Capítulo 6
Funções Geratrizes. Produtórias Complexas

Conteúdo

O curto capítulo que ora iniciamos dedica-se a duas classes de objetos matemáticos úteis, as chamadas funções geratrizes e as produtórias complexas infinitas. Trata-se de dois temas não necessariamente próximos, mas faremos uso de ambos nos capítulos que se seguem. Neste capítulo, como em outros adiante, pressuporemos que o estudante possua noções básicas sobre a teoria das funções de variável complexa.

Funções geratrizes, introduzidas na Seção 6.1, página 268, desempenham um elegante papel em Análise Combinatória. O leitor poderá encontrar na bela referência [125] uma vasta coleção de identidades combinatórias interessantes que podem ser engenhosamente demonstradas com o uso de funções geratrizes de sequências, assim como outras referências à literatura pertinente. Funções geratrizes são também relevantes no estudo de certas sequências de funções e no estudo de propriedades de sequências numéricas. Ilustraremos essa última afirmação estudando através de funções geratrizes a chamada sequência de Fibonacci e os chamados números de Bernoulli. No Capítulo 15 faremos uso de funções geratrizes para estudar e demonstrar algumas propriedades úteis de algumas das soluções especiais que encontramos no Capítulo 14, como os polinômios de Legendre, de Hermite, de Laguerre, de Tchebychev e as funções de Bessel.

Produtórias infinitas, assim como séries, são encontradas amiúde no estudo de propriedades de certas funções de interesse. Faremos uso das mesmas, por exemplo, no Capítulo 7, dedicado à função gama de Euler. Na Seção 6.2, página 276, discutimos a noção de convergência de produtórias infinitas e estudamos alguns exemplos úteis.

6.1 Funções Geratrizes

• **Funções geratrizes**

Seja $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ uma sequência de números reais ou complexos. Define-se a *função geratriz* da sequência $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ como sendo a função dada por

$$G_{\{a_n\}}(t) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n \;.$$

Essa definição pressupõe que a série de potências em t do lado direito seja convergente em alguma região aberta do plano complexo, digamos $|t| < T$, para algum $T > 0$. Isso nem sempre é o caso. Por exemplo, se $a_n = n!$ a série acima tem raio de convergência nulo.

• **Funções geratrizes exponenciais**

A *função geratriz exponencial* da sequência $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ é definida por

$$E_{\{a_n\}}(t) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\, t^n \;.$$

Essa definição pressupõe que a série de potências em t do lado direito seja convergente em alguma região aberta do plano complexo, digamos $|t| < T$. Observe que o lado direito, caso seja convergente, coincide com a série de Taylor centrada em 0 da função $E_{\{a_n\}}(t)$ e, portanto, para cada k vale $a_k = \dfrac{d^k E_{\{a_n\}}}{dt^k}(0)$.

• **Funções geratrizes de Dirichlet**

Para certos tipos de sequências é conveniente definir outro tipo de função geratriz, substituindo os monômios t^n por outras funções de t: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, S_n(t)$. O exemplo mais importante desse tipo de função geratriz é aquele no qual se toma $S_n(t) = 1/n^t$, $n \geq 1$. Isso nos conduz à próxima definição.

A *função geratriz de Dirichlet*[1] da sequência $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é definida por

$$D_{\{a_n\}}(t) \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^t} \;,$$

desde que a série do lado direito convirja com a variável t em alguma região aberta do plano complexo.

A mais famosa das funções geratrizes de Dirichlet é a *função zeta de Riemann*[2], que é a função geratriz de Dirichlet da sequência constante $a_n = 1$, $n \geq 1$:

$$\zeta(s) \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \;. \tag{6.1}$$

Como facilmente se vê, a série do lado direito converge na região do plano complexo definida por $\mathrm{Re}(s) > 1$. A função zeta de Riemann desempenha um papel de grande importância na teoria das funções de variável complexa e na teoria de números, pois várias de suas propriedades estão relacionadas a propriedades do conjunto de números primos. Vide, e.g., [138], [334], [335] ou [89].

• **Funções geratrizes de Lambert**

A *função geratriz de Lambert*[3] da sequência $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é definida por

$$L_{\{a_n\}}(t) \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^n}{1 - t^n} \;,$$

desde que a série do lado direito convirja com a variável t em alguma região aberta do plano complexo. As funções geratrizes de Lambert são também denominadas *séries de Lambert*.

As funções geratrizes definidas acima têm várias propriedades algébricas interessantes, como mostrado nos exercícios que seguem.

E. 6.1 *Exercício*. Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são duas sequências cujas funções geratrizes $G_{\{a_n\}}(t)$ e $G_{\{b_n\}}(t)$ têm uma região aberta de convergência comum, mostre que

$$G_{\{a_n\}}(t)\, G_{\{b_n\}}(t) \;=\; G_{\{c_n\}}(t) \;,$$

onde

$$c_n \;=\; \sum_{p=0}^{n} a_{n-p}\, b_p \;.$$

✣

E. 6.2 *Exercício*. Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são duas sequências cujas funções geratrizes exponenciais $E_{\{a_n\}}(t)$ e $E_{\{b_n\}}(t)$ têm uma região aberta de convergência comum, mostre que

$$E_{\{a_n\}}(t)\, E_{\{b_n\}}(t) \;=\; E_{\{c_n\}}(t) \;,$$

onde

$$c_n \;=\; \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a_{n-p}\, b_p \;.$$

✣

E. 6.3 *Exercício*. Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são duas sequências cujas funções geratrizes de Dirichlet $D_{\{a_n\}}(t)$ e $D_{\{b_n\}}(t)$ têm uma região aberta de convergência comum, mostre que

$$D_{\{a_n\}}(t)\, D_{\{b_n\}}(t) \;=\; D_{\{c_n\}}(t) \;,$$

[1] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859).
[2] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866).
[3] Johan Heinrich Lambert (1728–1777).

onde

$$c_n = \sum_{\substack{p=1 \\ n/p \text{ inteiro}}}^{n} a_{n/p} b_p .$$

♣

E. 6.4 *Exercício*. Se $\{a_n\}$ é uma sequência cuja função geratriz de Lambert é $L_{\{a_n\}}(t)$, mostre que

$$L_{\{a_n\}}(t) = \sum_{m=1} b_m t^m = G_{\{b_n\}}(t) ,$$

onde $b_0 := 0$ e, para $m > 0$,

$$b_m := \sum_{\substack{n=1 \\ m/n \text{ inteiro}}}^{m} a_n .$$

♣

Passemos a discutir algumas aplicações das funções geratrizes.

• **Números de Fibonacci**

Seja a_n, $n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$, a sequência definida recursivamente da seguinte forma:

$$a_0 = 1 , \quad a_1 = 1 , \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n , \quad \forall\, n \geq 0 .$$

Essa sequência é denominada *sequência de Fibonacci*[4]. Cada elemento da sequência de Fibonacci é a soma de seus dois antecessores. Os primeiros elementos da sequência de Fibonacci são

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, ...

Fibonacci introduziu a sequência que leva seu nome em um problema de seu livro *Liber abbaci*, de 1202 (livro esse que introduziu o sistema decimal arábico na Europa, em substituição ao sistema de algarismos romanos, usado até então): *"Um certo homem coloca um casal de coelhos em um local cercado de muros por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser produzidos a partir daquele casal em um ano se for suposto que a cada mês cada casal gera um novo casal, o qual se torna fértil em um mês"*. A resposta (supondo que nenhum coelho morre) é que, após n meses, tem-se a_n pares de coelhos, sendo a_n dado acima. Trata-se provavelmente do primeiro modelo de evolução de populações. A sequência de Fibonacci é surpreendentemente rica em propriedades, sendo possivelmente uma das mais pesquisadas, existindo até mesmo uma publicação periódica ("Fibonacci Quarterly") dedicada a seu estudo.

Um fato que confere aos números de Fibonacci um sabor especial é que os mesmos aparecem frequentemente na Natureza. Há, por exemplo, uma forte probabilidade de os números de pétalas em flores de determinadas espécies de plantas serem números de Fibonacci. O mesmo se dá com o número de voltas espirais na casca de abacaxis e de pinhas, com o número de ramos de plantas e árvores, com o número de padrões de um determinado tipo nas conchas de caramujos etc[5]. A razão do surgimento de números de Fibonacci em contextos biológicos está relacionado à formação e reprodução de padrões, mas é apenas parcialmente entendida atualmente.

No intuito de ilustrar a utilidade de funções geratrizes de sequências, vamos demonstrar a seguinte identidade para os elementos da sequência de Fibonacci:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] , \tag{6.2}$$

[4] Leonardo Pisano, cognominado "Fibonacci" (1170–1250).

[5] Para algumas referências:

- S. L. Basin, "The Fibonacci Sequence as it appears in Nature", The Fibonacci Quarterly, **1**, (1963), 53–57.
- A. Brousseau, "Fibonacci Statistics in Conifers", The Fibonacci Quarterly, **7** (1969), 525–532.
- P. B. Onderdonk, "Pineapples and Fibonacci Numbers", The Fibonacci Quarterly, **8** (1970), 507–508.

Um livro clássico sobre o assunto é [331]. A área da Biologia e da Matemática que se dedica ao estudo da formação e evolução de padrões é denominada Filotaxia.

válida para todo $n \geq 0$. Essa expressão permite obter cada a_n diretamente em termos de n e é denominada *fórmula de Binet*[6], tendo sido obtida por esse autor (usando métodos matriciais) em 1843. Essa fórmula, porém, foi obtida pela primeira vez por de Moivre[7] cerca de cem anos antes e foi encontrada também por Euler[8] e por Daniel Bernoulli[9]. A constante $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($\approx 1,6180339887\ldots$) é a célebre *razão aurea*, muitas vezes denotada pelo símbolo φ, e cujas propriedades são estudadas desde a Antiguidade. Note-se que $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi = -1/\varphi$, de modo que (6.2) pode ser também expressa como

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\varphi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^{n+1} \right] . \tag{6.3}$$

A função geratriz da sequência de Fibonacci é

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n . \tag{6.4}$$

Mostremos primeiramente que a série de potências do lado direito tem um raio de convergência não-nulo. Pelo teste da razão vale, para $n > 0$,

$$\left| \frac{a_{n+1} t^{n+1}}{a_n t^n} \right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} |t| = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} |t| = \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right) |t| \leq 2|t| ,$$

pois $\frac{a_{n-1}}{a_n} \leq 1$, já que a sequência de Fibonacci é crescente. Logo, a série converge absolutamente pelo menos na região $|t| < 1/2$. A verdadeira região de convergência é um pouco maior (como veremos adiante), mas não precisaremos desse fato por ora, pois tudo o que necessitamos é da existência de um raio de convergência não-nulo, o que justifica as manipulações que faremos.

Façamos uso da definição da sequência de Fibonacci para obter uma fórmula explícita para $F(t)$. Temos que

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n \\ &= 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n-2}) t^n = 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} t^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n \\ &= 1 + t + t \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n + t^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &= 1 + t + t(F(t) - 1) + t^2 F(t) . \end{aligned}$$

Assim, $(1 - t - t^2)F(t) = 1$ e, portanto,

$$F(t) = \frac{1}{1 - t - t^2} .$$

A ideia agora é obter a expansão em série de Taylor de $F(t)$ em torno de $t = 0$ e compará-la a (6.4), para assim obter uma expressão explícita para os a_n's. Para isso, ao invés de calcularmos as derivadas de F em $t = 0$, é mais fácil proceder da seguinte forma. Escrevemos $1 - t - t^2 = -(t - \gamma_1)(t - \gamma_2)$ onde

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \qquad \gamma_2 = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2} .$$

[6] Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856).
[7] Abraham de Moivre (1677–1754).
[8] Leonhard Euler (1707–1783).
[9] Daniel Bernoulli (1700–1782).

Assim,

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{1-t-t^2} = -\frac{1}{(t-\gamma_1)(t-\gamma_2)} = \frac{1}{\gamma_1-\gamma_2}\left[\frac{1}{\gamma_1-t}-\frac{1}{\gamma_2-t}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{1}{1-\frac{t}{\gamma_1}}\right)-\frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{1}{1-\frac{t}{\gamma_2}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\gamma_1^{n+1}}-\frac{1}{\gamma_2^{n+1}}\right]t^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-\gamma_2)^{n+1}-(-\gamma_1)^{n+1}\right]t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]t^n ,
\end{aligned}
$$

onde usamos que $1/\gamma_1 = -\gamma_2$. Comparando com (6.4) obtemos (6.2), como queríamos. Da última expressão, vê-se também que o raio de convergência da série de potências que define F é $(\sqrt{5}-1)/2 \approx 0,6180339887\ldots$.

No Exercício E. 9.56, página 452, reobtemos (6.2) usando técnicas matriciais. Essas mesmas ideias são usadas no Exercício E. 9.57, página 453, para tratar da chamada *sequência de Fibonacci generalizada*, definida pela relação de recorrência $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$, onde α e β são constantes (reais ou complexas).

• Algumas identidades combinatórias

A sequência de exercícios dirigidos que segue apresenta-nos uma série de identidades combinatórias de interesse (usaremos algumas no Capítulo 17, página 759). A primeira obtem-se através de uma função geratriz.

E. 6.5 *Exercício dirigido.* Para $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, defina-se o conjunto

$$\mathbf{N}_m^n := \left\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n, \; a_1 + \cdots + a_n = m\right\} .$$

Seja $|\mathbf{N}_m^n|$ o número de elementos de $\mathbf{N}_m^n$. $|\mathbf{N}_m^n|$ representa o número de maneiras de colocar exatamente m objetos indistinguíveis em n posições distintas, eventualmente permitindo sobreposições (e.g., colocar m bolas indistinguíveis em n caixas distintas). Mostre que

$$|\mathbf{N}_m^n| = \binom{n+m-1}{m} = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!} .$$

Sugestão. Mostre primeiramente que, para cada n, a função geratriz da sequência $|\mathbf{N}_m^m|$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, é

$$\sum_{m=0}^{\infty}|\mathbf{N}_m^n|\,t^m = \left(\frac{1}{1-t}\right)^n . \tag{6.5}$$

Para isso, mostre que, para $|t| < 1$,

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^n = \left(\sum_{a=0}^{\infty}t^a\right)^n = \sum_{a_1,\ldots,a_n=0}^{\infty}t^{a_1+\cdots+a_n} = \sum_{m=0}^{\infty}|\mathbf{N}_m^n|\,t^m.$$

De (6.5), obtenha

$$|\mathbf{N}_m^n| = \frac{1}{m!}\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{1}{1-t}\right)^n\Bigg|_{t=0} = \frac{n\cdots(m+m-1)}{m!} = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!} = \binom{n+m-1}{m} .$$

✣

E. 6.6 *Exercício dirigido.* Para $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, defina-se o conjunto

$$\mathbf{M}_m^n := \left\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n, \; 0 \le a_1 + \cdots + a_n \le m\right\} .$$

Seja $|\mathbf{M}_m^n|$ o número de elementos de $\mathbf{M}_m^n$. $|\mathbf{M}_m^n|$ representa o número de maneiras de colocar de zero a no máximo m objetos indistinguíveis em n posições distintas, eventualmente permitindo sobreposições (e.g., colocar de 0 a m bolas indistinguíveis em n caixas distintas). Mostre que

$$|\mathbf{M}_m^n| = \binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{n!\,m!} . \tag{6.6}$$

Sugestão. Convença-se que

$$|\mathbf{M}_m^n| = \sum_{k=0}^{m}|\mathbf{N}_k^n| = \sum_{k=0}^{m}\binom{n+k-1}{k} . \tag{6.7}$$

Usando a bem conhecida *identidade de Pascal*[10]

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b} + \binom{a-1}{b-1} \tag{6.8}$$

conclua que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k} = 1+\sum_{k=1}^{m}\binom{n+k}{k} &\overset{(6.8)}{=} 1+\sum_{k=1}^{m}\binom{n+k-1}{k}+\sum_{k=1}^{m}\binom{n+k-1}{k-1} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{m}\binom{n+k-1}{k}+\sum_{l=1}^{m}\binom{n+l-1}{l-1} \\
&\overset{l'=l-1}{=} 1+\sum_{k=1}^{m}\binom{n+k-1}{k}+\sum_{l'=0}^{m-1}\binom{n+l'}{l'}
\end{aligned}
$$

e, assim, conclua que

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k-1}{k} = 1+\sum_{k=1}^{m}\binom{n+k-1}{k} = \sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k}-\sum_{l'=0}^{m-1}\binom{n+l'}{l'} = \binom{n+m}{m} .$$

Por (6.7), isso prova (6.6). ✣

A identidade $\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+m}{m}$, provada acima, é conhecida como *segunda identidade de Pascal* ou *identidade da soma paralela*. Para outras identidades combinatórias úteis, vide [125].

E. 6.7 *Exercício.* Seguindo passos análogos aos do último exercício, demonstre a *identidade da soma vertical*:

$$\binom{n+1}{m+1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{j}{m} .$$

✣

E. 6.8 *Exercício.* As denominações *identidade da soma paralela* e *identidade da soma vertical* provêm da relação dos coeficientes binomiais $\binom{a}{b}$ com o triângulo de Pascal. Desenhe um triângulo de Pascal e entenda o significado dessas identidades e a razão de seus nomes. ✣

E. 6.9 *Exercício dirigido.* As identidades $|\mathbf{N}_m^n| = \binom{n+m-1}{m}$ e $|\mathbf{M}_m^n| = \binom{n+m}{m}$ podem ser obtidas de uma forma talvez mais direta e simples, dependendo do gosto do leitor. Suponha que se tenha m bolas pretas e n bolas brancas. Convença-se que há $\binom{n+m}{m} = \binom{n+m}{n}$ arranjos possíveis dessas bolas (supondo que as bolas pretas são indistinguíveis entre si, e que o mesmo valha para as brancas). Uma maneira de fazer esse raciocínio é imaginar as $n+m$ bolas enfileiradas e contar de quantas maneiras distintas essas fileiras podem ser

[10] Blaise Pascal (1623–1662).

formadas. Há $(n+m)!$ permutações das $n+m$ bolas, das quais devem ser fatoradas $m!$ permutações envolvendo apenas bolas pretas e $n!$ permutações envolvendo apenas bolas brancas, fornecendo assim $\binom{n+m}{m}$ arranjos. Convença-se também que, pela definição, esse número de arranjos é igual a $|\mathbf{M}_m^n|$. Isso provou que $|\mathbf{M}_m^n| = \binom{n+m}{m}$. Convença-se que, pela definição, $|\mathbf{N}_m^n| = |\mathbf{M}_m^n| - |\mathbf{M}_{m-1}^n|$. Tem-se, então $|\mathbf{N}_m^n| = \binom{n+m}{m} - \binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{m}$, onde a última igualdade segue da identidade de Pascal (6.8). ✠

6.1.1 Números de Bernoulli

A sequência de números racionais denominados *números de Bernoulli*[11] tem importância destacada na Teoria dos Números, especialmente devido à sua relação com a função zeta de Riemann, definida acima. Os números de Bernoulli também aparecem na expansão em série de Taylor da função tangente e na chamada fórmula de Euler-Maclaurin. Os chamados números de Bernoulli, denotados por B_n, com $n \in \mathbb{N}_0$, são definidos de sorte que sua função geratriz exponencial $E_{\{B_n\}}(z)$ seja a função $z/(e^z-1)$, ou seja, são definidos por

$$\frac{z}{e^z-1} \;=:\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n \;. \tag{6.9}$$

Devido ao fato de $z/(e^z-1)$ ter um polo em $z = \pm 2\pi i$ sendo, porém, analítica em $|z| < 2\pi$, concluímos *a priori* que a série de potências do lado direito é convergente para $|z| < 2\pi$. Multiplicando (6.9) por $e^z - 1 = \sum_{m=1}^{\infty} z^m/m!$, obtemos

$$z \;=\; \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!}\right) \;=\; \sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{p} \frac{B_q}{q!(p+1-q)!}\right) z^{p+1} \;,$$

de onde concluímos que

$$B_0 \;=\; 1 \qquad \text{e} \qquad \sum_{q=0}^{p} \frac{B_q}{q!(p+1-q)!} \;=\; 0 \quad \text{para todo } p \geq 1 \;.$$

Multiplicando a segunda relação acima por $(p+1)!$ a mesma torna-se

$$\sum_{q=0}^{p} B_q \binom{p+1}{q} \;=\; 0 \quad \text{para todo } p \geq 1 \;,$$

forma essa mais frequentemente encontrada na literatura. Essa relação acima permite obter recursivamente os coeficientes B_n a partir de $B_0 = 1$. De fato, isolando o termo com $q = p$, temos

$$B_p \;=\; \frac{-1}{p+1} \sum_{q=0}^{p-1} B_q \binom{p+1}{q} \qquad \text{para todo } p \geq 1 \;, \tag{6.10}$$

ou seja,

$$B_p \;=\; -p! \sum_{q=0}^{p-1} \frac{B_q}{q!(p+1-q)!} \qquad \text{para todo } p \geq 1 \;. \tag{6.11}$$

Usando a fórmula (6.10) é possível obter os primeiros números de Bernoulli, vide Tabela 6.1, página 275.

A contemplação da Tabela 6.1 permite conjecturar que, exceto B_1, todos os B_n com n ímpar sejam nulos. Veremos abaixo que essa conjectura é verdadeira. A impressão, porém, que os B_n's não-nulos crescem lentamente, obtida da observação dos primeiros elementos da sequência, é falsa. Devido ao fato de a série de potências em não convergir para $|z| = 2\pi$ concluímos que os $|B_n|$ não-nulos devem assintoticamente ser maiores que, ou da ordem de, $n!/(2\pi)^n$ para n grande. Isso de fato é correto (B_{98}, por exemplo, é da ordem de $1,13 \times 10^{76}$) e a expressão precisa será apresentada em (6.18). Outra conjectura que se pode levantar da observação da Tabela 6.1 é que os sinais dos números de Bernoulli com índice par (exceto B_0) são alternados. Esse fato é também correto e será provado mais adiante.

[11] Jakob Bernoulli (1654–1705).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	0	$-\frac{3617}{510}$	0

Tabela 6.1: Números de Bernoulli B_n para $n = 0, \ldots, 17$.

Separando o termo com B_1 de (6.9), que é $-z/2$, e passando-o para o lado esquerdo, obtemos

$$\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} \;=\; 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n \;.$$

O lado esquerdo vale $\frac{z}{2}\coth\left(\frac{z}{2}\right)$, como facilmente se constata. Concluímos assim que

$$z\coth(z) \;=\; 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n B_n}{n!}\, z^n \;, \tag{6.12}$$

para $|z| < 2\pi$. Como $z\coth(z)$ é uma função par, vemos de (6.12) que, exceto B_1, todos os demais B_n's com n ímpar são nulos. Com esse conhecimento podemos escrever

$$z\coth(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n} \;. \tag{6.13}$$

Como $z \operatorname{cotg}(z) = iz\coth(iz)$, obtemos também

$$z \operatorname{cotg}(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n} \;, \tag{6.14}$$

para $|z| < 2\pi$.

Há uma conclusão importante a se obter de (6.14). A função $z \operatorname{cotg}(z)$ satisfaz também a igualdade, obtida primeiramente por Euler em 1748,

$$z \operatorname{cotg}(z) \;=\; 1 - 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2 - z^2} \;. \tag{6.15}$$

Demonstrações dessa importante relação podem ser encontradas nestas notas no Exercício E. 7.5, página 297, no Exercício-dirigido E. 6.12, página 280, ou no Exercício-dirigido E. 38.23, página 1889 (para outras referências, vide esses Exercícios-dirigidos). Agora, para $|z| < \pi$, podemos escrever, já que $k \geq 1$,

$$\frac{1}{(k\pi)^2 - z^2} \;=\; \frac{1}{(k\pi)^2}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{z}{k\pi}\right)^2}\right) \;=\; \frac{1}{(k\pi)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{k\pi}\right)^{2n} \;,$$

e reinserindo isso em (6.15), obtemos

$$z \operatorname{cotg}(z) \;=\; 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^{2n}}\right) z^{2n} \;.$$

Comparando a (6.14), obtemos finalmente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \;=\; (-1)^{n+1}\frac{4^n B_{2n}}{2(2n)!}\,\pi^{2n} \;=\; (-1)^{n+1}\frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!} \;, \tag{6.16}$$

válida para todo inteiro $n > 0$. Note que o lado esquerdo é igual a $\zeta(2n)$, onde ζ é a função zeta de Riemann, definida em (6.1), página 269. A célebre expressão (6.16) foi obtida pela primeira vez em 1735, por Euler, resolvendo assim parcialmente um problema, denominado *problema de Basel*, levantado por Mengoli[12] em 1644, que consistia em encontrar uma fórmula fechada para as somas $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, as quais envolvem potências de inversas de números inteiros. Os primeiros resultados obtidos de (6.16) são

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}. \tag{6.17}$$

Como o lado esquerdo de (6.16) é sempre positivo e não-nulo concluímos daquela identidade que os sinais da sequência B_{2n}, $n \geq 1$, são alternados e que os B_{2n}'s nunca se anulam. Como o lado esquerdo de (6.16) converge a 1 quando $n \to \infty$ (por que?), obtemos a expressão assintótica

$$B_{2n} \overset{n\to\infty}{\approx} (-1)^{n+1}\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}. \tag{6.18}$$

Diversos textos tratam de outras propriedades elementares dos números de Bernoulli. Recomendamos, em particular, [125]. Vide também [310]. Para uma prova de (6.16) em alguns casos particulares usando séries de Fourier, vide os exercícios da Seção 38.6, página 1886. Para uma prova geral de (6.16) usando séries de Fourier, vide [103]. Para uma discussão aparentada, vide Seção 27.B, página 1364, destas notas.

O estudante deve interessar-se em saber que é até hoje um problema aberto determinar fórmulas exatas para as séries $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^m} = \zeta(m)$ quando m é um número ímpar maior que 1. Além de não haver tais fórmulas exatas, sabe-se muito pouco sobre $\zeta(m)$ com m ímpar. Apenas em 1979 foi demonstrado, por R. Apéry[13], que $\zeta(3)$ é um número irracional[14]. Em 2001, Wadim Zudilin demonstrou que ao menos um dentre os números $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ é irracional[15]. Em 2000, Tanguy Rivoal demonstrou que há infinitos $\zeta(m)$, com m ímpar, que são irracionais[16] sem, no entanto, poder especificar quais são.

6.2 Notas Sobre Convergência de Produtórias

Seja $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de números complexos. Definimos a produtória infinita $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ como o limite $\lim_{M\to\infty}\prod_{k=1}^{M} a_k$ se este existir. Podemos escrever $\prod_{k=1}^{M} a_k = \exp\left(\sum_{k=1}^{M}\log a_k\right)$ e, assim, tentar associar a convergência da sequência $\prod_{k=1}^{M} a_k$ à convergência da sequência $\sum_{k=1}^{M}\log a_k$ quando $M \to \infty$. Com isso poderíamos reduzir a questão da convergência de produtórias infinitas à questão da convergência de séries, tema sobre o qual muito é conhecido. Há, porém, dois problemas aqui: em primeiro lugar, alguns a_k's podem ser nulos (em cujo caso desejamos que $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ seja nula) e para tais a_k's o logaritmo $\log a_k$ não está definido. Em segundo lugar, a questão da convergência de $\sum_{k=1}^{M}\log a_k$ pode depender da folha onde os logaritmos complexos estão definidos, ponto que é particularmente importante no caso se que $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de funções em $\mathbb{C}$. A proposição a seguir fornece condições suficientes sob as quais esses problemas podem ser contornados.

No que segue, log refere-se sempre à primeira folha do logaritmo, isto é, para $a = |a|e^{-i\phi} \in \mathbb{C}$ com $\phi \in (-\pi,\ \pi]$ e $|a| > 0$, o logaritmo $\log a$ é definido por $\log a := \ln|a| + i\phi$.

Proposição 6.1 *Seja* $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *uma sequência de números complexos. Uma condição suficiente para que a produtória* $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ *seja convergente é que valha* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n - 1| < \infty$, *em cujo caso tem-se* $\prod_{k=1}^{\infty} a_k = \left[\prod_{k=1}^{N} a_k\right]\exp\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\log a_n\right)$ *para*

[12] Pietro Mengoli (1626–1686).

[13] Roger Apéry (1916–1994).

[14] Para o trabalho original: Roger Apéry, "Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, Astérisque, **61** (1979), 11–13. Vide também Alfred van der Poorten, "A proof that Euler missed. Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. An informal report", Math. Intell., **1** (1979), 195–203.

[15] Wadim Zudilin. "One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ is irrational". Russ. Math. Surv. 56 (4): 774–776 (2001).

[16] Tanguy Rivoal, "La fonction Zêta de Riemann prend une infinit'e de valeurs irrationnelles aux entiers impairs". Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, **331** (2000), 267–270.

todo $N \in \mathbb{N}$ *suficientemente grande. Sob as hipóteses, a série* $\sum_{n=N+1}^{\infty}\log a_n$ *é absolutamente convergente.* □

Comentários. **1.** A condição $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n - 1| < \infty$ implica que pode haver no máximo um número finito de a_n's nulos, os quais, se ocorrerem, estarão no fator $\prod_{k=1}^{N} a_k$ o qual será, portanto, nulo, implicando a nulidade de $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$. **2.** A convergência absoluta de $\sum_{n=N+1}^{\infty}\log a_n$ assegura que a produtória $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ é invariante por permutações dos índices. ♣

Prova da Proposição 6.1. Seja $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < 1$. Sabemos que $\log(1+z) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}z^m}{m}$. Logo, $|\log(1+z)| \leq \sum_{m=1}^{\infty}|z|^m = \frac{|z|}{1-|z|}$. Assim, para $|z| < 1/2$, teremos $|\log(1+z)| < 2|z|$.

Se $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n - 1|$ converge, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - 1| < 1/2$ para todo $n \geq N$. Escrevendo $\log a_n = \log\big(1 + (a_n - 1)\big)$ concluímos que $\big|\log a_n\big| < 2|a_n - 1|$ para todo $n \geq N$. Essa desigualdade, junto à hipótese que $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n - 1| < \infty$, implica que $\sum_{n=N+1}^{\infty}\log a_n$ converge absolutamente. Para $M > N$ temos $\prod_{k=1}^{M} a_k = \left[\prod_{k=1}^{N} a_k\right]\exp\left(\sum_{n=N+1}^{M}\log a_n\right)$ e a convergência absoluta de $\sum_{n=N+1}^{\infty}\log a_n$ implica a existência do limite $\lim_{M\to\infty}\prod_{k=1}^{M} a_k$. ■

A Proposição 6.1 tem um corolário extremamente útil que diz respeito a produtórias de funções analíticas em um domínio compacto comum.

Corolário 6.1 *Seja* $\{a_n(z),\ n \in \mathbb{N}\}$ *uma sequência de funções analíticas em um domínio compacto comum* $K \subset \mathbb{C}$ *e suponhemos que* $\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{z\in K}|a_n(z) - 1| < \infty$. *Então, a produtória infinita* $\prod_{k=1}^{\infty} a_k(z)$ *converge uniformemente em* K *e define nesse domínio uma função analítica. Essa função pode ser escrita como* $\prod_{k=1}^{\infty} a_k(z) = \left[\prod_{k=1}^{N} a_k(z)\right]\exp\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\log a_n(z)\right)$ *para todo* $N \in \mathbb{N}$ *suficientemente grande, sendo que* $\sum_{n=N+1}^{\infty}\log a_n(z)$ *converge absoluta e uniformemente em* K *e define uma função analítica nesse domínio.* □

Prova. A hipótese $\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{z\in K}|a_n(z) - 1| < \infty$ implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{z\in K}|a_n(z) - 1| < 1/2$ para todo $n \geq N$ e, portanto, valem para todo $n \geq N$ as afirmações que a_n não se anula em K e que $\log\big(a_n(z)\big)$ é analítica em K. Pela Proposição 6.1, vale também que $\prod_{k=1}^{\infty} a_k(z)$ converge para cada $z \in K$ e vale $\prod_{k=1}^{\infty} a_k(z) = \left[\prod_{k=1}^{N} a_k(z)\right]\exp\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\log a_n(z)\right)$, sendo que $\sum_{n=N+1}^{\infty}\log a_n(z)$ converge absolutamente para cada $z \in K$. Como vimos na demonstração da Proposição 6.1, vale $|\log a_n(z)| < 2|a_n(z) - 1| \leq 2\sup_{z\in K}|a_n(z) - 1|$. Com isso, vemos pela hipótese $\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{z\in K}|a_n(z) - 1| < \infty$ que $\sum_{n=N+1}^{\infty}\log a_n(z)$ converge uniformemente em K e, portanto, define uma função analítica nesse domínio. Isso implica também a convergência uniforme em K da sequência de produtórias finitas $\prod_{k=1}^{M} a_k(z)$. Note-se que cada função $\prod_{k=1}^{M} a_k(z)$ é analítica em K (por ser um produto finito de funções analíticas). Portanto, o limite $\prod_{k=1}^{\infty} a_k(z)$ define igualmente uma função analítica em K, por ser o limite uniforme de uma sequência de funções analíticas em um compacto. ■

6.2.1 Uma Dedução Elementar do Produto de Wallis

Como aplicação de nossa discussão anterior, vamos aqui apresentar uma dedução direta da chamada *fórmula de Wallis*, ou *fórmula do produto de Wallis*. Uma segunda demonstração independente será também apresentada em nossa discussão de propriedades da Função Gama de Euler, no Capítulo 7, página 282. Vide relação (7.46), página 297.

Para $n \geq 2$, vale a identidade

$$\big(\operatorname{sen} x\big)^n = -\frac{1}{n}\frac{d}{dx}\Big(\cos(x)\big(\operatorname{sen} x\big)^{n-1}\Big) + \frac{n-1}{n}\big(\operatorname{sen} x\big)^{n-2}, \tag{6.19}$$

cuja prova segue das linhas seguintes:

$$
\begin{aligned}
\big(\operatorname{sen}x\big)^n &= -\left(\frac{d}{dx}\cos x\right)\big(\operatorname{sen}x\big)^{n-1} = -\frac{d}{dx}\Big(\cos(x)\big(\operatorname{sen}x\big)^{n-1}\Big) + \cos x\frac{d}{dx}\Big(\big(\operatorname{sen}x\big)^{n-1}\Big) \\
&= -\frac{d}{dx}\Big(\cos(x)\big(\operatorname{sen}x\big)^{n-1}\Big) + (n-1)\big(\cos x\big)^2\big(\operatorname{sen}x\big)^{n-2} \\
&= -\frac{d}{dx}\Big(\cos(x)\big(\operatorname{sen}x\big)^{n-1}\Big) + (n-1)\big(\operatorname{sen}x\big)^{n-2} - (n-1)\big(\operatorname{sen}x\big)^n .
\end{aligned}
$$

Com o uso de (6.19) pode-se calcular recursivamente integrais envolvendo potências da função seno. Definindo para todo $n \in \mathbb{N}_0$

$$J_n := \int_0^{\pi/2} \big(\operatorname{sen}x\big)^n\, dx$$

teremos por (6.19), para $n \geq 2$, as relações recursivas

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} . \tag{6.20}$$

Verifique! Observe-se agora que

$$J_0 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad J_1 = 1 .$$

Logo, por (6.20), valem para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$J_{2m} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{m}\frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} , \tag{6.21}$$

$$J_{2m+1} = \prod_{k=1}^{m}\frac{2k}{2k+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} . \tag{6.22}$$

Verifique! Dividindo-se a linha de cima pela de baixo obtém-se facilmente que

$$\frac{\pi}{2} = \left[\prod_{k=1}^{m}\frac{2k}{2k-1}\,\frac{2k}{2k+1}\right]\frac{J_{2m}}{J_{2m+1}} ,$$

identidade essa que também pode ser expressa na forma

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\big[(2m)!!\big]^2}{(2m-1)!!(2m+1)!!}\,\frac{J_{2m}}{J_{2m+1}} = \left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2m+1}\,\frac{J_{2m}}{J_{2m+1}} . \tag{6.23}$$

Como essas identidades valem para todo $m \in \mathbb{N}$, é natural perguntarmos o que sucede se tomarmos o limite $m \to \infty$ do lado direito das mesmas. Para responder a isso precisamos entender o que acontece no limite $m \to \infty$ com a razão J_{2m}/J_{2m+1}.

Como $0 < \operatorname{sen}x < 1$ para $x \in (0,\ \pi/2)$, é evidente que nesse intervalo vale também $0 < \big(\operatorname{sen}x\big)^{2m+1} < \big(\operatorname{sen}x\big)^{2m} < \big(\operatorname{sen}x\big)^{2m-1}$. Logo,

$$1 < \frac{\int_0^{\pi/2}\big(\operatorname{sen}x\big)^{2m}dx}{\int_0^{\pi/2}\big(\operatorname{sen}x\big)^{2m+1}dx} < \frac{\int_0^{\pi/2}\big(\operatorname{sen}x\big)^{2m-1}dx}{\int_0^{\pi/2}\big(\operatorname{sen}x\big)^{2m+1}dx}$$

o que, face a (6.20), significa que

$$1 < \frac{J_{2m}}{J_{2m+1}} < 1 + \frac{1}{2m} .$$

Verifique! Logo $\lim_{m\to\infty}\frac{J_{2m}}{J_{2m+1}} = 1$ e, portanto, por (6.23),

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{\prod_{k=1}^{m}\frac{2k}{2k-1}\,\frac{2k}{2k+1}} = 1$$

o que implica que o limite $\lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\frac{2k}{2k-1}\,\frac{2k}{2k+1}$ existe e que vale

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\frac{2k}{2k-1}\,\frac{2k}{2k+1} . \tag{6.24}$$

Essa é a *fórmula de Wallis*[17], também denominada *fórmula do produto Wallis* ou *produto de Wallis*, obtida em 1665, e que pode ainda ser expressa como

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\frac{4k^2}{4k^2-1} \tag{6.25}$$

ou como

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\frac{1}{2m+1} . \tag{6.26}$$

Note-se que a convergência da produtória infinita $\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}$ pode ser provada diretamente do critério listado na Proposição 6.1, página 276, pois

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2k}{2k-1}\,\frac{2k}{2k+1} - 1\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} < \infty .$$

Usando os fatos bem conhecidos que $(2m)!! = 2^m m!$ e $(2m)! = (2m)!!(2m-1)!!$ (Exercício E. 7.14, página 317), podemos também reescrever (6.25) na forma

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty}\frac{2^{4m}(m!)^4}{\big((2m)!\big)^2}\,\frac{1}{2m+1} . \tag{6.27}$$

Verifique! Essa expressão é útil na obtenção da chamada aproximação de Stirling, como tratado na Seção 7.6.1, página 307.

[17] John Wallis (1616–1703).

6.3 Exercícios Adicionais

E. 6.10 *Exercício*. Prove (usando, por exemplo, indução) que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{a=1}^{n} a = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{a=1}^{n} a^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{e} \qquad \sum_{a=1}^{n} a^3 = \left(\sum_{a=1}^{n} a\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{6.28}$$

A expressão geral para tais somas finitas de potências de números naturais é

$$\sum_{a=1}^{n} a^m = \frac{(n+1)^{m+1}}{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \frac{B_k}{m-k+1}(n+1)^{m-k+1}, \tag{6.29}$$

para todos $m, n \in \mathbb{N}$, onde B_k são os números de Bernoulli, definidos e estudados na Seção 6.1.1 274. Prove isso! Para mais identidades do gênero, vide, *e.g.* [125]. ✣

E. 6.11 *Exercício*. Prove (usando, por exemplo, indução) que

$$\sum_{a=0}^{n}(-1)^a a = (-1)^n \lceil n/2 \rceil, \qquad \sum_{a=0}^{n}(-1)^a(2a+1) = (-1)^n(n+1), \qquad \sum_{a=0}^{n}(-1)^a(2a) = (-1)^n 2\lceil n/2 \rceil, \tag{6.30}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. As funções $\lfloor \cdot \rfloor$ e $\lceil \cdot \rceil$ estão definidas na página 28. ✣

E. 6.12 *Exercício-dirigido*. O propósito deste exercício dirigido é demonstrar a importante *fórmula da cotangente de Euler*, também conhecida como *expansão em frações parciais da função cotangente*:

$$\pi \operatorname{cotg}(\pi z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{n^2 - z^2}, \tag{6.31}$$

válida para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Estabeleceremos primeiro a relação

$$\pi \operatorname{cotg}(\pi x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}, \tag{6.32}$$

para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. A expressão (6.32) foi obtida pela primeira vez por Euler em 1749. Seguiremos uma demonstração elementar e elegante devida a Herglotz[18] tal como apresentada em [6], texto esse que, por sua vez, segue Elstrodt[19]. Essa demonstração é elegante por fazer uso de poucos ingredientes. Basicamente usa-se apenas o fato de que ambos os lados de (6.32) são funções contínuas (em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$), são periódicas de período 1, têm as mesmas divergências nos inteiros e, *last but not least*, satisfazem uma mesma relação algébrica, a relação (6.33), abaixo. Para uma outra demonstração de (6.31) usando o Teorema de Mittag-Leffler, vide [190] ou outro bom livro de funções de variável complexa. A relação (6.32) pode também ser provada usando séries de Fourier. Vide Exercício E. 38.23, página 1889. Vide também [103]. Para uma demonstração usando a chamada *representação produto da função seno*, vide Exercício E. 7.5, página 297.

Passemos à prova de Herglotz para (6.31). Defina-se, para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$f(x) := \pi \operatorname{cotg}(\pi x) \qquad \text{e} \qquad g(x) := \lim_{N \to \infty} g_N(x),$$

onde

$$g_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{N} \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

Desejamos provar que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Isso é feito nos passos indicados no que segue.

a. Prove que $g_N(x)$ converge uniformemente para $N \to \infty$ e em qualquer intervalo fechado contido em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Sugestões: para $n \geq 2$ e $2n - 1 > x^2$ tem-se $n^2 - x^2 > (n-1)^2 > 0$ e

$$0 < \frac{1}{n^2 - x^2} < \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Use o Teste M de Weierstraß[20] (Proposição 38.1, página 1831) e use o teste da comparação por uma integral para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é finita.
Isso estabeleceu que g existe em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

[18] Gustav Ferdinand Maria Herglotz (1881–1953).
[19] J. Elstrodt, "Partialbruchzerlegung des Kotangens, Herglotz-Trick und die Weierstraßsche stetige, nirgendsdifferenzierbare Funktion". Math. Semesterberichte **45**, 207–220 (1998).
[20] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897).

b. Convença-se que f e g são contínuas em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Para g isso segue da convergência uniforme provada em **1**.

c. Mostre que f e g são periódicas de período 1. Para f isso é evidente. Para g isso segue de

$$g_N(x+1) = g_N(x) + \frac{1}{x+N} + \frac{1}{x+1+N},$$

para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Prove isso e tome $N \to \infty$ para obter $g(x+1) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

d. Mostre que f e g são funções ímpares: $f(-x) = -f(x)$ e $g(-x) = -g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Novamente isso é evidente para f e para g isso segue do fato que $g_N(-x) = -g_N(x)$ para todo N.

e. Até aqui só lidamos com propriedades elementares de f e g mas agora vem uma passagem crucial. Mostre que f e g satisfazem

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x) \qquad \text{e} \qquad g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g(x), \tag{6.33}$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Note que se trata da mesma relação algébrica para f e g. Para f isso segue das bem-conhecidas fórmulas de adição das funções seno e cosseno. Mostre isso. Para g isso segue da identidade

$$g_N\left(\frac{x}{2}\right) + g_N\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g_{2N}(x) + \frac{2}{x+2N+1}.$$

Prove-a usando a relação trivial

$$\frac{1}{\frac{x}{2}+n} + \frac{1}{\frac{x+1}{2}+n} = \frac{2}{x+2n} + \frac{2}{x+1+2n}$$

e tome o limite $N \to \infty$.

f. Defina a função $h(x) := f(x) - g(x)$ (que desejamos provar ser identicamente nula). Note em primeiro lugar que h é uma função ímpar, contínua e periódica de período 1 em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, pois f e g o são.

g. Mostre, usando, por exemplo, a regra de l'Hospital[21], que

$$\lim_{x \to 0}\left(\pi \operatorname{cotg}(\pi x) - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\pi x \cos(\pi x) - \operatorname{sen}(\pi x)}{x \operatorname{sen}(\pi x)}\right) = 0.$$

h. Mostre que fato provado em **7** implica $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$. Como h é periódica de período 1, isso significa que $\lim_{x \to n} h(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Definindo $h(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, essa propriedade, por sua vez, implica que a função h torna-se contínua e periódica de período 1 em todo $\mathbb{R}$, não apenas em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

i. Como h é contínua e periódica em todo $\mathbb{R}$, h possui um máximo, que denotaremos por H. Seja x_0 um ponto de $\mathbb{R}$ tal que $h(x_0) = H$ (que um tal ponto existe segue da continuidade e periodicidade de h). Agora, tem-se por (6.33) que

$$h\left(\frac{x_0}{2}\right) + h\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) - g\left(\frac{x_0}{2}\right) - g\left(\frac{x_0+1}{2}\right)$$

$$\stackrel{(6.33)}{=} 2f(x_0) - 2g(x_0) = 2h(x_0) = 2H.$$

Isso está dizendo que a soma de $h\left(\frac{x_0}{2}\right)$ e $h\left(\frac{x_0+1}{2}\right)$ é duas vezes o máximo valor alcançado por h em toda $\mathbb{R}$. Ora, isso só é possível se ambos os termos forem iguais a H, pois se um fosse menor que H o outro teria que ser maior que H, o que não é possível. Assim concluímos que $h\left(\frac{x_0}{2}\right) = H$ (e que $h\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = H$, mas não usaremos esse segundo fato).
Vimos então que $h(x_0) = H$ implica $h\left(\frac{x_0}{2}\right) = H$. Prosseguindo indutivamente, segue que $h\left(\frac{x_0}{2^m}\right) = H$ para todo inteiro m com $m \geq 0$. Como h é contínua, podemos tomar o limite $m \to \infty$ e obter

$$H = \lim_{m \to \infty} h\left(\frac{x_0}{2^m}\right) \stackrel{\text{continuidade}}{=} h\left(\lim_{m \to \infty} \frac{x_0}{2^m}\right) = h(0) = 0,$$

concluindo que $H = 0$.

j. Vimos que o máximo de h em $\mathbb{R}$ é nulo. Isso significa que $h(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Porém, como h é uma função ímpar (observado no item **f**), isso implica que $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isso provou que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, ou seja, provou (6.32) em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, como queríamos.

Que a relação (6.31) vale para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ segue agora do fato que ambos os lados de (6.32) têm extensões analíticas em todo $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ (prove isso!) e são iguais em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, por (6.32) (justifique!). ✣

[21] Guillaume François Antoine, Marquês de l'Hôpital (ou l'Hospital) (1661–1704).