Capítulo 4
Recordações de Cálculo Vetorial em Três Dimensões

Sumário

4.1 Alguns Operadores Diferenciais de Interesse **303**
4.2 Teoremas Clássicos sobre Integrais de Volume e de Superfície **307**
4.3 O Laplaciano em Sistemas de Coordenadas Gerais **309**
4.4 Coordenadas Esféricas em n Dimensões **311**

Neste capítulo listamos, em parte na forma de exercícios, alguns resultados importantes sobre cálculo vetorial em três dimensões. As identidades aqui listadas são úteis em diversas áreas da Física, como no Eletromagnetismo e na Mecânica dos Fluidos. Todos os resultados que aqui apresentamos podem ser formulados com mais elegância e generalizados a mais dimensões na teoria das *formas diferenciais*. Vide e.g., [375].

4.1 Alguns Operadores Diferenciais de Interesse

• **Os símbolos de Krönecker e de Levi-Civita em três dimensões**

O chamado *símbolo de Krönecker*[1] (ou *delta de Krönecker*) em três dimensões, denotado por δ_{ij}, com $i,\ j \in \{1,\ 2,\ 3\}$, é definido por

$$\delta_{ij} \ := \ \begin{cases} 1, & \text{se } i = j\ , \\ 0, & \text{se } i \neq j\ . \end{cases} \tag{4.1}$$

O chamado *símbolo de Levi-Civita*[2] (ou *tensor de Levi-Civita*) em três dimensões, denotado por ε_{ijk}, com $i,\ j,\ k \in \{1,\ 2,\ 3\}$, é definido por

$$\varepsilon_{ijk} \ := \ \begin{cases} 1, & \text{se } (i,\ j,\ k) \ = \ (1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1) \text{ ou } (3,\ 1,\ 2)\ , \\ -1, & \text{se } (i,\ j,\ k) \ = \ (1,\ 3,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1) \text{ ou } (2,\ 1,\ 3)\ , \\ 0, & \text{de outra forma.} \end{cases} \tag{4.2}$$

A definição geral de símbolo de Levi-Civita é apresentada no estudo do Grupo de Permutações na Seção 21.2.1.1, página 1096. Suas generalizações para mais dimensões são empregados na Geometria Diferencial, no estudo das chamadas *formas diferenciais*. Naquele contexto, dedicamos a eles o Apêndice 35.A, página 1876.

Note as seguintes propriedades: *1.* (*simetria*) o símbolo de Krönecker não se altera se os índices forem permutados, ou seja, $\delta_{ij} = \delta_{ji}$; *2.* ε_{ijk} é nulo se e somente se pelo menos dois dos índices são iguais; *3.* (*antissimetria*) ε_{ijk} troca de sinal se quaisquer dois dos índices forem permutados; *4.* (*ciclicidade*) ε_{ijk} não se altera se os índices forem permutados ciclicamente, ou seja, $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$.

No que segue apresentamos algumas identidades úteis envolvendo o símbolo de Krönecker e o símbolo de Levi-Civita.

E. 4.1 *Exercício*. Este Exercício contém uma série de identidades muito empregadas.

a. Mostre que se M é uma matriz 3×3, valem

$$\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} M_{jk} \ = \ M_{ik} \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{3} M_{ij} \delta_{jk} \ = \ M_{ik}\ . \quad \text{Em particular, vale} \quad \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} \delta_{jk} \ = \ \delta_{ik}\ . \tag{4.3}$$

[1] Leopold Krönecker (1823–1891).
[2] Tullio Levi-Civita (1873–1941).

b. Mostre que, para todos $i,\ j$ e k, vale

$$\varepsilon_{ijk} \ = \ \delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k3} + \delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k1} + \delta_{i3}\delta_{j1}\delta_{k2} - \delta_{i1}\delta_{j3}\delta_{k2} - \delta_{i3}\delta_{j2}\delta_{k1} - \delta_{i2}\delta_{j1}\delta_{k3}\ . \tag{4.4}$$

Sugestão para o item **b**. Siga os seguintes passos: *1.* Mostre que o lado direito não se altera por permutações cíclicas dos índices $i,\ j$ e k. *2.* Mostre que o lado direito anula-se se pelo menos dois dos índices são iguais. *3.* Mostre que o lado direito vale 1 quando $(i,\ j,\ k) = (1,\ 2,\ 3)$ e -1 quando $(i,\ j,\ k) = (1,\ 3,\ 2)$. *4.* Conclua dos passos anteriores que (4.4) é verdadeira comparando com a definição (4.2).

c. Mostre que vale a identidade

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} \ = \ \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}\ , \tag{4.5}$$

para todos $i,\ j$ e k e para todos $l,\ m$ e n, ou seja,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} \ = \ \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix}\ . \tag{4.6}$$

Sugestão para o item **c**. Siga os seguintes passos: *1.* Constate que o lado direito de (4.5) reduz-se a (4.4) quando $(l,\ m,\ n) = (1,\ 2,\ 3)$. *2.* Constate que o lado direito de (4.5) não se altera por permutações cíclicas de $(l,\ m,\ n)$. Constate que o lado direito de (4.5) é nulo se e somente se pelo menos dois dos índices $(l,\ m,\ n)$ são iguais. *3.* Constate que o lado direito de (4.5) troca de sinal se quaisquer dois dos índices $(l,\ m,\ n)$ são permutados. *4.* Conclua dos passos anteriores a validade de (4.5).

A identidade (4.5) é muito útil e implica as identidades (4.7) e (4.8), abaixo, cuja utilidade poderá ser constatada nos exercícios posteriores.

d. Mostre que vale a identidade

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} \ = \ \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\ . \tag{4.7}$$

Sugestão: use (4.5).

e. Mostre que vale a identidade

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} \ = \ 2\delta_{il}\ . \tag{4.8}$$

Sugestão: use (4.7).

f. Mostre que vale a identidade

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} \ = \ 6\ . \tag{4.9}$$

Sugestão: use (4.8).

g. Mostre que vale a identidade

$$\sum_{k=1}^{3} \Big(\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klm} + \varepsilon_{imk}\,\varepsilon_{kjl} + \varepsilon_{ilk}\,\varepsilon_{kmj} \Big) \ = \ 0\ . \tag{4.10}$$

Sugestão: use (4.7).

A identidade (4.10) é denominada *identidade de Jacobi*[3] *para os símbolos de Levi-Civita*. ✠

E. 4.2 *Exercício*. Se S é uma matriz 3×3 simétrica, ou seja, satisfaz $S_{ij} = S_{ji}$ para todos $i,\ j \in \{1,\ 2,\ 3\}$, mostre que

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} S_{jk} \ = \ 0$$

para todo $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$. *Sugestão:* convença-se que $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} S_{jk} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ikj} S_{kj}$ e em seguida use a simetria de S e a antissimetria do símbolo de Levi-Civita. ✠

[3] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851).

Na Seção 35.A, página 1876, estudaremos generalizações dos símbolos de Levi-Civita e das propriedades acima para além de três dimensões.

• O produto escalar e o produto vetorial

Sejam $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ três versores ortogonais dois a dois no espaço tridimensional ($\mathbb{R}^3$) tais que a tripla $(\hat{x},\ \hat{y},\ \hat{z})$ seja positivamente orientada. Cada vetor $\vec{v}$ do espaço tridimensional pode ser escrito na forma $\vec{v} = v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z}$, os números v_i, $i = 1,\ 2,\ 3$, sendo as componentes de $\vec{v}$ na base $\{\hat{x},\ \hat{y},\ \hat{z}\}$.

O chamado *produto escalar* de dois vetores quaisquer $\vec{a}$ e $\vec{b}$, denotado por $\vec{a}\cdot\vec{b}$, é definido por

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \ := \ \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \ = \ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j \delta_{ij} \ . \tag{4.11}$$

O chamado *produto vetorial* de dois vetores quaisquer $\vec{a}$ e $\vec{b}$, denotado por $\vec{a}\times\vec{b}$, é definido como sendo o vetor cuja i-ésima componente na base $\{\hat{x},\ \hat{y},\ \hat{z}\}$, $(\vec{a}\times\vec{b})_i$, é dada por

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i \ := \ \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k \ , \qquad i \in \{1,\ 2,\ 3\} \ . \tag{4.12}$$

É importante notar as propriedades $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ e $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$, válidas para quaisquer vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

E. 4.3 *Exercício*. Este Exercício contém algumas identidades úteis sobre o produto vetorial.

a. Demonstre as igualdades

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) \ = \ \vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) \ = \ \vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) \ , \tag{4.13}$$

válidas para quaisquer vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$. *Sugestão:* use a ciclicidade do símbolo de Levi-Civita.

b. Demonstre a identidade

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) \ = \ \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c} \ , \tag{4.14}$$

válida para quaisquer vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$. *Sugestão:* use (4.7).

c. Demonstre a *identidade de Jacobi*[4] *para o produto vetorial*:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) + \vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) + \vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) \ = \ \vec{0} \ , \tag{4.15}$$

válida para quaisquer vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$. *Sugestão:* use (4.14) ou (4.7), ou use diretamente (4.10).

d. Demonstre a identidade

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right) \ = \ \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right) - \left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right) \ , \tag{4.16}$$

válida para quaisquer vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$. *Sugestão:* use (4.7).

Mostre que $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{0}$ se e somente se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ forem linearmente dependentes. ✠

• Gradiente, divergente, rotacional e Laplaciano

Com as convenções acima denotamos o vetor posição no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ em coordenadas Cartesianas[5] por $\vec{x} = x_1\hat{x} + x_2\hat{y} + x_3\hat{z}$. Para um campo vetorial $\vec{v} = v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z}$, onde as coordenadas $v_i \equiv v_i(x_1,\ x_2,\ x_3)$ são funções diferenciáveis das coordenadas Cartesianas x_1, x_2 e x_2, definimos o *divergente* de $\vec{v}$, denotado por $\nabla\cdot\vec{v}$, por

$$\nabla\cdot\vec{v} \ := \ \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \ = \ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\delta_{ij} \ .$$

[4] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851).
[5] René Descartes (1596–1650).

Definimos o *rotacional* de $\vec{v}$, denotado por $\vec{\nabla}\times\vec{v}$, como sendo o campo vetorial cuja i-ésima componente é dada por

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)_i \ := \ \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}v_k \ . \tag{4.17}$$

Para um campo escalar $\phi \equiv \phi(x_1,\ x_2,\ x_3)$, suposto uma função diferenciável das coordenadas Cartesianas x_1, x_2 e x_2, definimos o *gradiente* de ϕ, denotado por $\vec{\nabla}\phi$, como sendo o campo vetorial dado por

$$\vec{\nabla}\phi \ := \ \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\hat{z} \ .$$

Para um campo vetorial $\vec{v} = v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z}$ denotamos por $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}$ o operador diferencial

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla} \ := \ \sum_{i=1}^{3} v_i\frac{\partial}{\partial x_i} \ .$$

Assim, se ϕ é um campo escalar, $\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\phi$ coincide com o produto escalar de $\vec{v}$ com o gradiente de ϕ:

$$\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\phi\right) \ = \ \sum_{i=1}^{3} v_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \ = \ \vec{v}\cdot\left(\vec{\nabla}\phi\right) \ ,$$

enquanto que se $\vec{u}$ é um campo vetorial, $\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}$ denota o campo vetorial cuja j-ésima componente é

$$\left(\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}\right)_j \ := \ \sum_{i=1}^{3} v_i\frac{\partial}{\partial x_i}u_j \ ,$$

ou seja,

$$\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u} \ := \ \sum_{i=1}^{3} v_i\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\hat{x} + \sum_{i=1}^{3} v_i\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\hat{y} + \sum_{i=1}^{3} v_i\frac{\partial u_3}{\partial x_i}\hat{z} \ .$$

E. 4.4 *Exercício*. Demonstre as seguintes identidades:

$$\vec{\nabla}(\phi\psi) \ = \ \phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi \ , \tag{4.18}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) \ = \ \vec{a}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{b}\right) + \vec{b}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) + \left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{b} + \left(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} \ , \tag{4.19}$$

$$\nabla\cdot(\phi\vec{a}) \ = \ \phi\nabla\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\phi \ , \tag{4.20}$$

$$\vec{\nabla}\times(\phi\vec{a}) \ = \ \phi\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) + \left(\vec{\nabla}\phi\right)\times\vec{a} \ , \tag{4.21}$$

$$\nabla\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) \ = \ \vec{b}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) - \vec{a}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{b}\right) \ , \tag{4.22}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) \ = \ \left(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} - \left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{b} + \left(\nabla\cdot\vec{b}\right)\vec{a} - \left(\nabla\cdot\vec{a}\right)\vec{b} \ . \tag{4.23}$$

Acima ϕ e ψ são campos escalares e $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são campos vetoriais, todos diferenciáveis.

Sugestões: use a regra de Leibniz. Para (4.19) calcule $\vec{a}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{b}\right) + \vec{b}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)$ usando (4.7). Para (4.23), use (4.7). ✠

E. 4.5 *Exercício*. Mostre que se $\vec{a}$ é um campo vetorial duas vezes diferenciável vale

$$\nabla\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) \ = \ 0 \ . \tag{4.24}$$

Mostre que se ϕ é um campo escalar duas vezes diferenciável vale

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\phi\right) \ = \ 0 \ . \tag{4.25}$$

✠

Se ϕ é um campo escalar duas vezes diferenciável, o chamado *Laplaciano*[6] de ϕ, denotado por $\Delta\phi$, por $\Delta^2\phi$ ou por $\nabla^2\phi$, é definido como sendo o campo escalar dado por

$$\Delta\phi \;:=\; \nabla\cdot\left(\vec{\nabla}\phi\right) \;. \tag{4.26}$$

Assim, tem-se em coordenadas Cartesianas

$$\Delta\phi \;=\; \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}\;. \tag{4.27}$$

Se $\vec{v} = v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z}$ é um campo vetorial duas vezes diferenciável, define-se Laplaciano de $\vec{v}$, denotado por $\Delta\vec{v}$, como sendo o campo vetorial cuja i-ésima componente em coordenadas Cartesianas é

$$\left(\Delta\vec{v}\right)_i \;:=\; \Delta v_i \;=\; \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}\;.$$

Assim,

$$\Delta\vec{v} \;=\; \left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_j^2}\right)\hat{x} + \left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_j^2}\right)\hat{y} + \left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_j^2}\right)\hat{z}\;.$$

E. 4.6 *Exercício*. **a.** Mostre que se ϕ e ψ são dois campos escalares duas vezes diferenciáveis, vale

$$\Delta(\phi\psi) \;=\; (\Delta\phi)\psi + 2\left(\vec{\nabla}\phi\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\psi\right) + \phi(\Delta\psi)\;. \tag{4.28}$$

Sugestão: use a definição (4.26) e as identidades (4.18) e (4.20) ou use (4.27) e a regra de Leibniz.

b. Mostre que se $\vec{a}$ é um campo vetorial duas vezes diferenciável, vale

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) \;=\; \vec{\nabla}\left(\nabla\cdot\vec{a}\right) - \Delta\vec{a}\;. \tag{4.29}$$

Sugestão: use (4.7). ✠

4.2 Teoremas Clássicos sobre Integrais de Volume e de Superfície

No que segue, listamos alguns teoremas clássicos importantes envolvendo integrais de volume e de superfície de campos em $\mathbb{R}^3$.

Teorema 4.1 (Teorema de Gauss) [7] *Se $\vec{v}$ é um campo vetorial diferenciável definido em um volume compacto e conexo $V\subset\mathbb{R}^3$, limitado por uma superfície fechada, retificável e orientável ∂V, então*

$$\int_V \nabla\cdot\vec{v}\;d^3x \;=\; \oiint_{\partial V}\vec{v}\cdot d\vec{\sigma}\;,$$

onde $d\vec{\sigma}(\vec{x}) := \hat{n}(\vec{x})d\sigma(\vec{x})$, $\hat{n}(\vec{x})$ sendo um vetor unitário normal a ∂V em $\vec{x}\in\partial V$, direcionado no sentido do exterior de V e $d\sigma(\vec{x})$ sendo a medida de área de ∂V. □

A demonstração desse resultado clássico pode ser encontrada em qualquer bom livro de Cálculo de funções de várias variáveis.

[6] Pierre-Simon Laplace (1749–1827).
[7] Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855).

Teorema 4.2 (Teorema de Stokes) [8] *Se $\vec{v}$ é um campo vetorial diferenciável definido em uma superfície compacta, conexa, orientada e retificável $S\subset\mathbb{R}^3$, limitada por uma curva fechada, retificável e orientável ∂S, então*

$$\int_S\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)\cdot d\vec{\sigma} \;=\; \oint_{\partial S}\vec{v}\cdot d\vec{\ell}\;,$$

onde $d\vec{\sigma}(\vec{x}) := \hat{n}(\vec{x})d\sigma(\vec{x})$, $\hat{n}(\vec{x})$ sendo um vetor unitário normal a S em $\vec{x}\in S$, direcionado no sentido positivo de S e $d\vec{\ell}(\vec{x}) = \hat{t}(\vec{x})d\ell$, $\hat{t}(\vec{x})$ sendo um vetor tangente a ∂S em $\vec{x}\in\partial S$ orientado no sentido positivo de ∂S e $d\ell$ é a medida de comprimento de ∂S. □

A demonstração desse resultado clássico pode ser encontrada em qualquer bom livro de Cálculo de funções de várias variáveis.

Teorema 4.3 (Identidades de Green) [9] *Sejam f e g funções definidas em um volume compacto e conexo $V\subset\mathbb{R}^3$, limitado por uma superfície fechada, retificável e orientável ∂V, ambas as funções sendo duas vezes diferenciáveis no interior V^0 de V e diferenciáveis em V. Então, valem as seguintes identidades:*

Primeira identidade de Green*:*

$$\int_V\left[f\Delta g + \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\left(\vec{\nabla}g\right)\right]\;d^3x \;=\; \oiint_{\partial V} f\vec{\nabla}g\cdot d\vec{\sigma}\;. \tag{4.30}$$

Segunda identidade de Green*:*

$$\int_V\left(f\Delta g - g\Delta f\right)\;d^3x \;=\; \oiint_{\partial V}\left(f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f\right)\cdot d\vec{\sigma}\;. \tag{4.31}$$

Terceira identidade de Green*:*

$$\int_V \Delta f\;d^3x \;=\; \oiint_{\partial V}\vec{\nabla}f\cdot d\vec{\sigma}\;. \tag{4.32}$$

□

Prova. A expressão (4.30) segue imediatamente do Teorema de Gauss, Teorema 4.1, página 307, para $\vec{v} = f\vec{\nabla}g$, pois $\nabla\cdot\left(f\vec{\nabla}g\right) = f\Delta g + \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\left(\vec{\nabla}g\right)$, como facilmente se constata por (4.20). A expressão (4.31) segue imediatamente do Teorema de Gauss para $\vec{v} = f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f$, pois $\nabla\cdot\left(f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f\right) = f\Delta g - g\Delta f$, como facilmente se constata por (4.20). A expressão (4.32) segue imediatamente do Teorema de Gauss para $\vec{v} = \vec{\nabla}f$. ■

As identidades de Green são amplamente empregadas no estudo das equações de Poisson e Laplace.

Teorema 4.4 (Teorema do gradiente) *Se ϕ é um campo escalar diferenciável definido em um volume compacto e conexo $V\subset\mathbb{R}^3$, limitado por uma superfície fechada, retificável e orientável ∂V, então*

$$\int_V\vec{\nabla}\phi(\vec{x})\;d^3x \;=\; \oiint_{\partial V}\phi(\vec{x})\;d\vec{\sigma}\;,$$

onde $d\vec{\sigma}(\vec{x}) := \hat{n}(\vec{x})d\sigma(\vec{x})$, $\hat{n}(\vec{x})$ sendo um vetor unitário normal a ∂V em $\vec{x}\in\partial V$, direcionado no sentido do exterior de V e $d\sigma(\vec{x})$ sendo a medida de área de ∂V. □

Prova. Basta aplicar o Teorema de Gauss para o campo $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\alpha}\,\phi(\vec{x})$, $\vec{\alpha}$ sendo um vetor constante arbitrário. ■

[8] George Gabriel Stokes (1819–1903).
[9] George Green (1793–1841).

Teorema 4.5 (Teorema do rotacional) *Se $\vec{v}$ é um campo escalar diferenciável definido em um volume compacto e conexo $V \subset \mathbb{R}^3$, limitado por uma superfície fechada, retificável e orientável ∂V, então*

$$\int_V \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right)(\vec{x})\, d^3x \;=\; \oiint_{\partial V} \vec{v}(\vec{x}) \times d\vec{\sigma} \;=\; \oiint_{\partial V} \left(\vec{v}(\vec{x}) \times \hat{n}(\vec{x})\right) d\sigma \;,$$

onde $d\vec{\sigma}(\vec{x}) := \hat{n}(\vec{x}) d\sigma(\vec{x})$, $\hat{n}(\vec{x})$ sendo um vetor unitário normal a ∂V em $\vec{x} \in \partial V$, direcionado no sentido do exterior de V e $d\sigma(\vec{x})$ sendo a medida de área de ∂V. □

Prova. A demonstração pode ser feita componente a componente. Para a componente 1, definimos o campo vetorial $\vec{w} = 0\hat{x} + v_3\hat{y} - v_2\hat{z}$. Com isso, é fácil constatar que $\left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right)_1 = \nabla \cdot \vec{w}$. Assim, usando o Teorema de Gauss, Teorema 4.1, página 307, temos que

$$\int_V \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right)_1 (\vec{x})\, d^3x \;=\; \int_V (\nabla \cdot \vec{w})(\vec{x})\, d^3x \;\overset{\text{Gauss}}{=}\; \oiint_{\partial V} \vec{w}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma} \;=\; \oiint_{\partial V} (\vec{v}(\vec{x}) \times d\vec{\sigma})_1 \;,$$

como facilmente se constata. Para as demais componentes a prova é análoga. ■

4.3 O Laplaciano em Sistemas de Coordenadas Gerais

Nesta seção apresentaremos uma identidade que permite, no espaço $\mathbb{R}^n$, expressar o Laplaciano de uma função escalar em qualquer sistema de coordenadas[10], ao menos localmente. Isso é particularmente útil em duas e três dimensões espaciais, pois há muitos problemas em Física (vide Capítulo 43, página 2416) nos quais coordenadas polares, esféricas, cilíndricas ou outras se prestam melhor ao tratamento do que coordenadas Cartesianas, permitindo, por exemplo, explorar melhor as simetrias geométricas que se apresentam.

No que segue, denotaremos por $(x^1, \ldots, x^n)$ um sistema de coordenadas Cartesianas em $\mathbb{R}^n$ e por $(y^1, \ldots, y^n)$ um segundo sistema de coordenadas, não-necessariamente Cartesianas, em $\mathbb{R}^n$. Suporemos que as funções $x^k(y^1, \ldots, y^n)$, $k = 1, \ldots, n$, sejam definidas em algum aberto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sejam ao menos duas vezes diferenciáveis.

Definimos a *matriz Jacobiana*[11], denotada por $J \equiv J(y^1, \ldots, y^n)$, como sendo a matriz $n \times n$ definida em Ω cujos elementos ab são dados por

$$J_{ab}(y^1, \ldots, y^n) \;:=\; \frac{\partial x^b}{\partial y^a}(y^1, \ldots, y^n) \;, \qquad a, b = 1, \ldots, n \;.$$

Definimos o *tensor métrico*, ou *matriz métrica*, $g \equiv g(y^1, \ldots, y^n)$ como sendo a matriz $n \times n$ definida em Ω dada por $g := JJ^T$ e, assim, para seus elementos de matriz $g_{ab} \equiv g_{ab}(y^1, \ldots, y^n)$, temos

$$g_{ab} \;:=\; \sum_{c=1}^{n} \frac{\partial x^c}{\partial y^a} \frac{\partial x^c}{\partial y^b} \;, \qquad a, b = 1, \ldots, n \;. \tag{4.33}$$

Se $\vec{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial, então o divergente de $\vec{A}$ pode ser expresso nas coordenadas $(y^1, \ldots, y^n)$ por

$$\nabla \cdot \vec{A} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y^j} \left(\sqrt{\det(g)} A^j\right) \;, \tag{4.34}$$

onde A^j é a j-ésima componente de $\vec{A}$ no sistema $(y^1, \ldots, y^n)$.

[10] Naturalmente, o leitor mais avançado sabe que certas condições tem de ser supostas sobre o sistema de coordenadas e que tipicamente garantam a não-singularidade e um grau suficiente de diferenciabilidade.
[11] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851).

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar, então seu Laplaciano pode ser expresso nas coordenadas $(y^1, \ldots, y^n)$ por

$$\Delta f \;=\; \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y^j} \left(\sqrt{\det(g)} \left(g^{-1}\right)_{jk} \frac{\partial f}{\partial y^k}\right) \;, \tag{4.35}$$

sendo g^{-1} a matriz inversa da matriz g.

Observe-se que as expressões (4.34) e (4.35) só são válidas nos pontos em que $\det(g) \neq 0$ e observe-se também que $\sqrt{\det(g)} = \det(J)$ (por quê?). Assim, (4.34) e (4.35) não estão definidas nos pontos em que a transformação de coordenadas $(x^1, \ldots, x^n) \to (y^1, \ldots, y^n)$ for singular (ou seja, quando $\det(J)$ se anula).

A demonstração das relações (4.34) e (4.35) é apresentada na Seção 34.2.4, página 1782, e faz uso de noções de Geometria Riemanniana. Há também uma elegante maneira de obter essas expressões fazendo uso de formas diferenciais. Vide para tal [375] ou qualquer outro bom livro sobre Geometria Diferencial.

Vamos agora tratar de exemplos simples de aplicação de (4.35). Algumas das expressões que obteremos serão usadas neste texto, notadamente no Capítulo 43, página 2416.

• **Coordenadas polares em duas dimensões**

Em $\mathbb{R}^2$, além das coordenadas Cartesianas usuais $(x^1, x^2) \equiv (x, y)$, podemos definir também coordenadas polares $(y^1, y^2) \equiv (\rho, \varphi)$, com $0 \leq \rho < \infty$ e $-\pi < \varphi \leq \pi$ e tem-se

$$x \;=\; \rho \cos\varphi \;, \qquad y \;=\; \rho \operatorname{sen}\varphi \;.$$

É elementar constatar que a matriz Jacobiana é dada nesse caso por

$$J \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\rho \operatorname{sen}\varphi & \rho \cos\varphi \end{pmatrix} \;.$$

Note-se que $\det(J) = \rho$ e, portanto, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é a região onde a transformação de coordenadas $(x, y) \to (\rho, \varphi)$ é não-singular. A matriz métrica g e sua inversa g^{-1} são dadas por

$$g \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad g^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} \end{pmatrix} \;,$$

(verifique!) sendo que $\sqrt{\det(g)} = \rho$. De posse dessas informações é elementar obter de (4.35) a expressão

$$\Delta f \;=\; \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \;, \tag{4.36}$$

que fornece o Laplaciano de f em duas dimensões em coordenadas polares, expressão essa válida para $\rho > 0$.

• **Coordenadas esféricas em três dimensões**

Em $\mathbb{R}^3$, além das coordenadas Cartesianas usuais $(x^1, x^2, x^3) \equiv (x, y, z)$, podemos definir também coordenadas esféricas $(y^1, y^2, y^3) \equiv (r, \theta, \varphi)$, com $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $-\pi < \varphi \leq \pi$ e tem-se

$$x \;=\; r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \;, \qquad y \;=\; r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \;, \qquad z \;=\; r \cos\theta \;. \tag{4.37}$$

A coordenada $r \in [0, \infty)$ é denominada *coordenada radial*, a coordenada $\theta \in [0, \pi]$ é denominada *coordenada longitudinal* a coordenada $\varphi \in (-\pi, \pi]$ é denominada *coordenada azimutal*.

A matriz Jacobiana J pode ser facilmente calculada e obtém-se

$$J \;=\; \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi & \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi & \cos\theta \\ r \cos\theta \cos\varphi & r \cos\theta \operatorname{sen}\varphi & -r \operatorname{sen}\theta \\ -r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi & r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \;.$$

É fácil constatar que $\det J = r^2 \operatorname{sen}\theta$ e, portanto, a transformação de coordenadas $(x,\ y,\ z) \to (r,\ \theta,\ \varphi)$ é não-singular na região $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus Z$, onde Z é o eixo "z": $Z = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y = 0\}$. A matriz métrica g e sua inversa g^{-1} são dadas por

$$g \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2(\operatorname{sen}\theta)^2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad g^{-1} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2(\operatorname{sen}\theta)^2} \end{pmatrix} \ ,$$

(verifique!) e tem-se $\sqrt{\det(g)} = r^2 \operatorname{sen}\theta$. Com (4.35) obtém-se para o operador Laplaciano em três dimensões em coordenadas esféricas a expressão

$$\Delta f \ = \ \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{(\operatorname{sen}\theta)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right] \ , \tag{4.38}$$

que também pode ser escrita como

$$\Delta f \ = \ \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2(\operatorname{sen}\theta)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \ . \tag{4.39}$$

4.4 Coordenadas Esféricas em n Dimensões

Nesta seção sairemos dos limites do espaço tridimensional e descreveremos como podemos generalizar o sistema de coordenadas esféricas, que apresentamos acima (vide (4.37)) para os espaços $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 3$. Veremos que há nesse caso uma coordenada radial $r \in [0,\ \infty)$ e $n-1$ coordenadas angulares, a saber, uma coordenada azimutal $\varphi \in (-\pi,\ \pi]$ e $n-2$ coordenadas longitudinais $\theta_3,\ \ldots,\ \theta_n$, com $\theta_k \in [0,\ \pi]$, $k = 3,\ \ldots,\ n$.

• **Bolas e esferas em $\mathbb{R}^n$**

Aqui consideramos $n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$.

A bola (aberta) de raio $R > 0$ centrada na origem em $\mathbb{R}^n$ é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ que distam da origem menos que R, ou seja, é o conjunto $B_0(R) := \left\{(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2} < R\right\}$.

A esfera unitária em $\mathbb{R}^n$, denotada por $\mathbb{S}^{n-1}$, é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^n$ que distam exatamente 1 da origem: $\mathbb{S}^{n-1} := \left\{(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2} = 1\right\}$. Observe que $\mathbb{S}^{n-1}$ é uma superfície (uma variedade) $(n-1)$-dimensional.

Denotaremos por $V_n(R)$ o volume (n-dimensional) da bola $B_0(R)$ e por $\left|\mathbb{S}^{(n-1)}\right|$ o volume ($(n-1)$-dimensional) da esfera $\mathbb{S}^{n-1}$. No que segue determinaremos essas duas quantidades de duas meneiras.

• **Volumes de bolas e esferas em $\mathbb{R}^n$**

Em $\mathbb{S}^{n-1}$ existe uma medida de integração invariante pela ação do grupo de rotações $\mathrm{O}(n)$, a qual denotamos por $d\Omega_{n-1}$, e que é normalizada de sorte que $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\Omega_{n-1} = \left|\mathbb{S}^{n-1}\right|$. Logo adiante, quando apresentarmos o sistema de coordenadas esféricas em $\mathbb{R}^n$, apresentaremos também uma expressão explícita para essa medida em coordenadas esféricas (eq. (4.46), página 314).

Lema 4.1 *Para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$ valem*

$$\left|\mathbb{S}^{n-1}\right| \ = \ \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \tag{4.40}$$

e

$$V_n(R) \ = \ \left|\mathbb{S}^{n-1}\right|\frac{R^n}{n} \ = \ \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{R^n}{n} \ , \tag{4.41}$$

onde Γ é a Função Gama de Euler *(vide Capítulo 7, página 386).* □

Prova do Lema 4.1. A integral múltipla $I_n := \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2-\cdots-x_n^2}\,dx_1\cdots dx_n$ é igual a $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^n = \pi^{n/2}$ (integral de Laplace). Por outro lado, podemos escrever

$$I_n \ = \ \int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-r^2}\,r^{n-1}dr\,d\Omega_{n-1} \ = \ |\mathbb{S}^{n-1}|\int_0^\infty e^{-r^2}r^{n-1}dr \ \overset{t=r^2}{=} \ \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{n}{2}-1}dt \ = \ \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \ ,$$

onde Γ é a Função Gama de Euler, estudada no Capítulo 7, página 386. Assim, $|\mathbb{S}^{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.

É também claro que

$$V_n(R) \ = \ \int_0^R\int_{\mathbb{S}^{n-1}} 1\ r^{n-1}dr\,d\Omega_{n-1} \ = \ |\mathbb{S}^{n-1}|\int_0^R r^{n-1}dr \ = \ \left|\mathbb{S}^{n-1}\right|\frac{R^n}{n} \ .$$

Note-se que $\left|\mathbb{S}^{n-1}\right| = \frac{d}{dR}V_n(R)\big|_{R=1}$. ■

Nota. A relação (4.40) pode ser obtida, com menos elegância e simplicidade, por integração direta em coordenadas esféricas em n-dimensões. Vide adiante, e particularmente, vide (4.48), página 315. ♣

É um fato notável que, contrariando talvez a intuição, a relação (4.41) diz-nos que para qualquer $R \geq 0$ vale $\lim_{n\to\infty} V_n(R) = 0$, ou seja, o volume da bola n-dimensional vai a zero quando a dimensão n vai ao infinito, e isso para qualquer $R \geq 0$. Isso se deve ao rápido crescimento da função gama de Euler. Por (4.40), tem-se também $\lim_{n\to\infty}\left|\mathbb{S}^{n-1}\right| = 0$.

E. 4.7 *Exercício*. Verifique que nos casos $n = 2$ e $n = 3$ as fórmulas (4.41) e (4.40) reproduzem os resultados bem conhecidos: $V_2(R) = \pi R^2$, $|\mathbb{S}^1| = 2\pi$ e $V_3(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$, $|\mathbb{S}^2| = 4\pi$. ✠

• **Coordenadas esféricas em n dimensões**

O conhecimento de coordenadas esféricas em n dimensões é útil para vários propósitos, por exemplo, para o estudo de generalizações das funções harmônicas esféricas (usualmente definidas na esfera unitária bidimensional, $\mathbb{S}^2$) para a esfera unitária $\mathbb{S}^n$, com $n \geq 2$. Essas coordenadas serão úteis também no estudo da transformada de Fourier de funções esfericamente simétricas, assunto tratado na Seção 38.2.3.3, página 2052.

Consideremos $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 3$. Seja $\{\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n\}$ um conjunto de n vetores ortonormais em $\mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x^k\mathbf{e}_k$, com $x^k = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{e}_k,\ \mathbf{x}\rangle_{\mathbb{R}}$, o produto escalar dos vetores $\mathbf{e}_k$ e $\mathbf{x}$.

Consideremos $\mathbf{x} \neq 0$ e seja θ_n o ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{e}_n$, medido a partir deste último. Naturalmente, $\theta_n \in [0,\ \pi]$ e $x^n = \|\mathbf{x}\|\cos\theta_n$. Doravante vamos denotar $\|\mathbf{x}\|$ por r.

Com isso, podemos escrever

$$\mathbf{x} \ = \ r\cos(\theta_n)\mathbf{e}_n + \mathbf{x}_{(n-1)} \ ,$$

onde $\mathbf{x}_{(n-1)}$ é a componente de $\mathbf{x}$ no subespaço ortononal a $\mathbf{e}_n$, que vem a ser o subespaço gerado por $\{\mathbf{e}_1,\ \ldots\ \mathbf{e}_{n-1}\}$, subespaço este que denotaremos por $\left[\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_{n-1}\right]$.

É relevante observar que $\|\mathbf{x}_{(n-1)}\| = r\operatorname{sen}\theta_n$, pois $\|\mathbf{x}_{(n-1)}\|^2 = r^2 - r^2(\cos\theta_n)^2 = r^2(\cos\theta_n)^2$, já que $\mathbf{e}_n$ e $\mathbf{x}_{(n-1)}$ são ortogonais e já que $\operatorname{sen}\theta_n \geq 0$ quando $\theta_n \in [0,\ \pi]$.

Procedendo analogamente, podemos escrever

$$\mathbf{x}_{(n-1)} \ = \ \left\|\mathbf{x}_{(n-1)}\right\|\cos(\theta_{n-1})\mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{x}_{(n-2)} \ ,$$

onde $\theta_{n-1} \in [0,\ \pi]$ é o ângulo entre $\mathbf{e}_{n-1}$ e $\mathbf{x}_{(n-1)}$ e $\mathbf{x}_{(n-2)}$ é a projeção de $\mathbf{x}_{(n-1)}$ no subspaço $\left[\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_{n-2}\right]$. Temos também

$$\left\|\mathbf{x}_{(n-2)}\right\| \ = \ \left\|\mathbf{x}_{(n-1)}\right\|\operatorname{sen}\theta_{n-1} \ = \ r\operatorname{sen}(\theta_n)\operatorname{sen}(\theta_{n-1}) \ .$$

Com isso, obtivemos

$$\mathbf{x} \ = \ r\cos(\theta_n)\mathbf{e}_n + r\operatorname{sen}(\theta_n)\cos(\theta_{n-1})\mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{x}_{(n-2)} \ .$$

Repetindo o procedimento, teremos após $j < n-3$ passos

$$\mathbf{x}_{(n-j)} \ = \ \left\|\mathbf{x}_{(n-j)}\right\|\cos(\theta_{n-j})\mathbf{e}_{n-j} + \mathbf{x}_{(n-j-1)} \ ,$$

com

$$\left\|\mathbf{x}_{(n-j-1)}\right\| \;=\; \left\|\mathbf{x}_{(n-j)}\right\|\mathrm{sen}\theta_{n-j} \;=\; r\,\mathrm{sen}(\theta_n)\cdots\mathrm{sen}(\theta_{n-j})$$

com $\theta_{n-j}\in[0,\,\pi]$, com $\mathbf{x}_{(n-j)}\in\left[\mathbf{e}_1,\,\ldots,\,\mathbf{e}_{n-j}\right]$ e com

$$\mathbf{x} \;=\; r\cos(\theta_n)\mathbf{e}_n+\sum_{p=1}^{j} r\Big(\mathrm{sen}(\theta_n)\cdots\mathrm{sen}(\theta_{n-p+1})\Big)\cos(\theta_{n-p})\mathbf{e}_{n-p}+\mathbf{x}_{(n-j-1)}\;.$$

Ao chegarmos ao passo $j=n-3$ o vetor $\mathbf{x}_{(n-j-1)}=\mathbf{x}_{(2)}$ será elemento do subespaço $\left[\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2\right]$, e poderemos escrever

$$\mathbf{x}_{(2)} \;=\; \left\|\mathbf{x}_{(2)}\right\|\Big(\cos(\varphi)\mathbf{e}_1+\mathrm{sen}(\varphi)\mathbf{e}_2\Big) \;=\; r\,\mathrm{sen}(\theta_n)\cdots\mathrm{sen}(\theta_3)\Big(\cos(\varphi)\mathbf{e}_1+\mathrm{sen}(\varphi)\mathbf{e}_2\Big)$$

com $\varphi\in(-\pi,\,\pi]$.

Temos, portanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \;&=\; r\cos(\theta_n)\mathbf{e}_n+\sum_{p=1}^{n-3} r\Big(\mathrm{sen}(\theta_n)\cdots\mathrm{sen}(\theta_{n-p+1})\Big)\cos(\theta_{n-p})\mathbf{e}_{n-p}\\ &\quad+r\,\mathrm{sen}(\theta_n)\cdots\mathrm{sen}(\theta_3)\,\mathrm{sen}(\varphi)\mathbf{e}_2+r\,\mathrm{sen}(\theta_n)\cdots\mathrm{sen}(\theta_3)\cos(\varphi)\mathbf{e}_1\;.\end{aligned}\tag{4.42}$$

Consequentemente, para as coordenadas de $\mathbf{x}$ na base $\left\{\mathbf{e}_1,\,\ldots,\,\mathbf{e}_n\right\}$,

$$\begin{aligned}x^1 &= r\,\mathrm{sen}(\theta_n)\qquad\cdots\qquad\mathrm{sen}(\theta_3)\cos(\varphi)\;,\\ x^2 &= r\,\mathrm{sen}(\theta_n)\qquad\cdots\qquad\mathrm{sen}(\theta_3)\,\mathrm{sen}(\varphi)\;,\\ x^3 &= r\,\mathrm{sen}(\theta_n)\qquad\cdots\qquad\mathrm{sen}(\theta_4)\cos(\theta_3)\;,\\ x^4 &= r\,\mathrm{sen}(\theta_n)\;\cdots\;\mathrm{sen}(\theta_5)\cos(\theta_4)\;,\\ &\vdots\\ x^{n-1} &= r\,\mathrm{sen}(\theta_n)\cos(\theta_{n-1})\;,\\ x^n &= r\cos(\theta_n)\;.\end{aligned}\tag{4.43}$$

As relações (4.43) representam as transformações de coordenadas esféricas $\big(r,\;\varphi,\;\theta_3,\ldots,\;\theta_n\;\big)$ em coordenadas Cartesianas $(x^1,\;x^2,\;\cdots,\;x^n)$ em $\mathbb{R}^n$. As transformações inversas poder ser facilmente inferidas daí, e podem ser expressas de diversas formas, por exemplo. como

$$\begin{aligned}r \;&=\; \sqrt{\left(x^1\right)^2+\cdots+\left(x^n\right)^2}\;,\\ \varphi \;&=\; \arctan\left(x^2/x^1\right) \;=\; \arccos\left(\frac{x^1}{\sqrt{\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2}}\right)\;,\\ \theta_j \;&=\; \arccos\left(\frac{x^j}{\sqrt{\left(x^1\right)^2+\cdots+\left(x^j\right)^2}}\right)\;,\qquad j\;=\;3,\;\ldots,\;n\;.\end{aligned}\tag{4.44}$$

E. 4.8 *Exercício*. Verifique! ✣

• **O Jacobiano e o elemento de volume de integração**

Denotando as variáveis esféricas $\big(r,\;\varphi,\;\theta_3,\ldots,\;\theta_n\;\big)$ por $\big(y^1,\;y^2,\;\cdots,\;y^n\big)$ a matriz Jacobiana da transformação (4.43) é

$$J_n \;\equiv\; \frac{\partial\big(x^1,\;x^2,\;\ldots,\;x^n\big)}{\partial\big(r,\;\varphi,\;\theta_3,\ldots,\;\theta_n\;\big)} \;=\; \begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}\;.$$

Estamos interessados em calcular o determinante de J_n, o determinante Jacobiano. Este pode ser obtido por indução em n, a ordem de J_n, mas esse procedimento é um tanto complexo, de sorte que sugerimos um seguinte raciocínio alternativo. O sistema de coordenadas esféricas em n dimensões é um sistema ortogonal de coordenadas. Isso significa que as linhas coordenadas (obtidas fixando-se $n-1$ coordenadas e variando a restante em seu domínio de definição) são ortogonais em cada o ponto de $\mathbb{R}^n$. Isso implica que a matriz métrica $g_n=J_nJ_n^T$ é uma matriz diagonal.

E. 4.9 *Exercício*. Convença-se geometricamente ou algebricamente da validade dessas afirmações! ✣

Por (4.33), o k-ésimo elemento da diagonal de g_n é dado por $\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial x^j}{\partial y^k}\right)^2$, expressão cujo cômputo, ainda que um tanto maçante, pode ser feito com relativa facilidade. O resultado é

$$g_n \;=\; \mathrm{diag}\left(1,\;r^2\big(\mathrm{sen}(\theta_n)\cdots\mathrm{sen}(\theta_3)\big)^2,\;r^2\big(\mathrm{sen}(\theta_n)\cdots\mathrm{sen}(\theta_4)\big)^2,\;\ldots,\;r^2\big(\mathrm{sen}(\theta_n)\big)^2,\;r^2\right)\;.$$

E. 4.10 *Exercício*. Verifique! ✣

Como $\det g_n=\big(\det J_n\big)^2$, temos

$$\det J_n \;=\; r^{n-1}\big(\mathrm{sen}(\theta_n)\big)^{n-2}\big(\mathrm{sen}(\theta_{n-1})\big)^{n-3}\cdots\big(\mathrm{sen}(\theta_4)\big)^2\big(\mathrm{sen}(\theta_3)\big)\;.$$

Assim, a mudança do elemento de volume de integração quando da passagem do sistema Cartesiano $x^1,\;x^2,\;\ldots,\;x^n$ para o sistema de coordenadas esféricas n-dimensionais $r,\;\varphi,\;\theta_3,\ldots,\;\theta_n$ é

$$dx^1\cdots dx^n \;\longmapsto\; r^{n-1}\big(\mathrm{sen}(\theta_n)\big)^{n-2}\big(\mathrm{sen}(\theta_{n-1})\big)^{n-3}\cdots\big(\mathrm{sen}(\theta_4)\big)^2\big(\mathrm{sen}(\theta_3)\big)\;dr\,d\varphi\,d\theta_3\cdots d\theta_n\;.\tag{4.45}$$

As coordenadas angulares $\varphi,\;\theta_3,\ldots,\;\theta_n$ podem ser reconhecidas como coordenadas para os pontos da superfície $\mathbb{S}^{n-1}$. Reconhecemos disso que a medida invariante $d\Omega_{n-1}$ sobre a esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$ é explicitamemte dada em coordenaas esféricas por

$$d\Omega_{n-1} \;=\; \big(\mathrm{sen}(\theta_n)\big)^{n-2}\big(\mathrm{sen}(\theta_{n-1})\big)^{n-3}\cdots\big(\mathrm{sen}(\theta_4)\big)^2\big(\mathrm{sen}(\theta_3)\big)\;d\varphi\,d\theta_3\cdots d\theta_n\;.\tag{4.46}$$

• **A medida de volume da bola n-dimensional e da esfera unitária n-dimensional**

Usando (4.45) vamos determinar o volume de uma bola de raio $R\geq 0$ em $\mathbb{R}^n$ centrada na origem. Esse volume é dado por

$$\begin{aligned}V_n(R) \;&:=\; \int_0^R\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi} r^{n-1}\big(\mathrm{sen}(\theta_n)\big)^{n-2}\big(\mathrm{sen}(\theta_{n-1})\big)^{n-3}\cdots\big(\mathrm{sen}(\theta_4)\big)^2\big(\mathrm{sen}(\theta_3)\big)\;dr\,d\varphi\,d\theta_3\cdots d\theta_n\\ &=\; 2\pi\frac{R^n}{n}\left(\int_0^{\pi}\big(\mathrm{sen}(\theta_n)\big)^{n-2}d\theta_n\right)\left(\int_0^{\pi}\big(\mathrm{sen}(\theta_{n-1})\big)^{n-3}d\theta_{n-1}\right)\cdots\left(\int_0^{\pi}\big(\mathrm{sen}(\theta_3)\big)d\theta_3\right)\;.\end{aligned}$$

Por (7.125), página 424, vale para todo $m\in\mathbb{N}$,

$$\int_0^{\pi}\big(\mathrm{sen}\theta\big)^m d\theta \;=\; 2\frac{\sqrt{\pi}}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\;,$$

onde Γ é a função gama de Euler, à qual dedicamos o Capitulo 7, página 386. Assim,

$$\begin{aligned} V_n(R) &= 2\pi\frac{R^n}{n}\left(2\frac{\sqrt{\pi}}{(n-2)}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\right)\left(2\frac{\sqrt{\pi}}{(n-3)}\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}\right)\cdots\left(2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right) \\ &= 2^{n-1}\pi^{(n-1)/2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{(n-2)!}\frac{R^n}{n}\,. \end{aligned}$$

Acima, usamos $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ (vide (7.18), página 393). Escrevendo $(n-2)!=\Gamma(n-1)$ e usando a fórmula de duplicação de Legendre para Γ, relação (7.53), página 402, com a identificação $z=(n-1)/2$, temos $\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)/(n-2)!=\sqrt{\pi}2^{2-n}/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ e com isso obtemos, finalmente,

$$V_n(R) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{R^n}{n}\,. \tag{4.47}$$

O volume $(n-1)$-dimensional da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$ é dado por

$$\left|\mathbb{S}^{n-1}\right| = \frac{d}{dR}V_n(R)\bigg|_{R=1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,. \tag{4.48}$$

No Lema 4.1, página 311, mostramos como obter esse resultado de forma mais simples e elegante.