Capítulo 14
Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

Sumário

14.1 Introdução **722**
14.2 Unicidade e Existência de Soluções **722**
14.2.1 Unicidade 722
14.2.2 Existência. A Série de Dyson 725
14.2.3 Propriedades de $D(t,\ s)$ 729
14.3 Equações com Coeficientes Constantes **732**
14.3.1 Alguns Exemplos e Aplicações 734
14.4 Perturbações de Sistemas Lineares **738**
14.5 Mais sobre a Série de Dyson. Produtos de Tempo Ordenado **742**
14.6 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares no Plano Complexo **744**
14.6.1 O Caso Analítico 745
14.6.2 Resolução por Séries de Potências 750
14.6.3 Sistemas com Pontos Singulares. Monodromia 751
14.6.4 Sistemas com Pontos Singulares Simples 760
14.7 Sistemas Provenientes de EDOs de Ordem m **763**
14.7.1 Pontos Singulares Simples em EDO's de Ordem m 765
14.7.2 Singularidades no Infinito 769
14.7.3 Alguns Exemplos de Interesse 770
14.8 Equações Fuchsianas. Símbolos de Riemann **775**
14.8.1 Equações Fuchsianas de Primeira Ordem 776
14.8.2 Equações Fuchsianas de Segunda Ordem 779
14.8.3 A Equação de Riemann-Papperitz. Símbolos de Riemann 787
14.8.3.1 Transformações de Simetria dos Símbolos de Riemann 790
14.8.3.2 Equações Fuchsianas com três pontos singulares e a equação hipergeométrica 793
14.9 Exercícios Adicionais **796**

Iremos neste capítulo estudar sistemas de equações diferenciais lineares ordinárias, com particular atenção a sistemas de equações diferenciais lineares associados a equações diferenciais lineares de ordem n. Demonstraremos alguns teoremas básicos e apresentaremos métodos de solução, com particular destaque para a série de Dyson. Alguns exemplos de interesse físico serão discutidos com certo detalhe. Inicialmente trataremos sistemas dependentes de uma variável real e mais adiante, a partir da Seção 14.6, página 744, generalizaremos nossos resultados para sistemas dependentes de uma variável complexa. Tal generalização é particularmente importante para o tratamento de sistemas de equações diferenciais provenientes de equações diferenciais ordinárias lineares de ordem n, já que métodos de resolução de tais equações, como o método de Frobenius, estão intimamente relacionados a propriedades analíticas dos coeficientes da equação. Diversas propriedades de equações diferenciais no plano complexo e de suas soluções são discutidas, com particular ênfase na estrutura de suas singularidades e propriedades de monodromia, as quais estão intimamente ligadas ao método de Frobenius, como discutiremos. A Seção 14.8, página 775, discute as chamadas equações Fuchsianas e algumas de suas propriedades. Sua leitura é parcialmente dispensável para o que se lhe segue, mas poderá elucidar alguns aspectos da teoria das equações diferenciais no plano complexo, em particular, das equações hipergeométricas.

O presente capítulo será continuado no Capítulo 15, página 801, onde discutiremos a solução de equações diferenciais ordinárias lineares de ordem 2 utilizando o método de expansões em série, e utilizando o método de Frobenius. Em seguida, no Capítulo 16, página 864, estudaremos propriedades de algumas das soluções de maior interesse em Física.

14.1 Introdução

Seja t uma variável real, $A(t)$ uma matriz $m \times m$ cujos elementos $A_{ij}(t)$, $i,\ j = 1,\ \ldots,\ m$, são funções contínuas (reais ou complexas) dadas de t e seja $F(t)$ um vetor coluna

$$F(t) \ = \ \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}$$

onde $f_i(t)$, $i = 1,\ \ldots,\ m$ são igualmente funções contínuas (reais ou complexas) dadas de t. Se $Y(t)$ é um vetor coluna

$$Y(t) \ = \ \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix}$$

a equação diferencial

$$\dot{Y}(t) \ = \ A(t)Y(t) + F(t) \tag{14.1}$$

é dita ser um *sistema linear de equações diferenciais de primeira ordem*, cujas incógnitas são as m funções $y_1(t),\ \ldots,\ y_m(t)$. Caso F for identicamente nula o sistema é dito ser um *sistema homogêneo* e, caso contrário, é dito ser um *sistema não-homogêneo*. Estaremos aqui interessados em estudar esses sistemas de equações diferenciais quando uma *condição inicial* é fornecida, ou seja, quando o valor de $Y(t)$ em um ponto t_0 é especificado, tipicamente o valor de $Y(t)$ em $t = 0$: $Y(0) = Y_0$, com

$$Y_0 \ = \ \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_m^0 \end{pmatrix},$$

$y_1^0,\ \ldots,\ y_m^0$ sendo constantes (reais ou complexas).

14.2 Unicidade e Existência de Soluções

14.2.1 Unicidade

Iremos mais adiante mostrar que, sob as hipóteses acima, o sistema (14.1), submetido a uma condição inicial $Y(0) = Y_0$, sempre possui solução. Iremos em verdade exibir um método aproximativo para o cálculo da solução.

Para preparar essa discussão devemos primeiramente demonstrar a *unicidade* da solução, ou seja, precisamos mostrar que se houver uma função $Y(t)$ satisfazendo $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + F(t)$ e $Y(0) = Y_0$, então não há outra função distinta de Y com essas propriedades. O fato de a solução ser única será de importância quando discutirmos um método para calcular a solução.

Vamos considerar primeiro o caso mais simples onde a equação é homogênea $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ e a condição inicial é $Y(0) = 0$. Partiremos desse caso mais simples para poder tratar melhor depois o caso geral. Integrando-se ambos os lados da igualdade $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ entre 0 e t e usando que $Y(0) = 0$, tem-se

$$Y(t) \ = \ \int_0^t A(t_1)Y(t_1)\, dt_1 \ . \tag{14.2}$$

Essa relação é uma identidade a ser satisfeita pela função $Y(t)$ que eventualmente é solução da equação $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ com a condição inicial $Y(0) = 0$. Observemos que a função Y aparece no lado esquerdo e também dentro da integral. Como a identidade acima vale para todo t, tem-se também que

$$Y(t_1) \;=\; \int_0^{t_1} A(t_2)Y(t_2)\,dt_2\;.$$

Inserindo-se isso na penúltima identidade, tem-se

$$Y(t) \;=\; \int_0^t A(t_1)\int_0^{t_1} A(t_2)Y(t_2)\,dt_2dt_1\;, \qquad \text{ou seja,} \qquad Y(t) \;=\; \int_0^t\int_0^{t_1} A(t_1)A(t_2)\,Y(t_2)\,dt_2dt_1\;.$$

Repetindo-se esse procedimento n vezes chega-se à seguinte identidade:

$$Y(t) \;=\; \int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\,Y(t_n)\,dt_ndt_{n-1}\cdots dt_1\;. \tag{14.3}$$

Lembrando que $Y(t)$ é um vetor cujas componentes são funções $y_i(t)$ essa última identidade significa para a a-ésima componente

$$y_a(t) \;=\; \sum_{b=1}^m\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} \Big(A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\Big)_{ab}\,y_b(t_n)\,dt_ndt_{n-1}\cdots dt_1\;. \tag{14.4}$$

Acima, $\big(A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\big)_{ab}$ é o elemento ab da matriz $A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)$, formada pelo produto de n matrizes. De acordo com a regra de produto de matrizes, $\big(A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\big)_{ab}$ é dado por

$$\Big(A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\Big)_{ab} \;=\; \sum_{k_1=1}^m\sum_{k_2=1}^m\cdots\sum_{k_{n-1}=1}^m A_{ak_1}(t_1)A_{k_1k_2}(t_2)\cdots A_{k_{n-1}b}(t_n)\;.$$

A relação (14.4) fica então

$$y_a(t) \;=\; \sum_{b=1}^m\sum_{k_1=1}^m\sum_{k_2=1}^m\cdots\sum_{k_{n-1}=1}^m\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} A_{ak_1}(t_1)A_{k_1k_2}(t_2)\cdots A_{k_{n-1}b}(t_n)\,y_b(t_n)\,dt_ndt_{n-1}\cdots dt_1\;.$$

Essa relação implica a seguinte desigualdade

$$|y_a(t)| \;\le\; \sum_{b=1}^m\sum_{k_1=1}^m\sum_{k_2=1}^m\cdots\sum_{k_{n-1}=1}^m\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} |A_{ak_1}(t_1)|\,|A_{k_1k_2}(t_2)|\cdots|A_{k_{n-1}b}(t_n)|\,|y_b(t_n)|\,dt_ndt_{n-1}\cdots dt_1\;. \tag{14.5}$$

Vamos agora supor (provisoriamente) que t é limitado a um intervalo $[0,\,T]$ para algum $T > 0$ finito. Vamos definir

$$\alpha \;=\; \max_{t\in[0,\,T]}\;\max_{i,\,j\in\{1,\,\ldots,\,m\}}|A_{ij}(t)| \tag{14.6}$$

e

$$M \;=\; \max_{t\in[0,\,T]}\;\max_{i\in\{1,\,\ldots,\,m\}}|y_i(t)|\;,$$

ou seja α é o máximo valor alcançado pelo módulo dos elementos de matriz $A_{ij}(t)$ quando t varia no intervalo $[0,\,T]$ e M é o máximo valor alcançado pelo módulo de todas as componentes $y_i(t)$ de Y quando t varia no intervalo $[0,\,T]$. Note-se que as mencionadas funções são limitadas pois, por hipótese, são contínuas, e o intervalo $[0,\,T]$ é finito.

Retornando a (14.5), como todos os $|A_{ij}(t_k)|$ são menores ou iguais a α e todos os $|y_b(t_n)|$ são menores ou iguais a M, tem-se que

$$|y_a(t)| \;\le\; \sum_{b=1}^m\sum_{k_1=1}^m\sum_{k_2=1}^m\cdots\sum_{k_{n-1}=1}^m\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} \alpha^n\,M\,dt_ndt_{n-1}\cdots dt_1\;. \tag{14.7}$$

O fator α^n deve-se ao fato que

$$|A_{ak_1}(t_1)|\,|A_{k_1k_2}(t_2)|\cdots|A_{k_{n-1}b}(t_n)| \;\le\; \underbrace{\alpha\cdots\alpha}_{n\ \text{vezes}} \;=\; \alpha^n\;.$$

Claramente, vale que

$$\sum_{b=1}^m\sum_{k_1=1}^m\cdots\sum_{k_{n-1}=1}^m\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} \alpha^n\,M\,dt_n\cdots dt_1 \;=\; \alpha^n\,M\sum_{b=1}^m\sum_{k_1=1}^m\cdots\sum_{k_{n-1}=1}^m\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} dt_n\cdots dt_1\;,$$

pois α e M são constantes. Fora isso, é bem fácil constatar que

$$\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} dt_ndt_{n-1}\cdots dt_1 \;=\; \frac{t^n}{n!}\;.$$

E. 14.1 *Exercício importante.* A última igualdade pode ser facilmente provada por indução. Faça-o. ✠

Assim, a desigualdade (14.7) fica

$$|y_a(t)| \;\le\; \alpha^n\,M\,\frac{t^n}{n!}\sum_{b=1}^m\sum_{k_1=1}^m\cdots\sum_{k_{n-1}=1}^m 1\;.$$

É evidente, agora, que

$$\sum_{b=1}^m\sum_{k_1=1}^m\cdots\sum_{k_{n-1}=1}^m 1 \;=\; m^n$$

pois há n somas sucessivas, em cada uma o índice assume m valores e o somando é sempre constante (não depende dos índices).

Concluímos que

$$|y_a(t)| \;\le\; M\,\frac{(\alpha mt)^n}{n!}\;. \tag{14.8}$$

Essa desigualdade deve ser satisfeita para $t\in[0,\,T]$ pela a-ésima componente da solução Y da equação $\dot{Y} = A(t)Y(t)$ com condição inicial $Y(0) = 0$. É importante notar, porém, que o lado esquerdo não depende de n, que é simplesmente o número de vezes que repetimos a identidade (14.2) para obter (14.3). O que ocorre, porém, se tomarmos $n\to\infty$? É bem sabido que para qualquer $x\ge 0$ fixo tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} \;=\; 0\;.$$

Assim, tomando-se em (14.8) o limite $n\to\infty$ em ambos os lados, conclui-se que $y_a(t) = 0$ para todo a e todo $t\in[0,\,T]$. Como T foi escolhido arbitrário, segue que $y_a(t) = 0$ para todo t e todo a.

Em resumo, concluímos que se Y é solução da equação $\dot{Y} = A(t)Y(t)$ com condição inicial $Y(0) = 0$ então $Y(t) = 0$ para todo t. Não há, portanto, outra solução que não a função nula para a equação homogênea $\dot{Y} = A(t)Y(t)$ com condição inicial $Y(0) = 0$.

O que podemos dizer do caso geral da equação $\dot{Y} = A(t)Y(t) + F(t)$ com uma condição inicial $Y(0) = Y_0$? Vamos supor que Y e X são duas soluções satisfazendo a mesma condição inicial, ou seja, $Y(0) = X(0) = Y_0$. Definindo $Z(t) = Y(t) - X(t)$ tem-se $Z(0) = Y(0) - X(0) = Y_0 - Y_0 = 0$ e

$$\dot{Z}(t) \;=\; \dot{Y}(t) - \dot{X}(t) \;=\; A(t)Y(t) + F(t) - (A(t)X(t) + F(t)) = A(t)(Y(t) - X(t)) \;=\; A(t)Z(t)\;.$$

Assim, Z é solução da equação homogênea $\dot{Z}(t) = A(t)Z(t)$ com a condição inicial $Z(0) = 0$. Pelo que acabamos de ver, Z é identicamente nula, o que prova que $Y = X$.

Isso provou então que a equação $\dot{Y} = A(t)Y(t) + F(t)$ com uma condição inicial $Y(0) = Y_0$ tem também solução única, se houver. Provaremos adiante que há uma solução e mostraremos como calculá-la.

Finalmente, observamos que todas as conclusões apresentadas acima permanecem se a condição inicial for fixada não em $t = 0$ mas num ponto t_0 qualquer.

• **Uma propriedade da solução das equações homogêneas**

As demonstrações que apresentamos acima têm mais uma consequência para as soluções das equações homogêneas $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$, consequência essa da qual faremos uso mais adiante:

Lema 14.1 *A solução $Y(t)$ de uma equação homogênea $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ anula-se em um ponto t_0, $Y(t_0) = 0$ se e somente se $Y(t)$ for nula para todo t.* □

Prova. Se $Y(t_0) = 0$ então $Y(t) = \int_{t_0}^{t} A(t_1)Y(t_1)\,dt_1$. Como em (14.3), concluímos que

$$Y(t) \;=\; \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}} A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\,Y(t_n)\,dt_n dt_{n-1}\cdots dt_1\;.$$

Prosseguindo como antes, concluiremos que

$$|y_a(t)| \;\leq\; M\,\frac{(\alpha m|t-t_0|)^n}{n!}\;, \tag{14.9}$$

onde

$$\alpha \;=\; \max_{t\in[0,\,T]}\;\max_{i,\,j\in\{1,\,\ldots,\,m\}}|A_{ij}(t)| \qquad \text{e} \qquad M \;=\; \max_{t\in[0,\,T]}\;\max_{i\in\{1,\,\ldots,\,m\}}|y_i(t)|\;,$$

o intervalo $[0,\,T]$ sendo escolhido grande o suficiente para conter t e t_0. Tomando o limite $n\to\infty$ em (14.9), concluímos que $y_a(t) = 0$. Como isso vale para um t arbitrário, segue que $Y(t)$ é identicamente nula. ■

14.2.2 Existência. A Série de Dyson

Uma vez demonstrada a unicidade da eventual solução de uma equação como $\dot{Y} = A(t)Y(t) + F(t)$ com condição inicial $Y(0) = Y_0$ precisamos demonstrar que a solução existe. E a melhor maneira de demonstrar a existência de solução de uma equação diferencial é exibindo uma.

Para s e t reais, seja $D(t,\,s)$ a matriz $m\times m$ definida por

$$D(t,\,s) \;:=\; \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{s}^{t}\int_{s}^{t_1}\cdots\int_{s}^{t_{n-1}} A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\,dt_n dt_{n-1}\cdots dt_1\;. \tag{14.10}$$

Seja também $D(t)$ definida por $D(t) = D(t,\,0)$, ou seja,

$$D(t) \;=\; \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{t}\int_{0}^{t_1}\cdots\int_{0}^{t_{n-1}} A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\,dt_n dt_{n-1}\cdots dt_1\;. \tag{14.11}$$

Algumas páginas adiante (página 731) provaremos que vale entre $D(t,\,s)$ e $D(t)$ a seguinte relação: $D(t,\,s) = D(t)D(s)^{-1}$.

A série do lado direito de (14.10) e (14.11) é frequentemente denominada *série de Dyson*[1], denominação esta empregada especialmente em textos sobre Mecânica Quântica e Teoria Quântica da Campos.

Afirmamos que a equação $\dot{Y} = A(t)Y(t) + F(t)$ com uma condição inicial $Y(0) = Y_0$ tem solução, a qual é dada por

$$Y(t) \;=\; D(t)Y_0 + \int_0^t D(t,\,s)F(s)\,ds\;, \tag{14.12}$$

expressão essa por vezes denominada *princípio de Duhamel*[2] na literatura. A demonstração será feita provando-se que o lado direito satisfaz a equação diferencial e a condição inicial. Como a solução é única (pelo provado acima), infere-se que não pode haver outra que não (14.12). Note-se, em particular, que pelo dito acima, a equação homogênea $\dot{Y} = A(t)Y(t)$ com condição inicial $Y(0) = Y_0$ tem por solução

$$Y(t) \;=\; D(t)Y_0\;.$$

[1] Freeman John Dyson (1923–2020). Denominamos a série de (14.10) e (14.11) série de Dyson, pois essa nomenclatura é comummente empregada na Mecânica Quântica e na Teoria Quântica de Campos. Dyson chegou a essa série estudando problemas de teoria de perturbações na Teoria Quântica de Campos. Sua origem, porém, remonta pelo menos a trabalhos de Volterra de 1890. Em Teoria Quântica de Campos aquelas séries são também denominadas "exponenciais de tempo ordenado".

[2] Jean Marie Constant Duhamel (1797–1872).

O estudante deve ter em mente que a expressão (14.12) generaliza o método de variação de constantes apresentado na Seção 13.4, página 709. De fato, como veremos adiante, $D(t,\,s)$ é idêntica à matriz Wronskiana das soluções linearmente independentes da equação homogênea.

Comecemos por mostrar que as séries que aparecem em (14.10) e (14.11) são convergentes, sem o que ambas as expressões não fariam sentido. Denotando por $D_{ab}(t,\,s)$ o elemento ab da matriz $D(t,\,s)$, temos

$$\begin{aligned} D_{ab}(t,\,s) \;&=\; \mathbb{1}_{ab} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{s}^{t}\int_{s}^{t_1}\cdots\int_{s}^{t_{n-1}} \big(A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\big)_{ab}\;dt_n dt_{n-1}\cdots dt_1 \\ &=\; \delta_{a\,b} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_2=1}^{m}\cdots\sum_{k_{n-1}=1}^{m}\int_{s}^{t}\int_{s}^{t_1}\cdots\int_{s}^{t_{n-1}} A_{ak_1}(t_1)A_{k_1k_2}(t_2)\cdots A_{k_{n-1}b}(t_n)\,dt_n\cdots dt_1\;. \end{aligned}$$

Limitando provisoriamente t e s a um intervalo finito $[0,\,T]$ e usando a definição de α dada em (14.6), temos

$$\begin{aligned} |D_{ab}(t,\,s)| \;&\leq\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{m}\cdots\sum_{k_{n-1}=1}^{m}\int_{s}^{t}\int_{s}^{t_1}\cdots\int_{s}^{t_{n-1}} |A_{ak_1}(t_1)|\;|A_{k_1k_2}(t_2)|\cdots\big|A_{k_{n-1}b}(t_n)\big|\;dt_n\cdots dt_1 \\ &\leq\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\sum_{k_1=1}^{m}\cdots\sum_{k_{n-1}=1}^{m}\int_{s}^{t}\int_{s}^{t_1}\cdots\int_{s}^{t_{n-1}} dt_n\cdots dt_1 \\ &\leq\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\frac{|t-s|^n}{n!}\sum_{k_1=1}^{m}\cdots\sum_{k_{n-1}=1}^{m} 1 \\ &\leq\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\frac{|t-s|^n}{n!}m^{n-1} \\ &=\; 1 + \frac{1}{m}\left(e^{\alpha m|t-s|} - 1\right)\;. \end{aligned}$$

Isso mostra que, para cada elemento de matriz ab, a série do lado direito de (14.10) é absolutamente convergente, e isso para todo s e t.

Para mostrar que (14.12) representa de fato a solução procurada, vamos mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial t}D(t,\,s) \;=\; A(t)D(t,\,s)\;. \tag{14.13}$$

Isso, em particular, diz que

$$\frac{d}{dt}D(t) \;=\; A(t)D(t)\;. \tag{14.14}$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}D(t,\ s) &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathbb{1}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_s^t\int_s^{t_1}\cdots\int_s^{t_{n-1}} A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\,dt_n dt_{n-1}\cdots dt_1\ .\right\} \\
&= \frac{d}{dt}\left\{\mathbb{1}+\int_s^t A(t_1)\,dt_1+\int_s^t\int_s^{t_1} A(t_1)A(t_2)\,dt_2dt_1\right. \\
&\qquad \left.+\int_s^t\int_s^{t_1}\int_s^{t_2} A(t_1)A(t_2)A(t_3)\,dt_3dt_2dt_1+\cdots\right\} \\
&= 0+A(t)+\int_s^t A(t)A(t_2)\,dt_2+\int_s^t\int_s^{t_2} A(t)A(t_2)A(t_3)\,dt_3dt_2+\cdots \\
&= A(t)\left\{\mathbb{1}+\int_s^t A(t_2)\,dt_2+\int_s^t\int_s^{t_2} A(t_2)A(t_3)\,dt_3dt_2+\cdots\right\} \\
&= A(t)\left\{\mathbb{1}+\int_s^t A(t_1)\,dt_1+\int_s^t\int_s^{t_1} A(t_1)A(t_2)\,dt_2dt_1+\cdots\right\} \\
&= A(t)D(t,\ s)\ ,
\end{aligned}
$$

como queríamos provar. Acima, na quinta igualdade, fizemos uma série de mudanças de nomes das variáveis de integração, chamando t_2 de t_1, t_3 de t_2 etc.

De maneira análoga prova-se também que

$$
\frac{\partial}{\partial s}D(t,\ s)\ =\ -D(t,\ s)A(s)\ . \tag{14.15}
$$

E. 14.2 *Exercício*. Faça isso. ✣

É também evidente pela definição (14.10) que para todo t vale $D(t,\ t)=\mathbb{1}$. Analogamente, vale $D(0)=\mathbb{1}$. Retornando à equação (14.12), notemos que calculando o lado direito em $t=0$ temos

$$
Y(0)\ =\ D(0)Y_0+\int_0^0 D(0,\ s)F(s)\,ds\ =\ \mathbb{1}Y_0+0\ =\ Y_0\ ,
$$

mostrando que o lado direito de (14.12) satisfaz a condição inicial $Y(0)=Y_0$. Derivando o lado direito de (14.12) em relação a t, tem-se

$$
\begin{aligned}
\dot{Y}(t) &= \frac{d}{dt}D(t)Y_0+\frac{d}{dt}\int_0^t D(t,\ s)F(s)\,ds \\
&= A(t)D(t)Y_0+D(t,\ t)F(t)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}D(t,\ s)F(s)\,ds \\
&= A(t)D(t)Y_0+F(t)+\int_0^t A(t)D(t,\ s)F(s)\,ds \\
&= A(t)\left\{D(t)Y_0+\int_0^t D(t,\ s)F(s)\,ds\right\}+F(t). \\
&= A(t)Y(t)+F(t),
\end{aligned}
$$

provando que lado direito de (14.12) satisfaz a equação diferencial. Como a solução é única, ela deve ser aquela dada em (14.12).

• **Observações**

A série de Dyson em (14.10) e (14.11) fornece a solução do sistema de equações $\dot{Y}(t)=A(t)Y(t)+F(t)$ por meio de (14.12). Devemos fazer notar, porém, que a série de Dyson não é o único meio de obter soluções dessas equações. Em alguns casos particulares outros métodos podem ser mais eficazes, especialmente se estivermos interessados em obter soluções em termos de funções conhecidas ou de expansões em série. Tal é o caso, por exemplo, se os elementos de matriz de $A(t)$ e $F(t)$ são funções analíticas de t ou possuem singularidades "fracas", quando o chamado *método de expansão em série de potências* ou o *método de Frobenius* podem ser empregados (vide para tal o Capítulo 15, página 801). Em muitos casos a série de Dyson não é útil quando se pretende obter soluções explícitas, devido à complexidade de se calcular explicitamente os produtos de matrizes $A(t_1)\cdots A(t_n)$ e suas integrais.

A série de Dyson é, porém, bastante eficiente quando o interesse é obter soluções por métodos numéricos, já que a mesma é rapidamente convergente. A série de Dyson é também muito útil quando se tem pela frente problemas de teoria de perturbações. Isso será discutido com mais detalhe na Seção 14.4. Foi, aliás, estudando problemas de teoria de perturbações na Teoria Quântica de Campos que Dyson chegou àquela série, inspirado provavelmente nos métodos iterativos de solução da equação integral de Volterra (o leitor interessado pode estudar o tratamento da equação integral de Volterra feito na Seção 25.2.3, página 1380, mas isso é dispensável para o que segue).

A série de Dyson possui generalizações para espaços de Hilbert e de Banach e mesmo quando $A(t)$ é uma família de operadores não-limitados. O leitor interessado poderá estudá-las em [413].

Um caso particular importante da solução via série de Dyson é aquele no qual a matriz $A(t)$ é constante, ou seja, não depende da variável t. Trataremos disso na Seção 14.3, página 732. Outras representações e propriedades da série de Dyson são apresentadas na Seção 14.5, página 742.

• **Equações matriciais**

Até agora estudamos equações da forma $\dot{Y}(t)=A(t)Y(t)+F(t)$, com condição inicial $Y(0)=Y_0$, onde $A(t)$ é uma matriz $m\times m$ e onde Y e F são vetores coluna com m componentes:

$$
Y(t)\ =\ \begin{pmatrix} y_1(t)\\ \vdots\\ y_m(t)\end{pmatrix},\qquad F(t)\ =\ \begin{pmatrix} f_1(t)\\ \vdots\\ f_m(t)\end{pmatrix}.
$$

Consideremos agora a equação $\dot{\mathcal{M}}(t)=A(t)\mathcal{M}(t)+\mathcal{G}(t)$, com condição inicial $\mathcal{M}(0)=\mathcal{M}_0$, onde $A(t)$, $\mathcal{G}(t)$ e $\mathcal{M}(t)$ são matrizes $m\times m$, a incógnita sendo a matriz $\mathcal{M}(t)$. Veremos facilmente que podemos tratar esse problema com os mesmos métodos do anterior, onde a incógnita era um vetor coluna Y de m componentes e não uma matriz quadrada.

De fato, como toda matriz $m\times m$, as matrizes $\mathcal{M}(t)$ e $\mathcal{G}(t)$ são da forma (para notação, vide página 507)

$$
\mathcal{M}(t)\ =\ \Big[\!\Big[M_1(t),\ \ldots,\ M_m(t)\Big]\!\Big]\ ,\qquad \mathcal{G}(t)\ =\ \Big[\!\Big[G_1(t),\ \ldots,\ G_m(t)\Big]\!\Big]\ ,
$$

onde $M_i(t)$ e $G_i(t)$ são vetores coluna com m componentes, representando a i-ésima coluna das matrizes $\mathcal{M}(t)$ e $\mathcal{G}(t)$, respectivamente.

Nessa notação a equação diferencial $\dot{\mathcal{M}}(t)=A(t)\mathcal{M}(t)+\mathcal{G}(t)$ fica

$$
\Big[\!\Big[\dot{M}_1(t),\ \ldots,\ \dot{M}_m(t)\Big]\!\Big]\ =\ \Big[\!\Big[A(t)M_1(t),\ \ldots,\ A(t)M_m(t)\Big]\!\Big]+\Big[\!\Big[G_1(t),\ \ldots,\ G_m(t)\Big]\!\Big]\ ,
$$

ou seja, tem-se um conjunto de m sistemas de equações independentes

$$
\dot{M}_i(t)\ =\ A(t)M_i(t)+G_i(t),\quad i=1,\ldots,m \tag{14.16}
$$

do tipo que tratamos acima, onde as incógnitas são vetores coluna.

Para cada uma dessas equações vale o teorema de unicidade de soluções que provamos acima. Assim concluímos que a equação matricial $\dot{\mathcal{M}}(t) = A(t)\mathcal{M}(t) + \mathcal{G}(t)$, com condição inicial $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}_0$ tem solução única.

A solução de cada equação (14.16) é

$$M_i(t) \;=\; D(t)M_i(0) + \int_0^t D(t,\ s)G_i(s)\, ds\ , \quad i = 1,\ \ldots,\ m\ .$$

Reunindo as colunas M_i novamente na matriz $\mathcal{M}$, temos

$$\mathcal{M}(t) \;=\; D(t)\mathcal{M}_0 + \int_0^t D(t,\ s)\mathcal{G}(s)\, ds$$

como solução única de $\dot{\mathcal{M}}(t) = A(t)\mathcal{M}(t) + \mathcal{G}(t)$, com condição inicial $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}_0$.

14.2.3 Propriedades de $D(t,\ s)$

Consideremos novamente a equação homogênea $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ com a condição inicial $Y(0) = Y_0$. Sabemos que sua solução (única) é $Y(t) = D(t)Y_0$, onde $D(t)$ é dada em (14.11). Sejam $\mathbf{e}^k$ os vetores da base canônica:

$$\mathbf{e}^1 \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}^m \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definimos

$$Y^k(t) \;:=\; D(t)\mathbf{e}^k$$

para $k = 1, \ldots, m$. Cada $Y^k(t)$ é solução da equação homogênea $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ com a condição inicial $Y(0) = \mathbf{e}^k$.

Um vetor Y_0 representando uma condição inicial genérica

$$Y_0 \;=\; \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_m^0 \end{pmatrix} \tag{14.17}$$

pode ser escrita na base canônica como

$$Y_0 \;=\; \sum_{k=1}^m y_k^0 \mathbf{e}^k\ .$$

Assim, se $Y(t)$ é solução da equação homogênea $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ com a condição inicial $Y(0) = Y_0$ temos que

$$Y(t) \;=\; D(t)Y_0 \;=\; \sum_{k=1}^m y_k^0 D(t)\mathbf{e}^k \;=\; \sum_{k=1}^m y_k^0 Y^k(t)\ . \tag{14.18}$$

Em resumo, todas as soluções da equação homogênea $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ podem ser escritas como combinações lineares das funções $Y^1(t),\ \ldots,\ Y^m(t)$, os coeficientes sendo as componentes y_k^0 do vetor Y_0 na base canônica.

Em virtude dessas e de outras propriedades que ainda estudaremos é importante estudar as funções $Y^k(t)$. O conjunto de funções $\{Y^1(t),\ \ldots,\ Y^m(t)\}$ é denominado *sistema fundamental* ou *sistema integral* ou ainda *base integral* de soluções da equação $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$. O conceito de sistema fundamental de soluções foi introduzido por Fuchs[3] em 1866.

Importante nesse contexto é a matriz cujas colunas são formadas pelos vetores coluna Y^k. Defina-se (para a notação, vide página 507 e seguintes)

$$W(t) \;=\; \Big[\!\Big[Y^1(t),\ \ldots,\ Y^m(t) \Big]\!\Big]\ .$$

Essa matriz é denominada *matriz Wronskiana*[4] ou *matriz fundamental*.

Tem-se, porém, o seguinte. Pela definição $Y^k(t) = D(t)\mathbf{e}^k$. Portanto,

$$\Big[\!\Big[Y^1(t),\ \ldots,\ Y^m(t) \Big]\!\Big] \;=\; \Big[\!\Big[D(t)\mathbf{e}^1,\ \ldots,\ D(t)\mathbf{e}^m \Big]\!\Big] \;=\; D(t)\Big[\!\Big[\mathbf{e}^1,\ \ldots,\ \mathbf{e}^m \Big]\!\Big] \;=\; D(t)\mathbb{1} \;=\; D(t)\ ,$$

pois $\Big[\!\Big[\mathbf{e}^1,\ \ldots,\ \mathbf{e}^m \Big]\!\Big] = \mathbb{1}$. O fato que

$$D(t) \;=\; \Big[\!\Big[Y^1(t),\ \ldots,\ Y^m(t) \Big]\!\Big] \tag{14.19}$$

mostra que a matriz de Dyson (14.11) é idêntica à matriz Wronskiana e, portanto, podemos determinar $D(t)$ calculando-se os vetores $Y^1(t),\ \ldots,\ Y^m(t)$. Esse procedimento para determinar $D(t)$ pode ser circunstancialmente mais fácil que calcular a série de Dyson do lado direito de (14.11).

A identidade (14.19) será também usada para outros propósitos, um deles será mostrar que $D(t)$ é uma matriz inversível.

Vamos, de fato, mostrar que para todo t o conjunto $\{Y^1(t),\ \ldots,\ Y^m(t)\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes. Suponhamos o oposto, ou seja, que haja constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ nem todas nulas, tais que

$$\alpha_1 Y^1(t_0) + \cdots + \alpha_m Y^m(t_0) \;=\; 0$$

para algum t_0. Sabemos por (14.17)-(14.18) que a função

$$Y(t) \;=\; \alpha_1 Y^1(t) + \cdots + \alpha_m Y^m(t)$$

é solução de $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ com a condição inicial

$$Y(0) \;=\; Y_0 \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}.$$

Pela hipótese, $Y(t_0) = 0$. Pelo Lema 14.1, página 725, isso implica que $Y(t) = 0$ para todo t. Logo $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$, uma contradição que prova que os vetores $\{Y^1(t),\ \ldots,\ Y^m(t)\}$ devem ser linearmente independentes para todo t.

Se os vetores $\{Y^1(t),\ \ldots,\ Y^m(t)\}$ são linearmente independentes para todo t, então o determinante da matriz Wronskiana $\Big[\!\Big[Y^1(t),\ \ldots,\ Y^m(t) \Big]\!\Big]$ nunca se anula. O determinante

$$\mathcal{W}(t) \;=\; \det \Big[\!\Big[Y^1(t),\ \ldots,\ Y^m(t) \Big]\!\Big]$$

é dito ser o *Wronskiano* do sistema linear homogêneo $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$. Como acabamos de ver $\mathcal{W}(t) \neq 0$ para todo t.

Como a matriz Wronskiana é idêntica à matriz de Dyson (14.11), concluímos que o determinante daquela matriz nunca se anula. Isso significa que a matriz inversa $D(t)^{-1}$ existe para todo t.

Para futura referência coletamos algumas das afirmações provadas acima a seguinte proposição relevante:

[3] Lazarus Immanuel Fuchs (1833–1902).
[4] Conde Josef Hoëné de Wronski (1778–1853).

Proposição 14.1 *Seja a equação diferencial ordinária linear homogênea de primeira ordem $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$, onde Y é um vetor-coluna com n componentes ($n \geq 1$) e $A(t)$ uma família contínua matrizes $n \times n$. Então, o espaço das soluções linearmente independentes dessa equação é n-dimensional, ou seja, existem n vetores $Y^1(t), \ldots, Y^n(t)$, linearmente independentes para cada t, os quais são solução de $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ e são tais que toda solução de dessa mesma equação pode ser escrita como combinação linear $Y(t) = \alpha_1 Y^1(t) + \cdots + \alpha_n Y^n(t)$ para todo t, com $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sendo constantes.*

Pelo Exercício E. 12.2, página 687, concluí-se analogamente o seguinte: o espaço das soluções linearmente independentes de uma equação diferencial ordinária linear homogênea de ordem n (com $n \geq 1$)

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) \;=\; 0\;, \tag{14.20}$$

onde as funções $a_k(t)$ são contínuas para todo $k = 0, \ldots n-1$, é também um espaço n-dimensional, ou seja, existem n soluções $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ linearmente independentes para todo t de (14.20) tais que toda solução da mesma equação pode ser escrita como combinação linear $y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \cdots + \alpha_n y_n(t)$ para todo t, com $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sendo constantes. □

• **A relação entre $D(t,\, s)$ e $D(t)$**

Com o fato em mãos que existem as inversas $D(t)^{-1}$ para todo t, vamos demonstrar agora a seguinte identidade importante: para todo s e todo t vale

$$D(t,\, s) \;=\; D(t)D(s)^{-1}\;. \tag{14.21}$$

Essa relação, em particular, implica imediatamente que

$$D(t,\, s)^{-1} \;=\; D(s,\, t)\;. \tag{14.22}$$

A prova de (14.21) é simples. Seja s fixo daqui por diante. Sejam $\mathcal{A}(t) = D(t,\, s)$ e $\mathcal{B}(t) = D(t)D(s)^{-1}$. Queremos provar que $\mathcal{A}(t) = \mathcal{B}(t)$ para todo t. Observemos que $\mathcal{A}(s) = D(s,\, s) = \mathbb{1}$ e que $\mathcal{B}(s) = D(s)D(s)^{-1} = \mathbb{1}$. Logo, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são iguais no ponto $t = s$. Fora isso,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(t) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}D(t,\, s) \;\overset{(14.13)}{=}\; A(t)D(t,\, s) \;=\; A(t)\mathcal{A}(t)$$

e

$$\frac{d}{dt}\mathcal{B}(t) \;=\; \left(\frac{d}{dt}D(t)\right)D(s)^{-1} \;\overset{(14.14)}{=}\; A(t)D(t)D(s)^{-1} \;=\; A(t)\mathcal{B}(t)\;.$$

Assim, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são iguais no ponto $t = s$ e satisfazem a mesma equação homogênea $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$. Pelos teoremas de unicidade que estabelecemos, segue que $\mathcal{A}(t) = \mathcal{B}(t)$ para todo t, que é o que queríamos provar.

Com isso, podemos escrever a solução (14.12) de $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + F(t)$, com a condição inicial $Y(0) = Y_0$, como

$$Y(t) \;=\; D(t)Y_0 + \int_0^t D(t)D(s)^{-1}F(s)\,ds \;=\; D(t)\left(Y_0 + \int_0^t D(s)^{-1}F(s)\,ds\right)\;.$$

Outro fato que se pode agora provar é o seguinte. Se $Y(t)$ é solução da equação homogênea $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ com a condição inicial $Y(0) = Y_0$, então para todo s e todo t

$$Y(t) \;=\; D(t,\, s)Y(s)\;. \tag{14.23}$$

De fato, $Y(s) = D(s)Y_0$. Portanto, $D(t,\, s)Y(s) = D(t)D(s)^{-1}D(s)Y_0 = D(t)Y_0 = Y(t)$.

O seguinte corolário será utilizado inúmeras vezes neste texto:

Corolário 14.1 *Se $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, são matrizes reais e antissimétricas (i.e., $A(t)^T = -A(t)$ para todo t), então a correspondente série de Dyson $D(t,\, s)$ é uma matriz ortogonal. Analogamente, se $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, são matrizes complexas e antiautoadjuntas (i.e., $A(t)^* = -A(t)$ para todo t), então a correspondente série de Dyson $D(t,\, s)$ é uma matriz unitária. Assim, nesses dois casos*

$$D(t,\, s)^{-1} \;=\; \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_s^t\int_s^{t_1}\cdots\int_s^{t_{n-1}}(-1)^n A(t_n)\cdots A(t_2)A(t_1)\cdots\, dt_n dt_{n-1}\cdots dt_1\;, \tag{14.24}$$

e

$$D(t)^{-1} \;=\; \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}}(-1)^n A(t_n)\cdots A(t_2)A(t_1)\cdots\, dt_n dt_{n-1}\cdots dt_1\;, \tag{14.25}$$

válida para $A(t)$ real antissimétrica ou complexa antiautoadjunta. Observe-se os fatores $(-1)^n$ e a alteração da ordem do produto de matrizes em (14.24) e (14.25) se comparada a (14.10) e (14.11). □

Prova. Seja $D(t)$ dada em (14.11). Como vimos, $\frac{d}{dt}D(t) = A(t)D(t)$. Logo,

$$\frac{d}{dt}\big(D(t)^T D(t)\big) \;=\; \big(A(t)D(t)\big)^T D(t) + D(t)^T A(t)D(t)$$

$$= \; D(t)^T A(t)^T D(t) + D(t)^T A(t)D(t) \;=\; -D(t)^T A(t)D(t) + D(t)^T A(t)D(t) \;=\; 0\;.$$

Assim, $D(t)^T D(t)$ é constante, mas $D(0) = \mathbb{1}$ e, portanto, $D(t)^T D(t) = \mathbb{1}$ para todo t, provando que $D(t)$ é ortogonal. Por (14.21), isso implca que também $D(t,\, s)$ é ortogonal. A relação (14.25) seque de (14.11), tomando-se a transposta termo a termo. O caso em que $A(t)$ é antiautoadjunto é análogo. ■

• **A regra de composição para $D(t,\, s)$**

A relação (14.21) tem a seguinte consequência, cuja prova é agora elementar: para todos r, s e t vale

$$D(t,\, s) \;=\; D(t,\, r)D(r,\, s). \tag{14.26}$$

Essa expressão é denominada *regra de composição* para as matrizes de Dyson $D(t,\, s)$. Note que é muito mais difícil prová-la usando apenas a definição (14.10)!

E. 14.3 *Exercício para masoquistas.* Prove (14.26) usando apenas (14.10). ✠

• **Solução para condição inicial em instante arbitrário**

Uma consequência das últimas observações é que se para a equação $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + F(t)$ for dada uma "condição inicial" não em $t = 0$, mas em $t = t_0$, $Y(t_0) = Y_{t_0}$, a solução é então dada por

$$Y(t) \;=\; D(t,\, t_0)Y_{t_0} + \int_{t_0}^t D(t,\, s)F(s)\,ds\;. \tag{14.27}$$

E. 14.4 *Exercício.* Verifique! ✠

Mais propriedades da série de Dyson são discutidas no Apêndice 14.5, página 742.

14.3 Equações com Coeficientes Constantes

Vamos aqui estudar sistemas de equações lineares de primeira ordem com coeficientes constantes como $\dot{Y}(t) = AY(t) + F(t)$, com condição inicial $Y(0) = Y_0$, onde A é uma matriz constante, ou seja, seus elementos de matriz não dependem da variável t. Esse é um caso particular do que vimos acima.

A série de Dyson nesse caso fica

$$D(t,\, s) \;=\; \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}A^n\int_s^t\int_s^{t_1}\cdots\int_s^{t_{n-1}}\, dt_n dt_{n-1}\cdots dt_1 \;=\; \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(t-s)^n}{n!}A^n\;.$$

Por analogia com a bem conhecida série de Taylor da função exponencial, define-se, para uma matriz A,

$$\exp(A) \;=\; e^{A} \;=\; \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \;. \tag{14.28}$$

Assim,

$$D(t,\, s) \;=\; e^{A(t-s)} \qquad \text{e} \qquad D(t) \;=\; e^{At} \;.$$

A convergência de (14.28) já foi provada quando tratamos da convergência da série de Dyson no caso geral.

Assim, a solução de $\dot{Y}(t) = AY(t) + F(t)$, com a condição inicial $Y(0) = Y_0$, é dada, segundo (14.12), por

$$Y(t) \;=\; e^{At} Y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} F(s) ds \;.$$

O que se pode dizer sobre a dependência em t dos elementos de matriz de e^{At}? Há dois casos básicos a considerar. O primeiro é o caso em que A é diagonalizável; o segundo caso em que A não é diagonalizável.

• **Caso diagonalizável**

Se A é diagonalizável então existe uma matriz P tal que $P^{-1}AP = D$ onde D é uma matriz diagonal, tendo na diagonal os autovalores de A. Assim,

$$e^{At} \;=\; \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \;=\; P \left\{ \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P^{-1} A^n P \right\} P^{-1}$$

$$\;=\; P \left\{ \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (P^{-1}AP)^n \right\} P^{-1} \;=\; P \left\{ \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n \right\} P^{-1} \;=\; P e^{Dt} P^{-1} \;.$$

Agora, se $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_m)$, então $e^{Dt} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t},\, \ldots,\, e^{\lambda_m t})$. É claro pela igualdade $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$ que os elementos de matriz de e^{At} serão da forma

$$\left(e^{At}\right)_{ab} \;=\; \sum_{k=1}^{m} c_{ab}^{k}\, e^{\lambda_k t} \;,$$

ou seja, serão combinações lineares de exponenciais do produto de autovalores de A com t. Os coeficientes c_{ab}^{k} são constantes e dados em função dos elementos de matriz de P e P^{-1}.

• **Caso não-diagonalizável**

Caso A não seja diagonalizável, o Teorema da Decomposição de Jordan (na forma do Teorema 10.22, página 575) nos garante que existe uma matriz P tal que $P^{-1}AP = D + N$, onde: 1) D é uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal são os autovalores de A; 2) N é uma matriz nilpotente com índice, digamos, q; 3) D e N comutam.

Portanto, como D e N comutam,

$$\exp(At) \;=\; P \exp(P^{-1}APt) P^{-1} \;=\; P \exp(Dt + Nt) P^{-1} \;=\; P \exp(Dt) \exp(Nt) P^{-1} \;,$$

onde aqui usamos a Proposição 11.6, da página 637. Agora,

$$\exp(Dt) \;=\; \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t},\, \ldots,\, e^{\lambda_m t}) \qquad \text{e} \qquad \exp(Nt) \;=\; \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} N^n \;=\; \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{q-1} \frac{t^n}{n!} N^n \;.$$

Observe-se que a série do lado direito é truncada em $n = q$ pois $N^q = 0$, já que N é nilpotente com índice q. Assim, e^{Nt} é uma matriz cujos elementos são polinômios em t de grau menor que q.

Fica claro, fazendo-se o produto $e^{Dt}e^{Nt}$, que os elementos de matriz de e^{At} serão agora da forma

$$\left(e^{At}\right)_{ab} \;=\; \sum_{k=1}^{m} c_{ab}^{k}(t)\, e^{\lambda_k t} \;, \tag{14.29}$$

ou seja, serão combinações lineares de exponenciais do produto de autovalores de A com t. Há, porém, uma diferença em relação ao caso diagonalizável, a saber, os coeficientes $c_{ab}^{k}(t)$ não são mais constantes, mas são agora polinômios em t de grau menor que q e são dados em função dos elementos de matriz de P e P^{-1}.

14.3.1 Alguns Exemplos e Aplicações

Vamos aqui tratar um exemplo simples e bem conhecido proveniente da Mecânica Clássica e que ilustra bem conceitos que introduzimos nas seções anteriores. Trata-se do problema do oscilador harmônico amortecido forçado.

Como é bem sabido, esse sistema é descrito pela equação diferencial linear de segunda ordem

$$m\ddot{x}(t) \;=\; -kx(t) - \gamma\dot{x}(t) + f(t)$$

que nada mais é que a segunda lei de Newton para uma partícula de massa m ligada a uma mola de constante k e se movendo em um meio (viscoso) que exerce sobre a partícula uma força do tipo $-\gamma v(t)$ ($v(t)$ é a velocidade da partícula no instante t). Fora isso age sobre a partícula mais uma força externa que depende apenas do tempo: $f(t)$. Acima $m > 0$, $k \geq 0$ e $\gamma \geq 0$.

Dividindo a equação acima por m, podemos escrevê-la como

$$\ddot{x}(t) \;=\; -\omega_0^2 x(t) - \rho\dot{x}(t) + g(t) \;,$$

onde

$$\omega_0 \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \rho \;=\; \frac{\gamma}{m}, \quad g(t) \;=\; \frac{1}{m} f(t) \;.$$

Podemos, por um método comummente usado, transformar essa equação de segunda ordem em um sistema de duas equações de primeira ordem. Definindo $v(t) = \dot{x}(t)$, ficamos com

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) \;&=\; v(t) \;, \\ \dot{v}(t) \;&=\; -\omega_0^2 x(t) - \rho v(t) + g(t) \;. \end{aligned} \tag{14.30}$$

Isso pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\dot{Y}(t) \;=\; AY(t) + F(t) \;,$$

onde

$$Y(t) \;=\; \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \qquad A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\rho \end{pmatrix}, \qquad F(t) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \;.$$

A matriz A tem coeficientes constantes. Aprendemos nas seções anteriores que a solução dessa equação, com uma condição inicial que fixa a posição e a velocidade da partícula em $t = 0$

$$Y(0) \;=\; \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \;,$$

é dada por

$$Y(t) \;=\; e^{At} Y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} F(s)\, ds \;. \tag{14.31}$$

Como se vê, precisamos calcular agora e^{At} para a matriz A dada acima.

A primeira questão que devemos nos colocar é se a matriz A é diagonalizável ou não. Seus autovalores são

$$\lambda_1 \;=\; \frac{-\rho + \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 \;=\; \frac{-\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2} \;.$$

E. 14.5 *Exercício*. Verifique! ✣

Os autovetores associados podem ser escolhidos na forma

$$v_1 \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{-\rho-\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}}{2\omega_0^2} \\ \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{-\rho+\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}}{2\omega_0^2} \\ \\ 1 \end{pmatrix}.$$

E. 14.6 *Exercício*. Verifique! ✣

Como facilmente se vê, caso $\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}\neq 0$, ou seja, caso $\rho\neq 2\omega_0$, a matriz A tem dois autovalores distintos e é, portanto, diagonalizável. Se, porém, $\rho=2\omega_0$, tem-se $v_1=v_2$ e a matriz A não é mais simples e, portanto, não é diagonalizável.

Vamos tratar esses dois casos separadamente. O leitor é convidado a fazer como exercício todos os cálculos que forem deixados indicados.

• **O caso $\rho\neq 2\omega_0$**

Nesse caso A é diagonalizável pela matriz $P=\big[\!\big[v_1,\,v_2\big]\!\big]$, ou seja

$$P^{-1}AP \;=\; D \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{-\rho+\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\rho-\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}}{2} \end{pmatrix},$$

onde

$$P \;=\; \big[\!\big[v_1,\,v_2\big]\!\big] \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{-\rho-\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}}{2\omega_0^2} & \dfrac{-\rho+\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}}{2\omega_0^2} \\ \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando-se a inversa, tem-se

$$P^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} -\dfrac{\omega_0^2}{\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}} & \dfrac{-\rho+\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}}{2\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}} \\ \\ \dfrac{\omega_0^2}{\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}} & \dfrac{\rho+\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}}{2\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}} \end{pmatrix}.$$

Daí, segue que

$$e^{At} \;=\; Pe^{Dt}P^{-1} \;=\; P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}P^{-1} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}}\begin{pmatrix} -\lambda_2 e^{\lambda_1 t}+\lambda_1 e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t} \\ \\ \omega_0^2\left(-e^{\lambda_1 t}+e^{\lambda_2 t}\right) & \lambda_1 e^{\lambda_1 t}-\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \tag{14.32}$$

Alternativamente, usando as expressões (10.59)-(10.60), obtemos para A a representação espectral $A=\lambda_1 E_1+\lambda_2 E_2$ com

$$E_1 \;=\; \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ -\omega_0^2 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \qquad E_2 \;=\; \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ -\omega_0^2 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

de onde, usando $e^{At}=e^{\lambda_1 t}E_1+e^{\lambda_2 t}E_2$, obtém-se novamente a expressão (14.32).

E. 14.7 *Exercício*. Verifique as afirmações acima. Em particular, verifique que E_1 e E_2 são projetores e satisfazem $E_1E_2=\mathbb{0}$ e $E_1+E_2=\mathbb{1}$. ✣

O leitor é convidado agora a escrever as fórmulas explícitas para $x(t)$ e $v(t)$ que advêm de (14.31) e (14.32). Para $x(t)$, por exemplo, obtém-se

$$x(t) \;=\; e^{-\rho t/2}\left(x_0\cos(\omega_1 t)+\frac{\rho x_0+2v_0}{2\omega_1}\operatorname{sen}(\omega_1 t)\right)+\frac{1}{m\omega_1}\int_0^t e^{-\rho(t-s)/2}\operatorname{sen}\big(\omega_1(t-s)\big)f(s)\,ds\,,$$

onde

$$\omega_1 \;=\; \sqrt{\omega_0^2-\frac{\rho^2}{4}}\,.$$

Essa expressão vale tanto para $\omega_0>\rho/2$ quanto para $\omega_0<\rho/2$. Nesse segundo caso ω_1 torna-se um número imaginário puro:

$$\omega_1 \;=\; i\omega_2\,,$$

onde

$$\omega_2 \;=\; \sqrt{\frac{\rho^2}{4}-\omega_0^2}$$

é real. A solução para $x(t)$ fica

$$x(t) \;=\; e^{-\rho t/2}\left(x_0\cosh(\omega_2 t)+\frac{\rho x_0+2v_0}{2\omega_2}\operatorname{senh}(\omega_2 t)\right)+\frac{1}{m\omega_2}\int_0^t e^{-\rho(t-s)/2}\operatorname{senh}\big(\omega_2(t-s)\big)f(s)\,ds\,.$$

• **O caso $\rho=2\omega_0>0$**

Nesse caso a matriz A fica

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\rho^2}{4} & -\rho \end{pmatrix}.$$

A pode ser levada à sua forma de Jordan (vide Seção 10.7.4, página 581 e antecedentes) $J=P^{-1}AP$, onde

$$J \;=\; \begin{pmatrix} -\dfrac{\rho}{2} & 1 \\ \\ 0 & -\dfrac{\rho}{2} \end{pmatrix}, \qquad P \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{2} & 1 \\ \\ -\dfrac{\rho^2}{4} & 0 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{4}{\rho^2} \\ \\ 1 & \dfrac{2}{\rho} \end{pmatrix}.$$

Note-se que $J=D+N$, onde

$$D \;=\; \begin{pmatrix} -\dfrac{\rho}{2} & 0 \\ \\ 0 & -\dfrac{\rho}{2} \end{pmatrix}, \qquad N \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que D e N comutam e que $N^2=0$. Assim,

$$e^{At} \;=\; P\,e^{(D+N)t}\,P^{-1} \;=\; P\,e^{Dt}\,e^{Nt}\,P^{-1}\,,$$

sendo que

$$e^{Dt} \;=\; \begin{pmatrix} e^{-\frac{\rho t}{2}} & 0 \\ & \\ 0 & e^{-\frac{\rho t}{2}} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad e^{Nt} \;=\; \mathbb{1} + Nt \;=\; \begin{pmatrix} 1 & t \\ & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Portanto,

$$e^{At} \;=\; \begin{pmatrix} \left(1+\dfrac{\rho t}{2}\right) e^{-\rho t/2} & t e^{-\rho t/2} \\ & \\ -\dfrac{\rho^2 t}{4} e^{-\rho t/2} & \left(1-\dfrac{\rho t}{2}\right) e^{-\rho t/2} \end{pmatrix} .$$

O leitor é convidado agora a escrever as fórmulas explícitas para $x(t)$ e $v(t)$ que advêm de (14.31). Para $x(t)$, por exemplo, obtém-se

$$x(t) \;=\; e^{-\rho t/2}\left(\left(1+\frac{\rho}{2}t\right)\, x_0 + t\, v_0\right) + \frac{1}{m}\int_0^t (t-s) e^{-\rho(t-s)/2} f(s)\, ds \; .$$

• **O caso $\rho = 0$**

Analisemos também o caso $\rho = 0$, que corresponde à ausência do termo de amortecimento $-\gamma v(t)$ na equação de movimento da partícula. Nesse caso

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = i\omega_0$, $\lambda_2 = -i\omega_0$ e, por (14.32),

$$e^{At} \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \dfrac{1}{\omega_0}\operatorname{sen}(\omega_0 t) \\ & \\ -\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} .$$

O leitor é convidado agora a escrever as fórmulas explícitas para $x(t)$ e $v(t)$ que advêm de (14.31). Para $x(t)$, por exemplo, obtém-se

$$x(t) \;=\; \left(x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\operatorname{sen}(\omega_0 t)\right) + \frac{1}{m\omega_0}\int_0^t \operatorname{sen}(\omega_0(t-s)) f(s)\, ds \; ,$$

• **O caso $k = 0$, $\gamma = 0$. Partícula submetida a força externa dependente do tempo**

Nesse caso, usando a notação anterior,

$$\ddot{x}(t) \;=\; g(t) \; ,$$

ou seja,

$$\dot{Y}(t) \;=\; AY(t) + F(t)$$

com

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

A é nilpotente com $A^2 = 0$. Logo

$$e^{At} \;=\; \mathbb{1} + At \;=\; \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

O leitor é convidado agora a escrever as fórmulas explícitas para $x(t)$ e $v(t)$ que advêm de (14.31). Para $x(t)$, por exemplo, obtém-se

$$x(t) \;=\; (x_0 + v_0 t) + \frac{1}{m}\int_0^t (t-s) f(s)\, ds \; .$$

Por exemplo, no caso de f ser constante, segue disso a conhecidíssima relação $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{f}{2m}t^2$.

14.4 Perturbações de Sistemas Lineares

Na Mecânica Clássica, na Mecânica Quântica e em outras áreas da Física ocorrem problemas que possuem a seguinte estrutura: procura-se encontrar a solução de uma equação linear homogênea $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$, com a condição inicial $Y(0) = Y_0$, sendo que $A(t)$ é da forma

$$A(t) \;=\; L(t) + I(t) \; ,$$

onde $L(t)$ e $I(t)$ podem depender do tempo mas $I(t)$ é, em um sentido a ser precisado, "pequena". Por exemplo, $I(t)$ pode ser da forma $I(t) = \lambda J(t)$, onde $|\lambda|$ é uma constante "pequena". Nesse contexto interessa particularmente determinar as correções que a presença do termo $I(t)$ acrescenta à solução (supostamente conhecida) da equação para o caso em que $I(t)$ é identicamente nula.

Se I fosse nula, a solução seria $Y_L(t) = D_L(t)Y_0$, denominada *solução não-perturbada*, onde $D_L(t)$ é dada pela série de Dyson para $L(t)$:

$$D_L(t) \;=\; \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} L(t_1)L(t_2)\cdots L(t_n)\, dt_n dt_{n-1} \cdots dt_1 \; .$$

Deve-se esperar que, se I for "pequena", a solução de $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ não deve estar muito afastada de $Y_L(t) = D_L(t)Y_0$ (ao menos para tempos "curtos") e a presença de $I(t)$ deve perturbar a solução $Y_L(t)$ apenas ligeiramente. Como determinar a perturbação que I provoca?

Esse tipo de questão é muito frequentemente encontrado em Física e, no que segue, vamos empregar a série de Dyson para tratá-la no contexto acima, de sistemas lineares. O primeiro passo consiste em definir um novo vetor coluna $X(t)$ por

$$X(t) \;:=\; D_L(t)^{-1} Y(t) \; .$$

Vamos verificar qual condição inicial e qual equação diferencial $X(t)$ obedece. Tem-se que $X(0) = \mathbb{1}Y(0) = Y_0$. Fora isso

$$\begin{aligned}
\dot{X}(t) \;=\; \frac{d}{dt}\left(D_L(t)^{-1}Y(t)\right) \;&=\; \frac{d}{dt}\left(D_L(t)^{-1}\right) Y(t) + D_L(t)^{-1}\dot{Y}(t) \\
&=\; -D_L(t)^{-1}L(t)Y(t) + D_L(t)^{-1}\dot{Y}(t) \\
&=\; -D_L(t)^{-1}L(t)Y(t) + D_L(t)^{-1}A(t)Y(t) \\
&=\; -D_L(t)^{-1}L(t)Y(t) + D_L(t)^{-1}\big(L(t)+I(t)\big)Y(t) \\
&=\; D_L(t)^{-1}I(t)Y(t) \\
&=\; \Big(D_L(t)^{-1}I(t)D_L(t)\Big)\, X(t) \; .
\end{aligned}$$

(O fato que $\frac{d}{dt}D_L(t)^{-1} = -D_L(t)^{-1}L(t)$, usado acima, decorre de $0 = \frac{d}{dt}\mathbb{1} = \frac{d}{dt}\left(D_L(t)^{-1}D_L(t)\right)$ e do fato já provado em (14.14) que $\frac{d}{dt}D_L(t) = L(t)D_L(t)$). Assim, definindo-se

$$\tilde{I}(t) \;:=\; D_L(t)^{-1}I(t)D_L(t)\;, \tag{14.33}$$

concluímos que $X(t)$ satisfaz

$$\dot{X}(t) \;=\; \tilde{I}(t)X(t)\;. \tag{14.34}$$

Pela série de Dyson, a solução dessa equação com a condição inicial $X(0) = Y_0$ é

$$X(t) \;=\; Y_0 + \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} \tilde{I}(t_1)\tilde{I}(t_2)\cdots\tilde{I}(t_n)\,dt_n dt_{n-1}\cdots dt_1\right\}Y_0.$$

Retornando a $Y(t) = D_L(t)X(t)$, temos

$$Y(t) \;=\; D_L(t)Y_0 + D_L(t)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} \tilde{I}(t_1)\tilde{I}(t_2)\cdots\tilde{I}(t_n)\,dt_n dt_{n-1}\cdots dt_1\right\}Y_0\;. \tag{14.35}$$

De modo mais explícito, isso é

$$\begin{aligned} Y(t) \;&=\; D_L(t)Y_0 \\ &+\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} D_L(t,\,t_1)I(t_1)D_L(t_1,\,t_2)I(t_2)D_L(t_2,\,t_3)\cdots D_L(t_{n-1},\,t_n)I(t_n)D_L(t_n)\,dt_n\cdots dt_1\right\}Y_0\;. \end{aligned} \tag{14.36}$$

Vamos supor que $I(t)$ seja da forma $I(t) = \lambda J(t)$. Substituindo na última expressão, obtemos a solução expressa em termos de uma série de potências em λ:

$$\begin{aligned} Y(t) \;&=\; D_L(t)Y_0 \\ &+\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} D_L(t,\,t_1)J(t_1)D_L(t_1,\,t_2)J(t_2)D_L(t_2,\,t_3)\cdots D_L(t_{n-1},\,t_n)J(t_n)D_L(t_n)\,dt_n\cdots dt_1\right\}Y_0\;. \end{aligned} \tag{14.37}$$

Tanto em (14.36) quanto em (14.37), o primeiro termo da expansão é $D_L(t)Y_0$, que coincide com a solução para o caso em que I é nula, ou seja, com a solução não-perturbada. Os demais termos são, portanto, as correções que procurávamos à solução não-perturbada. Esses termos são denominados *correções perturbativas*. Podemos re-escrever (14.36) e (14.37) em termos da solução não-perturbada Y_L como

$$Y(t) \;=\; Y_L(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} D_L(t,\,t_1)I(t_1)D_L(t_1,\,t_2)I(t_2)D_L(t_2,\,t_3)\cdots D_L(t_{n-1},\,t_n)I(t_n)Y_L(t_n)\,dt_n\cdots dt_1 \tag{14.38}$$

e

$$Y(t) \;=\; Y_L(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} D_L(t,\,t_1)J(t_1)D_L(t_1,\,t_2)J(t_2)D_L(t_2,\,t_3)\cdots D_L(t_{n-1},\,t_n)J(t_n)Y_L(t_n)dt_n\cdots dt_1\;. \tag{14.39}$$

De particular interesse em aplicações é a situação em que $L(t) \equiv L$, constante, em cujo caso (14.36) fica

$$Y(t) \;=\; e^{Lt}Y_0 + e^{Lt}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} e^{-Lt_1}I(t_1)e^{L(t_1-t_2)}I(t_2)e^{L(t_2-t_3)}\cdots e^{L(t_{n-1}-t_n)}I(t_n)e^{Lt_n}\,dt_n\cdots dt_1\right\}Y_0\;,$$

e (14.37) assume a forma

$$Y(t) \;=\; e^{Lt}Y_0 + e^{Lt}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} e^{-Lt_1}J(t_1)e^{L(t_1-t_2)}J(t_2)e^{L(t_2-t_3)}\cdots e^{L(t_{n-1}-t_n)}J(t_n)e^{Lt_n}\,dt_n\cdots dt_1\right\}Y_0\;. \tag{14.40}$$

E. 14.8 *Exercício*. Usando os resultados acima obtenha a chamada *série de Duhamel*:

$$e^{t(A+B)} \;=\; e^{tA}\left[\mathbb{1} + \int_0^t e^{-t_1A}Be^{t_1A}dt_1 + \sum_{m=2}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{m-1}}\prod_{k=1}^{m}\left(e^{-t_kA}Be^{t_kA}\right)dt_m\cdots dt_1\right],$$

válida para todos $A,\ B \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$. Para uma outra demonstração, vide Seção 11.6, página 664 e, em particular, a Proposição 11.17, página 667. ✠

Com as diversas expressões acima podemos contemplar explicitamente as correções perturbativas que o termo $I(t)$ adiciona à solução não-perturbada Y_L. No caso em que L é constante e I é da forma $I(t) = \lambda J(t)$, (14.40) indica que as correções de primeira e segunda ordem em λ são, respectivamente,

$$\lambda e^{Lt}\left(\int_0^t e^{-Lt_1}J(t_1)e^{Lt_1}\,dt_1\right)Y_0 \qquad \text{e} \qquad \lambda^2 e^{Lt}\left(\int_0^t\int_0^{t_1} e^{-Lt_1}J(t_1)e^{L(t_1-t_2)}J(t_2)e^{Lt_2}dt_2dt_1\right)Y_0\;.$$

Todas as expressões obtidas acima são empregadas na Física Quântica. As expressões (14.33) e (14.34) descrevem as equações de evolução no chamado *quadro de interação*, ou *representação de interação*, e as expressões (14.37) e (14.40) são denominadas *séries de Dyson no quadro de interação*. Na Seção 14.5, página 742, mostraremos que a série de Dyson, e, portanto, os resultados acima, podem ser expressos em termos dos chamados *produtos de tempo ordenado*. Essa representação é de particular interesse na Teoria Quântica da Campos.

• **Um problema de teoria de perturbações**

Consideremos o problema de uma partícula de massa m presa a uma mola de constante $k(t) = k_0 + \lambda k_1(t)$ onde λ é um número pequeno, e sem nenhuma força adicional agindo sobre a partícula. Ou seja, a constante de mola tem uma pequena dependência temporal e desejamos estudar o efeito dessa pequena perturbação sobre a solução obtida quando $\lambda = 0$, a qual é, sabidamente,

$$x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)\;,$$

onde $\omega_0^2 = k_0/m$.

A equação de movimento é $m\ddot{x}(t) = -k(t)x(t)$, ou seja,

$$\ddot{x}(t) \;=\; -\left(\omega_0^2 + \frac{\lambda k_1(t)}{m}\right)x(t)\;,$$

que em forma de um sistema de duas equações de primeira ordem fica $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$, onde $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t)\end{pmatrix}$, e $A(t) = A + \lambda J(t)$, com $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0\end{pmatrix}$ e $J(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{m}k_1(t) & 0\end{pmatrix}$. Pelas expressões obtidas em (14.37) e (14.40), a solução em primeira ordem em λ é

$$e^{At}Y_0 + \lambda e^{At}\left(\int_0^t e^{-At_1}J(t_1)e^{At_1}\,dt_1\right)Y_0\;.$$

De modo mais explícito, isso é igual a

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t)x_0 + \dfrac{1}{\omega_0}\operatorname{sen}(\omega_0 t)v_0 \\ \\ -\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t)x_0 + \cos(\omega_0 t)v_0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\lambda}{\omega_0}\begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \dfrac{1}{\omega_0}\operatorname{sen}(\omega_0 t) \\ \\ -\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}\left(\int_0^t k_1(t_1)\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(\omega_0 t_1)\cos(\omega_0 t_1)x_0 + \dfrac{1}{m\omega_0}\operatorname{sen}^2(\omega_0 t_1)v_0 \\ \\ -\cos^2(\omega_0 t_1)x_0 + \dfrac{1}{m}\operatorname{sen}(\omega_0 t_1)\cos(\omega_0 t_1)v_0 \end{pmatrix} dt_1\right) .$$

Para a posição $x(t)$, a correção de primeira ordem em λ à solução não-perturbada $\cos(\omega_0 t)x_0 + \frac{1}{\omega_0}\operatorname{sen}(\omega_0 t)v_0$ é, portanto,

$$\frac{\lambda}{\omega_0}\left[\cos(\omega_0 t)\int_0^t k_1(t_1)\left(-\operatorname{sen}(\omega_0 t_1)\cos(\omega_0 t_1)x_0 + \frac{1}{m\omega_0}\operatorname{sen}^2(\omega_0 t_1)v_0\right) dt_1\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_0}\operatorname{sen}(\omega_0 t)\int_0^t k_1(t_1)\left(-\cos^2(\omega_0 t_1)x_0 + \frac{1}{m}\operatorname{sen}(\omega_0 t_1)\cos(\omega_0 t_1)v_0\right) dt_1\right] . \quad (14.41)$$

O cálculo explícito dessas integrais depende da forma de $k_1(t)$.

E. 14.9 *Exercício*. Calculando as integrais, obtenha explicitamente a expressão em (14.41) para o caso em que $k_1(t) = \operatorname{sen}(\omega_1 t)$. Há que se distinguir as situações em que $\omega_1 \neq 2\omega_0$ e em que $\omega_1 = 2\omega_0$. No segundo caso surgirão termos que crescem linearmente com t e que, portanto, saem fora do regime perturbativo para t grande. Vide comentários abaixo e procure ler nos bons livros de Mecânica Clássica (por ex., Arnold [23], Landau-Lifchitz [302]) algo sobre o assunto "ressonância paramétrica". ✣

• **Comentário final sobre as séries perturbativas**

Se λ for pequeno e t não for muito grande a aproximação de primeira ordem em λ é uma aproximação razoavelmente boa para a solução. As correções de ordem superior em λ podem também ser calculadas, embora seu cômputo fique cada vez mais complexo, como se vê pela expressões (14.35) e seguintes.

Para $t \to \infty$ os termos individuais da série perturbativa (14.35) podem divergir com t, sem que a solução $x(t)$ seja ela mesmo divergente. Esse tipo de comportamento não é tão estranho assim se nos lembrarmos, por exemplo, do que acontece com a série da Taylor da função seno (ou cosseno):

$$\operatorname{sen}(\lambda t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\lambda^{2n+1}t^{2n+1}$$

Os primeiros termos são $\lambda t - \frac{\lambda^3}{6}t^3 + \frac{\lambda^5}{120}t^5 + \cdots$. Cada um deles diverge quanto $t \to \infty$ (para qualquer $\lambda \neq 0$ fixo, não importa o quão grande ou pequeno) mas a função $\operatorname{sen}(\lambda t)$ permanece limitada. A lição a se aprender é que certas expansões podem não ser boas quando se deseja estudar o comportamento para t grande das soluções. Tal é o caso da série de Taylor acima e da série de Dyson (em muitos casos). Para estudar o comportamento para t grande é preciso procurar expansões que sejam *uniformemente convergentes* em t para toda a reta real.

14.5 Mais sobre a Série de Dyson. Produtos de Tempo Ordenado

• **A função degrau, ou função de Heaviside**

Define-se a chamada *função degrau* ou *função de Heaviside*[5], $\theta(s),\ s \in \mathbb{R}$ (também denotada por $H(s)$), por

$$\theta(s) \;\equiv\; H(s) \;:=\; \begin{cases} 1, & \text{se } s \geq 0 \\ 0, & \text{se } s < 0 \end{cases} . \quad (14.42)$$

Defina-se também, para $m \in \mathbb{N}$ e $t_1,\ \ldots,\ t_m \in \mathbb{R}$,

$$\Theta_m(t_1,\ \ldots,\ t_m) \;:=\; \theta(t_{m-1} - t_m)\theta(t_{m-2} - t_{m-1})\cdots\theta(t_1 - t_2) .$$

É bastante fácil de constatar pela definição que

$$\Theta_m(t_1,\ \ldots,\ t_m) \;:=\; \begin{cases} 1, & \text{se } t_m \leq t_{m-1} \leq \cdots \leq t_1 \\ 0, & \text{de outra forma} \end{cases} . \quad (14.43)$$

Seja S_m o grupo de permutações de m índices $\{1,\ \ldots,\ m\}$. Os elementos π de S_m são bijeções de $\{1,\ \ldots,\ m\}$ em si mesmo. Há um importante fato sobre a função Θ_m: se os m números reais $t_1,\ \ldots,\ t_m$ forem todos distintos entre si, então

$$\sum_{\pi \in S_m}\Theta_m(t_{\pi(1)},\ \ldots,\ t_{\pi(m)}) \;=\; 1 . \quad (14.44)$$

Para prová-la, observe-se que, devido ao fato de $\mathbb{R}$ ser totalmente ordenado, para uma m-upla $t_1,\ \ldots,\ t_m \in \mathbb{R}$ composta de elementos distintos existe um e somente um elemento $\pi_0 \in S_m$ tal que $t_{\pi_0(m)} < \ldots < t_{\pi_0(1)}$. Assim, por (14.43), segue que há no lado esquerdo de (14.44) apenas um termo não-nulo: aquele que corresponde a π_0, e esse termo vale 1, também devido a (14.43). A condição de os pontos $t_1,\ \ldots,\ t_m$ serem todos distintos entre si é importante nesse raciocínio, mas o conjunto dos pontos que não a satisfazem é um conjunto de medida nula em $\mathbb{R}^m$. Daí, podemos afirmar que (14.44) vale quase em toda a parte em $\mathbb{R}^m$ (ou seja, vale em todo $\mathbb{R}^m$, exceto em um subconjunto de medida nula).

• **Reescrevendo a série de Dyson**

Pretendemos apresentar uma outra maneira de representar a série de Dyson (14.11):

$$D(t) \;=\; \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{m-1}} A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_m)\, dt_m dt_{m-1}\cdots dt_1 . \quad (14.45)$$

da qual certas consequências podem ser mais facilmente extraídas. O leitor há de notar que nas integrais em (14.45) as variáveis $t_1, \ldots, t_m$ aparecem ordenadas na forma $0 \leq t_m \leq t_{m-1} \leq \cdots \leq t_1 \leq t$. Dessa forma, no produto de matrizes $A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_m)$, os fatores aparecem ordenados (da esquerda para a direita) de acordo com a ordem temporal decrescente dos argumentos.

Devido à propriedade (14.43) de $\Theta_m(t_1,\ \ldots,\ t_m)$, podemos reescrever (14.45) na forma

$$D(t) \;=\; \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t\cdots\int_0^t \Theta_m(t_1,\ \ldots,\ t_m)A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_m)\, dt_m dt_{m-1}\cdots dt_1 . \quad (14.46)$$

Note o leitor que uma diferença entre (14.45) e (14.46) está nos limites superiores das integrações, que passam a ser todos iguais a t, o que é permitido pela introdução dos fatores $\Theta_m(t_1,\ \ldots,\ t_m)$ nos integrandos, fatores esses que se anulam caso a restrição $t_m \leq t_{m-1} \leq \cdots \leq t_1$ seja violada.

[5] Oliver Heaviside (1850–1925).

Se $F(t_1,\ \ldots,\ t_m)$ é uma função integrável de m variáveis, tem-se evidentemente que

$$\int_0^t \cdots \int_0^t F(t_1,\ \ldots,\ t_m)\ dt_m dt_{m-1} \cdots dt_1 \ = \ \int_0^t \cdots \int_0^t F(t_{\pi(1)},\ \ldots,\ t_{\pi(m)})\ dt_m dt_{m-1} \cdots dt_1 \ ,$$

para qualquer permutação $\pi \in S_m$.

E. 14.10 *Exercício*. Justifique! Sugestão: mudança de variáveis mais a observação que o hipercubo $[0,\ t]^m$ é invariante por permutações das coordenadas. ✠

Assim, como S_m possui $m!$ elementos, segue trivialmente que

$$\int_0^t \cdots \int_0^t F(t_1,\ \ldots,\ t_m)\ dt_m dt_{m-1} \cdots dt_1 \ = \ \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} \int_0^t \cdots \int_0^t F(t_{\pi(1)},\ \ldots,\ t_{\pi(m)})\ dt_m dt_{m-1} \cdots dt_1 \ ,$$

pois os termos somados no lado direito são todos iguais. Aplicando essa simples identidade a (14.46), tem-se

$$D(t) \ = \ \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} \int_0^t \cdots \int_0^t \Theta_m(t_{\pi(1)},\ \ldots,\ t_{\pi(m)}) A(t_{\pi(1)}) A(t_{\pi(2)}) \cdots A(t_{\pi(m)})\ dt_m dt_{m-1} \cdots dt_1 \ . \tag{14.47}$$

Vamos definir

$$\mathsf{T}\Big(A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_m)\Big) \ := \ \sum_{\pi \in S_n} \Theta_m(t_{\pi(1)},\ \ldots,\ t_{\pi(m)}) A(t_{\pi(1)}) A(t_{\pi(2)}) \cdots A(t_{\pi(m)}) \ . \tag{14.48}$$

Para uma m-upla $(t_1,\ \ldots,\ t_m) \in [0,\ t]^m$ composta de elementos distintos, existe um e somente um elemento $\pi_0 \in S_m$ tal que $t_{\pi_0(m)} < \ldots < t_{\pi_0(1)}$. Segue disso que o lado direito de (14.48) vale $A(t_{\pi_0(1)})A(t_{\pi_0(2)}) \cdots A(t_{\pi_0(m)})$. O leitor deve observar que esse produto aparece ordenado da esquerda para a direita na ordem decrescente dos argumentos. Por essa razão a expressão do lado esquerdo de (14.48) é denominada *produto de tempo ordenado* das matrizes A, denotada por $\mathsf{T}\,(A(t_1) \cdots A(t_m))$:

Com essa notação podemos escrever (14.47) na forma

$$D(t) \ = \ \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^t \cdots \int_0^t \mathsf{T}\Big(A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_m)\Big)\ dt_m dt_{m-1} \cdots dt_1 \ . \tag{14.49}$$

Essa forma de representar a série de Dyson é frequentemente empregada na Teoria Quântica de Campos, sendo que lá as matrizes $A(t)$ são substituídas por operadores com valores em distribuições e os produtos de tempo ordenado são definidos em um sentido distribucional e de forma iterativa, de modo a permitir um tratamento de problemas de renormalização. Para uma referência moderna sobre tais assuntos, vide [436].

• **O caso comutativo**

Uma situação particular de interesse é aquela na qual as matrizes $A(s)$ comutam para valores distintos do argumento, ou seja, $A(s)A(s') = A(s')A(s)$ para todos $s,\ s'$. Tal é o caso, por exemplo, se $A(s)$ forem matrizes 1×1, ou se forem diagonais, ou ainda se forem da forma $A(s) = f(s)B$ para alguma matriz constante B e alguma função real ou complexa f. Sob essa hipótese de comutatividade, tem-se que para todo $\pi \in S_m$

$$A(t_{\pi(1)})A(t_{\pi(2)}) \cdots A(t_{\pi(m)}) \ = \ A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_m)$$

pois a ordem dos fatores não importa, devido à comutatividade. A expressão (14.47) fica, então,

$$\begin{aligned} D(t) \ &= \ \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^t \cdots \int_0^t \left[\sum_{\pi \in S_m} \Theta_m(t_{\pi(1)},\ \ldots,\ t_{\pi(m)}) \right] A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_m)\ dt_m dt_{m-1} \cdots dt_1 \\ &\overset{(14.44)}{=} \ \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^t \cdots \int_0^t A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_m)\ dt_m dt_{m-1} \cdots dt_1 \\ &\overset{\text{comut.}}{=} \ \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\int_0^t A(\tau) d\tau \right)^m \\ &\overset{\text{def.}}{=} \ \exp\left(\int_0^t A(\tau) d\tau \right) \ . \end{aligned} \tag{14.50}$$

Usando que $D(t,\ s) = D(t)D(s)^{-1}$, obtém-se

$$D(t,\ s) \ = \ \exp\left(\int_s^t A(\tau) d\tau \right) \ . \tag{14.51}$$

Concluímos que no caso comutativo, a solução da equação $\dot{Y} = A(t)Y(t) + F(t)$ com uma condição inicial $Y(0) = Y_0$ dada em (14.12) fica

$$Y(t) \ = \ e^{\int_0^t A(\tau) d\tau} Y_0 + \int_0^t e^{\int_s^t A(\tau) d\tau} F(s)\, ds \ . \tag{14.52}$$

E. 14.11 *Exercício*. Determine explicitamente a solução da equação diferencial $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ com a condição inicial $Y(0) = Y_0$, onde $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t) & e^{-2t} \\ 0 & -\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$ e $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. ✠

• **O caso unidimensional**

As expressões acima possuem uma aplicação simples mas relevante à equações diferenciais lineares de primeira ordem

$$\dot{y}(t) \ = \ a(t)y(t) + b(t) \ ,$$

com a e b contínuas em $\mathbb{R}$ (condição essa que pode ser ainda enfraquecida), com a condição inicial $y(0) = y_0$. É evidente que nesse caso a matriz $A(t)$ é uma matriz 1×1, a saber $A(t) = a(t)$, e evidentemente comuta consigo mesma em tempos diferentes. De acordo com (14.52) e (14.51) a solução é

$$y(t) \ = \ p(t) \left[y_0 + \int_0^t \frac{b(s)}{p(s)}\, ds \right] \ , \quad \text{com} \quad p(t) \ := \ \exp\left(\int_0^t a(\tau)\, d\tau \right) \ . \tag{14.53}$$

Essa solução pode ser obtida por outros meios. Vide (13.2), página 706.

14.6 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares no Plano Complexo

Em (14.1), e em tudo que vimos até aqui, consideramos sistemas lineares de equações diferenciais onde a variável t é assumida real. Para muitos propósitos importantes, alguns dos quais discutiremos abaixo, é conveniente alargar um pouco o domínio de nossas considerações e discutir sistemas lineares de equações diferenciais definidas no plano complexo.

Por simplicidade trataremos apenas equações homogêneas, caso em que se encontra a maioria das aplicações. A Seção 14.7.3, página 770, discute exemplos. Para referências gerais sobre o assunto, recomendamos [472] e [236].

Seja $A(z)$ uma matriz $m \times m$ complexa cujos elementos $A_{ij}(z)$, $i,\ j = 1, \ldots, m$, são funções de uma variável complexa z em um certo domínio aberto e simplesmente conexo comum $\mathcal{D}$ do plano complexo: $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$. Consideremos a equação diferencial linear e homogênea

$$Y'(z) \ = \ A(z)Y(z)\ , \tag{14.54}$$

onde $Y(z)$ denota um vetor coluna de funções complexas

$$Y(z) \ = \ \begin{pmatrix} y_1(z) \\ \vdots \\ y_m(z) \end{pmatrix} .$$

Estaremos aqui interessados em estudar esses sistemas de equações diferenciais quando uma *condição inicial* é fornecida, ou seja, quando o valor de $Y(z)$ em um ponto $z_0 \in \mathcal{D}$ é especificado:

$$Y(z_0) \ =: \ Y_0 \ = \ \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_m^0 \end{pmatrix} ,$$

com $y_1^0,\ \ldots,\ y_m^0$ sendo constantes complexas. Notemos que ao procurarmos soluções $Y(z)$ de (14.54) é implicitamente subentendido que as mesmas funções $Y(z)$ sejam analíticas, pois apenas funções analíticas são diferenciáveis.

14.6.1 O Caso Analítico

Comecemos pelo caso no qual a matriz $A(z)$ é *analítica* em um domínio aberto simplesmente conexo $\mathcal{D}$, ou seja, todos os seus elementos de matriz $A_{ij}(z)$ são funções analíticas de z em $\mathcal{D}$. Uma primeira pergunta importante diz respeito à unicidade da solução da equação diferencial $Y'(z) = A(z)Y(z)$, $z \in \mathcal{D}$, com a condição $Y(z_0) = Y_0$ para algum $z_0 \in \mathcal{D}$. Essa pergunta pode ser respondida usando nosso resultado anterior (do começo deste capítulo) que garante unicidade de solução de sistemas lineares de equações diferenciais com variáveis reais.

De fato, seja $z(t)$, $t \in [0,\ 1]$, uma curva arbitrária contínua e diferenciável em $\mathcal{D}$ e tal que $z(0) = z_0$. Sejam Y_1 e Y_2 duas soluções analíticas de $Y'(z) = A(z)Y(z)$, $z \in \mathcal{D}$, com a mesma condição $Y_1(z_0) = Y_2(z_0) = Y_0$. Sejam $X_1(t) := Y_1(z(t))$ e $X_2(t) := Y_2(z(t))$. Definamos também $B(t) := \dot{z}(t)A(z(t))$. Notemos que $B(t)$ é uma matriz contínua em t, pois $A(z)$ é analítica.

É fácil, então, constatar que X_1 e X_2 são ambos soluções da equação diferencial

$$\dot{X}(t) \ = \ B(t)X(t), \qquad t \in [0,\ 1]\ ,$$

com a condição $X(0) = Y_0$. Pelas nossas considerações anteriores, isso implica $X_1(t) = X_2(t)$, $\forall t \in [0,\ 1]$, ou seja, $Y_1(z(t)) = Y_2(z(t))$, $\forall t \in [0,\ 1]$. Como a curva $z(t)$ é arbitrária e sua imagem pode estar em todo $\mathcal{D}$, isso implica $Y_1(z) = Y_2(z)$ para todo $z \in \mathcal{D}$. Isso prova a unicidade da solução de $Y'(z) = A(z)Y(z)$, $z \in \mathcal{D}$, com condição $Y_1(z_0) = Y_2(z_0) = Y_0$.

Uma vez garantida a unicidade da solução, tentemos exibí-la. O que faremos é seguir a inspiração fornecida pela série de Dyson, estudada anteriormente, e tentar generalizá-la para o plano complexo.

• **A série de Dyson no plano complexo**

Seja então $\mathcal{D}$ um domínio aberto simplesmente conexo do plano complexo e $A(z)$ analítica em $\mathcal{D}$ e limitada em $\overline{\mathcal{D}}$. Seja também $z_0 \in \mathcal{D}$.

Uma vez demonstrada a unicidade da eventual solução de uma equação como $Y'(z) = A(z)Y(z)$ com condição $Y(z_0) = Y_0$ precisamos demonstrar que a solução existe. O que faremos é generalizar nossas considerações anteriores sobre a série de Dyson para o plano complexo.

Para z e $w \in \mathcal{D}$, seja $D(z,\ w)$ a matriz $m \times m$ definida por

$$D(z,\ w) \ = \ \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_w^z \int_w^{z_1} \cdots \int_w^{z_{n-1}} A(z_1)A(z_2)\cdots A(z_n)\, dz_n dz_{n-1} \cdots dz_1\ . \tag{14.55}$$

Acima, todas as integrações complexas são feitas em uma curva $\mathcal{C}$, simples, orientada de w a z e inteiramente contida em $\mathcal{D}$. Para cada n os pontos $z_1,\ \ldots,\ z_n$ são ordenados em sentido crescente ao longo de $\mathcal{C}$. Mais precisamente, denotamos por $\mathcal{C}$ a curva contínua e diferenciável $\mathcal{C} : [0,\ 1] \to \mathcal{D}$ parametrizada por $t \in [0,\ 1]$ com $w = \mathcal{C}(0)$, $z = \mathcal{C}(1)$. Então, para cada n, tem-se $z_k = \mathcal{C}(t_k)$, $1 \leq k \leq n$, com $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$.

Devido ao fato de A ser analítica no domínio simplesmente conexo $\mathcal{D}$, a matriz $D(z,\ w)$ não depende da particular curva orientada $\mathcal{C}$ adotada que conecta w a z (justifique isso!).

Afirmamos que a equação $Y'(z) = A(z)Y(z)$ com uma condição $Y(z_0) = Y_0$ tem solução, a qual é dada por

$$Y(z) \ = \ D(z,\ z_0)Y_0 \tag{14.56}$$

A demonstração será feita provando-se que o lado direito satisfaz a equação diferencial e a condição inicial. Como a solução é única (pelo provado acima), infere-se que não pode haver outra.

Comecemos por mostrar que a série que aparece em (14.55) é convergente, sem o que aquela expressão não faria sentido. O leitor facilmente constatará que o que faremos é uma simples imitação da prova anterior para a reta real, dado que somente faremos uso da hipótese de que $A(z)$ é limitada em $\overline{\mathcal{D}}$.

Sejam z e w dois pontos de um domínio $\mathcal{D}$ sob as hipóteses acima ($\mathcal{D}$ é aberto e simplesmente conexo) e seja $\mathcal{C}_{w\to z}$ uma curva contínua, diferenciável, orientada, ligando w a z e inteiramente contida em $\mathcal{D}$. Para $z' \in \mathcal{C}_{w\to z}$, denotemos por $l(z') \equiv l_{\mathcal{C}_{w\to z}}(z')$ o comprimento medido de w a z' ao longo da curva $\mathcal{C}_{w\to z}$. A função $l : \mathcal{C}_{w\to z} \to \mathbb{R}_+$ é bijetora na sua imagem e, portanto, possui uma inversa, o que nos permite parametrizar os pontos de $\mathcal{C}_{w\to z}$ pelo comprimento l medido ao longo de $\mathcal{C}_{w\to z}$ a partir de w. Denotaremos por $z'(l)$ essa parametrização, ou seja, $z'(l)$ é o ponto de $\mathcal{C}_{w\to z}$ cuja distância a w ao longo de $\mathcal{C}_{w\to z}$ é $l \in \mathbb{R}_+$.

É um fato bem conhecido da teoria das funções de variáveis complexas que se $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ é ao menos contínua[6], então $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_{w\to z}} f(z')dz'$, a integral de f de w a z ao longo da curva $\mathcal{C}_{w\to z}$, pode ser estimada por

$$\left| \int_{\mathcal{C}_{w\to z}} f(z')dz' \right| \ \leq \ \int_0^{l(z)} |f(z'(l))|\ dl\ . \tag{14.57}$$

Denotando por $D_{ab}(z,\ w)$ o elemento ab da matriz $D(z,\ w)$, temos

$$\begin{aligned} D_{ab}(z,\ w) \ &= \ \mathbb{1}_{ab} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_w^z \int_w^{z_1} \cdots \int_w^{z_{n-1}} \left(A(z_1)A(z_2)\cdots A(z_n)\right)_{ab}\ dz_n dz_{n-1} \cdots dz_1 \\ &= \ \delta_{a\,b} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{k_2=1}^{m} \cdots \sum_{k_{n-1}=1}^{m} \int_w^z \int_w^{z_1} \cdots \int_w^{z_{n-1}} A_{ak_1}(z_1)A_{k_1k_2}(z_2)\cdots A_{k_{n-1}b}(z_n)\, dz_n \cdots dz_1\ . \end{aligned}$$

[6] Essa condição pode ser enfraquecida.

Definindo como antes $\alpha := \max_{a,\, b} \max_{z\in\mathcal{D}} |A_{ab}(z)|$, aplicando (14.57) e escrevendo $l_1 \equiv l(z_j)$, $j = 1, \ldots, n$, temos

$$\begin{aligned}
|D_{ab}(z,\ w)| &\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1=1}^{m} \cdots \sum_{k_{n-1}=1}^{m} \int_0^{l(z)} \int_0^{l_1} \cdots \int_0^{l_{n-1}} |A_{ak_1}(z'(l_1))|\ |A_{k_1k_2}(z'(l_2))| \cdots \left|A_{k_{n-1}b}(z'(l_n))\right|\ dl_n \cdots dl_1 \\
&\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \sum_{k_1=1}^{m} \cdots \sum_{k_{n-1}=1}^{m} \int_0^{l(z)} \int_0^{l_1} \cdots \int_0^{l_{n-1}} dl_n \cdots dl_1 \\
&\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{l(z)^n}{n!} \sum_{k_1=1}^{m} \cdots \sum_{k_{n-1}=1}^{m} 1 \\
&\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{l(z)^n}{n!} m^{n-1} \\
&= 1 + \frac{1}{m}\left(e^{\alpha m l(z)} - 1\right) .
\end{aligned}$$

Acima, usamos o fato, demonstrável por indução, que

$$\int_0^{l(z)} \int_0^{l_1} \cdots \int_0^{l_{n-1}} dl_n \cdots dl_1 \ = \ \frac{l(z)^n}{n!} . \tag{14.58}$$

Como mencionamos, $l(z)$ é a distância de w a z ao longo da curva de integração, ou seja, é o comprimento total dessa curva. Se $\mathcal{D}$ for um domínio convexo, podemos tomar a curva de integração como sendo a linha reta que une w a z, em cujo caso teremos $l(z) = |z - w|$. Não precisamos, no entanto, supor convexidade de $\mathcal{D}$.

Provamos então que, para cada elemento de matriz ab, a série do lado direito de (14.55) é absolutamente convergente, e isso para todo w e $z \in \mathcal{D}$. Como, para cada $N \in \mathbb{N}$, as funções

$$f_N(z,\ w) \ = \ \delta_{ab} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{k_2=1}^{m} \cdots \sum_{k_{n-1}=1}^{m} \int_w^z \int_w^{z_1} \cdots \int_w^{z_{n-1}} A_{ak_1}(z_1) A_{k_1k_2}(z_2) \cdots A_{k_{n-1}b}(z_n)\, dz_n \cdots dz_1 .$$

são analíticas em $\mathcal{D}$ (pois integrais de funções analíticas são também analíticas), concluímos do exposto acima que cada elemento de matriz $D_{ab}(z,\ w)$ é o limite <u>uniforme</u> (por quê?) da sequência de funções analíticas $f_N(z,\ w)$. Um teorema importante da análise complexa (vide e.g. [511]) afirma que sob essas circunstâncias $D_{ab}(z,\ w)$ é também analítica em $\mathcal{D}$.

Para mostrar que (14.56) representa de fato a solução procurada, vamos mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial z} D(z,\ w) \ = \ A(z) D(z,\ w) . \tag{14.59}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} D(z,\ w) &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_w^z \int_w^{z_1} \cdots \int_w^{z_{n-1}} A(z_1) A(z_2) \cdots A(z_n)\, dz_n dz_{n-1} \cdots dz_1 . \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mathbb{1} + \int_w^z A(z_1)\, dz_1 + \int_w^z \int_w^{z_1} A(z_1) A(z_2)\, dz_2 dz_1 \right. \\
&\qquad \left. + \int_w^z \int_w^{z_1} \int_w^{z_2} A(z_1) A(z_2) A(z_3)\, dz_3 dz_2 dz_1 + \cdots \right\} \\
&= 0 + A(z) + \int_w^z A(z) A(z_2)\, dz_2 + \int_w^z \int_w^{z_2} A(z) A(z_2) A(z_3)\, dz_3 dz_2 + \cdots \\
&= A(z) \left\{ \mathbb{1} + \int_w^z A(z_2)\, dz_2 + \int_w^z \int_w^{z_2} A(z_2) A(z_3)\, dz_3 dz_2 + \cdots \right\} \\
&= A(z) \left\{ \mathbb{1} + \int_w^z A(z_1)\, dz_1 + \int_w^z \int_w^{z_1} A(z_1) A(z_2)\, dz_2 dz_1 + \cdots \right\} \\
&= A(z) D(z,\ w) ,
\end{aligned}$$

como queríamos provar. Acima, na quinta igualdade, fizemos uma série de mudanças de nomes das variáveis de integração, chamando z_2 de z_1, z_3 de z_2 etc.

De maneira análoga prova-se também que

$$\frac{\partial}{\partial w} D(z,\ w) \ = \ -D(z,\ w) A(w) .$$

E. 14.12 *<u>Exercício</u>*. Faça! ✠

É também evidente pela definição (14.55) que para todo z vale $D(z,\ z) = \mathbb{1}$. Notemos que, por (14.56), $Y(z_0) = D(z_0,\ z_0) Y_0 = Y_0$, mostrando que o lado direito de (14.56) satisfaz a condição $Y(z_0) = Y_0$. Derivando o lado direito de (14.56) em relação a z, tem-se

$$Y'(z) \ = \ \frac{\partial}{\partial z} D(z,\ z_0) Y_0 \ = \ A(z) D(z,\ z_0) Y_0 \ = \ A(z) Y(z) ,$$

provando que o lado direito de (14.56) satisfaz a equação diferencial. Como a solução é única, ela deve ser aquela dada em (14.56).

De maneira análoga ao caso real podemos igualmente provar que vale a regra de composição

$$D(z_1,\ z_3) \ = \ D(z_1,\ z_2) D(z_2,\ z_3) , \tag{14.60}$$

para quaisquer z_1, z_2 e z_3 contidos no domínio simplesmente conexo onde A é analítica.

E. 14.13 *<u>Exercício</u>*. Prove (14.60) mostrando que ambos os lados satisfazem as mesmas equações diferenciais e as mesmas condições iniciais. ✠

• **<u>A equação não-homogênea</u>**

E. 14.14 *<u>Exercício importante</u>*. Para A e F analíticas em um domínio aberto e simplesmente conexo $\mathcal{D}$ e limitadas em $\overline{\mathcal{D}}$, mostre que a solução geral da equação não-homogênea $Y'(z) = A(z) Y(z) + F(z)$ com condição $Y(z_0) = Y_0$, $z_0 \in \mathcal{D}$ é

$$Y(z) \ = \ D(z,\ z_0) Y_0 + \int_{z_0}^{z} D(z,\ w) F(w) dw , \tag{14.61}$$

onde $D(z,\ z_0)$ foi definida acima e a integração do lado direito é tomada em qualquer curva simples, contínua e diferenciável em $\mathcal{D}$, pois D e F são analíticas em $\mathcal{D}$. ✠

• **Analiticidade da solução**

Uma importante conclusão que tiramos da análise acima é que, sob a hipótese que A é analítica em $\mathcal{D}$ e limitada em $\overline{\mathcal{D}}$, então a solução Y da equação homogênea $Y'(z) = A(z)Y(z)$ com condição $Y(z_0) = Y_0$, $z_0 \in \mathcal{D}$ é igualmente analítica em $\mathcal{D}$ pois, como vimos, $D(z,\ z_0)$ é analítica em z.

• **Soluções nulas**

Há uma consequência das considerações acima que é bastante elementar, possuindo, porém, implicações profundas, como veremos, por exemplo, quando discutirmos equações com pontos singulares. Expressaremos essa consequência em forma de uma proposição:

Proposição 14.2 *Seja a equação homogênea $Y'(z) = A(z)Y(z)$ onde $A(z)$ é analítica em um domínio aberto e simplesmente conexo $\mathcal{D}$. Então, se $Y_s(z)$ é uma solução dessa equação que se anula em um ponto $z_0 \in \mathcal{D}$, ou seja, $Y_s(z_0) = 0$, vale $Y_s(z) = 0$ para todo $z \in \mathcal{D}$.* □

Essa proposição diz que se a solução de uma equação linear homogênea $Y'(z) = A(z)Y(z)$ anula-se em algum ponto de $\mathcal{D}$ (com $A(z)$ analítica em um domínio aberto e simplesmente conexo $\mathcal{D}$), então ela anula-se em todo $\mathcal{D}$. A prova é a simples observação que, pelo que vimos, a solução é dada por $Y(z) = D(z,\ z_0)Y(z_0)$.

• **Equações matriciais complexas**

Até agora estudamos equações da forma $Y'(z) = A(z)Y(z)$, com condição $Y(z_0) = Y_0$, onde $A(z)$ é uma matriz $m \times m$ analítica em um domínio aberto e simplesmente conexo $\mathcal{D}$ que contém z_0 e onde Y é um vetor coluna com m componentes:

$$Y(z) \;=\; \begin{pmatrix} y_1(z) \\ \vdots \\ y_m(z) \end{pmatrix} .$$

Consideremos agora a equação $\mathcal{M}'(z) = A(z)\mathcal{M}(z)$, com condição $\mathcal{M}(z_0) = \mathcal{M}_0$, onde $A(z)$ e $\mathcal{M}(z)$ são matrizes $m \times m$, a incógnita sendo a matriz $\mathcal{M}(z)$ e a matriz $A(z)$ sendo analítica em um domínio aberto e simplesmente conexo $\mathcal{D}$. Veremos facilmente que podemos tratar esse problema com os mesmos métodos do anterior, onde a incógnita era um vetor coluna Y de m componentes e não uma matriz quadrada. De fato, como toda matriz $m \times m$, a matriz $\mathcal{M}(z)$ é da forma (para notação, vide página 507)

$$\mathcal{M}(z) \;=\; \Big[\!\Big[M_1(z),\ \ldots,\ M_m(z) \Big]\!\Big] ,$$

onde $M_i(z)$ são vetores coluna com m componentes, representando a i-ésima coluna da matriz $\mathcal{M}(t)$.

Nessa notação a equação diferencial $\mathcal{M}'(z) = A(z)\mathcal{M}(z)$ fica

$$\Big[\!\Big[M_1'(z),\ \ldots,\ M_m'(z) \Big]\!\Big] \;=\; \Big[\!\Big[A(z)M_1(z),\ \ldots,\ A(z)M_m(z) \Big]\!\Big] ,$$

ou seja, tem-se um conjunto de m sistemas de equações independentes

$$M_i'(z) \;=\; A(z)M_i(z), \quad i = 1, \ldots, m \tag{14.62}$$

do tipo que tratamos acima, onde as incógnitas são vetores coluna.

Para cada uma dessas equações valem todas as afirmações provadas acima. Assim concluímos que a equação matricial $\mathcal{M}'(z) = A(z)\mathcal{M}(z)$, com condição $\mathcal{M}(z_0) = \mathcal{M}_0$, tem solução única, a qual é dada por

$$M_i(z) \;=\; D(z,\ z_0)M_i(z_0) , \quad i = 1\ , \ldots,\ m\ .$$

Reunindo as colunas M_i novamente na matriz $\mathcal{M}$, temos

$$\mathcal{M}(z) \;=\; D(z,\ z_0)\mathcal{M}_0$$

como solução única de $\mathcal{M}'(z) = A(z)\mathcal{M}(z)$, com condição $\mathcal{M}(z_0) = \mathcal{M}_0$.

A partir do exposto acima é fácil demonstrar a validade da composição $D(z,\ z_0) = D(z,\ z_1)D(z_1,\ z_0)$ para quaisquer pontos $z_0,\ z_1$ e z do domínio aberto e simplesmente conexo $\mathcal{D}$. Como $D(z_0,\ z_0) = \mathbb{1}$, isso em particular diz que toda matriz $D(z,\ z_0)$ é inversível com $D(z,\ z_0)^{-1} = D(z_0,\ z)$.

Uma simples mas importante observação que se pode fazer é que, como a matriz fundamental $D(z,\ z_0)$ é inversível, $\mathcal{M}(z)$ será inversível para todo $z \in \mathcal{D}$ se e somente se $\mathcal{M}_0$ o for. Ou seja, se a solução da equação $\mathcal{M}'(z) = A(z)\mathcal{M}(z)$, com $A(z)$ analítica em um domínio aberto simplesmente conexo $\mathcal{D}$ é analítica em um ponto de $\mathcal{D}$, então o é em todo $\mathcal{D}$.

Vamos aqui discutir propriedades dessas equações diferenciais matriciais homogêneas, com $A(z)$ uma matriz $m \times m$ analítica em um domínio aberto e simplesmente conexo $\mathcal{D}$. Se $\mathcal{M}_1(z)$ é uma solução desta equação, constata-se trivialmente que, para qualquer matriz $m \times m$ constante C, a matriz $\mathcal{M}_2(z) = \mathcal{M}_1(z)C$ é igualmente solução de $\mathcal{M}'(z) = A(z)\mathcal{M}(z)$, bastando para tal multiplicar a equação à direita por C.

A seguinte afirmação recíproca é também verdadeira:

Proposição 14.3 *Se $\mathcal{M}_1(z)$ e $\mathcal{M}_2(z)$ são duas soluções inversíveis de $\mathcal{M}'(z) = A(z)\mathcal{M}(z)$, com $A(z)$ analítica em um domínio aberto e simplesmente conexo $\mathcal{D}$, então existe uma matriz constante inversível C tal que $\mathcal{M}_2(z) = \mathcal{M}_1(z)C$ para todo $z \in \mathcal{D}$.* □

Prova. Para ver isso, seja z_0 um ponto arbitrário de $\mathcal{D}$ e defina-se $\mathcal{M}_1^0 = \mathcal{M}_1(z_0)$ e $\mathcal{M}_2^0 = \mathcal{M}_2(z_0)$. Seja então $C := (\mathcal{M}_1^0)^{-1}\mathcal{M}_2^0$. Então, teremos que $\mathcal{M}_3(z)$, definida por $\mathcal{M}_3(z) = \mathcal{M}_2(z) - \mathcal{M}_1(z)C$ é também solução da equação $\mathcal{M}'(z) = A(z)\mathcal{M}(z)$, mas que obviamente anula-se em z_0. Com isso, pela Proposição 14.2, $\mathcal{M}_3(z)$ é *identicamente nula* em todo $\mathcal{D}$, ou seja, $\mathcal{M}_2(z) = \mathcal{M}_1(z)C$ para todo $z \in \mathcal{D}$. ■

Consequências dessas observações serão discutidas na Seção 14.6.3.

14.6.2 Resolução por Séries de Potências

A possibilidade, revelada acima, de se apresentar a solução da equação homogênea $Y'(z) = A(z)Y(z)$ com condição $Y(z_0) = Y_0$, $z_0 \in \mathcal{D}$, em termos da matriz $D(z,\ w)$ (a qual depende apenas de A) é interessante do ponto de vista teórico mas nem sempre do ponto de vista prático, pois nem sempre é possível computar a série infinita de integrais de produtos de matrizes que compõe $D(z,\ w)$ (a série de Dyson). No entanto, uma das conclusões teóricas da análise acima, a saber, o fato de Y ser analítica, aponta para um outro método de resolução, esse sim mais simples de ser usado em aplicações. Trata-se do *Método de Séries de Potências* que descreveremos agora.

O fato de Y ser analítica nos diz *a priori* que Y pode ser expressa por uma série de Taylor convergente centrada em z_0:

$$Y(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n Y_n \ , \tag{14.63}$$

onde Y_n são vetores-coluna constantes com m componentes, tal qual $Y(z)$. Note-se que, pela expressão acima, $Y(z_0) = Y_0$. Para ver isso, tome $z = z_0$ em ambos os lados da expressão.

Como a matriz A é igualmente analítica em torno de z_0, A pode ser expressa por uma série de Taylor convergente centrada em z_0:

$$A(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n A_n \ ,$$

onde A_n são igualmente matrizes $m \times m$ constantes. Com isso, a equação diferencial $Y'(z) = A(z)Y(z)$ fica

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z-z_0)^n Y_{n+1} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k A_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}(z-z_0)^l Y_l\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(z-z_0)^{k+l}A_k Y_l\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\sum_{p=0}^{n}A_{n-p}Y_p\ , \end{aligned} \tag{14.64}$$

o que nos leva a concluir que

$$Y_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n}A_{n-p}Y_p\ , \qquad \forall n \geq 0\ . \tag{14.65}$$

E. 14.15 *Exercício importante.* Complete os detalhes das deduções que levam a (14.64) e (14.65). ✣

A expressão (14.65) nos permite obter os vetores Y_n recursivamente a partir de Y_0. Com isso, a solução $Y(z)$ fica determinada por sua série de Taylor (14.63). Esse é o método de resolução por séries de potências. Por exemplo, para $n = 0$, (14.65) nos dá

$$Y_1 = A_0 Y_0\ .$$

Para $n = 1$, (14.65) nos dá

$$Y_2 = \frac{1}{2}\left(A_1 Y_0 + A_0 Y_1\right) = \frac{1}{2}\left(A_1 + A_0^2\right)Y_0\ ,$$

e assim por diante. Os primeiros termos da solução $Y(z)$ são, então,

$$Y(z) = Y_0 + (z-z_0)A_0 Y_0 + \frac{(z-z_0)^2}{2}\left(A_1 + A_0^2\right)Y_0 + \cdots = \left\{\mathbb{1} + (z-z_0)A_0 + \frac{(z-z_0)^2}{2}\left(A_1 + A_0^2\right) + \cdots\right\}Y_0\ .$$

Isso permite-nos identificar a expressão entre colchetes $\{\cdots\}$ como sendo a expansão em série de Taylor de $D(z,\ z_0)$.

E. 14.16 *Exercício.* Determine Y_3 e Y_4 em termos de Y_0. ✣

E. 14.17 *Exercício importante.* Desenvolva o método de expansão em série de potências para a resolução da equação não-homogênea $Y'(z) = A(z)Y(z) + F(z)$ com condição $Y(z_0) = Y_0$, $z_0 \in \mathcal{D}$, onde A e F são analíticas em um domínio simplesmente conexo $\mathcal{D}$ e limitadas em $\overline{\mathcal{D}}$. ✣

14.6.3 Sistemas com Pontos Singulares. Monodromia

Nas páginas anteriores consideramos equações diferenciais como $Y'(z) = A(z)Y(z)$ onde $A(z)$ era suposta ser analítica em um certo domínio aberto e simplesmente conexo $\mathcal{D}$. Há inúmeros problemas importantes nos quais essa situação não é encontrada, de modo que devemos afrouxar um pouco as condições sobre a analiticidade de $A(z)$. Consideraremos aqui a situação na qual A é analítica dentro de um anel aberto $\mathcal{A}_{z_0,\ a,\ b}$ centrado em $z_0 \in \mathbb{C}$ com raio interno a e raio externo b definido por

$$\mathcal{A}_{z_0,\ a,\ b} := \left\{z \in \mathbb{C} \middle|\ a < |z - z_0| < b\right\}\ ,$$

sendo $0 \leq a < b$ (os casos em que $a = 0$ e/ou $b = \infty$ podem ser também permitidos). Vide Figura 14.1. Uma típica situação na qual isso ocorre se dá quando $A(z_0)$, ou seja, alguns de seus elementos de matriz, tem uma singularidade tipo pólo ou essencial[7] em um ponto z_0. Em verdade, interessaremo-nos mais pelo caso de singularidades tipo pólo, caso que, felizmente, corresponde à maioria das aplicações.

[7] Para o estudante que queira recordar esses conceitos sugerimos, por exemplo, [95] ou [18].

Notemos que a hipótese de $A(z)$ ser analítica em um anel $\mathcal{A}_{z_0,\ a,\ b}$ significa que $A(z)$ pode ser expressa em uma série de Laurent[8] convergente (vide e.g. [95] ou [18]) em $\mathcal{A}_{z_0,\ a,\ b}$:

$$A(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(z-z_0)^m A_m\ .$$

Notemos que um anel $\mathcal{A}_{z_0,\ a,\ b}$ é uma união de domínios abertos e simplesmente conexos do tipo $\mathcal{S}_{z_0,\ a,\ b}(\phi_1,\ \phi_2)$, com

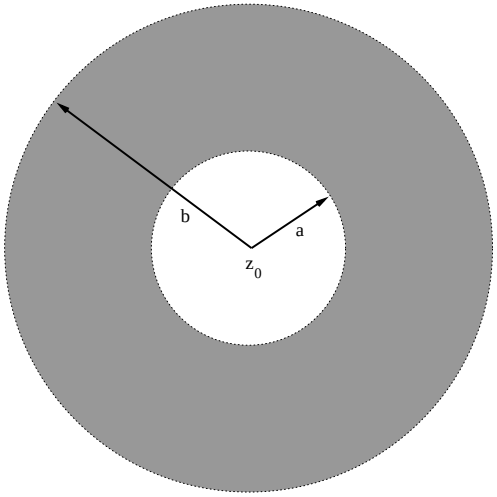

Figura 14.1: Um anel do tipo $\mathcal{A}_{z_0,\ a,\ b}$.

$0 < \phi_2 - \phi_1 < 2\pi$, onde

$$\mathcal{S}_{z_0,\ a,\ b}(\phi_1,\ \phi_2) := \left\{z \in \mathbb{C} \middle|\ z - z_0 = \rho e^{i\phi},\ \text{com } a < \rho < b \text{ e } \phi_1 < \phi < \phi_2\right\}\ .$$

Denominaremos essas regiões *setores*. Vide Figura 14.2.

• **Monodromia**

Se tomarmos z_1 e z dentro do anel $\mathcal{A}_{z_0,\ a,\ b}$, podemos encontrar um setor $\mathcal{S}_{z_0,\ a,\ b}(\phi_1,\ \phi_2)$ que contém ambos os pontos (se, por exemplo, na representação polar, $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z = \rho e^{i\theta}$, podemos tomar $\phi_1 < \min\{\theta_1,\ \theta\} \mod 2\pi$ e $\phi_2 < \max\{\theta_1,\ \theta\} \mod 2\pi$). Como A é analítica dentro de um tal setor e o mesmo é simplesmente conexo, podemos representar a matriz de Dyson $D(z,\ z_1)$ na forma (14.55) com as integrais tomadas em um caminho orientado de z_1 a z inteiramente contido no interior de $\mathcal{S}_{z_0,\ a,\ b}(\phi_1,\ \phi_2)$ (e, portanto, de $\mathcal{A}_{z_0,\ a,\ b}$). Isso permite definir $D(z,\ z_1)$ dentro de cada setor.

Uma questão muito importante para o que segue é saber o que ocorre com a matriz $D(z,\ z_1)$ se, fixando z_1, fizermos z dar uma volta de 2π em torno do ponto z_0. Mais precisamente, consideremos os pontos $z(\phi)$ definidos por $z(\phi) := (z - z_0)e^{i\phi} + z_0$. Como é fácil constatar, ao variarmos ϕ entre 0 e 2π, $z(\phi)$ move-se em um círculo de raio $|z - z_0|$ centrado em z_0 e orientado em sentido anti-horário, sendo que $z(0) = z(2\pi) = z$. Para $0 \leq \phi < 2\pi$, os pontos z_1 e $z(\phi)$ estão dentro de algum setor simplesmente conexo de $\mathcal{A}_{z_0,\ a,\ b}$ e podemos escrever, por (14.60), $D(z(\phi),\ z_1) = D(z(\phi),\ z)D(z,\ z_1)$.

[8] Pierre Alphonse Laurent (1813–1854).

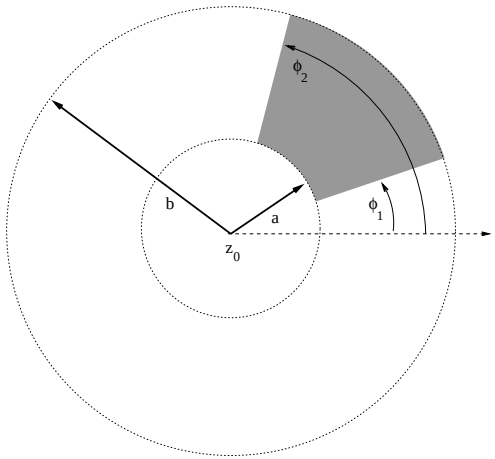

Figura 14.2: Em cinza, um setor $\mathcal{S}_{z_0,\,a,\,b}(\phi_1,\ \phi_2)$ no interior do anel $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$.

Consideremos a matriz $D(z(\phi),\ z)$. A mesma pode ser expressa na forma (14.55), sendo que podemos tomar como caminho de integração o arco de círculo orientado no sentido anti-horário $C(\phi)$ que vai de z a $z(\phi)$ (lembremo-nos que $|z(\phi)-z_0| = |z-z_0|$). Vide Figura 14.3. A para a matriz $D(z,\ z_1)$ podemos tomar o caminho de integração C_1 da Figura 14.3. À medida que ϕ aproxima-se de 2π, o caminho de integração aproxima-se do círculo fechado de raio $|z-z_0|$ (indicado por C na Figura 14.3), orientado de z a z no sentido anti-horário. Vemos assim que

$$\lim_{\phi\to 2\pi} D(z(\phi),\ z_1) \ = \ MD(z,\ z_1) \qquad \text{onde} \qquad M \ := \ \lim_{\phi\to 2\pi} D(z(\phi),\ z)\ .$$

Pela definição e pela representação (14.55),

$$M \ = \ \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \oint_z \int_z^{w_1} \cdots \int_z^{w_{n-1}} A(w_1)A(w_2)\cdots A(w_n)\, dw_n dw_{n-1}\cdots dw_1\ , \tag{14.66}$$

onde por $\oint_z$ entende-se a integração (na variável w_1) de z a z tomada ao longo do círculo fechado C de raio $|z-z_0|$, orientado de z a z no sentido anti-horário. Como se percebe, esse círculo corresponde ao arco $C(2\pi)$.

Devido à expressão (14.66), é fácil constatar que M, não depende da particular curva C tomada unindo z a z, desde que essa curva dê exatamente uma volta em torno de z_0 sentido anti-horário sem abandonar $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$. Devido ao fato de o integrando ser analítico dentro de todos os setores de $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$, podemos deformar continuamente o caminho de integração sem alterar seu valor, desde que não se abandone $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$. Podemos, assim, tomar como caminho de integração em (14.66) qualquer curva fechada que dê uma volta completa no sentido anti-horário em torno de z_0 ao longo do anel $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$, sem sair do mesmo. Em particular, vemos com esse argumento que M também não depende do ponto z.

A matriz M é denominada *matriz de monodromia* associada à matriz $A(z)$ em $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$. Se $M \neq \mathbb{1}$, dizemos que $D(z,\ z_1)$ possui uma *monodromia não-trivial*.

Caso $M \neq \mathbb{1}$ (veremos exemplos logo adiante), a matriz de Dyson $D(z,\ z_1)$ não é uma função unívoca, ou seja, quando a variável z dá uma volta de 2π em torno de z_0, $D(z,\ z_1)$ não volta ao mesmo valor. Esse fenômeno é bem conhecido na teoria das funções de variável complexa e é associado à presença de singularidades do tipo ponto de ramificação. Por exemplo, para a função complexa $\ln(z)$, $z\neq 0$, vale $\lim_{\phi\to 2\pi} \ln(ze^{i\phi}) = \ln(z) + 2\pi i$ e para a função complexa z^γ, $z\neq 0$, com $\gamma \notin \mathbb{Z}$, vale $\lim_{\phi\to 2\pi} (ze^{i\phi})^\gamma = e^{2\pi\gamma i} z^\gamma$.

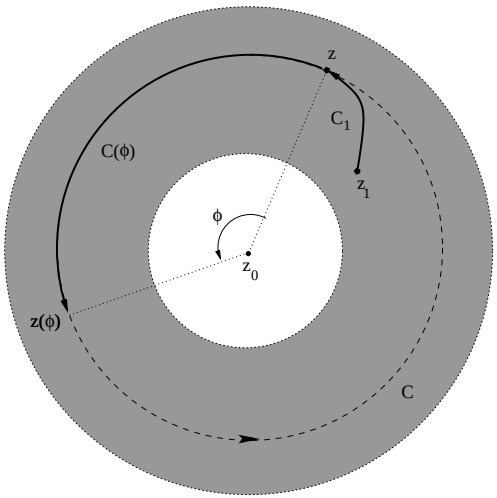

Figura 14.3: O arco de círculo orientado no sentido anti-horário $C(\phi)$ que vai de z a $z(\phi)$.

• **Mais propriedades da matriz de monodromia**

Um comentário que será importante é que toda matriz de monodromia é inversível. Para vermos isso, notemos que pela definição, $M = \lim_{\phi\to 2\pi} D(z(\phi),\ z)$. Assim, considerando o ponto $z(\pi)$ (escolhido de forma arbitrária, porém conveniente), tem-se pela fórmula de composição (14.60) que $M = \lim_{\phi\to 2\pi} D(z(\phi),\ z) = \lim_{\phi\to 2\pi} D(z(\phi),\ z(\pi))D(z(\pi),\ z) = D_b(z,\ z(\pi))D_a(z(\pi),\ z)$, sendo que $D_a(z',\ z)$ envolve integrações ao longo de um arco C_a, orientado de z a $z(\pi)$, e $D_b(z,\ z(\pi))$ envolve integrações ao longo do arco C_b, orientado de $z(\pi)$ a z. Ambos os arcos estão contidos em $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$. A união $C_a \cup C_b$ é uma curva fechada que dá exatamente uma volta completa no sentido anti-horário em torno de z_0 ao longo do anel $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$, sem sair do mesmo. Ambas as matrizes $D_a(z',\ z)$ e $D_b(z,\ z')$ são inversíveis. Portanto, a matriz M também o é.

Um segundo comentário é que a matriz de monodromia comuta com $D(z,\ z_1)$ e com $A(z)$ para todos $z,\ z_1 \in \mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$. Para ver isso, considere a curva C, fechada, orientada, inteiramente contida em $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$, indicada na Figura 14.4. Essa curva é a fronteira de uma região simplesmente conexa, portanto, se $f(z)$ é uma função analítica em $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$, sua integral $\oint_C f(w)\, dw$ ao longo de C é nula. Por essa razão, tem-se que

$$\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \oint_C \int_z^{w_1} \cdots \int_z^{w_{n-1}} A(w_1)A(w_2)\cdots A(w_n)\, dw_n dw_{n-1}\cdots dw_1 \ = \ \mathbb{1}\ , \tag{14.67}$$

pois todas as integrais ao lado direito se anulam (os integrandos são analíticos). A curva C pode ser continuamente deformada à curva fechada indicada na Figura 14.5 sem alterar a igualdade (14.67). Tem-se agora, porém, que o percurso ao longo de C pode ser caminhado pelo seguinte conjunto de percursos sucessivos: 1) partindo do ponto z_1 ao longo da curva C_1 até o ponto z; 2) partindo de z ao longo da curva fechada C_2, orientada no sentido anti-horário, até de volta a z; 3) partindo de z até z_1, ao longo da curva C_3; 4) partindo de z_1 ao longo da curva fechada C_4, orientada no sentido horário, até de volta a z_1. Essas considerações e a expressão para M em (14.66) em termos de integrações ao longo de um circuito arbitrário fechado que dá uma volta no sentido anti-horário em torno de z_0, levam-nos a concluir que (14.67) significa que

$$M^{-1}D(z_1,\ z)MD(z,\ z_1) \ = \ \mathbb{1}\ .$$

Como $D(z_1,\ z) = D(z,\ z_1)^{-1}$, concluímos que $MD(z,\ z_1) = D(z,\ z_1)M$, ou seja, M e $D(z,\ z_1)$ comutam para quaisquer

$z,\ z_1 \in \mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$. Derivando em relação a z, obtemos $MA(z)D(z,\ z_1) = A(z)D(z,\ z_1)M$ e tomando $z_1 = z$, segue que $MA(z) = A(z)M$, ou seja, M e $A(z)$ comutam para qualquer $z \in \mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$.

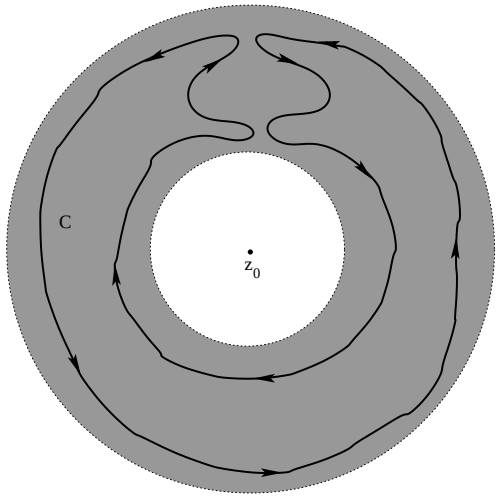

Figura 14.4: A curva fechada orientada C.

Os dois exercícios que seguem exibem mais propriedades de matrizes de monodromia em certos casos.

E. 14.18 *Exercício. Monodromia no caso comutativo*. Considere o caso em que $A(z)$ é uma matriz analítica no anel $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$ e tal que $A(z)A(z') = A(z')A(z)$ para todos $z,\ z' \in \mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$. Usando (14.51), página 744, e (14.66), mostre que

$$M \;=\; \exp\left(\oint A(w)\,dw\right)\,, \tag{14.68}$$

a integral $\oint$ sendo tomada ao longo de qualquer curva fechada que dê exatamente uma volta completa no sentido anti-horário em torno de z_0 ao longo do anel $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$, sem sair do mesmo. ✠

E. 14.19 *Exercício*. Sejam $A(z)$ matrizes $n \times n$ analíticas no anel $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$. Suponha que dentro de $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$ existam n^2 pontos distintos $z_1,\ \ldots,\ z_{n^2}$ com a propriedade que as n^2 matrizes $A(z_1),\ \ldots,\ A(z_{n^2})$ são linearmente independentes. Mostre que isso implica que $M = \eta\mathbb{1}$ para algum $\eta \in \mathbb{C},\ \eta \neq 0$. Sugestão: explore o fato que $MA(z) = A(z)M$ para todo $z \in \mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$. ✠

*

Antes de examinarmos as consequências da existência de uma monodromia não-trivial para a matriz $D(z,\ z_1)$, devemos mostrar exemplos concretos onde se tem $M \neq \mathbb{1}$.

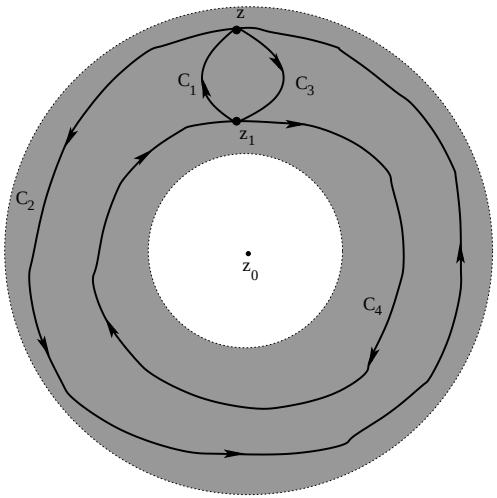

Figura 14.5: A curva fechada orientada C composta dos segmentos orientados C_1, C_2, C_3 e C_4. Os pontos z_1 e z.

• **Monodromia não trivial. Um exemplo**

O seguinte exemplo[9] é ilustrativo. Seja $A(z) = z^{-1}R$, onde R é a matriz constante

$$R \;=\; \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\,, \tag{14.69}$$

sendo λ um número complexo fixo arbitrário. Claramente $A(z)$ é singular em $z_0 = 0$ e analítica em todo anel $\mathcal{A}_{0,\,b} = \{z \in \mathbb{C} |\ 0 < |z| < b\}$, com qualquer $b > 0$. Tomando $z_1 \in \mathcal{A}_{0,\,b}$, fixo, a matriz de Dyson $D(z,\ z_1)$ é dada por[10]

$$D(z,\ z_1) \;=\; \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & \ln\left(\frac{z}{z_1}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \tag{14.70}$$

pois, como facilmente se constata, essa matriz satisfaz $\frac{\partial}{\partial z}D(z,\ z_1) = A(z)D(z,\ z_1)$ e $D(z_1,\ z_1) = \mathbb{1}$.

E. 14.20 *Exercício*. As matrizes $A(z) = z^{-1}R$, acima, comutam para valores diferentes de z. Por essa razão, $D(z,\ z_1)$ pode ser calculada com o uso da expressão (14.51), página 744. Obtenha (14.70) dessa forma. ✠

Fixando-se z_1, é fácil verificar que

$$\lim_{\phi\to 2\pi} D(ze^{i\phi},\ z_1) \;=\; \lim_{\phi\to 2\pi}\left(\frac{ze^{i\phi}}{z_1}\right)^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & \ln\left(\frac{ze^{i\phi}}{z_1}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; e^{2\pi i\lambda}\left(\frac{z}{z_1}\right)^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & \ln\left(\frac{z}{z_1}\right) + 2\pi i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; MD(z,\ z_1)\,,$$

[9] Esse exemplo é extraído com pequenas modificações de [472].

[10] Em tudo o que segue utilizaremos o chamado ramo principal do logaritmo de uma variável complexa z. Ou seja, se $z \in \mathbb{C}$ tem a decomposição polar $z = |z|e^{i\phi}$ com $-\pi \leq \phi < \pi$, então $\ln(z) = \ln|z| + i\phi$.

com a matriz de monodromia M sendo dada por

$$M \;=\; e^{2\pi i\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 2\pi i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{14.71}$$

E. 14.21 *Exercício*. Obtenha (14.71) fazendo uso da relação (14.68), válida no caso comutativo. Verifique explicitamente que $MA(z) = A(z)M$ para todo $z \in \mathcal{A}_{0,\,b}$. Vide Exercício E. 14.18. ✠

E. 14.22 *Exercício*. Mostre, fazendo uso da relação (14.68), que para qualquer matriz R a matriz de monodromia associada às funções $A(z) = z^{-p}R$, com $p \in \mathbb{Z},\ p \neq 1$, é $M = \mathbb{1}$, ou seja, a monodromia é trivial. ✠

*

A existência de monodromias não-triviais em equações singulares do tipo que consideramos aqui é um fato relevante que, como veremos, tem consequências sobre a forma geral das soluções.

• **Um comentário sobre a matriz de monodromia**

Como já observamos, toda matriz de monodromia M é inversível. Vamos mostrar que para cada M existe uma matriz Γ tal que $M = e^{2\pi i\Gamma}$. Por exemplo, para a M dada em (14.71) podemos tomar $\Gamma = R$, onde R é dada em (14.69) (verifique!). Para a prova geral, vamos primeiro escrever M na sua forma de Jordan (vide Teorema 10.22, página 575): seja T inversível tal que $T^{-1}MT = D + N$ onde D é diagonal, N é nilpotente e $DN = ND$. Definimos, então,

$$\Gamma \;:=\; \frac{1}{2\pi i}\, T\left[\ln D + \ln(\mathbb{1} + D^{-1}N)\right] T^{-1} .$$

Antes de prosseguirmos comentemos que essa expressão está bem definida. De fato, D é uma matriz diagonal $D = \operatorname{diag}(d_1,\ \ldots,\ d_m)$, tendo na diagonal os autovalores de M. Como M é inversível, nenhum desses autovalores é nulo, assim $\ln D$ está bem definida como $\ln D = \operatorname{diag}(\ln(d_1),\ \ldots,\ \ln(d_m))$. Fora isso, $\ln(\mathbb{1} + D^{-1}N)$ é dada (já que D e N comutam) por $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(D^{-1}\right)^k N^k$, que é uma soma finita, pois N é nilpotente.

Isto posto, dado que $\ln D$ e $\ln(\mathbb{1} + D^{-1}N)$ comutam (por quê?), é fácil então ver que

$$\begin{aligned} e^{2\pi i\Gamma} &= T\exp\left(\ln D + \ln(\mathbb{1} + D^{-1}N)\right) T^{-1} \\ &= T\exp(\ln D)\exp\left(\ln(\mathbb{1} + D^{-1}N)\right) T^{-1} \\ &= TD(\mathbb{1} + D^{-1}N)T^{-1} \;=\; T(D+N)T^{-1} \\ &= M\,, \end{aligned}$$

como queríamos provar.

Logo abaixo usaremos a matriz Γ e o fato agora provado que $M = e^{2\pi i\Gamma}$ para extrair algumas conclusões sobre a forma geral das soluções com pontos singulares do tipo aqui tratado. Para isso, faremos uso da matriz $e^{\ln(z-z_0)\Gamma}$. Vamos discutir sua forma geral. Como toda matriz, Γ pode ser conduzida à sua forma de Jordan por uma transformação de similaridade: existe matriz Q inversível tal que $Q\Gamma Q^{-1} = D_0 + N_0$ onde D_0 é diagonal, N_0 é nilpotente e $D_0N_0 = N_0D_0$. Com isso,

$$e^{\ln(z-z_0)\Gamma} \;=\; Q^{-1}e^{\ln(z-z_0)(D_0+N_0)}Q \;=\; Q^{-1}e^{\ln(z-z_0)D_0}e^{\ln(z-z_0)N_0}Q\,.$$

Se a matriz D_0 for a matriz diagonal $\operatorname{diag}(\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_m)$ então a matriz $e^{\ln(z-z_0)D_0}$ é a matriz diagonal $\operatorname{diag}((z-z_0)^{\gamma_1},\ \ldots,\ (z-z_0)^{\gamma_m})$. Por outro lado, como N_0 é nilpotente de índice menor ou igual a m (ou seja $N_0^m = 0$), os elementos de matriz de $e^{\ln(z-z_0)N_0}$ são polinômios em $\ln(z-z_0)$ de ordem menor ou igual a $m-1$. Consequentemente, cada elemento de matriz $\left(e^{\ln(z-z_0)\Gamma}\right)_{ab}$ é da forma

$$\left(e^{\ln(z-z_0)\Gamma}\right)_{ab} \;=\; \sum_{k=0}^{m-1}\left(\sum_{l=1}^{m}(z-z_0)^{\gamma_l}C_{ab}^{kl}\right)(\ln(z-z_0))^k \tag{14.72}$$

para certas constantes complexas C_{ab}^{kl} (algumas podendo ser nulas).

Note-se que os γ_l são, em geral, números complexos: os autovalores de Γ.

E. 14.23 *Exercício importante*. Complete os detalhes que levam a (14.72). ✠

Observação importante. Como a expansão de $e^{\ln(z-z_0)N_0}$

$$e^{\ln(z-z_0)N_0} \;=\; \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{m-1}(\ln(z-z_0))^k N_0^k$$

contém o termo $\mathbb{1}$, a expansão (14.72) sempre contém um termo não-nulo do tipo $(\ln(z-z_0))^k$ com $k = 0$, ou seja, há um termo não-nulo que não envolve potências de $\ln(z-z_0)$. Essa observação será lembrada adiante. ♣

• **A forma geral das soluções**

A discussão que segue é baseada na referência [472], cuja leitura recomendamos.

Seja a equação $Y'(z) = A(z)Y(z)$ com $A(z)$ analítica no anel $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$ e seja como antes $D(z,\ z_1)$, $z,\ z_1 \in \mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$, uma matriz fundamental dessa equação com uma matriz de monodromia $M = e^{2\pi i\Gamma}$. Para z_1 fixo, seja $S(z)$ a matriz definida por

$$S(z) \;:=\; e^{-\ln(z-z_0)\Gamma}D(z,\ z_1)\,.$$

Pelas hipóteses sobre $D(z,\ z_1)$ e pelas propriedades da função logaritmo, $S(z)$ é analítica em cada setor $\mathcal{S}_{z_0,\,a,\,b}(\phi_1,\ \phi_2)$ com $0 < \phi_2 - \phi_1 < 2\pi$.

Consideremos o que ocorre com $S(z)$ quando a variável z dá uma volta de 2π em torno de z_0, ou seja, comparemos $S(z)$ com[11] $\lim_{\phi\to 2\pi} S\left((z-z_0)e^{i\phi} + z_0\right)$. Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{\phi\to 2\pi} S\left((z-z_0)e^{i\phi} + z_0\right) &= \lim_{\phi\to 2\pi}\left(\exp\Big(-\ln((z-z_0)e^{i\phi})\Gamma\Big)\, D\Big((z-z_0)e^{i\phi} + z_0,\ z_1\Big)\right) \\ &= \left(e^{-\ln((z-z_0))\Gamma}\right)\left(\lim_{\phi\to 2\pi} e^{-i\phi\Gamma}\right)\left(\lim_{\phi\to 2\pi} D\left((z-z_0)e^{i\phi} + z_0,\ z_1\right)\right) \\ &= e^{-\ln((z-z_0))\Gamma}\, e^{-2\pi i\Gamma}\, M\, D(z,\ z_1) \\ &= e^{-\ln((z-z_0))\Gamma}\, M^{-1}\, M\, D(z,\ z_1) \\ &= e^{-\ln((z-z_0))\Gamma}\, D(z,\ z_1) \\ &= S(z)\,. \end{aligned}$$

Isso diz-nos que $S(z)$ é contínua no anel $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$. Como é analítica em cada setor $\mathcal{S}_{z_0,\,a,\,b}(\phi_2,\ \phi_1)$ com $0 < \phi_2 - \phi_1 < 2\pi$, concluímos que $S(z)$ é *analítica* em $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$. Se pudermos tomar o raio interno do anel arbitrariamente pequeno, $S(z)$ pode ser singular em z_0. Essa singularidade, porém, se houver, será do tipo pólo ou do tipo singularidade essencial, mas não do tipo ponto de ramificação, pois isso contrariaria o fato de $S(z)$ ser analítica em qualquer anel centrado em z_0.

Resumimos nossos conclusões em forma de uma proposição.

Proposição 14.4 *Seja a equação $Y'(z) = A(z)Y(z)$ com $A(z)$ matriz $m \times m$ analítica no anel $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$ e seja como antes $D(z,\ z_1)$, com $z,\ z_1 \in \mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$, uma matriz fundamental dessa equação com matriz de monodromia $M = e^{2\pi i\Gamma}$. Então, para z_1 fixo, $D(z,\ z_1)$ é da forma*

$$D(z,\ z_1) \;=\; e^{\ln(z-z_0)\Gamma}\, S(z), \tag{14.73}$$

onde $S(z)$ é analítica no anel $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$. Se pudermos tomar o raio interno do anel arbitrariamente pequeno, $S(z)$ pode ser singular em z_0, a singularidade, se houver, sendo do tipo pólo ou do tipo singularidade essencial.

[11] Note que, para z e z_0 fixos, quando ϕ varia de 0 a 2π os pontos $(z-z_0)e^{i\phi} + z_0$ descrevem um círculo orientado no sentido anti-horário no plano complexo e centrado em z_0. Esse círculo tem raio $|z-z_0|$, inicia-se e termina em z.

Consequentemente, por (14.72), cada elemento de matriz $D(z,\ z_1)_{ab}$, para z_1 fixo, é da forma

$$D(z,\ z_1)_{ab} \ = \ \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=1}^{m}(z-z_0)^{\gamma_l}(\ln(z-z_0))^k F_{ab}^{kl}(z)\ , \tag{14.74}$$

$a,\ b=1,\ \ldots,\ m$, onde cada função $F_{ab}^{kl}(z)$ é analítica no anel $\mathcal{A}_{z_0,\,a,\,b}$. Novamente, se pudermos tomar o raio interno do anel arbitrariamente pequeno, cada $F_{ab}^{kl}(z)$ pode ser singular em z_0. Essa singularidade, se houver, é do tipo pólo ou do tipo singularidade essencial. As constantes complexas γ_l são os autovalores de Γ. Os termos com $k=0$ são não-nulos. □

E. 14.24 *Exercício importante*. Complete os detalhes que conduzem a (14.74). ✠

E. 14.25 *Exercício*. Qual a relação entre os expoentes γ_l e os autovalores da matriz de monodromia M? Sugestão: pela construção acima, os expoentes γ_l são os autovalores de Γ e $M=e^{2\pi i\Gamma}$. ✠

• **O Método de Frobenius**

A forma geral das matrizes fundamentais apresentada acima sugere e justifica um método de solução para o caso de sistemas de equações lineares provenientes de uma equação diferencial ordinária de ordem m (vide Seção 14.7):

$$y^{(m)}(z)+a_{m-1}(z)y^{(m-1)}(z)+\cdots a_1(z)y'(z)+a_0(z)y(z) \ = \ 0\ , \tag{14.75}$$

onde as funções $a_0(z),\ \ldots,\ a_{m-1}(z)$ são analíticas em

$$\mathcal{A}_{z_0,\,b} \ := \ \{z\in\mathbb{C}|\ 0<|z-z_0|<b\}\ .$$

O método consiste em procurar soluções na forma $y(z)=(z-z_0)^{\gamma}(\ln(z-z_0))^k f(z)$, para algum $\gamma\in\mathbb{C}$, algum $k=0,\ \ldots,\ m-1$, inteiro e $f(z)$ analítica no anel $\mathcal{A}_{z_0,\,b}$. Como f possui uma singularidade tipo pólo ou essencial em z_0, ela pode ser representada em $\mathcal{A}_{z_0,\,b}$ por uma série de Laurent convergente (vide e.g. [95] ou [18]):

$$f(z) \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n\ .$$

A tarefa consiste em determinar $\gamma\in\mathbb{C}$, $k=0,\ \ldots,\ m-1$, e os coeficientes c_n de modo que a equação (14.75) seja satisfeita.

Esse método é conhecido como *método de Frobenius*[12]. Em certos casos esse método é muito eficaz, fornecendo soluções para uma classe muito grande de equações diferenciais de interesse. Mais sobre ele, adiante.

Note-se que, pela *observação importante* da página 758, sempre há pelo menos uma solução que não envolve potências de $\ln(z-z_0)$.

• **Singularidades tipo pólo de $S(z)$. Pontos singulares regulares**

Retornando à (14.73), façamos alguns comentários sobre as singularidades de $S(z)$ em z_0.

Como dissemos, caso z_0 seja um ponto singular de $A(z)$, a matriz $S(z)$, sendo analítica em $\mathcal{A}_{z_0,\,b}$, ou possui uma singularidade do tipo pólo em z_0 ou uma singularidade essencial. No caso de a singularidade ser do tipo pólo (de qualquer ordem), z_0 é dito ser um *ponto singular regular*[13] da equação $Y'(z)=A(z)Y(z)$.

No caso de z_0 ser um ponto singular regular uma simplificação importante pode ser feita.

[12] Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917).

[13] *Comentário*. A expressão "ponto singular regular" parece conter uma contradição em termos pois, na teoria das funções de variáveis complexas, os adjetivos "singular" e "regular" são comummente empregados como antônimos. A expressão "ponto singular regular" aparentemente provem de uma tradução imprecisa do Alemão, mas manteve-se, por razões históricas, em várias línguas. Na expressão "ponto singular regular" o adjetivo "regular" deve ser entendido no sentido de "comum", "ordinário". Com isso pretende-se dizer que a singularidade em z_0 não é do tipo mais grave, como no caso de singularidades essenciais.

Se $S(z)$ tem um pólo de ordem l em z_0, então $S(z)=(z-z_0)^{-l}S_0(z)$, onde $S_0(z)$ é analítica em z_0. Com isso, a forma geral (14.73) pode ser reescrita como

$$D(z,\ z_1) \ = \ S_0(z)\,e^{\ln(z-z_0)\Gamma'}\ ,$$

onde $\Gamma'=\Gamma-l\mathbb{1}$.

E. 14.26 *Exercício*. Verifique! ✠

Como se constata, é a mesma forma de (14.73), envolvendo apenas uma redefinição da matriz Γ, sendo que agora o fator $S_0(z)$ é uma matriz analítica. O ponto importante é que a conclusão (14.74) sobre a forma geral dos elementos de matriz de $D(z,\ z_1)$ é igualmente válida, sendo que agora, porém, as funções $F_{ab}^{kl}(z)$ são funções analíticas de z em z_0 e não apenas no anel $\mathcal{A}_{z_0,\,b}$.

Nesse caso, então, o método de Frobenius discutido acima adquire o seguinte aspecto: procura-se soluções na forma

$$y(z) \ = \ (z-z_0)^{\gamma}(\ln(z-z_0))^k\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

e tenta-se determinar γ, k e os coeficientes c_n de modo que a equação diferencial seja satisfeita. Esse método é eficaz e, em muitos casos, prático, fornecendo soluções para várias equações diferenciais de interesse na Física. Mais sobre o método de Frobenius pode ser encontrado nos bons livros sobre equações diferenciais e Física-Matemática ou no Capítulo 15, com exemplos.

A questão que se coloca então é: quando ocorre que $S(z)$ possui apenas singularidades do tipo pólo em z_0? A resposta depende do tipo de singularidade que a própria matriz $A(z)$ possui em z_0. Começaremos a discutir isso na Seção 14.6.4.

14.6.4 Sistemas com Pontos Singulares Simples

Nesta seção seguiremos muito proximamente a discussão da Seção 2 do capítulo V da referência [472], cuja leitura recomendamos fortemente.

De especial importância em aplicações são equações diferenciais $Y'(z)=A(z)Y(z)$ nas quais $A(z)$ possui um pólo simples em z_0, ou seja, $A(z)$ é da forma $A(z)=(z-z_0)^{-1}A_0(z)$, onde $A_0(z)$ é analítica em z_0. Nesse caso, em que z_0 é um pólo simples de $A(z)$, dizemos que z_0 é um *ponto singular simples* da equação diferencial.

Essa situação é também particularmente feliz pois, como veremos, nesse caso z_0 é um ponto singular regular. Isso é o conteúdo do seguinte teorema:

Teorema 14.1 *Se z_0 é um ponto singular simples da equação diferencial $Y'(z)=A(z)Y(z)$, ou seja, $A_0(z):=(z-z_0)A(z)$ é analítica em z_0, então z_0 é um ponto singular regular dessa equação, ou seja, $S(z)$ (definida acima) tem no máximo uma singularidade tipo pólo em z_0.* □

Prova. (Extraída de [472], com ligeiras modificações). Comecemos com alguns comentários preparatórios.

1. Para uma matriz complexa $m\times m$ qualquer K denotamos por $\|K\|$ sua norma operatorial, definida por

$$\|K\| \ := \ \sup_{v\in\mathbb{C}^m,\ v\neq 0}\frac{\|Kv\|_{\mathbb{C}}}{\|v\|_{\mathbb{C}}}\ ,$$

onde, para $v=(v_1,\ \ldots,\ v_m)\in\mathbb{C}^m$, definimos a norma vetorial $\|v\|_{\mathbb{C}}:=\sqrt{|v_1|^2+\cdots+|v_m|^2}$.

2. Para qualquer elemento ab de uma matriz K vale

$$|K_{ab}| \ \leq \ \sqrt{\sum_{c=1}^{m}|K_{cb}|^2} \ = \ \|Ke_b\|_{\mathbb{C}}\ ,$$

onde e_b é o vetor da base canônica cuja b-ésima componente é 1 e as demais são nulas. Como é óbvio, $\|e_b\|_{\mathbb{C}} = 1$. Assim,

$$|K_{ab}| \;\le\; \frac{\|Ke_b\|_{\mathbb{C}}}{\|e_b\|_{\mathbb{C}}} \;\le\; \sup_{v\in\mathbb{C}^m,\ v\neq 0} \frac{\|Kv\|_{\mathbb{C}}}{\|v\|_{\mathbb{C}}} \;=:\; \|K\| \,. \tag{14.76}$$

E. 14.27 *Exercício*. Justifique a segunda desigualdade. ✣

3. Da definição da norma operatorial de uma matriz K, é evidente que vale $\|Kv\|_{\mathbb{C}} \le \|K\|\,\|v\|_{\mathbb{C}}$ para qualquer vetor v. Pela definição, é bem fácil constatar desse fato que norma operatorial de um produto de matrizes satisfaz

$$\|KL\| \;\le\; \|K\|\,\|L\| \,, \tag{14.77}$$

para quaisquer matrizes complexas $m \times m$ K e L.

E. 14.28 *Exercício*. Prove isso. ✣

Agora passemos à demonstração do teorema. Com $z,\ z_1 \in \mathcal{A}_{z_0,\,b}$ e z_1 fixo, vamos denotar $D(z,\ z_1)$ por $\Phi(z)$. Obviamente, $\Phi(z)$ satisfaz

$$\Phi'(z) \;=\; A(z)\Phi(z) \;=\; (z-z_0)^{-1}A_0(z)\Phi(z) \,. \tag{14.78}$$

Vamos escrever, para $z \in \mathcal{A}_{z_0,\,b}$, $z = z_0 + re^{i\theta}$. Assim, $r > 0$ mede a distância de z a z_0. Vamos também definir, para $r > 0$,

$$f(r,\ \theta) \;:=\; \|\Phi(z)\| \;=\; \left\|\Phi\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right\| \;=\; \left\|D\left(z_0 + re^{i\theta},\ z_1\right)\right\| \,.$$

Temos que (abaixo $z = z_0 + re^{i\theta}$ e $w = \delta e^{i\theta}$)

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial r}(r,\ \theta)\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial r}\left\|\Phi\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right\|\right| \;=\; \left|\lim_{\delta\to 0}\frac{\left\|\Phi\left(z_0 + (r+\delta)e^{i\theta}\right)\right\| - \left\|\Phi\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right\|}{\delta}\right| \\
&= \lim_{\delta\to 0}\frac{\left|\left\|\Phi\left(z_0 + (r+\delta)e^{i\theta}\right)\right\| - \left\|\Phi\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right\|\right|}{\delta} \\
&\overset{\text{por (3.24)}}{\le} \lim_{\delta\to 0}\frac{\left\|\Phi\left(z_0 + (r+\delta)e^{i\theta}\right) - \Phi\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right\|}{\delta} \;=\; \left\|\lim_{\delta\to 0}\frac{\Phi\left(z_0 + (r+\delta)e^{i\theta}\right) - \Phi\left(z_0 + re^{i\theta}\right)}{\delta}\right\| \\
&= \left\|e^{i\theta}\lim_{\delta\to 0}\frac{\Phi\left(z + \delta e^{i\theta}\right) - \Phi(z)}{\delta e^{i\theta}}\right\| \;=\; \underbrace{\left|e^{i\theta}\right|}_{=1}\left\|\lim_{\delta\to 0}\frac{\Phi\left(z + \delta e^{i\theta}\right) - \Phi(z)}{\delta e^{i\theta}}\right\| \\
&= \left\|\lim_{w\to 0}\frac{\Phi(z+w) - \Phi(z)}{w}\right\| \;=\; \|\Phi'(z)\| \\
&\overset{\text{por (14.78)}}{=} \left\|(z-z_0)^{-1}A_0(z)\Phi(z)\right\| \;=\; \frac{1}{r}\|A_0(z)\Phi(z)\| \\
&\overset{\text{por (14.77)}}{\le} \frac{1}{r}\|A_0(z)\|\,\|\Phi(z)\| \;=\; \frac{1}{r}\|A_0(z)\|\,\left\|\Phi\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right\| \\
&= \frac{1}{r}\|A_0(z)\|\,f(r,\ \theta) \\
&\le \frac{C}{r}f(r,\ \theta) \,,
\end{aligned}$$

onde $C := \sup_{|z-z_0|<a}\|A_0(z)\|$. Note-se que C é finito pois, por hipótese, $A_0(z)$ é analítica em torno de z_0. Obviamente, o fato que $\left|\frac{\partial f}{\partial r}(r,\ \theta)\right| \le \frac{C}{r}f(r,\ \theta)$ implica

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\ \theta) + \frac{C}{r}f(r,\ \theta) \;\ge\; 0 \,.$$

Obviamente, essa relação diz que

$$\frac{1}{f(r,\ \theta)}\frac{\partial f}{\partial r}(r,\ \theta) + \frac{C}{r} \;\ge\; 0 \,,$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial r}\ln\left(r^C f(r,\ \theta)\right) \;\ge\; 0 \,.$$

Integrando essa expressão entre r e r_1 (com $0 < r < r_1 < a$. Doravante, r_1 estará fixo.), temos

$$\ln\left(\frac{r_1^C f(r_1,\ \theta)}{r^C f(r,\ \theta)}\right) \;\ge\; 0 \,.$$

Para x positivo, $\ln x \ge 0$ implica $x \ge 1$. Assim, $r_1^C f(r_1,\ \theta) \ge r^C f(r,\ \theta)$. Isso implica

$$f(r,\ \theta) \;\le\; \frac{d}{r^C} \,,$$

com $d := \max_{0\le\theta\le 2\pi} r_1^C f(r_1,\ \theta)$. Com o que vimos, estabelecemos que

$$\|\Phi(z)\| \;\le\; \frac{d}{|z-z_0|^C}$$

para todo $z \in \mathcal{A}_{z_0,\,b}$ com $|z-z_0| < r_1$. Sabemos que $S(z) = e^{-\ln(z-z_0)\Gamma}\Phi(z)$. Logo, com $|z-z_0| < r_1$,

$$\|S(z)\| \;\le\; \|\Phi(z)\|\,\left\|e^{-\ln(z-z_0)\Gamma}\right\| \;\le\; \frac{d}{|z-z_0|^C}\,\left\|e^{-\ln(z-z_0)\Gamma}\right\| \,. \tag{14.79}$$

Vamos agora concentrar-nos em $\left\|e^{-\ln(z-z_0)\Gamma}\right\|$. Como é fácil de se ver, vale para qualquer matriz B e qualquer número complexo β

$$\left\|e^{\beta B}\right\| \;=\; \left\|\mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta^k}{k!}B^k\right\| \;\le\; 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\beta|^k}{k!}\|B^k\| \;\le\; 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\beta|^k}{k!}\|B\|^k \;=\; e^{|\beta|\,\|B\|} \,.$$

E. 14.29 *Exercício*. Complete os detalhes. ✣

Para qualquer número complexo $w = |w|e^{i\phi}$, tem-se $\ln w = \ln|w| + i\phi$ (vide nota-de-rodapé 10, à página 756) e, portanto, $|\ln w|^2 = (\ln|w|)^2 + (\phi)^2 \le (|\ln|w|| + |\phi|)^2$. Logo, $|\ln w| \le |\ln|w|| + |\phi| \le |\ln|w|| + \pi$. Se $|w| < 1$ isso pode ser escrito como

$$|\ln w| \;\le\; -\ln|w| + \pi \,.$$

Assim, escolhendo $|z-z_0| < 1$, teremos

$$\left\|e^{-\ln(z-z_0)\Gamma}\right\| \;\le\; e^{|\ln(z-z_0)|\,\|\Gamma\|} \;=\; \left(e^{|\ln(z-z_0)|}\right)^{\|\Gamma\|} \;\le\; \left(e^{-\ln|z-z_0|}\,e^{\pi}\right)^{\|\Gamma\|} \;=\; \frac{e^{\pi\|\Gamma\|}}{|z-z_0|^{\|\Gamma\|}} \,.$$

Retornando a (14.79), concluímos que para $|z-z_0| < r_1$ e $|z-z_0| < 1$, tem-se

$$\|S(z)\| \;\le\; \frac{d'}{|z-z_0|^p} \,,$$

onde $p := C + \|\Gamma\| \ge 0$ e $d' = de^{\pi\|\Gamma\|}$. Logo, por (14.76), vale para cada elemento de matriz $S(z)_{ab}$ de $S(z)$

$$\lim_{z\to z_0}|z-z_0|^p\,|S(z)_{ab}| \;\le\; d' \,,$$

sendo, portanto, finito. Isso implica que para qualquer inteiro k maior que p tem-se que a matriz $(z-z_0)^k S(z)$ é analítica em z_0, implicando que $S(z)$ tem uma singularidade tipo pólo em z_0. ■

• **Um comentário**

A recíproca do Teorema 14.1 não é verdadeira: um contraexemplo (de [472]) sendo o caso em que

$$A(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2z^{-2} & 0 \end{pmatrix} ,$$

que claramente tem um pólo de ordem dois em $z_0 = 0$. Não se trata, portanto, de uma singularidade simples. Para esse caso, porém, tem-se, para todo $z,\ z_1 \in \mathcal{A}_{z_0,\,b}$,

$$D(z,\ z_1) \;=\; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2z^{-1}z_1 + z^2 z_1^{-2} & z^2 z_1^{-1} - z^{-1} z_1^2 \\ & \\ 2(z z_1^{-2} - z^{-2} z_1) & 2 z z_1^{-1} + z^{-2} z_1^2 \end{pmatrix} .$$

Claramente $z_0 = 0$ é um ponto singular regular, já que $D(z,\ z_1)$ tem um pólo de ordem 2 em $z_0 = 0$.

E. 14.30 *Exercício*. Para A e D dados acima, verifique que $\frac{\partial}{\partial z} D(z,\ z_1) = A(z) D(z,\ z_1)$ e que $D(z_1,\ z_1) = \mathbb{1}$. Verifique que a matriz de monodromia de $D(z,\ z_1)$ é $\mathbb{1}$. ✠

• **A forma geral das soluções no caso de singularidades simples**

A conclusão mais importante do Teorema 14.1, página 760, diz respeito à forma geral das soluções de equações com pontos singulares simples. Resumimos tudo no seguinte teorema.

Teorema 14.2 *Seja a equação $Y'(z) = A(z)Y(z)$ com $A(z)$ matriz $m \times m$ analítica no anel $\mathcal{A}_{z_0,\,b}$ (para algum $b > 0$), z_0 sendo um ponto singular simples dessa equação diferencial, ou seja, $A_0(z) := (z - z_0)A(z)$ é analítica em z_0. Seja como antes $D(z,\ z_1)$, $z,\ z_1 \in \mathcal{A}_{z_0,\,b}$, uma matriz fundamental dessa equação com matriz de monodromia $M = e^{2\pi i \Gamma}$. Então, para z_1 fixo, $D(z,\ z_1)$ é da forma $D(z,\ z_1) = e^{\ln(z-z_0)\Gamma}\, S(z)$, onde $S(z)$ é analítica no anel $\mathcal{A}_{z_0,\,b}$ e tem no máximo uma singularidade tipo pólo em z_0. Isso significa que $S(z)$ é da forma $S(z) = (z - z_0)^{-l} S_0(z)$, para algum inteiro $l \geq 0$, onde S_0 é analítica em z_0. Com isso, definindo $\Gamma' = \Gamma - l\mathbb{1}$, concluímos que $D(z,\ z_1)$ é da forma*

$$D(z,\ z_1) \;=\; e^{\ln(z-z_0)\Gamma'}\, S_0(z) \,, \tag{14.80}$$

Consequentemente, cada elemento de matriz $D(z,\ z_1)_{pq}$, para z_1 fixo, é da forma

$$D(z,\ z_1)_{pq} \;=\; \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=1}^{m} (z - z_0)^{\gamma_l} (\ln(z - z_0))^k F_{pq}^{kl}(z) \,, \tag{14.81}$$

$p,\ q = 1,\ \ldots,\ m$, onde as funções $F_{pq}^{kl}(z)$ são analíticas em z_0, podendo, portanto, ser expressas por séries de Taylor centradas nesse ponto. As constantes complexas γ_l são os autovalores de Γ'. Os termos com $k = 0$ são não-nulos. □

14.7 Sistemas Provenientes de EDOs de Ordem m

Considere-se a equação diferencial linear homogênea complexa de ordem m

$$y^{(m)}(z) + a_{m-1}(z) y^{(m-1)}(z) + \cdots a_1(z) y'(z) + a_0(z) y(z) \;=\; 0 \,, \tag{14.82}$$

onde as m funções $a_0,\ \ldots,\ a_{m-1}$ são analíticas em um domínio aberto simplesmente conexo comum $\mathcal{D}$. É fácil constatar (faça!) que essa equação equivale ao sistema

$$Y'(z) \;=\; A(z) Y(z) \,,$$

onde

$$Y(z) \;:=\; \begin{pmatrix} y(z) \\ y'(z) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(z) \end{pmatrix} \tag{14.83}$$

e $A(z)$ é a matriz $m \times m$

$$A(z) \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & & & \\ -a_0(z) & -a_1(z) & -a_2(z) & \cdots & -a_{m-2}(z) & -a_{m-1}(z) \end{pmatrix} , \tag{14.84}$$

a qual é analítica em $\mathcal{D}$, por assim o serem as funções $a_0,\ \ldots,\ a_{m-1}$, em cujo caso aplicam-se as conclusões supra-citadas, ou seja, a solução $y(z)$ é igualmente analítica em $\mathcal{D}$. Para futura referência coletamos essa conclusão no seguinte teorema

Teorema 14.3 *Seja a equação diferencial linear homogênea complexa de ordem m*

$$y^{(m)}(z) + a_{m-1}(z) y^{(m-1)}(z) + \cdots a_1(z) y'(z) + a_0(z) y(z) \;=\; 0$$

e suponhamos que as funções $a_0,\ \ldots,\ a_{m-1}$ são todas analíticas em um domínio aberto e simplesmente conexo $\mathcal{D}$. Então, as soluções da equação são igualmente analíticas em $\mathcal{D}$. Em particular, se $\mathcal{D}$ contiver um disco aberto $\mathcal{D}_{z_0}^a := \{z \in \mathbb{C} |\ |z - z_0| < a\}$, centrado em z_0 e de raio $a > 0$, então as soluções da equação podem ser expressas em termos de uma série de potências

$$y(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, (z - z_0)^n \,,$$

a qual converge (absolutamente) pelo menos no disco aberto $\mathcal{D}_{z_0}^a$, ou seja, pelo menos para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| < a$. □

14.7.1 Pontos Singulares Simples em EDO's de Ordem m

• **Introdução e motivação**

Seja o sistema de equações $Y'(z) = A(z)Y(z)$ procedente de uma EDO linear complexa homogênea de ordem m como (14.82), com $Y(z)$ como em (14.83) e $A(z)$ dada em (14.84), definida em um domínio $\mathcal{D}$ do plano complexo. Seja também $z_0 \in \mathcal{D}$.

Vamos supor que z_0 seja um **ponto singular** de $A(z)$, ou seja, $A(z)$ não é analítica em $z = z_0$. É bastante claro que se as funções $a_k(z)$, $k = 0, \ldots, m-1$, tiverem no máximo um pólo de ordem 1 em $z_0 = 0$, ou seja, se as funções $(z-z_0)a_k(z)$, $k = 0, \ldots, m-1$, forem todas analíticas em z_0, então z_0 será um ponto singular regular de $Y'(z) = A(z)Y(z)$, pois, teremos $Y'(z) = (z-z_0)^{-1}A_0(z)Y(z)$, onde $A_0(z) := (z-z_0)A(z)$ é analítica em z_0. Assim, nesse caso, valeriam todas as importantes conclusões a que chegamos na Seção 14.6.4, página 760, especialmente aquelas expressas no Teorema 14.2, página 763.

Sucede que há condições ainda menos restritivas sobre as funções $a_k(z)$, $k = 0, \ldots, m-1$, para as quais as importantes conclusões sobre a forma geral da solução, expressas no Teorema 14.2, também se aplicam. A saber, tal é o caso se as funções $(z-z_0)^{m-k}a_k(z)$, $k = 0, \ldots, m-1$, forem todas analíticas em z_0, ou seja, se cada função $a_k(z)$ tiver no máximo um pólo de ordem $m-k$ em z_0.

No que segue iremos primeiramente justificar as afirmativas do último parágrafo para depois extrair as conclusões pertinentes. Esse caminho nos conduzirá a uma noção mais abrangente do conceito de *ponto singular simples de equações diferenciais lineares complexas homogêneas de ordem m* como (14.82).

• **A noção de ponto singular simples para EDOs de ordem m**

Seja então $Y'(z) = A(z)Y(z)$ com $Y(z)$ como em (14.83) e com $A(z)$ dada em (14.84), definida em um domínio aberto e simplesmente conexo $\mathcal{D}$ com $z_0 \in \mathcal{D}$. Vamos definir um novo vetor coluna

$$\tilde{Y}(z) \;:=\; E(z)Y(z)\;,$$

onde $E(z)$ é a matriz diagonal $m \times m$

$$E(z) \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (z-z_0) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (z-z_0)^2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (z-z_0)^{m-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (z-z_0)^{m-1} \end{pmatrix}, \tag{14.85}$$

ou seja, $E(z)$ é a matriz diagonal com $E(z)_{kk} = (z-z_0)^{k-1}$, $1 \le k \le m$.

O porquê de procedermos essa mudança de Y para $\tilde{Y}$ por meio dessa matriz E ficará claro logo abaixo. Diferenciando-

se $\tilde{Y}(z)$, teremos, para $z \neq z_0$,

$$\begin{aligned} \tilde{Y}'(z) &= E(z)Y'(z) + E'(z)Y(z) \\ &= E(z)A(z)Y(z) + E'(z)E(z)^{-1}\tilde{Y}(z) \\ &= E(z)A(z)E(z)^{-1}\tilde{Y}(z) + E'(z)E(z)^{-1}\tilde{Y}(z)\;, \end{aligned}$$

ou seja, definindo

$$\tilde{A}(z) \;:=\; (z-z_0)\Big[E(z)A(z)E(z)^{-1} + E'(z)E(z)^{-1}\Big]\;, \tag{14.86}$$

obtemos,

$$\tilde{Y}'(z) \;=\; (z-z_0)^{-1}\tilde{A}(z)\tilde{Y}(z)\;. \tag{14.87}$$

Para prosseguirmos (e para finalmente entendermos por que fizemos a mudança de Y para $\tilde{Y}$), é muito importante calcularmos explicitamente a matriz $\tilde{A}(z)$ definida acima.

E. 14.31 *Exercício muito importante*. Calcule explicitamente a matriz $\tilde{A}(z)$ definida acima. Use (14.86), (14.84) e (14.85). ✠

O resultado é

$$\tilde{A}(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & m-3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m-2 & 1 \\ b_0(z) & b_1(z) & b_2(z) & \cdots & b_{m-3}(z) & b_{m-2}(z) & b_{m-1}(z) \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} b_0(z) &:= -(z-z_0)^m\ a_0(z)\,, \\ b_1(z) &:= -(z-z_0)^{m-1}\ a_1(z)\,, \\ b_2(z) &:= -(z-z_0)^{m-2}\ a_2(z)\,, \\ &\vdots \\ b_{m-2}(z) &:= -(z-z_0)^2\ a_{m-2}(z)\,, \\ b_{m-1}(z) &:= -(z-z_0)a_{m-1}(z) \ + \ (m-1)\,. \end{aligned}$$

Como exemplo, tem-se no caso de particular interesse físico das equações de segunda ordem

$$y''(z) + a_1(z)\,y'(z) + a_0(z)\,y(z) \ = \ 0$$

que $E(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z-z_0 \end{pmatrix}$, $\tilde{Y}(z) = \begin{pmatrix} y(z) \\ \\ (z-z_0)y'(z) \end{pmatrix}$, e

$$\tilde{Y}'(z) \ = \ (z-z_0)^{-1}\tilde{A}(z)\tilde{Y}(z), \quad \text{com} \quad \tilde{A}(z) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \\ -(z-z_0)^2 a_0(z) & -(z-z_0)a_1(z)+1 \end{pmatrix}.$$

De volta ao caso geral, vemos que se as funções $b_k(z)$, $0 \le k \le m-1$, forem todas analíticas em torno de z_0, então $\tilde{A}(z)$ será analítica em torno de z_0 e, portanto, o sistema (14.87) será um sistema com um ponto singular simples em z_0. Coloquemos, assim, a seguinte definição:

Definição. Seja a equação diferencial linear homogênea complexa de ordem m

$$y^{(m)}(z) + a_{m-1}(z)y^{(m-1)}(z) + \cdots a_1(z)y'(z) + a_0(z)y(z) \ = \ 0\,. \tag{14.88}$$

Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é dito ser um *ponto singular simples*, ou *ponto singular regular* dessa equação se pelo menos uma das funções $a_k(z)$ for singular em z_0 mas de modo que todas as funções $(z-z_0)^{m-k}a_k(z)$, $k = 0,\ \ldots,\ m-1$, sejam analíticas em z_0. ♠

Isso significa que cada função $a_k(z)$ ou é analítica em z_0 ou tem um pólo em z_0 cuja ordem deve no máximo ser $m-k$, sendo que supostamente pelo menos uma das funções $a_k(z)$ é singular em z_0. Assim, um ponto z_0 é um ponto singular simples se $A(z)$ não for analítica em $z = z_0$, mas se $\tilde{A}(z)$ for analítica em $z = z_0$.

Assim, por exemplo, dizemos que z_0 é um *ponto singular simples da equação de segunda ordem* (ou seja, para $m = 2$) dada por $y''(z) + a_1(z)\,y'(z) + a_0(z)\,y(z) = 0$ se $a_0(z)$ tiver um pólo de ordem no máximo 2 em z_0 **ou** se $a_1(z)$ tiver um pólo de ordem no máximo 1 em z_0, ou ambos. Vários exemplos são apresentados e discutidos na Seção 14.7.3.

No caso de z_0 ser um ponto singular simples de uma equação como (14.88), aplicam-se os resultados da Seção 14.6.4, página 760, às soluções de (14.87). Discutiremos adiante as implicações deste fato.

• **Soluções de equações com pontos singulares simples**

Unindo as observações acima com o Teorema 14.2 chegamos à seguinte importante conclusão.

Teorema 14.4 *Seja a equação diferencial linear homogênea complexa de ordem m*

$$y^{(m)}(z) + a_{m-1}(z)y^{(m-1)}(z) + \cdots a_1(z)y'(z) + a_0(z)y(z) \ = \ 0$$

e seja z_0 um ponto singular simples dessa equação, ou seja pelo menos uma das funções $a_k(z)$ é singular em z_0 mas de modo que todas as funções $(z-z_0)^{m-k}a_k(z)$, $k = 0,\ \ldots,\ m-1$, sejam analíticas em z_0. Então, as soluções da equação diferencial são combinações lineares de soluções da forma

$$y_{\gamma,\,k}(z) \ = \ (z-z_0)^{\gamma}(\ln(z-z_0))^k f_{\gamma,\,k}(z)\,,$$

para certos $\gamma \in \mathbb{C}$, $k = 0,\ \ldots,\ m-1$ e $f_{\gamma,\,k}$ analítica em torno de z_0.

Por fim, pela observação importante da página 758, sempre há pelo menos uma solução que não envolve potências de $\ln(z-z_0)$, ou seja, há sempre pelo menos uma solução com $k = 0$. □

• **A equação de Euler**

Um exemplo-protótipo de uma equação com um ponto singular simples é a *equação de Euler* de ordem m:

$$z^m y^{(m)}(z) + z^{m-1}b_{m-1}y^{(m-1)}(z) + \cdots zb_1y'(z) + b_0y(z) \ = \ 0\,,$$

onde $b_{m-1},\ \ldots,\ b_0$ são constantes. Nesse caso tem-se

$$a_{m-1}(z) \ = \ \frac{b_{m-1}}{z}\,, \quad a_{m-2}(z) \ = \ \frac{b_{m-2}}{z^2}\,, \quad \ldots, \quad a_0(z) \ = \ \frac{b_0}{z^m}$$

e, claramente, essa equação possui um ponto singular simples em $z_0 = 0$. No caso $m = 2$ a equação de Euler é

$$z^2y''(z) + zb_1y'(z) + b_0y(z) \ = \ 0\,,$$

cujas soluções são, caso $(1-b_1)^2 - 4b_0 \neq 0$,

$$y(z) \ = \ \alpha z^{\gamma_+} + \beta z^{\gamma_-}\,, \tag{14.89}$$

onde

$$\gamma_\pm \ = \ \frac{1-b_1 \pm \sqrt{(1-b_1)^2 - 4b_0}}{2}$$

ou, caso $(1-b_1)^2 - 4b_0 = 0$,

$$y(z) \ = \ \alpha z^{\gamma_0} + \beta\ln(z)\,z^{\gamma_0} \tag{14.90}$$

onde

$$\gamma_0 \ = \ \frac{1-b_1}{2}\,.$$

Acima, α e β são constantes arbitrárias. Essas soluções ilustram as afirmações do Teorema 14.4.

E. 14.32 *Exercício importante.* Verifique todas as afirmações feitas acima. ♣

• **Um teorema de Fuchs**

Há um importante teorema, devido a Fuchs, que estabelece uma recíproca do Teorema 14.4: se toda solução da equação

$$y^{(m)}(z) + a_{m-1}(z)y^{(m-1)}(z) + \cdots + a_1(z)y'(z) + a_0(z)y(z) \ = \ 0 \tag{14.91}$$

for uma combinação linear de funções da forma $(z-z_0)^{\gamma}(\ln(z-z_0))^k f_{\gamma,\,k}(z)$, para certos $\gamma \in \mathbb{C}$, $k = 0,\ \ldots,\ m-1$ e $f_{\gamma,\,k}$ analíticas em torno de z_0, então z_0 é um ponto singular simples de (14.91), ou seja, todas as funções $(z-z_0)^{m-k}a_k(z)$, $k = 0,\ \ldots,\ m-1$, são analíticas em z_0. Uma demonstração pode ser encontrada em [472].

14.7.2 Singularidades no Infinito

Seja a equação diferencial linear homogênea complexa de ordem m

$$y^{(m)}(z) + a_{m-1}(z)y^{(m-1)}(z) + \cdots a_1(z)y'(z) + a_0(z)y(z) \;=\; 0\,.$$

Em muitas situações deseja-se estudar o comportamento dessas equações e suas soluções para $|z|$ tendendo a infinito e, para tal, presta-se muitas vezes estudar propriedades das soluções como funções de $1/z$. Com isso poderíamos, por exemplo, perguntar-nos se a solução pode ser expressa em termos de uma série de potências em $1/z$ etc., e usar os métodos já discutidos para obter essa expansão, caso ela exista, e, dessa forma, conhecer a solução para $|z|$ grande.

Por simplicidade limitaremos nossa discussão a equações de segunda ordem[14]

$$y''(z) + a_1(z)\,y'(z) + a_0(z)\,y(z) \;=\; 0\,. \tag{14.92}$$

Façamos a mudança de variáveis $w = 1/z$. Definindo $u(w) = y(z) = y(1/w)$, teremos

$$u''(w) + \left(\frac{2}{w} - \frac{a_1(1/w)}{w^2}\right)u'(w) + \frac{a_0(1/w)}{w^4}\,u(w) \;=\; 0\,. \tag{14.93}$$

E. 14.33 *Exercício*. Confira. ✣

Chamaremos essa equação "versão no infinito" da equação (14.92). Claramente essa equação equivale a

$$U'(w) \;=\; C(w)U(w)\,,$$

com

$$U(w) \;:=\; \begin{pmatrix} u(w) \\ u'(w) \end{pmatrix}, \qquad C(w) \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c_0(w) & -c_1(w) \end{pmatrix},$$

onde

$$c_0(w) \;:=\; \frac{a_0(1/w)}{w^4},$$

$$c_1(w) \;:=\; \frac{2}{w} - \frac{a_1(1/w)}{w^2}\,.$$

Analogamente ao que fizemos anteriormente, podemos transformar esse sistema no sistema equivalente

$$\tilde{U}'(w) \;=\; \frac{1}{w}\tilde{C}(w)\tilde{U}(w)\,,$$

onde

$$\tilde{U}(w) \;:=\; E(w)U(w), \qquad \tilde{C}(w) \;:=\; w\left[E(w)C(w)E(w)^{-1} + E'(w)E(w)^{-1}\right]\,,$$

com $E(w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$, $\tilde{U}(w) = \begin{pmatrix} u(w) \\ wu'(w) \end{pmatrix}$ e

$$\tilde{C}(w) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w^2c_0(w) & -wc_1(w)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{a_0\left(\frac{1}{w}\right)}{w^2} & -1 + \dfrac{a_1\left(\frac{1}{w}\right)}{w} \end{pmatrix}.$$

Por analogia com nossas noções prévias, façamos as seguintes definições:

[14] Para uma discussão mais geral, vide [472] ou [236].

1. Diremos que a equação (14.92) é uma *equação analítica no infinito* se $C(w)$ for analítica em torno de $w = 0$.
2. Diremos que a equação (14.92) tem uma *singularidade no infinito* se $C(w)$ não for analítica em torno de $w = 0$.
3. Diremos que a equação (14.92) tem uma *singularidade simples no infinito* (ou que $z_0 = \infty$ é um ponto singular simples de (14.92)) se $C(w)$ não for analítica em torno de $w = 0$ mas $\tilde{C}(w)$ o for, ou seja, se $c_0(w)$ tiver um pólo de ordem no máximo 2 em $w = 0$ **ou** se $c_1(w)$ tiver um pólo de ordem no máximo 1 em $w = 0$, ou ambos.

Vários exemplos são discutidos na Seção 14.7.3.

14.7.3 Alguns Exemplos de Interesse

Nesta seção analisaremos algumas equações diferenciais de importância na Física-Matemática previamente mencionadas na Seção 12.1.2, página 681, à luz do que discutimos neste capítulo.

E. 14.34 *Exercício importante*. Complete os detalhes de todos os cálculos apresentados nos exemplos que seguem. ✣

1. A **equação de segunda ordem com coeficientes constantes**

$$y''(z) + by'(z) + cy(z) \;=\; 0\,,$$

onde b e c são constantes, corresponde a

$$A(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix}.$$

Assim, a equação é regular em todo $z_0 \in \mathbb{C}$.

Ponto no infinito. A versão no infinito da equação de segunda ordem com coeficientes constantes é

$$u''(w) + \left(\frac{2}{w} - \frac{b}{w^2}\right)u'(w) + \frac{c}{w^4}\,u(w) \;=\; 0\,.$$

Claramente, $z_0 = \infty$ é um ponto singular irregular da equação de segunda ordem com coeficientes constantes, exceto no caso em que $b = c = 0$, onde $z_0 = \infty$ é um ponto singular regular.

2. A **equação de Euler**

$$z^2\,y''(z) + az\,y'(z) + b\,y(z) \;=\; 0\,,$$

ou seja,

$$y''(z) + \frac{a}{z}\,y'(z) + \frac{b}{z^2}\,y(z) \;=\; 0\,,$$

onde a e b são constantes, corresponde a

$$A(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{b}{z^2} & -\dfrac{a}{z} \end{pmatrix}.$$

Para $z_0 = 0$ tem-se

$$\tilde{A}(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a+1 \end{pmatrix}.$$

Assim, $z_0 = 0$ é um ponto singular simples da equação de Euler, exceto se $a = b = 0$, em cujo caso $z_0 = 0$ é um ponto regular.

Ponto no infinito. A versão no infinito da equação de Euler é

$$u''(w) + \frac{2-a}{w}\, u'(w) + \frac{b}{w^2}\, u(w) \;=\; 0\,.$$

Claramente, $z_0 = \infty$ é um ponto singular simples da equação de Euler, exceto se $a = 2$ e $b = 0$, em cujo caso $z_0 = \infty$ é um ponto regular.

3. A **equação de Bessel**

$$z^2\, y''(z) + z\, y'(z) + (z^2 - \nu^2)\, y(z) \;=\; 0\,,$$

ou seja,

$$y''(z) + \frac{1}{z}\, y'(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y(z) \;=\; 0\,,$$

onde $\nu \in \mathbb{R}$, corresponde a

$$A(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\nu^2}{z^2} - 1 & -\dfrac{1}{z} \end{pmatrix}.$$

Para $z_0 = 0$ tem-se

$$\tilde{A}(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \nu^2 - z^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, $z_0 = 0$ é um ponto singular simples da equação de Bessel.

Ponto no infinito. A versão no infinito da equação de Bessel é

$$u''(w) + \frac{1}{w}\, u'(w) + \left(\frac{1}{w^4} - \frac{\nu^2}{w^2}\right) u(w) \;=\; 0.$$

Claramente, c_0 tem um pólo de ordem 4 em $w = 0$. Assim, $z_0 = \infty$ é um ponto singular <u>irregular</u> da equação de Bessel.

4. A **equação de Legendre**

$$(1 - z^2)\, y''(z) - 2z\, y'(z) + \lambda(\lambda+1)\, y(z) \;=\; 0,$$

ou seja,

$$y''(z) - \frac{2z}{1-z^2}\, y'(z) + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-z^2}\, y(z) \;=\; 0,$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$, corresponde a

$$A(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{\lambda(\lambda+1)}{1-z^2} & \dfrac{2z}{1-z^2} \end{pmatrix}.$$

Claramente percebe-se que a equação de Legendre é analítica no domínio simplesmente conexo $\mathcal{D}$ formado pelo disco aberto de raio 1: $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\}$. Concluímos que as soluções da equação de Legendre são analíticas nesse domínio $\mathcal{D}$.

Os pontos $z_0 = \pm 1$ são pontos singulares da equação de Legendre.

Para $z_0 = 1$ teremos

$$\tilde{A}(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\lambda(\lambda+1)(z-1)}{1+z} & \dfrac{1-z}{1+z} \end{pmatrix},$$

que é analítica em $z_0 = 1$.

Para $z_0 = -1$ teremos

$$\tilde{A}(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\lambda(\lambda+1)(z+1)}{z-1} & \dfrac{1+z}{1-z} \end{pmatrix},$$

que é analítica em $z_0 = -1$.

Vemos então que os pontos $z_0 = \pm 1$ são pontos singulares simples da equação de Legendre.

Ponto no infinito. A versão no infinito da equação de Legendre é

$$u''(w) + \left(\frac{2w}{w^2-1}\right) u'(w) + \frac{1}{w^2}\left(\frac{\lambda(1+\lambda)}{w^2-1}\right) u(w) \;=\; 0\,.$$

Claramente, $z_0 = \infty$ é um ponto singular simples da equação de Legendre.

5. A **equação de Hermite**

$$y''(z) - 2z\, y'(z) + \lambda\, y(z) \;=\; 0\,,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$, corresponde a

$$A(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 2z \end{pmatrix}.$$

Concluímos que a equação de Hermite é analítica em todo o plano complexo, assim sendo também as suas soluções.

Ponto no infinito. A versão no infinito da equação de Hermite é

$$u''(w) + \left(\frac{2}{w} + \frac{2}{w^3}\right) u'(w) + \frac{\lambda}{w^4}\, u(w) \;=\; 0\,.$$

Claramente, c_0 tem um pólo de ordem 4 em $w = 0$ e c_1 tem um pólo de ordem 3 em $w = 0$. Assim, $z_0 = \infty$ é um ponto singular <u>irregular</u> da equação de Hermite.

6. A **equação de Airy**

$$y''(z) - z\, y(z) \;=\; 0\,.$$

corresponde a

$$A(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix}.$$

Concluímos que a equação de Airy é analítica em todo o plano complexo, assim sendo também as suas soluções.

Ponto no infinito. A versão no infinito da equação de Airy é

$$u''(w) + \frac{2}{w}\, u'(w) - \frac{1}{w^5}\, u(w) \;=\; 0\,.$$

Claramente, c_0 tem um pólo de ordem 5 em $w = 0$. Assim, $z_0 = \infty$ é um ponto singular <u>irregular</u> da equação de Airy.

7. A **equação de Laguerre**

$$zy''(z) + (1-z)\,y'(z) + \lambda\,y(z) \;=\; 0\,,$$

ou seja,

$$y''(z) + \left(\frac{1}{z} - 1\right)\,y'(z) + \frac{\lambda}{z}\,y(z) \;=\; 0\,,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$, corresponde a

$$A(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{\lambda}{z} & 1 - \dfrac{1}{z} \end{pmatrix}.$$

Para $z_0 = 0$ teremos

$$\tilde{A}(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda z & z \end{pmatrix}.$$

Assim, $z_0 = 0$ é um ponto singular simples da equação de Laguerre.

Ponto no infinito. A versão no infinito da equação de Laguerre é

$$u''(w) + \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w^2}\right)\,u'(w) + \frac{\lambda}{w^3}\,u(w) \;=\; 0\,.$$

Claramente, c_0 tem um pólo de ordem 3 em $w = 0$ e c_1 tem um pólo de ordem 2 em $w = 0$. Assim, $z_0 = \infty$ é um ponto singular irregular da equação de Laguerre.

8. A **equação de Tchebychev**

$$(1-z^2)\,y''(z) - z\,y'(z) + \lambda^2\,y(z) \;=\; 0\,,$$

ou seja,

$$y''(z) - \frac{z}{1-z^2}\,y'(z) + \frac{\lambda^2}{1-z^2}\,y(z) \;=\; 0\,,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$, corresponde a

$$A(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{\lambda}{1-z^2} & \dfrac{z}{1-z^2} \end{pmatrix}.$$

Claramente percebe-se que a equação de Tchebychev é analítica no domínio simplesmente conexo $\mathcal{D}$ formado pelo disco aberto de raio 1: $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\}$. Concluímos que as soluções da equação de Tchebychev são analíticas nesse domínio $\mathcal{D}$.

Os pontos $z_0 = \pm 1$ são pontos singulares da equação de Tchebychev.

Para $z_0 = 1$ teremos

$$\tilde{A}(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\lambda(z-1)}{1+z} & \dfrac{1}{1+z} \end{pmatrix},$$

que é analítica em $z_0 = 1$.

Para $z_0 = -1$ teremos

$$\tilde{A}(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\lambda(z+1)}{z-1} & \dfrac{1}{1-z} \end{pmatrix},$$

que é analítica em $z_0 = -1$.

Vemos então que os pontos $z_0 = \pm 1$ são pontos singulares simples da equação de Tchebychev.

Ponto no infinito. A versão no infinito da equação de Tchebychev é

$$u''(w) + \frac{1}{w}\left(2 - \frac{1}{1-w^2}\right)\,u'(w) + \frac{1}{w^2}\left(\frac{\lambda^2}{w^2-1}\right)\,u(w) \;=\; 0\,.$$

Claramente, $z_0 = \infty$ é um ponto singular simples da equação de Tchebychev.

9. A **equação hipergeométrica**

$$z(1-z)\,y''(z) + [c - (1+a+b)z]\,y'(z) - ab\,y(z) \;=\; 0\,, \tag{14.94}$$

ou seja,

$$y''(z) + \left(\frac{c-(1+a+b)z}{z(1-z)}\right)\,y'(z) - \frac{ab}{z(1-z)}\,y(z) \;=\; 0,$$

com a, b, c constantes, corresponde a

$$A(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{ab}{z(1-z)} & \dfrac{(1+a+b)z-c}{z(1-z)} \end{pmatrix}.$$

Seus pontos singulares são $z_0 = 0$ e $z_0 = 1$.

Para $z_0 = 0$ teremos

$$\tilde{A}(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{abz}{1-z} & \dfrac{(a+b)z-c+1}{1-z} \end{pmatrix},$$

que é analítica em $z_0 = 0$.

Para $z_0 = 1$ teremos

$$\tilde{A}(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{ab(z-1)}{z} & \dfrac{-(a+b)z+c}{z} \end{pmatrix},$$

que é analítica em $z_0 = 1$.

Assim, $z_0 = 0$ e $z_0 = 1$ são pontos singulares simples da equação hipergeométrica.

Ponto no infinito. A versão no infinito da equação hipergeométrica é

$$u''(w) + \frac{1}{w}\left(\frac{(2-c)w+a+b-1}{w-1}\right)\,u'(w) - \frac{ab}{w^2(w-1)}\,u(w) \;=\; 0\,.$$

Claramente, $z_0 = \infty$ é um ponto singular simples da equação hipergeométrica.

10. A **equação hipergeométrica confluente**

$$z\,y''(z) + [c - z]\,y'(z) - a\,y(z) \;=\; 0,$$

ou seja,

$$y''(z) + \left(\frac{c}{z} - 1\right) y'(z) - \frac{a}{z}\,y(z) \;=\; 0\,,$$

com a, c constantes, corresponde a

$$A(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \\ \dfrac{a}{z} & 1 - \dfrac{c}{z} \end{pmatrix}.$$

Para $z_0 = 0$ teremos

$$\tilde{A}(z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \\ az & z - c + 1 \end{pmatrix},$$

que é analítica em $z_0 = 0$. Assim, $z_0 = 0$ é um ponto singular simples da equação de hipergeométrica confluente.

Ponto no infinito. A versão no infinito da equação hipergeométrica confluente é

$$u''(w) + \left(\frac{2-c}{w} + \frac{1}{w^2}\right) u'(w) - \frac{a}{w^3}\,u(w) \;=\; 0\,.$$

Claramente, c_0 tem um pólo de ordem 3 em $w = 0$ e c_1 tem um pólo de ordem 2 em $w = 0$. Assim, $z_0 = \infty$ é um ponto singular irregular da equação hipergeométrica confluente.

14.8 Equações Fuchsianas. Símbolos de Riemann

Nesta seção apresentaremos propriedades das chamadas *equações Fuchsianas* (definidas abaixo), mas nos restringiremos às equações de primeira e de segunda ordem por serem de maior interesse (especialmente as de segunda ordem). Para um tratamento mais abrangente, vide [236]. O estudo das equações Fuchsianas despertou grande interesse na Matemática da segunda metade do Século XIX e do início do Século XX, tendo alimentado muitos desenvolvimentos na teoria das funções de variáveis complexas.

Esta seção é dispensável para o estudo do material que segue nos capítulos seguintes, mas pode servir, em uma segunda leitura, para esclarecer a relevância das equações hipergeométricas no contexto das equações diferenciais lineares de segunda ordem no plano complexo.

• **Equações Fuchsianas**

Uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é dita ser uma *equação Fuchsiana*[15] se possuir um número finito de pontos singulares, todos simples (incluindo eventualmente, mas não necessariamente, um ponto singular simples no infinito). A equação Euler, a equação de Legendre e a equação hipergeométrica são exemplos de equações Fuchsianas (vide Seção 14.7.3, acima). Equações com tal propriedade podem ser resolvidas em torno de seus pontos singulares pelo método de Frobenius. Além disso, equações Fuchsianas possuem algumas propriedades de transformação que facilitam sua análise. Por exemplo, toda equação Fuchsiana de segunda ordem com exatamente três pontos singulares pode ser transformada em uma equação hipergeométrica (vide discussão da Seção 14.8.3.1, página 790). Equações Fuchsianas podem ser classificadas de forma mais ou menos sistemática de acordo com o número de singularidades e é nosso propósito fazer essa classificação de modo a obter a forma geral de equações Fuchsianas de primeira e de segunda ordem com uma, duas ou três singularidades (que, no caso de equações de segunda ordem, correspondem à maioria das equações encontradas em aplicações).

[15] Lazarus Immanuel Fuchs (1833–1902).

14.8.1 Equações Fuchsianas de Primeira Ordem

Como pré-aquecimento consideremos as equações de primeira ordem homogêneas. Seja a equação diferencial

$$y'(z) + a_0(z)\,y(z) \;=\; 0 \tag{14.95}$$

e sua versão no infinito

$$u'(w) + b_0(w)u(w) \;=\; 0\,, \tag{14.96}$$

onde $w = 1/z$, $u(w) = y(z) = y(1/w)$ e $b_0(w) := -\frac{a_0(1/w)}{w^2}$. No que segue vamos procurar a forma geral de uma tal equação que possua um certo número de singularidades, todas simples, ou seja, de modo que a equação seja Fuchsiana. Começamos nos perguntando se há equações sem quaisquer pontos singulares, nem no infinito.

• **Equações sem pontos singulares**

Se (14.95) não possui pontos singulares finitos, então $a_0(z)$ é uma função inteira de z (ou seja, é analítica em toda parte) e, portanto, possui uma série de Taylor centrada em 0: $a_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^{(n)} z^n$, convergente para todo $z \in \mathbb{C}$. Com isso vemos que

$$b_0(w) \;=\; -\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^{(n)} \frac{1}{w^{n+2}} \tag{14.97}$$

que converge para todo $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$. Para que (14.95) também não possua uma singularidade no infinito, é necessário e suficiente que b_0 seja analítica em 0. Isso só é possível se $\alpha_0^{(n)} = 0$ para todo n, ou seja, se a_0 for identicamente nula. Assim, a equação $y'(z) = 0$, cuja versão no infinito é $u'(w) = 0$, é a única equação diferencial de primeira ordem sem qualquer singularidade. Como veremos na Seção 14.8.2, não há equações de segunda ordem com essa característica.

• **Equações com apenas um ponto singular simples no infinito**

De (14.97) vemos também que não existem equações de primeira ordem que sejam regulares em toda parte mas possuam uma singularidade simples no infinito. De fato, vemos por (14.97) que b_0 tem um pólo de ordem maior ou igual a dois em $w = 0$ e não de primeira ordem, como seria necessário para que a singularidade no infinito fosse simples.

• **Equações Fuchsianas de primeira ordem. Caso geral**

Consideremos agora o caso geral em que (14.95) é Fuchsiana e seus pontos singulares finitos são um subconjunto de $\{z_1, \ldots, z_k\}$ formado por $k \geq 1$ pontos distintos. Isso significa que $a_0(z)$ tem no máximo um pólo de ordem 1 nos pontos $z_1, \ldots z_k$ com $k \geq 1$, sendo portanto da forma

$$a_0(z) \;=\; \frac{c_0(z)}{(z - z_1)\cdots(z - z_k)}\,,$$

onde c_0 é uma função inteira de z (para que um certo z_a seja de fato singular simples é necessário que c_0 não tenha um zero em z_a). Obtemos disso que

$$b_0(w) \;=\; -\frac{w^{k-2} c_0(1/w)}{(1 - wz_1)\cdots(1 - wz_k)}$$

Como função inteira, c_0 possui uma expansão de Taylor centrada em 0: $c_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_0^{(n)} z^n$, a qual converge para todo $z \in \mathbb{C}$. Assim, obtemos

$$b_0(w) \;=\; -\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_0^{(n)} \frac{1}{w^{n-k+2}}}{(1 - wz_1)\cdots(1 - wz_k)}\,. \tag{14.98}$$

Para que o ponto no infinito seja regular é necessário e suficiente que $b_0(w)$ seja analítica em $w = 0$. Pelo fato de $\frac{1}{(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)}$ ser analítica em $w = 0$, isso requer que $\gamma_0^{(n)} = 0$ para todo $n > k - 2$. Para $k = 1$ isso requer que a_0

e b_0 sejam identicamente nulas, não havendo, então, qualquer singularidade. Para $k \geq 2$ isso requer que $a_0(z)$ e $b_0(w)$ sejam da forma

$$a_0(z) \;=\; \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{k-2}\gamma_0^{(n)}z^n}{(z-z_1)\cdots(z-z_k)} \qquad \text{e} \qquad b_0(w) \;=\; -\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{k-2}\gamma_0^{(n)}\frac{1}{w^{n-k+2}}}{(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)} \;\overset{n\to k-2-n}{=}\; -\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{k-2}\gamma_0^{(k-2-n)}w^n}{(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)}\,.$$

Retornando a (14.98), para que o ponto no infinito seja singular simples é necessário que $b_0(w)$ tenha um pólo simples em $w=0$. Uma condição necessária e suficiente para tal é que $\gamma_0^{(n)}=0$ para todo $n>k-1$ com $\gamma_0^{(k-1)}\neq 0$. Nesse caso a_0 e b_0 são da forma

$$a_0(z) \;=\; \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1}\gamma_0^{(n)}z^n}{(z-z_1)\cdots(z-z_k)} \qquad \text{e} \qquad b_0(w) \;=\; -\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1}\gamma_0^{(n)}\frac{1}{w^{n-k+2}}}{(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)} \;\overset{n\to k-1-n}{=}\; -\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1}\gamma_0^{(k-1-n)}w^{n-1}}{(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)}\,,$$

ou seja

$$b_0(w) \;=\; -\frac{\dfrac{\gamma_0^{(k-1)}}{w}+\displaystyle\sum_{n=1}^{k-1}\gamma_0^{(k-1-n)}w^{n-1}}{(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)}\,.$$

• **Analisando alguns casos explícitos**

Analisemos o que ocorre concretamente para $k=1$ e $k=2$.

1. **Caso $k=1$.** Nessa situação a equação será analítica no infinito apenas se $\gamma_0^{(n)}=0$ para todo $n>-1$, ou seja, se c_0 for identicamente nula. Assim, a_0 e b_0 são também identicamente nulas e as equações reduzem-se a $y'(z)=0$ e $u'(w)=0$ e não há quaisquer singularidades.

   Para que (14.95) tenha uma singularidade simples no infinito e outra singularidade simples em z_1 devemos ter

$$a_0(z) \;=\; \frac{\gamma_0^{(0)}}{(z-z_1)} \qquad \text{e} \qquad b_0(w) \;=\; -\frac{\gamma_0^{(0)}}{w(1-wz_1)}\,.$$

   Assim, a única equação Fuchsiana de primeira ordem com uma singularidade simples em z_1 e uma singularidade simples no infinito é da forma

$$y'(z)+\frac{\gamma_0^{(0)}}{(z-z_1)}y(z) \;=\; 0\,, \quad \text{cuja versão no infinito é} \quad u'(w)-\frac{\gamma_0^{(0)}}{w(1-wz_1)}u(w) \;=\; 0\,. \tag{14.99}$$

2. **Caso $k=2$.** Para que a equação seja regular no infinito devemos ter $\gamma_0^{(n)}=0$ para todo $n>0$. Assim, nesse caso a_0 e b_0 serão da forma

$$a_0(z) \;=\; \frac{\gamma_0^{(0)}}{(z-z_1)(z-z_2)} \qquad \text{e} \qquad b_0(w) \;=\; -\frac{\gamma_0^{(0)}}{(1-wz_1)(1-wz_2)}\,.$$

   Assim, a forma geral de uma equação de primeira ordem regular no infinito e com exatamente dois pontos singulares simples em z_1 e z_2 é

$$y'(z)+\frac{\gamma_0^{(0)}}{(z-z_1)(z-z_2)}y(z) \;=\; 0\,, \;\text{ cuja versão no infinito é }\; u'(w)-\frac{\gamma_0^{(0)}}{(1-wz_1)(1-wz_2)}u(w) \;=\; 0.$$

   Para que a equação tenha um ponto singular simples no infinito devemos ter

$$a_0(z) \;=\; \frac{\gamma_0^{(0)}+\gamma_0^{(1)}z}{(z-z_1)(z-z_2)} \quad \text{e} \quad b_0(w) \;=\; -\frac{\gamma_0^{(0)}+\dfrac{\gamma_0^{(1)}}{w}}{(1-wz_1)(1-wz_2)}\,.$$

Concluímos que a forma geral de uma equação Fuchsiana com um ponto singular simples no infinito e no máximo dois pontos singulares simples em z_1 e $z_2\in\mathbb{C}$ é

$$y'(z)+\frac{\gamma_0^{(0)}+\gamma_0^{(1)}z}{(z-z_1)(z-z_2)}y(z) \;=\; 0\,, \qquad \text{cuja versão no infinito é} \qquad u'(w)-\frac{\gamma_0^{(1)}+\gamma_0^{(0)}w}{w(1-wz_1)(1-wz_2)}u(w) \;=\; 0\,.$$

Caso $\gamma_0^{(0)}=-\gamma_0^{(1)}z_2$ essas equações ficam

$$y'(z)+\frac{\gamma_0^{(1)}}{(z-z_1)}y(z) \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad u'(w)-\frac{\gamma_0^{(1)}}{w(1-wz_1)}u(w) \;=\; 0\,,$$

respectivamente, e agora z_2 não é mais uma singularidade da equação diferencial. Essas equações têm a mesma forma de (14.99), o que não é de surpreender, pois aqui temos apenas singularidades simples em z_1 e no infinito.

*

Para futura referência resumamos os resultados obtidos até o momento na forma de uma proposição.

Proposição 14.5 *Para a equação diferencial linear de primeira ordem no plano complexo*

$$y'(z)+a_0(z)y(z) \;=\; 0 \tag{14.100}$$

valem as seguintes afirmações:

I. *Para que (14.100) não tenha qualquer singularidade finita ou no infinito é necessário e suficiente que seja da forma $y'(z)=0$, cuja versão no infinito é $u'(w)=0$.*

II. *Não há equações Fuchsianas de primeira ordem como (14.100) que tenham apenas uma singularidade simples, finita ou no infinito.*

III. *Para que (14.100) seja Fuchsiana tendo uma singularidade simples em z_1 e outra no infinito é necessário e suficiente que seja da forma*

$$y'(z)+\frac{\gamma_0^{(0)}}{(z-z_1)}y(z) \;=\; 0\,, \quad \textit{cuja versão no infinito é} \quad u'(w)-\frac{\gamma_0^{(0)}}{w(1-wz_1)}u(w) \;=\; 0$$

com $\gamma_0^{(0)}\neq 0$.

IV. *Para que (14.100) seja Fuchsiana, tendo o infinito como ponto regular e no máximo k singularidades simples nos pontos $z_1,\ \ldots,\ z_k$ com $k\geq 2$, é necessário e suficiente que seja da forma*

$$y'(z)+\left(\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{k-2}\gamma_0^{(n)}z^n}{(z-z_1)\cdots(z-z_k)}\right)y(z) \;=\; 0\,, \quad \textit{cuja versão no infinito é} \quad u'(w)-\left(\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{k-2}\gamma_0^{(k-2-n)}w^n}{(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)}\right)u(w) \;=\; 0\,.$$

V. *Para que (14.100) seja Fuchsiana, tendo o infinito como ponto singular simples e no máximo k singularidades simples nos pontos $z_1,\ \ldots,\ z_k$ com $k\geq 2$, é necessário e suficiente que seja da forma*

$$y'(z)+\left(\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1}\gamma_0^{(n)}z^n}{(z-z_1)\cdots(z-z_k)}\right)y(z) \;=\; 0\,,$$

com $\gamma_0^{(k-1)} \neq 0$, *cuja versão no infinito é*

$$u'(w) - \left(\frac{\dfrac{\gamma_0^{(k-1)}}{w} + \displaystyle\sum_{n=1}^{k-1} \gamma_0^{(k-1-n)} w^{n-1}}{(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)} \right) u(w) \;=\; 0 \,.$$

□

14.8.2 Equações Fuchsianas de Segunda Ordem

Muito mais relevante que as equações Fuchsianas de primeira ordem são as equações Fuchsianas de segunda ordem, as quais estudaremos agora. Consideremos a equação diferencial linear de segunda ordem

$$y''(z) + a_1(z)\, y'(z) + a_0(z)\, y(z) \;=\; 0 \tag{14.101}$$

e sua versão no infinito

$$u''(w) + b_1(w)u'(w) + b_0(w)u(w) \;=\; 0 \tag{14.102}$$

(vide (14.92) e (14.93)), onde $w = 1/z$, $u(w) = y(z) = y(1/w)$ e

$$b_0(w) \;:=\; \frac{a_0(1/w)}{w^4} \,, \qquad b_1(w) \;:=\; \left(\frac{2}{w} - \frac{a_1(1/w)}{w^2} \right) \,. \tag{14.103}$$

No que segue vamos procurar a forma geral de uma tal equação que possua um certo número de singularidades, todas simples, ou seja, de modo que a equação seja Fuchsiana. Começamos nos perguntando se há equações sem quaisquer pontos singulares, nem no infinito.

• **Equações sem pontos singulares**

Se (14.101) não possuir pontos singulares finitos, então as funções a_0 e a_1 devem ser funções inteiras (analíticas em todo $\mathbb{C}$) e, portanto, possuem séries de Taylor centradas em 0

$$a_0(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^{(n)} z^n \,, \qquad a_1(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^{(n)} z^n$$

convergentes para todo $z \in \mathbb{C}$. Com isso, vemos que

$$b_0(w) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^{(n)} \frac{1}{w^{n+4}} \,, \qquad b_1(w) \;=\; \frac{2}{w} - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^{(n)} \frac{1}{w^{n+2}} \,,$$

onde as séries convergem para todo $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$. Trata-se claramente de séries de Laurent centradas em $w = 0$ para b_0 e b_1. Para que (14.101) também não possua uma singularidade no infinito, seria necessário que b_0 e b_1 fossem analíticas em 0. Para b_0 isso só seria possível se $\alpha_0^{(n)} = 0$ para todo n mas para b_1 não há como alcançar essa condição devido ao termo $\frac{2}{w}$ de sua expansão de Laurent, o qual não pode ser anulado por qualquer escolha dos coeficientes $\alpha_1^{(n)}$.

Concluímos disso que não existem equações diferenciais lineares de segunda ordem sem quaisquer pontos singulares finitos ou no infinito.

• **Equações com apenas um ponto singular simples no infinito**

Se (14.101) não tiver pontos singulares finitos, vimos que possuirá um ponto singular no infinito. Sob quais circunstâncias esse ponto no infinito é singular simples? Para tal é necessário que $b_0(w)$ tenha em $w = 0$ um pólo de ordem no máximo 2 e $b_1(w)$ tenha em $w = 0$ um pólo de ordem no máximo 1. Assim, concluímos que devemos ter $\alpha_0^{(n)} = \alpha_1^{(n)} = 0$ para todo n. Em um tal caso as funções a_0, a_1 e b_0 são identicamente nulas, enquanto que $b_1(w) = 2/w$.

Concluímos que a única equação diferencial de segunda ordem com apenas um ponto singular simples no infinito é a equação

$$y''(z) \;=\; 0 \,, \qquad \text{cuja versão no infinito é} \qquad u''(w) + \frac{2}{w} u'(w) \;=\; 0 \,. \tag{14.104}$$

• **Equações com apenas um ponto singular simples finito em $z = 0$**

Procuremos agora saber a forma geral de uma equação diferencial com apenas um ponto singular finito em $z = 0$ e regular no infinito. Em tal caso, $a_0(z)$ tem no máximo um pólo duplo em $z = 0$ e a_1 tem no máximo um pólo simples $z = 0$, esse sendo se único ponto singular. Assim, $a_0(z)$ e $a_1(z)$ tem as representações de Laurent

$$a_0(z) \;=\; \frac{\alpha_0^{(-2)}}{z^2} + \frac{\alpha_0^{(-1)}}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^{(n)} z^n \,, \qquad a_1(z) \;=\; \frac{\alpha_1^{(-1)}}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^{(n)} z^n$$

as quais convergem para todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Com isso, temos

$$b_0(w) \;=\; \frac{\alpha_0^{(-2)}}{w^2} + \frac{\alpha_0^{(-1)}}{w^3} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^{(n)} \frac{1}{w^{n+4}} \,, \qquad b_1(w) \;=\; \frac{2 - \alpha_1^{(-1)}}{w} - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^{(n)} \frac{1}{w^{n+2}} \,.$$

Para que o ponto no infinito seja regular é necessário que $b_0(w)$ e $b_1(w)$ sejam analíticas em $w = 0$. Como se constata das expansões de Laurent dadas acima dessas funções, isso requer que $\alpha_0^{(n)} = 0$ para todo $n \geq -2$, $\alpha_1^{(n)}$ para todo $n \geq 0$ e $\alpha_1^{(-1)} = 2$. Nesse caso as funções b_0 e b_1 são identicamente nulas, assim como a função a_0, sendo que $a_1(z) = 2/z$. Concluímos que a única equação diferencial que possui um único ponto singular simples finito em $z = 0$ e tem o infinito como ponto regular é a equação

$$y''(z) + \frac{2}{z} y'(z) \;=\; 0 \,, \qquad \text{cuja versão no infinito é} \qquad u''(w) \;=\; 0 \,. \tag{14.105}$$

Essa equação será generalizada em (14.109) para uma singularidade que não seja no ponto $z = 0$.

• **Equações Fuchsianas de segunda ordem. Caso geral**

Consideremos agora o caso geral em que (14.101) é Fuchsiana e seus pontos singulares finitos são um subconjunto de $\{z_1, \ldots, z_k\}$ formado por $k \geq 1$ pontos distintos. Isso significa que $a_0(z)$ tem no máximo um pólo de ordem 2 e $a_1(z)$ no máximo um pólo de ordem 1 nos pontos $z_1, \ldots z_k$ com $k \geq 1$. Assim, ambas são da forma

$$a_0(z) \;=\; \frac{c_0(z)}{(z-z_1)^2 \cdots (z-z_k)^2} \qquad \text{e} \qquad a_1(z) \;=\; \frac{c_1(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_k)} \,,$$

onde c_0 e c_1 são funções inteiras de z (para que um certo z_a seja de fato singular simples é necessário que c_0 não tenha um zero de ordem 2 em z_a e c_1 não tenha um zero de ordem 1 em z_a). Obtemos disso que

$$b_0(w) \;=\; \frac{w^{2k-4} c_0(1/w)}{(1-wz_1)^2 \cdots (1-wz_k)^2} \qquad \text{e} \qquad b_1(w) \;=\; \frac{2}{w} - \frac{w^{k-2} c_1(1/w)}{(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)} \,.$$

Como funções inteiras, c_0 e c_1 possuem expansões de Taylor centradas em 0

$$c_0(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_0^{(n)} z^n \qquad \text{e} \qquad c_1(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_1^{(n)} z^n$$

as quais convergem para todo $z \in \mathbb{C}$ e, portanto,

$$b_0(w) \;=\; \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_0^{(n)} \frac{1}{w^{n+4-2k}}}{(1-wz_1)^2 \cdots (1-wz_k)^2} \qquad \text{e} \qquad b_1(w) \;=\; \frac{2}{w} - \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_1^{(n)} \frac{1}{w^{n+2-k}}}{(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)} \,.$$

Perguntemo-nos agora sob quais circunstâncias o infinito é também no máximo um ponto singular simples da equação. Para tal, b_0 deve ter no máximo um pólo de ordem 2 e b_1 no máximo um pólo de ordem 1 em $w = 0$. Como as funções

$\frac{1}{(1-wz_1)^2\cdots(1-wz_k)^2}$ e $\frac{1}{(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)}$ são analíticas em $w=0$ e não se anulam nesse ponto, concluímos que a condição procurada exige que $w^{2k-4}c_0(1/w)$ tenha no máximo um pólo de ordem 2 em $w=0$ e $w^{k-2}c_1(1/w)$ tenha no máximo um pólo de ordem 1 em $w=0$. Agora,

$$w^{2k-4}c_0(1/w) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\gamma_0^{(n)}\frac{1}{w^{n+4-2k}} \qquad \text{e} \qquad w^{k-2}c_1(1/w) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\gamma_1^{(n)}\frac{1}{w^{n+2-k}}\;,$$

donde concluímos que $\gamma_0^{(n)}=0$ para todo $n>2k-2$ e $\gamma_1^{(n)}=0$ para todo $n>k-1$. Assim,

$$c_0(z) \;=\; \sum_{n=0}^{2k-2}\gamma_0^{(n)}z^n \qquad \text{e} \qquad c_1(z) \;=\; \sum_{n=0}^{k-1}\gamma_1^{(n)}z^n\;,$$

que são polinômios de grau menor ou igual a $2k-2$ e $k-1$, respectivamente. Para a versão no infinito da equação diferencial teremos nesse caso

$$b_0(w) \;=\; \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{2k-2}\gamma_0^{(n)}\frac{1}{w^{n+4-2k}}}{(1-wz_1)^2\cdots(1-wz_k)^2} \;\overset{n\to 2k-2-n}{=}\; \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{2k-2}\gamma_0^{(2k-2-n)}w^{n-2}}{(1-wz_1)^2\cdots(1-wz_k)^2} \tag{14.106}$$

e

$$\begin{aligned} b_1(w) \;&=\; \frac{2}{w}-\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1}\gamma_1^{(n)}\frac{1}{w^{n+2-k}}}{(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)} \\ &=\; \frac{2(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)-\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1}\gamma_1^{(n)}\frac{1}{w^{n+1-k}}}{w(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)} \\ &\overset{n\to k-1-n}{=}\; \frac{2(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)-\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1}\gamma_1^{(k-1-n)}w^{n}}{w(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)}\;. \end{aligned} \tag{14.107}$$

Das expressões (14.106) e (14.107) podemos identificar as condições para que $b_0(w)$ e $b_1(w)$ sejam regulares em $w=0$, ou seja, para que o infinito seja um ponto regular de (14.113): como $\frac{1}{(1-wz_1)^2\cdots(1-wz_k)^2}$ e $\frac{1}{(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)}$ são analíticas em $w=0$ e não se anulam nesse ponto, para que $b_0(w)$ e $b_1(w)$ sejam regulares em $w=0$ é necessário e suficiente que $\displaystyle\sum_{n=0}^{2k-2}\gamma_0^{(2k-2-n)}w^{n-2}$ seja analítica em $w=0$ e $2(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)-\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1}\gamma_1^{(k-1-n)}w^n$ seja analítica em $w=0$ (o que sempre é o caso) e tenha um zero de ordem pelo menos 1 nesse ponto (observar o fator w no denominador de (14.107)).

Para a primeira condição é necessário e suficiente que $\gamma_0^{(2k-3)}=\gamma_0^{(2k-2)}=0$ (se $k=1$, é necessário e suficiente que $\gamma_0^{(0)}=0$). Para a segunda condição, é necessário e suficiente que $\gamma_1^{(k-1)}=2$.

• **Analisando alguns casos explícitos**

Vamos analisar explicitamente os casos $k=1$, $k=2$ e $k=3$.

1. **Caso $k=1$.** Nesse caso, para que (14.101) seja Fuchsiana com no máximo um ponto singular simples no infinito e em z_1, temos que c_0 e c_1 devem ser polinômios e grau zero (ou seja, constantes) e (14.101) é da forma

$$y''(z)+\left(\frac{\gamma_1^{(0)}}{z-z_1}\right)y'(z)+\left(\frac{\gamma_0^{(0)}}{(z-z_1)^2}\right)y(z) \;=\; 0\;, \tag{14.108}$$

cuja versão no infinito é

$$u''(w)+\left(\frac{2-\gamma_1^{(0)}-2wz_1}{w(1-wz_1)}\right)u'(w)+\left(\frac{\gamma_0^{(0)}}{w^2(1-wz_1)^2}\right)u(w) \;=\; 0\;.$$

O ponto z_1 é um ponto singular simples (exceto no caso trivial em que $\gamma_1^{(0)}=\gamma_0^{(0)}=0$, quando z_1 é um ponto regular). Note que (14.108) é uma equação de Euler.

Para que o infinito seja regular é necessário e suficiente que $\gamma_0^{(0)}=0$ e $\gamma_1^{(0)}=2$. Compare com a discussão sobre a equação de Euler à página 770. Concluímos que a equação de Euler

$$y''(z)+\left(\frac{2}{z-z_1}\right)y'(z) \;=\; 0\,,\quad \text{cuja versão no infinito é}\quad u''(w)-\left(\frac{2z_1}{1-wz_1}\right)u'(w) \;=\; 0\;, \tag{14.109}$$

é a única equação Fuchsiana de segunda ordem com um único ponto singular, a saber z_1. Essa expressão generaliza (14.105) e a ela se reduz para $z_1=0$. Como vimos em (14.104), a equação $y''(z)=0$ é a única equação Fuchsiana de segunda ordem com um único ponto singular no infinito.

Note-se que a equação $y''(z)=0$ e sua versão no infinito $u''(w)+\frac{2}{2}u'(w)=0$ (vide (14.104)) são obtidas formalmente de (14.109) tomando-se o limite $|z_1|\to\infty$. Tal processo é por vezes denominado confluência de singularidades e será reencontrado quando tratarmos da relação entre a equação hipergeométrica e a equação hipergeométrica confluente (vide discussão do começo da Seção 15.2.8, página 846).

A equação de Euler (14.108) com $\gamma_0^{(0)}\neq 0$ ou $\gamma_1^{(0)}\neq 2$ é a única equação Fuchsiana de segunda ordem com dois pontos singulares simples, um em z_1 e o segundo no infinito. Logo abaixo veremos a forma geral das equações Fuchsianas com dois pontos singulares simples finitos.

2. **Caso $k=2$.** Nesse caso, para que (14.101) seja Fuchsiana com no máximo pontos singulares simples em z_1, z_2 e no infinito, c_0 e c_1 devem ser polinômios de grau menor ou igual a 2 e 1, respectivamente e (14.101) deve ser da forma

$$y''(z)+\left(\frac{\gamma_1^{(0)}+\gamma_1^{(1)}z}{(z-z_1)(z-z_2)}\right)y'(z)+\left(\frac{\gamma_0^{(0)}+\gamma_0^{(1)}z+\gamma_0^{(2)}z^2}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right)y(z) \;=\; 0\;. \tag{14.110}$$

Os pontos z_1 e z_2 serão pontos singulares simples desde que os dois polinômios dos numeradores dos coeficientes não tenham zeros de ordem 1 ou 2, respectivamente, nesses pontos. Por exemplo, se $\gamma_1^{(0)}+\gamma_1^{(1)}z=\alpha(z-z_2)$ e $\gamma_0^{(0)}+\gamma_0^{(1)}z+\gamma_0^{(2)}z^2=\beta(z-z_2)^2$ a equação torna-se

$$y''(z)+\left(\frac{\alpha}{(z-z_1)}\right)y'(z)+\left(\frac{\beta}{(z-z_1)^2}\right)y(z) \;=\; 0\;,$$

que tem a mesma forma da equação de Euler (14.108), a qual, como vimos, é a única equação Fuchsiana com um único ponto singular finito, a saber z_1 (e eventualmente um outro no infinito).

Voltando a (14.110), para que o ponto no infinito seja regular é necessário e suficiente que $\gamma_0^{(1)}=\gamma_0^{(2)}=0$ e $\gamma_1^{(1)}=2$. Assim, a forma geral da equação Fuchsiana com no máximo dois pontos singulares simples finitos z_1 e z_2 e regular no infinito é

$$y''(z)+\left(\frac{\gamma_1^{(0)}+2z}{(z-z_1)(z-z_2)}\right)y'(z)+\left(\frac{\gamma_0^{(0)}}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right)y(z) \;=\; 0\;.$$

Se escolhermos $\gamma_1^{(0)}=-2z_2$ e $\gamma_0^{(0)}=0$ o ponto z_2 deixa de ser singular e essa equação reduz-se a (14.109).

A equação (14.110) com $\gamma_0^{(1)}\neq 0$ ou $\gamma_0^{(2)}\neq 0$ ou $\gamma_1^{(1)}\neq 2$ é a única equação Fuchsiana de segunda ordem com um ponto singular simples no infinito e com no máximo dois pontos singulares simples finitos, em z_1 e z_2. Mais adiante (vide Seção 14.8.3.2, página 793) mostraremos que uma tal equação sempre pode ser transformada em uma equação hipergeométrica.

3. **Caso $k=3$.** Nesse caso, para que (14.101) seja Fuchsiana com no máximo pontos singulares simples em z_1, z_2, z_3 e no infinito, c_0 e c_1 devem ser polinômios de grau menor ou igual a 4 e 2, respectivamente e (14.101) deve ser da

forma

$$y''(z)+\left(\frac{\gamma_1^{(0)}+\gamma_1^{(1)}z+\gamma_1^{(2)}z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}\right)y'(z)+\left(\frac{\sum_{n=0}^{4}\gamma_0^{(n)}z^n}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2}\right)y(z) \;=\; 0\,. \tag{14.111}$$

Os pontos z_1, z_2 e z_3 serão singulares simples se os dois polinômios dos numeradores dos coeficientes acima não possuírem neles zeros de ordem 1 ou 2, respectivamente.

Para que o ponto no infinito seja regular é necessário e suficiente que $\gamma_0^{(3)}=\gamma_0^{(4)}=0$ e que $\gamma_1^{(2)}=2$. Nesse caso, (14.111) assume a forma

$$y''(z)+\left(\frac{\gamma_1^{(0)}+\gamma_1^{(1)}z+2z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}\right)y'(z)+\left(\frac{\gamma_0^{(0)}+\gamma_0^{(1)}z+\gamma_0^{(2)}z^2}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2}\right)y(z) \;=\; 0\,. \tag{14.112}$$

Mais adiante (vide Seção 14.8.3.1, página 790) mostraremos que, assim como a equação (14.110), que também tem três pontos singulares simples, esta equação também pode ser transformada em uma equação hipergeométrica.

Se $\gamma_0^{(3)}\neq 0$, $\gamma_0^{(4)}\neq 0$ ou $\gamma_1^{(2)}\neq 2$, o infinito será um ponto regular simples de (14.111).

A forma geral das equações Fuchsianas com três pontos singulares simples (14.110) e (14.112) foi primeiramente estudada por Papperitz[16] e especialmente por Riemann[17], o qual demonstrou diversos fatos relevantes sobre essas equações. Sobre esses desenvolvimentos falaremos mais adiante na Seção 14.8.3, página 787.

*

Para futura referência capturamos os diversos resultados obtidos até agora na seguinte proposição:

Proposição 14.6 *Para a equação diferencial linear de segunda ordem no plano complexo*

$$y''(z)+a_1(z)y'(z)+a_0(z)y(z) \;=\; 0 \tag{14.113}$$

valem as seguintes afirmações:

I. *A equação (14.113) sempre possui ao menos um ponto singular (eventualmente no infinito).*

II. *Para que (14.113) seja Fuchsiana e tenha apenas uma singularidade simples no infinito é necessário e suficiente que seja da forma $y''(z)=0$, cuja versão no infinito é $u''(w)+\frac{2}{w}u'(w)=0$.*

III. *Para que (14.113) seja Fuchsiana, tenha apenas uma singularidade simples em z_1 e seja regular no infinito é necessário e suficiente que seja da forma*

$$y''(z)+\left(\frac{2}{z-z_1}\right)y'(z) \;=\; 0\,,\qquad \text{cuja versão no infinito é}\quad u''(w)-\frac{2}{w(1-wz_1)}u'(w) \;=\; 0\,.$$

IV. *Para que (14.113) seja Fuchsiana, tenha uma singularidade simples no infinito e tenha no máximo singularidades simples nos pontos $z_1,\ \ldots,\ z_k$ (com $k\geq 1$) é necessário e suficiente que a_0 e a_1 sejam da forma*

$$a_0(z) \;=\; \frac{\sum_{n=0}^{2k-2}\gamma_0^{(n)}z^n}{(z-z_1)^2\cdots(z-z_k)^2}\qquad e\qquad a_1(z) \;=\; \frac{\sum_{n=0}^{k-1}\gamma_1^{(n)}z^n}{(z-z_1)\cdots(z-z_k)}$$

onde ou $\gamma_0^{(2k-3)}\neq 0$ ou $\gamma_0^{(2k-2)}\neq 0$ (caso $k=1$, basta $\gamma_0^{(0)}\neq 0$) ou que $\gamma_1^{(k-1)}\neq 2$. A versão no infinito de (14.113) é nesse caso

$$u''(w)+b_1(w)u'(w)+b_0(w)u(w) \;=\; 0\,,$$

[16] Erwin Johannes Papperitz (1857–1938).
[17] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866).

com

$$b_0(w) \;=\; \frac{\sum_{n=0}^{2k-2}\gamma_0^{(2k-2-n)}w^{n-2}}{(1-wz_1)^2\cdots(1-wz_k)^2} \tag{14.114}$$

e

$$b_1(w) \;=\; \frac{2(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)-\sum_{n=0}^{k-1}\gamma_1^{(k-1-n)}w^n}{w(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)}\,. \tag{14.115}$$

V. *Para que (14.113) seja Fuchsiana e tenha no máximo singularidades simples nos pontos $z_1,\ \ldots,\ z_k$ (com $k\geq 1$), sendo regular no infinito, é necessário e suficiente que $\gamma_0^{(2k-3)}=\gamma_0^{(2k-2)}=0$ (caso $k=1$, que $\gamma_0^{(0)}=0$) e que $\gamma_1^{(k-1)}=2$, ou seja, é necessário e suficiente que*

$$a_0(z) \;=\; \frac{\sum_{n=0}^{2k-4}\gamma_0^{(n)}z^n}{(z-z_1)^2\cdots(z-z_k)^2}\qquad e\qquad a_1(z) \;=\; \frac{\sum_{n=0}^{k-2}\gamma_1^{(n)}z^n+2z^{k-1}}{(z-z_1)\cdots(z-z_k)}$$

em cujo caso temos para a versão no infinito

$$b_0(w) \;=\; \frac{\sum_{n=2}^{2k-2}\gamma_0^{(2k-2-n)}w^{n-2}}{(1-wz_1)^2\cdots(1-wz_k)^2}\qquad e\qquad b_1(w) \;=\; \frac{2\Big[(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)-1\Big]-\sum_{n=1}^{k-1}\gamma_1^{(k-1-n)}w^n}{w(1-wz_1)\cdots(1-wz_k)}\,.$$

□

Para continuarmos nossa discussão precisamos introduzir a importante noção de *índices de uma equação diferencial* em um ponto do plano complexo.

• **Índices de uma equação diferencial em um ponto**

Seja a equação diferencial Fuchsiana (14.101) e seja $\zeta\in\mathbb{C}$. Sejam definidos os números complexos

$$p_\zeta \;:=\; \lim_{z\to\zeta}(z-\zeta)^2a_0(z)\qquad\text{e}\qquad q_\zeta \;:=\; \lim_{z\to\zeta}(z-\zeta)a_1(z)\,. \tag{14.116}$$

O polinômio de segundo grau

$$P_\zeta(\lambda) \;:=\; \lambda^2+(q_\zeta-1)\lambda+p_\zeta$$

é denominado *polinômio indicial* da equação diferencial Fuchsiana (14.101) em ζ e seus zeros

$$\lambda_\zeta^+ \;=\; \frac{1-q_\zeta+\sqrt{(q_\zeta-1)^2-4p_\zeta}}{2}\,,\qquad \lambda_\zeta^- \;=\; \frac{1-q_\zeta-\sqrt{(q_\zeta-1)^2-4p_\zeta}}{2} \tag{14.117}$$

são denominados *índices* da equação diferencial Fuchsiana (14.101) em ζ.

A relevância dessas noções é a seguinte. Se ζ é um ponto singular simples da equação diferencial Fuchsiana (14.101), então, para $|z-\zeta|$ "pequeno" a mesma pode, pela definição de p_ζ e q_ζ, ser aproximada pela equação

$$y''(z)+\frac{q_\zeta}{z-\zeta}y'(z)+\frac{p_\zeta}{(z-\zeta)^2}y(z) \;=\; 0$$

que é uma equação de Euler, cuja solução geral é da forma $\alpha(z-\zeta)^{\lambda_\zeta^+}+\beta(z-\zeta)^{\lambda_\zeta^-}$ caso $\lambda_\zeta^+\neq\lambda_\zeta^-$ ou da forma $\alpha(z-\zeta)^{\lambda_\zeta^+}+\beta(z-\zeta)^{\lambda_\zeta^+}\ln(z-\zeta)$ caso $\lambda_\zeta^+=\lambda_\zeta^-$. Aqui α e β são constantes arbitrárias.

Por outro lado, se ζ é um ponto regular da equação Fuchsiana, então, pela definição, $p_\zeta=q_\zeta=0$ e teremos $\lambda_\zeta^+=1$, $\lambda_\zeta^-=0$. A equação, na região onde $|z-\zeta|$ é "pequeno" pode ser aproximada pela equação $y''(z)=0$, cuja solução geral é da forma $\alpha(z-\zeta)+\beta$, ou seja, da forma $\alpha(z-\zeta)^{\lambda_\zeta^+}+\beta(z-\zeta)^{\lambda_\zeta^-}$, onde novamente α e β são constantes arbitrárias.

Aprendemos, assim, que os índices fixam as soluções da equação diferencial Fuchsiana (14.101) em uma vizinhança pequena de um ponto ζ, quer esse ponto seja singular simples ou regular.

Para o ponto no infinito podemos, analogamente, definir índices. A versão no infinito de (14.101) é, como visto, dada por (14.102)-(14.103) Definimos, então p_∞ e q_∞ por

$$p_\infty \;:=\; \lim_{w\to 0} w^2 b_0(w) \qquad \text{e} \qquad q_\infty \;:=\; \lim_{w\to 0} w b_1(w) \tag{14.118}$$

ou seja (por (14.103)),

$$p_\infty \;:=\; \lim_{w\to 0} w^{-2} a_0(1/w) \;=\; \lim_{|z|\to\infty} z^2 a_0(z) \tag{14.119}$$

e

$$q_\infty \;:=\; 2 - \lim_{w\to 0} w^{-1} a_1(1/w) \;=\; 2 - \lim_{|z|\to\infty} z a_1(z)\,. \tag{14.120}$$

Com isso definimos o polinômio indicial $P_\infty(\lambda) := \lambda^2 + (q_\infty - 1)\lambda + p_\infty$, cujos zeros são

$$\lambda_\infty^+ \;=\; \frac{1 - q_\infty + \sqrt{(q_\infty-1)^2 - 4p_\infty}}{2}\,, \qquad \lambda_\infty^- \;=\; \frac{1 - q_\infty - \sqrt{(q_\infty-1)^2 - 4p_\infty}}{2}\,. \tag{14.121}$$

Estes são os índices da equação diferencial Fuchsiana (14.101) no infinito.

• **Índices e equações Fuchsianas**

Vimos páginas acima (vide, em especial, Proposição 14.6, página 783) que uma equação diferencial linear de segunda ordem como (14.101) terá no máximo k singularidades simples[18] nos pontos finitos $z_1, \ldots, z_k$, sendo regular no infinito, se e somente se a_0 e a_1 forem da forma

$$a_0(z) \;=\; \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{2k-4} \gamma_0^{(n)} z^n}{(z-z_1)^2\cdots(z-z_k)^2} \qquad \text{e} \qquad a_1(z) \;=\; \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{k-2} \gamma_1^{(n)} z^n + 2z^{k-1}}{(z-z_1)\cdots(z-z_k)}\,. \tag{14.122}$$

Para que a equação seja singular simples no infinito e tenha no máximo $k-1$ singularidades simples nos pontos finitos $z_1, \ldots, z_{k-1}$ é necessário e suficiente que

$$a_0(z) \;=\; \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{2k-4} \gamma_0^{(n)} z^n}{(z-z_1)^2\cdots(z-z_{k-1})^2} \qquad \text{e} \qquad a_1(z) \;=\; \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{k-2} \gamma_1^{(n)} z^n}{(z-z_1)\cdots(z-z_{k-1})}\,, \tag{14.123}$$

onde ou $\gamma_0^{(2k-5)} \neq 0$ ou $\gamma_0^{(2k-4)} \neq 0$ ou que $\gamma_1^{(k-2)} \neq 2$.

Em ambos os casos há no máximo k singularidades, incluindo eventualmente uma no infinito. Chama a atenção o fato de que em ambos os casos a_0 depende de $2k-3$ constantes livres (as constantes $\gamma_0^{(n)}$, $n = 0, \ldots, 2k-4$), enquanto que a_1 depende de $k-1$ constantes livres (as constantes $\gamma_1^{(n)}$, $n = 0, \ldots, k-2$). Assim, para no máximo k singularidades simples a equação depende de $3k-4$ constantes livres.

Uma questão importante, cuja relevância será discutida mais adiante, é saber sob quais circunstâncias essas $3k-4$ constantes podem ser inteiramente determinadas pelos índices das singularidades simples. Essa questão foi proposta a estudada originalmente por Riemann e, para respondê-la, precisamos contar quantos são os índices independentes numa situação de no máximo k singularidades simples. Como há dois índices para cada singularidade, haveria em princípio um total de $2k$ índices independentes mas, em verdade, há apenas $2k-1$. Isso se deve a fato expresso no seguinte lema.

Lema 14.2 *Se a equação Fuchsiana (14.101) possui no máximo k singularidades simples em $z_1, \ldots, z_k$ ($k \geq 2$), sendo regular no infinito, vale*

$$\sum_{l=1}^{k} (\lambda_{z_l}^+ + \lambda_{z_l}^-) \;=\; k-2$$

[18] Assumiremos aqui que $k \geq 2$.

Se a equação Fuchsiana (14.101) tem no máximo $k-1$ singularidades simples em $z_1, \ldots, z_{k-1}$ ($k \geq 2$), tendo também uma singularidade simples no infinito, então também vale

$$\big(\lambda_\infty^+ + \lambda_\infty^-\big) + \sum_{l=1}^{k-1} \big(\lambda_{z_l}^+ + \lambda_{z_l}^-\big) \;=\; k-2\,.$$

Se (14.101) é regular em z_l então, pela definição (14.116), $p_{z_l} = q_{z_l} = 0$, o que implica que $\lambda_{z_l}^+ = 1$ e $\lambda_{z_l}^- = 0$ e, portanto, que $\lambda_{z_l}^+ + \lambda_{z_l}^- = 1$. Assim, se (14.101) possui exatamente j singularidades simples (incluindo eventualmente uma no infinito), então a soma de todos o índices desses pontos singulares é igual a $j-2$ □

Prova. Há dois casos a considerar: 1º os k pontos singulares simples são finitos $z_1, \ldots, z_k$; 2º o infinito é um ponto singular simples e há $k-1$ pontos singulares simples finitos $z_1, \ldots, z_{k-1}$.

1º caso. Por (14.117), $\lambda_{z_l}^+ + \lambda_{z_l}^- = 1 - q_{z_l}$ e, portanto, $\displaystyle\sum_{l=1}^{k}(\lambda_{z_l}^+ + \lambda_{z_l}^-) = k - \sum_{l=1}^{k} q_{z_l}$. Pela definição em (14.116), q_{z_l} é o resíduo da função a_1 em z_l e, portanto, $\sum_{l=1}^{k} q_{z_l}$ é a soma de todos os resíduos de a_1 em seus pontos singulares $z_1, \ldots, z_k$. Como esses são todos os pontos singulares de a_1, concluímos pelo teorema dos resíduos que $\displaystyle\sum_{l=1}^{k} q_{z_l} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C a_1(z)dz$, onde C é uma curva fechada orientada no sentido anti-horário que contém todos os pontos $z_1, \ldots, z_k$ na região que delimita. Por simplicidade adotamos C como sendo um círculo de raio R grande o suficiente. Por (14.122),

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C a_1(z)\,dz \;=\; \sum_{n=0}^{k-2} \gamma_1^{(n)} \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^n}{(z-z_1)\cdots(z-z_k)}\,dz + 2\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^{k-1}}{(z-z_1)\cdots(z-z_k)}\,dz\,.$$

Para $n = 1, \ldots, k-2$, as integrais $\oint_C \frac{z^n}{(z-z_1)\cdots(z-z_k)}\,dz$ são aproximadas para $R \to \infty$ por $\oint_C z^{n-k}dz = 0$. Para $R \to \infty$ a integral $\oint_C \frac{z^{k-1}}{(z-z_1)\cdots(z-z_k)}dz$ é aproximada por $\oint_C z^{-1}dz = 2\pi i$. Concluímos que $\displaystyle\sum_{l=1}^{k} q_{z_l} = 2$ e, portanto, $\displaystyle\sum_{l=1}^{k}(\lambda_{z_l}^+ + \lambda_{z_l}^-) = k-2$.

2º caso. O tratamento aqui é análogo. Novamente $\lambda_{z_l}^+ + \lambda_{z_l}^- = 1 - q_{z_l}$ e, portanto, $\displaystyle\sum_{l=1}^{k-1}(\lambda_{z_l}^+ + \lambda_{z_l}^-) = k - 1 - \sum_{l=1}^{k-1} q_{z_l}$ e novamente $\displaystyle\sum_{l=1}^{k-1} q_{z_l}$ é a soma dos resíduos de a_1 em suas singularidades finitas, que vale $\frac{1}{2\pi i}\oint_C a_1(z)dz$, onde C é uma curva fechada orientada no sentido anti-horário que contém todos os pontos $z_1, \ldots, z_k$ na região que delimita. Por simplicidade adotamos C como sendo um círculo de raio R grande o suficiente. Por (14.123)

$$\oint_C a_1(z)\,dz \;=\; \sum_{n=0}^{k-2} \gamma_1^{(n)} \oint_C \frac{z^n}{(z-z_1)\cdots(z-z_{k-1})}\,dz\,,$$

Para $R \to \infty$ as integrais acima são aproximadas pelas integrais $\oint_C z^{n-k+1}dz$, as quais são nulas, exceto quando $n = k-1$, quando vale $2\pi i$. Assim, $\sum_{l=1}^{k-1} q_{z_l} = \gamma_1^{(k-1)}$.

Agora, por (14.121), $\lambda_\infty^+ + \lambda_\infty^- = 1 - q_\infty$ e por (14.120) e (14.123), $q_\infty = 2 - \gamma_1^{(k-1)}$. Assim, $\lambda_\infty^+ + \lambda_\infty^- = -1 + \gamma_1^{(k-1)}$ e, portanto,

$$\big(\lambda_\infty^+ + \lambda_\infty^-\big) + \sum_{l=1}^{k-1} \big(\lambda_{z_l}^+ + \lambda_{z_l}^-\big) \;=\; \Big(k - 1 - \gamma_1^{(k-1)}\Big) + \Big(-1 + \gamma_1^{(k-1)}\Big) \;=\; k-2\,.$$

Isso completa a prova. ■

• **O problema de Riemann-Hilbert**

Retomando a discussão do parágrafo que antecede ao enunciado do Lema 14.2, página 785, vimos que a equação Fuchsiana (14.101) possui $3k-4$ parâmetros livres e $2k-1$ índices independentes. Concluímos que se $3k-4 \leq 2k-1$, ou seja, se $k \leq 3$, é possível escrever todos os parâmetros livres em termos dos índices. A situação interessante, portanto, é aquela em que se tem no máximo três pontos singulares simples (incluindo, eventualmente, um no infinito). Nela, a equação Fuchsiana (14.101) é totalmente determinada pelos índices de suas singularidades simples e, portanto, assim são suas soluções. Essa conclusão foi primeiramente obtida por Riemann por volta de 1857[19]. Como os índices de uma singularidade estão relacionados à monodromia em torno da mesma, Riemann colocou a questão de sob quais condições existe uma equação Fuchsiana com pontos singulares e monodromias pré-determinados. Essa questão despertou o interesse de Hilbert[20], passando a ser conhecida (por vezes em uma forma generalizada) como *problema de Riemann-Hilbert*.

Em sua contribuição ao Congresso Internacional de Matemática realizado em Paris em 1900, Hilbert formulou uma hoje célebre lista de vinte e três problemas matemáticos que pautou boa parte dos desenvolvimentos matemáticos das décadas que se seguiram. O vigésimo primeiro desses problemas intitulava-se *Prova da existência de equações diferenciais lineares tendo um grupo de monodromia prescrito* e era assim descrito por Hilbert: "Na teoria das equações diferenciais com uma variável independente z eu gostaria de indicar um problema importante o qual o próprio Riemann pode ter tido em mente: mostrar que sempre existe uma equação diferencial linear de tipo Fuchsiano, com pontos singulares e grupo de monodromia dados. O problema requer a produção de n funções da variável z, regulares no plano complexo, exceto nos pontos singulares dados, onde podem tornar-se infinitos de ordem finita, e ainda com a propriedade de que quando z descreve circuitos em torno desses pontos as funções transformam-se segundo transformações lineares dadas. Por meio da contagem de constantes foi visto ser possível que tais equações diferenciais de fato existam, mas uma demonstração rigorosa só foi obtida até o momento somente no caso particular onde as equações fundamentais das transformações lineares mencionadas possuam raízes de módulo igual a 1. Uma prova foi fornecida por L. Schlesinger[21] com base na teoria de Poincaré[22] das funções zeta Fuchsianas[23]. A teoria das equações diferenciais lineares teria naturalmente uma aparência mais acabada se o problema aqui delineado pudesse ser tratado por algum método geral".

Além de Hilbert, contribuíram para o estudo desse problema nomes como Birkhoff[24], Plemelj[25] e diversos outros. O problema de Riemann-Hilbert possui atualmente extensões para além do estudo de equações diferenciais lineares no plano complexo.

14.8.3 A Equação de Riemann-Papperitz. Símbolos de Riemann

• **Equações Fuchsianas com três singularidades**

Como discutimos acima, há um interesse especial na equação Fuchsiana (14.101) com três singularidades pois a mesma possui cinco parâmetros livres e também cinco índices independentes associados às três pontos singulares (lembremos que, pelo Lema 14.2, a soma dos seis índices deve ser igual a 1). Portanto, deve ser, em princípio, possível expressar univocamente esses cinco parâmetros em termos dos índices. Vamos mostrar que isso de fato é verdade. Para $k=3$ e singularidades simples apenas nos pontos finitos z_1, z_2 e z_3, (14.101) assume a forma.

$$y''(z) + \left(\frac{\gamma_1^{(0)} + \gamma_1^{(1)} z + 2z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}\right) y'(z) + \left(\frac{\gamma_0^{(0)} + \gamma_0^{(1)} z + \gamma_0^{(2)} z^2}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2}\right) y(z) \;=\; 0 \tag{14.124}$$

e para singularidades simples apenas no pontos finitos z_1, z_2 e uma no infinito, (14.101) assume a forma

$$y''(z) + \left(\frac{\gamma_1^{(0)} + \gamma_1^{(1)} z}{(z-z_1)(z-z_2)}\right) y'(z) + \left(\frac{\gamma_0^{(0)} + \gamma_0^{(1)} z + \gamma_0^{(2)} z^2}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right) y(z) \;=\; 0 \tag{14.125}$$

[19] G. F. B. Riemann, "Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,x)$ darstellbaren Functionen". Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, **7**, 3–32 (1857). G. F. B. Riemann, "Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,x)$ darstellbaren Functionen". Göttinger Nachrichten, 6–8 (1857). Vide também [418].

[20] David Hilbert (1862–1943).

[21] Ludwig Schlesinger (1864–1933).

[22] Jules Henri Poincaré (1854–1912).

[23] L. Schlesinger, "Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten", Crelle's Journal (1912).

[24] George David Birkhoff (1884–1944).

[25] Josip Plemelj (1873–1967).

com $\gamma_1^{(1)} \neq 2$.

No caso (14.124) podemos escrever, de acordo com (14.116) e (14.122), para $l = 1,\,\ldots,\,3$,

$$p_{z_l} \;=\; \left(\sum_{n=0}^{2} \gamma_0^{(n)}(z_l)^n\right) \prod_{\substack{a=1\\a\neq l}}^{3} \frac{1}{(z_l-z_a)^2}\,, \qquad q_{z_l} \;=\; \left(\sum_{n=0}^{1} \gamma_1^{(n)}(z_l)^n + 2(z_l)^2\right) \prod_{\substack{a=1\\a\neq l}}^{3} \frac{1}{(z_l-z_a)}\,. \tag{14.126}$$

Como

$$\lambda_{z_l}^{+} + \lambda_{z_l}^{-} \;=\; 1 - q_{z_l} \qquad \text{e} \qquad \lambda_{z_l}^{+}\lambda_{z_l}^{-} \;=\; p_{z_l}\,, \tag{14.127}$$

vemos que as últimas equações podem ser escritas como

$$\lambda_{z_l}^{+}\lambda_{z_l}^{-} \prod_{\substack{a=1\\a\neq l}}^{3} (z_l-z_a)^2 \;=\; \sum_{n=0}^{2} \gamma_0^{(n)}(z_l)^n\,, \qquad \left(1-\lambda_{z_l}^{+}-\lambda_{z_l}^{-}\right) \prod_{\substack{a=1\\a\neq l}}^{3} (z_l-z_a) \;=\; \sum_{n=0}^{1} \gamma_1^{(n)}(z_l)^n + 2(z_l)^2\,.$$

Definindo

$$\alpha_l \;:=\; \lambda_{z_l}^{+}\lambda_{z_l}^{-} \prod_{\substack{a=1\\a\neq l}}^{3} (z_l-z_a)^2 \qquad \text{e} \qquad \beta_l \;:=\; \left(1-\lambda_{z_l}^{+}-\lambda_{z_l}^{-}\right) \left(\prod_{\substack{a=1\\a\neq l}}^{3} (z_l-z_a)\right)\,,$$

para $l = 1,\,2,\,3$, as últimas relações podem ser escritas em forma matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & (z_1)^2 \\ 1 & z_2 & (z_2)^2 \\ 1 & z_3 & (z_3)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0^{(0)} \\ \gamma_0^{(1)} \\ \gamma_0^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & (z_1)^2 \\ 1 & z_2 & (z_2)^2 \\ 1 & z_3 & (z_3)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1^{(0)} \\ \gamma_1^{(1)} \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

A matriz $Z := \begin{pmatrix} 1 & z_1 & (z_1)^2 \\ 1 & z_2 & (z_2)^2 \\ 1 & z_3 & (z_3)^2 \end{pmatrix}$ é uma *matriz de Vandermonde*[26], e seu determinante é

$$\det(Z) \;=\; \prod_{1\leq a<b\leq 3} (z_b - z_a) \;=\; (z_3-z_2)(z_3-z_1)(z_2-z_1)\,,$$

que é não-nulo (pois os pontos z_1, z_2 e z_3 são distintos). Portanto, Z possui uma inversa, o que permite expressar univocamente os $\gamma_0^{(n)}$'s e $\gamma_1^{(n)}$'s em termos dos α_l's e β_l's e, portanto, em termos dos $\lambda_{z_l}^{\pm}$'s. O caso de (14.125) é análogo.

• **A equação de Riemann-Papperitz**

Com o exposto acima, vemos que é possível expressar a equação Fuchsiana com três singularidades (14.101) em termos de z_1, z_2, z_3 e seus índices. O que se obtém, após algum esforço algébrico um tanto tedioso, são as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} y''(z) &+ \left[\frac{q_{z_1}}{z-z_1} + \frac{q_{z_2}}{z-z_2} + \frac{q_{z_3}}{z-z_3}\right] y'(z) \\ &+ \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} \left[\frac{p_{z_1}(z_1-z_2)(z_1-z_3)}{z-z_1} + \frac{p_{z_2}(z_2-z_3)(z_2-z_1)}{z-z_2} + \frac{p_{z_3}(z_3-z_1)(z_3-z_2)}{z-z_3}\right] y(z) \;=\; 0\,, \end{aligned} \tag{14.128}$$

[26] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796).

ou seja, por (14.127),

$$y''(z)+\left[\frac{1-\lambda^+_{z_1}-\lambda^-_{z_1}}{z-z_1}+\frac{1-\lambda^+_{z_2}-\lambda^-_{z_2}}{z-z_2}+\frac{1-\lambda^+_{z_3}-\lambda^-_{z_3}}{z-z_3}\right]y'(z)$$
$$+\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}\left[\frac{\lambda^+_{z_1}\lambda^-_{z_1}(z_1-z_2)(z_1-z_3)}{z-z_1}+\frac{\lambda^+_{z_2}\lambda^-_{z_2}(z_2-z_3)(z_2-z_1)}{z-z_2}+\frac{\lambda^+_{z_3}\lambda^-_{z_3}(z_3-z_1)(z_3-z_2)}{z-z_3}\right]y(z)\ =\ 0\ . \tag{14.129}$$

A expressão (14.129) foi encontrada primeiramente por Papperitz[27] em 1885[28] e é denominada *equação de Papperitz*, *equação de Riemann* ou ainda *equação de Riemann-Papperitz*.

E. 14.35 *Exercício*. Obtenha as expressões (14.128) e (14.129). ✣

Procedendo analogamente, mas agora tendo (14.125) como ponto de partida, podemos obter a expressão da equação Fuchsiana em termos de seus índices para a situação de duas singularidades regulares finitas z_1 e z_2 e uma terceira também regular no infinito. Uma forma pragmática de chegar a tal equação é tomar o limite $|z_3|\to\infty$ na equação (14.129). Isso conduz à equação

$$y''(z)+\left[\frac{1-\lambda^+_{z_1}-\lambda^-_{z_1}}{z-z_1}+\frac{1-\lambda^+_{z_2}-\lambda^-_{z_2}}{z-z_2}\right]y'(z)+\left[\frac{\lambda^+_{z_1}\lambda^-_{z_1}(z_1-z_2)}{(z-z_1)^2(z-z_2)}+\frac{\lambda^+_{z_2}\lambda^-_{z_2}(z_2-z_1)}{(z-z_1)(z-z_2)^2}+\frac{\lambda^+_{\infty}\lambda^-_{\infty}}{(z-z_1)(z-z_2)}\right]y(z)\ =\ 0\ , \tag{14.130}$$

a qual pode ser facilmente reescrita na forma

$$y''(z)+\left[\frac{1-\lambda^+_{z_1}-\lambda^-_{z_1}}{z-z_1}+\frac{1-\lambda^+_{z_2}-\lambda^-_{z_2}}{z-z_2}\right]y'(z)+\left[\frac{\lambda^+_{z_1}\lambda^-_{z_1}}{(z-z_1)^2}+\frac{\lambda^+_{z_2}\lambda^-_{z_2}}{(z-z_2)^2}+\frac{\lambda^+_{\infty}\lambda^-_{\infty}-\lambda^+_{z_1}\lambda^-_{z_1}-\lambda^+_{z_2}\lambda^-_{z_2}}{(z-z_1)(z-z_2)}\right]y(z)\ =\ 0\ . \tag{14.131}$$

E. 14.36 *Exercício*. Obtenha as expressões (14.130) e (14.131). ✣

• **Símbolos de Riemann**

Como vimos acima, é possível expressar univocamente a equação Fuchsiana com três singularidades (14.101) em termos de z_1, z_2, z_3 e seus índices (z_3 podendo ser infinito). Em seus trabalhos de 1857 (vide nota-de-rodapé 19, página 787) Riemann introduziu uma notação para representar esquematicamente a dependência da equação (14.101) com os pontos singulares z_1, z_2, z_3 e seus respectivos índices $\lambda^\pm_{z_1}$, $\lambda^\pm_{z_2}$ e $\lambda^\pm_{z_3}$. Seguindo Riemann, representamos uma equação para Fuchsiana para y com três singularidades com a notação

$$P\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \lambda^+_{z_1} & \lambda^+_{z_2} & \lambda^+_{z_3} & z \\ \lambda^-_{z_1} & \lambda^-_{z_2} & \lambda^-_{z_3} & \end{pmatrix}, \tag{14.132}$$

sempre lembrando que, pelo Lema 14.2, página 785,

$$\lambda^+_{z_1}+\lambda^-_{z_1}+\lambda^+_{z_2}+\lambda^-_{z_2}+\lambda^+_{z_3}+\lambda^-_{z_3}\ =\ 1\ . \tag{14.133}$$

As três primeiras colunas contêm os pontos singulares e os respectivos índices (os pontos singulares são dispostas na primeira linha). A quarta coluna contém apenas a variável da equação. A expressão (14.132) é denominada *símbolo*

[27] Erwin Johannes Papperitz (1857–1938).

[28] Portanto, após os trabalhos seminais de Riemann de 1857. Se Riemann a conhecia, não a escreveu explicitamente. O trabalho original de Papperitz é: E. Papperitz, "Über verwandte S-Functionen", Math. Ann., **25**, 212–221 (1885).

de Riemann ou *esquema de Riemann* e sua expressão explícita é a equação (14.129) para o caso de três singularidades finitas.

É também permitido que uma das singularidades seja o ponto no infinito, em cujo caso o símbolo de Riemann para singularidades finitas em z_1 e z_2 fica

$$P\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \infty & \\ \lambda^+_{z_1} & \lambda^+_{z_2} & \lambda^+_{\infty} & z \\ \lambda^-_{z_1} & \lambda^-_{z_2} & \lambda^-_{\infty} & \end{pmatrix}, \tag{14.134}$$

sendo que, novamente pelo Lema 14.2,

$$\lambda^+_{z_1}+\lambda^-_{z_1}+\lambda^+_{z_2}+\lambda^-_{z_2}+\lambda^+_{\infty}+\lambda^-_{\infty}\ =\ 1\ . \tag{14.135}$$

A forma explícita do símbolo (14.134) é (14.130) ou (14.131).

14.8.3.1 Transformações de Simetria dos Símbolos de Riemann

Os símbolos de Riemann são úteis, entre outras razões, por permitirem expressar de modo simples diversas simetrias, algumas triviais, outras não, das equações Fuchsianas com três pontos singulares. Por exemplo, os símbolos de Riemann são invariantes por permutação das três primeiras colunas,

$$P\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \lambda^+_{z_1} & \lambda^+_{z_2} & \lambda^+_{z_3} & z \\ \lambda^-_{z_1} & \lambda^-_{z_2} & \lambda^-_{z_3} & \end{pmatrix}\ =\ P\begin{pmatrix} z_{\pi(1)} & z_{\pi(2)} & z_{\pi(3)} & \\ \lambda^+_{z_{\pi(1)}} & \lambda^+_{z_{\pi(2)}} & \lambda^+_{z_{\pi(3)}} & z \\ \lambda^-_{z_{\pi(1)}} & \lambda^-_{z_{\pi(2)}} & \lambda^-_{z_{\pi(3)}} & \end{pmatrix},$$

(aqui, π é uma permutação qualquer de $\{1,\ 2,\ 3\}$), expressando o fato óbvio de as equações Fuchsianas com três singularidades não mudarem quando trocamos simultaneamente as singularidades **e** seus índices. Os símbolos de Riemann são também invariantes por permutação independente das duas últimas linhas em cada uma das três primeiras colunas,

$$P\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \lambda^+_{z_1} & \lambda^+_{z_2} & \lambda^+_{z_3} & z \\ \lambda^-_{z_1} & \lambda^-_{z_2} & \lambda^-_{z_3} & \end{pmatrix}\ =\ P\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \lambda^-_{z_1} & \lambda^+_{z_2} & \lambda^+_{z_3} & z \\ \lambda^+_{z_1} & \lambda^-_{z_2} & \lambda^-_{z_3} & \end{pmatrix}\ =\ P\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \lambda^+_{z_1} & \lambda^-_{z_2} & \lambda^+_{z_3} & z \\ \lambda^-_{z_1} & \lambda^+_{z_2} & \lambda^-_{z_3} & \end{pmatrix}\ =\ P\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \lambda^+_{z_1} & \lambda^+_{z_2} & \lambda^-_{z_3} & z \\ \lambda^-_{z_1} & \lambda^-_{z_2} & \lambda^+_{z_3} & \end{pmatrix}\ =\ \text{etc.},$$

expressando o fato óbvio de que as equações Fuchsianas com três singularidades dependem do par de índices associado a cada singularidade, mas não da forma como cada um desses pares é ordenado.

Uma importante transformação de simetria dos símbolos de Riemann (e, portanto, das equações do tipo (14.129)) é estabelecida na seguinte proposição:

Proposição 14.7 *Para ambas as funções $f(z)=\frac{1}{z}$ e $f(z)=\alpha z+\beta$ com $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$ e $\alpha\neq 0$ vale a relação*

$$P\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \lambda^+_{z_1} & \lambda^+_{z_2} & \lambda^+_{z_3} & z \\ \lambda^-_{z_1} & \lambda^-_{z_2} & \lambda^-_{z_3} & \end{pmatrix}\ =\ \frac{1}{\big(f'(z)\big)^2}P\begin{pmatrix} f(z_1) & f(z_2) & f(z_3) & \\ \lambda^+_{z_1} & \lambda^+_{z_2} & \lambda^+_{z_3} & f(z) \\ \lambda^-_{z_1} & \lambda^-_{z_2} & \lambda^-_{z_3} & \end{pmatrix}. \tag{14.136}$$

Isso significa que se implementarmos na equação (14.129) as mudanças de variável $z \to f(z)$ obtemos equações do mesmo tipo e com os mesmos índices, apenas com os pontos singulares z_i transformados em $f(z_i)$ para todo $i = 1, 2, 3$. □

Prova. Consideremos primeiramente o caso da função $f(z) = 1/z$. Definindo-se $w = 1/z$ e $v(w) = y(z)$, tem-se

$$\frac{dy}{dz} = -w^2 \frac{dv}{dw} \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = w^4 \frac{d^2v}{dw^2} + 2w^3 \frac{dv}{dw} .$$

A equação (14.129) fica, após dividirmos por $w^4 = \big(f'(z)\big)^{-2}$,

$$\begin{aligned} & v''(w) + \left[-\frac{1-\lambda^+_{z_1}-\lambda^-_{z_1}}{w-z_1w^2} - \frac{1-\lambda^+_{z_2}-\lambda^-_{z_2}}{w-z_2w^2} - \frac{1-\lambda^+_{z_3}-\lambda^-_{z_3}}{w-z_3w^2} + \frac{2}{w} \right] v'(w) \\ & + \left(\prod_{k=1}^{3} \frac{1}{(1-z_kw)} \right) \left[\frac{\lambda^+_{z_1}\lambda^-_{z_1}(z_1-z_2)(z_1-z_3)}{1-z_1w} + \frac{\lambda^+_{z_2}\lambda^-_{z_2}(z_2-z_3)(z_2-z_1)}{1-z_2w} + \frac{\lambda^+_{z_3}\lambda^-_{z_3}(z_3-z_1)(z_3-z_2)}{1-z_3w} \right] v(w) = 0 . \end{aligned} \tag{14.137}$$

Verifique! Usando (14.133) podemos escrever

$$\frac{2}{w} = \frac{1-\lambda^+_{z_1}-\lambda^-_{z_1}}{w} + \frac{1-\lambda^+_{z_2}-\lambda^-_{z_2}}{w} + \frac{1-\lambda^+_{z_3}-\lambda^-_{z_3}}{w} .$$

Agora,

$$-\frac{1-\lambda^+_{z_1}-\lambda^-_{z_1}}{w-z_1w^2} + \frac{1-\lambda^+_{z_1}-\lambda^-_{z_1}}{w} = \frac{1-\lambda^+_{z_1}-\lambda^-_{z_1}}{w-\frac{1}{z_1}}$$

e assim analogamente com z_1 substituído por z_2 e por z_3. Com isso, o fator que multiplica $v'(w)$ em (14.137) fica

$$\frac{1-\lambda^+_{z_1}-\lambda^-_{z_1}}{w-\frac{1}{z_1}} + \frac{1-\lambda^+_{z_2}-\lambda^-_{z_2}}{w-\frac{1}{z_2}} + \frac{1-\lambda^+_{z_3}-\lambda^-_{z_3}}{w-\frac{1}{z_3}} .$$

Já o fator que multiplica $v(w)$ em (14.137) pode ser facilmente reescrito como

$$\left(\prod_{k=1}^{3} \frac{1}{(w-\frac{1}{z_k})} \right) \left[\frac{\lambda^+_{z_1}\lambda^-_{z_1}(\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2})(\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_3})}{w-\frac{1}{z_1}} + \frac{\lambda^+_{z_2}\lambda^-_{z_2}(\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_3})(\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_1})}{w-\frac{1}{z_2}} + \frac{\lambda^+_{z_3}\lambda^-_{z_3}(\frac{1}{z_3}-\frac{1}{z_1})(\frac{1}{z_3}-\frac{1}{z_2})}{w-\frac{1}{z_3}} \right] .$$

Essas observações provaram (14.136) para $f(z) = 1/z$. O caso da função $f(z) = \alpha z + \beta$, com $\alpha \neq 0$, é elementar e deixado como exercício. ■

Para o caso de se ter um ponto no infinito valem também as propriedades de transformação expressas na seguinte proposição.

Proposição 14.8 *Seja a equação diferencial Fuchsiana para uma função y apresentada em (14.136), a qual contém singularidades regulares nos pontos z_1, z_2 e no infinito e é descrita pelo símbolo de Riemann*

$$P \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \infty & \\ \lambda^+_{z_1} & \lambda^+_{z_2} & \lambda^+_{\infty} & z \\ \lambda^-_{z_1} & \lambda^-_{z_2} & \lambda^-_{\infty} & \end{pmatrix} .$$

Então, para qualquer $\gamma \in \mathbb{C}$ a equação diferencial para a função $v_1(z) = (z-z_1)^{-\gamma}y(z)$ é descrita pelo símbolo de Riemann

$$P \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \infty & \\ \lambda^+_{z_1}-\gamma & \lambda^+_{z_2} & \lambda^+_{\infty}+\gamma & z \\ \lambda^-_{z_1}-\gamma & \lambda^-_{z_2} & \lambda^-_{\infty}+\gamma & \end{pmatrix} .$$

Analogamente, para a função $v_2(z) = (z-z_2)^{-\gamma}y(z)$ a equação diferencial é descrita pelo símbolo de Riemann

$$P \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \infty & \\ \lambda^+_{z_1} & \lambda^+_{z_2}-\gamma & \lambda^+_{\infty}+\gamma & z \\ \lambda^-_{z_1} & \lambda^-_{z_2}-\gamma & \lambda^-_{\infty}+\gamma & \end{pmatrix} .$$

□

Prova. A equação para v_1 pode ser obtida diretamente, com um pouco de paciência algébrica, a partir de (14.131) com a substituição $y(z) = (z-z_1)^{\gamma}v_1(z)$. Repassamos esse cômputo elementar como exercício ao leitor. Será necessário usar (14.135) para estabelecer que

$$\Big(\lambda^+_{\infty}\lambda^-_{\infty} - \lambda^+_{z_1}\lambda^-_{z_1} - \lambda^+_{z_2}\lambda^-_{z_2}\Big) + \gamma\Big(1-\lambda^+_{z_2}-\lambda^-_{z_2}\Big) = \big(\lambda^+_{\infty}+\gamma\big)\big(\lambda^-_{\infty}+\gamma\big) - \big(\lambda^+_{z_1}-\gamma\big)\big(\lambda^-_{z_1}-\gamma\big) - \lambda^+_{z_2}\lambda^-_{z_2} .$$

O caso de v_2 é totalmente análogo. ■

• **Transformações de Möbius**

E. 14.37 *Exercício*. Seja $\mathfrak{M}$ o conjunto das matrizes 2×2 complexas M tais que M_{21} e M_{22} não são simultaneamente nulos. Toda matriz inversível é um elemento de $\mathfrak{M}$. Para $A \in \mathfrak{M}$ da forma $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ defina-se a função T_A por

$$T_A(z) := \frac{A_{11}z + A_{12}}{A_{21}z + A_{22}} .$$

As funções T_A são denominadas *transformações lineares fracionárias* ou *transformações de Möbius*[29].

a) Mostre que se $A \in \mathfrak{M}$ não for inversível (ou seja, se $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0$), então T_A é uma função constante. Mostre que a recíproca é igualmente verdadeira.

b) Mostre que T_A é uma aplicação bijetora da esfera de Riemann sobre si mesma se e somente se $\det(A) \neq 0$, ou seja, se e somente se A for inversível.

c) Mostre que se A, B e AB são elementos de $\mathfrak{M}$, então $T_A \circ T_B = T_{AB}$.

d) Constate que $T_{\mathbb{1}}(z) = z$, a função identidade e conclua que se $A \in \mathfrak{M}$ for inversível vale $T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$.

✣

E. 14.38 *Exercício*. Tomemos $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{M}$ com $\det(A) \neq 0$ e seja T_A como acima.

[29] August Ferdinand Möbius (1790–1868).

a) Para $c \neq 0$ mostre que $T_A(z)$ pode ser escrita como $T_A(z) = L_A \circ I \circ M_A(z)$ onde, para $w \in \mathbb{C}$,

$$I(w) := \frac{1}{w}, \qquad L_A(w) := \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c} w \quad \text{e} \quad M_A(w) := cw + d\,.$$

Note que I, L_A e M_A são transformações de Möbius, L_A e M_A sendo funções lineares e I sendo uma inversão. Para $c = 0$ tem-se $d \neq 0$ (pois $\det(A) \neq 0$) e vale, obviamente, $T_A(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$, uma função linear. Assim, concluímos que se $\det(A) \neq 0$ a função T_A pode ser escrita como composição de funções lineares e inversões, essas últimas ocorrendo somente se $c \neq 0$.

b) Mostre que funções lineares como L_A e M_A transformam retas do plano complexo em retas do plano complexo e círculos do plano complexo em círculos do plano complexo.

c) Conclua daí que, caso $\det(A) \neq 0$ e $c \neq 0$, então T_A transforma retas em retas ou círculos e, igualmente, transforma círculos em retas ou círculos.

d) Mostre que a afirmativa do item c) é também verdadeira caso $c = 0$ (isso deve ser trivial agora, lembre-se do item b)).

✣

• **Símbolos de Riemann e transformações de Möbius**

As observações do item E. 14.38 do Exercício E. 14.38, página 792, combinadas à Proposição 14.7 da página 14.7 conduzem imediatamente à seguinte proposição importante:

Proposição 14.9 *Seja A uma matriz 2×2 complexa e inversível e seja a correspondente transformação de Möbius T_A, definida acima. Então*

$$P\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \lambda^+_{z_1} & \lambda^+_{z_2} & \lambda^+_{z_3} & z \\ \lambda^-_{z_1} & \lambda^-_{z_2} & \lambda^-_{z_3} & \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} T_A(z_1) & T_A(z_2) & T_A(z_3) & \\ \lambda^+_{z_1} & \lambda^+_{z_2} & \lambda^+_{z_3} & T_A(z) \\ \lambda^-_{z_1} & \lambda^-_{z_2} & \lambda^-_{z_3} & \end{pmatrix}, \tag{14.138}$$

A igualdade se dando a menos de um fator multiplicativo. Essa igualdade significa que se implementarmos na equação (14.129) a mudança de variável $z \to T_A(z)$ (com A inversível) obtemos equações do mesmo tipo e com os mesmos índices, apenas com os pontos singulares z_i transformados em $T_A(z_i)$ para todo $i = 1,\ 2,\ 3$. □

14.8.3.2 Equações Fuchsianas com três pontos singulares e a equação hipergeométrica

Coletando diversos ingredientes apresentados acima podemos agora provar a afirmação feita anteriormente que toda equação Fuchsiana de linear homogênea de segunda ordem com três pontos singulares pode ser transformada em uma equação hipergeométrica.

Se $z_1,\ z_2$ e z_3 são três pontos distintos de $\mathbb{C}$, então para a matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} & -z_1\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) \\ \left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_3}\right) & -z_3\left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_3}\right) \end{pmatrix} \tag{14.139}$$

valem $T_A(z_1) = 0$, $T_A(z_2) = 1$ e $T_A(z_3) = \infty$. Se $z_1,\ z_2$ são dois pontos distintos de $\mathbb{C}$ então para a matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -z_1 \\ 0 & z_2 - z_1 \end{pmatrix} \tag{14.140}$$

(que formalmente pode ser obtida como o limite $|z_3| \to \infty$ da matriz anterior) valem $T_A(z_1) = 0$, $T_A(z_2) = 1$ e $T_A(\infty) = \infty$.

E. 14.39 *Exercício*. Verifique as afirmações acima. Constate também que ambas as matrizes em (14.139) e (14.140) têm determinante não-nulo. ✣

Concluímos dessas observações e da Proposição 14.9 que

$$P\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \lambda^+_{z_1} & \lambda^+_{z_2} & \lambda^+_{z_3} & z \\ \lambda^-_{z_1} & \lambda^-_{z_2} & \lambda^-_{z_3} & \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \lambda^+_{z_1} & \lambda^+_{z_2} & \lambda^+_{z_3} & T_A(z) \\ \lambda^-_{z_1} & \lambda^-_{z_2} & \lambda^-_{z_3} & \end{pmatrix}, \tag{14.141}$$

para quaisquer z_1, z_2 e z_3 distintos (z_3 podendo ser infinito), A sendo a matriz (14.139) para z_3 finito ou (14.140) para $z_3 = \infty$. Observe-se agora que o símbolo de Riemann $P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \lambda^+_{z_1} & \lambda^+_{z_2} & \lambda^+_{\infty} & z \\ \lambda^-_{z_1} & \lambda^-_{z_2} & \lambda^-_{\infty} & \end{pmatrix}$ descrevendo uma equação para uma função $y(z)$ pode ser transformado, evocando a Proposição 14.8, página 791, na equação descrita pelo símbolo de Riemann

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & \lambda^+_{z_2} & \lambda^+_{z_1} + \lambda^+_{\infty} & z \\ \lambda^-_{z_1} - \lambda^+_{z_1} & \lambda^-_{z_2} & \lambda^+_{z_1} + \lambda^-_{\infty} & \end{pmatrix}$$

para função $v(z) = (z - z_1)^{-\lambda^+_{z_1}} y(z)$. Para a função $w(z) = (z - z_2)^{-\lambda^+_{z_2}} v(z)$ obtém-se, pela mesma proposição, a equação descrita pelo símbolo de Riemann

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \lambda^+_{z_1} + \lambda^+_{z_2} + \lambda^+_{\infty} & z \\ \lambda^-_{z_1} - \lambda^+_{z_1} & \lambda^-_{z_2} - \lambda^+_{z_2} & \lambda^+_{z_1} + \lambda^+_{z_2} + \lambda^-_{\infty} & \end{pmatrix}. \tag{14.142}$$

Definindo agora

$$a \equiv \lambda^+_{z_1} + \lambda^+_{z_2} + \lambda^+_{\infty}\,, \qquad b \equiv \lambda^+_{z_1} + \lambda^+_{z_2} + \lambda^-_{\infty} \qquad \text{e} \qquad c \equiv 1 - \left(\lambda^-_{z_1} - \lambda^+_{z_1}\right)$$

é fácil ver, usando novamente (14.135), que $\lambda^-_{z_2} - \lambda^+_{z_2} = c - a - b$ e com isso o símbolo (14.142) é re-escrito como

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{pmatrix}.$$

Escrevendo, por fim, essa equação nas formas (14.130) ou (14.131), obtém-se

$$y''(z) + \left[\frac{c}{z} + \frac{1-c+a+b}{z-1}\right] y'(z) + \frac{ab}{z(z-1)}\, y(z) = 0\,, \quad \text{ou seja,} \quad z(1-z)\, y''(z) + [c - (1+a+b)z]\, y'(z) - ab\, y(z) = 0\,,$$

que vemos tratar-se da *equação hipergeométrica*, ou *equação de Gauss*, (vide equação (14.94), página 774).

Estabelecemos, portanto, que toda equação Fuchsiana de segunda ordem com três pontos singulares z_1, z_2 e z_3 (este último podendo ser infinito) pode ser transformada em uma equação hipergeométrica por transformações de Möbius na variável z combinadas a transformações $y(z) \mapsto (z-z_1)^{-\lambda^+_{z_1}}(z-z_2)^{-\lambda^+_{z_2}}y(z)$ na função incógnita y.

O estudo de soluções da equação hipergeométrica será iniciado na Seção 15.2.7, página 843.

• **Equações Fuchsianas com quatro singularidades**

Algumas palavras rápidas sobre equações Fuchsianas com quatro singularidades. A *Equação de Heun*[30],

$$y''(z) + \left[\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-a}\right] y'(z) + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-a)} y(z) \;=\; 0 \;,$$

onde α, δ, ϵ, q e a são constantes, é Fuchsiana e possui quatro singularidades regulares, a saber, nos pontos 0, 1, a e no infinito.

E. 14.40 *Exercício*. Verifique essas afirmações! ✠

É possível demonstrar que toda a equação Fuchsiana com quatro singularidades pode ser transformada em uma equação de Heun, em analogia com o que ocorre com a equação hipergeométrica no caso de três singularidades.

[30] Karl Heun (1859–1929).

14.9 Exercícios Adicionais

E. 14.41 *Exercício*. Seja A uma matriz $n \times n$ diagonalizável e seja

$$A \;=\; \sum_{k=1}^{r} \alpha_k E_k$$

sua representação espectral, onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ são seus autovalores distintos e E_k são seus projetores espectrais tais que $E_a E_b = \delta_{a,\,b} E_a$ e $\mathbb{1} = \sum_{k=1}^{r} E_k$. Mostre que

$$\exp(A) \;=\; \sum_{k=1}^{r} e^{\alpha_k} E_k \;.$$

✠

E. 14.42 *Exercício*. Seja a matriz

$$A_1 \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} .$$

a) Determine seu polinômio característico e seus autovalores λ_1 e λ_2. (Para fixar uma convenção adote $\lambda_1 < \lambda_2$).

b) Determine autovetores correspondentes a esses autovalores.

c) Determine uma matriz P que diagonaliza A_1, ou seja, a matriz P tal que $D = P^{-1} A_1 P = \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ \lambda_2)$.

d) D pode ser obviamente escrita como

$$D \;=\; \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 \;,$$

onde

$$K_1 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad K_2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Logo,

$$A_1 = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 \;, \tag{14.143}$$

onde $E_a = P K_a P^{-1}$, $a = 1, 2$.

e) Calcule explicitamente E_1 e E_2 e mostre que (14.143) é a *representação espectral* de A_1, ou seja, mostre explicitamente que E_a são projetores e satisfazem $E_a E_b = \delta_{a,\,b} E_a$ e $\mathbb{1} = \sum_{k=1}^{r} E_k$.

f) Os projetores E_1 e E_2 podem ser também calculados usando (10.60). Obtenha-os dessa forma e compare os resultados.

g) Usando o Exercício E. 14.41 calcule $\exp(tA_1)$. ✠

E. 14.43 *Exercício*. Repita o mesmo exercício para as matrizes

$$A_2 \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 5i \\ 0 & 4 \end{pmatrix} , \qquad A_3 \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} , \qquad A_4 \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3i & 4 \end{pmatrix} ,$$

$$A_5 \;=\; \begin{pmatrix} -2 & i \\ 0 & -5 \end{pmatrix} , \qquad A_6 \;=\; \begin{pmatrix} 4i & 3-i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

✠

E. 14.44 *Exercício*. Determine explicitamente a solução do sistemas de equações lineares a coeficientes constantes $\dot{X}(t) = AX(t)$, com $X(0) = X_0$, para

a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3i & 4 \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

f)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Descreva qualitativamente o retrato de fase de cada um dos sistemas acima. ✠

E. 14.45 *Exercício*. Determine explicitamente a solução do sistemas de equações lineares a coeficientes constantes $\dot{X}(t) = AX(t) + B(t)$, com $X(0) = X_0$, para

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ t \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

✠

E. 14.46 *Exercício*. Um sistema formado por duas populações $p_1(t)$ e $p_2(t)$ evolui de acordo com as equações

$$\dot{p_1}(t) = -\alpha p_1(t) + \beta p_2(t), \qquad \dot{p_2}(t) = \beta p_1(t) - \alpha p_2(t),$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Sabendo que $p_1(0) = n_1$ e $p_2(0) = n_2$, determine $p_1(t)$ e $p_2(t)$ para $t \geq 0$.

b) Que relação α e β devem satisfazer para que tenhamos $\lim_{t\to\infty} p_1(t) = \lim_{t\to\infty} p_2(t) = 0$?

c) Determine $\lim_{t\to\infty} p_1(t)$ e $\lim_{t\to\infty} p_2(t)$ no caso $\beta = \alpha > 0$. ✠

E. 14.47 *Exercício*. Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço vetorial complexo $(n+1)$-dimensional de todos os polinômios complexos de grau menor ou igual a n. Seja $D = \frac{d}{dx}$ o operador de derivação agindo em $\mathcal{P}_n$.

a) Expresse D como uma matriz $(n+1)\times(n+1)$ agindo na base $\{e_0, \ldots, e_n\}$, onde $e_k = x^k/k!$.

b) Mostre que D, agindo em $\mathcal{P}_n$, é nilpotente.

c) Expresse $\exp(tD)$, $t \in \mathbb{R}$, como matriz na base $\{e_0, \ldots, e_n\}$.

d) Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ um elemento de $\mathcal{P}_n$. Mostre que $(\exp(tD)p)(x) = p(x+t)$. *Sugestão.* Mostre que isso é verdade para todos os elementos da base $\{e_0, \ldots, e_n\}$. ✠

E. 14.48 *Exercício*. As chamadas *matrizes de Pauli* são definidas por

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{14.144}$$

a) Mostre que as mesmas satisfazem as seguintes relações algébricas: para todos $a, b = 1, 2, 3$ valem

$$[\sigma_a, \sigma_b] := \sigma_a\sigma_b - \sigma_b\sigma_a = 2i\sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc}\sigma_c, \tag{14.145}$$

$$\{\sigma_a, \sigma_b\} := \sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_a = 2\delta_{ab}\mathbb{1}, \tag{14.146}$$

$$\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab}\mathbb{1} + i\sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc}\sigma_c. \tag{14.147}$$

Note que as matrizes de Pauli são autoadjuntas: $\sigma_i^* = \sigma_i$.

b) Mostre que as quatro matrizes $\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ formam uma base em $\operatorname{Mat}(\mathbb{C}, 2)$: toda matriz complexa 2×2 pode ser escrita como uma combinação linear das mesmas.

c) Mostre que as matrizes $\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ são ortonormais em relação ao seguinte produto escalar definido em $\operatorname{Mat}(\mathbb{C}, 2)$: $\langle A, B\rangle := \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(A^*B)$.

d) Seja $\vec{\eta} := (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ um vetor de comprimento 1 de $\mathbb{R}^3$, ou seja, $\|\vec{\eta}\| = 1$. Seja, $\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma} := \eta_1\sigma_1 + \eta_2\sigma_2 + \eta_3\sigma_3$, onde σ_k são as matrizes de Pauli, definidas acima. Mostre que

$$\exp(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}) = \cos(\theta)\,\mathbb{1} + i\operatorname{sen}(\theta)\left(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}\right).$$

e) Obtenha a representação espectral das matrizes de Pauli.

✠

E. 14.49 *Exercício*. Exiba pelo menos um exemplo de um par de matrizes quadradas A e B tais que $\exp(A)\exp(B) \neq \exp(A+B)$. ✠

E. 14.50 *Exercício*.

I. Mostre que se $A(t)$ são matrizes complexas $n\times n$ que comutam para t's diferentes, ou seja, tais que $A(t)A(t') = A(t')A(t)$ para todos t e t', então a série de Dyson

$$D(t) := \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\,dt_n dt_{n-1}\cdots dt_1$$

pode ser escrita como $D(t) = \exp\left(\int_0^t A(\tau)\, d\tau\right)$.

II. Sejam $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, e $A(t) = tR$. Compute $D(t)$, $t \in \mathbb{R}$. ✣

E. 14.51 *Exercício*. Seja a matriz

$$A \;=\; \begin{pmatrix} \alpha & \beta - i\alpha \\ 0 & \beta i \end{pmatrix} ,$$

onde $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

a) Determine seus autovalores e seus projetores espectrais E_1 e E_2 e escreva a matriz A na forma espectral

$$A \;=\; \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 \ .$$

Mostre explicitamente que E_1 e E_2 satisfazem $E_a E_b = \delta_{a,\,b} E_a$ e $E_1 + E_2 = \mathbb{1}$.

b) Determine explicitamente a matriz e^{At}, $t \in \mathbb{R}$.

c) Determine explicitamente a solução da equação

$$\dot{X}(t) \;=\; AX(t) + G(t) \ ,$$

onde

$$X(t) \;=\; \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \\ x_2(t) \end{pmatrix} , \qquad G(t) \;=\; \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ \\ e^{-i\omega t} \end{pmatrix} , \qquad X(0) \;=\; X_0 \;=\; \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \\ x_2^0 \end{pmatrix} .$$

✣

E. 14.52 *Exercício*. Seja a matriz

$$A \;=\; \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 0 & \delta & \gamma \end{pmatrix} ,$$

onde α, β, γ e δ são números complexos. Calcule $\exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$. ✣

E. 14.53 *Exercício*. Sejam

$$Y(t) \;=\; \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} , \qquad S(t) \;=\; \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{pmatrix}$$

e M uma matriz $n \times n$ complexa de coeficientes constantes. Mostre que o sistema linear

$$\dot{Y}(t) \;=\; MY(t) + S(t)$$

com condição inicial $Y(0) = Y_0$ tem por solução

$$Y(t) \;=\; e^{Mt} Y_0 + \int_0^t e^{(t-u)M} S(u)\, du \ .$$

✣