (46.85)–(46.88), (46.91)–(46.94) e (46.97)–(46.100) quando m_3 é desprezível face a m_1 e m_2 e m_1 é muito maior que m_2.

Como é natural, os resultados que apresentaremos são expressos em termos da distância R_{12} entre a massa primária e a secundário (por exemplo, a distância entre Terra e o Sol). Como antes, $M = m_1 + m_2 + m_3 \cong m_1 + m_2$.

Resumindo os resultados, cujos cômputos serão apresentados com detalhe no Apêndice 46.C, página 2733, temos o seguinte:

L_1. Caso $z_1 < z_3 < z_2$. O ponto de Lagrange L_1.

$$\omega^2 = \frac{MG}{R_{12}^3}\,, \qquad z_1 = 0\,, \qquad z_2 = R_{12}\,, \qquad z_3 = R_{12}\left(1 - \left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{1/3}\right)\,. \tag{46.102}$$

L_2. Caso $z_1 < z_2 < z_3$. O ponto de Lagrange L_2.

$$\omega^2 = \frac{MG}{R_{12}^3}\,, \qquad z_1 = R_{12}\frac{m_2}{M} \cong 0\,, \qquad z_2 = R_{12}\frac{m_1}{M} \cong R_{12}\,, \qquad z_3 = R_{12}\left(1 + \left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{1/3}\right)\,. \tag{46.103}$$

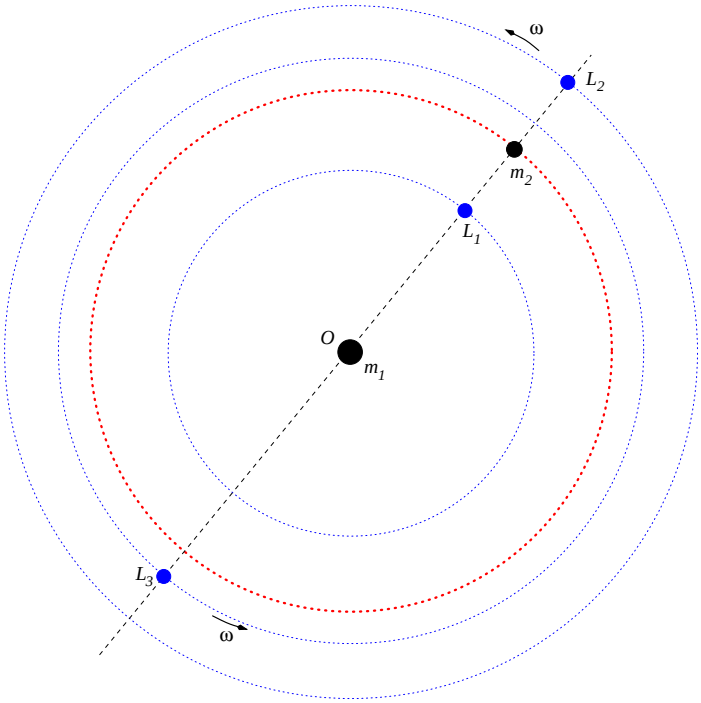

Figura 46.9: Esquema indicando os pontos de Lagrange L_1, L_2 e L_3 de um sistema composto por três massas $m_1 \gg m_2 \gg m_3$ (por exemplo, Sol, Terra, satélite artificial), de sorte que o centro de massa O praticamente coincide com a posição da massa primária m_1. Os pontos de Lagrange são indicados em azul, assim como suas órbitas circulares. A massa m_3 pode ser colocada em qualquer dos pontos L_1, L_2 ou L_3 de modo a manter o sistema em equilíbrio. A massa secundária m_2 roda em torno do centro de massa com velocidade angular ω, a mesma dos pontos L_1, L_2 e L_3, de sorte que os pontos L_3, O, L_1, m_2 e L_2 permanecem colineares. Os pontos L_1 e L_2 são aproximadamente equidistantes da massa m_2, enquanto que o ponto L_3 dista da massa secundária m_2 um pouco mais que o diâmetro da órbita de m_2.

L_3. Caso $z_3 < z_1 < z_2$. O ponto de Lagrange L_3.

$$\omega^2 = \frac{MG}{R_{12}^3}\,, \qquad z_1 = R_{12}\frac{m_2}{M} \cong 0\,, \qquad z_2 = R_{12}\frac{m_1}{M} \cong R_{12}\,, \qquad z_3 = -R_{12}\left(1+\frac{5}{12}\frac{m_2}{m_1}\right)\,. \tag{46.104}$$

Nos diversos casos acima, coletamos apenas os termos de ordem inferior e consideramos $M \cong m_1$. A Figura 46.9, página 2692, apresenta esquematicamente esses resultados.

Os cômputos que conduzem a esses resultados são um tanto envolventes, especialmente aqueles relacionados a L_3, e são apresentados no Apêndice 46.C, página 2733.

O resultado $z_1 = 0$, obtido nos três casos, é apenas consequência do fato que, nas circunstâncias consideradas, a posição de m_1 coincide praticamente com a do centro de massa dos três corpos. O resultado $z_2 = R_{12}$ indica analogamente que a massa secundária dista do centro de massas o mesmo que dista da massa primária e o resultado $\omega^2 = \frac{MG}{R_{12}^3}$ manifesta apenas a terceira lei de Kepler para o sistema composto pela massa primária e secundária quando a segunda encontra-se em órbita circular ao redor da primeira.

O item a se destacar é a posição dos pontos de Lagrange L_1, L_2 e L_3 no caso tratado:

$$\text{Para } L_1\text{:} \quad z_3 = R_{12}\left(1-\left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{1/3}\right) . \tag{46.105}$$

$$\text{Para } L_2\text{:} \quad z_3 = R_{12}\left(1+\left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{1/3}\right) . \tag{46.106}$$

$$\text{Para } L_3\text{:} \quad z_3 = -R_{12}\left(1+\frac{5}{12}\frac{m_2}{m_1}\right) . \tag{46.107}$$

Observe-se que no caso considerado L_1 e L_2 encontram-se em posições simétricas em relação à massa secundária.

No caso do sistema Sol-Terra, onde $m_2/m_1 \cong 2,99\times 10^{-6}$, temos

$$\text{Para } L_1\text{:} \quad z_3 \cong \big(1-10^{-2}\big)R_T . \tag{46.108}$$

$$\text{Para } L_2\text{:} \quad z_3 \cong \big(1+10^{-2}\big)R_T . \tag{46.109}$$

$$\text{Para } L_3\text{:} \quad z_3 \cong -\big(1+1,25\times 10^{-6}\big)R_T . \tag{46.110}$$

Aqui, $R_T \cong 1,5\times 10^{11}$m é o raio da órbita da Terra em torno do Sol. Assim, a distância à Terra dos pontos de Lagrange L_1 e L_2 é, aproximadamente $1,5\times 10^9$m, cerca de $1,5$ milhão de quilômetros. Para comparação, a distância da Terra à Lua é de aproximadamente $0,38$ milhão de quilômetros. Por L_3 ficar oposto ao Sol, há pouco ou nenhum interesse na locação de sondas espaciais nele. Em números, a distância L_3 à Terra é um pouco maior que $2R_T \cong 3,0\times 10^{11}$m.

46.3.2 Generalizações das Soluções Periódicas de Lagrange

Após encontrar as soluções que correspondem aos pontos L_1 a L_5 (os três primeiros, em verdade, foram identificados por Euler), Lagrange se perguntou se haveria outras soluções *periódicas* no problema de três corpos. No caso dos pontos L_1 a L_5 as trajetórias são periódicas e se dão em círculos concêntricos, o que fez Lagrange questionar se soluções similares seriam possíveis com três corpos participantes movendo-se em elipses.

Lagrange [298] identificou algumas de tais soluções (há ainda outras! Vide comentário da página 2683) e a argumentação que apresentou é muitíssimo interessante e ilustra o fato que por vezes, problemas matemáticos e físicos são melhor abordados quando tornados mais gerais.

Consideremos um sistema de n pontos materiais movendo-se em um plano e interagindo gravitacionalmente. Seja $\vec{x}_i$, $i=1,\ \ldots,\ n$, o vetor posição de cada um dos pontos materiais, sendo m_i suas massas. Em um sistema de referência inercial o movimento desse sistema é descrito pelo sistema de equações (46.71), página 2682.

Podemos identificar o plano de movimento do sistema de partículas com o plano complexo $\mathbb{C}$ e identificar cada vetor bidimensional $\vec{x}_i$ com um número complexo z_i. Com isso, as equações (46.71) assumem a forma

$$\ddot{z}_i(t) = G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_j \frac{z_j(t)-z_i(t)}{\big|z_j(t)-z_i(t)\big|^3} , \qquad i=1,\ \ldots,\ n . \tag{46.111}$$

Generalizando o que se passa com os pontos de Lagrange L_1 a L_5, Lagrange [298] colocou a questão de quando o movimento, cuja dinâmica é descrita acima, preserva a *semelhança* entre os pontos, isto é, preserva as razões entre as distâncias entre pares de pontos e os ângulos que os vetores posição relativos formam entre si. Assim, desejamos saber quando as razões

$$\frac{\big|z_i(t)-z_j(t)\big|}{\big|z_k(t)-z_l(t)\big|} \qquad \text{e} \qquad \frac{\overline{\big(z_i(t)-z_j(t)\big)}\big(z_k(t)-z_l(t)\big)}{\big|z_i(t)-z_j(t)\big|\big|z_k(t)-z_l(t)\big|} , \qquad i\neq j,\ k\neq l \tag{46.112}$$

são independentes de t, mas eventualmente dependem apenas de $i,\ j,\ k,\ l\in\{1,\ \ldots,\ n\}$.

É fácil constatar que uma condição suficiente para que isso se imponha é termos

$$z_i(t) \;=\; q(t)\zeta_i \tag{46.113}$$

para todo $i \in \{1,\,\ldots,\,n\}$, onde cada ζ_i é uma constante complexa distinta e $q(t)$ é um fator complexo comum, dependente do tempo. Substituindo o *Ansatz* (46.113) em (46.111), obtemos

$$\zeta_i\ddot{q}(t) \;=\; \left(\frac{q(t)}{\big|q(t)\big|^3}\right) G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_j\frac{\zeta_j-\zeta_i}{\big|\zeta_j-\zeta_i\big|^3}\;, \qquad i\;=\;1,\,\ldots,\,n\;.$$

Como os ζ_i, $i \in \{1,\,\ldots,\,n\}$, são supostos constantes, a relação acima implica

$$\ddot{q}(t) \;=\; \kappa\frac{q(t)}{\big|q(t)\big|^3} \;=\; \kappa\big(q(t)\big)^{-1/2}\big(\overline{q(t)}\big)^{-3/2} \quad \text{e} \tag{46.114}$$

$$\kappa\zeta_i \;=\; G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_j\frac{\zeta_j-\zeta_i}{\big|\zeta_j-\zeta_i\big|^3}\;, \qquad i\;=\;1,\,\ldots,\,n\;. \tag{46.115}$$

para alguma constante κ. A equação (46.114) é uma equação diferencial para a função q, enquanto que (46.114) são equações algébricas para as constantes ζ_i, $i \in \{1,\,\ldots,\,n\}$, todas amarradas à constante κ.

Um exemplo relevante se dá com a função periódica $q(t) = e^{i\omega t}$, $\omega \in \mathbb{R}$. Como facilmente se vê, ela satisfaz (46.114) com $\kappa = -\omega^2$ e, com isso, as equações algébricas (46.115) assumem a forma

$$\omega^2\zeta_i \;=\; -G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_j\frac{\zeta_j-\zeta_i}{\big|\zeta_j-\zeta_i\big|^3}\;, \qquad i\;=\;1,\,\ldots,\,n\;,$$

que, no plano complexo, coincidem com as equações de equilíbrio (46.78), página 2685. Assim, no caso $n = 3$, recuperamos os desenvolvimentos que se seguiram a (46.77) e obtemos as soluções de equilíbrio que correspondem aos pontos de Lagrange L_1 a L_5. As soluções $z_i(t) = e^{i\omega t}\zeta_i$, $i = 1, 2, 3$, correspondem a órbitas circulares percorridas com velocidade angular ω.

Lagrange [298], porém, deu sequência a seu raciocínio observando que, no caso $n = 2$, as soluções elípticas são também semelhantes, ou seja, satisfazem trivialmente as relações (46.112), pois estas reduzem-se à condição de $\frac{\left|z_1(t)-z_2(t)\right|}{\left|z_1(t)-z_2(t)\right|}$ e $\frac{\overline{\big(z_1(t)-z_2(t)\big)}\big(z_1(t)-z_1(t)\big)}{\left|z_1(t)-z_2(t)\right|\left|z_1(t)-z_2(t)\right|}$ serem independentes de t, o que é, neste caso, totalmente evidente. Assim, existe uma função periódica $q^{(2)}(t)$ e constantes complexas $\zeta_1^{(2)}$ e $\zeta_2^{(2)}$ tais que $z_i(t) = q^{(2)}(t)\zeta_i^{(2)}$, $i = 1,\ 2$, e, como essa configuração permanece semelhante no tempo, concluímos que $q^{(2)}(t)$, $\zeta_1^{(2)}$ e $\zeta_2^{(2)}$ satizfazem (46.114) e (46.115) para algum $\kappa^{(2)}$. Conforme o que aprendemos ao estudarmos o problema de Kepler, as funções $z_1(t) = q^{(2)}(t)\zeta_1^{(2)}$ e $z_2(t) = q^{(2)}(t)\zeta_2^{(2)}$ descrevem elipses em torno do centro de massa comum. As relações (46.115) são

$$\kappa^{(2)}\zeta_1^{(2)} \;=\; Gm_2\frac{\zeta_2^{(2)}-\zeta_1^{(2)}}{\big|\zeta_2^{(2)}-\zeta_1^{(2)}\big|^3} \qquad \text{e} \qquad \kappa^{(2)}\zeta_2^{(2)} \;=\; Gm_1\frac{\zeta_1^{(2)}-\zeta_2^{(2)}}{\big|\zeta_1^{(2)}-\zeta_2^{(2)}\big|^3}\;.$$

Como $m_1\zeta_1^{(2)} = -m_2\zeta_2^{(2)}$ (pela condição do centro de massa), concluímos de ambas as equaçõea acima que

$$\kappa^{(2)} \;=\; -G\frac{m_2+m_2}{\big|\zeta_2^{(2)}-\zeta_1^{(2)}\big|^3}\;.$$

É importante observarmos aqui que variando-se $\big|\zeta_2^{(2)}-\zeta_1^{(2)}\big|$ no intervalo $(0,\,\infty)$ a constante $\kappa^{(2)}$ pode também assumir todos os valores possíveis no intervalo $(-\infty,\,0)$.

Com essas considerações, Lagrange voltou sua atenção ao caso $n = 3$, o problema de três corpos, observando que a equação (46.115) é satisfeita para κ da forma $\kappa = -\omega^2$ pelas soluções de encontradas quando tratamos dos pontos

de estabilidade do problema de três corpos, e que conduziram aos pontos de Lagrange L_1 a L_2. A equação (46.114) é satisfeita para a função $q^{(2)}(t)$ com a constante $\kappa^{(2)} = -\omega^2$.

A conclusão é que as funções $z_i(t) = q^{(2)}(t)\zeta_i$, $i = 1, 2, 3$, são também soluções, semelhantes no tempo, do problema de três corpos, sendo que cada uma deles apresenta uma órbita elíptica (pois $q^{(2)}(t)\zeta$ sempre descreve uma elipse, para qualquer $\zeta \in \mathbb{C}$ constante e não nulo). As Figuras 46.10, página 2695 e 46.11, página 2695, mostram esquematicamente tais soluções.

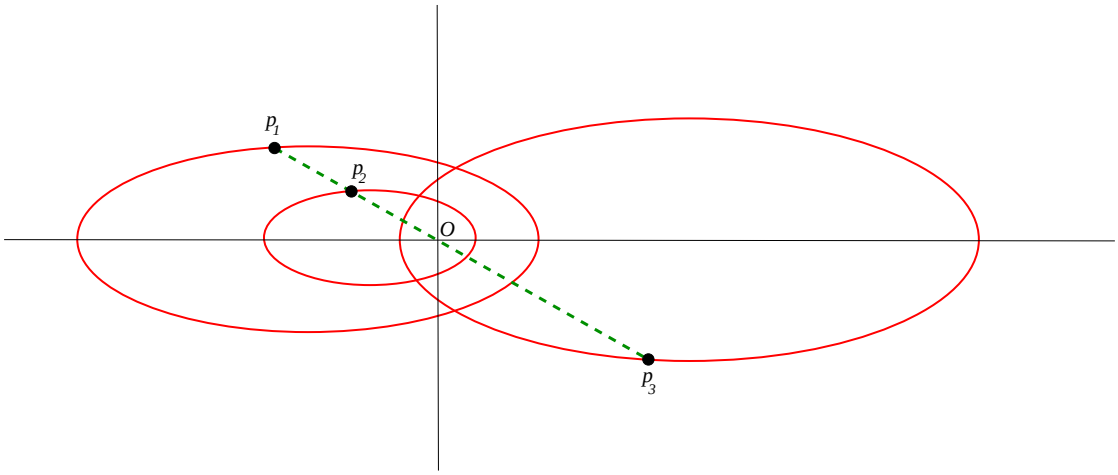

Figura 46.10: Esquema de três órbitas elípticas de três pontos materiais. A origem O indica a posição do centro de massa. Em cada instante de tempo as posições dos três pontos materiais e do centro de massa são colineares.

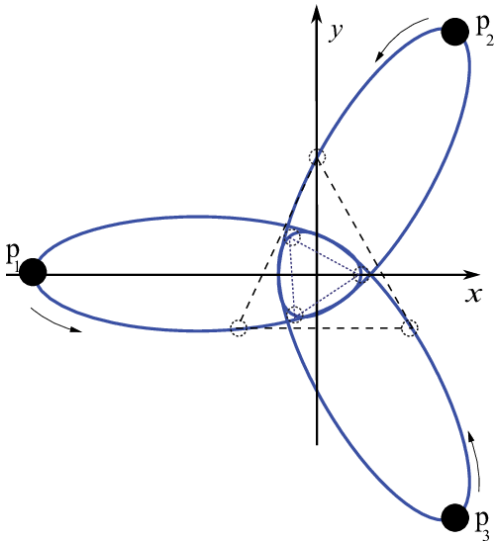

Figura 46.11: Figura, extraída de [6], esquematizando órbitas elípticas de três pontos materiais em torno do centro de massa (na origem do sistema de coordenadas). As órbitas são semelhantes, o que significa que, em qualquer instante de tempo, a posição dos pontos materiais forma um triângulo equilátero (dois deles estão explicitamente indicados).

A ideia acima delineada pode, ao menos em princípio, ser estendida ao problema de n corpos. Se para algum $n \geq 3$ tivermos uma solução das equações estáticas (46.115) para algum $\kappa < 0$, então *qualquer* solução periódica q da equação (46.114) pode ser empregada para obter-se soluções mais gerais, mesmo que essa solução para q tenha sido obtida de um problema de m corpos com $m < n$. Assim, poderíamos ter soluções como $q(t) = e^{i\sqrt{-\kappa}t}$, que fornecerá movimentos circulares aos n pontos materiais, ou a função $q^{(2)}(t)$, que mencionamos acima, que fornecerá soluções elípticas. Ambas as funções são provenientes do problema de 2 corpos.

A procura de soluções periódicas do problema de n corpos é uma área ativa de pesquisa, despertando interesse matemático e astronômico e envolvendo trabalhos teóricos e numéricos. Vide [347, 348], assim como [90], [369], [6] e [499].

46.3.3 O Problema de Três Corpos Restrito e a Integral de Jacobi

Consideremos um sistema de três pontos materiais p_1, p_2 e p_3, de massas m_1, m_2 e m_3, respectivamente, interagindo gravitacionalmente, mas tomemos o caso em que m_3 é muito menor que as outras duas massas, de sorte que sua presença não perturbe o movimento de p_1 e p_2, mas que o movimento de p_3 dependa da posição de p_1 e p_2 em cada instante de tempo. Uma situação típica seria o sistema Sol-Terra-sonda espacial. Tendo isso em mente, consideraremos também $m_1 > m_2$. Consideremos que p_1, p_2 descrevam um movimento circular em torno do centro de massas de ambos com velocidade angular ω, perpendicular ao plano de movimento de p_1 e p_2.

Consideremos um sistema inercial de coordenadas no plano de movimento de p_1 e p_2 com o centro de massa situado na origem (a contribuição de p_3 à posição do centro de massa é desprezível). As coordenadas que descrevem os pontos materiais de massas m_1, m_2 e m_3 são $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ e $\vec{q}_3$, respectivamente.

Esse sistema inercial é frequentemente denominado *sistema sideral*, ou *heliocêntrico*[36], em textos de Mecânica Celeste.

Passemos agora a descrever o sistema do ponto de vista de um sistema de referência não inercial, cuja origem O coincide em todo tempo com a origem do sistema inercial (o centro de massa), mas que se encontre em rotação em torno da origem com velocidade angular ω, o eixo de rotação sendo ortogonal ao plano de movimento. Nesse sistema, as coordenadas que descrevem os pontos materiais de massas m_1, m_2 e m_3 são $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ e $\vec{Q}_3$, respectivamente. Por nossas escolhas, $\vec{Q}_1$ e $\vec{Q}_2$ estão fixos e são colineares à origem O do sistema de coordenadas. Adotemos o eixo 1 como o eixo comum a $\vec{Q}_1$ e $\vec{Q}_2$ e O. O vetor $\vec{Q}_3$ pode assumir livremente valores no espaço tridimensional.

Esse sistema não inercial é frequentemente denominado *sistema sinódico*, ou *sistema corrotacional*, em textos de Mecânica Celeste.

Em termos mais precisos, se considerarmos no sistema não sinódico um sistema de três versores ortogonais $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$, temos $\vec{Q}_1 = Q_1^1\mathbf{e}_1$, $\vec{Q}_2 = Q_2^1\mathbf{e}_1$ (Q_1^1 e Q_2^1 constantes) e $\vec{Q}_3 = Q_3^1\mathbf{e}_1 + Q_3^2\mathbf{e}_2 + Q_3^3\mathbf{e}_3$, sendo ainda $\vec{\Omega} = \omega\mathbf{e}_3$ o vetor velocidade angular intrínseca do sistema não inercial, que supomos constante.

Segundo os resultados que colhemos na Seção 45.5.5.1, página 2624, o sistema mecânico considerado possui uma constante de movimento dada em (45.226), página 2624, que no presente caso assume a forma

$$\widehat{e}_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_i\left[\left\|\dot{\vec{Q}}_i\right\|^2 - \left\|\vec{\Omega}\times\vec{Q}_i\right\|^2\right] - G\left(\frac{m_1m_2}{\|\vec{Q}_1-\vec{Q}_2\|} + \frac{m_1m_3}{\|\vec{Q}_1-\vec{Q}_3\|} + \frac{m_2m_3}{\|\vec{Q}_2-\vec{Q}_3\|}\right). \tag{46.116}$$

Pelas hipóteses que fizemos, $\vec{Q}_1$ e $\vec{Q}_2$ são fixos. Assim, eliminando os termos que contém $\dot{\vec{Q}}_1$ e $\dot{\vec{Q}}_2$ e retirando termos constantes, a expressão acima torna-se

$$\widehat{\mathscr{J}} = \frac{1}{2}m_3\left[\left\|\dot{\vec{Q}}_3\right\|^2 - \left\|\vec{\Omega}\times\vec{Q}_3\right\|^2\right] - G\left(\frac{m_1m_3}{\|\vec{Q}_1-\vec{Q}_3\|} + \frac{m_2m_3}{\|\vec{Q}_2-\vec{Q}_3\|}\right). \tag{46.117}$$

Como (46.116) é uma constante de movimento do problema de três corpos geral, concluímos que $\widehat{\mathscr{J}}$ é uma constante de movimento do problema de três corpos restrito. A grandeza $\widehat{\mathscr{J}}$ é denominada *integral de Jacobi*[37], *constante de Jacobi* ou ainda *invariante de Jacobi*, que a derivou em 1836 [258].

Nota. Muitos textos sobre Mecânica Celeste definem a integral de Jacobi como $-2\widehat{\mathscr{J}}/m_3$. ♣

Um aspecto relevante da grandeza conservada $\widehat{\mathscr{J}}$ é observado em (46.121), página 2697, ao expressarmos $\widehat{\mathscr{J}}$ em termos do sistema de referência inercial (sideral). Vide *Comentário* à página 2697.

[36] Essa nomenclatura pressupõe $m_1 \gg m_2$, em cujo caso a posição de p_1 coincide com o centro de massa. É o que o corre no sistema Sol-Terra-sonda espacial.

[37] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851).

• **A integral de Jacobi. Uma segunda dedução**

A integral de Jacobi $\widehat{\mathscr{J}}$ pode ser obtida por um outro procedimento similar. Consideremos o Lagrangiano (45.224), página 2624, para $n = 3$ e consideremos os vetores $\vec{Q}_1$ e $\vec{Q}_2$ fixados em certos valores. No presente caso, ele assume a forma

$$\widehat{\mathscr{L}}(Q,\,\dot{Q}) \;=\; \frac{1}{2}m_3\left[\left\|\dot{\vec{Q}}_3\right\|^2 + 2\dot{\vec{Q}}_3\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{Q}_3\right) + \left\|\vec{\Omega}\times\vec{Q}_3\right\|^2\right] + G\left(\frac{m_1m_3}{\left\|\vec{Q}_1-\vec{Q}_3\right\|} + \frac{m_2m_3}{\left\|\vec{Q}_2-\vec{Q}_3\right\|}\right)\,, \tag{46.118}$$

sendo que usamos $\dot{\vec{Q}}_1 = \dot{\vec{Q}}_2 = 0$ e negligenciamos termos constantes (dependentes somente de $\vec{Q}_1$ e $\vec{Q}_2$). Trata-se do Lagrangiano de um sistema autônomo e, portanto, sabemos, pelos resultados discutidos em (45.176), página 2610, e (45.236), página 2628, que a quantidade

$$\widehat{\mathscr{J}} := \sum_{a=1}^{3}\dot{Q}_3^a\frac{\partial\widehat{\mathscr{L}}}{\partial\dot{Q}_3^a}(Q,\,\dot{Q}) - \widehat{\mathscr{L}}(Q,\,\dot{Q}) \tag{46.119}$$

é uma constante de movimento. Aqui, $\left(Q_3^1,\,Q_3^2,\,Q_3^3\right)$ são as componentes de $\vec{Q}_3$. Um cálculo explícito mostra que

$$\widehat{\mathscr{J}} \;=\; \frac{1}{2}m_3\left[\left\|\dot{\vec{Q}}_3\right\|^2 - \left\|\vec{\Omega}\times\vec{Q}_3\right\|^2\right] - G\left(\frac{m_1m_3}{\left\|\vec{Q}_1-\vec{Q}_3\right\|} + \frac{m_2m_3}{\left\|\vec{Q}_2-\vec{Q}_3\right\|}\right)\,. \tag{46.120}$$

Essa é a mesma expressão apresentada em (46.117) para a integral de Jacobi.

As equações de Euler-Lagrange associadas a (46.118) são apresentadas em (46.125), página 2698.

• **A integral de Jacobi em termos de coordenadas do sistema inercial (sideral)**

Para certos propósitos é útil expressar $\widehat{\mathscr{J}}$ em termos das coordenadas inerciais originais. Procedendo de forma análoga à dedução de (45.227), página 2625, apresentada na Seção 45.5.5.1, página 2624, temos

$$\widehat{\mathscr{J}} \;=\; \frac{1}{2}m_3\left\|\dot{\vec{q}}_3\right\|^2 - \vec{\omega}\cdot\left(m_3\vec{q}_3\times\dot{\vec{q}}_3\right) - G\left(\frac{m_1m_3}{\left\|\vec{q}_1(t)-\vec{q}_3\right\|} + \frac{m_2m_3}{\left\|\vec{q}_2(t)-\vec{q}_3\right\|}\right)\,. \tag{46.121}$$

Aqui, $\vec{q}_1(t) = R_t\vec{Q}_1$ e $\vec{q}_2(t) = R_t\vec{Q}_2$ descrevem órbitas circulares no plano $1-2$ em torno do centro de massa (localizado na origem) com velocidade angular ω. Observe-se que os termos $\frac{1}{2}m_3\left\|\dot{\vec{q}}_3\right\|^2 - G\left(\frac{m_1m_3}{\left\|\vec{q}_1(t)-\vec{q}_3\right\|} + \frac{m_2m_3}{\left\|\vec{q}_2(t)-\vec{q}_3\right\|}\right)$ compõem a energia mecânica da massa m_3 sob o potencial gravitacional produzido por m_1 e m_2, enquanto que $m_3\vec{q}_3\times\dot{\vec{q}}_3$ é o momento angular do ponto material m_3 em relação ao centro de massa.

Comentário. Fazemos aqui notar um aspecto muito relevante da grandeza $\widehat{\mathscr{J}}$. Quando deduzimos a invariância de $\widehat{e}_m$ na Seção 45.5.5.1, página 2624, comentamos que sua conservação era devida à conservação separada da energia mecânica e no momento angular total. Na caso de $\widehat{\mathscr{J}}$, a energia mecânica do ponto material m_3 e seu momento angular *não* são separadamente conservados, mas a combinação (46.121) o é! Essa diferença foi produzida quando consideramos a massa m_3 muito pequena, de sorte a não produzir mudanças nos vetores $\vec{Q}_1$ e $\vec{Q}_2$. ♣

A integral de Jacobi na forma (46.121) pode ser usada para esclarecer aspectos muito interessantes da navegação de satélites e sondas espaciais. Vide, por exemplo, [157] (Sec. 2.3) para o uso dessa grandeza (no sistema de coordenadas sideral) no entendimento do processo denominado de *"swing-by"* (ou *"gravitational slingshot"* ("estilingue gravitacional") ou ainda *"gravity assist maneuver"*), usado em Astronáutica para a aceleração ou desaceleração de satélites e sondas espaciais quando de passagens próximas a planetas.

• **A superfície de velocidade nula**

No sistema não inercial, como $\left\|\dot{\vec{Q}}_3\right\| \geq 0$, tem-se de (46.117) a desigualdade

$$\frac{\widehat{\mathscr{J}}}{m_3} \;\geq\; -\frac{1}{2}\left\|\vec{\Omega}\times\vec{Q}_3\right\|^2 - G\left(\frac{m_1}{\left\|\vec{Q}_1-\vec{Q}_3\right\|} + \frac{m_2}{\left\|\vec{Q}_2-\vec{Q}_3\right\|}\right)\,. \tag{46.122}$$

O valor de $\widehat{\mathscr{J}}$ é fixado pelas condições iniciais sobre $\vec{Q}_3$ e $\dot{\vec{Q}}_3$ e a desigualdade (46.122) especifica, para cada $\widehat{\mathscr{J}}$, a região de valores de $\vec{Q}_3$ onde o movimento é possível. A superfície na qual

$$\frac{\widehat{\mathscr{J}}}{m_3} = -\frac{1}{2}\left\|\vec{\Omega}\times\vec{Q}_3\right\|^2 - G\left(\frac{m_1}{\|\vec{Q}_1-\vec{Q}_3\|}+\frac{m_2}{\|\vec{Q}_2-\vec{Q}_3\|}\right)$$

é denominada *superfície de velocidade nula* e delimita a região física de movimento, fixada por (46.122).

A relevância da superfície de velocidade nula foi primeiramente apontada por Hill[38], em 1878, em seu estudo da estabilidade no problema de três corpos [234].

• **A integral de Jacobi e os pontos de Lagrange. O pseudopotencial de Jacobi**

Um dos principais usos da integral de Jacobi está no estudo da estabilidade dos pontos de Lagrange do problema de três corpos restrito. Indiquemos primeiramente como esses conceitos estão relacionados.

Contemplando (46.117) vemos que a expressão $\mathbf{U_J}\left(\vec{Q}_3\right) := m_3\mathbf{V_J}\left(\vec{Q}_3\right)$, onde

$$\mathbf{V_J}\left(\vec{Q}_3\right) := -\frac{1}{2}\left\|\vec{\Omega}\times\vec{Q}_3\right\|^2 - G\left(\frac{m_1}{\|\vec{Q}_1-\vec{Q}_3\|}+\frac{m_2}{\|\vec{Q}_2-\vec{Q}_3\|}\right) \tag{46.123}$$

desempenha um papel similar ao de um potencial, sendo denominado *pseudopotencial de Jacobi*[39], no movimento de $\vec{Q}_3$. Reescrevendo $\left\|\vec{\Omega}\times\vec{Q}_3\right\|^2$ como $\omega^2\left(\left(Q_3^1\right)^2+\left(Q_3^2\right)^2\right)$, sendo $\omega := \|\vec{\Omega}\|$, temos

$$\mathbf{V_J}\left(\vec{Q}_3\right) = -\frac{1}{2}\omega^2\left(\left(Q_3^1\right)^2+\left(Q_3^2\right)^2\right) - G\left(\frac{m_1}{\|\vec{Q}_1-\vec{Q}_3\|}+\frac{m_2}{\|\vec{Q}_2-\vec{Q}_3\|}\right) . \tag{46.124}$$

As curvas de nível desse pseudopotencial podem ser contempladas na Figura 46.12, página 2699.

As equações de Euler-Lagrange associadas ao Lagrangiano (46.118) são, como facilmente se verifica,

$$\ddot{\vec{Q}}_3 + 2\vec{\Omega}\times\dot{\vec{Q}}_3 = -\vec{\nabla}_3\mathbf{V_J} , \tag{46.125}$$

onde $\vec{\nabla}_3$ denota o gradiente de $\mathbf{V_J}$ em relação a $\vec{Q}_3$.

Comentários. O leitor pode se convencer que o termo $2\vec{\Omega}\times\dot{\vec{Q}}_3$ em (46.125) provém da aceleração de Coriolis (vide página 2564) e que a aceleração centrífuga está embutida em $-\vec{\nabla}_3\mathbf{V_J}$ (termo dependente de $\vec{\Omega}$). Devido à presença do termo $2\vec{\Omega}\times\dot{\vec{Q}}_3$, o sistema (46.125) não é conservativo, o que justifica chamarmos $\mathbf{V_J}$ (ou $\mathbf{U_J}$) de *pseudopotencial*, e não de *potencial*. ♣

Os pontos de equilíbrio do sistema definido em (46.125) são aqueles para os quais tenha-se $\dot{\vec{Q}}_3 = 0$ para todo t e, portanto, valha também $\ddot{\vec{Q}}_3 = 0$, também para todo t. Assim, tem-se nesses pontos $\vec{\nabla}_3\mathbf{V_J} = 0$. Um cálculo simples indica que

$$\vec{\nabla}_3\mathbf{V_J}\left(\vec{Q}_3\right) = -\omega^2\left(Q_3^1\mathbf{e}_1+Q_3^2\mathbf{e}_2\right) + Gm_1\frac{\vec{Q}_3-\vec{Q}_1}{\|\vec{Q}_3-\vec{Q}_1\|^3} + Gm_2\frac{\vec{Q}_3-\vec{Q}_2}{\|\vec{Q}_3-\vec{Q}_2\|^3} .$$

A condição de equilíbrio $\vec{\nabla}_3\mathbf{V_J} = 0$, portanto implica que a componente na direção de $\mathbf{e}_3$ do vetor do lado direito deve ser nula assim como a projeção do mesmo vetor no plano $\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$. A primeira condição é

$$Q_3^3\left(\frac{m_1}{\|\vec{Q}_3-\vec{Q}_1\|^3}+\frac{m_2}{\|\vec{Q}_3-\vec{Q}_2\|^3}\right) = 0 .$$

Como o fator entre parênteses nunca se anula, temos por implicação que $Q_3^3 = 0$ e, com isso, na posição de equilíbrio, $\vec{Q}_3$ é um vetor bidimensional $\vec{Q}_3 \equiv Q_3^1\mathbf{e}_1 + Q_3^2\mathbf{e}_2$. A segunda condição, já para esse vetor bidimensional $\vec{Q}_3$, é

$$\omega^2\vec{Q}_3 = Gm_1\frac{\vec{Q}_3-\vec{Q}_1}{\|\vec{Q}_3-\vec{Q}_1\|^3} + Gm_2\frac{\vec{Q}_3-\vec{Q}_2}{\|\vec{Q}_3-\vec{Q}_2\|^3} .$$

[38] George William Hill (1838–1914).
[39] Para uma melhor justificativa dessa nomenclatura, vide comentário à página 2698.

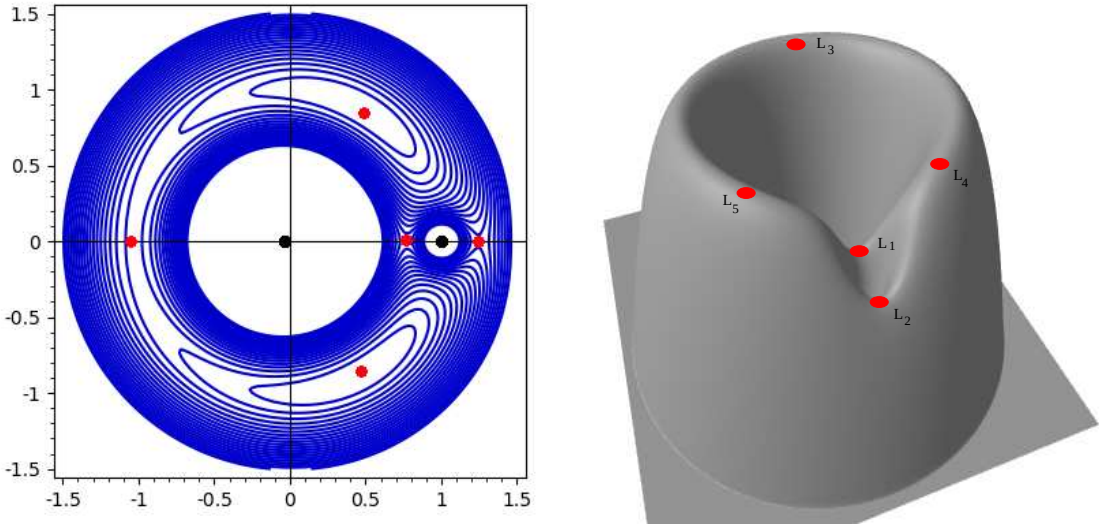

Figura 46.12: **Esquerda:** Em azul, esquema das curvas de nível do pseudopotencial de Jacobi $\mathbf{V_J}$, dado em (46.123). O eixo horizontal corresponde a Q_3^1 e o vertical a Q_3^2. As posições das massas m_1 e m_2 são indicadas por discos pretos. A massa m_1 encontra-se próxima à origem $(0,\ 0)$ (que é o *locus* do centro de massa) e a massa m_2 possui coordenadas $(1,\ 0)$. Os cinco pontos de Lagrange são indicados por discos vermelhos. O pseudopotencial $\mathbf{V_J}$ descresce mais rapidamente nas regiões mais adensadas. O pseudopotencial $\mathbf{V_J}$ é sempre negativo e diverge para $-\infty$ nas posições de m_1 e m_2 e no infinito. À medida em que nos afastamos da origem as curvas de nível vão se tornando mais circulares, pois o termo centrífugo $-\omega^2\Big(\big(Q_3^1\big)^2+\big(Q_3^2\big)^2\Big)$ do pseudopotencial $\mathbf{V_J}$ vai se tornando dominante e assim, analogamente, conforme nos aproximamos das posições de m_1 e m_2, onde a parte gravitacional $-G\left(\frac{m_1}{\left\|\vec{Q}_1-\vec{Q}_3\right\|}+\frac{m_2}{\left\|\vec{Q}_2-\vec{Q}_3\right\|}\right)$ do pseudopotencial $\mathbf{V_J}$ vai se tornando dominante. Curvas de nível próximas às posições de m_1 e m_2 e próximas ao infinito foram omitidas, por clareza.
Direita: Gráfico tridimensional do mesmo pseudopotencial de Jacobi $\mathbf{V_J}$, sobrepondo as posições aproximadas dos pontos de Lagrange L_1 a L_5 (pontos em vermelho). Os pontos L_1 e L_2 localizam-se em pontos de sela de $\mathbf{V_J}$ e L_4 e L_5 em pontos de máximo local (o que é um tanto difícil de discernir na figura).

*** *** ***

Vemos que essa condição é idêntica à condição (46.77), página 2685, cuja solução levou-nos aos pontos de Lagrange, confirmando que esses pontos, no caso do problema de três corpos restrito e com $\vec{Q}_1$ e $\vec{Q}_2$ fixos, são os extremos do pseudopotencial $\mathbf{V_J}$. Mais, porém, que fornecer essa apresentação alternativa dos pontos de Lagrange, esse método permite aprofundar o entendimento da questão da *estabilidade* desses pontos, ao menos no caso do problema restrito de três corpos.

• A estabilidade dos pontos de Lagrange no problema de três corpos restrito

Já verificamos acima que os pontos de Lagrange no problema de três corpos restrito são extremos do pseudopotencial $\mathbf{V_J}$. A questão que se coloca agora é a natureza desses pontos de equilíbrio, um tema importante em Astronomia e Astronáutica: se são estáveis ou instáveis ou possuem variedades instáveis e outras estáveis. Essa questão está ligada à estabilidade de pequenas perturbações da trajetória em torno desses pontos (ou seja, das soluções de (46.125)). O estudo dessa questão é realizado por meio da linearização do sistema (46.125) em torno dos pontos de equilíbrio.

Observe-se que, por (46.125) envolver o termo de primeira ordem $-2\vec{\Omega}\times\dot{\vec{Q}}_3$ (força de Coriolis), a natureza dos pontos de equilíbrio (isto é, se são estáveis ou não) não é necessariamente relacionada aos mesmos serem máximos ou mínimos locais, ou pontos de sela, de $\mathbf{V_J}$, como é usualmente o caso em sistemas conservativos. Por exemplo, L_4 e L_5 são pontos de <u>máximo</u> local de $\mathbf{V_J}$ e não deveríamos esperar que pudessem ser estáveis. Um tanto surpreendentemente, porém, eles o são para certos valores da razão m_2/m_1, o que se deve ao efeito da força de Coriolis.

Por envolver muitos cômputos explícitos, não desenvolveremos com detalhe essa questão na corrente versão destas

Notas. Ela é tratada em textos como [456, 364, 368, 90, 369], mas apresentamos um brevíssimo resumo dos resultados, sempre no sistema sinódico, ou corrotacional. Vide também a Figura 46.12, página 2699.

Os pontos L_1, L_2 e L_3 são instáveis na direção radial (que aponta ao centro de massa) e um ponto material radialmente afastado desses pontos tende a se afastar deles. Porém, L_1, L_2 e L_3 são estáveis no plano ortogonal à direção radial. Assim, pequenas perturbações no movimento na direção desses planos produzem via de regra movimentos periódicos ou quaseperiódicos em torno dos pontos de Lagrange, permitindo a sondas espaciais, sob essas condições, orbitar por longos tempos os pontos L_1, L_2 ou L_3 em órbitas no plano ortogonal à direção radial. Essas órbitas são conhecidas como *órbitas de Lissajous*[40]. Como, na prática, movimentos na direção radial, e suas decorrentes instabilidades, estão sempre presentes, essas órbitas devem ser corrigidas de tempos em tempos por propulsores das próprias sondas. Com isso, na maioria dos casos as missões aos pontos L_1, L_2 ou L_3 podem durar muitos anos, ou mesmo décadas.

Os pontos de Lagrange L_3 e L_4 podem ser estáveis ou instáveis a depender da razão m_2/m_1, ou seja, da razão entre a massa secundária e a primária. Para um certo μ_0 teremos estabilidade caso $m_2/m_1 < \mu_0$ e instabilidade caso $m_2/m_1 > \mu_0$. O valor de μ_0 depende da excentricidade da órbita de p_1 e p_2 (vide [364]), mas para excentricidade nula (movimento circular) tem-se $\mu_0 \approx 4,0 \times 10^{-2}$.

Vejamos alguns exemplos numéricos do sistema solar:

- Para o sistema Sol-Júpiter, $m_2/m_1 \approx (1,898 \times 10^{27}\,\mathrm{kg})/(1,989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}) \approx 0,9 \times 10^{-3}$ e concluímos que os pontos L_4 e L_5 do sistema Sol-Júpiter são *estáveis*, o que é coerente com a presença dos asteróides Troianos, lá encontrados.
- Para o sistema Sol-Terra, $m_2/m_1 \approx (5,972 \times 10^{24}\,\mathrm{kg})/(1,989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}) \approx 3,0 \times 10^{-6}$ e concluímos que os pontos L_4 e L_5 do sistema Sol-Terra são *estáveis*.
- Para o sistema Terra-Lua, $m_2/m_1 \approx (7,35 \times 10^{22}\,\mathrm{kg})/(5,972 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}) \approx 1,2 \times 10^{-2}$ e concluímos que os pontos L_4 e L_5 do sistema Terra-Lua são *estáveis*, ainda que próximos ao limite de deixarem de sê-lo.
- Para o sistema Plutão-Caronte, $m_2/m_1 \approx (1,6 \times 10^{21}\,\mathrm{kg})/(1,3 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}) \approx 1,2 \times 10^{-1}$ e concluímos que os pontos L_4 e L_5 do sistema Plutão-Caronte são *instáveis*.

• A esfera de Hill

A chamada *esfera de Hill* é definida como a maior esfera centrada na posição de m_2 na qual o pseudopotencial $\mathbf{V_J}$ é atrativo na direção de m_2. Uma simples inspeção (vide Figura 46.12, página 2699) nos leva a concluir que essa esfera tem raio igual à distância entre a posição de m_2 e os pontos de Lagrange L_1 e L_2 (que são equidistantes de m_2). Seu raio é, portanto, $R_{12}\left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{1/3}$ (vide (46.105) e (46.106), página 2693). Um corpo (de massa muito menor que m_1 e m_2) e que orbite m_2 dentro da esfera de Hill não pode ser afastado deste por "pequenas" perturbações de outros atratores.

A esfera de Hill permite identificar quantitativamente a região de influência gravitacional de um planeta. Como já comentamos à página 2693, no caso do sistema Sol-Terra o raio da esfera de Hill é de cerca de $1,5$ milhão de quilômetros, enquanto que a distância da Terra à Lua é de aproximadamente $0,38$ milhão de quilômetros. Isso mostra que a Lua encontra-se bem dentro da esfera de Hill da Terra e é, portanto, fortemente ligada à mesma, fato que não pode ser modificado por pequenas perturbações externas. Vale notar que, um tanto surpreendentemente, a força de atração gravitacional que o Sol exerce sobre a Lua é *maior* que força de atração gravitacional que a Terra exerce sobre a Lua. Verifique! Ainda assim, é correto afirmar que a Lua orbita a Terra, por mover-se dentro de sua esfera de Hill.

◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎

[40] Jules Antoine Lissajous (1822–1880).

46.4 Modos Normais de Oscilação

Ilustremos algumas das ideias do formalismo Lagrangiano com o exemplo fisicamente importante de sistemas definidos por Lagrangianos quadráticos e pelos chamados modos normais de oscilação.

• **Lagrangianos quadráticos e sua forma canônica**

Seja um sistema de n partículas pontuais cuja dinâmica é descrita pelo Lagrangiano quadrático

$$\mathscr{L} \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\dot{q}_i'\dot{q}_j' - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}q_i'q_j' + \sum_{i=1}^{n}\ell_i q_i' \;, \tag{46.126}$$

onde $q_i' \in \mathbb{R}$ para todo i e onde M_{ij}, K_{ij} e ℓ_i são constantes reais. Sem perda de generalidade podemos supor que $M_{ij} = M_{ji}$ e $K_{ij} = K_{ji}$ para todos i e j, pois a expressão para $\mathscr{L}$ é simétrica nos $\dot{q}_i$'s e q_i's.

O Lagrangiano (46.126) é usado na descrição de sistemas de osciladores acoplados por forças harmônicas. Um exemplo (pêndulo planar duplo em pequenas oscilações) é discutido no Exemplo 46.2, página 2706. Outro exemplo é discutido no Exercício E. 46.22, página 2719 (vide Figura 46.17, página 2719).

Defina-se os vetores-coluna q' e ℓ e as matrizes $n \times n$ reais simétricas M e K por

$$q' \;:=\; \begin{pmatrix} q_1' \\ \vdots \\ q_n' \end{pmatrix}, \qquad M \;:=\; \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}, \qquad K \;:=\; \begin{pmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \ell \;:=\; \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}.$$

Usando o produto escalar usual em $\mathbb{R}^n$, denotado por $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_{\mathbb{R}}$, o Lagrangiano $\mathscr{L}$ dado em (46.126) pode ser escrito como

$$\mathscr{L} \;=\; \frac{1}{2}\langle \dot{q}',\; M\dot{q}'\rangle_{\mathbb{R}} - \frac{1}{2}\langle q',\; Kq'\rangle_{\mathbb{R}} + \langle \ell,\; q'\rangle_{\mathbb{R}} \,.$$

Assumindo K inversível e definindo novas coordenadas $q := q' - K^{-1}\ell$, e escrevendo-se q como um vetor-coluna $q := \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$, o Lagrangiano $\mathscr{L}$ assume a forma

$$\mathscr{L} \;=\; \frac{1}{2}\langle \dot{q},\; M\dot{q}\rangle_{\mathbb{R}} - \frac{1}{2}\langle q,\; Kq\rangle_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2}\langle \ell,\; K^{-1}\ell\rangle_{\mathbb{R}} \,. \tag{46.127}$$

O último termo, sendo uma constante, será doravante omitido, pois não contribui nas equações de Euler-Lagrange.

E. 46.7 *Exercício*. Obtenha (46.127). ✠

De forma mais explícita (46.127) pode ser escrita (já sem o termo constante) como

$$\mathscr{L} \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}q_iq_j \;, \tag{46.128}$$

onde $q_i \in \mathbb{R}$ para todo i. As formas (46.127) ou (46.128) são denominadas *formas canônicas* do Lagrangiano quadrático (46.126).

As expressões acima talvez tornem clara a interpretação das novas variáveis q. O ponto de equilíbrio estático do sistema se dá quando $q = 0$, ou seja, quando $q' = K^{-1}\ell$. Assim, q_i mede o desvio de $q_i{}'$ de sua posição de equilíbrio.

• **Solução na forma canônica**

No que segue suporemos que as matrizes M e K sejam matrizes inversíveis e, mais adiante, suporemos também que M e K sejam positivas e possuam inversas.

As equações de Euler-Lagrange associadas ao Lagrangiano (46.128) compõem o sistema de n equações diferenciais ordinárias acopladas

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^{n} K_{ij}q_j(t) \;=\; 0\;, \qquad i \;=\; 1,\;\ldots,\;n\;.$$

E. 46.8 *Exercício*. Verifique! ✠

É mais conveniente escrever essas equações em forma matricial: com as definições acima $M\ddot{q}(t) + Kq(t) = 0$, ou, equivalentemente,

$$\ddot{q}(t) + \big(M^{-1}K\big)q(t) \;=\; 0\;. \tag{46.129}$$

Vamos encontrar a solução dessa equação por um procedimento indireto. Vamos provisoriamente supor que exista uma matriz Ω_0 tal que $\big(\Omega_0\big)^2 = M^{-1}K$. Notemos que nem sempre existe uma tal matriz Ω_0 e na Seção 40.3.8, página 2234, são apresentadas condições suficientes para tal, mas não necessitaremos disso aqui[41][42]. Sob a hipótese da existência de Ω_0, a equação (46.129) assume a forma $\ddot{q}(t) + \big(\Omega_0\big)^2 q(t) = 0$. Como facilmente se verifica, a solução dessa equação com condições iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ é

$$q(t) \;=\; \cos\big(\Omega_0 t\big)q_0 + \Omega_0^{-1}\,\mathrm{sen}\big(\Omega_0 t\big)v_0\;, \tag{46.130}$$

onde $\cos\big(\Omega_0 t\big)$ e $\mathrm{sen}\big(\Omega_0 t\big)$ são matrizes definidas por via das séries de Taylor (convergentes!) das funções cosseno e seno:

$$\cos\big(\Omega_0 t\big) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!}\Omega_0^{2l}\;, \qquad \mathrm{sen}\big(\Omega_0 t\big) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!}\Omega_0^{2l+1}\;. \tag{46.131}$$

Note-se que Ω_0 terá inversa se e somente se M e K o tiverem, o que estamos supondo.

E. 46.9 *Exercício*. Verifique que (46.130) é, de fato, a solução de (46.129) com as condições iniciais q_0 e v_0. ✠

Observe-se que, como $\big(\Omega_0\big)^2 = M^{-1}K$, podemos escrever, inserindo em (46.130) as séries de (46.131),

$$q(t) \;=\; \left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!}\big(M^{-1}K\big)^l\right]q_0 + \left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!}\big(M^{-1}K\big)^l\right]v_0\;. \tag{46.132}$$

Ao chegarmos a esta expressão, podemos constatar que a mesma representa uma solução de (46.129) com as condições iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$, *independente da existência ou não de* Ω_0. Assim, pelos bem conhecidos teoremas de existência e unicidade de soluções de problemas de valor inicial como (46.129), concluímos que (46.132) é a solução procurada.

E. 46.10 *Exercício*. Constate diferenciando as séries em (46.132) termo a termo que (46.132) é, de fato, solução de (46.129) com as condições iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$. ✠

A solução (46.132) será reencontrada por outros meios em (46.143), página 2704.

Observemos de passagem que (46.132) representa a solução de (46.129) mesmo quando K não possui inversa. Por exemplo, para $n = 1$ e $K = 0$, a equação diferencial reduz-se a $\ddot{q}(t) = 0$ e, nesse caso, (46.132) fornece $q(t) = q_0 + v_0 t$ (pois só os termos com $l = 0$ sobrevivem), e essa é, de fato, a solução de $\ddot{q}(t) = 0$ para as condições iniciais dadas.

A solução obtida em (46.132), ainda que completa, não ilumina um aspecto importante do movimento de sistemas descritos pelo Lagrangiano (46.128): a presença de modos normais de oscilação quando ambas as matrizes M e K são positivas. Trata-se de novas coordenadas para descrever o sistema, em geral distintas das coordenadas q_i, cujas equações de movimento são desacopladas e descrevem oscilações harmônicas independentes umas das outras com certas frequências que são características do sistema, as chamadas frequências normais de oscilação. No que segue apresentaremos os modos normais e reobteremos com os mesmos a solução (46.132) com uma matriz Ω_0 específica.

[41] Uma dessas condições suficientes exige que $\big\|\mathbb{1} - M^{-1}K\big\| \leq 1$ (vide Corolário 40.13, página 2234), o que podemos provisoriamente assumir.

[42] Notemos, porém, que, seguindo outros caminhos, uma matriz Ω será encontrada adiante, vide (46.140) e (46.142), que satisfaz $\Omega^2 = M^{-1}K$ para quaisquer M e K. Para nosso argumento aqui, não precisamos dessa matriz.

• **Modos normais de oscilação**

Vamos aqui supor também que M e K sejam matrizes positivas (ou seja, que seus autovalores sejam todos positivos). Usando o produto escalar usual em $\mathbb{R}^n$, denotado por $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_{\mathbb{R}}$, é claro que $\mathscr{L}$ dada em (46.128) pode ser escrita como

$$\mathscr{L} \;=\; \frac{1}{2}\langle \dot{q},\, M\dot{q}\rangle_{\mathbb{R}} - \frac{1}{2}\langle q,\, Kq\rangle_{\mathbb{R}}\,.$$

Defina-se $Q := M^{1/2}q$. Teremos

$$\mathscr{L} \;=\; \frac{1}{2}\langle \dot{Q},\, \dot{Q}\rangle_{\mathbb{R}} - \frac{1}{2}\langle Q,\, BQ\rangle_{\mathbb{R}}\,, \tag{46.133}$$

onde $B := M^{-1/2}KM^{-1/2}$. A matriz B é simétrica e, portanto, é diagonalizável por uma matriz ortogonal O. Seja $D = O^TBO$ diagonal. Definindo-se

$$\mathcal{Q} \;:=\; O^TQ \;=\; O^TM^{1/2}q\,, \tag{46.134}$$

obtemos,

$$\mathscr{L} \;=\; \frac{1}{2}\langle \dot{\mathcal{Q}},\, \dot{\mathcal{Q}}\rangle_{\mathbb{R}} - \frac{1}{2}\langle \mathcal{Q},\, D\mathcal{Q}\rangle_{\mathbb{R}}\,.$$

Isso pode ser escrito de forma mais explícita como

$$\mathscr{L} \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(\dot{\mathcal{Q}}_i\big)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i\big(\mathcal{Q}_i\big)^2\,, \tag{46.135}$$

onde escrevemos

$$\mathcal{Q} \;:=\; \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{Q}_n \end{pmatrix}, \qquad D \;:=\; \mathrm{diag}\big(d_1,\,\ldots,\,d_n\big)\,.$$

As equações de Euler-Lagrange para (46.135) são

$$\ddot{\mathcal{Q}}_i(t) + d_i\mathcal{Q}_i(t) \;=\; 0\,, \qquad i = 1,\,\ldots,\,n\,. \tag{46.136}$$

Note-se que se trata de um sistema de n equações desacopladas.

As constantes d_i são autovalores da matriz D e, portanto, da matriz B. Como B é simétrica e positiva (pois K é positiva e, portanto, $B = M^{-1/2}KM^{-1/2} = \big(K^{1/2}M^{-1/2}\big)^T\big(K^{1/2}M^{-1/2}\big)$, que é positiva), temos $d_i > 0$ para todo i. As soluções de (46.136) são, portanto,

$$\mathcal{Q}_i(t) \;=\; \alpha_i\cos\big(\sqrt{d_i}t\big) + \beta_i\,\mathrm{sen}\big(\sqrt{d_i}t\big)\,, \qquad i = 1,\,\ldots,\,n\,, \tag{46.137}$$

com α_i e β_i sendo constantes a serem determinadas pelas condições iniciais (por exemplo, $\alpha_i = \mathcal{Q}_i(0)$ e $\beta_1 = \dot{\mathcal{Q}}_i(0)/\sqrt{d_i}$).

As coordenadas $\mathcal{Q}_i$, $i = 1,\,\ldots,\,n$, são denominadas *modos normais de vibração* do sistema de n partículas considerado. As quantidades $\sqrt{d_i}$ são denominadas *frequências normais de oscilação* do sistema considerado. Por serem autovalores da matriz B, os d_i's são soluções do polinômio característico $\det\big(\lambda\mathbb{1} - B\big) = 0$. Assim,

$$0 \;=\; \det\big(\lambda\mathbb{1} - B\big) \;=\; \det\Big(\lambda\mathbb{1} - M^{-1/2}KM^{-1/2}\Big) \;=\; \det\big(\lambda M - K\big)\det\big(M^{-1}\big)\,.$$

Concluímos que os d_i's são soluções da chamada *equação secular*, ou *equação característica*:

$$\det\big(\lambda M - K\big) \;=\; 0\,.$$

Note-se que o lado esquerdo é um polinômio de ordem n em λ.

Em forma matricial, (46.137) fica

$$\mathcal{Q}(t) \;=\; \cos\big(D^{1/2}t\big)\alpha + \mathrm{sen}\big(D^{1/2}t\big)\beta\,,$$

com α e β sendo os vetores-coluna com componentes α_i e β_i, $i = 1, \ldots, n$, respectivamente, com $\cos\big(D^{1/2}t\big) = \operatorname{diag}\Big(\cos\big(\sqrt{d_1}t\big), \ \ldots, \ \cos\big(\sqrt{d_n}t\big)\Big)$ e com $\operatorname{sen}\big(D^{1/2}t\big) = \operatorname{diag}\Big(\operatorname{sen}\big(\sqrt{d_1}t\big), \ \ldots, \ \operatorname{sen}\big(\sqrt{d_n}t\big)\Big)$.

Retornando às coordenadas originais, temos que $q(t) = M^{-1/2}O\mathcal{Q}(t)$ e, portanto,

$$q(t) \ = \ M^{-1/2}O\cos\big(D^{1/2}t\big)\alpha + M^{-1/2}O\operatorname{sen}\big(D^{1/2}t\big)\beta \ . \tag{46.138}$$

Para cada componente, isso diz que

$$q_i(t) \ = \ \sum_{a=1}^{n}\big(M^{-1/2}O\big)_{ia}\cos\big(\sqrt{d_a}t\big)\alpha_a + \sum_{a=1}^{n}\big(M^{-1/2}O\big)_{ia}\operatorname{sen}\big(\sqrt{d_a}t\big)\beta_a \ . \tag{46.139}$$

Como se vê, para cada coordenada q_i o movimento é uma combinação linear de movimentos harmônicos independentes cada qual com uma frequência normal de oscilação.

Para as condições iniciais em $t = 0$, (46.139) significa que

$$q_i(0) \ = \ \sum_{a=1}^{n}\big(M^{-1/2}O\big)_{ia}\alpha_a \qquad \text{e} \qquad \dot{q}_i(0) \ = \ \sum_{a=1}^{n}\big(M^{-1/2}O\big)_{ia}\sqrt{d_a}\beta_a \ .$$

Em termos matriciais, isso fica

$$q_0 \ = \ M^{-1/2}O\alpha \qquad \text{e} \qquad v_0 \ = \ M^{-1/2}OD^{1/2}\beta \ .$$

Com isso, podemos reescrever (46.138) diretamente em termos das condições iniciais em $t = 0$:

$$\begin{aligned} q(t) \ &= \ M^{-1/2}O\cos\big(D^{1/2}t\big)O^{-1}M^{1/2}q_0 + M^{-1/2}O\operatorname{sen}\big(D^{1/2}t\big)D^{-1/2}O^{-1}M^{1/2}v_0 \\ &= \ M^{-1/2}\cos\Big(B^{1/2}t\Big)M^{1/2}q_0 + M^{-1/2}B^{-1/2}\operatorname{sen}\Big(B^{1/2}t\Big)M^{1/2}v_0 \ , \end{aligned}$$

Assim, definindo a matriz

$$\Omega \ := \ M^{-1/2}B^{1/2}M^{1/2} \ , \tag{46.140}$$

obtemos

$$q(t) \ = \ \cos\big(\Omega t\big)q_0 + \Omega^{-1}\operatorname{sen}\big(\Omega t\big)v_0 \ . \tag{46.141}$$

E. 46.11 *Exercício*. Demonstre a validade das igualdades acima. ✠

Observe-se que nas duas últimas expressões acima não mais ocorre a matriz ortogonal O. Observe-se também que Ω não é, em geral, simétrica e que as seguintes manipulações são ainda possíveis. Escrevendo-se $\cos\big(\Omega t\big)$ e $\operatorname{sen}\big(\Omega t\big)$ segundo suas definições em termos de séries de Taylor, temos,

$$\Omega^2 \ = \ M^{-1/2}BM^{1/2} \ = \ M^{-1}K \tag{46.142}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} q(t) \ &= \ \left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!}\Omega^{2l}\right]q_0 + \left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!}\Omega^{2l}\right]]v_0 \\ &= \ \left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!}\big(M^{-1}K\big)^l\right]q_0 + \left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!}\big(M^{-1}K\big)^l\right]v_0 \ . \end{aligned} \tag{46.143}$$

Essa é a mesma solução obtida em (46.132), página 2702.

* * *

Para ilustrar os métodos e resultados acima apresentados estudamos com algum detalhe no Exercício E. 46.22, página 2719, o caso em que temos um sistema de duas massas acopladas por molas em movimento unidimensional. Veja também o Exemplo 46.2, página 2706, e os exercícios que lhe seguem.

• **Determinação dos modos normais pelo Teorema Espectral**

A matriz $B^{1/2}$ é simétrica e seus autovalores são $\sqrt{d_i}$, $i = 1, \ldots n$. Seja $\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$, com $0 < r \leq n$ o conjunto de autovalores *distintos* de $B^{1/2}$. Pelo Teorema Espectral (Teorema 10.7, página 539), podemos escrever $B^{1/2} = \sum_{a=1}^{r} \omega_a E_a$, com E_a sendo os projetores espectrais, os quais são matrizes simétricas satisfazendo $E_a E_b = \delta_{a,b} E_a$ e $\sum_{a=1}^{r} E_a = \mathbb{1}_n$. Cada E_a projeta sobre o subespaço de autovetores de $B^{1/2}$ com autovalor ω_a e são dados explicitamente, segundo a Proposição 10.18, página 542 (vide (10.60)) por

$$E_j \;=\; \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r} \frac{1}{\omega_j - \omega_k}\right) \prod_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{r} \Big(B^{1/2} - \omega_l \mathbb{1}\Big) \;,$$

para todo $j = 1, \ldots, r$.

A matriz $\Omega := M^{-1/2} B^{1/2} M^{1/2}$ também possui uma representação espectral: definindo-se $F_a = M^{-1/2} E_a M^{1/2}$, $1 \leq a \leq r$, teremos igualmente $\Omega = \sum_{a=1}^{r} \omega_a F_a$, sendo que valem $F_a F_b = \delta_{a,b} F_a$ e $\sum_{a=1}^{r} F_a = \mathbb{1}_n$ (as matrizes F_a não são necessariamente simétricas) e são dadas explicitamente por

$$F_j \;=\; \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r} \frac{1}{\omega_j - \omega_k}\right) \prod_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{r} \Big(\Omega - \omega_l \mathbb{1}\Big) \;, \tag{46.144}$$

para todo $j = 1, \ldots, r$.

Com isso, e recordando que $\Omega^{-1} = \sum_{a=1}^{r} \omega_a^{-1} F_a$, a solução (46.141) fica

$$q(t) \;=\; \sum_{a=1}^{r} \left[\cos\big(\omega_a t\big) F_a q_0 + \frac{1}{\omega_a} \operatorname{sen}\big(\omega_a t\big) F_a v_0\right] \;. \tag{46.145}$$

Essa é a decomposição de $q(t)$ em seus modos normais, cada um deles sendo $\cos\big(\omega_a t\big) F_a q_0 + \frac{1}{\omega_a} \operatorname{sen}\big(\omega_a t\big) F_a v_0$, $a = 1, \ldots, r$. Se algum dos autovalores, digamos ω_a, for degenerado, os vetores $F_a q_0$ e $F_a v_0$ podem ainda ser decompostos em uma base de vetores no subespaço imagem de F_a.

De forma geral, o uso da decomposição espectral, resultando em (46.145), é o método mais rápido para a determinação dos modos normais de um sistema.

Vemos da relação (46.145) que uma forma de excitarmos apenas o j-ésimo modo normal seria escolher as condições tais que $v_0 = 0$ e $F_a q_0 = 0$ para $a \neq j$. Como $\sum_{a=1}^{r} F_a = \mathbb{1}_n$, isso equivale a ter-se

$$F_j q_0 \;=\; q_0 \qquad \text{e} \qquad F_a q_0 \;=\; 0,\; a \neq j \;.$$

Isso significa que q_0 é um autovetor do projetor F_j com autovalor 1. Isso, por sua vez, significa que q_0 é um autovetor de Ω com autovalor ω_j, ou seja, $\Omega q_0 = \omega_j q_0$. Por simplicidade, vamos considerar o caso em que as frequências são não degeneradas (e, portanto, tenhamos $r = n$). A condição $\Omega q_0 = \omega_j q_0$ implica que $\Omega^2 q_0 = (\omega_j)^2 q_0 = d_j q_0$. Como $\Omega^2 \overset{(46.142)}{=} M^{-1} K$, concluímos que para o j-ésimo modo devemos ter

$$\big(d_j M - K\big) q_0 \;=\; 0 \;. \tag{46.146}$$

Essa equação permite, a menos de uma constante multiplicativa, determinar as condições iniciais para que apenas o j-ésimo modo seja excitado. Veremos usos disso no Exercício E. 46.14, página 2706.

• **Os pêndulos planares simples e duplo como exemplo**

Exemplos ilustrativos são os pêndulos planares simples e duplo, que já abordamos anteriormente.

Exemplo 46.1 Considere-se o pêndulo simples planar, cujo Lagrangiano foi obtido no Exercício E. 45.23, página 2614. No regime de pequenas oscilações, quando ϕ é pequeno, obtemos, ao desprezar termos de ordem maior que 2 em (45.188), página 2614 (ou seja, com a aproximação $\cos(\phi) \cong 1 - \frac{1}{2}\phi^2$), o Lagrangiano

$$\mathscr{L} \;=\; \frac{m}{2}\, \ell^2 \big(\dot{\phi}\big)^2 - \frac{m}{2} g\ell \big(\phi\big)^2 + mg\ell \;.$$

O termo $mg\ell$ é constante e pode ser negligenciado. A correspondente equação de Euler-Lagrange é

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell}\phi \;=\; 0$$

e corresponde à equação de um oscilador harmônico com frequência $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Há aqui apenas um modo normal: o próprio ϕ. ♦

Exemplo 46.2 Considere-se agora o pêndulo duplo planar, cujo Lagrangiano foi obtido no Exercício E. 45.24, página 2614. No regime de pequenas oscilações, em que ϕ_1 e ϕ_2 são pequenos, assim como suas derivadas temporais, o Lagrangiano (45.189) transforma-se em

$$\mathscr{L} \;=\; \left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)\ell_1^2\big(\dot{\phi}_1\big)^2 + \frac{m_2}{2}\ell_2^2\big(\dot{\phi}_2\big)^2 + m_2\ell_1\ell_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 - \frac{m_1+m_2}{2}g\ell_1(\phi_1)^2 - \frac{m_2}{2}g\ell_2(\phi_2)^2 \;. \tag{46.147}$$

Para obter (46.147), consideramos apenas termos no máximo quadráticos em ϕ_1, ϕ_2, $\dot{\phi}_1$ e $\dot{\phi}_2$ na aproximação de pequenas oscilações de (45.189) e negligenciamos termos constantes. As matrizes M e K nesse caso são:

$$M \;=\; \begin{pmatrix} (m_1+m_2)\ell_1^2 & m_2\ell_1\ell_2 \\ m_2\ell_1\ell_2 & m_2\ell_2^2 \end{pmatrix} \;, \qquad K \;=\; \begin{pmatrix} (m_1+m_2)g\ell_1 & 0 \\ 0 & m_2 g\ell_2 \end{pmatrix} \;.$$

Observe-se que M não é diagonal, mas $\det M > 0$, provando que M é inversível. Analogamente, é trivial que $\det K > 0$ e K tem inversa. ♦

E. 46.12 *Exercício*. Mostre que M é positiva. Para tal, mostre que seus autovalores são

$$m_\pm \;:=\; \frac{1}{2}\left(m_2\ell_2^2 + (m_1+m_2)\ell_1^2 \pm \sqrt{\big(m_2\ell_2^2 + (m_1+m_2)\ell_1^2\big)^2 - 4m_1m_2\ell_1^2\ell_2^2}\right) \;,$$

ambos positivos pois $\big(m_2\ell_2^2 + (m_1+m_2)\ell_1^2\big)^2 - 4m_1m_2\ell_1^2\ell_2^2 < \big(m_2\ell_2^2 + (m_1+m_2)\ell_1^2\big)^2$. A positividade de K é evidente. Mostre que a decomposição espectral de M é

$$M \;=\; m_+M_+ + m_-M_- \;,$$

onde

$$M_+ \;=\; \frac{1}{m_+ - m_-}\big(M - m_-\mathbb{1}_2\big) \qquad \text{e} \qquad M_- \;=\; \frac{1}{m_- - m_+}\big(M - m_+\mathbb{1}_2\big)$$

são os projetores espectrais de M. ✠

E. 46.13 *Exercício*. Obtenha as equações de Euler-Lagrange correspondentes ao Lagrangiano (46.147). Obtenha os modos normais, e suas frequências de oscilação, correspondentes ao mesmo Lagrangiano. Constate que as frequências de oscilação dos modos normais são (de [302])

$$d_\pm \;=\; \frac{g}{2m_1\ell_1\ell_2}\Big((m_1+m_2)(\ell_1+\ell_2) \pm \sqrt{\Delta}\Big) \;,$$

sendo

$$\begin{aligned} \Delta \;&=\; (m_1+m_2)\Big((m_1+m_2)(\ell_1+\ell_2)^2 - 4m_1\ell_1\ell_2\Big) \\ &=\; (m_1+m_2)\Big(m_1(\ell_1-\ell_2)^2 + m_2(\ell_1+\ell_2)^2\Big) \;. \end{aligned}$$

Da segunda igualdade para Δ, acima, vê-se claramente que $\Delta > 0$ e, portanto, que $d_+ \neq d_-$. Da primeira, vê-se que d_+ e d_- são positivos, pois $\sqrt{\Delta} = \sqrt{(m_1+m_2)\Big((m_1+m_2)(\ell_1+\ell_2)^2 - 4m_1\ell_1\ell_2\Big)} < (m_1+m_2)(\ell_1+\ell_2)$. Assim, $0 < d_- < d_+$. ✠

E. 46.14 *Exercício dirigido*. As expressões do caso geral dos Exercícios E. 46.12 e E. 46.13 são muito complexas para serem manipuladas sem auxílio de computação algébrica, por isso, vamos considerar, a título de ilustração, o caso particular em que $m_1 = m_2 \equiv m$ e $\ell_1 = \ell_2 \equiv \ell$ (massas iguais e hastes de igual comprimento). Teremos,

$$M \;=\; m\ell^2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;, \qquad K \;=\; mg\ell\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;.$$

Os autovalores de m são

$$m_\pm \;=\; \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}m\ell^2$$

e a decomposição espectral de M é $M = m_+M_+ + m_-M_-$, onde os projetores espectrais $M_\pm$ são

$$M_+ \;=\; \frac{1}{m_+ - m_-}\big(M - m_-\mathbb{1}_2\big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix},$$

$$M_- \;=\; \frac{1}{m_- - m_+}\big(M - m_+\mathbb{1}_2\big) \;=\; \frac{-1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}.$$

É claro disso que $M^{\pm 1/2} = m_+^{\pm 1/2}M_+ + m_-^{\pm 1/2}M_-$. Verifique que

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\pm 1/2} \;=\; \frac{\sqrt{5}\pm 1}{2} \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\pm 1/2} \;=\; \frac{\sqrt{5}\mp 1}{2}\,.$$

(Essas relações estão ligadas a propriedades elementares da chamada *razão áurea*, que já fez uma aparição nestas Notas na Seção 6.1.2, página 359). Usando essas relações, determine explicitamente as matrizes $M^{\pm 1/2}$. O resultado é

$$M^{-1/2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{ml}}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad M^{1/2} \;=\; \sqrt{ml}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Determine explicitamente a matriz $B := M^{-1/2}KM^{-1/2}$. O resultado é

$$B \;=\; \frac{g}{\ell}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -7 & 11\end{pmatrix}.$$

Determine a matriz ortogonal O que diagonaliza B: $D = O^TBO$. O resultado pode ser expresso como

$$O \;=\; \frac{1}{\sqrt{100-10\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 7 & 1-5\sqrt{2} \\ -1+5\sqrt{2} & 7\end{pmatrix}.$$

Os elementos da diagonal de $D = \left(\begin{smallmatrix} d_- & 0 \\ 0 & d_+\end{smallmatrix}\right)$ são

$$d_\pm \;=\; \big(2\pm\sqrt{2}\big)\frac{g}{\ell}$$

e são o quadrado das frequências dos modos normais de oscilação. Os modos normais são dados por $\mathcal{Q} = O^TM^{1/2}q$, com $q = \left(\begin{smallmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{smallmatrix}\right)$. Determine explicitamente os modos normais $\mathcal{Q}$. O resultado final é que o modo $\mathcal{Q}_-$ é proporcional a $\phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_2$ e o modo $\mathcal{Q}_+$ é proporcional a $\phi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_2$. As constantes de proporcionalidade são irrelevantes.

Dessa forma, se desejarmos excitar apenas o primeiro modo $\mathcal{Q}_-$ (anulando $\mathcal{Q}_+$) devemos escolher como condições iniciais $\phi_2 = \sqrt{2}\phi_1$ (e velocidades angulares nulas) e se desejarmos excitar apenas o segundo $\mathcal{Q}_+$ (anulando $\mathcal{Q}_-$) modo devemos escolher como condições iniciais $\phi_2 = -\sqrt{2}\phi_1$ (e velocidades angulares nulas) . Vide Figura 46.13, página 2708.

Podemos chegar às mesmas conclusões (talvez de forma mais simples) fazendo uso da relação (46.146), página 2705. Para excitarmos apenas o modo $\mathcal{Q}_\pm$ uma possibilidade é termos as condições iniciais $v_0 = 0$ e $q_{0\pm}$, com

$$\big(d_\pm M - K\big)q_{0\pm} \;=\; 0\,, \qquad \text{ou seja,} \quad mg\ell\begin{pmatrix} 2\big(2\pm\sqrt{2}\big)-2 & \big(2\pm\sqrt{2}\big) \\ \big(2\pm\sqrt{2}\big) & \big(2\pm\sqrt{2}\big)-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^1_{0\pm} \\ q^2_{0\pm}\end{pmatrix} \;=\; 0\,, \tag{46.148}$$

onde escrevemos $q_{0\pm} = \begin{pmatrix} q^1_{0\pm} \\ q^2_{0\pm} \end{pmatrix}$. Assim,

$$\big(2 \pm 2\sqrt{2}\big) q^1_{0\pm} + \big(2 \pm \sqrt{2}\big) q^2_{0\pm} \; = 0 \tag{46.149}$$

(a outra relação é idêntica). Como $q_{0\pm}$ é indeterminado a menos de uma constante, interessa-nos apenas a razão $q^2_{0\pm}/q^1_{0\pm}$, que pode ser lida de (46.149) como sendo

$$\frac{q^2_{0\pm}}{q^1_{0\pm}} \; = \; -\frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2 \pm \sqrt{2}} \; = \; \mp\sqrt{2} \, .$$

Assim, para as condições iniciais dos dois modos temos $\phi_2 = \sqrt{2}\phi_1$ (modo $-$) e $\phi_2 = -\sqrt{2}\phi_1$ (modo $+$), como obtivemos acima. ✠

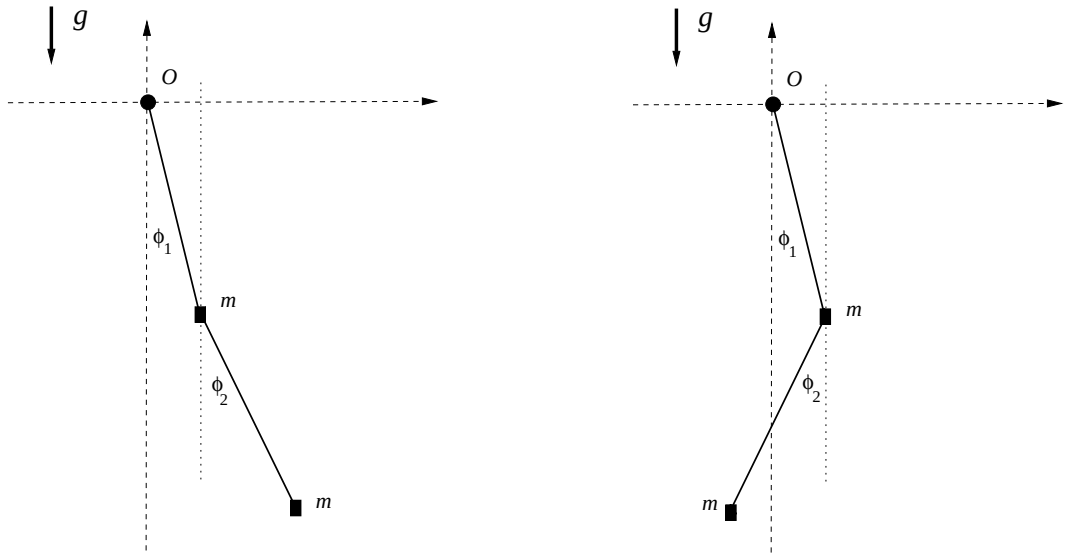

Figura 46.13: Esquema de um pêndulo duplo planar composto por duas hastes de igual comprimento e duas massas iguais. No lado esquerdo temos como condição inicial $\phi_2 = \sqrt{2}\phi_1$ e apenas o primeiro modo normal $\mathcal{Q}_-$ é excitado, e passa a mover-se harmonicamente com frequência $\sqrt{d_-}$. No lado direito temos como condição inicial $\phi_2 = -\sqrt{2}\phi_1$ e apenas o segundo modo normal $\mathcal{Q}_+$ é excitado, e passa a mover-se harmonicamente com frequência $\sqrt{d_+}$.

46.4.1 Modos Normais e a Energia Mecânica

Apresentemos agora algumas considerações de grande significado físico sobre os modos normais. A energia mecânica do sistema definido pelo Lagrangiano original (46.127), página 2701, é, a menos de uma constante irrelevante,

$$\mathscr{E} \; = \; \frac{1}{2}\big\langle \dot{q}, \; M\dot{q} \big\rangle_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2}\big\langle q, \; Kq \big\rangle_{\mathbb{R}} \, . \tag{46.150}$$

Vamos escrevê-la em termos dos modos normais $\mathcal{Q}$. Usando, (46.134), temos $q = M^{-1/2}O\mathcal{Q}$ e, portanto,

$$\mathscr{E} \; = \; \frac{1}{2}\big\langle \dot{\mathcal{Q}}, \; O^T M^{-1/2} M M^{-1/2} O \dot{\mathcal{Q}} \big\rangle_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2}\big\langle \mathcal{Q}, \; O^T M^{-1/2} K M^{-1/2} O \mathcal{Q} \big\rangle_{\mathbb{R}} \, .$$

Agora, $O^T M^{-1/2} M M^{-1/2} O = \mathbb{1}$, pois O é ortogonal. Além disso, $O^T M^{-1/2} K M^{-1/2} O = O^T B O = D$. Assim,

$$\mathscr{E} \; = \; \frac{1}{2}\big\langle \dot{\mathcal{Q}}, \; \dot{\mathcal{Q}} \big\rangle_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2}\big\langle \mathcal{Q}, \; D\mathcal{Q} \big\rangle_{\mathbb{R}} \; = \; \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\Big((\dot{\mathcal{Q}}_i)^2 + d_i (\mathcal{Q}_i)^2 \Big) \, .$$

Essa expressão tem uma interessantíssima interpretação. Como cada modo normal $\mathcal{Q}_i$ satisfaz a equação (46.136), sua energia mecânica é justamente $\mathscr{E}_i \; := \; \frac{1}{2}\Big((\dot{\mathcal{Q}}_i)^2 + d_i (\mathcal{Q}_i)^2 \Big)$. É claro que, para cada i, trata-se de uma grandeza conservada,

como se vê, por exemplo, pelas soluções (46.137). Assim, vemos que a energia mecânica total $\mathscr{E}$ é a soma das energias mecânicas individuais dos modos normais, cada qual é individualmente conservada.

Essa observação vem ao encontro da ideia de que os modos normais são independentes uns dos outros, pois ela afirma que eles não trocam energia durante o movimento. Essa é uma característica um tanto surpreendente de sistemas de osciladores harmônicos acoplados, como os descritos no Lagrangiano original (46.127), página 2701: dentro deles ocorrem modos de oscilação desacoplados que não trocam energia entre si.

• Um breve comentário sobre o experimento computacional de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou

Caso fossem adicionados termos cúbicos ou quárticos ao Lagrangiano (46.127), as equações de Euler-Lagrange (46.136) seriam modificadas, passando a incluir termos não lineares. Um exemplo, seriam as equações

$$\ddot{\mathcal{Q}}_i(t) + d_i \mathcal{Q}_i(t) \;=\; \sum_{j,\,k=1}^{n} T_{ijk} \mathcal{Q}_i(t) \mathcal{Q}_j(t) \mathcal{Q}_k(t) \;, \qquad i = 1,\,\ldots,\,n \;,$$

com constantes T_{ijk}. Em tais casos, os modos normais podem trocar energia uns com os outros. Mesmo aqui, porém, há uma surpresa. Em um experimento computacional realizado na alvorada da computação eletrônica, em 1953 (com o computador MANIAC I, de Los Alamos), Fermi[43], Pasta[44], Ulam[45] e Tsingou[46] [155] testaram se a energia de um dos modos normais de uma cadeia unidimensional de osciladores de igual massa seria distribuída uniformemente entre os demais modos normais caso termos não lineares fossem considerados nas correspondentes equações de movimento. Esse era o comportamento esperado de sistemas não lineares, sendo essa hipótese conhecida como *princípio de equipartição de energia*, na Mecânica Estatística. Para surpresa de seus autores, esse comportamento não foi observado, dentro dos limites temporais e de precisão computacionalmente permitidos, com a energia de um modo excitado sendo transferida aos demais, mas retornando de forma quase-periódica ao modo original. Vide Figura 46.14, página 2711. As cadeias unidimensionais de osciladores estudadas em [155] tinham 32 ou 64 massas iguais e tinham os extremos fixados.

Vale observar que experimentos reais com osciladores sempre sofrem de perdas de energia por atrito, dificultando, ou mesmo impedindo, a observação de comportamentos de longo tempo, como a termalização dos modos de oscilação. Tendo trabalhado durante a Segunda Guerra Mundial no projeto Manhattan, no Laboratório de Los Alamos, Fermi tinha acesso a seus computadores e viu neles uma oportunidade de fazer Ciência não aplicada a usos militares, fim esse a que essas máquinas tinham sido majoritariamente destinadas até então. Simulações computacionais de sistemas mecânicos permitem contornar efeitos indesejados, como efeitos de atrito, permitindo que descobertas sejam realizadas mesmo quando a análise matemática dos mesmos sistemas é por demais complexa.

Nas obras coligidas de Fermi, citadas em [155], Ulam escreve:

> *"Fermi expressed often the belief that future fundamental theories in physics may involve non-linear operators and equations, and that it would be useful to attempt practice in the mathematics needed for the understanding of nonlinear systems. The plan was then to start with the possibly simplest such physical model and to study the results of the calculation of its long-time behavior.... The motivation then was to observe the rates of mixing and thermalization with the hope that the computational results would provide hints for a future theory. One could venture a guess that one motive in the selection of problems could be traced to Fermi's early interest in the ergodic theory".*

O trabalho de Fermi, Pasta, Ulam e Tsingou [155] foi pioneiro na investigação com base em computadores de sistemas de interesse físico e matemático, abrindo caminho para o estudo de sistemas não lineares, caóticos e inspirando diversos desenvolvimentos teóricos e matemáticos, como os da teoria dos sistemas dinâmicos, em geral, e a teoria dos sólitons, em particular.

[43] Enrico Fermi (1901–1954).
[44] John Robert Pasta (1918–1981).
[45] Stanisław Marcin Ulam (1909–1984).
[46] Mary Tsingou (1928–). Em um possível caso de misoginia, o nome de Mary Tsingou não não fora citado dentre os autores da publicação original [155] que, no entanto, mencionava claramente: *"Report written by Fermi, Pasta and Ulam. Work done by Fermi, Pasta, Ulam and Tsingou"*. Sua contribuição crítica para a descoberta foi apontada posteriormente. Esse lapso não teria sido completamente por culpa dos demais autores (Fermi, por exemplo, falecera um ano antes da publicação), mas em parte devido a regras internas do Laboratório de Los Alamos, onde o *report* foi publicado, que distinguiam entre autores do trabalho (FPU+Tsingou) que aqueles que efetivamente redigiram o texto final (FPU). Vide [116] e [198]. Há atualmente em curso um movimento de recuperar o nome e a contribuição de Tsingou, juntando-o sempre aos demais autores em referência a [155] e aos problemas de pesquisa gerados por aquele trabalho. Tsingou continuou realizando trabalhos sobre os modelos de [155], notadamente [518], de 1972, (com o sobrenome de casada, Menzel), estendendo os resultados a intervalos muito mais longos de tempo.

Diversos experimentos computacionais posteriores, com melhores recursos computacionais, confirmaram o efeito de recorrência da energia, mesmo para intervalos de tempos extremamente longos (vide, *e.g.*, [518]), desde que a energia total do sistema esteja abaixo de um certo limiar. Se a energia estiver acima de um segundo limiar, mais alto, a evolução do sistema será caótica e uma rápida transição para um regime de equipartição de energia entre os modos será observada[47]. Além disso, verificou-se que, com o aumento do número de pontos materiais na cadeia, o surgimento do regime caótico e da equipartição de energia se manifesta com um menor limiar de energia, e de modo que, no limite em que o número de pontos materiais vai ao infinito, a equipartição de energia ocorre com qualquer energia inicial. Para uma referência, vide [400].

Até o presente, um entendimento teórico completo desses fenômenos não está disponível, mas acredita-se que o princípio de equipartição de energia não seja válido nos sistemas considerados, em baixas energias, devido à presença de sólitons e à sua integrabilidade. O que se passa com maiores energias ainda escapa à análise matemática.

O experimento de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou é ainda repetido com aperfeiçoamentos e estudado teoricamente, tendo assumido um papel importante na teoria dos sistemas dinâmicos, no estudo de sólitons, no estudo de equações diferenciais parciais e sistemas integráveis, em estudos de ergodicidade de sistemas mecânicos, assim como no estudo de sistemas caóticos. Destacamos também que modelos como os analisados por Fermi, Pasta, Ulam e Tsingou são relevantes para o entendimento de processos de condução de calor em materiais cristalinos, em particular, para o entendimento da chamada *Lei de Fourier*[48], que até o presente não foi demonstrada a partir de primeiros princípios, permanecendo uma lei empírica. Esse problema da dedução teórica da Lei de Fourier é um dos grandes problemas abertos da Física.

Para um importante avanço recente no problema de termalização dos modos no experimento de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou, vide [386]. Para um texto de revisão sobre o experimento de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou, vide [52]. Para um texto mais elementar e divulgativo, vide [407]. A referência [400] contém também uma revisão de resultados, assim como resultados originais. Para um texto sobre o *status* teórico e matemático do problema, recomendamos [180].

46.5 Ângulos de Euler na Mecânica de Corpos Rígidos

Os ângulos de Euler, estudados na Seção 21.4.2.2, página 1140, prestam-se à descrição de matrizes de rotação e também, consequentemente, ao tratamento de alguns problemas envolvendo corpos rígidos. Vamos agora, sob a luz de um exemplo, descrever como isso se dá. Ainda no contexto de nosso tratamento de corpos rígidos (vide Seção 45.4, página 2587), seja $\mathbf{k}$ um sistema de referência inercial e $\mathbf{K}$ o sistema de referência fixo no corpo rígido, com origem em seu centro de massa, sendo $R_t \in \mathrm{SO}(3)$ definido como antes.

Usando a descrição de rotações em termos de ângulos de Euler, escrevamos $R_t = R_3(\varphi_t)R_1(\theta_t)R_3(\psi_t)$. Assim, $R_t^{-1} = R_3(-\psi_t)R_1(-\theta_t)R_3(-\varphi_t)$ e

$$\dot{R}_t \;=\; \dot{\varphi}_t \mathsf{J}_3 R_3(\varphi_t)R_1(\theta_t)R_3(\psi_t) + \dot{\theta}_t R_3(\varphi_t)R_1(\theta_t)\mathsf{J}_1 R_3(\psi_t) + \dot{\psi}_t R_3(\varphi_t)R_1(\theta_t)R_3(\psi_t)\mathsf{J}_3 \;.$$

Como $\vec{\Omega}_t \cdot \vec{\mathsf{J}} = R_t^{-1}\dot{R}_t$, podemos escrever o vetor velocidade angular intrínseca em termos dos três ângulos de Euler φ_t,

[47] Os regimes estudados nos experimentos numéricos de [155] correspondem à primeira situação, a de baixa energia. Um prenúncio do aparecimento de equipartição de energia para altas energias em sistemas como os de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou foi apresentado em [550]. Segundo os autores *"A further increase in the nonlinearity results in a rapid cascade of energy across the entire modal energy spectrum. For the times considered, however, we fail to attain complete equipartition of the spectral energies"*.

[48] Vide Seção 43.1.1, página 2416. Em particular, vide (43.1), página 2417.

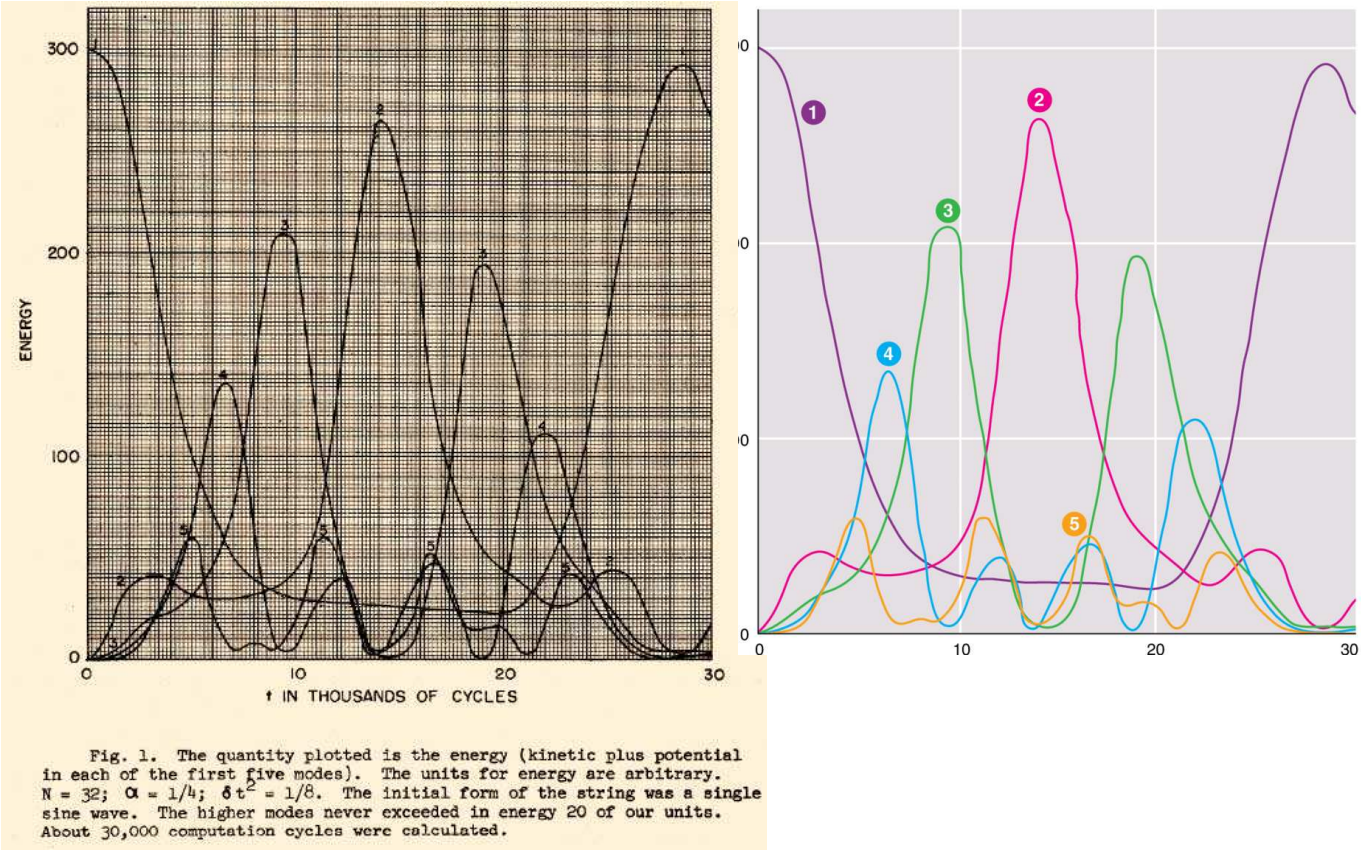

Figura 46.14: **Esquerda:** reprodução de gráfico do artigo original de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou [155], exibindo a evolução com o tempo da energia mecânica dos cinco primeiros modos de oscilação da cadeia unidimensional não linear considerada. O eixo horizontal é o tempo e o vertical a energia. O sistema inicia com toda a energia no primeiro modo, que é, em seguida, distribuída entre os demais modos, mas retorna quase inteiramente ao primeiro após um certo tempo. **Direita:** reprodução moderna dos mesmos resultados, extraída de [407].

θ_t e ψ_t e de suas derivadas. Fazendo uso repetido das relações (21.121), página 1139, temos

$$\begin{aligned}
\vec{\Omega}_t \cdot \vec{\mathsf{J}} \;=\; R_t^{-1}\dot{R}_t \;&=\; \dot{\varphi}_t R_3(-\psi_t)\Big(R_1(-\theta_t)\mathsf{J}_3 R_1(\theta_t)\Big)R_3(\psi_t) + \dot{\theta}_t\Big(R_3(-\psi_t)\mathsf{J}_1 R_3(\psi_t)\Big) + \dot{\psi}_t\mathsf{J}_3 \\
&=\; \dot{\varphi}_t\Big(\cos(\theta_t)\mathsf{J}_3 + \operatorname{sen}(\theta_t)R_3(-\psi_t)\mathsf{J}_2 R_3(\psi_t)\Big) + \dot{\theta}_t\Big(\cos(\psi_t)\mathsf{J}_1 - \operatorname{sen}(\psi_t)\mathsf{J}_2\Big) + \dot{\psi}_t\mathsf{J}_3 \\
&=\; \dot{\varphi}_t\Big(\cos(\theta_t)\mathsf{J}_3 + \operatorname{sen}(\theta_t)\big(\cos(\psi_t)\mathsf{J}_2 + \operatorname{sen}(\psi_t)\mathsf{J}_1\big)\Big) + \dot{\theta}_t\Big(\cos(\psi_t)\mathsf{J}_1 - \operatorname{sen}(\psi_t)\mathsf{J}_2\Big) + \dot{\psi}_t\mathsf{J}_3 \\
&=\; \Big(\dot{\varphi}_t\operatorname{sen}(\theta_t)\operatorname{sen}(\psi_t) + \dot{\theta}_t\cos(\psi_t)\Big)\mathsf{J}_1 + \Big(\dot{\varphi}_t\operatorname{sen}(\theta_t)\cos(\psi_t) - \dot{\theta}_t\operatorname{sen}(\psi_t)\Big)\mathsf{J}_2 \\
&\quad + \Big(\dot{\varphi}_t\cos(\theta_t) + \dot{\psi}_t\Big)\mathsf{J}_3\,. \qquad (46.151)
\end{aligned}$$

Assim, identificamos

$$\left(\vec{\Omega}_t\right)_1 = \dot{\varphi}_t \operatorname{sen}(\theta_t)\operatorname{sen}(\psi_t) + \dot{\theta}_t \cos(\psi_t) \ , \tag{46.152}$$

$$\left(\vec{\Omega}_t\right)_2 = \dot{\varphi}_t \operatorname{sen}(\theta_t)\cos(\psi_t) - \dot{\theta}_t \operatorname{sen}(\psi_t) \ , \tag{46.153}$$

$$\left(\vec{\Omega}_t\right)_3 = \dot{\varphi}_t \cos(\theta_t) + \dot{\psi}_t \ . \tag{46.154}$$

E. 46.15 *Exercício*. Usando (21.121), página 1139, verifique os passos que conduzem a (46.151). ✠

Por conveniência, escolheremos doravante os eixos de **K** como sendo eixos principais do corpo rígido, de sorte que o tensor de momento de inércia I seja diagonal. Com isso, podemos expressar a energia cinética rotacional de um corpo rígido dada em (45.113) em termos dos ângulos de Euler e suas derivadas temporais. Por exemplo, a energia cinética de rotação de um pião esférico (para o qual vale $I_1 = I_2 = I_3$) é $e_{cr}(t) = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}_t^2 + \dot{\theta}_t^2 + \dot{\psi}_t^2 + 2\dot{\varphi}_t\dot{\psi}_t\cos(\theta_t)\right)$.

No caso de um pião simétrico, ou seja, para $I_1 = I_2 \neq I_3$, a energia cinética de rotação é dada, usando-se (45.113) e os ângulos de Euler, por

$$e_{cr}(t) = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}_t^2 \operatorname{sen}(\theta_t)^2 + \dot{\theta}_t^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}_t\cos(\theta_t) + \dot{\psi}_t\right)^2 \ .$$

É importante notar que o lado direito *independe* dos ângulos φ_t e ψ_t, apenas de suas derivadas.

E. 46.16 *Exercício*. Verifique as expressões acima para e_{cr}. ✠

46.5.1 Usos dos Ângulos de Euler. O Pião de Lagrange

• **Movimento com um ponto fixo. O pião de Lagrange**

Vamos agora tratar com algum detalhe de um problema cuja solução exibe características também encontradas em outros sistemas congêneres. Trata-se de um problema de Mecânica em cujo tratamento o uso dos ângulos de Euler é de real utilidade. Consideremos um *Pião de Lagrange*, um pião simétrico colocado sob a ação de um campo gravitacional uniforme, tendo um dos pontos de seu eixo de simetria fixo. Esse ponto fixo, em torno do qual o pião pode girar livremente, é denominado *pivô*. Adotaremos o eixo 3 como o eixo de simetria do pião e adotaremos a origem do sistema de coordenadas inercial coincidente com o pivô.

E. 46.17 *Exercício*. Mostre que o Lagrangiano desse sistema mecânico, expresso em termos de ângulos de Euler, é

$$\mathscr{L} = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}_t^2 \operatorname{sen}(\theta_t)^2 + \dot{\theta}_t^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}_t\cos(\theta_t) + \dot{\psi}_t\right)^2 - Mgl\cos(\theta_t) \ , \tag{46.155}$$

onde l é a distância do centro de massa do pião ao pivô e onde I_1 e I_3 são os momentos de inércia principais definidos em relação ao pivô. *Sugestão: inspire-se em (45.114) e em (45.128), páginas 2590 e 2593, respectivamente*. Obtenha as correspondentes equações de Euler-Lagrange e constate que

$$p_\psi := I_3\left(\dot{\psi}_t + \dot{\varphi}_t\cos(\theta_t)\right) \tag{46.156}$$

e que

$$p_\varphi := I_1\dot{\varphi}_t \operatorname{sen}(\theta_t)^2 + I_3\cos(\theta_t)\left(\dot{\psi}_t + \dot{\varphi}_t\cos(\theta_t)\right) \ , \tag{46.157}$$

ou seja,

$$p_\varphi = I_1\dot{\varphi}_t \operatorname{sen}(\theta_t)^2 + p_\psi\cos(\theta_t) \tag{46.158}$$

são constantes de movimento. Isso se deve ao fato que $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi} = 0$ para o Lagrangiano acima. Na Mecânica Clássica, coordenadas q com essa propriedade, ou seja, tais que $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q} = 0$, são denominadas *coordenadas cíclicas* e, por força das equações de Euler-Lagrange, seus momentos generalizados $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}$ são constantes de movimento. Os ângulos de Euler φ e ψ são, portanto, coordenadas cíclicas no problema do pião de Lagrange.

Mostre que a energia mecânica (cinética mais potencial) do pião de Lagrange é dada por

$$e_m = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}_t^2 \operatorname{sen}(\theta_t)^2 + \dot{\theta}_t^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}_t\cos(\theta_t) + \dot{\psi}_t\right)^2 + Mgl\cos(\theta_t)$$

e é também uma constante de movimento. Escrevendo

$$\dot{\varphi}_t \;=\; \frac{p_\varphi - p_\psi \cos(\theta_t)}{I_1(\operatorname{sen}\theta_t)^2} \tag{46.159}$$

e definindo

$$e' \;:=\; e_m - \frac{p_\psi^2}{2I_3}\;,$$

que também é, obviamente, uma constante de movimento, mostre que

$$e' \;=\; \frac{I_1}{2}\dot{\theta}_t^2 + \widetilde{V}(\theta_t)\;, \tag{46.160}$$

onde

$$\widetilde{V}(\theta) \;=\; Mgl\cos(\theta) + \frac{\big(p_\varphi - p_\psi\cos(\theta)\big)^2}{2I_1(\operatorname{sen}\theta)^2}\;. \tag{46.161}$$

Obtenha disso que

$$\int_{\theta_0}^{\theta_t} \frac{1}{\sqrt{e' - \widetilde{V}(\theta)}}\, d\theta \;=\; \sqrt{\frac{2}{I_1}}\, t\;. \tag{46.162}$$

Essa expressão fornece uma solução formal ao nosso problema, como passaremos a descrever. ✠

A relação (46.162) permite obter θ_t em função de t, da seguinte forma. Se $F(\theta)$ for uma primitiva de $\frac{1}{\sqrt{e'-\widetilde{V}(\theta)}}$, então (46.162) fica $F(\theta_t) - F(\theta_0) = \sqrt{\frac{2}{I_1}}t$, o que permite escrever

$$\theta_t \;=\; F^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{I_1}}t + F(\theta_0)\right)\;,$$

onde F^{-1} seria a função inversa da F. Como descreveremos simplificadamente adiante, a função inversa F^{-1} pode ser escrita em termos das chamadas *funções elípticas de Weierstrass*[49] (vide *e.g.*, [539], [238] ou [73]).

Uma vez obtida a função θ_t, a relação (46.158) permite obter φ_t integrando-se ambos os lados da igualdade

$$\dot{\varphi}_t \;=\; \frac{p_\varphi - p_\psi\cos(\theta_t)}{I_1\big(1-\cos^2(\theta_t)\big)}\;. \tag{46.163}$$

Verifique! Por fim, a relação (46.156) permite obter ψ_t integrando-se ambos os lados da igualdade $\dot{\psi}_t = p_\psi/I_3 - \dot{\varphi}_t\cos(\theta_t)$ que, usando (46.163), também pode ser escrita apenas em termos de $\cos\theta_t$ como

$$\dot{\psi}_t \;=\; \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{p_\varphi - p_\psi\cos(\theta_t)}{I_1\big(1-\cos^2(\theta_t)\big)}\cos(\theta_t)\;. \tag{46.164}$$

Verifique!

Os comentários postos acima foram feitos para exibir a factibilidade da resolução das equações de movimento. Porém, o cálculo "explícito" do lado esquerdo de (46.162) (e a inversão da função assim obtida) e, especialmente, a integração de (46.163) e de (46.164) são um tanto complicados, mesmo se escritas em termos de funções especiais, como as funções elípticas de Weierstrass (vide abaixo). Modernamente, é por vezes mais útil em situações concretas resolver essas equações usando-se métodos de integração numérica, tema no qual não tocaremos aqui. No entanto, como comentaremos adiante, informações qualitativas relevantes sobre o movimento podem ser inferidas analisando-se propriedades gerais das equações acima.

• **Obtendo θ_t. As funções elípticas de Weierstrass. O movimento de nutação**

Para aprofundar um pouco mais o tratamento da integral do lado esquerdo de (46.162), façamos nela a mudança de variáveis $u = \cos\theta$. Após algumas contas tediosas mas elementares, a mesma fica

$$-\frac{2}{\sqrt{Mgl}}\int_{u_0}^{u_t} \frac{du}{\sqrt{4\big(u-e''\big)\big(u^2-1\big) + \big(p'_\varphi - p'_\psi u\big)^2}}\;,$$

[49] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897).

onde $u_t := \cos\theta_t$, $e'' := e'/(Mgl)$, $p'_\varphi := 2p_\varphi/\sqrt{Mgl}$ e $p'_\psi := 2p_\psi/\sqrt{Mgl}$. Verifique! O termo dentro da raiz quadrada é um polinômio de grau 3 na variável u e o escrevemos como $p(u) = 4u^3 + a_2u^2 + a_1u + a_0$. As constantes a_0, a_1 e a_2 podem facilmente ser escritas explicitamente em termos de e_m, p_φ e p_ψ, mas pouco nos interessa fazê-lo aqui. (Faça-o!). Fazendo a mudança de variáveis $s = u + \alpha$ com $\alpha = a_2/12$, obtemos $p(u) = p\big(s - \alpha\big) = 4s^3 - c_1s - c_0$, para novas constantes c_0 e c_1.

E. 46.18 *Exercício*. Obtenha as constantes c_0 e c_1 em termos das constantes de movimento e_m, p_φ e p_ψ. ✠

O ponto de interesse reside no fato que, com as escolhas acima, eliminou-se convenientemente o termo s^2. Com isso, nossa integral fica

$$-\frac{2}{\sqrt{Mgl}}\int_{u_0+\alpha}^{u_t+\alpha}\frac{du}{\sqrt{4s^3 - c_1s - c_0}}\,. \tag{46.165}$$

Evitando entrar em detalhes, como em questões relacionadas a domínios de definição, a integral acima pode ser escrita em termos da chamada *função elíptica de Weiertrass* (vide *e.g.*, [539], [238] ou [73]), denotada tradicionalmente pelo símbolo $\wp$, e que satisfaz

$$\wp^{-1}(x) \;=\; \int_x^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - c_1s - c_0}}\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad y \;=\; \int_{\wp(y)}^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - c_1s - c_0}}\,. \tag{46.166}$$

Naturalmente, a função $\wp(x) \equiv \wp(x;\ c_0,\, c_1)$ depende das constantes c_0 e c_1, mas essa dependência é costumeiramente omitida da notação. Não entraremos em detalhes sobre a definição das funções elípticas de Weierstrass e comentamos apenas que elas são riquíssimas em propriedades, especialmente quando estendidas ao plano complexo. Por exemplo, elas são duplamente periódicas[50] em $\mathbb{C}$ e, portanto, são periódicas em $\mathbb{R}$, ainda que não sejam necessariamente limitadas. As constantes c_0 e c_1 são denominadas *invariantes elípticos* e estão relacionadas aos dois períodos de $\wp$ em $\mathbb{C}$. Para mais detalhes, vide [539], [16], [416], [250], [238] ou [73].

Retomando (46.165) e (46.162), temos que $\wp^{-1}\Big(\cos(\theta_t) + \alpha\Big) - \wp^{-1}\Big(\cos(\theta_0) + \alpha\Big) = t/\tau$, onde τ é a constante $\tau := \sqrt{\frac{2I_1}{Mgl}}$ e, assim,

$$\theta_t \;=\; \arccos\left[\wp\left(\frac{t}{\tau} + d_0\right) - \alpha\right]\,, \tag{46.167}$$

onde $d_0 := \wp^{-1}\big(\cos(\theta_0) + \alpha\big)$. Como $\wp$ é uma função periódica de período T em $\mathbb{R}$, vemos que θ_t também é periódica de período τT. Comentamos que τ tem dimensão de tempo, enquanto que T é uma grandeza adimensional e que depende das constantes c_0 e c_1 que definem $\wp$. Esse movimento oscilatório periódico do ângulo de Euler θ_t é denominado *nutação*.

• Obtendo φ_t e ψ_t. Os movimentos de precessão e rotação intrínseca

Apresentemos agora expressões para φ_t e ψ_t em termos da função elíptica de Weiertrass para em seguida analisarmos qualitativamente os resultados obtidos.

E. 46.19 *Exercício*. De (46.163) e (46.164) obtenha:

$$\dot\varphi_t \;=\; \frac{p_\varphi - p_\psi\left[\wp\left(\frac{t}{\tau} + d_0\right) - \alpha\right]}{I_1\Big(1 - \left[\wp\left(\frac{t}{\tau} + d_0\right) - \alpha\right]^2\Big)} \quad \text{e} \quad \dot\psi_t \;=\; \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{\Big(p_\varphi - p_\psi\left[\wp\left(\frac{t}{\tau} + d_0\right) - \alpha\right]\Big)\left[\wp\left(\frac{t}{\tau} + d_0\right) - \alpha\right]}{I_1\Big(1 - \left[\wp\left(\frac{t}{\tau} + d_0\right) - \alpha\right]^2\Big)}\,, \tag{46.168}$$

[50] A seguinte expressão é frequentemente tomada como definição das funções elípticas de Weierstrass no plano complexo:

$$\wp(z) \;\equiv\; \wp(z,\, \omega_1,\, \omega_2) \;:=\; \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2\\(m,\,n)\neq(0,\,0)}}\left[\frac{1}{(z + m\omega_1 + n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2}\right]\,,$$

onde ω_1 e $\omega_2 \in \mathbb{C}$ são por convenção tais que ω_2/ω_1 tem parte imaginária positiva (o que, em particular, implica que $|m\omega_1 + n\omega_2|$ nunca se anula para $(m,\,n) \in \mathbb{Z}^2$, nem torna-se arbitrariamente pequena). Essa definição origina-se dos trabalhos do próprio Weierstrass. É elementar constatar que $\wp(z) = \wp(z + m\omega_1 + n\omega_2)$ para todos $(m,\,n) \in \mathbb{Z}^2$ (daí dizer-se que $\wp$ é duplamente periódica em $\mathbb{C}$). É também fácil ver que soma acima é absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C}\setminus\Lambda$, onde $\Lambda := \big\{m\omega_1 + n\omega_2,\ (m,\,n) \in \mathbb{Z}^2\big\}$, sendo, portanto, analítica no domínio $\mathbb{C}\setminus\Lambda$. Nos pontos de Λ a função $\wp(z)$ exibe polos duplos. As constantes ω_1 e ω_2 estão relacionadas às constantes c_0 e c_0 da representação (46.166).

assim como

$$\varphi_t = \varphi_0 + \frac{\tau}{I_1}\int_{d_0}^{t/\tau+d_0} \frac{p_\varphi - p_\psi\left[\wp\left(t'\right)-\alpha\right]}{1-\left[\wp\left(t'\right)-\alpha\right]^2}\, dt' \,, \tag{46.169}$$

$$\psi_t = \psi_0 + \frac{p_\psi}{I_3}t - \frac{\tau}{I_1}\int_{d_0}^{t/\tau+d_0} \frac{p_\varphi - p_\psi\left[\wp\left(t'\right)-\alpha\right]}{1-\left[\wp\left(t'\right)-\alpha\right]^2}\left[\wp\left(t'\right)-\alpha\right]\, dt' \,. \tag{46.170}$$

Com uso dessas expressões, de (46.163), de (46.164) e de (46.167) podemos em princípio obter as componentes de Ω_t dadas em (46.152)–(46.154), mas as expressões assim obtidas são deveras complexas, mais ainda que as acima, e de pouco uso direto. ✠

O movimento associado à variação de φ_t é denominado *precessão* e o associado à variação de ψ_t é denominado *rotação intrínseca* em torno do eixo de simetria do pião.

• **Primeiras considerações qualitativas sobre o movimento do pião de Lagrange**

Façamos agora, na medida do possível, alguns comentários gerais sobre o comportamento qualitativo das soluções obtidas acima. Vamos denotar por $\Phi_{t'}$ e $\Psi_{t'}$ os integrandos de (46.169) e de (46.170), respectivamente:

$$\Phi_{t'} := \frac{p_\varphi - p_\psi\left[\wp\left(t'\right)-\alpha\right]}{1-\left[\wp\left(t'\right)-\alpha\right]^2} \qquad \text{e} \qquad \Psi_{t'} := \frac{p_\varphi - p_\psi\left[\wp\left(t'\right)-\alpha\right]}{1-\left[\wp\left(t'\right)-\alpha\right]^2}\left[\wp\left(t'\right)-\alpha\right] \,.$$

Como $\wp$ é uma função periódica, de período T em $\mathbb{R}$, ambas as funções $\Phi_{t'}$ e $\Psi_{t'}$ são também periódicas de período T e, portanto, podemos formalmente expandi-las em séries de Fourier (vide Seção 37.4.2, página 1968):

$$\Phi_{t'} = \frac{\widehat{\Phi}_0}{\sqrt{T}} + \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{\widehat{\Phi}_k}{\sqrt{T}}\, e^{i2\pi k t'/T} \qquad \text{e} \qquad \Psi_{t'} = \frac{\widehat{\Psi}_0}{\sqrt{T}} + \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{\widehat{\Psi}_k}{\sqrt{T}}\, e^{i2\pi k t'/T} \,.$$

Com isso, (46.169) e (46.170) se escrevem, respectivamente, como

$$\varphi_t = \varphi_0 + \left(\frac{\widehat{\Phi}_0}{I_1\sqrt{T}}\right)t + L_\varphi(t) \,, \tag{46.171}$$

$$\psi_t = \psi_0 + \left(\frac{p_\psi}{I_3} - \frac{\widehat{\Psi}_0}{I_1\sqrt{T}}\right)t + L_\psi(t) \,, \tag{46.172}$$

onde L_φ e L_ψ são as funções periódicas de período $T\tau$ dadas por

$$L_\varphi(t) := \frac{\sqrt{T}}{4\pi}\frac{\tau}{I_1}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{\widehat{\Phi}_k e^{i2\pi k d_0/T}}{k}\right)\left(e^{i2\pi k\, t/(T\tau)}-1\right) \,,$$

$$L_\psi(t) := -\frac{\sqrt{T}}{4\pi}\frac{\tau}{I_1}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{\widehat{\Psi}_k e^{i2\pi k d_0/T}}{k}\right)\left(e^{i2\pi k\, t/(T\tau)}-1\right) \,.$$

E. 46.20 *Exercício*. Verifique! ✠

Vemos de (46.171) e (46.172) que os ângulos de Euler φ_t e ψ_t crescem em média linearmente com t com velocidades angulares médias

$$w_\varphi := \left(\frac{\widehat{\Phi}_0}{I_1\sqrt{T}}\right) \qquad \text{e} \qquad w_\psi := \left(\frac{p_\psi}{I_3} - \frac{\widehat{\Psi}_0}{I_1\sqrt{T}}\right) \,, \tag{46.173}$$

respectivamente. A esse movimento médio sobrepõem-se oscilações de período $T\tau$ definidas pelas funções L_φ e L_ψ, respectivamente. Como vimos, o movimento de nutação tem a mesma frequência.

O descrito crescimento linear do ângulo de Euler φ_t é um movimento denominado *precessão azimutal* médio, ou simplesmente *precessão média*. O movimento descrito pelo ângulo de Euler ψ_t representa a rotação (intrínseca) instantânea do pião em torno de seu eixo de simetria. Com essa nomenclatura podemos dizer que w_φ é a velocidade angular média de precessão do pião e w_ψ é a velocidade angular média da rotação intrínseca do pião em torno de seu eixo de simetria. Sobre as velocidades angulares médias expressas em (46.173) é relevante observar, da teoria das séries de Fourier (vide (37.59), página 1968), que

$$\frac{\widehat{\Phi}_0}{\sqrt{T}} = \frac{1}{T}\int_0^T \Phi_{t'}\, dt' \qquad \text{e que} \qquad \frac{\widehat{\Psi}_0}{\sqrt{T}} = \frac{1}{T}\int_0^T \Psi_{t'}\, dt' \,,$$

que são os valores médios de $\Phi_{t'}$ e $\Psi_{t'}$, respectivamente, em um intervalo de largura T, o período das mesmas.

As funções θ_t, L_φ e L_ψ são periódicas de mesmo período $T\tau$. No entanto, o movimento do pião só será periódico no caso de os períodos de precessão e rotação intrínseca médios, $2\pi/w_\varphi$ e $2\pi/w_\psi$, respectivamente, forem comensuráveis com $T\tau$, ou seja, se forem múltiplos racionais do mesmo, uma condição um tanto excepcional. De modo geral, o movimento do pião é *almost*-periódico (para a teoria das funções ditas *almost*-periódicas, vide, *e.g.*, [275] ou [105]).

Além do crescimento linear descrito acima, φ_t é sujeita a oscilações periódicas, que podemos descrever qualitativamente a partir do comportamento da velocidade angular $\dot{\varphi}_t$. De acordo com a primeira das relações em (46.168), $\dot{\varphi}_t$ oscila periodicamente e seu sinal é determinado pelo sinal de $p_\varphi - p_\psi\left[\wp\left(\frac{t}{\tau}+d_0\right)-\alpha\right]$. Como $\wp$ é periódica e oscila entre um valor máximo e um mínimo, há, consequentemente, três situações possíveis, dependendo dos valores de p_φ e de p_ψ: 1ª $\dot{\varphi}_t$ é sempre estritamente positiva ou estritamente negativa; 2ª $\dot{\varphi}_t$ troca de sinal periodicamente (e, portanto, anula-se periodicamente em certos instantes); 3ª $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal mas anula-se periodicamente em certos instantes. Simultaneamente, θ_t realiza também um movimento periódico de mesma frequência entre dois valores θ_- e θ_+ (nutação).

A combinação dos movimentos de notação e precessão correspondentes a essas três situações estão descritas na Figura 46.15, página 2716, onde o movimento de um ponto do eixo de simetria do pião é desenhado. No que segue mostraremos como podemos chegar às mesmas conclusões por meio de uma análise puramente qualitativa das equações que regem esse movimento do pião de Lagrange.

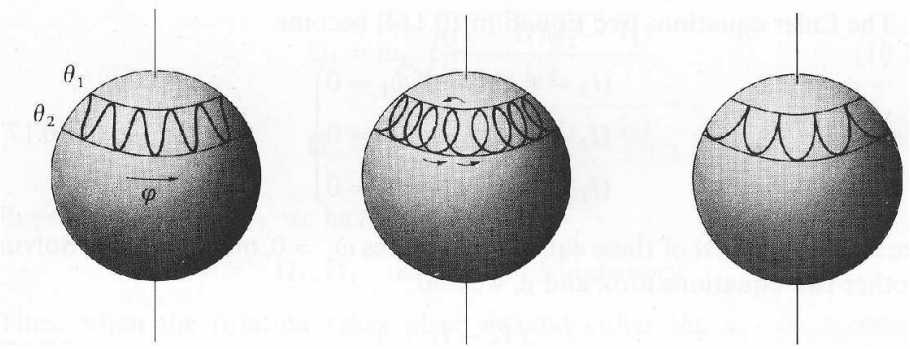

Figura 46.15: Possíveis combinações dos movimentos de nutação e de precessão do pião de Lagrange. Nas três figuras é desenhado o movimento de um ponto do eixo de simetria do pião. Os ângulos θ_- e θ_+ são aqui denominados θ_1 e θ_2, respectivamente. Na figura da esquerda $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal, na do meio troca de sinal periodicamente e na da direita anula-se periodicamente, mas sem trocas de sinal.

• Mais sobre a análise qualitativa do movimento do pião de Lagrange

Como já comentamos, é possível inferir certas propriedades do movimento de um pião de Lagrange, dentre as quais algumas obtidas acima, sem uso direto das soluções "explícitas" que indicamos.

O ponto de partida é a relação (46.160), que pode ser interpretada como a energia mecânica de um sistema unidimensional onde o papel de energia cinética é feito pelo termo $\frac{I_1}{2}\dot{\theta}_t^2$ e o potencial é $\widetilde{V}(\theta_t)$. A positividade dessa energia cinética implica que o movimento deve limitar-se à região onde $\widetilde{V}(\theta_t) \leq e'$. Para prosseguirmos com a argumentação é importante termos uma noção qualitativa da forma do gráfico da função $\widetilde{V}(\theta)$ no intervalo $[0,\ \pi]$, onde θ está definida.

Consideraremos agora o caso em que $p_\varphi \neq \pm p_\psi$, com ambos p_φ e p_ψ sendo não nulos (para os demais casos, vide

adiante). Da definição de $\widetilde{V}$ em (46.161) vê-se que $\widetilde{V}(\theta)$ diverge para $+\infty$ quando θ aproxima-se de 0 ou de π (os extremos de seu domínio de definição), devido ao fator $1/(\operatorname{sen}\theta)^2$.

Como $\widetilde{V}(\theta)$ é contínua, ela deve possuir ao menos um mínimo no seu intervalo de definição. É possível provar, mas não o faremos na corrente versão destas Notas[51], que $\widetilde{V}(\theta)$ possui um mínimo local único (e, portanto, absoluto) no intervalo $(0,\ \pi)$, que denotaremos por θ_{min}. Com isso, entendemos que $e' \geq \widetilde{V}(\theta_{min})$. Para cada valor de $e' > \widetilde{V}(\theta_{min})$ haverá dois ângulos θ_- e θ_+ (dependentes de e'), únicos, com $0 < \theta_- < \theta_{min} < \theta_+ < \pi$ tais que $e' = \widetilde{V}(\theta_-)$ e $e' = \widetilde{V}(\theta_+)$. Para cada valor de e' o ângulo de Euler θ_t oscilará (periodicamente) entre θ_- e θ_+. Esse movimento é denominado *nutação*.

Vamos agora analisar o que ocorre com $\dot{\varphi}_t$ ainda na situação em que $e' > \widetilde{V}(\theta_{min})$. Observando (46.159) ou (46.163) e sabendo que $\cos\theta_t$ é periódica em t, concluímos que o valor médio de $\dot{\varphi}_t$ é positivo ou negativo, o que implica que φ_t cresce ou decresce <u>em</u> <u>média</u> linearmente com t, podendo sofrer oscilações em torno dessa média.

Esse movimento no qual $|\varphi_t|$ cresce em média linearmente com t é denominado *precessão azimutal*, ou simplesmente *precessão*. Passemos a analisar as oscilações em torno do movimento de precessão.

Escrevamos (46.159) na forma $\dot{\varphi}_t = p_\psi \frac{\mathcal{Q}-\cos(\theta_t)}{I_1(\operatorname{sen}\theta_t)^2}$, com $\mathcal{Q} := p_\varphi/p_\psi$ (aqui assumimos $p_\psi \neq 0$). Como $\cos(\theta_+) \leq \cos(\theta_t) \leq \cos(\theta_t)$, temos o seguinte: 1º , caso $\mathcal{Q} < \cos(\theta_+)$ ou $\mathcal{Q} > \cos(\theta_-)$, então $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal durante todo o movimento; 2º , caso $\cos(\theta_+) < \mathcal{Q} < \cos(\theta_-)$, então $\dot{\varphi}_t$ troca de sinal (periodicamente) ao longo do movimento; 3º , caso $\mathcal{Q} = \cos(\theta_+)$ ou $\mathcal{Q} = \cos(\theta_-)$, então $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal, mas anula-se periodicamente. Caso $p_\psi = 0$ o movimento se dá como no 1º caso.

As trajetórias descritas pelo eixo do pião nessas três situações são descritas na Figura 46.15, página 2716. O 1º caso corresponde à figura da esquerda, o 2º caso corresponde à figura do meio e o 3º caso à figura da direita.

O movimento geral do pião combina uma rotação intrínseca em relação ao próprio eixo (descrita por ψ_t), um movimento de precessão (descrita por φ_t) e um movimento de nutação (descrita por θ_t).

Finalmente, no caso especial em que $e' = \widetilde{V}(\theta_{min})$ teremos $\dot{\theta}_t = 0$ para todo t. Não ocorre, portanto, o movimento de nutação e θ_t assume o valor constante θ_{min}. Nessa situação, (46.163) e (46.164) dizem-nos que $\dot{\varphi}_t$ e $\dot{\psi}_t$ também são constantes e, portanto, φ_t e ψ_t crescem linearmente com t. Não há nutação e a precessão e a rotação em torno do eixo de simetria se dão com velocidades angulares constantes.

• **<u>O caso $p_\varphi = \pm p_\psi$</u>**

Comentemos o que se passa se $p_\varphi = \pm p_\psi$, com ambos p_φ e p_ψ não nulos. Se $p_\varphi = p_\psi$, ambos não nulos, então

$$\widetilde{V}(\theta) \ = \ Mgl\cos(\theta) + \frac{p_\varphi^2}{2I_1}\frac{\big(1-\cos(\theta)\big)}{\big(1+\cos\theta\big)} \ .$$

Verifique! O segundo termo diverge (para $+\infty$) em $\theta = \pi$, mas não para $\theta = 0$, quando $\widetilde{V}(0) = Mgl$. $\widetilde{V}(\theta)$ tem um ponto de mínimo no intervalo $\theta \in [0,\ \pi)$, mas esse ponto de mínimo pode ser 0. O movimento fica, portanto, limitado à região $\theta_t \in [\theta_-,\ \theta_+]$, para $0 \leq \theta_- < \theta_+ < \pi$. Como $\mathcal{Q} = 1$, temos a situação descrita no 1º caso se $\theta_- > 0$ ou no 3º caso se $\theta_- = 0$. Nessa última situação $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal, mas anula-se periodicamente nos instantes de tempo em que θ_t assume o valor 0.

No caso $p_\varphi = -p_\psi$, ambos não nulos, a divergência (a $+\infty$) de $\widetilde{V}(\theta)$ se dá em $\theta = 0$ mas não em $\theta = \pi$. $\widetilde{V}(\theta)$ tem um ponto de mínimo no intervalo $\theta \in (0,\ \pi]$, mas esse ponto de mínimo pode ser π. O movimento fica limitado à região $\theta_t \in [\theta_-,\ \theta_+]$, para $0 < \theta_- < \theta_+ \leq \pi$. Como $\mathcal{Q} = -1$, temos a situação descrita no 1º caso se $\theta_+ < \pi$ ou no 3º caso se $\theta_+ = \pi$. Nessa última situação $\dot{\varphi}_t$ não troca de sinal, mas anula-se periodicamente nos instantes de tempo em que θ_t assume o valor π.

Um movimento sem nutação é em ambos os casos possível, bastando escolher-se e' igual a $\widetilde{V}(\theta)$ calculado em seu ponto de mínimo. Note-se que esse pode vir a ser 0 ou π.

E. 46.21 <u>*Exercício*</u>. Analise qualitativamente o movimento na situação em que $p_\varphi = p_\psi = 0$. ✠

*** ** * ** ***

[51] O leitor interessado pode encontrar um demonstrações desse fato na literatura supracitada, mas deve ser advertido que algumas provas estão incompletas ou incorretas. Vide [23] para um tratamento ligeiramente diferente dessa questão, mas que também omite algumas considerações.

Figura 46.16: Wolfgang Pauli e Niels Bohr observam um *"Tippe Top"*. Foto tirada em 31 de Maio de 1951, durante a inauguração de um novo instituto de Física na Universidade de Lund, Suécia. Créditos: Foto de Erik Gustafson, AIP Emilio Segrè Visual Archives, Margrethe Bohr Collection (photos.aip.org). Um *"Tippe Top"* é um tipo especial de pião simétrico que tem a curiosa propriedade de inverter seu eixo de rotação, erguendo com isso seu centro de massa, ao perder energia. O *"Tippe Top"* foi patenteado em 1891 por Helene Sperl, sob o nome de *"Wendekreisel"*. O *"Tippe Top"* é até os dias de hoje objeto de estudo. Para um artigo de revisão, vide

- R. J. Cohen, *"The tippe top revisited"*. American Journal of Physics **45:** 12 (1977). Bibcode:1977AmJPh..45...12C. doi:10.1119/1.10926.

Para investigações recentes, vide:

- N. M. Bou–Rabee, J. E. Marsden, L. A. Romero, *"Tippe top inversion as a dissipation-induced instability"*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **3**, 352–377 (2004).
- S. Rauch–Wojciechowski, M. Sköldstam , T. Glad, *"Mathematical analysis of the tippe top"*, Regul. Chaotic Dyn. **10**, 333–362 (2005).

46.6 Exercícios Adicionais

E. 46.22 *Exercício dirigido.* [**Modos normais de um sistema com duas massas**] Aqui seguimos a notação da Seção 46.4, página 2701. Considere o sistema unidimensional descrito na Figura 46.17, página 2719, composto por duas massas m_1 e m_2 em movimento horizontal, acopladas linearmente a molas de constantes de mola k_1, k_2 e k_3, todas positivas, a primeira mola acoplando a massa m_1 à parede da esquerda, a segunda mola acoplando as massas entre si e a terceira mola acoplando a massa m_2 à parede da direita. Suporemos também que as molas estão em equilíbrio quando não estão estendidas.

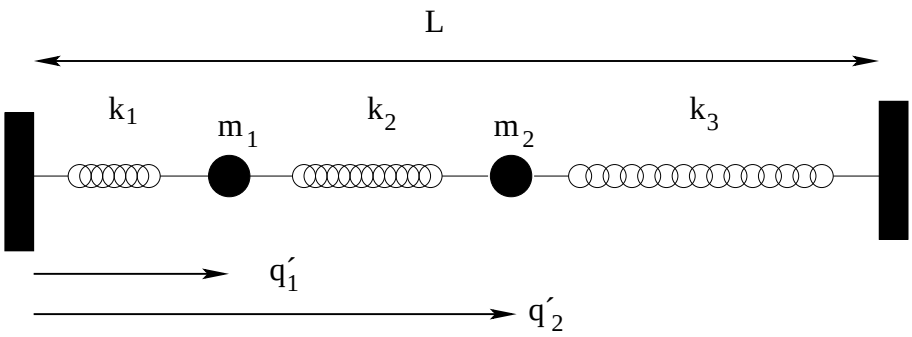

Figura 46.17: Massas pontuais m_1 e m_2 em movimento horizontal acopladas a molas de constantes de mola k_1, k_2 e k_3. As respectivas coordenadas q_1' e q_2' medem a distância à parede à esquerda. A distância entre as paredes é L.

Constate que o Lagrangiano desse sistema mecânico é

$$\mathscr{L} \;=\; \frac{m_1}{2}\big(\dot{q}_1'\big)^2 + \frac{m_2}{2}\big(\dot{q}_2'\big)^2 - \frac{k_1}{2}\big(q_1'\big)^2 - \frac{k_2}{2}\big(q_1' - q_2'\big)^2 - \frac{k_3}{2}\big(L - q_2'\big)^2 \,.$$

Obtenha as correspondentes equações de Euler-Lagrange.

Constate, comparando a (46.126), página 2701, que nesse caso temos

$$M \;=\; \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \qquad K \;=\; \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix}, \qquad \ell \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ k_3 L \end{pmatrix},$$

e

$$\mathscr{L} \;=\; \frac{1}{2}\big\langle \dot{q}',\, M\dot{q}' \big\rangle_R - \frac{1}{2}\big\langle q',\, Kq' \big\rangle_R + \big\langle \ell,\, q' \big\rangle_R - \frac{k_3 L^2}{2} \,.$$

Como o último termo é uma constante, será omitido doravante.

Constate que $\det(K) = k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3 \equiv \kappa > 0$ e que

$$K^{-1} \;=\; \frac{1}{\kappa}\begin{pmatrix} k_2 + k_3 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 \end{pmatrix} .$$

Definindo

$$q \;=\; q' - K^{-1}\ell \;=\; \begin{pmatrix} q_1' - \frac{k_2 k_3 L}{\kappa} \\ q_2' - \frac{(k_1+k_2)k_3 L}{\kappa} \end{pmatrix},$$

obtemos o Lagrangiano canônico

$$\mathscr{L} \;=\; \frac{1}{2}\big\langle \dot{q},\, M\dot{q} \big\rangle_R - \frac{1}{2}\big\langle q,\, Kq \big\rangle_R \,.$$

Verifique que a equação secular $\det\big(\lambda M - K\big) = 0$ fica nesse caso $m_1m_2\lambda^2 + b\lambda + \kappa = 0$, com $b = -\big(m_1(k_2+k_3) + m_2(k_1+k_2)\big)$. Verifique que as soluções são

$$d_1 \;=\; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2m_1m_2}\,, \qquad d_2 \;=\; \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2m_1m_2}\,,$$

onde $\Delta = b^2 - 4m_1m_2 = \big(m_1(k_2+k_3)+m_2(k_1+k_2)\big)^2 - 4m_1m_2\kappa$. Mostre que

$$\Delta \;=\; \big(m_1(k_2+k_3)-m_2(k_1+k_2)\big)^2 + 4m_1m_2k_2^2 \;,$$

e, portanto, que $\Delta > 0$, implicando que d_1 e d_2 são reais. Observe também que, como $\Delta < b^2$ e $\sqrt{\Delta} < |b|$, tem-se $d_1 > 0$ e $d_2 > 0$.

De forma explícita em termos de $m_1,\ m_2,\ k_1,\ k_2$ e k_3, temos

$$d_1 \;=\; \frac{m_1(k_2+k_3)+m_2(k_1+k_2)+\sqrt{\big(m_1(k_2+k_3)-m_2(k_1+k_2)\big)^2+4m_1m_2k_2^2}}{2m_1m_2} \;,$$

$$d_2 \;=\; \frac{m_1(k_2+k_3)+m_2(k_1+k_2)-\sqrt{\big(m_1(k_2+k_3)-m_2(k_1+k_2)\big)^2+4m_1m_2k_2^2}}{2m_1m_2} \;.$$

Vamos agora considerar o caso particular em que $m_1 = m_2 = m$ e $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Usando as fórmulas acima, mostre que para esse caso tem-se

$$d_1 \;=\; \frac{3k}{m} \;, \qquad d_2 \;=\; \frac{k}{m} \;.$$

Temos ainda

$$M \;=\; \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \;, \qquad K \;=\; \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B \;=\; M^{-1/2}KM^{-1/2} \;=\; \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \;.$$

Constate que

$$B^{1/2} \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}$$

e constate que essa matriz é positiva. Assim,

$$\Omega \;=\; M^{-1/2}B^{1/2}M^{1/2} \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix} \;.$$

A matriz B pode ser diagonalizada pela matriz ortogonal $O = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Verifique que

$$O^TBO \;=\; \begin{pmatrix} 3k/m & 0 \\ 0 & k/m \end{pmatrix} \;.$$

A matriz à direita é a matriz D e seus autovalores são $d_1 = \frac{3k}{m}$ e $d_2 = \frac{k}{m}$, como deveria ser. Os modos normais são dados, segundo (46.134), página 2703, por

$$\mathcal{Q} \;=\; O^TM^{1/2}q \;=\; \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \;=\; \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{pmatrix} q_1-q_2 \\ q_1+q_2 \end{pmatrix} \;.$$

Dessa forma, temos as soluções

$$q_1(t)-q_2(t) \;=\; \alpha_1\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)+\beta_1\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \;, \tag{46.174}$$

$$q_1(t)+q_2(t) \;=\; \alpha_2\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+\beta_2\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \;, \tag{46.175}$$

com $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1$ e β_2 sendo constantes dependentes de condições iniciais.

Somando-se e subtraindo-se ambas as expressões uma da outra, vemos que as coordenadas q_1 e q_2 são combinações lineares de senos e cossenos das frequências $\sqrt{\frac{3k}{m}}$ e $\sqrt{\frac{k}{m}}$ vezes o tempo.

Se retornarmos às coordenadas originais usando $q' = q + K^{-1}\ell$, teremos $q'_1 = q_1 + \frac{L}{3}$ e $q'_2 = q_2 + \frac{2L}{3}$. Verifique! Assim, as posições de equilíbrio estático para as partículas 1 e 2 são $\frac{L}{3}$ e $\frac{2L}{3}$, respectivamente.

Com uso dos modos normais (46.174)–(46.175) vemos que:

1. $q'_2(t) - q'_1(t) = q_2(t) - q_1(t) + \frac{L}{3}$ e, portanto,

$$q'_2(t) - q'_1(t) \;=\; \frac{L}{3} - \alpha_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) - \beta_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \;.$$

   Assim, vemos que diferença de posição $q'_2(t) - q'_1(t)$ entre as partículas 2 e 1 é dada por um movimento harmônico de frequência $\sqrt{\frac{3k}{m}}$ em torno do ponto $L/3$. Lembremos que $L/3$ é a distância entre partículas 2 e 1 na situação de equilíbrio estático.

2. A posição do centro de massa das duas partículas, $\big(q'_1(t) + q'_2(t)\big)/2 = \big(q_1(t) + q_2(t)\big)/2 + L/2$, é dada por

$$\frac{q'_1(t) + q'_2(t)}{2} \;=\; \frac{L}{2} + \frac{\alpha_2}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{\beta_2}{2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \;.$$

   Assim o centro de massa do sistema de suas partículas de massa m é dado um movimento harmônico de frequência $\sqrt{\frac{k}{m}}$ em torno do ponto $L/2$. Lembremos que $L/2$ é a posição do centro de massas na situação de equilíbrio estático.

Esses dois pontos permitem uma interpretação mecânica do significado dos modos normais no caso considerado.

Os resultados acima também podem ser obtidos diretamente da solução (46.132), página 2702, que fica, no caso corrente,

$$q(t) \;=\; \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!}\left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right)^{2l} K^l\right] q_0 + \sqrt{m}\left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!}\left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right)^{2l+1} K^l\right] v_0 \;.$$

Verifique que os autovetores de K são $\gamma_1 := \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$, com autovalor $3k$, e $\gamma_2 := \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$, com autovalor k. Escrevendo $q_0 = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2$ e $v_0 = (b_1/\sqrt{m})\gamma_1 + (b_2/\sqrt{m})\gamma_2$ (onde $a_1,\ a_2,\ b_1$ e b_2 são constantes), verifique que

$$q(t) \;=\; \left[a_1\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) + b_1\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)\right]\gamma_1 + \left[a_2\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + b_2\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right]\gamma_2 \;,$$

donde as mesmas conclusões obtidas acima podem ser extraídas.

Segundo (46.144), os projetores espectrais de Ω são

$$F_1 \;=\; \frac{1}{\omega_1 - \omega_2}\Big(\Omega - \omega_2\mathbb{1}\Big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}-1}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \;,$$

$$F_2 \;=\; \frac{1}{1-\sqrt{3}}\Big(\Omega - \omega_1\mathbb{1}\Big) \;=\; \frac{1}{1-\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \sqrt{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \;.$$

Verifique!

Escrevendo $q_0 = \left(\begin{smallmatrix}q_{01}\\q_{02}\end{smallmatrix}\right)$ e $v_0 = \left(\begin{smallmatrix}v_{01}\\v_{02}\end{smallmatrix}\right)$, os dois modos normais expressos em (46.145), página 2705, serão

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)\begin{pmatrix} q_{01} - q_{02} \\ q_{02} - q_{01} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{3k}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)\begin{pmatrix} v_{01} - v_{02} \\ v_{02} - v_{01} \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\begin{pmatrix} q_{01} + q_{02} \\ q_{02} + q_{01} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\begin{pmatrix} v_{01} + v_{02} \\ v_{02} + v_{01} \end{pmatrix} \;.$$

No primeiro, vemos que $q_2(t) - q_1(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)\big(q_{02} - q_{01}\big) + \sqrt{\frac{m}{3k}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)\big(v_{02} - v_{01}\big)$ e para o segundo, vemos que $\big(q_1(t) + q_2(t)\big)/2 = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\big(q_{01} + q_{01}\big)/2 + \sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\big(v_{01} + v_{02}\big)/2$.

De forma geral, o uso da decomposição espectral, resultando em (46.145), é o método mais rápido para a determinação dos modos normais de um sistema. ✠

E. 46.23 *Exercício*. Obtenha o Lagrangiano associado ao pião de Lagrange em coordenadas definidas por ângulos de Euler e mostre que as equações de Euler-Lagrange assim obtidas coincidem com as equações de Euler (com torque externo). *Sugestão:* escreva as equações de Euler em termos dos ângulos de Euler e compare-as às correspondentes equações de Euler-Lagrange. Conte quantas vezes as palavras "Euler" e "Lagrange" aparecem no enunciado acima em sentidos diversos. ✠

E. 46.24 *Exercício*. Considere o movimento de um corpo rígido na ausência de forças e torques externos e com seu centro de massa parado. Considere um sistema de referência fixo no corpo tendo como eixos seus eixos principais de inércia. Escreva seu correspondente Lagrangiano usando ângulos de Euler (vide para tal a Seção 46.5, página 2710). Obtenha as correspondentes equações de Euler-Lagrange e, usando-as, reobtenha as equações de Euler (45.137)–(45.139), página 2595. *Sugestão:* escreva as equações de Euler em termos dos ângulos de Euler e compare-as às correspondentes equações de Euler-Lagrange. ✠

E. 46.25 *Exercício*. Escreva Hamiltoniano associado ao Exercício E. 46.24 e obtenha as correspondentes equações de Hamilton. Compare-as às equações de Euler (45.137)–(45.139), página 2595. ✠

E. 46.26 *Exercício*. **[Equações de Hamilton para o Pião de Lagrange].** Mostre que o Hamiltoniano associado ao pião de Lagrange, cujo Lagrangiano foi dado em (46.155), página 2712, em termos de ângulos de Euler, é

$$\mathscr{H}\big(\theta,\,\varphi,\,\psi,\,p_\theta,\,p_\varphi,\,p_\psi\big) \;=\; \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{\big(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\big)^2}{2I_1(\,\mathrm{sen}\theta)^2} + Mgl\cos\theta\;. \tag{46.176}$$

Mostre que os momentos generalizados, expressos em termos das velocidades generalizadas, são:

$$p_\theta \;=\; I_1\dot\theta\;,\qquad p_\varphi \;=\; I_1\dot\varphi\,\mathrm{sen}^2\theta + I_3\big(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi\big)\cos\theta\;,\qquad p_\psi \;=\; I_3\big(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi\big)\;. \tag{46.177}$$

Obtenha de (46.176) as correspondentes equações de Hamilton:

$$\begin{aligned}
\dot\theta &= \frac{p_\theta}{I_1}\;, & \dot p_\theta &= \frac{\big(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\big)\big(p_\varphi\cos\theta - p_\psi\big)}{I_1(\,\mathrm{sen}\theta)^3} + Mgl\,\mathrm{sen}\theta\;,\\
\dot\varphi &= \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{I_1(\,\mathrm{sen}\theta)^2}\;, & \dot p_\varphi &= 0\;,\\
\dot\psi &= \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{I_1(\,\mathrm{sen}\theta)^2}\cos\theta\;, & \dot p_\psi &= 0\;.
\end{aligned} \tag{46.178}$$

✠

E. 46.27 *Exercício*. **[Pião de Lagrange sem Nutação].** Sob a luz das equações de Hamilton (46.178) é interessante analisar sob quais condições o movimento do pião de Lagrange pode ser livre de nutação. Se não ocorre nutação, devemos ter $\dot\theta = 0$ ao longo do movimento. Isso implica $\theta = \theta_0$, constante, e, por (46.178), $\dot\varphi$ e $\dot\psi$ são também constantes, que denotaremos por $\dot\varphi_0$ e $\dot\psi_0$, respectivamente. Assim, a precessão e a rotação intrínseca se dão com velocidades angulares constantes. Além disso, devemos ter $p_\theta = 0$, o que implica (exceto no caso especial em que $\theta_0 = 0$ ou π)

$$\big(p_\varphi - p_\psi\cos\theta_0\big)\big(p_\varphi\cos\theta_0 - p_\psi\big) + MglI_1\big(1 - (\cos\theta_0)^2\big)^2 \;=\; 0\;. \tag{46.179}$$

Usando (46.177), verifique que essa condição equivale a

$$\dot\varphi_0^2(I_1 - I_3)\cos\theta_0 - \dot\varphi_0 I_3\dot\psi_0 + Mgl \;=\; 0\;. \tag{46.180}$$

Encarando essa relação como uma equação algébrica de segundo grau para $\dot\varphi_0$ (o que pressupõe $(I_1 - I_3)\cos\theta_0 \neq 0$), mostre que as soluções são

$$\dot\varphi_0 \;=\; \frac{I_3\dot\psi_0 \pm \sqrt{I_3^2\dot\psi_0^2 - 4Mgl(I_1 - I_3)\cos\theta_0}}{(I_1 - I_3)\cos\theta_0}\;. \tag{46.181}$$

Observe que as duas soluções são complexas caso $\dot{\psi}_0^2 < 4Mgl\frac{(I_1-I_3)}{I_3^2}\cos\theta_0$. Nessa situação (rotação lenta em torno do eixo de simetria) um movimento sem nutação não é possível, portanto. Ele é possível, porém, se $\dot{\psi}_0^2 \geq 4Mgl\frac{(I_1-I_3)}{I_3^2}\cos\theta_0$. No caso em que $\dot{\psi}_0^2 = 4Mgl\frac{(I_1-I_3)}{I_3^2}\cos\theta_0$ há exatamente uma solução real para a velocidade angular de precessão $\dot{\varphi}_0$ e para o caso em que $\dot{\psi}_0^2 > 4Mgl\frac{(I_1-I_3)}{I_3^2}\cos\theta_0$ há duas soluções reais para $\dot{\varphi}_0$, para um mesmo θ_0 e um mesmo $\dot{\psi}_0$. Mostre que essas soluções são

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{I_3\dot{\psi}_0 \pm \sqrt{I_3^2\dot{\psi}_0^2 - 4Mgl(I_1-I_3)\cos\theta_0}}{(I_1-I_3)\cos\theta_0} .$$

Mostre que essas soluções em (46.181) têm sinais opostos no caso em que $(I_1-I_3)\cos\theta_0 < 0$ e que ambas têm o sinal de $\dot{\psi}_0$ caso $(I_1-I_3)\cos\theta_0 > 0$.

É de se notar que se $(I_1-I_3)\cos\theta_0 < 0$, a condição $\dot{\psi}_0^2 > 4Mgl\frac{(I_1-I_3)}{I_3^2}\cos\theta_0$ é satisfeita para qualquer valor de $\dot{\psi}_0$, inclusive para $\dot{\psi}_0 = 0$. Essa última observação é digna de nota. Se $\dot{\psi}_0 = 0$ e $(I_1-I_3)\cos\theta_0 < 0$ as soluções para $\dot{\varphi}_0$ são

$$\dot{\varphi}_0 = \pm\sqrt{\frac{Mgl}{-(I_1-I_3)\cos\theta_0}} .$$

Nessa situação, o movimento do pião é puramente precessional, sem nutação e sem rotação em torno do próprio eixo.

No caso em que $(I_1-I_3)\cos\theta_0 = 0$ a relação (46.180) é uma equação algébrica de primeiro grau para $\dot{\varphi}_0$, cuja solução é

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{Mgl}{I_3\dot{\psi}_0} ,$$

pressupondo, naturalmente, que $\dot{\psi}_0 \neq 0$. ✠

Apêndices

46.A Seções Cônicas

Nesta Seção recordaremos algumas definições e fatos e elementares a respeito de seções cônicas, ou seja, elipses, círculos, hipérboles e parábolas, sempre no plano $\mathbb{R}^2$. Na Seção 46.A.4, página 2727, apresentaremos uma representação polar desses objetos em um contexto que interessa particularmente ao problema de Kepler, que discutimos na Seção 46.2.3, página 2673.

Os assuntos aqui tratados são abordados em muitos livros-texto de Geometria Analítica e mesmo de Álgebra Linear (vide, *e.g.*, [67]) e nos limitaremos ao mínimo necessário.

46.A.1 Elipses e Círculos

Consideremos o plano $\mathbb{R}^2$. Sejam dois pontos F_1 e F_2 e seja $2\mathsf{f} \equiv \|\mathsf{F}_2 - \mathsf{F}_1\|$ a distância entre os mesmos. Seja também $\mathsf{a} > \mathsf{f}$. Uma *elipse* é o lugar geométrico dos pontos $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^2$ com a seguinte propriedade:

$$\big\|\vec{x} - \mathsf{F}_1\big\| + \big\|\vec{x} - \mathsf{F}_2\big\| \;=\; 2\mathsf{a}\;. \tag{46.A.1}$$

Os pontos F_1 e F_2 são denominados *focos elipse*, ou *pontos focais da elipse*, e a é denominado *semieixo maior* da elipse (vide abaixo). A relação (46.A.1) diz-nos que se $\vec{x}$ é um ponto da elipse, então a soma de suas distâncias aos pontos focais é constante, igual a $2\mathsf{a}$.

Para equacionar melhor a relação (46.A.1), adotemos um sistema de coordenadas Cartesianas centrado no ponto intermediário entre F_1 e F_2: $\mathsf{C} = (\mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_2)/2$ e com o eixo horizontal ao longo da linha que conecta F_1 a F_2. Vide Figura 46.A.18, página 2729. Com essa escolha, as coordenadas de F_1 a F_2 são $(-\mathsf{f},\ 0)$ e $(\mathsf{f},\ 0)$, respectivamente. Se as coordenadas de $\vec{x}$ forem $(x,\ y)$, então (46.A.1) pode ser escrita como

$$\sqrt{(x+\mathsf{f})^2 + y^2} + \sqrt{(x-\mathsf{f})^2 + y^2} \;=\; 2\mathsf{a}\;.$$

Escrevendo $\sqrt{(x+\mathsf{f})^2 + y^2} = 2\mathsf{a} - \sqrt{(x-\mathsf{f})^2 + y^2}$ e elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$(x+\mathsf{f})^2 + y^2 \;=\; 4\mathsf{a}^2 - 4\mathsf{a}\sqrt{(x-\mathsf{f})^2 + y^2} + (x-\mathsf{f})^2 + y^2$$

e, portanto,

$$x\mathsf{f} - \mathsf{a}^2 \;=\; -\mathsf{a}\sqrt{(x-\mathsf{f})^2 + y^2}\;.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos,

$$x^2\mathsf{f}^2 - 2x\mathsf{f}\mathsf{a}^2 + \mathsf{a}^4 \;=\; \mathsf{a}^2\big(x^2 - 2x\mathsf{f} + \mathsf{f}^2 + y^2\big)$$

ou seja,

$$\big(\mathsf{a}^2 - \mathsf{f}^2\big)x^2 + \mathsf{a}^2y^2 \;=\; \mathsf{a}^4 - \mathsf{a}^2\mathsf{f}^2\;.$$

donde se extrai facilmente a assim chamada *equação da elipse*:

$$\left(\frac{x}{\mathsf{a}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\mathsf{b}}\right)^2 \;=\; 1\;, \qquad \text{onde} \qquad \mathsf{b} \;:=\; \sqrt{\mathsf{a}^2 - \mathsf{f}^2}\;. \tag{46.A.2}$$

A grandeza b é denominada *semieixo menor da elipse*. Note-se que $\mathsf{b} \le \mathsf{a}$. O significado das nomenclaturas "semieixo maior" para a e "semieixo menor" para b fica claro na Figura 46.A.18, página 2729.

Outro parâmetro relevante é o chamado *semi-latus rectum*[52] da elipse, que é definido como a altura da elipse em um de seus pontos focais. Vide Figura 46.A.18, página 2729. Assim, adotando $x = \mathsf{f}$ e $y = \mathsf{p}$ na equação da elipse, tem-se, $\left(\frac{\mathsf{f}}{\mathsf{a}}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{b}}\right)^2 = 1$, de onde se extrai

$$\mathsf{p} \;=\; \mathsf{b}\sqrt{1 - \left(\frac{\mathsf{f}}{\mathsf{a}}\right)^2} \;=\; \frac{\mathsf{b}^2}{\mathsf{a}}\;.$$

[52] Semi-lado reto.

A *excentricidade de uma elipse* é definida por

$$\mathsf{e} := \frac{\mathsf{f}}{\mathsf{a}} = \sqrt{1 - \frac{\mathsf{b}^2}{\mathsf{a}^2}} .$$

Note-se que, por essa definição, $0 \leq \mathsf{e} < 1$. Com a definição de e e de p podemos escrever também

$$\mathsf{p} = \mathsf{b}\sqrt{1 - \mathsf{e}^2} = \mathsf{a}(1 - \mathsf{e}^2) \qquad \text{e} \qquad \mathsf{f} = \frac{\mathsf{pe}}{1 - \mathsf{e}^2} .$$

Verifique!

Um *círculo* de raio $\mathsf{a} > 0$ é o caso degenerado em que $\mathsf{F}_1 = \mathsf{F}_2$ e, portanto, $\mathsf{f} = \mathsf{e} = 0$ e $\mathsf{a} = \mathsf{b} = \mathsf{p}$.

• **A reta diretriz de uma elipse**

A distância de um ponto $(x,\ y)$ de uma elipse ao ponto focal F_a, com $a = 1,\ 2$, é $D_{\mathsf{F}_a} := \sqrt{\left(x - (-1)^a\mathsf{f}\right)^2 + y^2}$. Se elevarmos essa expressão ao quadrado e usarmos a equação da elipse (46.A.2), obtemos

$$\begin{aligned} D^2_{\mathsf{F}_a} &= \left(x - (-1)^a\mathsf{f}\right)^2 + y^2 = \left(x - (-1)^a\mathsf{f}\right)^2 + \mathsf{b}^2 - x^2\frac{\mathsf{b}^2}{\mathsf{a}^2} \\ &= x^2\left(1 - \frac{\mathsf{b}^2}{\mathsf{a}^2}\right) - 2(-1)^a\mathsf{f}x + \mathsf{b}^2 + \mathsf{f}^2 = x^2\mathsf{e}^2 - 2(-1)^a\mathsf{ea}x + \mathsf{a}^2 \\ &= \mathsf{e}^2\left(x - (-1)^a\frac{\mathsf{a}}{\mathsf{e}}\right)^2 = \mathsf{e}^2\left(x - (-1)^a\frac{\mathsf{a}^2}{\mathsf{f}}\right)^2 . \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$D_{\mathsf{F}_a} = \mathsf{e}\left|x - (-1)^a\frac{\mathsf{a}^2}{\mathsf{f}}\right| . \tag{46.A.3}$$

Definimos a reta diretriz d_a associada ao ponto focal F_a, $a = 1,\ 2$, como a reta paralela ao eixo vertical cuja coordenada horizontal é $(-1)^a\frac{\mathsf{a}^2}{\mathsf{f}}$:

$$\mathsf{d}_a := \left\{\left((-1)^a\frac{\mathsf{a}^2}{\mathsf{f}},\ y\right),\ y \in \mathbb{R}\right\} , \qquad a = 1,\ 2 .$$

A relação (46.A.3) permite caracterizar uma elipse como o lugar geométrico dos pontos $(x,\ y)$ de $\mathbb{R}^2$ cuja distância ao ponto focal F_a, $a = 1,\ 2$, é e vezes a distância $(x,\ y)$ à reta diretriz d_a. A excentricidade é, dessa forma, caracterizada como a razão entre as duas distâncias.

46.A.2 Hipérboles

Consideremos o plano $\mathbb{R}^2$. Sejam dois pontos distintos F_1 e F_2 e seja $2\mathsf{f} \equiv \|\mathsf{F}_2 - \mathsf{F}_1\|$ a distância entre os mesmos. Seja também $0 < \mathsf{a} < \mathsf{f}$. Uma *hipérbole* é o lugar geométrico dos pontos $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^2$ com a seguinte propriedade:

$$\left\|\vec{x} - \mathsf{F}_1\right\| - \left\|\vec{x} - \mathsf{F}_2\right\| = 2\mathsf{a} . \tag{46.A.4}$$

Os pontos F_1 e F_2 são denominados *focos da hipérbole*, ou *pontos focais da hipérbole*. A relação (46.A.4) diz-nos que se $\vec{x}$ é um ponto da hipérbole, então a diferença de suas distâncias aos pontos focais é constante igual a $2\mathsf{a}$.

Para equacionar melhor a relação (46.A.4) adotemos um sistema de coordenadas Cartesianas centrado no ponto intermediário entre F_1 e F_2: $\mathsf{C} = (\mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_2)/2$ e com o eixo horizontal ao longo da linha que conecta F_1 a F_2. Vide Figura 46.A.19, página 2729. Com essa escolha, as coordenadas de F_1 a F_2 são $(-\mathsf{f},\ 0)$ e $(\mathsf{f},\ 0)$, respectivamente. Se as coordenadas de $\vec{x}$ forem $(x,\ y)$, então (46.A.1) pode ser escrita como

$$\sqrt{(x + \mathsf{f})^2 + y^2} - \sqrt{(x - \mathsf{f})^2 + y^2} = 2\mathsf{a} .$$

Escrevendo $\sqrt{(x+\mathsf{f})^2+y^2} = 2\mathsf{a} + \sqrt{(x-\mathsf{f})^2+y^2}$ e elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$(x+\mathsf{f})^2+y^2 \;=\; 4\mathsf{a}^2 + 4\mathsf{a}\sqrt{(x-\mathsf{f})^2+y^2} + (x-\mathsf{f})^2+y^2$$

e, portanto,

$$x\mathsf{f} - \mathsf{a}^2 \;=\; +\mathsf{a}\sqrt{(x-\mathsf{f})^2+y^2}\,.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos,

$$x^2\mathsf{f}^2 - 2x\mathsf{f}\mathsf{a}^2 + \mathsf{a}^4 \;=\; \mathsf{a}^2\big(x^2 - 2x\mathsf{f} + \mathsf{f}^2 + y^2\big)$$

ou seja,

$$\big(\mathsf{f}^2 - \mathsf{a}^2\big)x^2 - \mathsf{a}^2y^2 \;=\; \mathsf{a}^2\mathsf{f}^2 - \mathsf{a}^4\,.$$

donde se extrai facilmente a assim chamada *equação da hipérbole*:

$$\left(\frac{x}{\mathsf{a}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\mathsf{b}}\right)^2 \;=\; 1\,, \qquad \text{onde} \qquad \mathsf{b} \;:=\; \sqrt{\mathsf{f}^2-\mathsf{a}^2}\,. \tag{46.A.5}$$

Note-se que $\mathsf{b} \le \mathsf{f}$.

Outro parâmetro relevante é o chamado *semi-latus rectum* da hipérbole, que é definido como a altura da hipérbole em um de seus pontos focais. Vide Figura 46.A.19, página 2729. Assim, adotando $x = \mathsf{f}$ e $y = \mathsf{p}$ na equação da elipse, tem-se, $\left(\frac{\mathsf{f}}{\mathsf{a}}\right)^2 - \left(\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{b}}\right)^2 = 1$, de onde se extrai

$$\mathsf{p} \;=\; \mathsf{b}\sqrt{\left(\frac{\mathsf{f}}{\mathsf{a}}\right)^2 - 1} \;=\; \frac{\mathsf{b}^2}{\mathsf{a}}\,.$$

A *excentricidade de uma hipérbole* é definida por

$$\mathsf{e} \;:=\; \frac{\mathsf{f}}{\mathsf{a}} \;=\; \sqrt{\frac{\mathsf{b}^2}{\mathsf{a}^2}+1}\,.$$

Note-se que, por essa definição, $\mathsf{e} > 1$.

Com a definição de e e de p podemos escrever também

$$\mathsf{p} \;=\; \mathsf{b}\sqrt{\mathsf{e}^2-1} \;=\; \mathsf{a}(\mathsf{e}^2-1) \qquad \text{e} \qquad \mathsf{f} \;=\; \frac{\mathsf{p}\mathsf{e}}{\mathsf{e}^2-1}\,.$$

Verifique!

• **A reta diretriz de uma hipérbole**

A distância de um ponto $(x,\ y)$ de uma elipse ao ponto focal F_a, com $a = 1,\ 2$, é $D_{\mathsf{F}_a} := \sqrt{\big(x-(-1)^a\mathsf{f}\big)^2+y^2}$. Se elevarmos essa expressão ao quadrado e usarmos a equação da hipérbole (46.A.5), obtemos

$$\begin{aligned} D^2_{\mathsf{F}_a} \;&=\; \big(x-(-1)^a\mathsf{f}\big)^2 + y^2 \;=\; \big(x-(-1)^a\mathsf{f}\big)^2 - \mathsf{b}^2 + x^2\frac{\mathsf{b}^2}{\mathsf{a}^2} \\ &=\; x^2\left(1+\frac{\mathsf{b}^2}{\mathsf{a}^2}\right) - 2(-1)^a\mathsf{f}x - \mathsf{b}^2 + \mathsf{f}^2 \;=\; x^2\mathsf{e}^2 - 2(-1)^a\mathsf{e}\mathsf{a}x + \mathsf{a}^2 \\ &=\; \mathsf{e}^2\left(x-(-1)^a\frac{\mathsf{a}}{\mathsf{e}}\right)^2 \;=\; \mathsf{e}^2\left(x-(-1)^a\frac{\mathsf{a}^2}{\mathsf{f}}\right)^2\,. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$D_{\mathsf{F}_a} \;=\; \mathsf{e}\left|x-(-1)^a\frac{\mathsf{a}^2}{\mathsf{f}}\right|\,. \tag{46.A.6}$$

Definimos a reta diretriz d_a associada ao ponto focal F_a, $a = 1,\ 2$, como a reta paralela ao eixo vertical cuja coordenada horizontal é $(-1)^a \frac{\mathsf{a}}{\mathsf{e}}$:

$$\mathsf{d}_a \ := \ \left\{ \left((-1)^a \frac{\mathsf{a}^2}{\mathsf{f}},\ y \right),\ y \in \mathbb{R} \right\} , \qquad a \ = \ 1,\ 2 \ .$$

A relação (46.A.6) permite caracterizar uma hipérbole como o lugar geométrico dos pontos $(x,\ y)$ de $\mathbb{R}^2$ cuja distância ao ponto focal F_a, $a = 1,\ 2$, é e vezes a distância $(x,\ y)$ à reta diretriz d_a. A excentricidade é, dessa forma, novamente caracterizada como a razão entre as duas distâncias.

46.A.3 Parábolas

Uma parábola em $\mathbb{R}^2$ é caracterizada por um ponto F, denominado *foco da parábola*, ou *ponto focal da parábola*, e uma linha reta d, denominada *diretriz*. Normalmente assume-se que $\mathsf{F} \notin \mathsf{d}$. Uma *parábola* em $\mathbb{R}^2$ é o lugar geométrico de todos os pontos que distam de F o mesmo que distam da diretriz.

Vemos por essa definição e pela caracterização que apresentamos anteriormente de elipses e hipérboles em termos de retas diretrizes, que no caso de parábolas a excentricidade e vale 1.

Para equacionar essa definição, adotemos um sistema de coordenadas Cartesianas cujo eixo vertical coincide com a diretriz e cuja origem O seja o ponto de c que menos dista de F. O eixo horizontal é a linha que conecta O a F. Vide Figura 46.A.20, página 2730. Seja f a distância de O a F. As coordenadas de F serão $(-\mathsf{f},\ 0)$. Assim, a distância de um ponto de coordenadas $(x,\ y)$ a F será $\sqrt{(x+f)^2 + y^2}$, enquanto que a distância desse ponto de coordenadas $(x,\ y)$ à diretriz é $|x|$. Portanto, pela definição acima, a parábola consiste nos pontos $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} \ = \ |x| \ .$$

Assim, elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$x \ = \ -\left(\frac{y^2 + \mathsf{f}^2}{2\mathsf{f}} \right) \ . \tag{46.A.7}$$

Essa equação é denominada *equação da parábola*.

O *semi-latus rectum* da parábola, denotado por p, é sua altura no ponto focal (vide Figura 46.A.20, página 2730). Pela equação da parábola, adotando-se $x = -\mathsf{f}$ e $y = \mathsf{p}$, tem-se

$$\mathsf{p} \ = \ \mathsf{f} \quad \text{ e com isso (46.A.7) se escreve como } \quad x \ = \ -\left(\frac{y^2 + \mathsf{p}^2}{2\mathsf{p}} \right) \ .$$

A distância de um ponto $(x,\ y)$ da parábola até a diretriz é $|x| = \left(y^2 + \mathsf{f}^2\right)/(2\mathsf{f})$ e seu menor valor possível se dá para $y = 0$ e vale $\mathsf{f}/2$. Assim, o ponto da parábola cuja distância à diretriz é a menor possível tem coordenadas $\mathsf{v} \equiv (-\mathsf{f}/2,\ 0)$. Esse ponto é dito ser o *vértice da parábola*. Claramente, v é o ponto intermediário entre O e F.

46.A.4 Parametrização Polar de Seções Cônicas

Vamos aqui mostrar que a equação (46.39),

$$\frac{\mathsf{p}}{r} \ = \ 1 + \mathsf{e} \cos(\varphi - c') \ , \tag{46.A.8}$$

descreve seções cônicas, ou seja, círculos, elipses, parábolas ou hipérboles, dependendo do valor do parâmetro e. Definições e fatos elementares sobre seções cônicas são apresentados na Seção 46.A, página 2724. Esse assunto é abordado em muitos livros-texto de Geometria Analítica e mesmo de Álgebra Linear (vide, *e.g.*, [67]) e nos limitaremos ao mínimo necessário. Em (46.A.8), o parâmetro e é denominado *excentricidade da cônica* e p é denominado *parâmetro da cônica*, ou ainda *semi-latus rectum*.

A expressão (46.A.8) é por vezes denominada *representação polar de uma seção cônica*.

Em (46.A.8) adotamos $c' = 0$, o que corresponde meramente à escolha de uma orientação dos eixos da cônica considerada. A coordenada r mede a distância de um ponto da curva à origem do sistema de coordenadas que, como

constataremos, coincide com um dos pontos focais da cônica considerada. O ângulo φ, denominado *anomalia verdadeira* na Mecânica Celeste, mede o ângulo que a reta que conecta o ponto considerado à origem forma com o eixo horizontal. Vide 46.A.18, página 2729, e 46.A.19, página 2729 e 46.A.20, página 2730.

Multiplicando a equação (46.A.8) por r, teremos $\mathsf{p} - \mathsf{e}r\cos(\varphi) = r$. Como $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e $r\cos(\varphi) = x$, obtemos, apos elevar ambos os lados ao quadrado

$$\mathsf{p}^2 - 2\mathsf{pe}x \;=\; \big(1-\mathsf{e}^2\big)x^2 + y^2 \;. \tag{46.A.9}$$

Há, novamente, quatro situações a considerar:

1. Caso $\mathsf{e} = 0$. Nessa situação, (46.A.9) fica $x^2 + y^2 = \mathsf{p}^2$ que descreve um círculo de raio p no plano $x - y$ centrado na origem. Naturalmente, φ pode assumir todos os valores no intervalo $(-\pi,\ \pi]$.

2. Caso $0 < \mathsf{e} < 1$. Nessa situação, podemos reescrever (46.A.9) como

$$\left(\frac{x + \frac{\mathsf{pe}}{1-\mathsf{e}^2}}{\mathsf{p}/(1-\mathsf{e}^2)}\right)^2 + \left(\frac{y}{\mathsf{p}/\sqrt{1-\mathsf{e}^2}}\right)^2 \;=\; 1\;.$$

   Verifique! Naturalmente, φ pode assumir todos os valores no intervalo $(-\pi,\ \pi]$. Esta equação descreve uma elipse de semieixos $\mathsf{a} := \mathsf{p}/(1-\mathsf{e}^2)$ e $\mathsf{b} := \mathsf{p}/\sqrt{1-\mathsf{e}^2}$ centrada em $\left(-\frac{\mathsf{pe}}{1-\mathsf{e}^2},\ 0\right)$. Vide Figura 46.A.18, página 2729. Notar que aqui $\mathsf{a} > \mathsf{b}$. A quantidade p é denominada *parâmetro da elipse*, ou *semi-latus rectum*, e e é denominada *excentricidade*. Notar que $\mathsf{e} := \sqrt{\frac{\mathsf{a}^2-\mathsf{b}^2}{\mathsf{a}^2}}$ e que $\mathsf{p} = \mathsf{b}^2/\mathsf{a}$.

   Os pontos focais encontram-se deslocados de $\pm\mathsf{f}$ do centro da elipse, onde $\mathsf{f} = \sqrt{\mathsf{a}^2-\mathsf{b}^2} = \mathsf{pe}/(1-\mathsf{e}^2)$. Assim, os pontos focais encontram-se nas posições $\big(0,\ 0\big)$ e $\left(-\frac{2\mathsf{pe}}{1-\mathsf{e}^2},\ 0\right)$.

   Para uma elipse geral, a excentricidade é definida pela razão f/a, que nesse caso vale e, como esperado.

3. Caso $\mathsf{e} = 1$. Nessa situação, podemos reescrever (46.A.9) como $x = \frac{\mathsf{p}^2-y^2}{2\mathsf{p}}$, que claramente descreve uma parábola. O foco dessa parábola localiza-se em $(0,\ 0)$.

   Como $\big(1+\cos(\varphi)\big) = \mathsf{p}/r$, e r pode ser arbitrariamente grande, φ pode assumir todos os valores no intervalo aberto $(-\pi,\ \pi)$, excluindo $\pm\pi$.

4. Caso $\mathsf{e} > 1$. Nessa situação, podemos reescrever (46.A.9) como

$$\left(\frac{x - \frac{\mathsf{pe}}{\mathsf{e}^2-1}}{\mathsf{p}/(\mathsf{e}^2-1)}\right)^2 - \left(\frac{y}{\mathsf{p}/\sqrt{\mathsf{e}^2-1}}\right)^2 \;=\; 1\;.$$

   Verifique! Esta equação descreve uma hipérbole com focos no eixo x, centrada no ponto $\left(\frac{\mathsf{pe}}{\mathsf{e}^2-1},\ 0\right)$. Aqui, $\mathsf{a} = \mathsf{p}/(\mathsf{e}^2-1)$ e $\mathsf{b} = \mathsf{p}/\sqrt{\mathsf{e}^2-1}$, sendo $0 < \mathsf{a} < \mathsf{f}$.

   A distância entre os focos é $2\sqrt{\mathsf{a}^2+\mathsf{b}^2} = 2\mathsf{pe}/\big(\mathsf{e}^2-1\big)$. Assim, os focos estão localizados nos pontos $(0,\ 0)$ e $\big(2\mathsf{pe}/\big(\mathsf{e}^2-1\big),\ 0\big)$.

   Como $1+\mathsf{e}\cos(\varphi) = \mathsf{p}/r$ e como r pode ser arbitrariamente grande, concluímos que φ pode assumir todos os valores no intervalo aberto $(-\phi_0,\ \phi_0)$, onde $\phi_0 = \arccos\big(-1/\mathsf{e}\big)$. Essa é uma distinção observacional relevante entre o caso hiperbólico e o parabólico, pois naquele, como já comentamos, o ângulo φ pode assume todos os valores no intervalo aberto $(-\pi,\ \pi)$.

   Por fim, observemos que como $\cos\phi_0 = -1/\mathsf{e} < 0$ e $x = r\cos\varphi$, concluímos que x pode assumir valores negativos quando φ assume valores em $(-\phi_0,\ \phi_0)$. Com isso, vemos que a parametrização polar (46.A.8) refere-se ao ramo esquerdo da hipérbole (vide Figura 46.A.19, página 2729), pois para o outro ramo temos sempre $x > 0$.

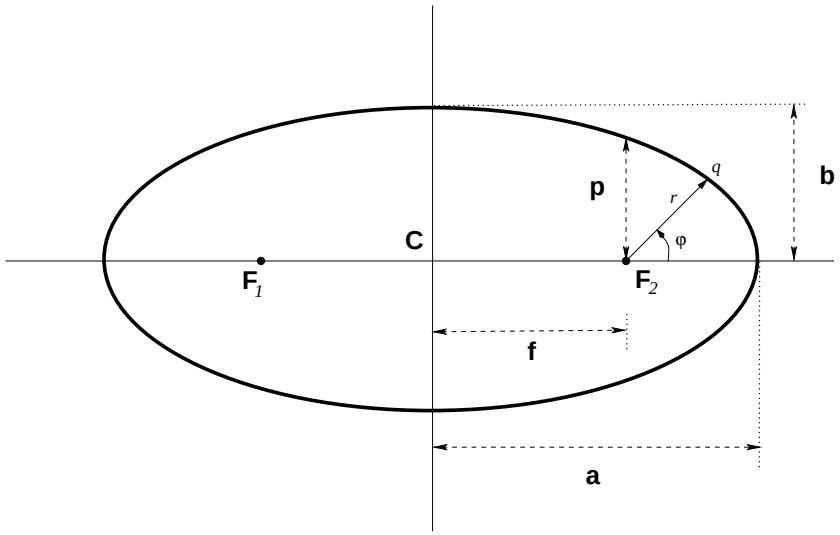

Figura 46.A.18: Esquema indicando uma elipse descrita pela equação $\left(\frac{x}{\mathsf{a}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\mathsf{b}}\right)^2 = 1$ e seus parâmetros: a indica o semieixo maior da elipse; b indica o semieixo menor da elipse; p indica o *semi-latus rectum* da elipse, que vale $\mathsf{p} = \mathsf{b}^2/\mathsf{a}$; o ponto C indica o centro da elipse e F_1 e F_2 indicam as posições de seus pontos focais, sendo f a distância desses a C. Tem-se $\mathsf{f}^2 = \mathsf{a}^2 - \mathsf{b}^2$. Dado um ponto genérico q da elipse, r indica sua distância a F_2 e φ (a *anomalia verdadeira*) indica o ângulo do vetor que conecta F_2 a q com o eixo horizontal.

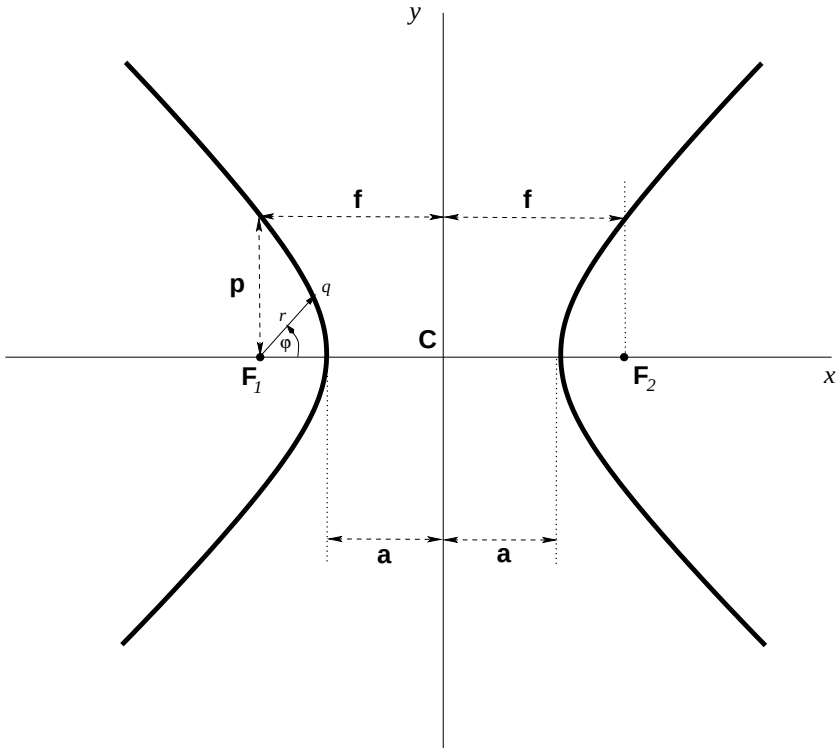

Figura 46.A.19: Esquema indicando uma hipérbole descrita pela equação $\left(\frac{x}{\mathsf{a}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\mathsf{b}}\right)^2 = 1$. O ponto C indica a origem e F_1 e F_2 indicam as posições dos pontos focais da hipérbole, sendo f a distância desses a C. O parâmetro a indica a distância a C dos pontos em que a hipérbole intercepta o eixo horizontal. Note-se que $\mathsf{f} > \mathsf{a}$. Tem-se $\mathsf{b}^2 = \mathsf{f}^2 - \mathsf{a}^2$. O parâmetro p indica o *semi-latus rectum* da hipérbole, que vale $\mathsf{p} = \mathsf{b}^2/\mathsf{a} = \mathsf{f}\left(\mathsf{e} - \frac{1}{\mathsf{e}}\right)$, sendo $\mathsf{e} > 1$ a excentricidade da hipérbole: $\mathsf{e} = \mathsf{f}/\mathsf{a}$. Dado um ponto genérico q do ramo esquerdo da hipérbole, r indica sua distância a F_1 e φ (a *anomalia verdadeira*) indica o ângulo do vetor que conecta F_1 a q com o eixo horizontal.

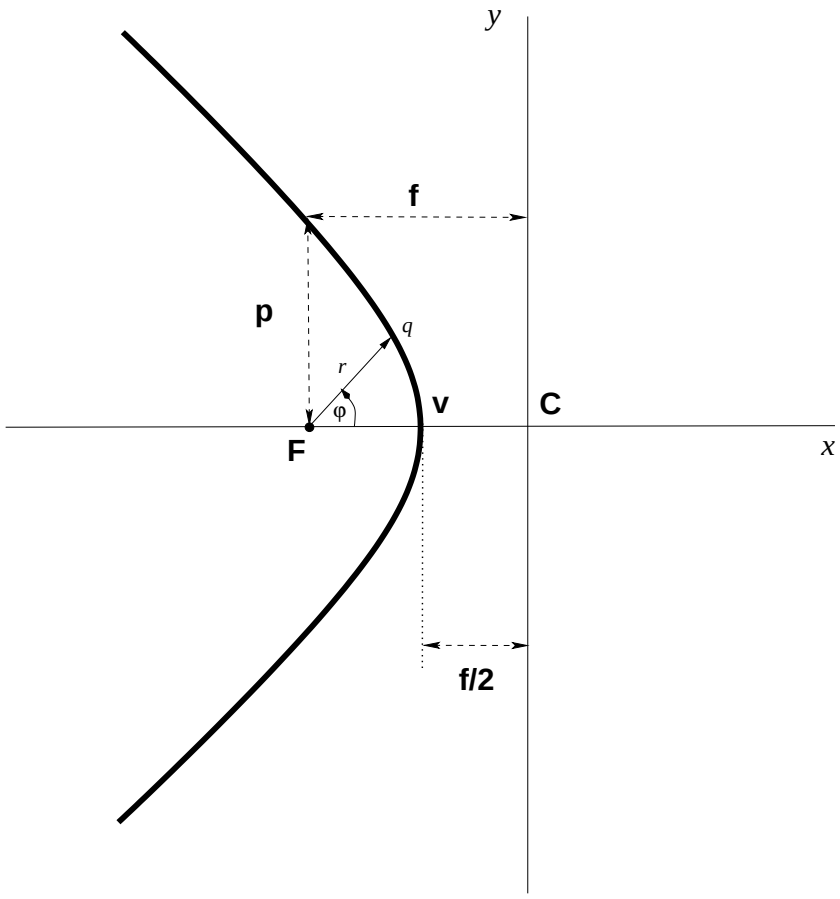

Figura 46.A.20: Esquema indicando a parábola descrita pela equação $x = -\left(\frac{y^2+\mathsf{f}^2}{2\mathsf{f}}\right)$. O ponto C indica a origem e F indica a posição do ponto focal da parábola, sendo f a distância desse a C. A diretriz da parábola é o eixo vertical. O ponto onde a parábola intercepta o eixo horizontal é o vértice v. Sua distância distância a C e a F é $\mathsf{f}/2$. O vértice é o ponto da parábola mais próximo à diretriz. O parâmetro p indica o *semi-latus rectum* da parábola, que nesse caso vale $\mathsf{p} = \mathsf{f}$. Dado um ponto genérico q da parábola, r indica sua distância a F e φ (a *anomalia verdadeira*) indica o ângulo do vetor que conecta F a q com o eixo horizontal.

46.B Soluções Colineares para Pontos de Lagrange

Aqui apresentaremos com detalhe a dedução das soluções (46.85)–(46.88), página 2689, que correspondem ao caso $z_1 < z_2 < z_3$. Como mencionamos, as demais soluções (46.91)–(46.94) e (46.97)–(46.100) são obtidas por permutações de índices.

Como $z_1 < z_2 < z_3$, vale

$$z_3 - z_2 \;=\; R_{23}\;, \quad z_2 - z_1 \;=\; R_{12} \quad \text{e} \quad z_3 - z_1 \;=\; R_{13}\;. \tag{46.B.10}$$

As relações (46.79)–(46.81), página 2688, ficam

$$\frac{\omega^2}{G} z_1 \;=\; -\frac{m_2}{R_{12}^2} - \frac{m_3}{R_{13}^2}\;, \tag{46.B.11}$$

$$\frac{\omega^2}{G} z_2 \;=\; \frac{m_1}{R_{12}^2} - \frac{m_3}{R_{23}^2}\;, \tag{46.B.12}$$

$$\frac{\omega^2}{G} z_3 \;=\; \frac{m_1}{R_{13}^2} + \frac{m_2}{R_{23}^2}\;. \tag{46.B.13}$$

É conveniente reescrever ao menos duas das relações acima fazendo uso da condição de centro de massa: $m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0$. Temos,

$$0 \;=\; m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 \;=\; (m_1 + m_2 + m_3) z_1 + m_2 (z_2 - z_1) + m_3 (z_3 - z_1) \;\;\therefore\;\; M z_1 \;=\; -m_2 R_{12} - m_3 R_{13}\;, \tag{46.B.14}$$

onde, novamente, $M = m_1 + m_2 + m_3$. Analogamente, escrevemos

$$0 \;=\; m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 \;=\; m_1 (z_1 - z_3) + m_2 (z_2 - z_3) + (m_1 + m_2 + m_3) z_3 \;\;\therefore\;\; M z_3 \;=\; m_1 R_{13} + m_2 R_{23}\;. \tag{46.B.15}$$

Multiplicando (46.B.11) por M e usando (46.B.14), obtemos

$$\frac{\omega^2}{G} (m_2 R_{12} + m_3 R_{13}) \;=\; \frac{m_2 M}{R_{12}^2} + \frac{m_3 M}{R_{13}^2}\;. \tag{46.B.16}$$

Analogamente, multiplicando (46.B.13) por M e usando (46.B.15), obtemos

$$\frac{\omega^2}{G} (m_1 R_{13} + m_2 R_{23}) \;=\; \frac{m_1 M}{R_{13}^2} + \frac{m_2 M}{R_{23}^2}\;. \tag{46.B.17}$$

Dividindo-se (46.B.16) por R_{13}, obtemos, após manipulações simples,

$$\frac{\omega^2}{MG} R_{13}^3 \left(m_2 \frac{R_{12}}{R_{13}} + m_3 \right) \;=\; \left(m_2 \frac{R_{13}^2}{R_{12}^2} + m_3 \right)\;. \tag{46.B.18}$$

Dividindo-se (46.B.17) por R_{13}, obtemos, após manipulações simples,

$$\frac{\omega^2}{MG} R_{13}^3 \left(m_1 + m_2 \frac{R_{23}}{R_{13}} \right) \;=\; \left(m_1 + m_2 \frac{R_{13}^2}{R_{23}^2} \right)\;. \tag{46.B.19}$$

Agora, por (46.84), é claro que $R_{23} = R_{13} - R_{12}$. Assim, definindo

$$\rho \;:=\; \frac{R_{12}}{R_{13}}\;, \qquad \text{temos} \qquad \frac{R_{23}}{R_{13}} \;=\; 1 - \rho\;.$$

Com isso, (46.B.18) e (46.B.19) ficam

$$\frac{\omega^2}{MG} R_{13}^3 \big(m_2 \rho + m_3 \big) \;=\; m_2 \rho^{-2} + m_3 \qquad \text{e} \qquad \frac{\omega^2}{MG} R_{13}^3 \big(m_1 + m_2 (1 - \rho) \big) \;=\; m_1 + m_2 (1 - \rho)^{-2}\;,$$

respectivamente. Assim, para que as relações de equilíbrio (46.77), página 2685, sejam satisfeitas devemos ter simultaneamente

$$\frac{\omega^2}{MG}R_{13}^3 \;=\; \frac{m_2\rho^{-2}+m_3}{m_2\rho+m_3} \qquad \text{e} \qquad \frac{\omega^2}{MG}R_{13}^3 \;=\; \frac{m_2(1-\rho)^{-2}+m_1}{m_2(1-\rho)+m_1}\;. \tag{46.B.20}$$

Como os lados esquerdos dessas equações coincidem, vemos que as equações (46.77) serão satisfeitas no presente caso se pudermos satisfazer a igualdade

$$\frac{m_2\rho^{-2}+m_3}{m_2\rho+m_3} \;=\; \frac{m_2(1-\rho)^{-2}+m_1}{m_2(1-\rho)+m_1}\;. \tag{46.B.21}$$

Observe-se agora que, por definição, $\rho = \frac{R_{12}}{R_{13}} = \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ e, portanto $0<\rho<1$, pois supomos que $z_1<z_2<z_3$. Consequentemente, é suficiente verificar se a igualdade (46.B.21) pode ser satisfeita por algum ρ nesse intervalo.

Para tal, consideremos a função

$$f_{II}(\rho) \;:=\; \frac{m_2\rho^{-2}+m_3}{m_2\rho+m_3} - \frac{m_2(1-\rho)^{-2}+m_1}{m_2(1-\rho)+m_1}\;, \qquad \rho\in(0,\,1)\;, \tag{46.B.22}$$

que é contínua em $(0,\,1)$. Um cálculo maçante, porém simples, revela que

$$f_{II}'(\rho) \;:=\; -\frac{2m_2\rho^{-3}}{m_2\rho+m_3} - \frac{m_2\rho^{-2}+m_3}{(m_2\rho+m_3)^2}m_2 - \frac{2m_2(1-\rho)^{-3}}{m_2(1-\rho)+m_1} - \frac{m_2(1-\rho)^{-2}+m_1}{\big(m_2(1-\rho)+m_1\big)^2}m_2\;, \tag{46.B.23}$$

donde claramente se vê que $f_{II}'(\rho)<0$ para todo $\rho\in(0,\,1)$, indicando que f_{II} é estritamente decrescente nesse intervalo. Como $\lim\limits_{\rho\to 0_+} f_{II}(\rho)=+\infty$ e $\lim\limits_{\rho\to 1_-} f_{II}(\rho)=-\infty$ (verifique!), concluímos que f_{II} tem precisamente uma raiz no intervalo $(0,\,1)$.

Neste ponto vale observar que as funções f_I e f_{III}, introduzidas, respectivamente, em (46.95), página 2689, e (46.101), página 2690, têm também a propriedade de possuírem exatamente uma raiz no intervalo $(0,\,1)$, pois elas são obtidas de f_{II} permutando-se as massas m_1, m_2 e m_3. Essas permutações não alteram o sinal dos termos do lado direito de (46.B.23), o que permite extrair as mesmas conclusões sobre essas funções.

Seja ρ_0 essa raiz. Retornando a (46.B.20), vemos que ω deve satisfazer

$$\frac{\omega^2}{MG}R_{13}^3 \;=\; \frac{m_2\rho_0^{-2}+m_3}{m_2\rho_0+m_3} \tag{46.B.24}$$

para que tenhamos uma solução de (46.77).

E. 46.28 *Exercício*. Constate que ρ_0 é raiz do polinômio de quinto grau

$$\Big(m_2(1-\rho)^2+m_3\rho^2(1-\rho)^2\Big)\Big(m_2(1-\rho)+m_1\Big) \;-\; \Big(m_2\rho+m_3\Big)\Big(m_2\rho^2+m_1\rho^2(1-\rho)^2\Big) \tag{46.B.25}$$

sendo, pela análise acima, a única raiz desse polinômio no intervalo $(0,\,1)$. O fato de ρ_0 ser raiz de um polinômio é relevante para sua determinação por métodos numéricos. Segundo [456], esse polinômio já era mencionado no trabalho original de Euler, de 1767. ✠

Multiplicando (46.B.11) e (46.B.13) por R_{13}^3/M e usando (46.B.24), obtemos

$$z_1 \;=\; -\frac{R_{13}}{M}\big(m_2\rho_0+m_3\big) \qquad \text{e} \qquad z_3 \;=\; \frac{R_{13}}{M}\big(m_2(1-\rho_0)+m_1\big)\;. \tag{46.B.26}$$

Na última relação usamos também que $\dfrac{m_2\rho_0^{-2}+m_3}{m_2\rho_0+m_3} = \dfrac{m_2(1-\rho_0)^{-2}+m_1}{m_2(1-\rho_0)+m_1}$, devido a (46.B.21). Para z_2, usamos o fato que $m_2z_2=-m_1z_1-m_3z_3$, obtendo, com uso das relações (46.B.26),

$$z_2 \;=\; \frac{R_{13}}{M}\big(m_1\rho_0-m_3(1-\rho_0)\big)\;.$$

Em resumo, temos a solução procurada para $z_1 < z_2 < z_3$:

$$\omega^2 = \frac{MG}{R_{13}^3}\left(\frac{m_2\rho_0^{-2}+m_3}{m_2\rho_0+m_3}\right) = \frac{MG}{R_{12}^3}\left(\frac{m_2\rho_0+m_3\rho_0^3}{m_2\rho_0+m_3}\right) , \tag{46.B.27}$$

$$z_1 = -\frac{R_{13}}{M}\big(m_2\rho_0+m_3\big) = -\frac{R_{12}}{M}\rho_0^{-1}\big(m_2\rho_0+m_3\big) , \tag{46.B.28}$$

$$z_2 = \frac{R_{13}}{M}\big(m_1\rho_0-m_3(1-\rho_0)\big) = \frac{R_{12}}{M}\rho_0^{-1}\big(m_1\rho_0-m_3(1-\rho_0)\big) , \tag{46.B.29}$$

$$z_3 = \frac{R_{13}}{M}\big(m_2(1-\rho_0)+m_1\big) = \frac{R_{12}}{M}\rho_0^{-1}\big(m_2(1-\rho_0)+m_1\big) , \tag{46.B.30}$$

em termos de R_{13} (ou R_{12}), sendo ρ_0 o (único!) zero da função $f_{II}(\rho)$ dada em (46.B.22) no intervalo $(0,\ 1)$. Aqui, $R_{12}/R_{13} = \rho_0$ e $R_{23}/R_{13} = 1-\rho_0$. Essas são as relações (46.85)–(46.88).

46.C Cálculo dos Pontos de Lagrange L_1, L_2 e L_3 quando $m_1 \gg m_2 \gg m_3$

Nesta seção apresentaremos com detalhes os cômputos que fornecem as posições dos Pontos de Lagrange L_1, L_2 e L_3 na situação em que $m_1 \gg m_2 \gg m_3$. Esses resultados foram apresentados e discutidos na Seção 46.3.1.3, página 2691.

Começamos considerando o ponto de Lagrange L_2.

• **Caso $z_1 < z_2 < z_3$. O ponto de Lagrange L_2**

Comecemos analisando os zeros da função f_{II} dada em (46.89), página 2689. Considerando-se $m_3 \cong 0$, temos a aproximação

$$f_{II}(\rho) = \rho^{-3} - \frac{\frac{m_2}{m_1}(1-\rho)^{-2}+1}{\frac{m_2}{m_1}(1-\rho)+1} .$$

Observe-se que caso tomássemos $m_2/m_1 = 0$ a solução seria $\rho_0 = 1$. Considerando apenas termos em primeira ordem em m_2/m_1 e escrevendo $1/\Big(\frac{m_2}{m_1}(1-\rho)+1\Big) \cong 1-\frac{m_2}{m_1}(1-\rho)$, obtemos

$$f_{II}(\rho) \cong \rho^{-3} - \left(1+\frac{m_2}{m_1}(1-\rho)^{-2}\right)\left(1-\frac{m_2}{m_1}(1-\rho)\right) \cong \rho^{-3} - 1 + \frac{m_2}{m_1}\Big((1-\rho)^{-2}-(1-\rho)\Big) .$$

Assim, um zero ρ_0 de $f_{II}(\rho)$ satisfará

$$(1-\rho_0)^2\big(\rho_0^{-3}-1\big) + \frac{m_2}{m_1}\Big((1-\rho_0)^3-1\Big) = 0 .$$

Como $\rho_0 = 1$ caso $m_2/m_1 = 0$, escrevemos $\rho_0 = 1-h$ e tentamos determinar h. Da última expressão, obtemos, desprezando termos de ordem superior a h^3, escrevendo $\rho_0^{-3} = (1-h)^{-3} \cong 1+3h$,

$$3h^3 + \frac{m_2}{m_1}(h^3-1) = 0 .$$

Desprezando também o termo $\frac{m_2}{m_1}h^3$, obtemos $3h^3 = \frac{m_2}{m_1}$ e, assim, temos a aproximação

$$\rho_0 = 1 - \left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{1/3} .$$

Inserindo isso em (46.85)–(46.88) e tomando $m_3 = 0$, temos

$$\omega^2 = \frac{MG}{R_{12}^3} , \tag{46.C.31}$$

$$z_1 = -R_{12}\frac{m_2}{M} \cong 0 , \tag{46.C.32}$$

$$z_2 = R_{12}\frac{m_1}{M} \cong R_{12} , \tag{46.C.33}$$

$$z_3 = \frac{R_{12}}{M}\left(1+\left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{1/3}\right) m_1 \left(\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{1/3}+1\right) = R_{12}\left(1+\left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{1/3}\right) , \tag{46.C.34}$$

sendo que coletamos apenas os termos de ordem inferior e consideramos $M \cong m_1$.

O fato que $z_1 = 0$ significa dizer que a posição da massa primária m_1 coincide com o centro de massa.

• **Caso $z_1 < z_3 < z_2$. O ponto de Lagrange L_1**

Procedemos como no caso anterior analisando os zeros da função f_I dada em (46.95), página 2689. Considerando-se $m_3 \cong 0$, temos a aproximação

$$\begin{aligned} f_I(\rho) &= \frac{m_3\rho^{-2}+m_2}{m_3\rho+m_2} - \frac{m_3(1-\rho)^{-2}+m_1}{m_3(1-\rho)+m_1} \\ &= \frac{\frac{m_3}{m_2}\rho^{-2}+1}{\frac{m_3}{m_2}\rho+1} - \frac{\frac{m_3}{m_1}(1-\rho)^{-2}+1}{\frac{m_3}{m_1}(1-\rho)+1} \\ &\cong \left(\frac{m_3}{m_2}\rho^{-2}+1\right)\left(1-\frac{m_3}{m_2}\rho\right) - \left(\frac{m_3}{m_1}(1-\rho)^{-2}+1\right)\left(1-\frac{m_3}{m_1}(1-\rho)\right) \\ &\cong \frac{m_3}{m_2}\Big(\rho^{-2}-\rho\Big) - \frac{m_3}{m_1}\Big((1-\rho)^{-2}-(1-\rho)\Big) . \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{m_3}{m_2}\Big(\rho_0^{-2}-\rho_0\Big) - \frac{m_3}{m_1}\Big((1-\rho_0)^{-2}-(1-\rho_0)\Big) = 0 .$$

Agora, escrevemos $\rho_0 = 1-h$ e $\rho_0^{-2} \cong 1+2h$. Teremos,

$$\frac{m_3}{m_2}3h - \frac{m_3}{m_1}\Big(h^{-2}-h\Big) = 0 .$$

Multiplicando-se por $h^2 m_2/m_3$ isso fica

$$3h^3 - \frac{m_2}{m_1}\Big(1-h^3\Big) = 0 .$$

Desprezando-se o termo $\frac{m_2}{m_1}h^3$, obtemos $h = \left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{1/3}$ e, assim,

$$\rho_0 \cong 1-\left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{1/3} . \tag{46.C.35}$$

Retornando com isso a (46.91)–(46.94), temos, na aproximação considerada,

$$\omega^2 = \frac{MG}{R_{12}^3} , \tag{46.C.36}$$

$$z_1 \cong 0 , \tag{46.C.37}$$

$$z_2 = R_{12} , \tag{46.C.38}$$

$$z_3 \cong R_{12}\rho_0 \overset{(46.C.35)}{\cong} R_{12}\left(1 - \left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{1/3}\right) . \tag{46.C.39}$$

• **Caso $z_3 < z_1 < z_2$. O ponto de Lagrange L_3**

Interessantemente, este caso exige cálculos mais elaborados que os anteriores nos limites considerados. A primeira dificuldade é a determinação aproximada da raiz da função $f_{III}(\rho)$ dada em (46.101), página 2690, para ρ no intervalo $(0,\ 1)$. Temos

$$f_{III}(\rho) := \frac{m_1\rho^{-2} + m_2}{m_1\rho + m_2} - \frac{m_1(1-\rho)^{-2} + m_3}{m_1(1-\rho) + m_3} .$$

Determinar os zeros dessa função equivale a encontrar os valores de ρ para os quais

$$\big(m_1\rho^{-2} + m_2\big)\big(m_1(1-\rho) + m_3\big) - \big(m_1(1-\rho)^{-2} + m_3\big)\big(m_1\rho + m_2\big) = 0 .$$

No limite $m_3 \to 0$ isso fica

$$\big(m_1\rho^{-2} + m_2\big)(1-\rho) - (1-\rho)^{-2}\big(m_1\rho + m_2\big) = 0 .$$

Multiplicando essa expressão por $\rho^2(1-\rho)^2/m_1$, ficamos com

$$\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\rho^2\right)(1-\rho)^3 - \rho^2\left(\rho + \frac{m_2}{m_1}\right) = 0 .$$

$$(1-\rho)^3 - \rho^3 + \frac{m_2}{m_1}\rho^2\left[(1-\rho)^3 - 1\right] = 0 . \tag{46.C.40}$$

O problema geral consiste em encontrar as raízes desse polinômio de quinto grau, mas vamos considerar aqui apenas o caso em que a razão m_2/m_1 é "pequena", o que torna o problema explicitamente tratável.

Caso $m_2/m_1 = 0$ a equação (46.C.40) fica $(1-\rho)^3 = \rho^3$, ou seja, $1 - \rho = \rho$ e portanto, $\rho = 1/2$. Vamos, para $m_2/m_1 \neq 0$, procurar soluções da forma $\rho = 1/2 + h$, com h "pequeno". Substituindo esse *Ansatz* em (46.C.40), obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - h\right)^3 - \left(\frac{1}{2} + h\right)^3 + \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{1}{2} + h\right)^2\left[\left(\frac{1}{2} - h\right)^3 - 1\right] = 0 .$$

Multiplicando todos os termos por 8, isso fica

$$(1-2h)^3 - (1+2h)^3 + \frac{m_2}{m_1}\frac{1}{4}(1+2h)^2\left[(1-2h)^3 - 8\right] = 0 .$$

Como h é "pequeno", podemos usar a aproximação $(1+2h)^n \cong 1 + 2nh$ e a expressão acima fica

$$(1-6h) - (1+6h) + \frac{m_2}{m_1}\frac{1}{4}(1+4h)\left[(1-6h) - 8\right] = 0 ,$$

ou seja,

$$-12h + \frac{m_2}{m_1}\frac{1}{4}(1+4h)\left[-6h - 7\right] = 0 .$$

Desprezando termos em h^2 ou produtos como $\frac{m_2}{m_1}h$, isso fica

$$-12h - \frac{m_2}{m_1}\frac{7}{4} = 0 , \quad \therefore \quad h = -\frac{m_2}{m_1}\frac{7}{48} .$$

Portanto,

$$\rho_0 \;=\; \frac{1}{2} - \frac{m_2}{m_1}\frac{7}{48}$$

é a raiz procurada de $f_{III}(\rho)$ no intervalo (0, 1) sob as hipóteses de termos m_3 desprezível e m_2/m_2 pequeno.

Com isso, podemos retornar às relações (46.97)-(46.100), página 2690, e obter z_1, z_2 e z_3 nos limites considerados. Tomando-se $m_3 = 0$, as relações (46.97)-(46.99) ficam

$$\omega^2 \;=\; \frac{MG}{R_{12}^3}\,, \tag{46.C.41}$$

$$z_1 \;=\; R_{12}\frac{m_2}{M} \;\cong\; 0\,, \tag{46.C.42}$$

$$z_2 \;=\; R_{12}\frac{m_1}{M} \;\cong\; R_{12}\,. \tag{46.C.43}$$

A determinação de z_3 a partir de (46.100) requer um cálculo mais elaborado. Desprezando repetidas vezes termos de ordem superior em m_2/m_1 e usando $m_1/M = m_1/(m_1+m_2) \cong 1 - m_2/m_1$ e $m_2/M = m_2/(m_1+m_2) \cong m_2/m_1$, temos de (46.100)

$$\begin{aligned}
z_3 &= -R_{12}\left[\frac{m_1}{m_1+m_2}(1-\rho_0)^{-1}\rho_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}(1-\rho_0)^{-1}\right] \\
&= -R_{12}\left[\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)(1-\rho_0)^{-1}\rho_0 + \frac{m_2}{m_1}(1-\rho_0)^{-1}\right] \\
&= -R_{12}\left[\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{\frac{1}{2}-\frac{m_2}{m_1}\frac{7}{48}}{\frac{1}{2}+\frac{m_2}{m_1}\frac{7}{48}} + \frac{m_2}{m_1}\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{m_2}{m_1}\frac{7}{48}}\right] \\
&= -R_{12}\left[\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)\left(1-\frac{m_2}{m_1}\frac{7}{12}\right) + 2\frac{m_2}{m_1}\left(1-\frac{m_2}{m_1}\frac{7}{24}\right)\right] \\
&= -R_{12}\left[1+\left(-1-\frac{7}{12}+2\right)\frac{m_2}{m_1}\right] \\
&= -R_{12}\left[1+\frac{5}{12}\frac{m_2}{m_1}\right]\,.
\end{aligned}$$

Isso completa os cômputos que levam aos resultados sobre a posição dos pontos de Lagrange colineares apresentados na Seção 46.3.1.3, página 2691.

✡✡✡