

---

# Universidade de São Paulo

## Instituto de Física

- Departamento de Física Matemática -

2017

### Notas para Cursos de Física-Matemática

João Carlos Alves Barata

Versão de 21 de junho de 2017

---

Estas notas, ou sua versão mais recente, podem ser encontradas no seguinte endereço WWW:  
[http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas\\_de\\_aula](http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula)

## Índice

Prefácio	22
Bons Mots	23
Como Ler Este Livro	25
Notação e Advertências	26
<b>I Capítulos Introdutórios</b>	<b>31</b>
<b>1 Noções Conjuntivistas Básicas</b>	<b>32</b>
1.1 Conjuntos, Relações e Funções	32
1.1.1 Relações e Funções	34
1.1.1.1 Produtos Cartesianos Gerais	39
1.1.1.2 Relações de Incompatibilidade (ou de Compatibilidade)	40
1.1.1.3 Relações de Equivalência	41
1.1.1.4 Relações de Ordem	45
1.1.2 Cardinalidade	51
1.1.3 Ínfimos e Supremos de Famílias de Conjuntos	56
1.2 Sistemas de Conjuntos	58
1.2.1 Semi-Anéis de Conjuntos	59
1.2.2 Anéis de Conjuntos	59
1.2.3 Álgebras de Conjuntos	61
1.2.4 $\sigma$ -Anéis de Conjuntos	62
1.2.5 $\sigma$ -Álgebras de Conjuntos	63
1.2.6 Sistemas Monótonos de Conjuntos	64
1.2.7 Topologias	67
1.2.8 Filtros e Ultrafiltros	68
	<b>APÊNDICES</b>
1.A A Fórmula de Inversão de Möbius	71
<b>2 Estruturas Algébricas Básicas</b>	<b>73</b>
2.1 Estruturas Algébricas Básicas	74
2.1.1 Álgebras Universais	76
2.1.2 Reticulados e Álgebras Booleanas	78
2.1.3 Semigrupos, Monóides e Grupos	83
2.1.4 Corpos	88
2.1.5 Espaços Vetoriais	91
2.1.6 Anéis, Módulos e Álgebras	94
2.1.6.1 Anéis	94
2.1.6.2 Módulos	95
2.1.6.3 Álgebras	95
2.1.7 Exemplos Especiais de Álgebras	98
2.1.7.1 Álgebras de Lie	98
2.1.7.2 Álgebras de Poisson	101
2.1.7.3 Álgebras de Jordan	101
2.1.7.4 Álgebras de Grassmann	102
2.1.7.5 Álgebras de Clifford	103
2.1.8 Mais sobre Anéis	103
2.1.9 Ações e Representações	105

2.1.9.1 Ações de Grupos	105
2.1.9.2 Representações de Grupos e de Álgebras	109
2.1.10 Morfismos, Homomorfismos, Epimorfismos, Isomorfismos, Monomorfismos, Endomorfismos e Automorfismos	110
2.1.11 Induzindo Estruturas Algébricas	112
<b>2.2 Grupos. Estruturas e Construções Básicas</b>	<b>116</b>
2.2.1 Cosets	116
2.2.2 Subgrupos Normais e o Grupo Quociente	118
2.2.2.1 Alguns Teoremas Sobre Isomorfismos e Homomorfismos de Grupos	120
2.2.2.2 O Centro de um Grupo. Centralizadores e Normalizadores	123
2.2.3 Grupos Gerados por Conjuntos. Grupos Gerados por Relações	125
2.2.4 O Produto Direto e o Produto Semi-Direto de Grupos. O Produto Tensorial de Grupos Abelianos	126
2.2.4.1 O Produto Direto (ou Soma Direta) de Grupos	126
2.2.4.2 O Produto Semi-Direto de Grupos	127
2.2.4.3 Produtos Tensoriais de Grupos Abelianos	131
<b>2.3 Espaços Vetoriais. Estruturas e Construções Básicas</b>	<b>137</b>
2.3.1 Bases Algébricas de um Espaço Vetorial	137
2.3.2 O Dual Algébrico de um Espaço Vetorial	141
2.3.3 Subespaços e Espaços Quocientes	148
2.3.4 Somas Diretas de Espaços Vetoriais	149
2.3.4.1 Formas Multilineares	150
2.3.5 Produtos Tensoriais de Espaços Vetoriais	152
2.3.5.1 Produtos Tensoriais, Duais Algébricos e Formas Multilineares	159
2.3.6 Produtos Tensoriais de um Espaço Vetorial com seu Dual	163
2.3.6.1 Tensores Associados a Formas Bilineares Simétricas Não-Degeneradas. Métricas	163
2.3.7 Produtos Tensoriais de um mesmo Espaço Vetorial. Os Espaços Simétrico e Antissimétrico	168
2.3.8 O Produto Tensorial de Módulos. Derivações	170
<b>2.4 Anéis e Álgebras. Estruturas e Construções Básicas</b>	<b>172</b>
2.4.1 Ideais em Anéis e Álgebras Associativas	172
2.4.1.1 Ideais em Anéis	172
2.4.1.2 Ideais em Álgebras Associativas	176
<b>2.5 Espaços de Fock, Álgebras Tensoriais e Álgebras Exteriores</b>	<b>179</b>
2.5.1 Álgebras Tensoriais	179
2.5.2 Álgebras Exteriores	180
<b>2.6 Tópicos Especiais</b>	<b>183</b>
2.6.1 O Grupo de Grothendieck	184
2.6.2 Grupóides	185
2.6.3 Quatérnios	187
	<b>APÊNDICES</b>
2.A Prova de (2.148)	193
<b>3 Formas Lineares e Normas em Espaços Vetoriais</b>	<b>194</b>
3.1 Formas Lineares, Sesquilineares e Produtos Escalares em Espaços Vetoriais	194
3.1.1 Formas Multilineares	194
3.1.2 Formas Sesquilineares e as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Minkowski	199
3.1.3 Produtos Escalares	203
3.1.4 Exemplos	205
3.2 Normas em Espaços Vetoriais	206
3.3 Ortogonalidade, Conjuntos Ortonormais e o Procedimento de Gram-Schmidt	213
3.4 Formas Bilineares e Sesquilineares e Produtos Escalares em Espaços de Dimensão Finita	215

3.5	Estruturas Complexas sobre Espaços Vetoriais Reais . . . . .	219
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	226
3.A	Equivalência de Normas em Espaços Vetoriais de Dimensão Finita . . . . .	226
3.B	Prova do Teorema de Fréchet, von Neumann e Jordan . . . . .	227

## II Tópicos de Análise Real e Complexa

231

<b>4</b>	<b>Recordações de Cálculo Vetorial em Três Dimensões</b>	<b>232</b>
4.1	Alguns Operadores Diferenciais de Interesse . . . . .	232
4.2	Teoremas Clássicos sobre Integrais de Volume e de Superfície . . . . .	236
4.3	O Laplaciano em Sistemas de Coordenadas Gerais . . . . .	238
4.4	Coordenadas Esféricas em $n$ Dimensões . . . . .	240
<b>5</b>	<b>Funções Convexas</b>	<b>244</b>
5.1	Funções Convexas. Definições e Propriedades Básicas . . . . .	244
5.1.1	Funções Convexas de uma Variável . . . . .	245
5.1.2	Funções Convexas de Várias Variáveis . . . . .	255
5.2	Algumas Consequências da Convexidade e da Convavidade . . . . .	258
5.2.1	A Desigualdade de Jensen . . . . .	258
5.2.2	A Primeira Desigualdade de Young . . . . .	259
5.2.3	Médias Geométricas, Aritméticas e Desigualdades Correlatas . . . . .	261
5.2.3.1	A Desigualdade de Minkowski . . . . .	264
<b>6</b>	<b>Funções Geratrizes. Produtórias Complexas</b>	<b>266</b>
6.1	Funções Geratrizes . . . . .	266
6.1.1	Números de Bernoulli . . . . .	272
6.2	Notas Sobre Convergência de Produtórias . . . . .	274
6.2.1	Uma Dedução Elementar do Produto de Wallis . . . . .	275
6.3	Exercícios Adicionais . . . . .	278
<b>7</b>	<b>A Função Gama de Euler</b>	<b>280</b>
7.1	Introdução e Motivação . . . . .	280
7.2	A Função Gama. Definição e Primeiras Propriedades . . . . .	282
7.3	Outras Representações para a Função Gama . . . . .	287
7.4	A Função Beta e Propriedades Adicionais da Função Gama . . . . .	291
7.4.1	A Fórmula de Reflexão de Euler . . . . .	292
7.4.2	A Fórmula de Duplicação de Legendre . . . . .	296
7.5	Teoremas Sobre a Unicidade da Função Gama e Outros Resultados . . . . .	297
7.5.1	O Teorema de Bohr-Mollerup . . . . .	297
7.5.2	Fórmulas de Duplicação e Unicidade . . . . .	298
7.5.3	O Teorema de Wielandt e Algumas de Suas Consequências . . . . .	300
7.5.3.1	A Fórmula de Multiplicação de Gauss da Função Gama . . . . .	301
7.6	A Aproximação de Stirling e suas Correções . . . . .	303
7.6.1	A Aproximação de Stirling para Fatoriais e suas Correções. A Série de Gudermann . . . . .	305
7.6.2	A Aproximação de Stirling para a Função Gama e suas Correções. A Série de Gudermann . . . . .	310
7.7	Exercícios Adicionais . . . . .	315
<b>8</b>	<b>Um Mínimo Sobre A Função Zeta de Riemann</b>	<b>321</b>
8.1	Origens . . . . .	321
8.2	Definição . . . . .	326

8.3	A Fórmula de Produto de Euler e Outras Relações Envolvendo $\zeta$ . . . . .	327
8.4	Primeiras Relações de $\zeta$ com a Função Gama de Euler . . . . .	331
8.5	Os Valores de $\zeta$ nos Inteiros . . . . .	336
8.5.1	Um Interlúdio. A Fórmula $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -1/12$ (!) e Alguns de Seus Amigos . . . . .	338
8.6	A Relação Funcional de Riemann . . . . .	342
8.6.1	Uma Demonstração da Relação Funcional de Riemann . . . . .	344
8.7	Exercícios Adicionais . . . . .	346
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	347
8.A	Prova do Teorema Fundamental da Aritmética . . . . .	347

## III Tópicos de Álgebra Linear

351

<b>9</b>	<b>Tópicos de Álgebra Linear. I</b>	<b>352</b>
9.1	Propriedades Básicas de Determinantes e Inversas de Matrizes . . . . .	353
9.2	Noções Básicas sobre o Espectro de uma Matriz . . . . .	363
9.2.1	Autovalores e Polinômios Característicos de Matrizes . . . . .	363
9.2.2	Autovetores . . . . .	366
9.2.3	O Traço de uma Matriz . . . . .	369
9.2.3.1	Algumas Relações entre Determinantes e Traços de Matrizes . . . . .	370
9.3	Polinômios de Matrizes . . . . .	371
9.3.1	O Teorema de Hamilton-Cayley . . . . .	373
9.3.1.1	O Teorema da Aplicação Espectral para Matrizes . . . . .	378
9.4	Matrizes Diagonalizáveis e o Teorema Espectral . . . . .	379
9.4.1	Diagonalização Simultânea de Matrizes . . . . .	391
9.5	Matrizes Autoadjuntas, Normais e Unitárias . . . . .	394
9.5.1	Matrizes Positivas . . . . .	400
9.5.1.1	Matrizes Pseudo-Autoadjuntas e Quase-Autoadjuntas . . . . .	402
9.5.2	O Teorema de Inércia de Sylvester. Superfícies Quadráticas . . . . .	403
9.6	Matrizes Triangulares . . . . .	408
9.7	O Teorema de Decomposição de Jordan e a Forma Canônica de Matrizes . . . . .	410
9.7.1	Resultados Preparatórios . . . . .	411
9.7.2	O Teorema da Decomposição de Jordan . . . . .	415
9.7.3	Matrizes Nilpotentes e sua Representação Canônica . . . . .	418
9.7.4	A Forma Canônica de Matrizes . . . . .	421
9.7.5	Mais Alguns Resultados Sobre Matrizes Nilpotentes . . . . .	424
9.8	Algumas Representações Especiais de Matrizes . . . . .	426
9.8.1	A Decomposição Polar de Matrizes . . . . .	426
9.8.2	A Decomposição em Valores Singulares . . . . .	428
9.8.3	O Teorema da Triangularização de Schur . . . . .	428
9.8.4	A Decomposição $QR$ e a Decomposição de Iwasawa (“KAN”) . . . . .	430
9.9	A Pseudoinversa de Moore-Penrose . . . . .	433
9.9.1	Outras Propriedades da Pseudoinversa de Moore-Penrose . . . . .	435
9.9.1.1	A Regularização de Tikhonov. Existência . . . . .	438
9.9.1.2	A Pseudoinversa de Moore-Penrose e o Teorema Espectral . . . . .	440
9.9.2	A Pseudoinversa de Moore-Penrose e Problemas de Optimização Linear . . . . .	441
9.9.3	Existência e Decomposição em Valores Singulares . . . . .	442
9.10	Produtos Tensoriais de Matrizes . . . . .	444
9.11	Propriedades Especiais de Determinantes . . . . .	446

9.11.1	Expansão do Polinômio Característico	446
9.11.2	A Desigualdade de Hadamard	446
9.12	Exercícios Adicionais	449
<b>10</b>	<b>Tópicos de Álgebra Linear. II</b>	<b>454</b>
10.1	Uma Topologia Métrica em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	455
10.2	Exponenciais, Logaritmos e Funções Analíticas de Matrizes	458
10.2.1	A Exponenciação de Matrizes e os Grupos $\text{GL}(\mathbb{C}, n)$ e $\text{GL}(\mathbb{R}, n)$	465
10.3	A Fórmula de Lie-Trotter e a Fórmula do Comutador	468
10.4	Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	471
10.4.1	Alguns Fatos Gerais sobre Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	471
10.4.2	Alguns Exemplos Específicos de Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	476
10.5	A Fórmula de Baker, Campbell e Hausdorff	481
10.6	A Fórmula de Duhamel e Algumas de suas Consequências	486
10.7	Exercícios Adicionais	491

## IV Equações Diferenciais

494

<b>11</b>	<b>Equações Diferenciais Ordinárias. Uma Introdução</b>	<b>495</b>
11.1	Definição e Alguns Exemplos	495
11.1.1	Equações Diferenciais Ordinárias Lineares	497
11.1.2	Equações Ordinárias de Segunda Ordem. Exemplos de Interesse	501
11.2	Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias	503
11.3	Discussão sobre Problemas de Valor Inicial	507
11.3.1	Problemas de Valor Inicial. Patologias e Exemplos a se Ter em Mente	509
11.3.2	Teoremas de Existência e Unicidade de Soluções	512
11.3.3	Soluções Globais	514
11.3.4	Dependência Contínua de Condições Iniciais e de Parâmetros	516
<b>12</b>	<b>Alguns Métodos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias</b>	<b>517</b>
12.1	Solução de Equações Ordinárias Lineares de Primeira Ordem	517
12.2	As Equações de Bernoulli e de Riccati	518
12.3	Integração de Equações Separáveis	520
12.4	O Método de Variação de Constantes	521
12.5	O Método de Substituição de Prüfer	522
12.6	O Método de Inversão	524
12.7	Solução de Equações Exatas e o Método dos Fatores Integrantes	525
12.8	Soluções das Equações de D'Alembert-Lagrange e Clairaut	529
<b>13</b>	<b>Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares</b>	<b>533</b>
13.1	Introdução	534
13.2	Unicidade e Existência de Soluções	534
13.2.1	Unicidade	534
13.2.2	Existência. A Série de Dyson	537
13.2.3	Propriedades de $D(s, t)$	541
13.3	Equações com Coeficientes Constantes	544
13.3.1	Alguns Exemplos e Aplicações	545
13.4	Perturbações de Sistemas Lineares	549
13.5	Mais sobre a Série de Dyson. Produtos de Tempo Ordenado	553

13.6	Sistemas de Equações Diferenciais Lineares no Plano Complexo	556
13.6.1	O Caso Analítico	556
13.6.2	Resolução por Séries de Potências	561
13.6.3	Sistemas com Pontos Singulares. Monodromia	562
13.6.4	Sistemas com Pontos Singulares Simples	571
13.7	Sistemas Provenientes de EDOs de Ordem $m$	574
13.7.1	Pontos Singulares Simples em EDO's de Ordem $m$	576
13.7.2	Singularidades no Infinito	580
13.7.3	Alguns Exemplos de Interesse	581
13.8	Equações Fuchsianas. Símbolos de Riemann	586
13.8.1	Equações Fuchsianas de Primeira Ordem	587
13.8.2	Equações Fuchsianas de Segunda Ordem	590
13.8.3	A Equação de Riemann-Papperitz. Símbolos de Riemann	598
13.8.3.1	Transformações de Simetria dos Símbolos de Riemann	601
13.8.3.2	Equações Fuchsianas com três pontos singulares e a equação hipergeométrica	604
13.9	Exercícios Adicionais	607

## 14 Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares no Plano Complexo

612

14.1	Soluções em Séries de Potências para Equações Regulares	613
14.1.1	A Equação do Oscilador Harmônico Simples	614
14.1.2	A Equação de Legendre	615
14.1.3	A Equação de Hermite	618
14.1.4	A Equação de Airy	620
14.1.5	A Equação de Tchebychev	622
14.1.6	O Caso de Equações Regulares Gerais	625
14.2	Solução de Equações Singulares Regulares. O Método de Frobenius	626
14.2.1	Equações Singulares Regulares. O Caso Geral	630
14.2.2	A Equação de Euler Revisitada	637
14.2.3	A Equação de Bessel	639
14.2.4	Equações Relacionadas à de Bessel. A Equação de Bessel Esférica	649
14.2.5	Equações Relacionadas à de Bessel. A Equação de Bessel Modificada	651
14.2.6	A Equação de Laguerre	652
14.2.7	A Equação Hipergeométrica	654
14.2.8	A Equação Hipergeométrica Confluente	657
14.3	Algumas Equações Associadas	660
14.3.1	A Equação de Legendre Associada	660
14.3.2	A Equação de Laguerre Associada	662
14.4	Exercícios Adicionais	664

## APÊNDICES

14.A	Prova da Proposição 14.1. Justificando os Polinômios de Legendre	666
14.B	Polinômios de Legendre: Provando (14.14)	667
14.C	Justificando os Polinômios de Hermite	669
14.D	Polinômios de Hermite: Provando (14.20)	670
14.E	Porque $\lambda$ deve ser um Inteiro Positivo na Equação de Laguerre	671
14.F	Polinômios de Tchebychev: Obtendo (14.39) a Partir de (14.36)–(14.38)	673

## 15 Propriedades de Algumas Funções Especiais

675

15.1	Discussão Preliminar	675
15.1.1	Relações de Ortogonalidade	676

15.1.1.1	Condições de Contorno e a Origem das Relações de Ortogonalidade	681
15.1.2	Fórmulas de Rodrigues	685
15.2	Propriedades de Algumas Funções Especiais	687
15.2.1	Propriedades dos Polinômios de Legendre	687
15.2.2	Propriedades dos Polinômios de Legendre Associados	691
15.2.2.1	As Funções Harmônicas Esféricas	697
15.2.2.2	Fórmula de Adição de Funções Harmônicas Esféricas	699
15.2.3	Propriedades dos Polinômios de Hermite	703
15.2.3.1	As Funções de Hermite	706
15.2.4	Propriedades dos Polinômios de Tchebychev	710
15.2.5	Propriedades dos Polinômios de Laguerre	710
15.2.6	Propriedades dos Polinômios de Laguerre Associados	714
15.2.7	Algumas Propriedades das Funções de Bessel	717
15.2.7.1	Propriedades de Zeros das Funções de Bessel	727
15.2.7.2	Relações de Ortogonalidade das Funções de Bessel no Intervalo $[0, 1]$	729
15.2.7.3	Comentário sobre a equação de Bessel no intervalo $J = [0, \infty)$	735
15.2.8	Propriedades das Funções de Bessel Esféricas	735
15.2.8.1	Relações de Ortogonalidade Para as Funções de Bessel Esféricas no Intervalo $[0, 1]$	737
15.3	Exercícios Adicionais	739
	<b>APÊNDICES</b>	<b>740</b>
15.A	Provando (15.54) a Força Bruta	740
<b>16</b>	<b>Completeza de Algumas Famílias de Funções</b>	<b>742</b>
16.1	Completeza de Polinômios Ortogonais em Intervalos Compactos	742
16.2	Completeza dos Polinômios de Hermite	745
16.3	Completeza dos Polinômios Trigonométricos	746
16.4	Completeza das Funções de Bessel e Propriedades de seus Zeros	749
16.4.1	A Equação de Bessel como Problema de Sturm-Liouville	749
16.4.1.1	O Caso $\nu > 0$	750
16.4.1.2	O Caso $\nu > 0$ com $\beta_1 = -\nu\beta_2 \neq 0$	752
16.4.1.3	O Caso $\nu = 0$	753
16.4.2	Conclusões Sobre a Completeza das Funções de Bessel e Propriedades de seus Zeros	755
<b>17</b>	<b>Rudimentos da Teoria das Equações a Derivadas Parciais</b>	<b>757</b>
17.1	Definições, Notações e Alguns Exemplos	758
17.2	Algumas Classificações de Equações a Derivadas Parciais	766
17.2.1	Equações Lineares, Não-Lineares, Semi-Lineares e Quase-Lineares	766
17.2.2	Classificação de Equações de Segunda Ordem. Equações Parabólicas, Elípticas e Hiperbólicas	769
17.3	O Método de Separação de Variáveis	772
17.3.1	O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Lineares	772
17.3.2	O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Não-Lineares	775
17.4	Problemas de Cauchy e Superfícies Características. Definições e Exemplos Básicos	777
17.5	O Método das Características	784
17.5.1	Exemplos de Aplicação do Método das Características	789
17.5.2	Características. Comentários Adicionais	800
17.5.3	Sistemas de Equações Quase-Lineares de Primeira Ordem	801
17.5.3.1	Generalidades Sobre Problemas de Condição Inicial em Sistemas Quase-Lineares de Primeira Ordem	805
17.5.3.2	Sistemas Hiperbólicos Semi-Lineares de Primeira Ordem em Duas Variáveis	809
17.5.3.3	Soluções Ditas Simples de Sistemas Quase-Lineares, Homogêneos, de Primeira Ordem em Duas Variáveis	811

17.6	Alguns Teoremas de Unicidade de Soluções de Equações a Derivadas Parciais	815
17.6.1	Casos Simples. Discussão Preliminar	815
17.6.2	Unicidade de Solução para as Equações de Laplace e Poisson	818
17.6.3	Unicidade de Soluções. Generalizações	821
17.7	Exercícios Adicionais	828
<b>18</b>	<b>Introdução ao Problema de Sturm-Liouville</b>	<b>829</b>
18.1	Comentários Iniciais	829
18.2	O Problema de Sturm	834
18.2.1	Soluções Fundamentais e Funções de Green	835
18.2.2	A Função de Green. Resolvendo o Problema de Sturm	836
18.2.3	O Teorema de Green	839
18.3	O Problema de Sturm-Liouville	841
18.3.1	Propriedades Básicas dos Auto-Valores e Auto-Funções de Problemas de Sturm-Liouville	842
18.3.1.1	A Simplicidade dos Auto-Valores	843
18.3.1.2	O Lema de Green	844
18.3.1.3	Realidade dos Auto-Valores e Auto-funções. Ortogonalidade de Auto-funções	845
18.3.1.4	Propriedades dos Autovalores	846
18.3.2	A Equação Integral de Fredholm	850
18.3.3	Uma Aplicação do Problema de Sturm-Liouville	853
18.3.4	Métodos Variacionais de Determinação de Autovalores	856
18.4	Comentários Finais	858
18.4.1	Um Problema de Sturm-Liouville Singular	858
18.5	Exercícios Adicionais	861
	<b>APÊNDICES</b>	<b>864</b>
18.A	Prova do Teorema 18.1. Existência e Unicidade	864
18.B	Prova da Proposição 18.2	865
18.C	Comentário Sobre o Determinante Wronskiano	866
18.D	Demonstração do Teorema 18.3	867
18.D.1	Prova da Desigualdade (18.D.17)	870
<b>19</b>	<b>Alguns Resultados sobre Equações Integrais</b>	<b>872</b>
19.1	Descrição	872
19.2	O Método dos Determinantes de Fredholm	874
19.2.1	A Equação Integral de Fredholm Linear Não-Homogênea	874
19.2.2	A Equação Integral de Fredholm Linear Homogênea	878
19.3	Exercícios Adicionais	880
	<b>APÊNDICES</b>	<b>881</b>
19.A	Obtendo os Determinantes de Fredholm	881
<b>20</b>	<b>Rudimentos da Teoria do Potencial</b>	<b>887</b>
20.1	A Equação de Poisson em Três Dimensões	887
20.1.1	A Equação de Laplace em Domínios Limitados de $\mathbb{R}^3$ . O Problema de Dirichlet	891
20.1.2	A Equação de Poisson em $\mathbb{R}^3$	891
20.1.3	A Equação de Poisson Domínios Limitados de $\mathbb{R}^3$	892
20.1.3.1	O Caso de Condições de Dirichlet	892
20.1.3.2	O Caso de Condições de Neumann	893
20.1.3.3	Existência de Solução	893
20.1.4	Aplicações à Eletrostática: Capacitância	893

20.2	O Teorema de Decomposição de Helmholtz . . . . .	893
20.2.1	Aplicações ao Eletromagnetismo . . . . .	897
20.3	Propriedades Básicas de Funções Harmônicas em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	898
<b>21</b>	<b>Alguns Problemas Selecionados de Interesse Físico</b> . . . . .	<b>900</b>
21.1	Dedução de Algumas Equações Diferenciais de Interesse . . . . .	901
21.1.1	Dedução Informal da Equação de Difusão de Calor . . . . .	901
21.1.2	Dedução Informal da Equação da Corda Vibrante . . . . .	905
21.2	As Equações de Helmholtz e de Laplace . . . . .	911
21.2.1	Problemas em Duas Dimensões em Coordenadas Polares . . . . .	913
21.2.2	Problemas em Três Dimensões em Coordenadas Esféricas . . . . .	915
21.3	Problemas de Difusão em uma Dimensão . . . . .	918
21.3.1	A Evolução da Temperatura de uma Barra Finita . . . . .	918
21.3.2	A Evolução da Temperatura de uma Barra Infinita . . . . .	922
21.3.3	A Evolução da Temperatura de uma Barra Semi-Infinita . . . . .	927
21.4	A Equação de Ondas . . . . .	932
21.4.1	A Equação de Ondas em $1 + 1$ Dimensões . . . . .	933
21.4.2	Interlúdio: Ondas Caminhantes e a Equação do Telégrafo . . . . .	936
21.4.3	Outro Interlúdio: Sólitons . . . . .	938
21.4.3.1	Sólitons na Equação de Korteweg-de Vries . . . . .	939
21.4.3.2	Sólitons na Equação de Sine-Gordon . . . . .	941
21.4.3.3	Sólitons no Modelo de Poço-Duplo . . . . .	942
21.4.3.4	Sólitons na Equação de Schrödinger Não-Linear . . . . .	944
21.4.4	A Equação de Ondas e Transformadas de Fourier . . . . .	948
21.4.4.1	A Equação de Ondas em $3 + 1$ Dimensões. A Solução de Kirchhoff . . . . .	951
21.4.4.2	A Equação de Ondas em $2 + 1$ Dimensões . . . . .	952
21.5	O Problema da Corda Vibrante . . . . .	954
21.5.1	Corda Vibrante Homogênea . . . . .	955
21.5.2	O Problema da Corda Homogênea Pendurada . . . . .	957
21.5.3	Corda Vibrante Não-Homogênea . . . . .	960
21.5.4	O Problema da Membrana Retangular Homogênea . . . . .	963
21.6	O Problema da Membrana Circular Homogênea . . . . .	964
21.7	O Oscilador Harmônico na Mecânica Quântica e a Equação de Hermite . . . . .	966
21.8	O Átomo de Hidrogênio e a Equação de Laguerre Associada . . . . .	969
21.9	Propagação de Ondas em Tanques Cilíndricos . . . . .	971
21.10	Equações Hiperbólicas Lineares em $1+1$ Dimensões e Equações Integrais . . . . .	979
21.11	Aplicações do Método da Função de Green . . . . .	986
21.11.1	A Equação de Poisson em Três Dimensões . . . . .	987
21.11.2	A Equação de Difusão Não-Homogênea . . . . .	988
21.11.3	A Equação de Ondas Não-Homogênea em $n + 1$ -Dimensões . . . . .	990
21.11.3.1	A Equação de Ondas Não-Homogênea em $3 + 1$ -Dimensões . . . . .	994
21.11.3.2	Aplicações à Eletrodinâmica. Potenciais Retardados . . . . .	997
21.11.3.3	A Equação de Ondas Não-Homogênea em $2 + 1$ -Dimensões . . . . .	999
21.11.3.4	A Equação de Ondas Não-Homogênea em $1 + 1$ -Dimensões . . . . .	1002
21.12	Exercícios Adicionais . . . . .	1003
21.12.1	Problemas Selecionados de Eletrostática . . . . .	1003
21.12.2	Equação de Difusão em uma Dimensão . . . . .	1006
21.12.3	Equação de Ondas em uma Dimensão . . . . .	1008
21.12.4	Modos de Vibração de Membranas . . . . .	1014

21.12.5	Problemas sobre Ondas e Difusão em Três Dimensões Espaciais . . . . .	1017
21.12.6	Problemas Envolvendo Funções de Green . . . . .	1019

<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>1021</b>
----------------------------	-------------

21.A	Duas Transformadas de Laplace . . . . .	1021
------	---	------

## V Grupos

1024

<b>22 Grupos. Alguns Exemplos</b> . . . . .	<b>1025</b>	
22.1	O Grupo de Permutações . . . . .	1026
22.1.1	Ciclos, Transposições e Transposições Elementares . . . . .	1027
22.2	Alguns Grupos Matriciais . . . . .	1030
22.2.1	Os Grupos $GL(n)$ e $SL(n)$ . . . . .	1030
22.2.2	O Grupo de Borel e o Grupo de Heisenberg . . . . .	1033
22.2.2.1	O Grupo de Heisenberg . . . . .	1033
22.2.3	Grupos Associados a Formas Bilineares e Sesquilineares . . . . .	1040
22.2.4	Os Grupos Ortogonais . . . . .	1044
22.2.5	Os Grupos Unitários . . . . .	1045
22.3	Os Grupos $SO(2)$ , $SO(3)$ , $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	1046
22.3.1	Os Grupos $SO(2)$ , $O(2)$ , $SO(1, 1)$ e $O(1, 1)$ . . . . .	1046
22.3.2	O Grupo $SO(3)$ . . . . .	1050
22.3.2.1	Mais Propriedades das Matrizes de $SO(3)$ . . . . .	1058
22.3.2.2	$SO(3)$ e os Ângulos de Euler . . . . .	1061
22.3.3	O Grupo $O(3)$ . . . . .	1066
22.3.4	O Grupo $SU(2)$ . . . . .	1069
22.3.5	A Relação Entre $SO(3)$ e $SU(2)$ . . . . .	1074
22.3.6	O Grupo $SL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	1079
22.4	Generalidades Sobre os Grupos $SU(n)$ e $SO(n)$ . . . . .	1080
22.4.1	Os Grupos $SU(n)$ . . . . .	1080
22.4.1.1	Um Pouco Sobre o Grupo $SU(3)$ . . . . .	1083
22.4.2	Os Grupos $SO(n)$ . . . . .	1084
22.5	O Grupo Afim e o Grupo Euclidiano . . . . .	1089
22.6	O Grupo de Lorentz em $3 + 1$ -Dimensões . . . . .	1093
22.6.1	O Espaço-Tempo, a Noção de Intervalo e a Estrutura Causal . . . . .	1093
22.6.2	A Invariância do Intervalo . . . . .	1098
22.6.3	O Grupo de Lorentz . . . . .	1101
22.6.4	Alguns Subgrupos do Grupo de Lorentz . . . . .	1102
22.6.5	A Estrutura do Grupo de Lorentz . . . . .	1105
22.6.6	Os Geradores do Grupo de Lorentz . . . . .	1110
22.6.7	O Grupo de Galilei . . . . .	1115
22.7	O Grupo de Poincaré . . . . .	1117
22.8	Ações de Grupos em Espaços de Funções . . . . .	1121
22.9	Exercícios Adicionais . . . . .	1124
<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>1126</b>	
22.A	Extensão do Lema 22.1 e do Teorema 22.7 ao Caso Complexo . . . . .	1126
22.B	Prova do Teorema 22.10 . . . . .	1128

<b>23 Notas Sobre Mecânica Clássica</b> . . . . .	<b>1139</b>
---	-------------

23.1	Sistemas de Referência e suas Transformações na Mecânica Clássica. Acelerações Inerciais . . . . .	1140
------	--	------

23.2	Mecânica de Pontos Materiais . . . . .	1150
23.3	Mecânica de Corpos Rígidos . . . . .	1158
23.3.1	Propriedades do Tensor Momento de Inércia . . . . .	1160
23.3.2	As Equações Dinâmicas . . . . .	1162
23.3.3	Piões. Algumas Soluções . . . . .	1168
23.4	Ângulos de Euler na Mecânica de Corpos Rígidos . . . . .	1172
23.4.1	Usos dos Ângulos de Euler. O Pião de Lagrange . . . . .	1173
23.5	Mecânica Analítica. Um Mínimo . . . . .	1180
23.5.1	O Formalismo Lagrangiano . . . . .	1180
23.5.1.1	A Invariância das Equações de Euler-Lagrange por Mudanças de Sistemas de Referência . . . . .	1182
23.5.1.2	Modos Normais de Oscilação . . . . .	1184
23.5.1.3	Sistemas de Coordenadas Não-Inerciais no Formalismo Lagrangiano . . . . .	1188
23.5.2	O Formalismo Hamiltoniano . . . . .	1190
23.5.2.1	Derivação Variacional das Equações de Hamilton . . . . .	1192
23.5.3	Colchetes de Poisson . . . . .	1194
23.5.3.1	Transformações Canônicas . . . . .	1199
23.6	Exercícios Adicionais . . . . .	1209
<b>24</b>	<b>Grupos de Lie e Álgebras de Lie. Uma Breve Introdução</b> . . . . .	<b>1216</b>
24.1	Variiedades e Grupos de Lie . . . . .	1216
24.2	Breves Considerações sobre Grupos Topológicos . . . . .	1218
24.3	Grupos de Lie Matriciais . . . . .	1220
24.3.1	Uma Topologia Métrica em $GL(C, n)$ . . . . .	1221
24.3.2	O Grupo de Lie $GL(C, n)$ . . . . .	1221
24.3.3	Subgrupos Uniparamétricos e seus Geradores . . . . .	1223
24.3.4	Subgrupos Uniparamétricos e Álgebras de Lie . . . . .	1226
24.3.5	Subgrupos Fechados de $GL(C, n)$ . . . . .	1230
24.4	A Relação entre Grupos de Lie Matriciais e suas Álgebras de Lie . . . . .	1233
24.4.1	Álgebras de Lie Nilpotentes, Solúveis, Simples e Semi-Simples . . . . .	1234
24.4.2	Questões sobre a Exponenciação de Álgebras de Lie . . . . .	1237
24.4.3	Alguns Exemplos Especiais . . . . .	1239
<b>25</b>	<b>Uma Breve Introdução à Teoria das Representações de Grupos</b> . . . . .	<b>1245</b>
25.1	Representações de Grupos . . . . .	1245
25.2	Médias Invariantes. A Medida de Haar . . . . .	1251
25.3	Representações de Grupos Compactos . . . . .	1253
25.3.1	Representações de Grupos Compactos em Espaços de Hilbert Separáveis . . . . .	1254
25.4	O Teorema de Peter-Weyl . . . . .	1260
25.5	Representações Irreduzíveis de Dimensão Finita de $SU(2)$ . . . . .	1269
25.6	Representações Irreduzíveis de Dimensão Finita de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . . . . .	1274
25.7	Exercícios Adicionais . . . . .	1277
<b>26</b>	<b>Spinores e o Grupo de Lorentz</b> . . . . .	<b>1278</b>
26.1	$SL(2, C)$ e o Grupo de Lorentz . . . . .	1278
26.1.1	Ações de $SL(2, C)$ e o Grupo de Lorentz . . . . .	1281
26.2	Spinores . . . . .	1285
26.2.1	Spinores . . . . .	1289
26.2.1.1	Produtos Escalares Invariantes para Spinores . . . . .	1290
26.2.1.2	Spinores de Dirac e a Equação de Dirac . . . . .	1297

	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>1302</b>
26.A	Um Isomorfismo entre $SL(2, C) / \{1, -1\}$ e $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . . . . .	1302
<b>VI</b>	<b>Topologia Geral, Teoria da Medida e Integração</b> . . . . .	<b>1310</b>
<b>27</b>	<b>Espaços Métricos</b> . . . . .	<b>1311</b>
27.1	Métricas e Espaços Métricos . . . . .	1312
27.1.1	Completeza e o Completamento Canônico . . . . .	1320
27.2	A Noção de Topologia de Espaços Métricos . . . . .	1327
27.3	Pseudométricas . . . . .	1330
27.4	Espaços de Funções Limitadas e Completeza . . . . .	1332
27.5	Espaços de Banach e de Hilbert . . . . .	1335
27.5.1	Espaços de Banach em Espaços de Sequências . . . . .	1337
27.6	Teorema do Melhor Aproximante em Espaços Normados Uniformemente Convexos . . . . .	1348
27.7	Exercícios Adicionais . . . . .	1353
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>1356</b>
27.A	Números Reais e $p$ -ádicos . . . . .	1356
27.A.1	A Construção de Cantor dos Números Reais . . . . .	1356
27.A.2	Outros Completamentos dos Racionais. Números $p$ -ádicos . . . . .	1359
27.B	Aproximações para $\pi$ . . . . .	1362
<b>28</b>	<b>O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas de Suas Consequências</b> . . . . .	<b>1368</b>
28.1	O Teorema de Ponto Fixo de Banach . . . . .	1369
28.1.1	Generalizações do Teorema de Ponto Fixo de Banach . . . . .	1371
28.2	Diversas Aplicações do Teorema de Ponto Fixo de Banach . . . . .	1374
28.2.1	Aplicação a Equações Numéricas. O Método de Newton . . . . .	1374
28.2.2	Aplicação a Sistemas Lineares. O Método de Jacobi . . . . .	1377
28.2.3	Aplicação às Equações Integrais de Fredholm e de Volterra . . . . .	1378
28.2.4	Aplicações à Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias . . . . .	1385
28.2.4.1	O Teorema de Picard-Lindelöf . . . . .	1385
28.2.4.2	Generalizando o Teorema de Picard-Lindelöf. Soluções Globais . . . . .	1389
28.2.4.3	Um Teorema de Comparação de Soluções de EDO's . . . . .	1390
28.3	O Teorema da Função Implícita e o Teorema da Função Inversa . . . . .	1392
28.3.1	O Teorema da Função Implícita . . . . .	1393
28.3.2	O Teorema da Função Inversa . . . . .	1397
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>1398</b>
28.A	O Lema de Grönwall . . . . .	1398
<b>29</b>	<b>Espaços Topológicos e Espaços Mensuráveis. Definições e Propriedades Básicas</b> . . . . .	<b>1399</b>
29.1	Definições, Propriedades Elementares e Exemplos . . . . .	1399
29.2	Algumas Construções Especiais e Exemplos . . . . .	1405
29.2.1	Topologias Geradas por Famílias de Conjuntos . . . . .	1405
29.2.1.1	A Topologia de Sorgenfrey . . . . .	1406
29.2.2	$\sigma$ -Álgebras Geradas por Famílias de Conjuntos . . . . .	1408
29.2.3	Bases de Espaços Topológicos . . . . .	1409
29.2.4	Topologias e $\sigma$ -Álgebras Induzidas . . . . .	1411
29.2.5	Topologias e $\sigma$ -Álgebras Produto . . . . .	1413
29.3	Interior e Fecho de Conjuntos em Espaços Topológicos . . . . .	1413
29.3.1	Fecho de Conjuntos em Espaços Métricos . . . . .	1420

29.4	Espaços Topológicos Separáveis e Segundo-Contáveis	1421
29.4.1	A Segundo-Contabilidade como Propriedade Herdada	1424
<b>30</b>	<b>Medidas</b>	<b>1426</b>
30.1	O Problema da Teoria da Medida	1426
30.2	Medidas de Conjuntos. Definição, Exemplos e Propriedades Básicas	1429
30.3	Construindo Medidas. A Medida Exterior e o Teorema de Carathéodory	1432
30.3.1	Medidas Exteriores Métricas e Conjuntos Borelianos	1439
30.4	Um Esquema de Construção de Medidas Exteriores	1442
30.5	Medidas sobre Anéis e suas Extensões	1444
	<b>APÊNDICES</b>	1449
30.A	Prova das Fórmulas de Inclusão-Exclusão	1449
<b>31</b>	<b>A Medida de Lebesgue e a Medida de Hausdorff</b>	<b>1451</b>
31.1	A Construção da Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$	1451
31.1.1	A $\sigma$ -álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$ e a Medida de Borel-Lebesgue	1453
31.2	As Medidas de Hausdorff	1455
31.3	Conjuntos de Cantor	1459
31.4	Bases de Hamel e a Medida de Lebesgue	1468
31.5	Exercícios Adicionais	1470
<b>32</b>	<b>Continuidade e Convergência em Espaços Topológicos</b>	<b>1475</b>
32.1	Primeiras Definições	1475
32.2	Espaços Hausdorff	1477
32.3	Redes e o Caso de Espaços Topológicos Gerais	1478
32.3.1	Redes em Espaços Métricos	1481
32.4	O Limite do Ínfimo e o Limite do Supremo	1482
32.5	Continuidade de Funções em Espaços Topológicos	1485
32.5.1	Outras Noções Associadas à de Continuidade	1487
32.5.1.1	Homeomorfismos e Mergulhos Topológicos	1488
32.5.2	Outras Caracterizações do Conceito de Continuidade em Espaços Topológicos	1489
32.5.3	Continuidade e Convergência	1490
<b>33</b>	<b>Elementos da Teoria da Integração</b>	<b>1493</b>
33.1	Comentários Preliminares	1493
33.2	A Integração no Sentido de Riemann	1495
33.2.1	A Integral de Riemann Imprópria	1503
33.2.2	Diferenciação e Integração em Espaços de Banach	1505
33.3	A Integração no Sentido de Lebesgue	1509
33.3.1	Funções Mensuráveis e Funções Simples	1509
33.3.2	A Integral de Lebesgue. Integração em Espaços Mensuráveis	1514
33.3.3	A Integral de Lebesgue e sua Relação com a de Riemann	1521
33.3.4	Teoremas Básicos sobre Integração e Convergência	1524
33.3.5	Alguns Resultados de Interesse	1526
33.4	Os Espaços $\mathcal{L}_p$ e $L_p$	1528
33.4.1	As Desigualdades de Hölder e de Minkowski	1530
33.4.2	O Teorema de Riesz-Fischer. Completeza	1533
	<b>APÊNDICES</b>	1534
33.A	Mais sobre a Integral de Darboux	1534
33.A.1	Equivalência das Definições II e III da Integrabilidade de Riemann	1535

33.B	Caracterizações e Propriedades de Funções Mensuráveis	1536
33.C	Prova do Lema 33.3	1541
33.D	Demonstração de (33.26)	1542
33.E	A Equivalência das Definições (33.27) e (33.28)	1542
33.F	Prova do Teorema da Convergência Monótona	1544
33.G	Prova do Lema de Fatou	1545
33.H	Prova do Teorema da Convergência Dominada	1546
33.I	Prova dos Teoremas 33.2 e 33.3	1547
33.J	Prova das Desigualdades de Hölder e Minkowski	1549
33.K	Prova do Teorema de Riesz-Fischer	1551
<b>34</b>	<b>Alguns Tópicos Especiais em Topologia e Análise</b>	<b>1553</b>
34.1	Uma Coletânea de Definições	1554
34.1.1	Conjuntos Densos em Espaços Topológicos	1554
34.1.2	A Noção de Conjunto Conexo em Espaços Topológicos	1555
34.2	Axiomas de Separabilidade	1559
34.2.1	Algumas Propriedades de Separação em Espaços Métricos	1559
34.2.2	Postulados de Separabilidade em Espaços Topológicos	1560
34.2.3	O Lema de Urysohn	1568
34.2.3.1	O Teorema de Extensão de Tietze	1573
34.2.4	A Propriedade de Hausdorff como Propriedade Herdada	1576
34.3	Compacidade, Compacidade Local e Paracompacidade	1577
34.3.1	Algumas Definições Gerais	1577
34.3.2	Espaços de Lindelöf. Um Mínimo	1579
34.3.3	Compacidade. Definições e Propriedades em Espaços Topológicos Gerais	1580
34.3.3.1	Compacidade em Espaços Hausdorff	1583
34.3.3.2	Compacidade em Espaços Métricos	1587
34.3.3.3	Compacidade em $\mathbb{R}^n$	1594
34.3.3.4	Compacidade na Reta de Sorgenfrey	1595
34.3.4	Os Teoremas de Ascoli e de Arzelà	1597
34.3.4.1	Equilimitação e Equicontinuidade de Famílias de Funções	1597
34.3.4.2	Os Teoremas de Ascoli e de Arzelà para Famílias de Funções de um Compacto sobre um Espaço Métrico	1599
34.3.4.3	O Teorema de Peano	1601
34.3.5	Espaços Compactos Hausdorff e Partições da Unidade	1605
34.3.5.1	Uma Excursão pelas Variedades Topológicas Compactas Hausdorff	1606
34.3.6	Compacidade Local	1609
34.3.6.1	Espaços Localmente Compactos Hausdorff	1610
34.3.7	Paracompacidade	1612
34.3.7.1	Espaços Paracompactos Hausdorff	1612
34.4	As Noções de Topologia Inicial e de Topologia Final	1617
34.4.1	A Topologia Inicial de uma Coleção de Funções	1617
34.4.2	A Topologia Final de uma Coleção de Funções	1619
34.4.3	A Topologia Quociente	1620
34.5	Somas de Espaços Topológicos	1621
34.6	A Topologia Produto de Espaços Topológicos	1621
34.6.1	Alguns Resultados Envolvendo Compacidade e Topologia Produto	1623
34.6.2	O Cubo de Hilbert	1625
34.7	Teoremas de Metrizabilidade	1627
34.7.1	O Teorema de Metrização de Urysohn e Tikhonov	1629



34.8	O Teorema da Categoria de Baire	1632
34.9	A Métrica de Hausdorff	1633
	<b>APÊNDICES</b>	1636
34.A	Prova da Proposição 34.35	1636

## VII Geometria Diferencial e Topologia Diferencial

1639

<b>35</b>	<b>Variedades</b>	<b>1640</b>
35.1	Variedades Topológicas	1641
35.1.1	Construindo Variedades Topológicas	1646
35.2	Variedades Diferenciáveis	1648
35.2.1	Partições da Unidade Diferenciáveis	1652
35.2.2	A Noção de Espaço Tangente	1654
35.2.2.1	O Espaço Cotangente	1660
35.2.3	Tensores em Variedades	1662
35.2.3.1	Traços de Tensores. Contração de Índices	1664
35.2.3.2	Transposição de Tensores	1666
35.2.4	Aplicações Entre Variedades Diferenciáveis	1667
35.2.4.1	A Diferencial de Uma Aplicação Entre Variedades. “Pullback” e “Pushforward”	1667
35.2.4.2	Imersões, Mergulhos e Subvariedades	1671
35.3	Campos Vetoriais e Tensoriais	1674
35.3.1	A Derivada de Lie	1676
35.4	Exemplos de Variedades Topológicas e Diferenciáveis	1681
35.4.1	Uma Variedade Topológica Paracompacta não Segundo-Contável	1681
35.4.2	O Gráfico de uma Função Real em $\mathbb{R}^n$	1683
35.4.2.1	Cones. E Um Estudo de Caso	1685
35.4.3	Superfícies Regulares em $\mathbb{R}^n$	1686
35.4.4	As Esferas $S^n$	1689
35.4.5	Toros (e Algumas Generalizações)	1691
35.4.6	Espaços Projetivos Reais	1694
35.4.7	Grupos de Lie	1697
35.4.8	Fibrados, Fibrados Vetoriais e Principais	1697
	<b>APÊNDICES</b>	1699
35.A	Derivadas de Lie. Prova das Relações (35.70) e (35.81)	1699
35.B	Derivadas de Lie. Prova da Relação (35.88)	1700
<b>36</b>	<b>Noções Geométricas em Variedades</b>	<b>1703</b>
36.1	Métricas Riemannianas e Semi-Riemannianas	1703
36.1.1	Transposição em Relação a Tensores Métricos	1713
36.2	Conexões Afins	1717
36.2.1	Conexões Afins em Campos Vetoriais	1717
36.2.1.1	Conexões Afins em Campos Tensoriais	1722
36.2.2	O Tensor de Torção	1725
36.2.3	Tipos Especiais de Conexões Afins	1726
36.2.3.1	Conexões Simétricas (ou Livres de Torção)	1726
36.2.3.2	Conexões Métricas (ou Riemannianas)	1728
36.2.3.3	Conexões de Levi-Civita	1734
36.2.4	Gradiente, Divergente e Laplaciano	1735

36.3	O Tensor de Curvatura	1738
36.3.1	A Curvatura Seccional	1744
36.3.2	O Tensor de Ricci e a Curvatura Escalar	1747
36.4	Geodésicas	1749
36.4.1	O Lema de Gauss	1753
36.4.2	Pontos Conjugados e a Equação de Jacobi	1757
36.4.2.1	A Equação de Jacobi	1757
36.4.2.2	Pontos Conjugados	1759
36.5	A Estrutura Causal de Variedades Lorentzianas	1761
36.5.1	A Identidade de Raychaudhuri	1763
	<b>APÊNDICES</b>	1773
36.A	Demonstração de Algumas Propriedades do Tensor de Curvatura	1773
36.A.1	Prova da Proposição 36.6	1773
36.A.2	Prova da Primeira Identidade de Bianchi, Proposição 36.8	1774
36.A.3	Prova da Segunda Identidade de Bianchi, Proposição 36.9	1775
36.A.4	Prova da Proposição 36.10	1777
36.A.5	Prova da Proposição 36.11	1778

## VIII Séries e Transformadas de Fourier. Distribuições

1781

<b>37</b>	<b>Aproximação de Funções. Aproximações Polinomiais e Séries de Fourier</b>	<b>1782</b>
37.1	Noções de Convergência para Sequências de Funções	1783
37.1.1	Importância da Convergência Uniforme	1784
37.1.1.1	Troca de Ordem entre Limites e Integrais	1785
37.1.1.2	Troca de Ordem entre Limites e Derivadas	1787
37.1.1.3	Troca de Ordem entre Derivadas e Integrais	1787
37.2	Sequências Delta de Dirac	1789
37.3	Aproximação de Funções por Polinômios	1795
37.3.1	O Teorema de Weierstrass	1795
37.3.2	O Teorema de Taylor	1802
37.4	Aproximação de Funções por Polinômios Trigonométricos	1809
37.4.1	Preliminares	1810
37.4.2	A Série de Fourier de Funções Periódicas de Período $T$	1812
37.4.3	Polinômios Trigonométricos e Funções Contínuas e Periódicas	1814
37.4.4	Convergência de Séries de Fourier	1819
37.4.4.1	Séries de Fourier em Senos ou Cossenos para Funções Definidas em Intervalos Compactos	1825
37.4.5	Revisitando a Aproximação Uniforme de Funções Contínuas e Periódicas por Polinômios Trigonométricos	1828
37.4.6	Séries de Fourier e o Espaço de Hilbert $L^2([-\pi, \pi], dx)$	1832
37.5	O Teorema de Stone-Weierstrass	1833
37.6	Exercícios Adicionais	1838
	<b>APÊNDICES</b>	1846
37.A	Prova do Teorema de Weierstrass Usando Polinômios de Bernstein	1846
37.B	A Demonstração de Weierstrass do Teorema de Weierstrass	1850
<b>38</b>	<b>Introdução às Distribuições e às Transformadas de Fourier</b>	<b>1852</b>
38.1	Funções de Schwartz e Funções de Teste	1853
38.1.1	Funções Gaussianas	1864
38.2	Transformadas de Fourier	1866

38.2.1	Transformadas de Fourier no Espaço de Schwartz	1870
38.2.1.1	A Transformada de Fourier de Funções Gaussianas	1873
38.2.1.2	Invertibilidade da Transformada de Fourier no Espaço de Schwartz	1876
38.2.1.3	Transformadas de Fourier, Produtos de Convolução e Identidade de Plancherel	1879
38.2.2	A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$	1882
38.2.2.1	Mais Algumas Transformadas de Fourier Relevantes em Aplicações	1885
38.2.2.2	A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ e suas Propriedades Espectrais	1888
38.2.3	Transformadas de Fourier: Tópicos Suplementares	1890
38.2.3.1	A Fórmula de Soma de Poisson	1891
38.2.3.2	Usos da Fórmula de Soma de Poisson. A Função $\theta$ de Jacobi	1893
38.2.3.3	Transformadas de Fourier e Médias Angulares	1894
38.3	Distribuições e Distribuições Temperadas	1899
38.3.1	Primeiros Exemplos de Distribuições	1901
38.3.2	Outros Exemplos de Distribuições	1907
38.3.2.1	A Distribuição Valor Principal	1907
38.3.2.2	Distribuições do Tipo Parte Finita de Hadamard	1909
38.3.3	Algumas Relações Úteis Envolvendo Distribuições	1912
38.3.4	Derivadas de Distribuições	1916
38.3.4.1	Alguns Exemplos de Derivadas de Distribuições	1919
38.3.4.2	Cálculo da Derivada de Algumas Distribuições de Interesse	1920
38.3.5	Alguns Resultados Estruturais sobre Distribuições	1922
38.3.6	Transformadas de Fourier de Distribuições Temperadas	1923
38.3.6.1	Cálculo de Transformadas de Fourier de Algumas Distribuições Temperadas	1923
38.3.7	Produtos de Distribuições	1927
38.3.7.1	Produto de Convolução de Distribuições	1932
38.4	Equações Diferenciais Distribucionais, Soluções Fundamentais e Funções de Green	1933
38.4.1	Soluções Fundamentais	1936
38.4.1.1	Soluções Fundamentais como Funções Generalizadas	1937
38.4.1.2	O Caso de Operadores Lineares a Coeficientes Constantes	1939
38.4.1.3	Alguns Exemplos Fisicamente Relevantes	1944
38.5	Exercícios Adicionais	1948
	<b>APÊNDICES</b>	1954
38.A	Prova de (38.21)	1954
38.B	Prova da Proposição 38.15	1955

## IX Análise Funcional

1961

<b>39</b>	<b>Noções Básicas Sobre Espaços de Hilbert</b>	<b>1962</b>
39.1	Aspectos Topológicos Básicos de Espaços de Hilbert	1963
39.2	Aspectos Geométricos Básicos de Espaços de Hilbert	1965
39.2.1	Funções Lineares e o Dual Topológico de um Espaço de Hilbert	1969
39.2.1.1	O Teorema da Representação de Riesz	1970
39.2.2	Conjuntos Ortonormais Completos em Espaços de Hilbert	1971
39.2.3	Conjuntos Totais	1982
39.2.3.1	Um Exemplo no Espaço $L^2(\mathbb{R}, dx)$	1983
39.3	Somas Diretas e Produtos Tensoriais de Espaços de Hilbert. Espaços de Fock	1986
39.3.1	Somas Diretas de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert	1986
39.3.2	Somas Diretas de uma Coleção Contável de Espaços de Hilbert	1987

39.3.3	Produtos Tensoriais de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert	1991
39.3.4	Os Espaços de Fock	1994
39.4	Exercícios Adicionais	1997
<b>40</b>	<b>Operadores Lineares Limitados em Espaços de Banach e de Hilbert</b>	<b>1998</b>
40.1	Operadores Lineares em Espaços Vetoriais Normados	2000
40.1.1	Espaços de Banach de Operadores	2004
40.1.2	O Dual Topológico de um Espaço de Banach	2008
40.1.3	O Teorema de Hahn-Banach e Algumas Conseqüências do Mesmo	2011
40.1.4	O Teorema de Banach-Steinhaus ou Princípio de Limitação Uniforme	2017
40.1.5	O Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado	2018
40.2	Operadores Limitados em Espaços de Hilbert	2025
40.2.1	A Noção de Operador Adjunto em Espaços de Hilbert	2025
40.2.2	Operadores Autoadjuntos, Normais, Unitários, Projetores Ortogonais e Isometrias Parciais	2028
40.3	Rudimentos da Teoria das Álgebras de Banach e Álgebras $C^*$	2036
40.3.1	Álgebras de Banach	2036
40.3.2	Alguns Fatos Estruturais sobre Álgebras $C^*$	2039
40.3.2.1	Álgebras com Involução e a Unidade	2040
40.3.3	A Inversa de Operadores Limitados	2043
40.3.4	O Espectro de Operadores em Álgebras de Banach	2048
40.3.5	O Operador Resolvente e Propriedades Topológicas do Espectro	2049
40.3.5.1	O Teorema da Aplicação Espectral	2052
40.3.6	O Raio Espectral	2053
40.3.7	O Homomorfismo de Gelfand em Álgebras $C^*$	2057
40.3.8	Raizes Quadradas de Operadores em Álgebras de Banach	2060
40.3.9	Elementos Positivos de Álgebras $C^*$	2062
40.3.9.1	Relação de Ordem Decorrente da Positividade em Álgebras $C^*$	2066
40.3.10	Aproximantes da Unidade em Álgebras $C^*$	2067
40.3.10.1	Cosets por Bi-Ideais em Álgebras $C^*$	2070
40.4	Álgebras de von Neumann. Um Mínimo	2074
40.4.0.1	O Teorema do Bicomutante	2076
40.5	Um Pouco sobre Estados e Representações de Álgebras $C^*$	2079
40.5.1	Morfismos Entre Álgebras $C^*$	2079
40.5.2	Representações de Álgebras $C^*$	2081
40.5.2.1	Estados em Álgebras $C^*$ e a Representação GNS	2083
40.5.2.2	Estados Puros, de Mistura e a Irreduzibilidade de Representações GNS	2089
40.5.3	Exemplos em Álgebras de Matrizes. Construção GNS. Estados Puros e a Entropia de von Neumann	2091
40.5.3.1	A Entropia de von Neumann	2095
40.5.3.2	A Construção GNS em $\text{Mat}(C, n)$	2099
40.6	O Espectro de Operadores em Espaços de Banach	2101
40.6.1	O Espectro de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert	2105
40.6.2	Espectro em Espaços de Banach. Alguns Exemplos e Contraexemplos	2107
40.7	O Lema da Raiz Quadrada em Espaços de Hilbert	2111
40.7.1	A Decomposição Polar de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert	2116
40.8	Operadores Compactos em Espaços de Banach e de Hilbert	2118
40.8.1	Alguns Fatos Gerais Sobre o Espectro de Operadores Compactos	2128
40.8.1.1	O Teorema da Alternativa de Fredholm	2129
40.8.2	O Teorema Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos	2135
40.9	O Teorema Espectral para Operadores Limitados autoadjuntos em Espaços de Hilbert	2141

40.9.1	O Cálculo Funcional Contínuo e o Homomorfismo de Gelfand	2141
40.9.2	Generalizando o Cálculo Funcional Contínuo. As Medidas Espectrais	2143
40.9.3	Medidas com Valores em Projeções Ortogonais	2150
40.9.4	Os Projetores Espectrais e o Teorema Espectral	2154
40.10	Operadores Tipo Traço e de Hilbert-Schmidt	2157
40.10.1	Operadores Tipo Traço, ou Traciais	2159
40.10.1.1	O Traço de um Operador Tracial	2163
40.10.2	Operadores de Hilbert-Schmidt	2166
40.10.3	Operadores Traciais e de Hilbert-Schmidt e os Operadores Compactos	2174
40.10.4	Operadores de Hilbert-Schmidt e Operadores Integrais	2175
40.10.5	O Teorema de Lidskii. Traço e Espectro de Operadores Traciais	2179
	<b>APÊNDICES</b>	2180
40.A	Prova do Teorema 40.19	2180
40.B	Um Lema Devido a F. Riesz Sobre Espaços Normados	2182
<b>41</b>	<b>Operadores Lineares Não-Limitados em Espaços de Hilbert</b>	<b>2184</b>
41.1	Classificando Operadores Não-Limitados	2185
41.1.1	Operadores Fechados	2186
41.1.2	Operadores Fecháveis	2188
41.1.3	O Adjunto de um Operador	2190
41.1.3.1	Operadores Simétricos, Autoadjuntos e Essencialmente Autoadjuntos	2195
41.2	Espaços de Deficiência e Extensões Autoadjuntas de Operadores Simétricos	2200
41.2.1	Considerações Preliminares	2200
41.2.2	Classificação de Extensões Simétricas Fechadas de Operadores Simétricos Fechados. Extensões Autoadjuntas	2202
41.3	Bestiário de Exemplos e Contraexemplos	2206
	<b>APÊNDICES</b>	2214
41.A	Prova do Lema 41.6	2214
<b>42</b>	<b>Álgebras de Operadores e a Física Quântica</b>	<b>2215</b>
42.1	Algumas Considerações Gerais Sobre Teorias Físicas	2215
42.2	O Modelo da Mecânica Clássica	2217
42.3	O Quadro da Física Quântica e a Relevância do Teorema Espectral	2219
42.3.1	Abstração da Noção de Medida na Física Quântica. POVM's	2222
42.3.1.1	Medidas com Valores em Operadores Positivos: POVMs	2222
42.4	O Princípio de Incerteza e as Desigualdades de Bell	2222
42.4.1	O Princípio de Incerteza	2222
42.4.2	As Desigualdades de Bell	2227
42.4.2.1	O Problema das Variáveis Escondidas	2227
42.4.3	Obtendo as Desigualdades de Bell	2233
42.4.4	Alguns Resultados Matemáticos sobre as Desigualdades de Bell	2238
42.5	O Paradoxo de Einstein-Podolsky-Rosen	2242
<b>43</b>	<b>O Limite Indutivo de Álgebras</b>	<b>2243</b>
<b>Bibliografia</b>		<b>2251</b>
<b>Índice Remissivo</b>		<b>2264</b>

## Prefácio



intenção básica deste livro é fornecer a estudantes de Física noções matemáticas necessárias a uma melhor compreensão de desenvolvimentos modernos da Física Teórica e da Matemática. Longe vai o tempo em que o conhecimento matemático requerido a um físico teórico restringia-se a certos métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais. Essa visão, porém, infelizmente impregna até o presente a concepção de certas disciplinas ditas de Física-Matemática (ou de Métodos Matemáticos da Física Teórica) e de certos maus livros sobre o tema. Em contraste, noções sobre Estruturas Algébricas, Topologia Geral, Teoria da Medida e da Integração, Geometria Diferencial, Teoria de Grupos, Teoria de Distribuições, Análise Funcional e Álgebras de Operadores são hoje imprescindíveis ao trabalho de um físico teórico.

Este livro cresceu a partir de notas de aula escritas pelo autor em diversas disciplinas de graduação e pós-graduação ministradas no IFUSP. Diversos de seus capítulos podem ser empregados em disciplinas de graduação ou pós-graduação, mas o mesmo foi concebido primordialmente para servir ao auto-estudo de estudantes e docentes. De modo geral, o nível varia entre intermediário e avançado. Também de modo geral, o texto é de leitura auto-suficiente, mas vez por outra algum estudo complementar é sugerido. A melhor maneira de um estudante conduzir-se no estudo de assuntos matemáticos é munindo-se de uma boa coleção de exemplos e contraexemplos de várias situações específicas, patologias, casos especiais etc. Além de servirem de auxílio à memória, exemplos ajudam a melhor entender a motivação de certas definições e a compreender restrições mencionadas em enunciados de teoremas. Dessa forma, procuramos sempre que possível apresentar (muitas vezes em exercícios!) um bom número de exemplos e contraexemplos para as várias situações tratadas.

Este texto, porém, não é substituído à leitura dos bons livros especializados nos diversos assuntos aqui tratados. Parte do material aqui apresentado pode ser encontrado em diversas fontes, citadas na bibliografia (página 2252), mas a apresentação e sua ordem são próprias. Há também neste texto demonstrações do próprio autor de resultados conhecidos que são, por alguma razão, dificilmente encontradas na literatura. Mas como comenta o autor de [185] em seu prefácio, *“qualquer livro-texto deve mais aos livros e notas de outros do que a seu autor nominal”*.

Fazemos notar que este livro está ainda sendo trabalhado e alguns capítulos e seções podem vir a ser alterados, corrigidos, eliminados ou acrescidos de material. Além disso, novos capítulos serão escritos. O material já presente é, porém, útil a todos aqueles que queiram iniciar-se nos assuntos aqui expostos. Versões atualizadas serão colocadas na “rede” (no endereço acima indicado) sempre que possível.

O autor agradece a todos os que apresentarem sugestões. Fabulosas somas em dinheiro são oferecidas a todos aqueles que encontrarem erros no texto. Entre os já aquinhoados encontram-se Prof. Matheus Grasselli, Prof. Alexandre T. Baraviera, Prof. Marcos V. Travaglia, Daniel Augusto Cortez, Djogo F. C. Patrão, Cléber de Mico Muramoto, Profa. Katiúscia Nadyne Cassemiro, Urbano Lopes França Junior, Gustavo Barbagallo de Oliveira, Priscila Vieira Franco Gondeck, Darioelder Jesus Ribeiro, Henrique Scemes Xavier, Prof. Daniel Augusto Turolla Vanzella, Leonardo Fernandes Dias da Motta, Krishnamurti José de Andrade, Prof. Pedro Tavares Paes Lopes, Diego Cortegoso Assêncio, Fleury José de Oliveira Filho, Paulo Henrique Reimberg, Fabíola Diacenco Xavier, Márcio André Prieto Aparício Lopez, Dorival Gonçalves Netto, Célia Santos Jordão Alves, Bruno Lima de Souza, Leandro Saccoletto, João Pedro Jericó de Andrade, Ronaldo da Silva Alves Batista, Carolina Dias Alexiou, Arão Benjamin Garcea, Cláudio Mayrink Verdun, Leonardo Hanao Gabriel, Felipe Contatto, Victor Bernardo Chabu, Bruno Hideki Kimura, Fabrizio Fogaça Bernardi, Alessandro Takeshi Morita Gagliardi, Cedrick Miranda Mello, Thiago Costa Raszeja, Pedro Rangel Caetano, Anderson Seigo Misobuchi, Leandro Silva Pimenta, Alexandre Homrich, Prof. Edécio Gonçalves de Souza, Lissa de Souza Campos e Ricardo Correa da Silva, aos quais somos muito gratos por correções e sugestões. Estas Notas foram escritas durante um intervalo longo de tempo, de sorte que alguns dos seus usuários são hoje colegas professores e fizemos menção a isso na lista acima, quando soubemos. Pedimos desculpas por eventuais omissões.

As Seções 26.A, página 1302, e 28.2.4.1, página 1385, foram originalmente escritas por Daniel Augusto Cortez. A Seção 21.9, página 971, foi originalmente escrita por André M. Timpanaro, Fleury J. Oliveira e Paulo H. Reimberg. A eles dedicamos agradecimentos especiais.

João Carlos Alves Barata

São Paulo, 21 de junho de 2017

Departamento de Física Matemática do IFUSP  
Universidade de São Paulo

## Bons Mots

“*O comportamento de um físico em relação à Matemática é similar a de um ladrão inteligente em relação ao código penal: ele estuda apenas o suficiente para evitar punições*”.

I. M. Gelfand (1913–2009).

“*The greatest enemy of knowledge is not ignorance, it is the illusion of knowledge*”.

Daniel J. Boorstin (1914–2004), também atribuído a Stephen W. Hawking (1942–).

“*A mente não é um vaso a ser repleto, mas uma tocha a ser acesa*”.

Plutarco (46?–120).

“*The public has a distorted view of science, because children are taught in school that science is a collection of firmly established truths. In fact, science is not a collection of truths. It is a continuing exploration of mysteries*”.

Freeman Dyson (1923–), in *How We Know*, The New York Review of Books, March 10, 2011.

“*When a theoretical physicist can not solve a problem he goes for the next more difficult one*”.

Sir Michael Francis Atiyah (1929–).

“*My friend G. H. Hardy<sup>1</sup>, who was professor of pure mathematics, enjoyed this pleasure [in mathematical demonstrations] in a very high degree. He told me once that if he could find a proof that I was going to die in five minutes he would of course be sorry to lose me, but this sorrow would be quite outweighed by pleasure in the proof*”.

Bertrand Russell (1872–1970).

“*Mathematics is not a deductive science – that’s a cliché. When you try to prove a theorem, you don’t just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial and error, experimentation, guesswork*”.

Paul R. Halmos, in [130].

“*The source of all great mathematics is the special case, the concrete example. It is frequent in mathematics that every instance of a concept of seemingly great generality is in essence the same as a small and concrete special case*”.

Paul R. Halmos, in [130].

“*Mathematics is a subarea of Applied Mathematics*”.

Peter Lax (–).

“*Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap*”.

Vladimir I. Arnold (1937–2010). In “On teaching mathematics”. Address at the discussion on teaching of mathematics in Palais de Découverte in Paris on 7 March 1997.

“*In science, self-satisfaction is death. Personal self-satisfaction is the death of the scientist. Collective self-satisfaction is the death of the research. It is restlessness, anxiety, dissatisfaction, agony of mind that nourish science*”.

Jacques Lucien Monod (1910–1976), in *New Scientist*, 1976.

“*Não existe nenhuma categoria da Ciência à qual se possa dar o nome de Ciência Aplicada. O que existe são a Ciência e as aplicações da Ciência, intimamente ligadas, como frutos à árvore que os gerou*”.

<sup>1</sup>Godfrey Harold Hardy (1877–1947).

Louis Pasteur (1822–1895), in “Pourquoi la France n’a pas trouvé d’hommes supérieurs au moment du péril”, *Revue Scientifique* (Paris, 1871).

“*Disse Kant<sup>2</sup>: ‘Eu afirmo que em cada Ciência Natural específica pode-se atingir somente tanto Conhecimento verdadeiro quanto nela houver de Matemática’. De fato, somente dominamos uma teoria das ciências naturais quando expomos seu núcleo matemático e o desvendamos completamente*”.

David Hilbert (1862–1943) em “Naturerkenntnis und Logik”, palestra apresentada em setembro de 1930, em Königsberg, em Congresso da Associação Alemã de Cientistas Naturais e Médicos.

“*Não podemos nos permitir acreditar naqueles que em nossos dias, com cenho filosófico e em tom de superiodidade, profetizam a decadência cultural e apologizam o Ignorabimus. Para nós não existe o Ignorabimus e, em minha opinião, também não para as Ciências Naturais. Em lugar do tolo Ignorabimus nosso lema é ‘Nós devemos saber, nós iremos saber’*”.

David Hilbert. *ibidem*.

“*A geometry implies the heterogeneity of locus, namely that there is a locus of the Other. Regarding this locus of the Other, of one sex as Other, as absolute Other, what do the most recent developments in topology allow us to posit? I will posit here the term compactness. Nothing is more compact than a fault, assuming that the intersection of everything that is enclosed therein is accepted as existing over an infinite number of sets, the result being that the intersection implies this infinite number. That is the very definition of compactness*”.

Jacques Lacan (1901–1981), em *Le Séminaire Jacques Lacan*, Livre XX: *Encore*, 1972–1973. Texto organizado por Jacques-Alain Miller. Paris: Éditions du Seuil. Traduzido e citado por Alan Sokal e Paul Bricmont in *Intellectual Impostures*.

Para a definição de compacidade, vide Seção 34.3, página 1577.

\* \* \* \* \*

“*Unprovided with original learning, unformed in the habits of thinking, unskilled in the arts of composition, I resolved to write a book*”.

Edward Gibbon (1737–1794).

“*Talvez eu não tenha tido êxito em fazer as coisas difíceis tornarem-se fáceis, mas pelo menos eu nunca fiz um assunto fácil tornar-se difícil*”.

F. G. Tricomi (1897–1978).

“*... E costumava dizer que nenhum livro é tão ruim a ponto de nada conter de valor...*”.

Plínio, o Novo (61–114), a respeito de seu tio, Plínio, o Velho (23–79).

“*Would I had phrases that are not known, utterances that are strange, in new language that has not been used, free from repetition, not an utterance that has grown stale, which men of old have spoken*”.

Khakheperresenb (ci. 1900 AC), escriba egípcio. Citado em “The Burden of the Past and the English Poet” de Walter Jackson Bate.

“*Tudo que deveria ter sido dito já o foi, mas como ninguém ouvia, tudo tem de ser dito novamente*”.

André Paul Guillaume Gide (1869–1951).

“*Uma obra nunca é terminada, ela é apenas abandonada*”.

Atribuído a Paul Valéry (1871–1945).

<sup>2</sup>Immanuel Kant (1724–1804).

## Como Ler Este Livro

“Reading made Don Quixote a gentleman. Believing what he read made him mad”.

George Bernard Shaw (1856–1950).

O leitor deste livro não deve possuir o temor de que o mesmo deva (nem a expectativa de que o mesmo possa) ser lido linearmente, ou seja, na sequência numérica crescente dos capítulos e seções. Ele não foi concebido dessa forma e tal concepção não seria exequível devido à variedade de assuntos, às diferenças de nível de abordagem e à complexidade das conexões entre os diferentes temas. O Conhecimento não é um conjunto totalmente ordenado pela relação de complexidade conceitual ou pela relação de motivação (para a definição da noção de ordem total em conjuntos, vide página 47).

Os diversos capítulos não foram escritos em ordem crescente de complexidade. Por vezes, a motivação para um determinado tema é apresentada em um capítulo anterior, mas por vezes essa motivação surge em um capítulo posterior. Nos capítulos sobre equações diferenciais, por exemplo, a discussão de aplicações em Física é postergada para o Capítulo 21, página 901, e o leitor interessado na motivação para certos tratamentos pode sem perdas consultar esse capítulo antes ou durante o estudo de capítulos que lhe antecedem.

Um problema semelhante ocorre com temas ligados à Topologia e à Análise. Os capítulos dedicados a esses assuntos servem a capítulos que lhes sucedem, mas também, em parte, a capítulos que lhes antecedem. Cabe ao leitor perceber suas necessidades formativas, avançando ou retrocedendo na leitura conforme lhe aprouver. A consulta ao Índice Remissivo (página 2264) ou à lista de Capítulos e Seções que compõem o texto (página 3) deve ser de valia para tal.

## Notação e Advertências

Para facilitar a consulta e a leitura, listamos aqui sem muitos comentários um pouco da notação que empregaremos nestas Notas.

- Se  $z$  é um número complexo denotaremos seu complexo conjugado por  $\bar{z}$ . A notação  $z^*$  (mais comum em textos de Física) pode ocorrer mais raramente.
- O símbolo  $A := B$  ou  $B =: A$  denota que  $A$  é definido pela expressão  $B$ . O símbolo  $A \equiv B$  indica que  $A$  e  $B$  são duas notações distintas para o mesmo objeto.
- Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Se  $A$  é um subconjunto de  $B$ , denotamos esse fato por  $A \subset B$  ou por  $B \supset A$ . Por  $A \subsetneq B$  ou  $B \supsetneq A$  denotamos o fato de  $A$  ser um subconjunto próprio de  $B$ , ou seja,  $A \subset B$ , mas  $A \neq B$ .

- Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  são vetores reais com  $n$  componentes (ou seja, elementos de  $\mathbb{R}^n$ ) então definimos

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Trata-se do produto escalar usual em  $\mathbb{R}^n$ .

- Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  são vetores complexos com  $n$  componentes (ou seja, elementos de  $\mathbb{C}^n$ ) então definimos

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} := \overline{x_1} y_1 + \dots + \overline{x_n} y_n.$$

Trata-se do produto escalar usual em  $\mathbb{C}^n$ .

- Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  são vetores complexos com  $n$  componentes (ou seja, elementos de  $\mathbb{C}^n$ ) então definimos

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Trata-se de uma forma bilinear em  $\mathbb{C}^n$ .

- $\text{Mat}(\mathbb{R}, m, n)$  ou  $\text{Mat}(m, n, \mathbb{R})$  designa o conjunto de todas as matrizes reais  $m \times n$  ( $m$  linhas e  $n$  colunas). Analogamente,  $\text{Mat}(\mathbb{C}, m, n)$  ou  $\text{Mat}(m, n, \mathbb{C})$  designa o conjunto de todas as matrizes complexas  $m \times n$ . O conjunto de todas as matrizes quadradas  $n \times n$  com entradas reais (complexas) será denotado simplesmente por  $\text{Mat}(\mathbb{R}, n)$  (por  $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ ).
- Se  $A$  é um elemento de  $\text{Mat}(\mathbb{R}, n)$  ou de  $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ , então  $A^T$  designa a matriz transposta de  $A$ , ou seja, a matriz cujos elementos de matriz  $ij$  são  $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ .
- Se  $A$  é um operador linear em um espaço vetorial complexo (com um certo produto escalar), seu adjunto é denotado por  $A^*$ . Em textos de Física é mais comum denotá-lo por  $A^\dagger$ , mas não usaremos isso aqui. Assim, se  $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ , então  $A^*$  será a adjunta de  $A$  (em relação ao produto escalar usual, acima). O elemento de matriz  $ij$  de  $A^*$  será  $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$ .
- Denotaremos o operador identidade agindo em um espaço vetorial (a matriz identidade, agindo em um espaço vetorial de dimensão finita) pelo símbolo  $\mathbf{1}$ . Esse símbolo também representará a unidade de uma álgebra.
- Designaremos um produto escalar entre dois vetores  $u$  e  $v$  sempre por  $\langle u, v \rangle$  e nunca por  $(u, v)$ , para não causar confusão com a notação para par ordenado. Outra notação possível é aquela empregada frequentemente em textos de Mecânica Quântica:  $\langle u | v \rangle$ , mas faremos raramente uso da mesma.
- Ainda sobre produtos escalares, seguiremos sempre a convenção dos textos de Física: um produto escalar em um espaço vetorial sobre os complexos é linear em relação ao segundo argumento e antilinear em relação ao primeiro. Assim, se  $\alpha$  e  $\beta$  são números complexos, teremos  $\langle \alpha u, \beta v \rangle = \overline{\alpha} \beta \langle u, v \rangle$ . Textos de Matemática adotam por vezes a convenção oposta (ou mesmo ambas!).

- Sobre o emprego das palavras *função, aplicação, mapeamento, mapa, funcional, operador, operação, produto e forma*, que por vezes causam perplexidade em estudantes, remetemos ao comentário à página 34.
- Dado um conjunto  $X \neq \emptyset$ , denota-se por  $\mathbb{P}(X)$  a coleção de todos os subconjuntos de  $X$ .  $\mathbb{P}(X)$  é denominado o *conjunto das partes de  $X$* .
- A topologia usual da reta real  $\mathbb{R}$  será denotada aqui por  $\tau_{\mathbb{R}}$ .
- A  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}$  será (quase sempre) denotada aqui por  $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$ .
- A  $\sigma$ -álgebra dos subconjuntos de  $\mathbb{R}$  mensuráveis por Lebesgue será (quase sempre) denotada aqui por  $\mathcal{M}_{\mu_L}$ .
- Por  $\mathbb{N}$  denotamos o conjunto dos números naturais:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Por  $\mathbb{N}_0$  denotamos o conjunto dos números naturais, incluindo o zero:  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . O leitor deve ser advertido, porém, que essa convenção não é universal. O padrão ISO 31-11 (dedicado a sinais e símbolos matemáticos) recomenda a convenção  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  e  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ . O leitor deve ter cuidado, portanto, ao comparar textos diferentes.
- Para  $x \in \mathbb{R}$ , o símbolo  $\lfloor x \rfloor$  designa o maior inteiro menor ou igual a  $x$ . O símbolo  $\lceil x \rceil$  designa o menor inteiro maior ou igual a  $x$ .

Em particular, para  $n \in \mathbb{Z}$  valem

$$\lfloor n/2 \rfloor = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ (n-1)/2, & n \text{ ímpar}, \end{cases} \quad \lceil n/2 \rceil = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ (n+1)/2, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

- O símbolo  $\square$  indica o fim de um enunciado. O símbolo  $\blacksquare$  indica o fim de uma demonstração. O símbolo  $\spadesuit$  indica o fim do enunciado de um exercício. O símbolo  $\square$  indica o fim do enunciado de um exemplo. O símbolo  $\clubsuit$  indica o fim de uma observação, nota ou comentário. O símbolo  $\spadesuit$  indica o fim de uma definição.
- $\mathcal{B}(X)$  designa o conjunto de operadores limitados agindo em um espaço de Banach  $X$ .  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  designa o conjunto de operadores limitados agindo em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ .
- $\mathcal{C}(L)$  designa o conjunto de todas as funções contínuas (reais ou complexas, dependendo do caso), definidas em  $L$  (na topologia que se estiver considerando em  $L$ ).
- $\mathfrak{B}(L)$  designa a coleção de todos os conjuntos Borelianos de  $L$  (em relação à topologia que se estiver considerando em  $L$ ).  $\mathcal{B}_l(L)$  designa a coleção de todas as funções Borelianas (reais ou complexas, dependendo do caso), definidas em  $L$ .
- O domínio de um operador  $T$  (agindo em um espaço de Banach ou de Hilbert) será denotado por  $D(T)$  ou por  $\text{Dom}(T)$ . A imagem (“range”) de  $T$  será denotada por  $R(T)$  ou por  $\text{Ran}(T)$  ou, mais raramente, por  $\text{Im}(T)$ , mas essa última notação pode causar confusão com a da parte imaginária de um número complexo ou mesmo com a da parte imaginária de um operador agindo em um espaço de Hilbert:  $\text{Im}(T) := \frac{1}{2i}(T - T^*)$ .
- A noção de *propriedade válida quase em toda parte* é definida na página 1432.

## • Intervalos

Ainda não introduzimos os números reais nem a relação de ordem entre eles mas, como essas noções são conhecidas, vamos colocar aqui uma palavra sobre a nomenclatura usada para descrever intervalos da reta real. Para  $a < b \in \mathbb{R}$  o conjunto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a < x < b\}$$

é dito ser um intervalo aberto. Para  $a \leq b \in \mathbb{R}$  o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a \leq x \leq b\}$$

é dito ser um intervalo fechado. Para  $a < b \in \mathbb{R}$  os conjuntos

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a \leq x < b\}$$

e

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a < x \leq b\}$$

são ditos ser intervalos semiabertos (ou semifechados).

É importante dizer que a nomenclatura “aberto” ou “fechado” acima é usada independentemente da topologia usada em  $\mathbb{R}$  (a noção de topologia será introduzida adiante).

## • Delta de Kronecker

De  $i$  e  $j$  pertencem a um conjunto contável  $C$ , definimos o chamado *delta de Kronecker* por

$$\delta_{ij} \equiv \delta^{ij} \equiv \delta_i^j \equiv \delta_j^i := \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

para todos  $i, j \in C$ . As diferentes notações  $\delta_{ij}$ ,  $\delta^{ij}$ ,  $\delta_i^j$  e  $\delta_j^i$  ocorrem, por exemplo, na Geometria Diferencial e na Teoria da Relatividade.

## • A esfera unitária

Para  $n \in \mathbb{N}_0$ , denotaremos por  $\mathbb{S}^n$  a chamada *esfera unitária* em  $\mathbb{R}^{n+1}$ : o lugar geométrico de todos os pontos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  situados a uma distância Euclidiana igual a 1 da origem:

$$\mathbb{S}^n := \left\{ (y^1, \dots, y^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sqrt{(y^1)^2 + \dots + (y^{n+1})^2} = 1 \right\}.$$

Note-se que  $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ .

## • Classes $C^k$

Por  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  denotaremos a coleção de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que sejam contínuas. Por  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$  denotaremos a coleção de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que sejam contínuas e de suporte compacto.

Denotamos por  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  a coleção de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas, diferenciáveis e com derivada contínua. Tais funções são ditas *funções continuamente diferenciáveis*, ou de *classe  $C^1$* . Denotamos por  $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ ,  $k \in \mathbb{N}$  a coleção de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas e cujas  $k$  primeiras derivadas  $f'$ ,  $f''$ ,  $\dots$ ,  $f^{(k)}$  existam e sejam igualmente contínuas. Tais funções são ditas ser de *classe  $C^k$* . Por  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  denotamos as funções infinitamente diferenciáveis (as quais serão, ocasionalmente, denominadas *funções suaves*). Por  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$  denotaremos a coleção de todas as funções contínuas e de suporte compacto. Por  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$  denotaremos a coleção de todas as funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto.

As diversas notações de acima estendem-se de forma natural a funções definidas em subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , como intervalos abertos ou fechados, compactos ou não. Aqui, o estudante deve tomar certos cuidados. Por exemplo,  $\mathcal{C}((0, 1))$  contém, entre outras, funções contínuas que divergem em 0 e/ou em 1, mas  $\mathcal{C}([0, 1])$  só contém funções limitadas.



**Parte I**  
**Capítulos Introdutórios**