

Capítulo 7

A Função Gama de Euler

Conteúdo

7.1	Introdução e Motivação	282
7.2	A Função Gama, Definição e Primeiras Propriedades	284
7.3	Outras Representações para a Função Gama	289
7.4	A Função Beta e Propriedades Adicionais da Função Gama	293
7.4.1	A Fórmula de Reflexão de Euler	294
7.4.2	A Fórmula de Duplicação de Legendre	298
7.5	Teoremas Sobre a Unicidade da Função Gama e Outros Resultados	299
7.5.1	O Teorema de Bohr-Mollerup	299
7.5.2	Fórmulas de Duplicação e Unicidade	300
7.5.3	O Teorema de Wielandt e Algumas de Suas Consequências	302
7.5.3.1	A Fórmula de Multiplicação de Gauss da Função Gama	303
7.6	A Aproximação de Stirling e suas Correções	305
7.6.1	A Aproximação de Stirling para Fatoriais e suas Correções. A Série de Gudermann	307
7.6.2	A Aproximação de Stirling para a Função Gama e suas Correções. A Série de Gudermann	312
7.7	Exercícios Adicionais	317

Este capítulo é dedicado à chamada *função gama de Euler*¹, ou simplesmente *função gama*, denotada por $\Gamma(z)$, com z sendo uma variável complexa. A função gama frequentemente aparece na resolução de equações diferenciais ordinárias pelo método de expansão em séries de potências ou pelo método de Frobenius (como no caso da equação de Bessel e da equação hipergeométrica. Vide Seção 14.2.3, página 641 e Seção 14.2.7, página 656), assim como em várias áreas da Física e da Matemática. Na Mecânica Quântica não-relativística, por exemplo, a função gama surge em diversos problemas, como no cômputo de amplitudes de espalhamento para o espalhamento de Coulomb (vide e.g., [199], [231], [110] ou [139]). Na Teoria Quântica de Campos Relativística, propriedades da função gama são relevantes no chamado método de regularização dimensional. A função gama de Euler desempenha também um papel em Análise, por representar uma espécie de generalização contínua do fatorial de números naturais, como será precisado adiante, sendo possuidora de muitas propriedades interessantes. Seu estudo é também, pelo mesmo motivo, um ótimo laboratório para estudantes interessados em fixar seu aprendizado da teoria das funções de variável complexa. A função gama de Euler é relevante, por exemplo, no estudo de propriedades da chamada *função zeta de Riemann* (de importância na Teoria de Números) e sobre isso falamos um pouco no Capítulo 8, página 323.

Para outros tratamentos, por vezes mais extensos, da função gama de Euler e suas aplicações, recomendamos [16], [264], [154], [206], [348], ou ainda [205]. Ainda que nem todos esses textos primem por escolher as demonstrações mais simples para seus resultados, vale a pena o estudante inteirar-se de abordagens diversas. A referência [264] contém diversas notas históricas interessantes sobre a função gama de Euler². A referência [348] lista diversas identidades envolvendo Γ que não serão tratadas aqui.

7.1 Introdução e Motivação

A função gama de Euler foi inicialmente concebida por esse autor como uma generalização contínua do fatorial de números naturais: $n!$, $n \in \mathbb{N}$, definido como o produto $n! = n(n-1) \cdots 1$. A ideia que Euler perseguiu foi a de encontrar uma função G que satisfizesse $G(1) = 1$ e satisfizesse a equação funcional $G(x+1) = xG(x)$ para todo x real positivo. Com

¹Leonhard Euler (1707–1783).

²Vide também a nota-de-rodapé 3, página 283.

essas duas propriedades é elementar demonstrar (faça-o!) que $G(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Após diversas tentativas, Euler concluiu (em 1729)³ que a função $\Gamma(x)$, $x > 0$, definida por

$$\Gamma(x) := \frac{1}{x} \prod_{m=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^x \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{-1} \right] \tag{7.1}$$

satisfazia as condições desejadas acima listadas. De fato, é claro por (7.1) que $\Gamma(1) = 1$ e tem-se formalmente

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \frac{1}{x+1} \prod_{m=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{x+1} \left(1 + \frac{x+1}{m}\right)^{-1} \right] \\ &= \frac{x}{x+1} \underbrace{\left\{ \prod_{m=1}^{\infty} \left[\frac{m+1}{m} \frac{m+x}{m+1+x} \right] \right\}}_{=x+1} \left\{ \frac{1}{x} \prod_{m=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^x \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{-1} \right] \right\} = x\Gamma(x) \end{aligned}$$

(verifique!). Euler estudou diversas propriedades da função definida por (7.1), que posteriormente passou a ser chamada *função gama de Euler*, ou simplesmente *função gama*. Uma dessas propriedades identificadas por Euler foi o fato que $\Gamma(x)$ pode ser escrita na forma de uma simples integral:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \tag{7.2}$$

Que a função definida pelo lado direito de (7.2) vale 1 quando $x = 1$ é elementar de se provar (faça-o!) e, usando-se que $e^{-t} = -\frac{d}{dt} e^{-t}$ e integração por partes, constata-se facilmente também a validade da relação funcional $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para todo $x > 0$:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = \underbrace{-e^{-t} t^x}_0 \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x).$$

Por diversas razões não é conveniente seguirmos os passos históricos de Euler e iniciarmos nosso tratamento da função gama definindo-a por (7.1). Na literatura moderna há dois procedimentos mais comuns: definir-se Γ por (7.2) e depois obter-se (7.1) como uma propriedade derivada ou definir-se Γ a partir de uma outra expressão, a chamada *representação produto de Weierstrass*, a qual encontraremos à página 291 (eq. (7.27)).

Nestas notas optamos pelo primeiro procedimento⁴ e optamos também por apresentar a função gama de Euler já de início como uma função de variável complexa, pois várias de suas propriedades mais profundas são melhor compreendidas com esse tipo de tratamento.

Além do estudo das propriedades da função gama de Euler há uma questão que irá especialmente nos interessar e que será discutida na Seção 7.5, página 299. Trata-se da questão da unicidade: será a função definida em (7.2) a única função satisfazendo $G(1) = 1$ e a equação funcional $G(x+1) = xG(x)$? A resposta é claramente não, pois se P é uma função periódica de período 1 satisfazendo $P(1) = 1$ (por exemplo, $P(x) = \cos(2\pi x)$ ou $P(x) = e^{\operatorname{sen}(2\pi x)}$), então $G(x) := P(x)\Gamma(x)$ também satisfaz ambas as relações⁵. Mas, então, que outras condições podem ser adicionadas de forma a garantir-se que $\Gamma(x)$ definida em (7.2) é a única solução? Há várias respostas a essa pergunta e a primeira resposta (historicamente) é o conteúdo de um elegante teorema, denominado Teorema de Bohr-Mollerup, o qual será apresentado na Seção 7.5.1, página 299. A questão da unicidade é uma questão interessante por si só, mas sua resposta tem conteúdo prático pois, como veremos, diversas propriedades da função gama de Euler podem ser obtidas a partir da verificação de condições de unicidade.

Um outro tema que nos irá interessar é o estudo de propriedades assintóticas da função Γ para valores “grandes” de seu argumento. Essa questão é importante por sua conexão com uma interessante e útil aproximação: a chamada

³Euler foi antecedido em alguns dias por Daniel Bernoulli, o qual encontrou uma outra solução equivalente. Para notas históricas precisas sobre o nascimento da função gama de Euler e seus primeiros desenvolvimentos, vide Detlef Gronau “Why is the gamma function so as it is?”, Teaching Mathematics and Computer Science, 1/1, 43-53 (2003).

⁴Para um texto que segue a segunda via, vide e.g. [264]. Em verdade, [264] define primeiramente $\Delta(z) = 1/\Gamma(z)$ que, por ser uma função inteira, é de tratamento mais simples.

⁵Veremos que isso esgota as possibilidades: todas as funções que satisfazem $G(1) = 1$ e $G(x+1) = xG(x)$ são da forma $G(x) = P(x)\Gamma(x)$ com P periódica de período 1 satisfazendo $P(1) = 1$.

aproximação de Stirling para $n!$ quando n é “grande”, utilizada na Teoria das Probabilidades e na Mecânica Estatística. Esse será o assunto da Seção 7.6, página 305.

Por fim, não podemos deixar de mencionar uma das maiores utilidades práticas da função gama de Euler: o cálculo de certas integrais definidas, assunto que desenvolveremos especialmente em exercícios.

7.2 A Função Gama. Definição e Primeiras Propriedades

• Alguma notação

Neste capítulo denotaremos por \mathbb{C}_c o plano complexo sem o eixo real negativo e o zero:

$$\mathbb{C}_c := \mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(w) \leq 0 \text{ e } \operatorname{Im}(w) = 0\}.$$

Por \mathbb{C}_* denotaremos o plano complexo sem os inteiros reais negativos e o zero:

$$\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} \mid -\operatorname{Re}(w) \in \mathbb{N}_0 \text{ e } \operatorname{Im}(w) = 0\}.$$

• Definindo a função gama de Euler

A função Γ , pode ser definida em todo plano complexo (exceto, como veremos, no conjunto dos inteiros não-positivos, onde possui polos simples). No semiplano $\operatorname{Re}(z) > 0$, $\Gamma(z)$ é definida por

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (7.3)$$

A seguinte proposição contém informações relevantes sobre (7.3) e sobre a estrutura analítica de Γ :

Proposição 7.1 *A integral em (7.3) converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(z) > 0$. A função Γ definida por (7.3) é analítica no semiplano $\operatorname{Re}(z) > 0$ e pode ser analiticamente estendida a todo \mathbb{C} , exceto para os pontos $z = 0, -1, -2, \dots$, os inteiros não-positivos, que são polos simples de Γ . É válida a chamada representação de Mittag-Leffler da função Γ , ou representação em soma de frações parciais da função Γ :*

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (7.4)$$

sendo que a integral no lado direito é analítica para todo $z \in \mathbb{C}$ e soma no lado direito converge uniformemente em domínios limitados de \mathbb{C} que excluam os inteiros não-positivos e, portanto, representa uma função analítica para todo $z \in \mathbb{C}$, exceto nos inteiros não-positivos, onde possui polos simples. O resíduo de Γ em $z = -n$ é dado por $\frac{(-1)^n}{n!}$ para todo $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ \square

Prova. Para ver que a integral em (7.3) converge absolutamente para $\operatorname{Re}(z) > 0$, escrevemos $z = x + iy$ com $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$ e escolhemos α e β tais que $0 < \alpha < x < \beta < \infty$. Como $|t^{z-1}| = t^{x-1}$ tem-se

$$\int_0^\infty |e^{-t} t^{z-1}| dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{\beta-1} dt.$$

Agora, a integral $\int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ é finita, pois, para $\alpha > 0$

$$\int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt \leq \int_0^1 t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\alpha} < \infty,$$

enquanto que $\int_1^\infty e^{-t} t^{\beta-1} dt$ é finita para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$ pois, devido ao rápido decaimento da exponencial, tem-se $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^{\beta-1} = 0$, para todo $\gamma > 0$, o que implica que existe constante $C_{\gamma, \beta} > 0$ tal que

$$t^{\beta-1} \leq C_{\gamma, \beta} e^{\gamma t} \quad (7.5)$$

para todo $t > 1$. Assim, tomando $0 < \gamma < 1$, vale

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{\beta-1} dt \leq C_{\gamma, \beta} \int_1^\infty e^{-(1-\gamma)t} dt = C_{\gamma, \beta} \frac{e^{-(1-\gamma)}}{1-\gamma} < \infty.$$

Isso prova que a integral em (7.3) converge absolutamente se $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Para provar que $\Gamma(z)$ é analítica no semiplano $\operatorname{Re}(z) > 0$, começamos observando que, para $0 < a < A < \infty$, a função

$$\Gamma_{a, A}(z) := \int_a^A e^{-t} t^{z-1} dt$$

é analítica na região $\operatorname{Re}(z) > 0$. Isso se deve ao fato de ser possível verificar a validade das relações de Cauchy-Riemann para $\Gamma_{a, A}(z)$, diferenciando-a sob o símbolo de integração e usando o fato de que $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln(t)}$ é analítica em z para $t > 0$. Que é possível diferenciar sob o símbolo de integração segue do fato de o integrando ser contínuo em t e a região de integração ser o intervalo compacto $[a, A]$.

Uma vez estabelecido que $\Gamma_{a, A}(z)$ é analítica em $\operatorname{Re}(z) > 0$, podemos provar que $\Gamma_A(z)$, definida por

$$\Gamma_A(z) := \lim_{a \rightarrow 0} \Gamma_{a, A}(z) = \int_0^A e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (7.6)$$

é também analítica em $\operatorname{Re}(z) > 0$. Para tal, tomemos $z \in F_{\alpha, \beta}$, onde $F_{\alpha, \beta} \subset \mathbb{C}$ é a faixa definida por

$$F_{\alpha, \beta} := \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \operatorname{Re}(z) < \beta\},$$

com $0 < \alpha < \beta < \infty$, ou seja, tomemos $0 < \alpha < \operatorname{Re}(z) < \beta$. Então, para $A > 0$ fixo e $0 < a' < a < 1$,

$$|\Gamma_{a, A}(z) - \Gamma_{a', A}(z)| \leq \int_{a'}^a e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_{a'}^a t^{\alpha-1} dt = \frac{(a')^\alpha - a^\alpha}{\alpha},$$

que pode ser feito menor que qualquer $\epsilon > 0$ dado, para todos a e a' pequenos o suficiente. Dessa forma, o limite que define $\Gamma_A(z)$ em (7.6) é uniforme em $F_{\alpha, \beta}$. Assim, por ser o limite uniforme de funções analíticas, $\Gamma_A(z)$ é igualmente analítica em $F_{\alpha, \beta}$ (esse é um teorema bem-conhecido da teoria das funções de variável complexa). Como α e β são arbitrários ($0 < \alpha < \beta$), $\Gamma_A(z)$ é analítica para todo o semiplano $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Para provar que

$$\Gamma(z) = \lim_{A \rightarrow \infty} \Gamma_A(z) \quad (7.7)$$

é analítica para todo o semiplano $\operatorname{Re}(z) > 0$ temos que provar que esse limite é uniforme nas faixas $z \in F_{\alpha, \beta}$ e evocar o mesmo teorema da teoria das funções de variável complexa mencionado acima. Para provar a uniformidade do limite, notemos que para $1 < A < B$, tem-se, com $0 < \gamma < 1$,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^B e^{-t} t^{z-1} dt - \int_0^A e^{-t} t^{z-1} dt \right| &\leq \int_A^B e^{-t} t^{x-1} dt \stackrel{t \geq 1}{\leq} \int_A^B e^{-t} t^{\beta-1} dt \stackrel{(7.5)}{\leq} C_{\gamma, \beta} \int_A^B e^{-(1-\gamma)t} dt \\ &= \frac{C_{\gamma, \beta}}{1-\gamma} \left(e^{-(1-\gamma)A} - e^{-(1-\gamma)B} \right), \end{aligned} \quad (7.8)$$

que pode ser feito menor que qualquer $\epsilon > 0$ prescrito para todos A e B grandes o suficiente. Isso provou que o limite em (7.7) é uniforme em cada faixa $F_{\alpha, \beta}$ com $0 < \alpha < \beta$, mostrando que $\Gamma(z)$ é analítica em cada uma dessas faixas $F_{\alpha, \beta}$ e, portanto, em todo o semiplano $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Para provar que Γ possui uma extensão analítica para a região $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ (exceto, como mencionamos, os inteiros não-positivos), notamos que para $\operatorname{Re}(z) > 0$ podemos escrever (7.3) trivialmente como

$$\Gamma(z) := \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Agora, a integral imprópria $I(z) := \int_1^\infty e^{-tz^{-1}} dt$ é analítica para todo $z \in \mathbb{C}$, o que pode ser visto repetindo os argumentos de convergência uniforme de acima: para $1 < A < A' < \infty$, escrevendo $x = \text{Re}(z)$ e restringindo-nos provisoriamente à região $x < \beta$, para algum $\beta \in \mathbb{R}$, temos

$$\left| \int_1^A e^{-tz^{-1}} dt - \int_1^{A'} e^{-tz^{-1}} dt \right| = \left| \int_0^A e^{-te^{-t}z^{-1}} dt - \int_0^{A'} e^{-te^{-t}z^{-1}} dt \right| \stackrel{(7.8)}{\leq} C_{\gamma, \beta} \frac{e^{-(1-\gamma)A} - e^{-(1-\gamma)A'}}{1-\gamma},$$

que, escolhendo-se $0 < \gamma < 1$, pode ser feita menor que qualquer $\epsilon > 0$ prescrito para todos A, A' grandes o suficiente. Isso prova que o limite $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A e^{-tz^{-1}} dt$ é uniforme na região $\text{Re}(z) < \beta$, o que prova que a integral imprópria $I(z)$, sendo o limite uniforme de funções analíticas em $\text{Re}(z) < \beta$, é também analítica nessa região. Como $\beta \in \mathbb{R}$ é arbitrário, concluímos que a integral imprópria $I(z)$ é analítica em todo o plano complexo \mathbb{C} .

Já para a integral $\Gamma_1(z) = \int_0^1 e^{-tz^{-1}} dt$ tem-se

$$\int_0^1 e^{-tz^{-1}} dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n \right) t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n},$$

(a inversão da série pela integral na segunda igualdade acima é justificada pois, como é bem sabido, a série de Taylor da função exponencial converge uniformemente em intervalos compactos, como o intervalo de integração $[0, 1]$. Vide Teorema 38.6, página 1852). Dessa forma, obtemos a *representação de Mittag-Leffler*⁶ da função Γ , ou *representação em soma de frações parciais da função* Γ :

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{7.9}$$

Como dissemos, a integral no lado direito de (7.9) é analítica para todo $z \in \mathbb{C}$. Já a soma no lado direito de (7.9) converge uniformemente (devido ao $n!$ no denominador) em regiões finitas de \mathbb{C} que excluam os pontos $0, -1, -2, -3, \dots$ e, portanto, representa uma função analítica para todo $z \in \mathbb{C}$, exceto nos inteiros não-positivos, como mencionado, onde possui polos simples. Como se constata inspecionando (7.9), o resíduo de Γ em $z = -n$ é dado por $\frac{(-1)^n}{n!}$ para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Isso completa a demonstração. ■

Do exposto acima podemos facilmente concluir que para todo $z \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(z) > 0$ tem-se

$$|\Gamma(z)| \leq \Gamma(\text{Re}(z)). \tag{7.10}$$

De fato, $|\Gamma(z)| = \left| \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-t} t^{\text{Re}(z)-1} dt = \Gamma(\text{Re}(z))$, pois $t^{z-1} = t^{\text{Re}(z)-1} e^{i \text{Im}(z) \ln t}$ e, portanto, $|t^{z-1}| = t^{\text{Re}(z)-1}$.

O gráfico de $\Gamma(x)$ para x real no intervalo $(0, 5]$ pode ser visto na Figura 7.1, página 287. A Figura 7.2, página 288, exibe o gráfico de $\Gamma(x)$ para valores negativos de x , a saber, no intervalo $(-4, 0)$.

A demonstração acima da existência da mencionada extensão de Γ para argumentos com parte real negativa mostra que essa extensão pode ser calculada por meio da representação de Mittag-Leffler (7.9). Como veremos mais abaixo, porém, há uma outra forma, talvez mais conveniente, de expressar essa extensão, a saber, com uso da chamada *fórmula de reflexão* (provada adiante):

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi z)},$$

válida para z não-inteiro e que permite escrever

$$\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\Gamma(z)\text{sen}(\pi z)}, \tag{7.11}$$

com a qual, caso $\text{Re}(z) > 0$, a extensão de Γ para argumentos com parte real negativa (lado esquerdo) pode ser calculada em termos de $\Gamma(z)$ com $\text{Re}(z) > 0$ (no lado direito), dada concretamente pela integral (7.3).

Mais abaixo (vide (7.14)) apresentaremos outro argumento, talvez mais elementar, para provar que Γ possui uma extensão analítica para o semiplano $\text{Re}(z) \leq 0$ (exceto os inteiros não-positivos).

⁶Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846-1927). Para a definição geral da noção de série de Mittag-Leffler, vide [264] ou [187]. Um outro exemplo da série de Mittag-Leffler é a representação de Euler da função cotangente, expressão (6.31), página 280.

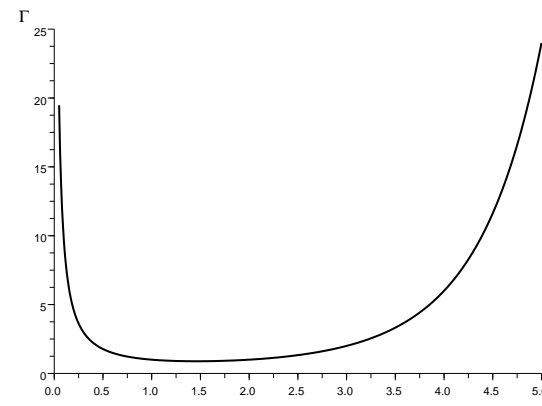


Figura 7.1: Gráfico de $\Gamma(x)$ para $x \in (0, 5]$. Observe que Γ diverge em 0.

Antes disso, façamos alguns comentários importantes.

• **Convexidade de Γ e de $\ln \Gamma$**

É imediato da definição (7.3) que para $\text{Re}(z) > 0$ valem

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \ln(t) dt \quad \text{e} \quad \Gamma''(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} (\ln(t))^2 dt. \tag{7.12}$$

A segunda expressão acima diz-nos que se z for real e positivo ($z \equiv x > 0$) então $\Gamma''(x) > 0$ e, portanto, Γ é uma função convexa em \mathbb{R}_+ . Em verdade, vale que também $\ln \Gamma$ é convexa em \mathbb{R}_+ , fato de certa relevância como veremos abaixo quando enunciarmos e demonstrarmos o Teorema de Bohr-Mollerup, Teorema 7.1, página 299. Para mostrar isso, notemos que, por (7.12),

$$\begin{aligned} (\Gamma(x)')^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \ln(t) dt \right)^2 \\ &= \left(\int_0^\infty \left(e^{-t/2} t^{(x-1)/2} \right) \left(e^{-t/2} t^{(x-1)/2} \ln(t) \right) dt \right)^2 \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\ln(t))^2 dt \right) = \Gamma(x)\Gamma''(x), \end{aligned}$$

o que implica $\frac{d^2}{dx^2} (\ln \Gamma(x)) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma(x)')^2}{(\Gamma(x))^2} \geq 0$, mostrando que $\ln \Gamma$ é convexa em \mathbb{R}_+ .

• **A função Γ e o fatorial de números naturais**

Usando integração por partes, segue que, para $\text{Re}(z) > 0$,

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \underbrace{-e^{-t} t^z}_=0 \Big|_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

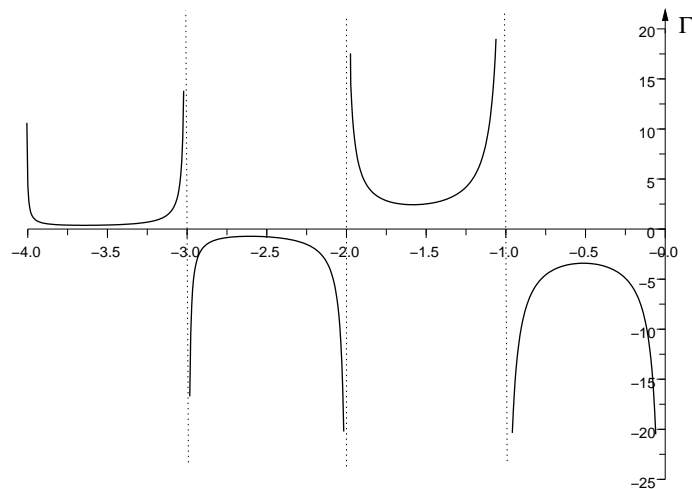


Figura 7.2: Gráfico de $\Gamma(x)$ para $x \in (-4, 0)$. Observe que Γ diverge em 0 e para inteiros negativos.

provando que

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z). \tag{7.13}$$

A relação (7.13) é por vezes denominada *fórmula do complemento* da função gama e é de grande importância, representando a razão de ser da função gama de Euler.

Por indução finita, e pelo fato de que, por (7.3), $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$, segue facilmente de (7.13) que

$$\Gamma(n + 1) = n!,$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Assim, a função Γ é uma espécie de extensão complexa do fatorial de números inteiros positivos.

Essa última observação merece um comentário. Há certamente muitas funções f em \mathbb{R}_+ satisfazendo $f(n + 1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Se f é uma função satisfazendo $f(x + 1) = xf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$, então $f(x)/\Gamma(x)$ é periódica de período 1, pois $f(x + 1)/\Gamma(x + 1) = (xf(x))/(\Gamma(x)) = f(x)/\Gamma(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$. Assim, $f(x) = P(x)\Gamma(x)$ com P periódica de período 1 é a solução mais geral da equação $f(x + 1) = xf(x)$. Se $P(1) = 1$ então $f(n + 1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Um célebre e elegante teorema, o Teorema de Bohr-Mollerup, garante que a função gama de Euler é a única função em \mathbb{R}_+ que satisfaz as seguintes condições: 1. $\Gamma(1) = 1$, 2. $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ e 3. $\ln \Gamma$ é convexa.

O Teorema de Bohr-Mollerup será enunciado e demonstrado na Seção 7.5.1, página 299 (vide Teorema 7.1, página 299). Na Seção 7.5, página 299, são demonstrados outros teoremas de unicidade da função gama de Euler sob outras caracterizações. Um deles é o notável Teorema de Wielandt, Teorema 7.3, página 302, que em um certo sentido é uma generalização aos complexos do Teorema de Bohr-Mollerup.

• **Revisitando a extensão de Γ para $\text{Re}(z) \leq 0$**

A expressão (7.3) permite definir $\Gamma(z)$, mas somente se $\text{Re}(z) > 0$ pois, de outra forma, a integral no lado direito de (7.3) não está definida. É possível, no entanto, estender analiticamente a função Γ a todo \mathbb{C} , exceto aos inteiros não-positivos. Já demonstramos esse fato acima, mas o mesmo pode também ser diretamente derivado da relação (7.13). Trataremos disso agora.

Para $n \in \mathbb{N}$, (7.13) diz-nos que

$$\Gamma(z + n) = (z + n - 1)(z + n - 2) \cdots z\Gamma(z),$$

o que permite escrever

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + n)}{(z + n - 1)(z + n - 2) \cdots z}. \tag{7.14}$$

Agora, $\Gamma(z + n)$ está definida por (7.3) para $\text{Re}(z + n) > 0$. Assim, (7.14) prolonga analiticamente $\Gamma(z)$ à região $\text{Re}(z) > -n$, exceto nos pontos $z = -k$ com $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Com isso, concluímos novamente que Γ possui uma extensão analítica ao plano complexo \mathbb{C} , exceto aos pontos $z = 0, -1, -2, \dots$, onde possui no máximo polos simples.

Note-se que, por (7.14) tem-se na região $\text{Re}(z) > -n$ que

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &= \frac{\Gamma(z + 1 + n)}{(z + n)(z + n - 1) \cdots (z + 1)} \stackrel{(7.13)}{=} \frac{(z + n)\Gamma(z + n)}{(z + n)(z + n - 1) \cdots (z + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(z + n)}{(z + n - 1) \cdots (z + 1)} \stackrel{(7.14)}{=} z\Gamma(z), \end{aligned} \tag{7.15}$$

provando que (7.13) permanece válida para a extensão.

Por (7.14) pode-se ver que $z = 0, -1, -2, \dots$ são realmente polos simples de Γ , pois pode-se calcular facilmente o resíduo de Γ em cada ponto $z = -n$ e constatar que é não-nulo. Por (7.14), esses resíduos são dados por

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z + n)\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} (z + n) \frac{\Gamma(z + n + 1)}{(z + n)(z + n - 1) \cdots z} = \frac{\Gamma(1)}{(-1)(-2) \cdots (-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}, \tag{7.16}$$

como já havíamos observado.

• **Outra representação integral equivalente**

Fazendo a mudança de variável $t = u^2$ a integral em (7.3) torna-se

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2z-1} du. \tag{7.17}$$

Disso segue que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}, \tag{7.18}$$

identidade essa que é muito útil e empregaremos adiante. Usando (7.13) para $z = \frac{1}{2}$, obtém-se

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n - 1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}, \tag{7.19}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

7.3 Outras Representações para a Função Gama

• **A representação produto de Gauss para Γ**

A função Γ pode ser expressa de diversas outras formas, muitas delas úteis para a obtenção de resultados mais profundos e exibiremos algumas aqui. Uma delas é uma *representação produto de Gauss⁷* para a função Γ :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z + 1) \cdots (z + n)}, \tag{7.20}$$

válida para todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$. No que segue provaremos a validade de (7.20) na região $\text{Re}(z) > 0$. A extensão para todo $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ será feita mais adiante (vide (7.29), página 292). Provemos primeiramente o seguinte lema:

⁷Johann Carl Friedrich Gauß (1777-1855).

Lema 7.1 Para $\text{Re}(z) > 0$ vale

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt. \quad (7.21)$$

□

Prova. (De [154], com modificações). Tomemos $z \in F_{\alpha, \beta}$, ou seja, $\alpha < \text{Re}(z) < \beta$, com α e β fixos, $0 < \alpha < \beta < \infty$.

Como $\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-t} t^{z-1} dt$, precisamos apenas provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{z-1} dt = 0. \quad (7.22)$$

Defina-se para $0 \leq t \leq n$,

$$h_n(t) := 1 - e^{-t} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

Como facilmente se constata,

$$h'_n(t) = e^{-t} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \frac{t}{n} \geq 0 \quad \text{para } 0 \leq t \leq n.$$

Como $h'_n(0) = 0$, segue que $h_n(t) = \int_0^t h'_n(s) ds$. Como $h'_n(s) \geq 0$ para $0 \leq s \leq n$, segue disso que $h_n(t) \geq 0$ para $0 \leq t \leq n$. Adicionalmente, como $\left(1 - \frac{s}{n}\right)^{n-1} \leq 1$ para $0 \leq s \leq n$, tem-se também

$$h_n(t) = \int_0^t h'_n(s) ds = \int_0^t e^{-s} \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{n-1} \frac{s}{n} ds \leq \int_0^t e^{-s} \frac{s}{n} ds \leq e^{-t} \int_0^t \frac{s}{n} ds = \frac{e^{-t} t^2}{2n}.$$

Com isso, estabeleceu-se que $0 \leq h_n(t) \leq \frac{e^{-t} t^2}{2n}$, o que implica

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{2n}. \quad (7.23)$$

Disso segue o fato bem-conhecido de cursos de Cálculo que

$$e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n, \quad (7.24)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, mas segue também que

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}, \quad (7.25)$$

fato que usaremos adiante.

Agora,

$$\int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{z-1} dt = F_a + G_{a,n},$$

onde, para $1 < a < n$, definimos

$$F_a := \int_0^a \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{z-1} dt, \quad G_{a,n} := \int_a^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{z-1} dt.$$

Podemos afirmar que, para $1 < a < n$,

$$|G_{a,n}| \leq \int_a^n \left(e^{-t} + \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{x-1} dt \stackrel{(7.25)}{\leq} 2 \int_a^n e^{-t} t^{x-1} dt \stackrel{a > 1}{\leq} 2 \int_a^n e^{-t} t^{\beta-1} dt$$

$$\stackrel{(7.5)}{\leq} 2C_{\gamma, \beta} \int_a^n e^{-(1-\gamma)t} dt = \frac{2C_{\gamma, \beta}}{1-\gamma} \left(e^{-(1-\gamma)a} - e^{-(1-\gamma)n}\right),$$

onde $x = \text{Re}(z) > 0$, $\alpha < x < \beta$, e usamos que $|t^z| = t^x$. A constante positiva γ de (7.5) é arbitrária, mas vamos escolhê-la de sorte que $0 < \gamma < 1$, o que garante o decaimento da última expressão em n e a . Paralelamente,

$$|F_a| \leq \int_0^a \left|e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right| t^{x-1} dt \stackrel{(7.23)}{\leq} \int_0^a \frac{t^{x+1}}{2n} dt = \frac{a^{x+1}}{2n(x+2)}$$

Com isso, vemos que para $1 < a < n$,

$$\left|\int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{z-1} dt\right| \leq \frac{a^{x+1}}{2n(x+2)} + \frac{2C_{\gamma, \beta}}{1-\gamma} \left(e^{-(1-\gamma)a} - e^{-(1-\gamma)n}\right).$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left|\int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{z-1} dt\right| \leq \frac{2C_{\gamma, \beta}}{1-\gamma} e^{-(1-\gamma)a}.$$

Mas o lado esquerdo não depende de a e o lado direito pode ser feito arbitrariamente pequeno tomando $a \rightarrow \infty$. Isso prova (7.22), completando a demonstração de (7.21) para $z \in F_{\alpha, \beta}$. Como α e β são arbitrários (com $0 < \alpha < \beta$), (7.21) fica provado para todo $\text{Re}(z) > 0$. ■

Passemos agora à prova de (7.20). Temos,

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt &\stackrel{\text{int. por partes}}{=} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{t^z}{z} \Big|_0^n + \frac{n}{nz} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^z dt \\ &= \frac{1}{z} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^z dt \\ &\stackrel{\text{int. por partes}}{=} \frac{(n-1)}{nz(z+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{z+1} dt \\ &\vdots \\ &\stackrel{n \text{ iterações}}{=} \frac{n!}{n^n z(z+1) \cdots (z+n-1)} \int_0^n t^{z+n-1} dt \\ &= \frac{n! n^{z+n}}{n^n z(z+1) \cdots (z+n)} = \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Por (7.21), isso prova (7.20).

• A representação produto de Weierstrass para Γ

A representação produto de Weierstrass para a função Γ , válida para todo $z \in \mathbb{C}$, é

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}, \quad (7.27)$$

onde γ é o definida por

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right).$$

A constante γ é chamada *constante de Euler-Mascheroni*⁸ e vale⁹ $0,577215665 \dots$. Para a conveniência do leitor, a Seção 6.2, página 276, discute a noção de convergência de produtórias infinitas, como a que ocorre no lado direito de (7.27), e

⁸Lorenzo Mascheroni (1750–1800).

⁹Vide nota de rodapé à página 1321. A convergência do limite que define γ , acima, é discutida em todo bom livro de Cálculo (vide, e.g., [303]). É até hoje um problema em aberto saber se γ é um número racional ou não.

condições suficientes para que a mesma se dê. A convergência da produtória que ocorre no lado direito de (7.27) para todo $z \in \mathbb{C}$ será estabelecida logo adiante.

Vamos primeiramente estabelecer (7.27) na região $\text{Re}(z) > 0$. Definindo,

$$\Gamma^{(n)}(z) := \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt \stackrel{(7.26)}{=} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \quad (7.28)$$

provamos no Lema 7.1 que $\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma^{(n)}(z)$ para $\text{Re}(z) > 0$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma^{(n)}(z)} &= \frac{n^{-z}}{n!} z(z+1)\cdots(z+n) = ze^{-z \ln(n)} (1+z) \left(1 + \frac{z}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{z}{n}\right) \\ &= ze^{z(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n))} \prod_{s=1}^n \left(1 + \frac{z}{s}\right) e^{-\frac{z}{s}} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma^{(n)}(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{s}\right) e^{-\frac{z}{s}},$$

provando (7.27) para $\text{Re}(z) > 0$. Vamos agora provar que a produtória do lado direito converge para todo $z \in \mathbb{C}$ e define uma função inteira de z . Tendo em vista o Corolário 6.1, página 277, consideremos para cada $r > 0$ o conjunto compacto $K_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ (o disco fechado de raio r centrado na origem). Da expansão em série de Taylor da função exponencial, obtém-se facilmente que para todo $w \in \mathbb{C}$ vale

$$1 - (1-w)e^w = w^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) w^{k-1}.$$

Verifique! Logo, como $\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \geq 0$ para todo k , tem-se para $|w| \leq 1$ que $|1 - (1-w)e^w| \leq |w|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = |w|^2$. Portanto, tomando-se $w = -z/n$, teremos $\left| \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} - 1 \right| \leq \frac{|z|^2}{n^2}$ sempre que $|z| \leq n$. Logo,

$$\sup_{z \in K_r} \left| \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} - 1 \right| \leq \frac{r^2}{n^2}$$

para todo $n \geq r$. Como a sequência $1/n^2$ é somável, concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{z \in K_r} \left| \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} - 1 \right| < \infty.$$

Pelo Corolário 6.1, página 277, isso demonstra que $\prod_{s=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{s}\right) e^{-\frac{z}{s}}$ converge e é analítica em K_r e, como $r > 0$ é arbitrário, concluímos que essa produtória infinita define uma função inteira (i.e., analítica em toda parte).

A representação produto de Weierstrass (7.27) pode, portanto, ser estendida para todo $z \in \mathbb{C}$, estabelecendo que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ é uma função inteira, o que implica que $\Gamma(z)$ não possui zeros. Segue também facilmente de (7.27) que

$$\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)}$$

em todo domínio de definição de Γ .

A convergência da produtória infinita e $\prod_{s=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{s}\right) e^{-\frac{z}{s}}$ permite-nos estender a representação produto de Gauss (7.20) para além da região $\text{Re}(z) > 0$. De fato, é evidente que para todo $z \in \mathbb{C}$ vale

$$z \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} = \frac{z(z+1)\cdots(z+m)}{m! m^z} \exp \left[z \left(\ln m - \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \right) \right].$$

Logo, como o limite $m \rightarrow \infty$ do lado esquerdo existe para todo $z \in \mathbb{C}$, pelo exposto acima, e como $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\ln m - \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \right) =$

$-\gamma$, concluímos que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+m)}{m! m^z}, \quad (7.29)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Isso estende a representação produto de Gauss (7.20) para toda região $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$.

• **A representação produto de Euler para Γ**

É bastante evidente que para todo $n > 1$, inteiro, vale

$$n = \prod_{l=1}^{n-1} \left(\frac{l+1}{l}\right) = \prod_{l=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{l}\right), \quad (7.30)$$

De acordo com (7.28), podemos escrever

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)}(z) &= \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = n^z \frac{1}{z} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1} \\ &\stackrel{(7.30)}{=} \left[\prod_{l=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{l}\right)^z \right] \frac{1}{z} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{z(1+\frac{1}{n})^z} \prod_{m=1}^n \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^z \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1} \right], \end{aligned} \quad (7.31)$$

e tomando o limite $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{m=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^z \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1} \right] \quad (7.32)$$

válida para todo $z \in \mathbb{C}$, exceto $z = 0, -1, -2, -3, \dots$. Esta é a *representação produto de Euler para a função Γ* . A expressão (7.32), obtida por Euler em 1729, foi a definição historicamente original da função Γ , a representação integral (7.3) tendo sido obtida posteriormente pelo mesmo autor a partir de (7.32). Euler chegou a (7.32) propondo-a como solução da equação funcional $f(z+1) = zf(z)$ com $f(1) = 1$, tentando dessa forma obter uma generalização contínua do fatorial de números naturais.

E. 7.1 Exercício. Verifique diretamente de (7.32) que Γ satisfaz $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ com $\Gamma(1) = 1$. Sugestão: usando a última expressão em (7.31) considere a razão $\Gamma^{(n)}(z+1)/\Gamma^{(n)}(z)$ e tome o limite $n \rightarrow \infty$. *

E. 7.2 Exercício. De (7.14) e de (7.20) prove que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z \Gamma(n+1)}{\Gamma(z+n+1)} = 1$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. *

7.4 A Função Beta e Propriedades Adicionais da Função Gama

• **Função beta. Propriedades elementares**

A chamada *função beta*, denotada por $B(p, q)$ é definida por

$$B(p, q) := \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (7.33)$$

para p e q complexos, mas diferentes de inteiros não-positivos. Observe-se que, pela definição, B é uma função simétrica pela permutação de seus argumentos:

$$B(p, q) = B(q, p).$$

Para $\text{Re}(p) > 0$ e $\text{Re}(q) > 0$ podemos expressar $B(p, q)$ em uma forma integral muito útil:

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta. \quad (7.34)$$

Provamo-la com uso de (7.17), que nos diz que

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \left(\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2p-1} du \right) \left(\int_0^\infty e^{-v^2} v^{2q-1} dv \right) = 4 \iint_{u \geq 0, v \geq 0} e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1} dudv.$$

Usando coordenadas polares, escrevemos $u = r \cos \theta$ e $v = r \sin \theta$ com $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (pois $u \geq 0$ e $v \geq 0$) e obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} dr d\theta \\ &= \left(2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr \right) \left(2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta \right) \\ &\stackrel{(7.17)}{=} \Gamma(p+q) \left(2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta \right), \end{aligned}$$

provando (7.34).

Por mudanças de variável, obtém-se outras representações integrais equivalentes a (7.34) para $B(p, q)$. Tomando $t = (\cos \theta)^2$ obtemos trivialmente de (7.34) que

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt. \quad (7.35)$$

Tomando em (7.35) $u = \frac{t}{1-t}$ obtém-se, por outro lado,

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du. \quad (7.36)$$

As representações (7.34), (7.35) e (7.36) valem para $\text{Re}(p) > 0$ e $\text{Re}(q) > 0$. Alguns textos adotam (7.35) como definição de $B(p, q)$ para $\text{Re}(p) > 0$ e $\text{Re}(q) > 0$.

De (7.34) e de (7.33) obtém-se trivialmente a seguinte identidade útil:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta = \frac{1}{2} \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}, \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (7.37)$$

E. 7.3 Exercício. Mostre que

$$\int_0^1 s^a (1-s)^b ds = \frac{1}{2} B\left(\frac{a+1}{2}, b+1\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \Gamma(b+1)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2} + b + 1\right)}. \quad (7.38)$$

Sugestão: em (7.35) faça a mudança de variável $t = s^2$. Identifique para quais valores complexos de a e b a relação acima é válida. ✦

7.4.1 A Fórmula de Reflexão de Euler

Talvez a principal aplicação de (7.33) e das representações integrais (7.34), (7.35) e (7.36) seja o estabelecimento da importante *fórmula de reflexão para a função Γ* , ou *fórmula de reflexão de Euler*:

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\text{sen}(\pi z)}{\pi}, \quad (7.39)$$

válida para todo $z \in \mathbb{C}$, relação esta que pode ser escrita em forma mais simétrica como

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)} = \frac{\cos(\pi z)}{\pi}, \quad (7.40)$$

válida para todo $z \in \mathbb{C}$.

Antes de demonstrar (7.39) notemos que ela permite escrever, para z não-inteiro,

$$\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{\Gamma(z+1)\text{sen}(\pi z)} = -\frac{\pi}{z\Gamma(z)\text{sen}(\pi z)}. \quad (7.41)$$

Essa expressão permite calcular a extensão analítica de Γ de $\text{Re}(z) > 0$ para $\text{Re}(z) < 0$. Por exemplo, se $\text{Re}(z) > 0$, o lado direito pode ser calculado usando (7.3), fornecendo a função gama do lado esquerdo, cujo argumento tem parte real negativa. Evidentemente,

$$\Gamma(-z)\Gamma(z) = -\frac{\pi}{z\text{sen}(\pi z)}, \quad (7.42)$$

para z não-inteiro.

Para demonstrar¹⁰ (7.39), começamos usando (7.33) e (7.36) para obter

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = B(z, 1-z) = \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u} du, \quad (7.43)$$

onde a representação integral acima é válida para $\text{Re}(z) > 0$ e $\text{Re}(1-z) > 0$, ou seja, na faixa $0 < \text{Re}(z) < 1$, a qual nos restringiremos provisoriamente.

A integral acima pode ser calculada pelo método dos resíduos, como descreveremos. Seja I a integral

$$I := \int_C \frac{w^{z-1}}{1+w} dw,$$

onde C é a curva fechada no plano complexo, orientada no sentido anti-horário, indicada na figura 7.3. A curva C é composta dos segmentos orientados (1) e (2), localizados, respectivamente, imediatamente acima e imediatamente abaixo do semi-eixo real positivo (sendo que faremos a distância desses segmentos a esse semi-eixo ir a zero) e dos arcos orientados γ e Γ , de raios ϵ e R , respectivamente. Escolhemos $R > 1$, de modo que o polo simples que a função $f(w) = \frac{w^{z-1}}{1+w}$ possui em $w = -1$ fique no interior da região delimitada por C .

Vamos representar a variável complexa w na forma $w = \rho e^{i\phi}$, com $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Devido a essa escolha do intervalo de valores de ϕ , vemos que no segmento (1) tem-se que $\phi \approx 0$, enquanto que no segmento (2) $\phi \approx 2\pi$. Assim, a integral no segmento orientado (1) é aproximada por $\int_\epsilon^R \frac{\rho^{z-1}}{1+\rho} d\rho$, enquanto que a integral no segmento orientado (2) é aproximada por $-e^{2\pi iz} \int_\epsilon^R \frac{\rho^{z-1}}{1+\rho} d\rho$, as aproximações sendo tanto melhores quanto mais próximos os segmentos (1) e (2) encontrarem-se do semi-eixo real positivo (lembrar que o integrando é contínuo nas regiões acima e abaixo do semi-eixo real positivo e cada integração é feita em segmentos finitos). Assim, a contribuição das integrações de (1) e (2) à integral I é

$$(1 - e^{2\pi iz}) \int_\epsilon^R \frac{\rho^{z-1}}{1+\rho} d\rho,$$

que nos limites $\epsilon \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ converge a $(1 - e^{2\pi iz}) \Gamma(z)\Gamma(1-z)$ devido a (7.43). Vamos agora estimar as integrais sobre os segmentos γ e Γ .

Em γ temos $\rho = \epsilon$, de modo que podemos escrever $w = \epsilon e^{i\phi}$, com $\alpha \leq \phi \leq 2\pi - \alpha$, para um certo α pequeno, e $dw = i\epsilon e^{i\phi} d\phi$, de forma que, escrevendo $z = x + iy$ com $x = \text{Re}(z)$, $y = \text{Im}(z)$,

$$\int_\gamma \frac{w^{z-1}}{1+w} dw = -i\epsilon^z \int_\alpha^{2\pi-\alpha} \frac{e^{i\phi(z-1)}}{1+\epsilon e^{i\phi}} e^{i\phi} d\phi$$

e, portanto,

$$\left| \int_\gamma \frac{w^{z-1}}{1+w} dw \right| \leq \epsilon^x \int_\alpha^{2\pi-\alpha} \frac{e^{\phi|y|}}{1-\epsilon} d\phi \leq \epsilon^x \frac{2\pi e^{2\pi|y|}}{1-\epsilon},$$

¹⁰Seguimos os argumentos de [49]. Para uma outra demonstração igualmente elementar que faz uso da fórmula de produto de Weierstrass (7.27), vide [154].

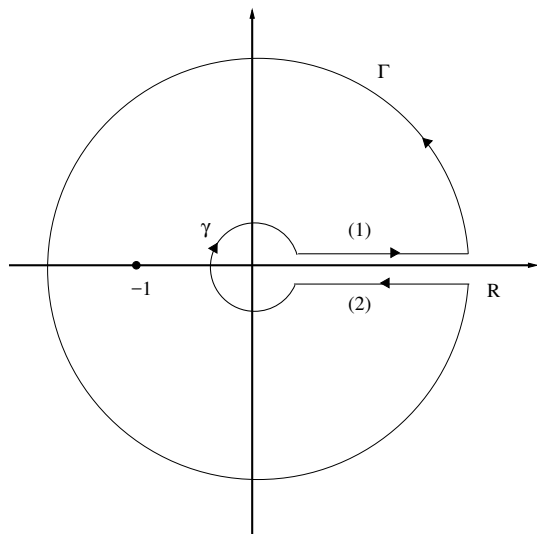


Figura 7.3: A curva C composta pelos segmentos de integração γ , Γ , (1) e (2).

que converge a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$ (lembrar que assumimos $0 < \text{Re}(z) < 1$, ou seja, $0 < x < 1$).

Em Γ temos, analogamente, $\rho = R$, de modo que podemos escrever $w = Re^{i\phi}$, com $\beta \leq \phi \leq 2\pi - \beta$, para um certo β pequeno, e $dw = iRe^{i\phi}d\phi$, de forma que, escrevendo $z = x + iy$ com $x = \text{Re}(z)$, $y = \text{Im}(z)$,

$$\int_{\Gamma} \frac{w^{z-1}}{1+w} dw = iR^z \int_{\beta}^{2\pi-\beta} \frac{e^{i\phi(z-1)}}{1+Re^{i\phi}} e^{i\phi} d\phi$$

e, portanto,

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{w^{z-1}}{1+w} dw \right| \leq R^x \int_{\beta}^{2\pi-\beta} \frac{e^{\phi|y|}}{R-1} d\phi \leq 2\pi e^{2\pi|y|} \frac{R^x}{R-1} = 2\pi e^{2\pi|y|} \left(\frac{R^{x-1}}{1-1/R} \right),$$

que converge a zero quando $R \rightarrow \infty$ pois $x < 1$.

No interior da região delimitada por C o integrando $f(w) = \frac{w^{z-1}}{1+w}$ possui uma única singularidade: um polo simples em $w = -1$, cujo resíduo é $e^{i\pi(z-1)}$ (lembrar que $-1 = e^{i\pi}$). Assim, pelo teorema dos resíduos,

$$\int_C \frac{u^{z-1}}{1+u} du = -2\pi i e^{i\pi z}$$

que independe de ϵ e R . Coletando os resultados anteriores sobre as integrais em (1), (2), γ e Γ concluímos que nos limites $\epsilon \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ vale a igualdade

$$-2\pi i e^{i\pi z} = (1 - e^{2\pi iz}) \Gamma(z) \Gamma(1-z),$$

que conduz trivialmente a

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\text{sen}(\pi z)}{\pi}.$$

Até agora assumimos que $0 < \text{Re}(z) < 1$. Todavia, ambos os lados da última expressão são funções inteiras. Portanto, a igualdade acima vale em todo plano complexo \mathbb{C} .

E. 7.4 Exercício. Usando a fórmula de reflexão (7.39) e a representação produto de Gauss (7.20), obtenha a *representação produto da função seno*, obtida por Euler em 1734:

$$\text{sen}(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right), \tag{7.44}$$

válida para todo $z \in \mathbb{C}$. Usando o Corolário 6.1, página 277, prove que a produtória do lado direito de fato converge para todo $z \in \mathbb{C}$ e, de fato, define uma função inteira. Em [264] o leitor poderá encontrar diversas outras demonstrações de (7.44), assim como interessantes notas histórias sobre suas origens e sobre os desenvolvimentos que engendrou.

Usando (7.44) e o fato bem-conhecido que $\cos(\pi z)\text{sen}(\pi z) = \frac{1}{2}\text{sen}(2\pi z)$, obtenha a *representação produto da função cosseno*, também devida a Euler:

$$\cos(\pi z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2} \right), \tag{7.45}$$

válida para todo $z \in \mathbb{C}$. Prove também que a produtória do lado direito de fato converge para todo $z \in \mathbb{C}$ e, de fato, define uma função inteira.

Usando (7.44), obtenha

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} = \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{4}{7} \frac{6}{9} \dots \tag{7.46}$$

Essa expressão é denominada *fórmula de Wallis*¹¹, ou *produto de Wallis*, tendo sido obtida por outros meios em 1665. Para uma demonstração simples dessa fórmula usando integrais, vide Seção 6.2.1, página 277.

As expressões (7.44) e (7.45) têm diversas aplicações e generalizações. Vide e.g. [264].

E. 7.5 Exercício. Diferenciando (7.44) em relação a z , obtenha

$$\pi \cotg(\pi z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{n^2 - z^2}, \tag{7.47}$$

válida para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Essa expressão é denominada *fórmula da cotangente de Euler*, que a obteve em 1749. Ela é também conhecida como *expansão em frações parciais da função cotangente*. Diversas outras demonstrações dessa importante identidade são conhecidas. Vide Exercício E. 6.12, página 280, ou Exercício E. 38.23, página 1888.

• **Algumas identidades adicionais para a função Beta**

Segundo nossa definição para a função B , é elementar ver que $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{p+q}{q} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)}$. Assim, vale a identidade

$$B(p, q) = \frac{p+q}{q} B(p, q+1). \tag{7.48}$$

Analogamente, demonstra-se que

$$B(p, q) = \frac{p+q}{p} B(p+1, q). \tag{7.49}$$

Segue disso evidentemente que

$$qB(p+1, q) = pB(p, q+1). \tag{7.50}$$

Usando (7.42) podemos escrever $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)\Gamma(-q)} \Gamma(q)\Gamma(-q) = -\frac{1}{B(p+q, -q)} \frac{\pi}{q \text{sen}(\pi q)}$. Assim, estabelecemos que

$$B(p, q) = -\frac{\pi}{q \text{sen}(\pi q)} \frac{1}{B(p+q, -q)}. \tag{7.51}$$

Usando o fato que $B(p, q) = B(q, p)$, segue igualmente que

$$B(p, q) = -\frac{\pi}{p \text{sen}(\pi p)} \frac{1}{B(p+q, -p)}. \tag{7.52}$$

¹¹John Wallis (1616-1703).

7.4.2 A Fórmula de Duplicação de Legendre

As propriedades da função beta permitem provar mais uma identidade importante satisfeita pela função gama, a chamada *fórmula de duplicação da função gama*, obtida por Legendre¹² em 1811¹³:

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right), \quad (7.53)$$

válida para todo $z \in \mathbb{C}$ que não seja um inteiro não-positivo ou um semi-inteiro não-positivo, isto é, que não seja da forma $-n$ ou da forma $-n - 1/2$, com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Uma generalização de (7.53) (eq. (7.62)), devida a Gauss, será obtida na Seção 7.5.3.1, página 303.

A demonstração de (7.53) é bastante simples. Assumindo provisoriamente $\operatorname{Re}(z) > 0$, temos

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = B(z, z) \stackrel{(7.35)}{=} \int_0^1 (t(1-t))^{z-1} dt.$$

Efetuamos a mudança de variável de integração $u = 2t - 1$, temos

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \frac{1}{2^{2z-1}} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{z-1} du = \frac{2}{2^{2z-1}} \int_0^1 (1-u^2)^{z-1} du.$$

Por fim, fazendo a mudança de variável de integração $v = u^2$, tem-se

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \frac{1}{2^{2z-1}} \int_0^1 (1-v)^{z-1} v^{-\frac{1}{2}} dv = \frac{B\left(z, \frac{1}{2}\right)}{2^{2z-1}} \stackrel{(7.35)}{=} \frac{\Gamma(z)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2z-1}\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} \stackrel{(7.18)}{=} \frac{\Gamma(z)\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)},$$

provando (7.53) para $\operatorname{Re}(z) > 0$. A generalização para todo $z \in \mathbb{C}$ segue do fato de que ambos os lados de (7.53) possuem uma extensão analítica para todo \mathbb{C} , exceto para os pontos em que z é um inteiro não-positivo ou um semi-inteiro não-positivo.

Na Seção 7.5.2, página 300, discutimos que a função gama de Euler é essencialmente a única função a satisfazer a equação funcional $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ e a fórmula de duplicação (7.53).

É interessante comparar a fórmula de duplicação (7.53) com a chamada *fórmula de duplicação da função seno* (prove-a!):

$$\operatorname{sen}(2\pi z) = 2 \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}\left(\pi\left(z + \frac{1}{2}\right)\right), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (7.54)$$

E. 7.6 *Exercício.* Prove que

$$\int_0^1 \ln(\operatorname{sen}(\pi y)) dy = -\ln 2. \quad (7.55)$$

Essa expressão é denominada *fórmula de Jensen*¹⁴. *Sugestão:* tome o logaritmo da fórmula de duplicação da função seno (7.54) e integre a expressão resultante no intervalo $[0, 1/2]$. Justifique cuidadosamente a existência das integrais. ♣

E. 7.7 *Exercício.* Prove que

$$\int_0^1 \ln(\Gamma(y)) dy = \ln(\sqrt{2\pi}), \quad (7.56)$$

relação obtida por Raabe¹⁵ em 1843.

Sugestão I: tome o logaritmo da fórmula de duplicação (7.53), integre a expressão resultante no intervalo $[0, 1/2]$ e disso obtenha (7.56).

Sugestão II: tomando o logaritmo da fórmula de reflexão (7.39) e integrando a expressão resultante no intervalo $[0, 1]$, obtemos $2 \int_0^1 \ln(\Gamma(y)) dy = \ln \pi - \int_0^1 \ln(\operatorname{sen}(\pi y)) dy$ (faça-o!). A integral $\int_0^1 \ln(\operatorname{sen}(\pi y)) dy$ foi obtida no Exercício E. 7.6 e disso segue novamente (7.56). ♣

¹²Adrien-Marie Legendre (1752–1833).

¹³A. Legendre, *Exercices de calcul intégral*, vols. I (1811), II (1816) e III (1817), Paris.

¹⁴Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859–1925).

¹⁵Joseph Ludwig Raabe (1802–1859).

7.5 Teoremas Sobre a Unicidade da Função Gama e Outros Resultados

Nesta seção demonstraremos alguns teoremas que estabelecem a unicidade da função gama de Euler sob certas caracterizações. Esses teoremas são de interesse por si só, mas alguns deles são úteis na obtenção de propriedades mais profundas referida função.

7.5.1 O Teorema de Bohr-Mollerup

Um dos primeiros e mais célebres (e elegantes) teoremas de unicidade é um teorema devido a Bohr¹⁶ e Mollerup¹⁷, datado de 1922¹⁸. Esse teorema refere-se à função gama de Euler restrita a \mathbb{R}_+ . Adiante trataremos de teoremas de unicidade para Γ nos complexos.

O *Teorema de Bohr-Mollerup* é tão fundamental que alguns autores, como Bourbaki¹⁹ e, até um certo ponto, Artin²⁰ em [16], adotam suas condições como definição da função gama de Euler, derivando suas demais propriedades a partir daí.

• O Teorema de Bohr-Mollerup e sua demonstração

Passemos agora a um dos teoremas mais elegantes da teoria da função gama de Euler.

Teorema 7.1 (Teorema de Bohr-Mollerup) *A função $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$, $x > 0$, é a única função real em \mathbb{R}_+ satisfazendo*

1. $G(1) = 1$,
2. $G(x+1) = xG(x)$ para todo $x > 0$ (e, conseqüentemente, satisfazendo $G(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$),
3. $\ln G$ é convexa. □

Notas. O Teorema 7.1 é também denominado *Teorema de Bohr-Mollerup-Artin* por alguns autores. Artin foi o primeiro a identificar a relevância da condição 3 (convexidade logarítmica) para o teorema, na edição de 1931 de [16]. Como subproduto da demonstração do Teorema 7.1 estabeleceremos que para todo $x \in (0, 1)$ vale

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{(x+n)(x+n-1) \cdots x}, \quad (7.57)$$

o limite sendo uniforme em $(0, 1)$. A expressão (7.57) é denominada *representação produto de Gauss* da função gama de Euler e, como provamos na Seção 7.3, página 289, a mesma é válida não apenas no intervalo $(0, 1)$ mas em todo o conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$. ♣

Prova do Teorema 7.1. Seguimos proxivamente [16]. Para uma demonstração semelhante, vide [71]. Que a função Γ satisfaz as condições 1, 2 e 3 foi estabelecido anteriormente. A convexidade de $\ln \Gamma$, por exemplo, foi estabelecida à página 287.

Todo $y \in \mathbb{R}_+$ é da forma $y = m + x$ com $m \in \mathbb{N}_0$ e $0 \leq x < 1$ (a saber, $m := \lfloor y \rfloor$ e $x := y - \lfloor y \rfloor$, com $\lfloor y \rfloor$ sendo o maior inteiro menor ou igual a x).

Se $y = m \in \mathbb{N}$ e $x = 0$, então sabemos pelas condições 1 e 2 que $G(m) = \Gamma(m) = (m-1)!$. No caso geral, como G e Γ satisfazem a equação funcional do item 2, valem $G(y) = G(m+x) = (x+m-1)(x+m-2) \cdots xG(x)$ e

¹⁶Harald August Bohr (1887–1951). H. Bohr era irmão mais novo do físico Niels Bohr (Niels Henrik David Bohr (1885-1962)). H. Bohr recebeu vários prêmios por sua obra matemática e foi agraciado com a medalha de prata nos Jogos Olímpicos de 1908, em Londres, como jogador da seleção dinamarquesa de futebol (!). É provavelmente até hoje o único matemático a alcançar essa honraria (o biofísico Britton Chance (1913-2010) foi agraciado com a medalha de ouro na Olimpíada de 1952, em Helsinki, como velejador).

¹⁷Johannes Peter Mollerup (1872–1937).

¹⁸A referência original é Bohr, H. and Mollerup, J., *Lærebog i matematisk Analyse*, vol. 3, Copenhagen, 1922. Trata-se de um livro-texto de Análise. Acreditando que o teorema já era conhecido os autores não o publicaram em um artigo científico e sua originalidade foi reconhecida posteriormente, notadamente por Artin em [16].

¹⁹Nicolas Bourbaki. Nome coletivo adotado por um grupo de importantes matemáticos franceses, nascido por volta de 1935.

²⁰Emil Artin (1889–1962).

$\Gamma(y) = \Gamma(x + m) = (x + m - 1)(x + m - 2) \cdots x\Gamma(x)$. Portanto, para demonstrarmos o teorema, é suficiente provarmos que $G(x) = \Gamma(x)$ para todo $x \in (0, 1)$.

Seja G qualquer função satisfazendo as condições 1, 2 e 3, seja $n \in \mathbb{N}_0$ com $n \geq 2$ e seja $x \in (0, 1)$. Como $\ln G$ é convexa, vale para ela a seguinte desigualdade:

$$\frac{\ln(G(n-1)) - \ln(G(n))}{(n-1) - n} \leq \frac{\ln(G(n+x)) - \ln(G(n))}{(n+x) - n} \leq \frac{\ln(G(n+1)) - \ln(G(n))}{(n+1) - n}. \quad (7.58)$$

Isto segue da desigualdade (5.9), página 250, tomando-se a seguinte quadra de pontos: $n-1 < n < n+x < n+1$. Verifique!

Agora, as condições 1 e 2 implicam, naturalmente, que $G(n+1) = n!$. Logo, (7.58) fica

$$\ln(n-1) \leq \frac{\ln(G(n+x)) - \ln((n-1)!)}{x} \leq \ln n. \quad (7.59)$$

Multiplicando-se a desigualdade acima por x , somando-se em seguida $\ln((n-1)!)$ aos três termos e tomando-se em seguida a exponencial de cada um, obtemos

$$(n-1)^x(n-1)! \leq G(n+x) \leq n^x(n-1)!.$$

Como $G(n+x) = (x+n-1)(x+n-2) \cdots xG(x)$, obtemos da última desigualdade

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{(x+n-1)(x+n-2) \cdots x} \leq G(x) \leq \frac{n^x(n-1)!}{(x+n-1)(x+n-2) \cdots x},$$

do que se extrai

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{(x+n-1)(x+n-2) \cdots x} \leq G(x) \leq \frac{n^x n!}{(x+n)(x+n-1) \cdots x} \frac{x+n}{n}.$$

As desigualdades expressas na linha acima fornecem um minorante e um majorante para $G(x)$ e são válidas para todo $n \geq 2$. Podemos, portanto, substituir n por $n+1$ na primeira desigualdade sem alterar sua veracidade, obtendo

$$\frac{n^x n!}{(x+n)(x+n-1) \cdots x} \leq G(x) \leq \frac{n^x n!}{(x+n)(x+n-1) \cdots x} \frac{x+n}{n}.$$

Portanto, vale também

$$1 \leq G(x) \frac{(x+n)(x+n-1) \cdots x}{n^x n!} \leq 1 + \frac{x}{n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

É evidente disso que

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{(x+n)(x+n-1) \cdots x},$$

uniformemente em $(0, 1)$. Como Γ também satisfaz as condições 1, 2 e 3, ela obedece a mesma equação e concluímos que $G(x) = \Gamma(x)$ para todo $x \in (0, 1)$. ■

7.5.2 Fórmulas de Duplicação e Unicidade

À discussão sobre a fórmula de duplicação de Legendre (7.53) é interessante acrescentar alguns comentários referentes à questão da unicidade. Já colocamos a questão de saber quais funções satisfazem a equação funcional $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ e encontramos uma resposta sob as hipóteses do Teorema de Bohr-Møllerup, Teorema 7.1, página 299. Como veremos, se considerarmos também o desejo de ter satisfeita a fórmula de duplicação de Legendre (7.53) somos novamente conduzidos à função gama de Euler. Isso é o conteúdo do Teorema 7.2, página 301.

Os dois lemas preparatórios que seguem são devidos a Herglotz²¹.

²¹Gustav Ferdinand Maria Herglotz (1881–1953).

Lema 7.2 *Seja $a > 1$ e seja \mathcal{A} um aberto conexo de \mathbb{C} que contenha o intervalo $[0, a)$ do eixo real. Seja A uma função analítica em \mathcal{A} e que satisfaça a relação $2A(2z) = A(z) + A(z+1/2)$ sempre que $z, z+1/2$ e $2z$ estiverem no intervalo $[0, a)$. Então, A é constante em todo \mathcal{A} .* □

Prova. Escolhamos $b \in (1, a)$. Então, é evidente que $[0, b] \subset [0, a)$ e é também evidente que se $z \in [0, b]$, então $z/2$ e $(z+1)/2$ são também elementos de $[0, b]$.

Por hipótese, temos que $2A(2z) = A(z) + A(z+1/2)$ e que $4A'(2z) = A'(z) + A'(z+1/2)$ sempre que $z, z+1/2$ e $2z$ estiverem no intervalo $[0, a)$. Logo, para todo $z \in [0, b]$, valerá $4A'(z) = A'(z/2) + A'((z+1)/2)$. Consequentemente, teremos também $4|A'(z)| \leq |A'(z/2)| + |A'((z+1)/2)|$ para todo $z \in [0, b]$.

Seja $M := \max\{|A'(z)|, z \in [0, b]\}$. Como $|A'(z)|$ é contínua em $[0, b]$, o máximo M é alcançado em algum valor $z_0 \in [0, b]$. Assim, teremos $4M = 4|A'(z_0)| \leq |A'(z_0/2)| + |A'((z_0+1)/2)| \leq 2M$, já que $z_0/2$ e $(z_0+1)/2$ são também elementos de $[0, b]$. Agora, como $M \geq 0$, a desigualdade $4M \leq 2M$ só é possível se $M = 0$, o que informa-nos que $A'(z) = 0$ para todo $z \in [0, b]$. Como A é analítica em $\mathcal{A} \supset [0, b]$, temos que $A'(z) = 0$ para todo $z \in \mathcal{A}$, como queríamos provar. ■

Lema 7.3 *Seja $a > 1$ e seja \mathcal{A} um aberto conexo de \mathbb{C} que contenha o intervalo $[0, a)$ do eixo real. Seja A uma função analítica em \mathcal{A} , que não possua zeros em $[0, a)$ e que, para algum $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, satisfaça a relação $A(2z) = \gamma A(z)A(z+1/2)$ sempre que $z, z+1/2$ e $2z$ estiverem no intervalo $[0, a)$. Então, A é da forma $A(z) = \alpha e^{\beta z}$ para todo $z \in \mathcal{A}$, sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ constantes satisfazendo $\alpha\gamma e^{\beta/2} = 1$, o que nos permite escrever $A(z) = \gamma^{-1} e^{\beta(z-1/2)}$.* □

Prova. Pelas hipóteses, a função $B(z) = A'(z)/A(z)$ é analítica em alguma vizinhança aberta e conexa \mathcal{A}_0 de $[0, a)$ (com $[0, a) \subset \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$). Também pelas hipóteses, sempre que $z, z+1/2$ e $2z$ estiverem no intervalo $[0, a)$ valerá $2A'(2z) = \gamma A'(z)A(z+1/2) + \gamma A(z)A'(z+1/2)$. Logo, teremos nesse caso

$$2B(2z) = \frac{2A'(2z)}{A(2z)} = \frac{\gamma A'(z)A(z+1/2)}{\gamma A(z)A(z+1/2)} + \frac{\gamma A(z)A'(z+1/2)}{\gamma A(z)A(z+1/2)} = B(z) + B(z+1/2).$$

Assim, $2B(2z) = B(z) + B(z+1/2)$ e do Lema 7.2 concluímos que para todo $z \in \mathcal{A}_0$ vale $B(z) = \beta$ com $\beta \in \mathbb{C}$, constante. Logo, $A'(z) = \beta A(z)$, ou seja, $A(z) = \alpha e^{\beta z}$ em todo $z \in \mathcal{A}_0$, para alguma constante $\alpha \in \mathbb{C}$. Devido à analiticidade de A , essa relação vale em todo \mathcal{A} . Da relação $A(2z) = \gamma A(z)A(z+1/2)$, obtemos que $\alpha\gamma e^{\beta/2} = 1$. ■

Os Lemas 7.2 e 7.3 podem ser interpretados como afirmações de existência de soluções das equações funcionais $2A(2z) = A(z) + A(z+1/2)$ e $A(2z) = \gamma A(z)A(z+1/2)$ sob as hipóteses listadas em seus respectivos enunciados. Para um tratamento extensivo de equações funcionais, vide [4].

Os Lemas 7.2 e 7.3, de acima, têm o seguinte corolário, o qual contém uma afirmação de unicidade da função gama de Euler:

Teorema 7.2 *A função gama de Euler é a única função que satisfaz as seguintes condições:*

1. $G : \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica no seu domínio, tendo em $z = 0$ no máximo um polo simples,
2. G é real na semirreta $(0, \infty)$,
3. G satisfaz $G(z+1) = zG(z)$ em todo $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$,
4. G satisfaz a fórmula de duplicação $G(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} G(z)G(z + \frac{1}{2})$ em todo \mathbb{C} , exceto os inteiros e semi-inteiros não-positivos. □

Prova. Seja G satisfazendo as propriedades listadas no enunciado. Então, $A(z) := G(z)/\Gamma(z)$ é analítica em uma vizinhança de $[0, \infty)$ (lembrar que Γ tem um polo simples em 0 e G no máximo um polo simples nesse ponto, pelo item 1), é real no intervalo $(0, \infty)$ (pelo item 2) e satisfaz $A(z+1) = A(z)$ (pelo item 3) e $A(2z) = A(z)A(z+1/2)$ (pelo item 4) onde essas relações estiverem bem definidas, o que inclui o intervalo $[0, \infty)$. Pelo Lema 7.3, concluímos que $A(z) = e^{\beta(z-1/2)}$ (justifique!). Como A é periódica de período 1, tem-se $\beta = 2\pi ni$, $n \in \mathbb{Z}$. Como A é real em $[0, \infty)$, devemos ter $n = 0$, implicando que $G(z) = \Gamma(z)$ em $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. ■

7.5.3 O Teorema de Wielandt e Algumas de Suas Consequências

O teorema que segue, obtido por Wielandt²² em 1939, é mais um teorema de unicidade da função gama. Sua utilidade se manifestará na discussão da importante Fórmula de Stirling, desenvolvida na Seção 7.6, página 305.

Para um tratamento semelhante ao nosso, vide [264]²³

Teorema 7.3 (Teorema de Wielandt) *Considere-se o semiplano $\mathbb{C}_d := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$. A função gama de Euler é a única função satisfazendo as seguintes hipóteses:*

1. G é analítica em \mathbb{C}_d ,
2. $G(z+1) = zG(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}_d$,
3. $G(1) = 1$,
4. G é limitada na faixa $F := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \operatorname{Re}(z) < 2\}$. □

Nota. Como a única relação funcional considerada no Teorema 7.3 é a relação $G(z+1) = zG(z)$, podemos dizer que, em um certo sentido, o Teorema de Wielandt generaliza o Teorema de Bohr-Mollerup, Teorema 7.1, página 299, para o contexto de funções definidas em \mathbb{C}_d e não apenas em \mathbb{R}_+ . Essa afirmação tem que ser tomada *cum grano salis*, pois o Teorema de Bohr-Mollerup faz uso também de uma hipótese de convexidade ausente no Teorema de Wielandt. ♣

Prova do Teorema 7.3. Consideremos a função $V: \mathbb{C}_d \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $V(z) = G(z) - \Gamma(z)$, $z \in \mathbb{C}_d$. É evidente que V satisfaz $V(z+1) = zV(z)$ e satisfaz também $V(1) = 0$. O mesmo raciocínio que nos conduziu a (7.14) permite obter também

$$V(z) = \frac{V(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2) \cdots z}. \quad (7.60)$$

Agora, $V(z+n)$ é analítica para $\operatorname{Re}(z+n) > 0$. Assim, (7.60) estende analiticamente $V(z)$ para $\operatorname{Re}(z) > -n$, exceto nos pontos $z = -k$ com $k = 0, 1, \dots, n-1$. Com isso, concluímos que V possui uma extensão analítica ao plano complexo \mathbb{C} , exceto aos pontos $z = 0, -1, -2, \dots$, onde possui no máximo polos simples. Seguindo os mesmos passos de (7.15), concluímos também que essa extensão satisfaz $V(z+1) = zV(z)$ em todo o conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Ao contrário do que ocorre com a função Γ , porém, a função V é regular nos pontos $z = 0, -1, -2, \dots$, pois, analogamente a (7.16), temos por (7.60) que

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)V(z) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \frac{V(z+n+1)}{(z+n)(z+n-1) \cdots z} = \frac{V(1)}{(-1)(-2) \cdots (-n)} = 0. \quad (7.61)$$

A conclusão até aqui é que V é uma função inteira, i.e., analítica em todo \mathbb{C} satisfazendo $V(z+1) = zV(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Vamos agora analisar as consequências da hipótese que G é limitada na faixa $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \operatorname{Re}(z) < 2\}$. Pela desigualdade (7.10), página 286, Γ é limitada nessa mesma faixa e, portanto, V também o é. Afiramos que V é também limitada na faixa $F := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) < 1\}$. De fato, na região limitada $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) < 1, -1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$ a função V é limitada por ser analítica. Já na região $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) < 1, |\operatorname{Im}(z)| > 1\}$, na qual tem-se $|z| > 1$, podemos evocar o fato que $V(z) = V(z+1)/z$ e estabelecer que $|V(z)| < |V(z+1)| \leq \sup\{|V(w)|, w \in F\}$, pois é evidente que $z+1 \in F$ se $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) < 1, |\operatorname{Im}(z)| > 1\}$.

Como a aplicação $z \mapsto 1-z$ leva a faixa fechada $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ em si mesma e a função $V(z)$ é limitada nessa faixa (por essa ser um subconjunto de $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \operatorname{Re}(z) < 2\}$), concluímos que a função $V(1-z)$ é igualmente limitada em $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$.

Observe-se agora que a função $U(z) := V(z)V(1-z)$ é inteira e periódica de período 1. De fato, $U(z+1) = V(z+1)V(-z) = zV(z)V(-z) = V(z)(zV(-z)) = V(z)V(1-z) = U(z)$. Logo, U é limitada em $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ e, portanto, em todo \mathbb{C} , devido à periodicidade. Pelo Teorema de Liouville, U é constante. Como $U(1) = V(1)V(0) = 0$, concluímos que U anula-se em toda parte. É fácil concluir disso que V anula-se em toda a parte: se $V(z)$ não se anulasse em um aberto $\mathcal{A} \in \mathbb{C}$, então $V(1-z)$ anular-se-ia nesse aberto e, como V é inteira, isso implica que V é identicamente nula. Portanto, concluímos que G e Γ coincidem, que é o que desejávamos estabelecer. ■

²²Helmut Wielandt (1910–2001).

²³Vide também Reinhold Remmert, “Wielandt’s Theorem About the Γ -Function”. The American Mathematical Monthly, **103**, No. 3, 214–220 (1996).

7.5.3.1 A Fórmula de Multiplicação de Gauss da Função Gama

O Teorema de Wielandt, Teorema 7.3, página 302, pode ser utilizado para uma demonstração simples de mais uma propriedade importante da função gama de Euler: para cada $m \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\Gamma(mz) = \frac{m^{mz-1/2}}{\sqrt{(2\pi)^{m-1}}} \prod_{l=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{l}{m}\right), \quad (7.62)$$

válida para todo $z \in \mathbb{C}$, exceto 0, $-1/m, -2/m, -3/m, \dots$, ou seja, válida para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n/m, n \in \mathbb{N}_0\}$.

A identidade (7.62), denominada *fórmula de multiplicação da função gama*, ou *fórmula de multiplicação de Gauss da função gama*, foi provada em 1812 por Gauss por meios distintos dos que apresentaremos no que segue. Note-se que o caso $m = 1$ é uma identidade trivial e o caso $m = 2$ reproduz a Fórmula de Duplicação de Legendre, eq. (7.53), página 298, e, portanto, (7.62) pode ser considerada uma generalização daquela relação.

Para a prova de (7.62) precisamos de alguns resultados preparatórios elementares.

Lema 7.4 *Para cada $m \in \mathbb{N}$ vale a identidade*

$$\prod_{l=1}^m (z - e^{-2\pi il/m}) = z^m - 1 \quad (7.63)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Como consequência, vale a identidade

$$\prod_{l=1}^{m-1} (z - e^{-2\pi il/m}) = \frac{z^m - 1}{z - 1} = \sum_{a=0}^{m-1} z^a \quad (7.64)$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, e todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$. De (7.64) segue também que

$$\prod_{l=1}^{m-1} (1 - e^{-2\pi il/m}) = m \quad (7.65)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. □

Prova. Os zeros do polinômio $z^m - 1$ são, naturalmente, as raízes m -ésimas da unidade, ou seja, são os elementos de $\{e^{-2\pi il/m}, l = 1, \dots, m\}$. Assim, $z^m - 1 = \kappa \prod_{l=1}^m (z - e^{-2\pi il/m})$ para alguma constante κ . Comparando os termos de grau máximo de ambos os lados, constatamos facilmente que $\kappa = 1$, provando (7.63).

A primeira igualdade em (7.64) segue de (7.63) e do fato que $\prod_{l=1}^m (z - e^{-2\pi il/m}) = (z-1) \prod_{l=1}^{m-1} (z - e^{-2\pi il/m})$. A segunda é a bem conhecida fórmula para a soma de uma progressão geométrica (para obtê-la, multiplique-se $\sum_{a=0}^{m-1} z^a$ por $z-1$, expanda-se o produto e constate-se que todos os termos cancelam-se, exceto z^m e -1).

A eq. (7.65) é obtida tomando-se o limite de (7.64) quando $z \rightarrow 1$. ■

Logo adiante usaremos o lema que segue, o qual expressa uma propriedade bem-conhecida da função seno.

Lema 7.5 *Para todo $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, vale*

$$\prod_{l=1}^{m-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi l}{m}\right) = \frac{m}{2^{m-1}}. \quad (7.66)$$

□

Prova.

$$\prod_{l=1}^{m-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi l}{m}\right) = \frac{1}{(2i)^{m-1}} \prod_{l=1}^{m-1} (e^{i\pi l/m} - e^{-i\pi l/m}) = \frac{1}{2^{m-1}} \prod_{l=1}^{m-1} (1 - e^{-2i\pi l/m}) \stackrel{(7.65)}{=} \frac{m}{2^{m-1}},$$

onde, na segunda igualdade, usamos que os fatos que $1 + 2 + \dots + m - 1 = (m-1)m/2$ e que $e^{i\pi(m-1)/2} = i^{m-1}$. ■

Proposição 7.2 Para todo $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, vale

$$\prod_{l=1}^{m-1} \Gamma\left(\frac{l}{m}\right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^{m-1}}{m}}, \quad (7.67)$$

identidade obtida por Euler em cerca de 1776. □

Nota. Como se vê, a Fórmula de Multiplicação da função gama, relação (7.62), é uma generalização de (7.67). ♣

Prova da Proposição 7.2. Seja $P(m) := \prod_{l=1}^{m-1} \Gamma\left(\frac{l}{m}\right)$. Pela simples mudança de variáveis $l \rightarrow m-l$ podemos escrever $P(m) = \prod_{l=1}^{m-1} \Gamma\left(1 - \frac{l}{m}\right)$. Logo,

$$P(m)^2 = \prod_{l=1}^{m-1} \left[\Gamma\left(\frac{l}{m}\right) \Gamma\left(1 - \frac{l}{m}\right) \right] \stackrel{(7.39)}{=} \pi^{m-1} \prod_{l=1}^{m-1} \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{m}\right)} \stackrel{(7.66)}{=} \pi^{m-1} \frac{2^{m-1}}{m},$$

o que completa a prova de (7.67). ■

Chegamos agora ao resultado que nos interessa provar:

Teorema 7.4 (Fórmula de Multiplicação de Gauss da Função Gama) Para cada $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\Gamma(mz) = \frac{m^{mz-1/2}}{\sqrt{(2\pi)^{m-1}}} \prod_{l=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{l}{m}\right) \quad (7.68)$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n/m, n \in \mathbb{N}_0\}$.

Prova. Como já dissemos, no caso $m = 1$ não há o que provar, de modo que consideraremos $m \geq 2$. Para demonstrarmos (7.68), consideremos a função

$$G(z) := \frac{m^{z-1/2}}{\sqrt{(2\pi)^{m-1}}} \prod_{l=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{z+l}{m}\right). \quad (7.69)$$

Em primeiro lugar, uma simples inspeção dessa fórmula leva à conclusão que G é analítica na região $\mathbb{C}_d := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Em segundo lugar, nessa região vale também $G(z+1) = zG(z)$, pois

$$\begin{aligned} G(z+1) &:= \frac{m^{z+1-1/2}}{\sqrt{(2\pi)^{m-1}}} \prod_{l=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{z+1+l}{m}\right) = \frac{m^{z+1-1/2}}{\sqrt{(2\pi)^{m-1}}} \prod_{l=1}^m \Gamma\left(\frac{z+l}{m}\right) \\ &= \frac{m\Gamma\left(\frac{z+m}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{m}\right)} \left[\frac{m^{z-1/2}}{\sqrt{(2\pi)^{m-1}}} \prod_{l=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{z+l}{m}\right) \right] = zG(z), \end{aligned}$$

sendo que a última igualdade segue do fato que $m\Gamma\left(\frac{z+m}{m}\right) = m\Gamma\left(\frac{z}{m} + 1\right) = m\frac{z}{m}\Gamma\left(\frac{z}{m}\right) = z\Gamma\left(\frac{z}{m}\right)$.

Em terceiro lugar,

$$G(1) = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^{m-1}}} \prod_{l=1}^m \Gamma\left(\frac{l}{m}\right) \stackrel{\Gamma(1)=1}{=} \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^{m-1}}} \prod_{l=1}^{m-1} \Gamma\left(\frac{l}{m}\right) \stackrel{(7.67)}{=} 1.$$

Em quarto lugar, dado que $|m^z| = |m^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)\ln m}| = m^{\operatorname{Re}(z)}$ e que a desigualdade (7.10), página 286, pode ser aplicada a cada um dos fatores Γ de (7.69), segue que G é limitada na faixa $F := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \operatorname{Re}(z) < 2\}$.

Assim, pelo Teorema 7.3, página 302, concluímos que $G = \Gamma$ em $\mathbb{C} \setminus \{-n, n \in \mathbb{N}_0\}$. Logo, $\Gamma(mz) = G(mz)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n/m, n \in \mathbb{N}_0\}$, que é a relação (7.68). ■

7.6 A Aproximação de Stirling e suas Correções

Nesta seção estudaremos o comportamento assintótico de $n!$ para n “grande” e da função gama de Euler $\Gamma(z)$ para $|z|$ “grande” em um certo domínio. Em ambos os casos obteremos a chamada *aproximação de Stirling*²⁴, importante em áreas como a Teoria de Probabilidade, Estatística, Mecânica Quântica, Mecânica Estatística etc., e estudaremos suas correções.

No caso de fatoriais, a aproximação de Stirling é a aproximação

$$n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad (7.70)$$

para $n \in \mathbb{N}$ é “grande” e é, muitas vezes, apresentada na forma

$$\ln(n!) \approx \frac{\ln(2\pi)}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n, \quad (7.71)$$

ou ainda na forma

$$\ln(n!) \approx n \ln n - n, \quad (7.72)$$

que difere da anterior pela negligência do termo $(\ln(2\pi) + \ln n)/2$, o qual é “pequeno” em relação aos demais para n “grande”. A aproximação (7.70) deve ser entendida no sentido da seguinte afirmação precisa em termos de limites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1.$$

A aproximação de Stirling foi originalmente encontrada (por volta de 1730) por de Moivre²⁵, o qual obteve a aproximação $n! \approx K n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$, sendo que K era uma constante que de Moivre não pode especificar. A contribuição de Stirling foi provar que $K = \sqrt{2\pi}$.

A aproximação de Stirling, na forma (7.70) ou na forma (7.72), é muito útil, por fornecer uma boa aproximação para $n!$, quando n é “grande”, em termos de funções simples de n . Que a aproximação é boa mostra o fato que já para $n = 6$ a equação (7.70) aproxima $6! = 720$ por 710,07..., um erro relativo percentual de cerca de 1,4%, onde por erro relativo entendemos a expressão²⁶

$$\mathcal{E}_n = \left| \frac{n! - \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} \right|. \quad (7.73)$$

Para $n = 13$ o erro relativo percentual da fórmula de Stirling é de cerca de 0,6%.

E. 7.8 Exercício. O estudante poderá divertir-se calculando a aproximação fornecida por (7.70) para alguns valores de n , usando uma calculadora de bolso, por exemplo, e constatando que o erro relativo percentual melhora quando n aumenta. ✦

Mais adiante (vide página 312) encontraremos aproximações para $n!$ ainda melhores que a de Stirling. Por exemplo,

$$A_n := \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{1}{12n+1}} \quad \text{e} \quad B_n := \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{1}{12n}} \quad (7.74)$$

satisfazem $A_n < n! < B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e ambos aproximam $n!$ com um erro relativo percentual menor que $\frac{0,7}{n^2}\%$ para $n \in \mathbb{N}$, o que corresponde a um erro relativo percentual menor que 0,7% para $n = 1$, menor que 0,02% para $n = 6$ e menor que 0,004% para $n = 13$. Para $n = 6$, por exemplo, A_n fornece a aproximação $6! \approx 719,8722$, com um erro relativo percentual de 0,018% e B_n fornece a aproximação $6! \approx 720,00089$..., com um erro relativo percentual de $1 \cdot 10^{-4}\%$ (!). A aproximação de $n!$ por A_n e B_n é um resultado relativamente recente (de 1955), obtido por Robbins²⁷.

A aproximação de Stirling pode ser apresentada em forma exata como

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\mu_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7.75)$$

²⁴James Stirling (1692–1770).

²⁵Abraham de Moivre (1677–1754).

²⁶O valor absoluto não é necessário em (7.73) pois, como veremos, para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $n! > \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$.

²⁷Herbert Ellis Robbins (1915–2001). Vide H. Robbins, “A Remark on Stirling’s Formula”, American Mathematical Monthly, **62**, 26–29 (1955). Esse resultado pode também ser encontrado em [100], que cita Robbins. Robbins é um dos autores de [74].

com a sequência μ_n satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$. Em diversos problemas é de interesse conhecer-se as correções à Aproximação de Stirling (7.70) codificadas acima na sequência μ_n . Será um dos propósitos nossos na corrente seção apresentar expressões para tais correções.

Na corrente seção obteremos uma relação ainda mais geral que (7.70), a saber, obteremos a chamada *aproximação de Stirling para a função gama*:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{\mu(z)}, \quad (7.76)$$

válida para todo $z \in \mathbb{C}_c := \mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(w) \leq 0 \text{ e } \operatorname{Im}(w) = 0\}$ (o plano complexo menos a semirreta real não-positiva), sendo que a função $\mu(z)$, acima²⁸, pode ser expressa de diversas formas como, por exemplo,

$$\mu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(z + m + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{z+m} \right) - 1 \right], \quad (7.77)$$

também para $z \in \mathbb{C}_c$. Em textos como [264] o leitor poderá encontrar diversas outras expressões para $\mu(z)$, válidas em diversas regiões. A série do lado direito de (7.77) é denominada *série de Gudermann*²⁹, tendo sido obtida por esse matemático em 1845³⁰. Demonstraremos que $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \mathbb{C}_c}} |\mu(z)| = 0$, ou seja, que

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \mathbb{C}_c}} \frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}} = 1,$$

com o limite tomado com $z = |z|e^{i\varphi}$, sendo $-\pi < \varphi < \pi$ fixo. Isso conduz à aproximação assintótica

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}, \quad (7.78)$$

válida para $|z|$ grande e φ fixo (com $z \in \mathbb{C}_c$). A relação (7.78) é também denominada *aproximação de Stirling para a Função Gama*.

Segundo (7.76), tem-se para $n \in \mathbb{N}$

$$n! = \Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi} (n+1)^{n+\frac{1}{2}} e^{-n-1} e^{\mu(n+1)} = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\mu_n},$$

onde identificamos

$$\begin{aligned} \mu_n &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 + \mu(n+1) \\ &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(n+1+m+\frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n+1+m} \right) - 1 \right] \\ &= \mu(n). \end{aligned}$$

Verifique! Resumindo, temos para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n! &= \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \exp \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(n+m+\frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n+m} \right) - 1 \right] \right) \\ &= \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \exp \left(\sum_{m=n}^{\infty} \left[\left(m+\frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{m} \right) - 1 \right] \right), \end{aligned} \quad (7.79)$$

e temos para todo $z \in \mathbb{C}_c$

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \exp \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(z+m+\frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{z+m} \right) - 1 \right] \right). \quad (7.80)$$

Essas últimas expressões representam as aproximações de Stirling exatas para $n!$ e para a função gama de Euler, ou seja, incluindo correções.

²⁸A função μ que ocorre em (7.76) é por vezes denominada *função de Binet*, em honra a Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856), que foi o primeiro a obter correções à aproximação de Stirling, em 1839. O trabalho original de Binet sobre o tema é: M. J. Binet, “Mémoire sur les intégrales définies Eulériennes”, Journ. de l’École Roy. Polyt. **16**, 123–343 (1839).

²⁹Christoph Gudermann (1798–1852).

³⁰C. Gudermann, “Additamentum ad functionis $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$ theoriam”. Journ. reine angew. Math. **29**, 209–212 (1845).

7.6.1 A Aproximação de Stirling para Fatoriais e suas Correções. A Série de Gudermann

Nesta seção apresentaremos a demonstração tradicional da aproximação de Stirling para $n!$ quando n é “grande”. Ela é próxima da demonstração histórica de de Moivre e de Stirling.

• Algumas sugestões preliminares

A função $\ln x$ é crescente no intervalo $(0, \infty)$ e, portanto, vale para todos a e b com $0 < a < b < \infty$ a desigualdade

$$(b-a) \ln a < \int_a^b \ln x \, dx < (b-a) \ln b.$$

Tomando-se $b = a+1$ temos para todo $a > 0$ que

$$\ln a < \int_a^{a+1} \ln x \, dx < \ln(a+1)$$

e disso segue (trocando-se $a \rightarrow a-1$) que

$$\int_{a-1}^a \ln x \, dx < \ln a < \int_a^{a+1} \ln x \, dx \quad (7.81)$$

para $a > 1$. Como $\int \ln x = x(\ln x - 1)$ é fácil ver que as desigualdades (7.81) permanecem válidas mesmo para $a = 1$, quando a primeira integral é imprópria, pois

$$\lim_{a \rightarrow 1} \int_{a-1}^a \ln x \, dx = \lim_{a \rightarrow 1} \left(a(\ln a - 1) - (a-1)(\ln(a-1) - 1) \right) = -1 < 0 = \ln 1 < \int_1^2 \ln x \, dx.$$

(Recordar que $\lim_{y \rightarrow 0} y \ln y = 0$).

É evidente que para $n \in \mathbb{N}$ tem-se $\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k$ e usando (7.81) podemos escrever

$$\sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \ln x \, dx < \sum_{k=1}^n \ln k < \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \ln x \, dx$$

o que significa que

$$\int_0^n \ln x \, dx < \ln(n!) < \int_1^{n+1} \ln x \, dx.$$

Novamente usando $\int \ln x = x(\ln x - 1)$, ambas as integrais de acima podem ser calculadas explicitamente, e obtemos

$$n \ln(n) - n < \ln(n!) < (n+1) \ln(n+1) - n,$$

ou

$$n \ln(n) < \ln(n!) + n < (n+1) \ln(n+1).$$

Essas desigualdades sugerem que estudemos a diferença entre $\ln(n!) + n$ e o valor médio entre $n \ln(n)$ e $(n+1) \ln(n+1)$, o qual é dado por

$$\frac{1}{2} \ln \left(n^n (n+1)^{n+1} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(n^{2n+1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln(n) + \frac{1}{2} \ln \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right).$$

Para n “grande”, $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$ aproxima-se de e , de modo que o valor médio acima aproxima-se de $\left(n + \frac{1}{2} \right) \ln(n) + 1/2$ que, por sua vez, pode ser aproximado por $\left(n + \frac{1}{2} \right) \ln(n)$ para n “grande”.

Estudemos, então, a convergência da sequência

$$S_n = \ln(n!) + n - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln(n),$$

o que faremos no que segue.

• **A convergência da sequência S_n**

Para demonstrarmos a convergência da sequência S_n procederemos da seguinte forma. É elementar constatar que

$$S_n - S_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 = (2n+1) \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}}\right) - 1.$$

Sabemos que a série de Taylor da função $\ln(1+z)$ centrada em 0 é $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1}$, a qual converge na região $|z| < 1$.

Assim, na mesma região teremos

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}. \tag{7.82}$$

Como $1/(2n+1) < 1$, obtemos, tomando $z = 1/(2n+1)$ que

$$S_n - S_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}}.$$

Há duas conclusões a se extrair dessa igualdade. A primeira é que, como evidentemente o lado direito é positivo, tem-se $S_n > S_{n+1}$ para todo n , o que nos informa que S_n é uma sequência decrescente.

A segunda conclusão nasce da observação que

$$S_n - S_{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}} < \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2k}} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Verifique! É evidente, portanto, que $(S_n - \frac{1}{12} \frac{1}{n}) < (S_{n+1} - \frac{1}{12} \frac{1}{n+1})$, e concluímos que a sequência $S_n - \frac{1}{12} \frac{1}{n}$ é uma sequência crecente.

Logo, para n_0 fixo, vale para todo $n > n_0$ que $S_{n_0} - \frac{1}{12} \frac{1}{n_0} < S_n - \frac{1}{12} \frac{1}{n} < S_n$. Assim, a sequência S_n , $n > n_0$, é limitada inferiormente e, como trata-se de uma sequência decrescente, a mesma converge a um número $C \in \mathbb{R}$.

Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln(n!) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n)\right) = C$, o que equivale a dizer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = e^C. \tag{7.83}$$

Esse foi o resultado obtido originalmente por de Moivre. Temos agora que estabelecer qual o valor de C .

• **A determinação da constante C**

A contribuição de Stirling à demonstração da aproximação de Stirling foi provar que $e^C = \sqrt{2\pi}$, o que pode ser feito com o seguinte procedimento. De acordo com a fórmula do produto de Wallis³¹ na forma (6.27), página 279, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}} &\stackrel{(6.27)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\left(\frac{n!}{n^{n+1/2} e^{-n}}\right)^2}{\left(\frac{(2n)!}{2^{2n} n^{2n+1} e^{-2n}}\right)} \right] \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{\left(\frac{n!}{n^{n+1/2} e^{-n}}\right)^2}{\left(\frac{(2n)!}{(2n)^{2n+1/2} e^{-2n}}\right)} \right] \sqrt{\frac{2n}{2n+1}} \stackrel{(7.83)}{=} \frac{e^C}{2}, \end{aligned}$$

o que implica $e^C = \sqrt{2\pi}$.

³¹Na Seção 6.2.1, página 277, apresentamos uma dedução elementar dessa fórmula sem fazer uso de propriedades da função gama de Euler, em contraste com o que fizemos em (7.46), página 297.

E. 7.9 Exercício. Verifique cada uma das passagens de acima. ✦

Nossa conclusão final é que vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1. \tag{7.84}$$

Como já dissemos no início da presente seção, esse é o significado exato, em termos de um limite, da chamada *aproximação de Stirling*: $n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$, para n “grande”. Essa aproximação serve também como motivação para os desenvolvimentos posteriores desta seção, que lidam com generalizações para a função gama de Euler no plano complexo e no cômputo de suas respectivas correções.

• **Correções à aproximação de Stirling para fatoriais. A série de Gudermann**

Sob a luz da aproximação de Stirling, é natural considerarmos escrever

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\mu_n}$$

com o fator de correção e^{μ_n} introduzido *ad hoc* para tornar a igualdade verdadeira³² para todo $n \in \mathbb{N}$. Naturalmente, devido a (7.84), temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$. Dividindo-se a expressão para $(n+1)!$ pela expressão para $n!$, obtemos

$$n+1 = (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{\mu_{n+1} - \mu_n - 1}$$

e, portanto,

$$\mu_{n+1} - \mu_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Assim, para todo $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\mu_{n+m} - \mu_n = \sum_{k=0}^{m-1} \left[1 - \left(n+k + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)\right]$$

e como $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{n+m} = 0$, obtemos

$$\mu_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(n+k + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) - 1\right] \tag{7.85}$$

que podemos também expressar como

$$\mu_n = \sum_{k=n}^{\infty} \left[\left(k + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - 1\right]. \tag{7.86}$$

Essa série é denominada *série de Gudermann*³³ e sua extensão ao plano complexo será estudada com detalhe na Seção 7.6.2 (inclusive sua convergência). Com a mesma, justificamos escrever a expressão exata (7.79) para $n!$, com $n \in \mathbb{N}$.

E. 7.10 Exercício. Verifique que se considerarmos apenas o primeiro termo da série (7.86), obtemos a aproximação

$$n! \approx \sqrt{2\pi} (n+1)^{n+\frac{1}{2}} e^{-(n+1)}. \tag{7.87}$$

Usando o fato que para n “grande” podemos aproximar $e^{1/2} \approx \left(1 + \frac{1/2}{n+\frac{1}{2}}\right)^{n+\frac{1}{2}}$, obtenha também³⁴

$$n! \approx \sqrt{2\pi} \left(\frac{n+\frac{1}{2}}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}}. \tag{7.88}$$

As duas últimas aproximações para $n!$ são ligeiramente melhores que a de Stirling, mesmo para n “pequeno”. Para $n = 0$, por exemplo, Stirling fornece $0! \approx 0$ (um erro relativo de 100%), enquanto que (7.87) fornece $0! \approx 0,9221$ (um erro relativo de 7,8%) e (7.88) fornece $0! \approx 1,0750$ (um erro relativo de 7,5%). Para $n = 1$, Stirling fornece $1! \approx 0,921$ (um erro relativo de 7,8%), enquanto que (7.87) fornece $1! \approx 0,975$ (um erro relativo de 2,5%) e (7.88) fornece $1! \approx 1,0252$ (um erro relativo de 2,5%). Verifique! ✦

³²Para uma referência contendo algumas notas históricas sobre correções à fórmula de Stirling, vide I. Tweddle, “Approximating $n!$, Historical Origins and Error Analysis”, American Journal of Physics, **52**, 487-488 (1984).

³³Christoph Gudermann (1798-1852).

³⁴Vide também Y. Weissman, Am. J. Phys. **51**, 9 (1983) e veja também a referência listada na nota de rodapé 32, página 309.

• Uma representação integral para μ_n

Para motivar o tratamento que faremos da extensão complexa da série de Gudermann, observemos ainda que os termos da série de Gudermann podem ser escritos como

$$\left(n+k+\frac{1}{2}\right) \ln \left(1+\frac{1}{n+k}\right)-1=\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t(1-t)}{(n+k+t)^2} dt .$$

Isso pode ser constatado calculando-se diretamente a integral do lado direito, usando o fato que $\frac{1}{(n+k+t)^2}=-\frac{d}{dt} \frac{1}{n+k+t}$ e integração por partes. Assim,

$$\mu_n=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t(1-t)}{(n+k+t)^2} dt .$$

Com as mudanças de variáveis $t \rightarrow t+k$, temos

$$\mu_n=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \frac{(t-k)(1-(t-k))}{(n+t)^2} dt . \quad (7.89)$$

É natural agora introduzirmos a função $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como sendo a função contínua e periódica de período 1 que no intervalo $[0, 1)$ é dada por

$$Q(t)=\frac{1}{2} t(1-t) .$$

Vide Figura 7.4, página 313. Para cada intervalo $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$, teremos, devido à periodicidade,

$$Q(t)=\frac{1}{2}(t-k)(1-(t-k)) .$$

Com essa função, e devido a (7.89), podemos escrever

$$\mu_n=\sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{Q(t)}{(n+t)^2} dt=\int_0^{\infty} \frac{Q(t)}{(n+t)^2} dt . \quad (7.90)$$

Assim, temos também

$$n!=\sqrt{2 \pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \exp \left(\int_0^{\infty} \frac{Q(t)}{(n+t)^2} dt\right) .$$

Essas últimas expressões motivam nosso ponto de partida para a extensão complexa da fórmula de Stirling e da série de Gudermann que faremos na Seção 7.6.2, a seguir.

A expressão (7.90) tem o mérito de explicitar que $\mu_n > 0$ para todo n e, portanto, tem-se para cada n a desigualdade

$$n! > \sqrt{2 \pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} ,$$

indicando que a aproximação de Stirling $\sqrt{2 \pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ aproxima $n!$ “por baixo”.

• Outra representação útil de μ_n

Tomando $y \equiv \frac{1}{2(n+k)+1}$ podemos escrever (verifique!)

$$\left(n+k+\frac{1}{2}\right) \ln \left(1+\frac{1}{n+k}\right)-1=\frac{1}{2 y} \ln \left(\frac{1+y}{1-y}\right)-1 \stackrel{(7.82)}{=} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{y^{2 a}}{2 a+1} .$$

Assim, por (7.85),

$$\mu_n=\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{2 a+1} \frac{1}{(2(n+k)+1)^{2 a}} . \quad (7.91)$$

A expressão (7.91) é ponto de partida, inclusive em trabalhos recentes³⁵, para a obtenção de majorantes e minorantes para μ_n . No que segue apresentaremos algumas das estimativas mais simples desse tipo.

³⁵ Vide M. Mansour “Note on Stirling’s Formula”, International Mathematical Forum 4, no. 31, 1529–1534 (2009). Uma lista de resultados históricos para majorantes e minorantes de μ_n e referências a seus trabalhos originais pode ser encontrada nesse trabalho.

• Majorantes e minorantes para μ_n

Como já dissemos, é evidente por (7.90) que $\mu_n > 0$ para todo n . Como $Q(t) \leq 1/8$, segue facilmente também de (7.90) que $\mu_n < \frac{1}{8n}$ para todo $n \geq 1$, pois $\mu_n = \int_0^{\infty} \frac{Q(t)}{(n+t)^2} dt < \frac{1}{8} \int_0^{\infty} \frac{1}{(n+t)^2} dt = \frac{1}{8n}$. Essas estimativas podem ser um tanto incrementadas, como veremos.

Tendo (7.91) em mente e usando que $2a+1 \geq 3$ para $a \geq 1$, obtemos pela soma de uma progressão geométrica infinita,

$$\sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{2 a+1} \frac{1}{(2(n+k)+1)^{2 a}} < \frac{1}{3} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{(2(n+k)+1)^{2 a}} = \frac{1}{3} \frac{1}{(2(n+k)+1)^2-1} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k+1}\right) .$$

Assim,

$$\mu_n < \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k+1}\right) = \frac{1}{12 n} .$$

Tomando-se apenas os termos com $a=1$ em (7.91), teremos também

$$\mu_n > \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2(n+k)+1)^2} = \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2}+k)^2} > \frac{1}{12} \int_0^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2}+x)^2} dx = \frac{1}{12 n+6} .$$

A referência listada na nota-de-rodapé 35, página 310, atribui esse simples resultado a Uspensky³⁶, em 1937.

Em resumo, vale, portanto,

$$\frac{1}{12 n+6} < \mu_n < \frac{1}{12 n} \quad (7.92)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e temos

$$\sqrt{2 \pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12 n+6}} < n! < \sqrt{2 \pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12 n}} \quad (7.93)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

A primeira das majorações em (7.92) pode ser melhorada da seguinte forma³⁷. Tendo em mente (7.91), podemos escrever a somatória em a como

$$\sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{2 a+1} \frac{1}{(2 p+1)^{2 a}} > \sum_{a=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3(2 p+1)^2}\right)^a = \frac{1}{3(2 p+1)^2-1}$$

sendo $p \equiv n+k$, onde usamos o fato que $2a+1 \leq 3^a$ para todo $a \in \mathbb{N}$ (o que pode ser facilmente provado, por exemplo, por indução. Faça-o!) e usamos a expressão da soma de uma progressão geométrica infinita. Agora, como $n \geq 1$, tem-se $p \geq 1$ e, com isso,

$$3(2 p+1)^2-1=12\left[p^2+p+\frac{1}{6}\right]=12\left[p^2+\left(1+\frac{1}{6}\right) p+\frac{1}{6}(1-p)\right]$$

$$\stackrel{p \geq 1}{\leq} 12\left[p^2+\left(1+\frac{1}{6}\right) p\right] \leq 12\left[p^2+\left(1+\frac{1}{6}\right) p+\frac{1}{12}+\frac{1}{12^2}\right]=12\left(p+1+\frac{1}{12}\right)\left(p+\frac{1}{12}\right) .$$

Portanto,

$$\frac{1}{3(2 p+1)^2-1} > \frac{1}{12\left(p+1+\frac{1}{12}\right)\left(p+\frac{1}{12}\right)} = \frac{1}{12\left(p+\frac{1}{12}-p+1+\frac{1}{12}\right)} .$$

Assim, por (7.91), teremos

$$\mu_n > \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+k+\frac{1}{12}}-\frac{1}{n+k+1+\frac{1}{12}}\right) = \frac{1}{12} \frac{1}{n+\frac{1}{12}} = \frac{1}{12 n+1} .$$

³⁶ James Victor Uspensky (1883-1947).

³⁷ Para a referência original, vide nota-de-rodapé 27, página 305. Outra demonstração pode também ser encontrado em [100], que cita Robbins.

Portanto, vale

$$\frac{1}{12n+1} < \mu_n < \frac{1}{12n} \tag{7.94}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e temos

$$\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n}} \tag{7.95}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, majorações essas mais precisas que (7.92)–(7.93). Como dissemos, esses limitantes ainda podem ser melhorados e há uma extensa literatura sobre tal assunto.

• **Outros aproximantes para $n!$**

Contemplando (7.95), observamos que como $\frac{1}{12n}$ é próximo a $\frac{1}{12n+1}$ para $n \geq 1$, as expressões à direita e à esquerda de (7.95) devem também aproximar $n!$. O próximo exercício demonstra isso e mostra que essas aproximações são excelentes, mesmo para valores pequenos de n .

E. 7.11 Exercício. Sejam $A_n := \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n+1}}$ e $B_n := \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Por (7.95) vale $A_n < n! < B_n$ e podemos considerar os erros relativos obtidos ao se aproximar $n!$ por A_n , ou por B_n , os quais são dados por

$$\mathcal{A}_n := \frac{n! - A_n}{n!} = 1 - \frac{A_n}{n!} < 1 - \frac{A_n}{B_n} = 1 - \exp\left(\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12n}\right) = 1 - \exp\left(\frac{-1}{144n^2 + 12n}\right),$$

$$\mathcal{B}_n := \frac{B_n - n!}{n!} = \frac{B_n}{n!} - 1 < \frac{B_n}{A_n} - 1 = \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{12n+1}\right) - 1 = \exp\left(\frac{1}{144n^2 + 12n}\right) - 1.$$

Como $\mathcal{A}_n > 0$ e $\mathcal{B}_n > 0$, as expressões de acima provam que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{A}_n}{n!} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n!}.$$

Prove que para $x > 0$ tem-se $1 - e^{-x} < x$ e obtenha

$$0 < \mathcal{A}_n < \frac{1}{144n^2 + 12n} < \frac{1}{144n^2} = \frac{0,00694\dots}{n^2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $A > 0$, prove que para $x \in [0, A]$ vale $e^x - 1 \leq \frac{e^A - 1}{A} x$ e com isso obtenha

$$0 < \mathcal{B}_n < \frac{13(e^{1/156} - 1)}{12n^2 + n} < \frac{13(e^{1/156} - 1)}{12n^2} = \frac{0,00696\dots}{n^2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, o erro relativo percentual dos aproximantes à esquerda e à direita de (7.95) pode ser majorado por $\approx 0,7n^{-2}\%$ para cada $n \in \mathbb{N}$, decaindo rapidamente, portanto, para $n \rightarrow \infty$. Mesmo para $n = 1$ o erro relativo percentual desses aproximantes é inferior a 0,7%. Compare com os números obtidos no Exercício E. 7.10, página 309. ✦

7.6.2 A Aproximação de Stirling para a Função Gama e suas Correções. A Série de Gudermann

• **A Aproximação de Stirling para $\Gamma(z)$ e suas correções**

Vamos agora enunciar e demonstrar o resultado principal da presente seção: a Aproximação de Stirling com suas correções para a função gama de Euler em \mathbb{C}_c . Como veremos, a demonstração evoca mais uma vez o Teorema de Unicidade de Wielandt, Teorema 7.3, página 302.

Teorema 7.5 Para toda $z \in \mathbb{C}_c := \mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(w) \leq 0 \text{ e } \operatorname{Im}(w) = 0\}$ (o plano complexo menos a semirreta real não-positiva) vale

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} \exp\left(\left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z\right) e^{\mu(z)} = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{\mu(z)}, \tag{7.96}$$

onde

$$\mu(z) := \int_0^\infty \frac{Q(t)}{(z+t)^2} dt, \tag{7.97}$$

com $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sendo a função contínua e periódica de período 1 que no intervalo $[0, 1)$ é dada por

$$Q(t) = \frac{1}{2}t(1-t).$$

Vide Figura 7.4, página 313. A função μ é analítica em todo \mathbb{C}_c e, escrevendo-se $z \in \mathbb{C}_c$ na forma polar $z = |z|e^{i\varphi}$ com $|z| > 0$ e $-\pi < \varphi < \pi$, valem as seguintes estimativas:

$$|\mu(z)| \leq \frac{1}{8|z|} \frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}. \tag{7.98}$$

Para $-\pi < \varphi < \pi$ vale $\frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} \leq \frac{1}{\cos^2(\varphi/2)}$. Portanto, tem-se também de (7.98) que $|\mu(z)| \leq \frac{1}{8|z| \cos^2(\varphi/2)}$. □

Prova do Teorema 7.5. (Aqui seguimos proximoamente [264]). Para $z \in \mathbb{C}_c$, defina-se

$$S(z) := \sqrt{2\pi} \exp\left(\left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z\right) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}.$$

É elementar constatar (faça-o!) que para todo $z \in \mathbb{C}_c$ vale

$$S(z+1) = \exp\left(z \ln\left(\frac{z+1}{z}\right) + \frac{1}{2} \ln(z(z+1)) - 1\right) S(z), \tag{7.99}$$

resultado que será evocado mais adiante.

Vamos agora considerar uma função real $Q(t)$ definida em todo \mathbb{R} , periódica de período 1 e de sorte que no intervalo $[0, 1)$ tenhamos $Q(t) = \frac{1}{2}t(1-t)$. Vide Figura 7.4, página 313. Seguindo sugestão engenhosa de Stieltjes³⁸, defina-se

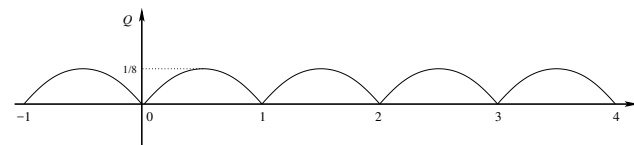


Figura 7.4: O gráfico de $Q(t)$, periódica de período 1 e que vale $t(1-t)/2$ no intervalo $[0, 1)$.

agora, para $z \in \mathbb{C}_c$, a função

$$\mu(z) := \int_0^\infty \frac{Q(t)}{(z+t)^2} dt. \tag{7.100}$$

Afirmamos que μ é analítica em todo \mathbb{C}_c . De fato, $|Q(t)| \leq 1/8$ para todo t e se $z = x+iy \in \mathbb{C}_c$ com x e y reais, tem-se

$$\left| \frac{Q(t)}{(z+t)^2} \right| \leq \frac{1}{8} \frac{1}{(x+t)^2 + y^2} \tag{7.101}$$

e disso se conclui que a integral do lado direito em (7.100) converge uniformemente para z em compactos de \mathbb{C}_c . Agora, para cada $t \in (0, \infty)$ a função $\frac{Q(t)}{(z+t)^2}$ é, evidentemente, analítica como função de z para $z \in \mathbb{C}_c$. Logo, $\mu(z)$ é analítica em todo \mathbb{C}_c .

³⁸Thomas Joannes Stieltjes (1856–1894).

O ponto crucial é constatarmos agora que para cada $z \in \mathbb{C}$ vale

$$\begin{aligned} \mu(z+1) - \mu(z) &= \int_0^\infty \frac{Q(t)}{(z+1+t)^2} dt - \int_0^\infty \frac{Q(t)}{(z+t)^2} dt = - \int_0^1 \frac{Q(t)}{(z+t)^2} dt \\ &\stackrel{\text{integ. por partes}}{=} - \int_0^1 \frac{Q'(t)}{z+t} dt = - \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}-t}{z+t} dt = - \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln \left(\frac{z+1}{z}\right) + 1. \end{aligned} \quad (7.102)$$

Verifique! Dessa forma, se definirmos para $z \in \mathbb{C}_c$ a função

$$G(z) := S(z)e^{\mu(z)}$$

teremos por (7.99) e (7.102) que

$$G(z+1) = zG(z).$$

E. 7.12 *Exercício importante.* Verifique! ✱

Evocando o Teorema de Wielandt, Teorema 7.3, página 302, tudo o que nos resta para provar que $\Gamma = G$ em todo \mathbb{C}_c é demonstrar que G é limitada na faixa $F := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \operatorname{Re}(z) < 2\}$ e que $G(1) = 1$.

No retângulo $F \cap \{z \in \mathbb{C} \mid -1 \leq \operatorname{Im}(z) > 1\}$ tanto $S(z)$ quanto $e^{\mu(z)}$ são limitadas por serem analíticas nessa região. Consideremos, então, a região $R := F \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| \geq 1\}$. Nela temos, por (7.101),

$$\left| \frac{Q(t)}{(z+t)^2} \right| \leq \frac{1}{8} \frac{1}{(1+t)^2 + 1}$$

(lembrar que $|y| > 1$ e $x \geq 1$ em R) e, portanto, $|\mu(z)| \leq \frac{1}{8} \int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^2 + 1} dt < \infty$ para todo $z \in R$. Assim, μ é limitada em F e, portanto, $e^{\mu(z)}$ também o é. Quanto ao fator $S(z)$, temos o seguinte. Vale

$$|S(z)| = \left| \sqrt{2\pi} \exp \left(\left(z - \frac{1}{2} \right) \ln z - z \right) \right| \leq \sqrt{2\pi} \exp \left(\operatorname{Re} \left(\left(z - \frac{1}{2} \right) \ln z \right) - \operatorname{Re}(z) \right).$$

Para $z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} e^{i\varphi}$ com $\varphi = \arctan \left(\frac{y}{x} \right)$, sendo $-\pi < \varphi < \pi$, temos

$$\operatorname{Re} \left(\left(z - \frac{1}{2} \right) \ln z \right) = \left(x - \frac{1}{2} \right) \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) - y\varphi.$$

Verifique! Por considerações puramente geométricas é fácil ver que na região R tem-se para $y > 1$ que $\varphi > \varphi_0$, onde $\equiv \arctan(1/2) > 0$ e para $y < -1$ que $\varphi < -\varphi_0$. Assim, $-y\varphi \leq -|y|\varphi_0$ em toda a região R . Logo, em R vale

$$\operatorname{Re} \left(\left(z - \frac{1}{2} \right) \ln z \right) \leq \frac{3}{2} \ln \sqrt{4 + y^2} - |y|\varphi_0$$

e, portanto,

$$|S(z)| \leq (4 + y^2)^{3/4} e^{-|y|\varphi_0}$$

que, claramente, é uma função limitada em R , convergindo a zero quando $|y| \rightarrow \infty$.

Estabelecemos que $S(z)$, $e^{\mu(z)}$ e, portanto, $G(z)$ são limitadas em F . Resta-nos provar que $G(1) = 1$. Como $G(1)$ é certamente positivo, os resultados obtidos até aqui já garantem que $G(z)/G(1) = \Gamma(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}_c$. Logo, a fórmula de duplicação (7.53) garante-nos que

$$G(1) = \frac{2^{2z-1} G(z)G\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} G(2z)}$$

(verifique!) para todo $z \in \mathbb{C}_c$, ou seja,

$$G(1) = \frac{2^{2z-1} S(z)S\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} S(2z)} \exp \left(\mu(z) + \mu\left(z + \frac{1}{2}\right) - \mu(2z) \right).$$

Um cálculo explícito usando a definição de S mostra que

$$\frac{S(z)S\left(z + \frac{1}{2}\right)}{S(2z)} = \sqrt{\frac{\pi}{e}} 2^{-2z+1} \exp \left(z \ln \left(1 + \frac{1}{2z} \right) \right)$$

(verifique!) e, portanto,

$$G(1) = \frac{1}{\sqrt{e}} \exp \left(z \ln \left(1 + \frac{1}{2z} \right) \right) \exp \left(\mu(z) + \mu\left(z + \frac{1}{2}\right) - \mu(2z) \right).$$

Tomando agora $z = x$, real e positivo, podemos escrever

$$G(1) = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \exp \left(\mu(x) + \mu\left(x + \frac{1}{2}\right) - \mu(2x) \right). \quad (7.103)$$

É de se observar agora que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x = \sqrt{e}$ (um resultado bem conhecido) e que $\lim_{x \rightarrow \infty} \mu(x) = 0$. Isso segue do fato que, como $Q(t) \leq 1/8$, temos

$$\mu(x) = \int_0^\infty \frac{Q(t)}{(x+t)^2} dt \leq \frac{1}{8} \int_0^\infty \frac{1}{(x+t)^2} dt = \frac{1}{8} \int_x^\infty \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{8x}.$$

Assim, tomando o limite $x \rightarrow \infty$ em (7.103), obtemos $G(1) = 1$, estabelecendo (7.96)–(7.97).

Vamos agora demonstrar a estimativa (7.98). Escrevendo $z \in \mathbb{C}_c$ na forma polar $z = |z|e^{i\varphi}$, com $|z| > 0$ e $-\pi < \varphi < \pi$, tem-se a seguinte majoração:

$$|\mu(z)| \leq \frac{1}{8} \int_0^\infty \frac{1}{(|z|\cos\varphi + t)^2 + |z|^2 \sin^2\varphi} dt. \quad (7.104)$$

É fácil provar que $\int_0^\infty \frac{dt}{(a+t)^2 + b^2} = \frac{\arctan(b/a)}{b}$ (prove isso com a mudança de variáveis $t \rightarrow r \equiv \frac{b}{a+t}$). Com uso disso, segue facilmente que $|\mu(z)| \leq \frac{1}{8|z|} \frac{\varphi}{\sin\varphi}$, estabelecendo (7.98). ■

• **A série de Gudermann**

A expressão (7.97) pode ser reescrita de forma mais explícita como

$$\mu(z) := \int_0^\infty \frac{Q(t)}{(z+t)^2} dt = \sum_{m=0}^\infty \int_m^{m+1} \frac{Q(t)}{(z+t)^2} dt = \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t(1-t)}{(z+t+m)^2} dt.$$

Note-se que a convergência da série do lado direito para cada $z \in \mathbb{C}_c$ é evidente, pois $\frac{1}{2}t(1-t) \leq 1/8$ e os termos $\frac{1}{(z+t+m)^2}$ comportam-se como $\approx m^{-2}$ para m grande. Como $\frac{1}{(z+t+m)^2} = -\frac{d}{dt} \frac{1}{z+t+m}$, integração por partes fornece

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t(1-t)}{(z+t+m)^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-2t}{z+t+m} dt = \left(z+m + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{z+m} \right) - 1.$$

Verifique! Com isso, obtemos para todo $z \in \mathbb{C}_c$

$$\mu(z) = \sum_{m=0}^\infty \left[\left(z+m + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{z+m} \right) - 1 \right]. \quad (7.105)$$

Essa é série de Gudermann³⁹ (7.77). Como comentado acima, a série de Gudermann é convergente para cada $z \in \mathbb{C}_c$. É muito fácil constatar (faça-o!) que a convergência é uniforme em compactos de \mathbb{C}_c , o que implica que a série do lado direito de (7.105) é também analítica em todo \mathbb{C}_c . Com (7.105) ficam justificadas as expressões (7.79) e (7.80).

³⁹Christoph Gudermann (1798–1852).

E. 7.13 *Exercício.* Considere-se a função real $P_1(t)$ definida em todo \mathbb{R} , periódica de período 1 e de sorte que no intervalo $[0, 1)$ tenhamos

$$P_1(t) = t - \frac{1}{2}.$$

Constate que $P_1(t) = -Q'(t)$ em cada intervalo $(m, m + 1)$, $m \in \mathbb{Z}$, e, usando integração por partes, mostre que

$$\mu(z) := \int_0^\infty \frac{Q(t)}{(z+t)^2} dt = - \int_0^\infty \frac{P_1(t)}{z+t} dt \quad (7.106)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Como discutido em certos textos (veja, e.g., [264]) essa expressão é o ponto de partida para a obtenção de uma série assintótica (não convergente!) para $\mu(z)$ em termos de potências de $1/z$, denominada *série de Stirling*, da qual não trataremos aqui. ✦

7.7 Exercícios Adicionais

Alguns dos exercícios que seguem exibem propriedades especiais da função gama de Euler. Outros ilustram o uso da função gama de Euler (e, em menor grau, da função zeta de Riemann) no cálculo de integrais definidas que dificilmente seriam computadas por outros meios.

E. 7.14 *Exercício.* Prove as identidades

$$2^n n! = (2n)!! , \quad (2n)! = (2n)!! (2n-1)!! ,$$

$n \in \mathbb{N}$. ✦

E. 7.15 *Exercício.* Prove as identidades

$$\Gamma(n+1/2) = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n} , \quad n \in \mathbb{N} ,$$

$$\Gamma(1/2 - n) = (-1)^n \sqrt{\pi} \frac{2^n}{(2n-1)!!} , \quad n \in \mathbb{N} ,$$

$$\Gamma(n+1/3) = 3^{-n} (3n-2)!!! \Gamma(1/3) , \quad n \in \mathbb{N} ,$$

$$\Gamma(n+2/3) = 3^{-n} (3n-1)!!! \Gamma(2/3) , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Sugestão: use $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ e indução. ✦

E. 7.16 *Exercício.* Prove que

$$\frac{1}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\right)^2} + \frac{1}{\left(\Gamma(z)\Gamma(1-z)\right)^2} = \frac{1}{\pi^2}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. ✦

E. 7.17 *Exercício.* Usando (7.11) e o fato que $\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)}$, prove que para todo $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, vale

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh(\pi y)}$$

e usando (7.40), prove que para todo $y \in \mathbb{R}$ vale

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)} .$$

Mostre também que

$$|\Gamma(1+iy)|^2 = \frac{\pi y}{\sinh(\pi y)}$$

para todo $y \in \mathbb{R}$.

Obtenha expressões exatas para $|\Gamma(n+iy)|^2$ e para $|\Gamma(n+\frac{1}{2}+iy)|^2$, $n \in \mathbb{N}$. ✦

E. 7.18 *Exercício.* Para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, é imediato da relação $\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z \operatorname{sen}(\pi z)}$ (vide (7.11)) que

$$|\Gamma(z)|^2 |\Gamma(-z)|^2 = \frac{\pi^2}{|z|^2 |\operatorname{sen}(\pi z)|^2} . \quad (7.107)$$

Escrevendo $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$, mostre que (7.107) pode ser escrita de forma mais explícita como

$$\begin{aligned} \Gamma(x+iy)\Gamma(x-iy)\Gamma(-x-iy)\Gamma(-x+iy) &= \frac{\pi^2}{(x^2+y^2)\left((\cosh(\pi y))^2 - (\cos(\pi x))^2\right)} \\ &= \frac{2\pi^2}{(x^2+y^2)\left(\cosh(2\pi y) - \cos(2\pi x)\right)} . \quad (7.108) \end{aligned}$$

✦

E. 7.19 Exercício. Mostre usando a aproximação de Stirling (7.78) e/ou (7.96) que, com x e y reais e $|y| \rightarrow \infty$, vale a aproximação

$$|\Gamma(x + iy)| \approx \sqrt{2\pi} |y|^{x-1/2} e^{-\pi|y|/2}, \quad (7.109)$$

uniformemente para x em compactos de \mathbb{R} . Constate que essa aproximação é perfeitamente compatível com os resultados do Exercício E. 7.17, página 317. ✦

E. 7.20 Exercício. Mostre usando a aproximação de Stirling (7.78) e/ou (7.96) que, com x e y reais e $x \rightarrow +\infty$, valem as aproximações

$$|\Gamma(x + iy)| \approx \sqrt{2\pi} (x^2 + y^2)^{-(|x|+1/2)/2} e^{-x-y \arctan(\frac{y}{x})} \approx \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}, \quad (7.110)$$

uniformemente para y em compactos de \mathbb{R} . O que se pode afirmar sobre o caso $x \rightarrow -\infty$? Usando (7.107) e (7.110), obtenha para $x < 0$ a aproximação

$$|\Gamma(x + iy)| \approx \sqrt{\pi} \frac{(x^2 + y^2)^{-(|x|+1/2)/2} e^{|x|+y \arctan(\frac{y}{x})}}{(\cosh(2\pi y) - \cos(2\pi x))^{1/2}} \approx \sqrt{\pi} \frac{|x|^{-|x|-\frac{1}{2}} e^{|x|}}{(\cosh(2\pi y) - \cos(2\pi x))^{1/2}}, \quad (7.111)$$

com $y \in \mathbb{R}$, fixo, e $x \rightarrow -\infty$. Essa aproximação não é uniforme em y . Observe que o denominador anula-se se e somente se $y = 0$ e x for um inteiro negativo (o que é compatível com a localização dos polos da função gama).

De (7.110) segue que $|\Gamma(x + iy)|$ diverge para $x \rightarrow +\infty$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Em contraste, segue de (7.111) que para todo $y \neq 0$ tem-se $\lim_{x \rightarrow -\infty} |\Gamma(x + iy)| = 0$ não uniformemente em y . ✦

E. 7.21 Exercício. Prove a identidade

$$\frac{B(r, s)}{B(r+t, s-t)} = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+t)\Gamma(s-t)} = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{t}{k+r}\right) \left(1 - \frac{t}{k+s}\right) \quad (7.112)$$

e identifique os valores complexos de r , s e t para os quais a mesma é válida. *Sugestão:* Use a representação produto de Weierstrass (7.27) ou a representação produto de Euler (7.32).

Usando (7.112), demonstre que

$$\frac{|\Gamma(r)|^2}{|\Gamma(r+it)|^2} = \prod_{k=0}^{\infty} \left|1 + \frac{it}{k+r}\right|^2 \quad (7.113)$$

para todos $r \in \mathbb{C}$ e $t \in \mathbb{R}$. ✦

A função gama de Euler é útil também por permitir determinar certas integrais definidas. Os exercícios a seguir ilustram isso.

E. 7.22 Exercício. Demonstre que, para $0 < \text{Re}(z) < 1$, tem-se

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan \theta)^{2z-1} d\theta = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{(1-t)^z} dt = \int_0^{\infty} \frac{u^{z-1}}{1+u} du = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi z)}. \quad (7.114)$$

Sugestão: constate que, por (7.34), (7.35) e (7.36), cada uma das integrais acima é igual a $B(z, 1-z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(1)}$ e use (7.39). ✦

E. 7.23 Exercício. Mostre que

$$-\gamma = \Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t) dt = \int_0^1 \ln\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt,$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni. ✦

E. 7.24 Exercício. Mostre que para $x > 0$ vale

$$\int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{x-1} dt = \Gamma(x).$$

Em verdade, essa é uma das definições originais de Euler para a função gama. ✦

E. 7.25 Exercício. Mostre que para $x > 0$ valem

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} dt = \Gamma\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} e^{-tx} t^y dt = \frac{1}{x} \Gamma\left(\frac{1+y}{x}\right).$$

Naturalmente, a integral da segunda relação só existe caso $\text{Re}(y) > -1$, devido à possível singularidade do fator t^y em $t = 0$. O lado direito dessa segunda relação, porém, está definido para todo $y \in \mathbb{C}$, exceto caso $(1+y)/x$ seja um inteiro não-positivo. ✦

E. 7.26 Exercício. Mostre que para todo $\alpha \geq 0$ vale

$$\int_0^{\pi} (\text{sen}\theta)^\alpha d\theta = 2 \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (7.115)$$

Sugestão. Isso é uma consequência trivial de (7.33) e de (7.34).

É de se notar que o lado direito de (7.115) possui uma extensão analítica ao conjunto $\mathbb{C} \setminus \{-2n-1, n \in \mathbb{N}_0\}$, ou seja, ao conjunto de todos os α 's complexos que não sejam os inteiros negativos ímpares. ✦

E. 7.27 Exercício dirigido. Este exercício faz uso da função Beta e suas propriedades e de métodos de integração complexa para a obtenção de um resultado não-elementar: para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(\beta) > -1$ vale

$$\int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^\beta \cos(\alpha\theta) d\theta = -\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}(\beta-\alpha)\right)}{2^{\beta+1}} B\left(\frac{\alpha-\beta}{2}, \beta+1\right) \quad (7.116)$$

$$= \frac{\pi}{2^\beta(\beta-\alpha)} \frac{1}{B\left(\frac{\alpha+\beta+2}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}\right)} \quad (7.117)$$

$$= \frac{\pi}{2^{\beta+1}(\beta+1)} \frac{1}{B\left(\frac{\alpha+\beta+2}{2}, \frac{\beta-\alpha+2}{2}\right)}. \quad (7.118)$$

As relações (7.116)–(7.118) serão provadas abaixo na região $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ com $|\text{Re}(\alpha)| > \text{Re}(\beta) > -1$. No entanto, contemplando (7.116)–(7.118), é fácil constatar que apenas a restrição $\text{Re}(\beta) > -1$ é relevante para a existência da integral do lado esquerdo.

A igualdade entre a integral do lado esquerdo e (7.118) é o conteúdo de um exercício de [348], cuja resolução delineamos nos passos abaixo, seguindo as sugestões daquele texto, as quais parecem remontar a Cauchy⁴⁰.

- Para $0 < r < 1/2$, seja C_r o caminho no plano complexo, fechado e orientado no sentido anti-horário, indicado na Figura 7.5, página 320. Nessa figura, A_0 é um arco de círculo de raio 1 centrado em 0: $A_0 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C}, -\varphi \leq \theta \leq \varphi\}$, onde $\varphi \in (0, \pi/2)$ é o ângulo indicado na Figura 7.6, página 321. A_1, A_2 e A_3 são arcos de círculo de raio r centrados em $i, 0$ e $-i$, respectivamente. O arco A_0 encontra o arco A_1 no ponto indicado por p nas Figuras 7.5 e 7.6 e encontra o arco A_3 no ponto indicado por q nas mesmas figuras. I_1 e I_2 são os intervalos do eixo imaginário dados por $I_1 = \{iy \in \mathbb{C}, r \leq y \leq 1-r\}$ e $I_2 = \{iy \in \mathbb{C}, -1+r \leq y \leq -r\}$. Para $\alpha \in \beta \in \mathbb{C}$ seja a função

$$F(z) := z^{\alpha-1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^\beta = z^{\alpha-\beta-1} (z-i)^\beta (z+i)^\beta.$$

Essa função pode possuir até três pontos singulares, a saber, em $z = 0$ e em $z = \pm i$. O ponto $z = 0$ pode ser um polo se $\alpha - \beta - 1$ for um inteiro negativo e os pontos $z = \pm i$ podem ser polos se β for um inteiro negativo. Em geral, porém, esses três pontos são pontos de ramificação⁴¹. Escolhendo as linhas de ramificação paralelas ao eixo real negativo (indicadas em linhas tracejadas na Figura 7.5), a função F será sempre (i.e., para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) analítica no interior da região delimitada por C_r e em uma vizinhança dessa curva.

Conclua que para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e todo $r \in (0, 1/2)$ vale

$$\oint_{C_r} F(z) dz = \oint_{C_r} z^{\alpha-1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^\beta dz = 0.$$

⁴⁰ Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

⁴¹ O ponto $z = 0$ só não será singular se $\alpha - \beta \in \mathbb{N}$. Os pontos $\pm i$ só não serão singulares se $\beta \in \mathbb{N}_0$. Essas afirmações são evidentes.

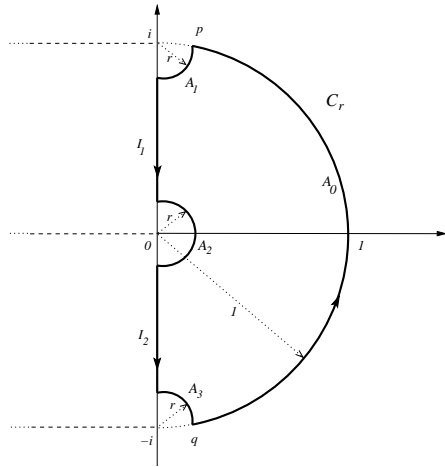


Figura 7.5: A curva $C_r \subset \mathbb{C}$, orientada no sentido anti-horário e fechada.

2. Mostre que para $\text{Re}(\alpha) > \text{Re}(\beta)$ vale

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{A_2} z^{\alpha-1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^\beta dz = 0.$$

3. Mostre que para $\text{Re}(\beta) > -1$ vale

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{A_1} z^{\alpha-1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^\beta dz = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{A_3} z^{\alpha-1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^\beta dz = 0. \quad (7.119)$$

4. Mostre que

$$\int_{A_0} z^{\alpha-1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^\beta dz = 2^\beta i \int_{-\varphi}^{\varphi} (\cos \theta)^\beta \cos(\alpha \theta) d\theta,$$

onde o ângulo φ é indicado na Figura 7.6, página 321. Conclua que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{A_0} z^{\alpha-1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^\beta dz = 2^\beta i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \theta)^\beta \cos(\alpha \theta) d\theta = 2^{\beta+1} i \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^\beta \cos(\alpha \theta) d\theta.$$

5. Mostre que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{I_1} z^{\alpha-1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^\beta dz = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(\beta-\alpha)}}{2} \int_0^1 u^{(\alpha-\beta)/2-1} (1-u)^\beta du \stackrel{(7.35)}{=} -\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(\beta-\alpha)}}{2} B\left(\frac{\alpha-\beta}{2}, \beta+1\right)$$

e que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{I_2} z^{\alpha-1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^\beta dz = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\beta-\alpha)}}{2} \int_0^1 u^{(\alpha-\beta)/2-1} (1-u)^\beta du \stackrel{(7.35)}{=} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\beta-\alpha)}}{2} B\left(\frac{\alpha-\beta}{2}, \beta+1\right).$$

6. De (7.119) e dos demais resultados acima, estabeleça que para $\text{Re}(\alpha) > \text{Re}(\beta) > -1$ vale

$$\int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^\beta \cos(\alpha \theta) d\theta = -\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}(\beta-\alpha)\right)}{2^{\beta+1}} B\left(\frac{\alpha-\beta}{2}, \beta+1\right).$$

Essa é a relação (7.116). Como a integral do lado esquerdo não se altera com a troca $\alpha \rightarrow -\alpha$, a relação é válida na região $|\text{Re}(\alpha)| > \text{Re}(\beta) > -1$.

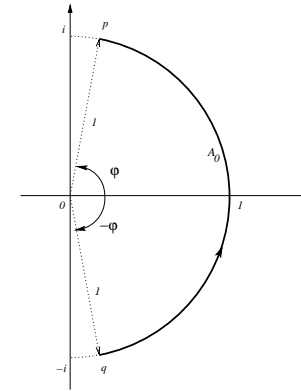


Figura 7.6: O arco A_0 e o ângulo φ .

7. Fazendo uso de (7.52), mostre que

$$-\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}(\beta-\alpha)\right) B\left(\frac{\alpha-\beta}{2}, \beta+1\right) \stackrel{(7.52)}{=} \frac{2\pi}{\beta-\alpha} \frac{1}{B\left(\frac{\alpha+\beta+2}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}\right)}.$$

Tem-se, portanto,

$$\int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^\beta \cos(\alpha \theta) d\theta = \frac{\pi}{2^{\beta}(\beta-\alpha)} \frac{1}{B\left(\frac{\alpha+\beta+2}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}\right)} \quad (7.120)$$

também na região $|\text{Re}(\alpha)| > \text{Re}(\beta) > -1$. Essa é a relação (7.117).

8. Usando (7.48), mostre que

$$\frac{\beta-\alpha}{2} B\left(\frac{\alpha+\beta+2}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}\right) = (\beta+1) B\left(\frac{\alpha+\beta+2}{2}, \frac{\beta-\alpha+2}{2}\right).$$

Inserindo isso em (7.120), mostre também que

$$\int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^\beta \cos(\alpha \theta) d\theta = \frac{\pi}{2^{\beta+1}(\beta+1)} \frac{1}{B\left(\frac{\alpha+\beta+2}{2}, \frac{\beta-\alpha+2}{2}\right)},$$

na mesma região $|\text{Re}(\alpha)| > \text{Re}(\beta) > -1$. Isso completa a demonstração de (7.118).

As relações (7.116)-(7.118) têm diversos usos. Elas podem ser usadas para a determinação da série de Fourier da função $(\cos \theta)^\beta$ (vide Exercício E. 38.29, página 1890) e surgem na Física no cálculo de funções de dois pontos de teorias quânticas de campos escalares livres e massivas no espaço-tempo de de Sitter. \star

E. 7.28 Exercício dirigido. A função Gama de Euler pode ser usada para expressar integrais como

$$I(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x^1 + \alpha_0} dx, \quad (7.121)$$

onde $\alpha_4 > 0$ e $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, 3$. Expandindo cada fator $e^{\alpha_k x^k}$, $k = 1, \dots, 3$, em sua série de Taylor centrada em $x = 0$, obtenha

$$I(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = e^{\alpha_0} \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \alpha_3^{n_3}}{n_1! n_2! n_3!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_4 x^4} x^{n_1+2n_2+3n_3} dx.$$

Justifique a troca da ordem da integração pelas somas com base no rápido decaimento de $e^{-\alpha_4 x^4}$ quando $|x| \rightarrow \infty$.

Por simetria, a integral acima será nula exceto se $n_1 + 2n_2 + 3n_3$ for par. Como $2n_2 + 2n_3$ é sempre um número par, é suficiente impor-se que $n_1 + n_3$ seja par. Nesse caso, podemos escrever, tomando $m \equiv (n_1 + 2n_2 + 3n_3)/2 \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_4 x^4} x^{n_1+2n_2+3n_3} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha_4 x^4} x^{2m} dx = \stackrel{t=\alpha_4 x^4}{=} \frac{1}{2\alpha_4^{\frac{1}{4}+\frac{m}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-t^{\frac{1}{4}+\frac{m}{2}-1}} dt = \frac{1}{2\alpha_4^{\frac{1}{4}+\frac{m}{2}}} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{m}{2}\right),$$

onde Γ é a *Função Gama de Euler*. Verifique que, assim, obtemos⁴²

$$I(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \frac{e^{\alpha_0}}{2} \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3=0 \\ n_1+n_3=\text{par}}}^{\infty} \frac{\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{2n_2} \alpha_3^{3n_3} \alpha_4^{-(n_1+2n_2+3n_3+1)/4}}{n_1! n_2! n_3!} \Gamma\left(\frac{n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 1}{4}\right). \quad (7.122)$$

Uma variante dessa expressão será reencontrada no Exercício E. 39.61, página 1998, que trata do cálculo de certas transformadas de Fourier. ✱

E. 7.29 *Exercício.* Generalize (7.122) para integrais do tipo

$$I(\alpha_0, \dots, \alpha_{2n}) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha_{2n} x^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} \alpha_k x^k\right) dx, \quad (7.123)$$

com $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{2n} > 0$ e $\alpha_0, \dots, \alpha_{2n-1}$ complexos. ✱

⁴²A relação (7.122) é apresentada em artigo da Wikipedia, sem demonstração e referência. Agradecemos ao Prof. Fernando T. C. Brandt por nos chamar a atenção para essa fórmula.