Capítulo 15
Propriedades de Algumas Funções Especiais

Conteúdo

Este capítulo dá continuidade ao Capítulo 14 e concentra-se no estudo de propriedades especiais de algumas das funções lá apresentadas como soluções de equações diferenciais de interesse. Nossos principais objetivos são a dedução das relações de ortogonalidade de certas funções, a dedução das chamadas fórmulas de Rodrigues e de relações de recorrência para as mesmas e também a determinação de suas funções geratrizes. Essas propriedades, que serão devidamente definidas e discutidas na Seção 15.1, são úteis para a resolução de equações diferenciais, especialmente aquelas provenientes de problemas envolvendo equações diferenciais parciais submetidas a certas condições iniciais e/ou de contorno. Exemplos de aplicações a problemas físicos são discutidos no Capítulo 21, página 901. Ainda que nosso tratamento seja tão completo quanto possível, dentro do escopo relativamente limitado que pretendemos ter, repetimos aqui a recomendação das referências listadas no Capítulo 14 à página 613.

15.1 Discussão Preliminar

Na próxima seção, a Seção 15.2, tencionamos apresentar ao leitor certas propriedades de algumas das funções encontradas como solução de equações diferenciais de interesse em Física, propriedades essas cuja utilidade maior manifesta-se especialmente, como mencionado, na resolução de equações diferenciais parciais submetidas a certas condições iniciais e/ou de contorno. Na presente seção prepararemos o terreno discutindo algumas ideias gerais.

As ideias gerais que apresentaremos envolvem *1.* as chamadas *relações de ortogonalidade*, que generalizam aquelas bem-conhecidas da teoria das séries de Fourier; *2.* as chamadas *fórmulas de Rodrigues*, úteis para a obtenção de relações de recorrência entre funções e *3.* as chamadas *funções geratrizes*[1], das quais outras propriedades úteis são extraídas, como

[1] A noção de função geratriz foi introduzida na Seção 6.1, página 266.

por exemplo representações integrais para certas funções.

Os exemplos principais dos quais trataremos a seguir, na Seção 15.2, envolvem os polinômios de Legendre, de Hermite e de Laguerre e as funções de Bessel, todas de importância na resolução de problemas do Eletromagnetismo, de Mecânica Quântica, da Mecânica dos Fluidos e de outras áreas.

15.1.1 Relações de Ortogonalidade

No Capítulo 14 tratamos nossas equações diferenciais como equações no plano complexo. Para a discussão das chamadas relações de ortogonalidade devemos considerar apenas equações diferenciais de uma variável real. De qualquer forma, na absoluta maioria das equações diferenciais de interesse em Física a função incógnita y é uma função de uma variável real, digamos, x, e assim consideraremos aqui.

Seja o problema de determinar as soluções não-nulas da equação diferencial $y''(x) + \lambda y(x) = 0$, com x restrita ao intervalo $[0, \pi]$, e que satisfaçam as condições $y(0) = y(\pi) = 0$. Tais soluções somente existem se λ for da forma $\lambda = m^2$ com $m = 1, 2, 3, \ldots$ e são, para cada tal m, da forma $y_m(x) = \operatorname{sen}(mx)$. Esse problema surge em um problema clássico da mecânica de corpos deformáveis, a saber, no problema da corda vibrante homogênea, do qual tratamos na Seção 21.5.1, página 955. De importância crucial na resolução daquele problema são as chamadas *relações de ortogonalidade* satisfeitas pelas funções $\operatorname{sen}(mx)$ no intervalo $[0, \pi]$, as quais afirmam que $\int_0^\pi \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{\pi}{2}\delta_{m,n}$, para todos $m, n = 1, 2, 3, \ldots$. Como o leitor pode constatar pela leitura da Seção 21.5.1, essas relações permitem a obtenção de soluções da equação de movimento da corda vibrante homogênea que satisfaçam condições, ditas condições iniciais, que fixem a posição e a velocidade de cada ponto da corda no instante inicial de seu movimento ("problema de Cauchy").

Diversos outros problemas físicos, alguns também tratados no Capítulo 21, página 901, podem ser igualmente resolvidos com o uso de relações de ortogonalidade análogas. Na presente seção discutiremos de forma bastante geral como tais relações se originam. Na Seção 15.2, página 687, veremos as ideias aqui apresentadas serem empregadas em exemplos concretos que, por sua vez, encontrarão aplicações nos problemas tratados no Capítulo 21.

Mencionamos, por fim, que as relações de ortogonalidade aqui discutidas podem ser elegantemente descritas na teoria dos espaços de Hilbert, que introduzimos no Capítulo 39, página 1962. Na teoria dos espaços de Hilbert até mesmo a denominação "relações de ortogonalidade", a qual pode parecer obscura a um leitor iniciante, torna-se natural. Boa parte dos desenvolvimentos que introduziremos na presente seção serão reencontrados na discussão do chamado problema de Sturm-Liouville, ao qual dedicamos o Capítulo 18, página 829.

• **Resultados preparatórios**

Vamos começar nossa discussão mencionando alguns resultados úteis que serão usados logo adiante.

Lema 15.1 *Seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ um aberto e seja x_0 um ponto de $\mathcal{O}$. Vamos supor que tenhamos duas funções reais diferenciáveis f e $g : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ que satisfaçam $\gamma_1 f(x_0) + \gamma_2 f'(x_0) = 0$ e $\gamma_1 g(x_0) + \gamma_2 g'(x_0) = 0$, para constantes (reais ou complexas) γ_1 e γ_2, ambas não-simultaneamente nulas, ou seja, $(\gamma_1, \gamma_2) \neq (0, 0)$. Então, vale*

$$f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0) = 0 . \tag{15.1}$$

Se as constantes γ_1 e γ_2 acima forem constantes reais, vale também

$$\overline{f(x_0)}g'(x_0) - \overline{f'(x_0)}g(x_0) = 0 . \tag{15.2}$$

□

Prova. As condições do enunciado podem ser escritas em forma matricial como

$$\begin{pmatrix} f(x_0) & f'(x_0) \\ g(x_0) & g'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Logo, como $(\gamma_1, \gamma_2) \neq (0, 0)$, a matriz do lado esquerdo deve ser não-inversível, ou seja, seu determinante deve ser nulo:

$f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0) = 0$. Se γ_1 e γ_2 forem constantes reais vale também

$$\begin{pmatrix} \overline{f(x_0)} & \overline{f'(x_0)} \\ g(x_0) & g'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e, pelo mesmo argumento de acima, segue que $\overline{f(x_0)}g'(x_0) - \overline{f'(x_0)}g(x_0) = 0$. ■

Corolário 15.1 *Seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ um aberto e seja x_0 um ponto de $\mathcal{O}$. Seja $u : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável. Então, uma condição necessária e suficiente para que existam constantes reais α_1 e α_2, ambas não-simultaneamente nulas, ou seja, $(\alpha_1,\ \alpha_2) \neq (0,\ 0)$ tais que $\alpha_1 u(x_0) + \alpha_2 u'(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathcal{O}$ é que valha $\overline{u(x_0)}u'(x_0) - \overline{u'(x_0)}u(x_0) = 0$.* □

Prova. Se existirem constantes reais α_1 e α_2, ambas não-simultaneamente nulas, tais que $\alpha_1 u(x_0) + \alpha_2 u'(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathcal{O}$, então, adotando $f = g = u$ em (15.2) segue que $\overline{u(x_0)}u'(x_0) - \overline{u'(x_0)}u(x_0) = 0$. Reciprocamente, se $\overline{u(x_0)}u'(x_0) - \overline{u'(x_0)}u(x_0) = 0$ então a matrix $\left(\begin{smallmatrix} \overline{u(x_0)} & \overline{u'(x_0)} \\ u(x_0) & u'(x_0) \end{smallmatrix}\right)$ não tem inversa e, portanto, pelo Corolário 9.1, página 357, existe um vetor não-nulo $\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ tal que

$$\begin{pmatrix} \overline{u(x_0)} & \overline{u'(x_0)} \\ u(x_0) & u'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{15.3}$$

Isso afirma que $\gamma_1 u(x_0) + \gamma_2 u'(x_0) = 0$ e que $\gamma_1 \overline{u(x_0)} + \gamma_2 \overline{u'(x_0)} = 0$. Tomando o complexo conjugado dessas igualdades, obtemos

$$\begin{pmatrix} \overline{u(x_0)} & \overline{u'(x_0)} \\ u(x_0) & u'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\gamma_1} \\ \overline{\gamma_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{15.4}$$

Somando e subtraindo (15.3) de (15.4) obtemos

$$\begin{pmatrix} \overline{u(x_0)} & \overline{u'(x_0)} \\ u(x_0) & u'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(\gamma_1) \\ \mathrm{Re}\,(\gamma_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} \overline{u(x_0)} & \overline{u'(x_0)} \\ u(x_0) & u'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\,(\gamma_1) \\ \mathrm{Im}\,(\gamma_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Como $(\gamma_1,\ \gamma_2) \neq (0,\ 0)$ então ou $(\alpha_1,\ \alpha_2) = \big(\mathrm{Re}\,(\gamma_1),\ \mathrm{Re}\,(\gamma_2)\big)$ ou $(\alpha_1,\ \alpha_2) = \big(\mathrm{Im}\,(\gamma_1),\ \mathrm{Im}\,(\gamma_2)\big)$ (ou ambos) são vetores reais não-nulos. Assim, provamos que existem constantes reais α_1 e α_2, ambas não-simultaneamente nulas, tais que $\begin{pmatrix} \overline{u(x_0)} & \overline{u'(x_0)} \\ u(x_0) & u'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e, portanto, tais que $\alpha_1 u(x_0) + \alpha_2 u'(x_0) = 0$. ■

• Convenções sobre intervalos. Alguma notação

Em muitas das equações diferenciais de interesse em Física a variável x é restrita a uma região $J \subset \mathbb{R}$ da reta real, sendo J um intervalo fechado (tal como $[a,\ b]$), aberto (tal como $(a,\ b)$) ou semiaberto (tal como $(a,\ b]$ ou $[a,\ b)$). Podem também ocorrer intervalos infinitos, tais como $J = (-\infty,\ \infty)$, ou semi-infinitos, como $J = (0,\ \infty)$ ou $J = [0,\ \infty)$. Denotaremos por J^0 o interior do intervalo J, ou seja, J^0 é o maior intervalo aberto contido em J. Por exemplo, se $J = [a,\ b]$ teremos $J^0 = (a,\ b)$, se $J = [0,\ \infty)$ então $J^0 = (0,\ \infty)$ e se J é aberto então $J^0 = J$.

Daqui para frente vamos escrever o intervalo J^0, finito ou não, na forma $J^0 := (A,\ B) \subset \mathbb{R}$ e, portanto, $(A,\ B)$ pode representar intervalos finitos, como por exemplo $(0,\ 1)$, semi-infinitos, como por exemplo $(0,\ \infty)$ ou ainda toda a reta real $(-\infty,\ \infty)$.

Para uma função f conveniente, vamos denotar por $\int_A^B f(x)dx$ o limite $\lim\limits_{\substack{a\to A_+ \\ b\to B_-}} \int_a^b f(x)dx$, caso este exista. Os limites $\lim\limits_{x\to Y_-}$ e $\lim\limits_{x\to Y_+}$ representam os limites laterais à esquerda e à direita, respectivamente.

• A forma canônica de Liouville

Até aqui escrevemos nossas equações lineares homogêneas de segunda ordem na forma

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) \ = \ 0$$

(agora já adotando como variável $x \in J$). Em muitos problemas de interesse essa equação pode ser escrita de outra forma, denominada por alguns autores de *forma canônica de Liouville*, e que será importante para o que segue:

$$\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) + \mu\, r(x)y(x) \ = \ 0, \tag{15.5}$$

onde,

1. $p(x)$ é real, contínua e diferenciável em J^0 e $p(x) > 0$ para todo $x \in J^0$.
2. q é real e contínua em J.
3. $r(x)$ é real e contínua em J^0 e $r(x) > 0$ para todo $x \in J^0$.
4. μ é uma constante.

(15.6)

As condições de positividade de p e r em J^0 são as mais importantes. Note-se que não excluiremos que p e r possam se anular (ou mesmo divergir) nos extremos do intervalo J[2].

Como o leitor pode facilmente constatar, a relação entre essas funções é a seguinte:

$$a(x) \ = \ \frac{p'(x)}{p(x)} \ , \qquad\qquad b(x) \ = \ \frac{1}{p(x)}\big(q(x) + \mu r(x)\big) \ .$$

Dadas $a(x)$ e $b(x)$, a primeira relação acima fixa $p(x)$ (a menos de uma constante), a saber,

$$p(x) \ = \ \exp\left(\int_0^x a(x')dx' + \text{const.}\right) \ .$$

Já a segunda nem sempre fixa $q(x)$ e $r(x)$ univocamente, tudo dependendo da condição de positividade sobre $r(x)$, que foi mencionada acima, ou de qual parâmetro se deseja tomar por μ. Na maioria dos casos, porém, q e r podem ser fixados univocamente, o que ficará claro nos exemplos que seguem.

Várias das equações diferenciais de segunda ordem das quais tratamos no Capítulo 14 podem ser escritas na forma canônica em algum intervalo J conveniente[3]. Vamos a alguns exemplos que nos interessarão:

- **A equação do oscilador harmônico simples:** $y''(x) + \lambda y(x) = 0$. Aqui $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1$ e $\mu = \lambda$. Vários tipos de intervalos J aparecem em problemas. No problema da corda vibrante, por exemplo, pode-se adotar $J = [0,\ L]$, L sendo o comprimento da corda.
- **A equação de Legendre** $(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda(\lambda + 1)y(x) = 0$ é tipicamente considerada no intervalo $J = [-1,\ 1]$ e pode ser escrita na forma canônica de Liouville como

$$\Big(\big(1 - x^2\big)\, y'(x)\Big)' + \lambda(\lambda + 1)y(x) \ = \ 0 \ .$$

[2] O caso em que p e r permanecem finitas e positivas nos extremos do intervalo J é particularmente importante no chamado Problema de Sturm-Liouville regular, tratado no Capítulo 18, página 829.

[3] A conveniência é ditada pelo problema físico subjacente.

Aqui $p(x) = (1-x^2)$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1$ e $\mu = \lambda(\lambda+1)$.

Note que $p(x) > 0$ em $J^0 = (-1,\ 1)$, mas anula-se nos extremos $x = \pm 1$. Já a função $r(x)$ é positiva em todo $J = [-1,\ 1]$.

- **A equação de Hermite** $y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0$, é tipicamente considerada no intervalo $J = (-\infty,\ \infty)$ e pode ser escrita na forma canônica de Liouville como

$$\left(e^{-x^2}\, y'(x)\right)' + \lambda e^{-x^2} y(x) \;=\; 0\;.$$

Aqui $p(x) = e^{-x^2}$, $q(x) = 0$, $r(x) = e^{-x^2}$ e $\mu = \lambda$.

Note que $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$ em todo $J = (-\infty,\ \infty)$.

- **A equação de Tchebychev** $(1-x^2)y''(x) - x\,y'(x) + \lambda^2 y(x) = 0$ é tipicamente considerada no intervalo $J = [-1,\ 1]$ e pode ser escrita na forma canônica de Liouville como

$$\left(\sqrt{1-x^2}\, y'(x)\right)' + \lambda^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y(x) \;=\; 0\;.$$

Aqui $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ e $\mu = \lambda^2$.

Note que $p(x) > 0$ em $J^0 = (-1,\ 1)$, mas anula-se nos extremos $x = \pm 1$. Já a função $r(x)$ é positiva em todo $J = (-1,\ 1)$, mas diverge nos extremos $x = \pm 1$. No entanto, r é integrável no intervalo J, isto é, $\int_{-1}^{1} r(x)dx$ é finita.

- **A equação de Laguerre** $xy''(x) + (1-x)y'(x) + \lambda y(x) = 0$ é tipicamente considerada no intervalo $J = [0,\ \infty)$ e pode ser escrita na forma canônica de Liouville como

$$\left(xe^{-x}\, y'(x)\right)' + \lambda e^{-x} y(x) \;=\; 0\;.$$

Aqui $p(x) = xe^{-x}$, $q(x) = 0$, $r(x) = e^{-x}$ e $\mu = \lambda$.

Note que $p(x) > 0$ em $J^0 = (0,\ \infty)$, mas anula-se no extremo $x = 0$. Já a função $r(x)$ é positiva em todo $J = [0,\ \infty)$.

- **A equação de Bessel** de ordem ν, escrita na forma $x^2y''(x) + xy'(x) + (\alpha^2x^2 - \nu^2)y(x) = 0$, é tipicamente considerada no intervalo $J = [0,\ 1]$ e pode ser escrita no intervalo $(0,\ 1]$ na forma canônica de Liouville como

$$\left(xy'(x)\right)' - \frac{\nu^2}{x}\, y(x) + \alpha^2 xy(x) \;=\; 0\;\;.$$

Aqui $p(x) = x$, $q(x) = -\frac{\nu^2}{x}$, $r(x) = x$ e $\mu = \alpha^2$.

Note que $p(x) > 0$ em $J^0 = (0,\ 1)$, mas anula-se no extremo $x = 0$, o mesmo valendo para $r(x)$.

A equação de Bessel esférica também podem ser escrita na forma canônica de Liouville. Porém, a mesma pode ser facilmente transformada em uma equação de Bessel e, portanto, seu tratamento é um caso particular do daquelas equações. Vide Seção 15.2.8, página 735.

• O operador de Liouville

A forma canônica de Liouville (15.5) sugere a introdução de uma notação muito conveniente. Seja uma função u definida em J que seja pelo menos duas vezes diferenciável. Sob as hipóteses (15.6) definimos o chamado *operador de Liouville*[4], denotado por L, como sendo o operador diferencial dado por

$$(Lu)(x) \;:=\; \left(p(x)u'\right)' + q(x)u\;, \tag{15.7}$$

ou seja,

$$L \;:=\; \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)\;.$$

[4]Essa nomenclatura não é universal, talvez por causar uma certa confusão com um outro operador, também dito de Liouville, que ocorre na Mecânica Clássica: $\mathcal{L} := \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}$, com H sendo a função Hamiltoniana, q e p sendo coordenadas de posição e momento, respectivamente.

Definimos também o operador diferencial denotado por M por

$$M \;:=\; -\frac{1}{r(x)}L \;=\; -\frac{1}{r(x)}\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) - -\frac{q(x)}{r(x)}\;.$$

A equação (15.5) fica simplificada na forma

$$(Lu)(x) + \lambda\, r(x)u(x) \;=\; 0\;, \qquad \text{ou seja,} \qquad (Mu)(x) \;=\; \lambda\, u(x)\;. \tag{15.8}$$

Se λ for um número tal que a equação (15.8) for satisfeita para alguma função u_λ, então diz-se que λ é um *autovalor* e u_λ é dito ser a *auto-função* associada ao autovalor λ. Essa nomenclatura surge por analogia com os conceitos de autovalor e auto-vetor de matrizes na álgebra linear. Estritamente falando λ e u_λ são auto-valores, respectivamente, auto-funções, do operador M.

• O Lema de Green

O seguinte resultado elemetar sobre o operador L, por vezes, denominado Lema de Green[5], será importante no que segue.

Lema 15.2 *Seja $J \equiv (A,\ B) \subset \mathbb{R}$ um intervalo como descrito acima e sejam u e v funções duas vezes diferenciáveis definidas em um intervalo finito $[a,\ b] \subset J$, com $A < a < b < B$. Sejam p, q e r satisfazendo as condições enumeradas em (15.6). Então,*

$$\int_a^b \overline{v(x)}\;(Lu)(x)\;dx - \int_a^b \overline{(Lv)(x)}\;u(x)\;dx \;=\; p(b)\Big(\overline{v(b)}u'(b) - \overline{v'(b)}u(b)\Big) - p(a)\Big(\overline{v(a)}u'(a) - \overline{v'(a)}u(a)\Big)\;. \tag{15.9}$$

Se u e v forem definidas em J^0, forem duas vezes diferenciáveis e satisfizerem as condições que os limites laterais

$$\lim_{a\to A_+} p(a)\Big(\overline{v(a)}u'(a) - \overline{v'(a)}u(a)\Big) \qquad e \qquad \lim_{b\to B_-} p(b)\Big(\overline{v(b)}u'(b) - \overline{v'(b)}u(b)\Big)$$

existem e satisfazem

$$\lim_{a\to A_+} p(a)\Big(\overline{v(a)}u'(a) - \overline{v'(a)}u(a)\Big) \;=\; \lim_{b\to B_-} p(b)\Big(\overline{v(b)}u'(b) - \overline{v'(b)}u(b)\Big)\;, \tag{15.10}$$

então teremos, consequentemente,

$$\int_A^B \overline{v(x)}\;(Lu)(x)\;dx \;=\; \int_A^B \overline{(Lv)(x)}\;u(x)\;dx\;, \tag{15.11}$$

o que equivale a dizer que

$$\int_A^B \overline{v(x)}\;(Mu)(x)\;r(x)\,dx \;=\; \int_A^B \overline{(Mv)(x)}\;u(x)\;r(x)\,dx\;. \tag{15.12}$$

□

Prova. Usando-se integração por partes, temos

$$\begin{aligned}
\int_a^b \overline{v(x)}\;(Lu)(x)\;dx \;&=\; \int_a^b \overline{v(x)}\left(p(x)u'\right)'\,dx + \int_a^b \overline{v(x)}q(x)u(x)\;dx \\
&=\; -\int_a^b \overline{v'(x)}(p(x)u')\;dx + \overline{v}pu'\Big|_a^b + \int_a^b \overline{v(x)}q(x)u(x)\;dx \\
&=\; \int_a^b u\left(p\overline{v'}\right)'\;dx + \overline{v}pu'\Big|_a^b - \overline{v'}pu\Big|_a^b + \int_a^b \overline{v(x)}q(x)u(x)\;dx \\
&=\; \int_a^b \overline{(Lv)(x)}\;u(x)\;dx + \overline{v}pu'\Big|_a^b - \overline{v'}pu\Big|_a^b\;,
\end{aligned} \tag{15.13}$$

[5]George Green (1793–1841).

ou seja,

$$\int_a^b \overline{v(x)}\,(Lu)(x)\,dx - \int_a^b \overline{(Lv)(x)}\,u(x)\,dx \;=\; \left(\overline{v}pu' - \overline{v'}pu\right)\Big|_a^b \;=\; p(b)\left(\overline{v(b)}u'(b) - \overline{v'(b)}u(b)\right) - p(a)\left(\overline{v(a)}u'(a) - \overline{v'(a)}u(a)\right).$$

■

Nota para o estudante mais avançado. Se V for um espaço vetorial de funções duas vezes diferenciáveis satisfazendo (15.10), então (15.11) informa-nos que o operador L é um operador simétrico em V com relação ao produto escalar $\langle f,\,g\rangle = \int_A^B \overline{f(x)}g(x)dx$ e (15.12) informa-nos que o operador M é um operador simétrico em V com relação ao produto escalar $\langle f,\,g\rangle_r = \int_A^B \overline{f(x)}g(x)\,r(x)dx$. ♣

15.1.1.1 Condições de Contorno e a Origem das Relações de Ortogonalidade

Vamos nos interessar por equações diferenciais como $Lu + \mu r u = 0$ definidas em um intervalo $J = (A,\,B)$, não-necessariamente finito, como descrevemos acima, com as soluções u satisfazendo as condições que os limites laterais

$$\lim_{a\to A_+} p(a)\left(\overline{u(a)}u'(a) - \overline{u'(a)}u(a)\right) \quad \text{e} \quad \lim_{b\to B_-} p(b)\left(\overline{u(b)}u'(b) - \overline{u'(b)}u(b)\right)$$

existam e satisfaçam

$$\lim_{a\to A_+} p(a)\left(\overline{u(a)}u'(a) - \overline{u'(a)}u(a)\right) = \lim_{b\to B_-} p(b)\left(\overline{u(b)}u'(b) - \overline{u'(b)}u(b)\right). \tag{15.14}$$

Há várias condições sob as quais (15.14) é satisfeita. Listemos alguns dos casos que ocorrem em equações de interesse:

I $J = (A,\,B)$ é um intervalo finito ou não, $\lim_{a\to A_+} p(A) = \lim_{b\to B_-} p(B) = 0$ mas o produto $\overline{u(x)}u'(x)$ não diverge nos limites $x \to A_+$ e $x \to B_-$. Essas condições implicam (15.14), ambos os lados da igualdade sendo nulos.

II $J = [A,\,B]$ é um intervalo finito, $p(A)$ e $p(B)$ são ambos finitos mas u satisfaz condições de contorno em A e em B do forma

$$\alpha_1 u(A) + \alpha_2 u'(A) \;=\; 0\,, \tag{15.15}$$

$$\beta_1 u(B) + \beta_2 u'(B) \;=\; 0\,, \tag{15.16}$$

onde $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2$ são constantes <u>reais</u> fixadas, sendo $(\alpha_1,\ \alpha_2) \neq (0,\ 0)$ e $(\beta_1,\ \beta_2) \neq (0,\ 0)$.

Pelo Corolário 15.1, página 677, essas condições implicam que $\overline{u(A)}u'(A) - \overline{u'(A)}u(A) = 0$ e $\overline{u(B)}u'(B) - \overline{u'(B)}u(B) = 0$, o que implica (15.14), ambos os lados da igualdade sendo nulos.

III $J = (A,\,B)$ é um intervalo finito e vale uma combinação dos casos anteriores. Por exemplo, $\lim_{a\to A_+} p(A) = 0$ com o produto $\overline{u(x)}u'(x)$ não divergindo no limite $x \to A_+$ e, além disso, existem constantes reais $(\beta_1,\ \beta_2) \neq (0,\ 0)$ tais que $\beta_1 u(B) + \beta_2 u'(B) = 0$.

As condições (15.14) são, portanto, mais gerais que condições como **I** ou **II**, acima. A Proposição 15.1, adiante, aponta algumas de suas consequências.

• **<u>Realidade dos autovalores, simplicidade e realidade das autofunções</u>**

Proposição 15.1 *Seja um intervalo (não necessariamente finito) $J = (A,\,B)$, como descrito acima, e sejam p, q e r funções definidas em J, satisfazendo as condições enumeradas em (15.6).*

Considere-se o problema de determinar uma constante μ e uma solução u da equação diferencial $Lu(x) + \mu r(x)u(x) = 0$ definida em J, com u satisfazendo as condições que os limites

$$\lim_{a\to A_+} p(a)\left(\overline{u(a)}u'(a) - \overline{u'(a)}u(a)\right) \quad e \quad \lim_{b\to B_-} p(b)\left(\overline{u(b)}u'(b) - \overline{u'(b)}u(b)\right)$$

existam e satisfaçam

$$\lim_{a\to A_+} p(a)\left(\overline{u(a)}u'(a) - \overline{u'(a)}u(a)\right) = \lim_{b\to B_-} p(b)\left(\overline{u(b)}u'(b) - \overline{u'(b)}u(b)\right). \tag{15.17}$$

Então, valem os seguintes fatos:

a. $\mu \in \mathbb{R}$,

b. *A solução u é única a menos de uma constante multiplicativa,*

c. *A solução u é múltipla de uma solução real.*

Consequentemente, toda solução da equação $Lu(x) + \mu r(x)u(x) = 0$ com $\mu \in \mathbb{R}$ sob as condições (15.17) é múltipla de uma <u>única</u> solução <u>real</u> da equação $Lu(x) + \mu r(x)u(x) = 0$. Note-se que funções reais satisfazem trivialmente as condições (15.17). □

Prova. **Parte a.** Consideremos $(a,\,b)$ um intervalo finito contido em J e seja a expressão $\left(\overline{\mu} - \mu\right)\int_a^b |u(x)|^2\,r(x)\,dx$. Podemos escrevê-la como

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\mu} - \mu\right)\int_a^b |u(x)|^2\,r(x)\,dx &= \left(\overline{\mu} - \mu\right)\int_a^b \overline{u(x)}u(x)\,r(x)\,dx \\
&= \int_a^b \overline{(\mu u(x) r(x))}u(x)\,dx - \int_a^b \overline{u(x)}\big(\mu r(x)u(x)\big)\,dx \\
&= -\int_a^b \overline{(Lu)(x)}u(x)\,dx + \int_a^b \overline{u(x)}(Lu)(x)\,dx \\
&\overset{(15.9)}{=} p(b)\left(\overline{u(b)}u'(b) - \overline{u'(b)}u(b)\right) - p(a)\left(\overline{u(a)}u'(a) - \overline{u'(a)}u(a)\right).
\end{aligned}$$

Por (15.17), o lado direito converge a zero nos limites $b \to B_-$ e $a \to A_+$. Como $\int_a^b |u(x)|^2\,r(x)\,dx > 0$ para todos a e b com $A < a < b < B$, concluímos que $\overline{\mu} = \mu$, provando que $\mu \in \mathbb{R}$.

Parte b. Sejam u_1, u_2 tais que $Lu_1 + \mu r u_1 = 0$ e $Lu_2 + \mu r u_2 = 0$ para um dado μ, ambas satisfazendo as condições mencionadas no enunciado. Como vimos na parte **a**, μ é real. Considere-se a função

$$\mathcal{W}_{12}(x) \;=\; \det\begin{pmatrix} \overline{u_1(x)} & \overline{u_1'(x)} \\ u_2(x) & u_2'(x)\end{pmatrix} \;=\; \overline{u_1(x)}u_2'(x) - \overline{u_1'(x)}u_2(x)\,.$$

Vamos em primeiro lugar mostrar que $p(x)\mathcal{W}_{12}(x)$ é constante, ou seja, que $(p\mathcal{W}_{12})' = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
(p\mathcal{W}_{12})' = p'\mathcal{W}_{12} + p\mathcal{W}_{12}' &= p'\left(\overline{u_1}u_2' - \overline{u_1'}u_2\right) + p\left(\overline{u_1}u_2' - \overline{u_1'}u_2\right)' \\
&= p'\left(\overline{u_1}u_2' - \overline{u_1'}u_2\right) + p\left(\overline{u_1'}u_2' + \overline{u_1}u_2'' - \overline{u_1''}u_2 - \overline{u_1'}u_2'\right) \\
&= p'\left(\overline{u_1}u_2' - \overline{u_1'}u_2\right) + p\left(\overline{u_1}u_2'' - \overline{u_1''}u_2\right) \\
&= \overline{u_1}(p'u_2' + pu_2'') - u_2\overline{(p'u_1' + pu_1'')} \\
&= \overline{u_1}\big(pu_2'\big)' - u_2\overline{\big(pu_1'\big)'} \\
&= -\overline{u_1}(qu_2 + \mu r u_2) + u_2\overline{(qu_1 + \mu r u_1)} \\
&= 0\,.
\end{aligned} \tag{15.18}$$

Agora, $p(x)\mathcal{W}_{12}(x) = p(x)\big(\overline{u_1(x)}u_2'(x) - u_2(x)\overline{u_1'(x)}\big)$ e, portanto, pelas hipóteses (15.17), seus limites $b \to B_-$ e $a \to A_+$ existem e anulam-se, provando que $p(x)\mathcal{W}_{12}(x) = 0$ para todo x. Pelas hipóteses em (15.6), p é positivo em J^0 e, portanto, $\mathcal{W}_{12}(x) = 0$ para todo x.

Isso diz que as duas linhas que formam a matriz cujo determinante é $\mathcal{W}_{12}(x)$ são, para cada $x \in [a,\ b]$, proporcionais uma a outra, ou seja, existe $\gamma(x)$ tal que, por exemplo,

$$\overline{u_1(x)} = \gamma(x)u_2(x) \qquad \text{e} \qquad \overline{u_1'(x)} = \gamma(x)u_2'(x)$$

para todo x. Derivando a primeira e comparando à segunda, conclui-se que $\gamma(x)$ é constante, ou seja, não depende de x. Assim, verificamos que as funções $\overline{u_1}$ e u_2 são múltiplas entre si. Com isso, mostramos que se tivermos duas auto-funções com o mesmo auto-valor as auto-funções são múltiplas uma da outra e o subespaço que ambas geram tem dimensão 1.

Parte c. Como p, q, r são reais e também μ (pela parte **a**), então se u é solução de $Lu + \mu ru = 0$ seu complexo conjugado $\overline{u}$ também o é. Fora isso, se u satisfaz as condições (15.17), seu complexo conjugado $\overline{u}$ também as satisfaz. Logo, pela parte **b**, existe uma constante $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{u} = \gamma u$.

A equação $\overline{u} = \gamma u$ implica $u = \overline{\gamma u}$ e, portanto $|\gamma| = 1$, ou seja, $\gamma = e^{i\theta}$, para $\theta \in \mathbb{R}$. Decompondo u em suas partes real e imaginária, $u = v + iw$, concluímos que $v - iw = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)(v + iw)$, ou seja, valem $(1 - \cos\theta)v = -\,\mathrm{sen}(\theta)w$ e $(1 + \cos\theta)w = -\,\mathrm{sen}(\theta)v$. Agora, se $\cos\theta = 1$, então a segunda igualdade implica $w = 0$ e, portanto, $u = v$. Se $\cos\theta \neq 1$, então a primeira igualdade implica $v = -\frac{\mathrm{sen}\theta}{1-\cos\theta}w$ e , portanto, $u = \left(-\frac{\mathrm{sen}\theta}{1-\cos\theta} + i\right)w$. ■

Os resultados da Proposição 15.1 podem ser parafraseados da seguinte forma. Considere-se o problema de determinar os autovalores μ e autofunções u da equação $Lu + \mu ru = 0$ sob condições que impliquem a condições (15.17), tais como as condições **I** ou **II** da página 681. Então, os autovalores são reais, simples (ou seja, não-degenerados: para cada autovalor o espaço das correspondentes autofunções é unidimencional) e as autofunções podem ser tomadas reais.

• Problemas de autovalores e relações de ortogonalidade

No teorema a seguir consideraremos funções reais u_1 e u_2 definidas em um intervalo (não necessariamente finito) $J = (A,\ B)$, que satisfaçam as condições de os limites

$$\lim_{a\to A_+} p(a)\Big(u_1(a)u_2'(a) - u_1'(a)u_2(a)\Big) \quad \text{e} \quad \lim_{b\to B_-} p(b)\Big(u_1(b)u_2'(b) - u_1'(b)u_2(b)\Big)$$

existirem e satisfazerem

$$\lim_{a\to A_+} p(a)\Big(u_1(a)u_2'(a) - u_1'(a)u_2(a)\Big) = \lim_{b\to B_-} p(b)\Big(u_1(b)u_2'(b) - u_1'(b)u_2(b)\Big) . \tag{15.19}$$

Há várias condições sob as quais (15.19) é satisfeita. Listemos alguns dos casos que ocorrem em equações de interesse:

I' $J = (A,\ B)$ é um intervalo finito ou não, $\lim_{a\to A_+} p(A) = \lim_{b\to B_-} p(B) = 0$ mas o produto $u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)$ não diverge nos limites $x \to A_+$ e $x \to B_-$. Essas condições implicam (15.19), ambos os lados da igualdade sendo nulos.

II' $J = [A,\ B]$ é um intervalo finito, $p(A)$ e $p(B)$ são ambos finitos mas tanto a função u_1 quanto a função u_2 satisfazem condições de contorno em A e em B do forma

$$\alpha_1 u(A) + \alpha_2 u'(A) = 0 , \tag{15.20}$$

$$\beta_1 u(B) + \beta_2 u'(B) = 0 , \tag{15.21}$$

onde $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2$ são constantes reais fixadas, sendo $(\alpha_1,\ \alpha_2) \neq (0,\ 0)$ e $(\beta_1,\ \beta_2) \neq (0,\ 0)$.

Pelo Lema 15.1, página 676, particularmente por (15.1), essas condições implicam que $u_1(A)u_2'(A) - u_1'(A)u_2(A) = 0$ e $u_1(B)u_2'(B) - u_1'(B)u_2(B) = 0$, o que implica (15.19), ambos os lados da igualdade sendo nulos.

III' $J = (A,\ B)$ é um intervalo finito e vale uma combinação dos casos anteriores. Por exemplo, $\lim_{a\to A_+} p(A) = 0$ com o produto $u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)$ não divergindo no limite $x \to A_+$ e, além disso, existem constantes reais $(\beta_1,\ \beta_2) \neq (0,\ 0)$ tais que tanto a função u_1 quanto a função u_2 satisfazem $\beta_1 u(B) + \beta_2 u'(B) = 0$.

Consequentemente, as condições (15.19) são mais gerais que condições como **I'** ou **II'**, acima. O seguinte resultado aponta uma das consequências das hipóteses de (15.19) e expressa uma da mais importantes propriedades das soluções das equações diferenciais discutidas acima: as chamadas relações de ortogonalidade.

Teorema 15.1 *Considere-se a equação diferencial $Lu(x) + \mu r(x)u(x) = 0$ definida no intervalo (não necessariamente finito) $J = (A,\ B)$, com p, q e r satisfazendo as condições enumeradas em (15.6). Sejam λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e suponhamos que u_1 e u_2 sejam funções reais não-nulas que satisfazem*

$$Lu_1(x) + \lambda_1 r(x)u_1(x) = 0 \qquad e \qquad Lu_2(x) + \lambda_2 r(x)u_2(x) = 0 , \tag{15.22}$$

em $J = (A,\ B)$ e suponhamos ainda que os limites

$$\lim_{a\to A_+} p(a)\Big(u_1(a)u_2'(a) - u_1'(a)u_2(a)\Big) \quad e \quad \lim_{b\to B_-} p(b)\Big(u_1(b)u_2'(b) - u_1'(b)u_2(b)\Big)$$

existam e satisfaçam

$$\lim_{a\to A_+} p(a)\Big(u_1(a)u_2'(a) - u_1'(a)u_2(a)\Big) = \lim_{b\to B_-} p(b)\Big(u_1(b)u_2'(b) - u_1'(b)u_2(b)\Big) . \tag{15.23}$$

Então,

$$\int_A^B u_1(x)\ u_2(x)\ r(x)\ dx = 0 . \tag{15.24}$$

□

Prova. Seja $(a,\ b)$, com $A < a < b < B$, qualquer intervalo finito contido em J^0. Consideremos a expressão

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b u_1(x)\,u_2(x)\,r(x)\,dx .$$

Como λ_1 e λ_2 são reais, isso pode ser escrito por (15.22) como

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (\lambda_1 r(x)u_1(x))\ u_2(x)\ dx - \int_a^b u_1(x)\ (\lambda_2 r(x)u_2(x))\ dx \\
&\qquad = \int_a^b u_1(x)\ (Lu_2)(x)\ dx - \int_a^b (Lu_1)(x)\ u_2(x)\ dx \\
&\qquad\qquad = p(b)\Big(u_1(b)u_2'(b) - u_1'(b)u_2(b)\Big) - p(a)\Big(u_1(a)u_2'(a) - u_1'(a)u_2(a)\Big) ,
\end{aligned}$$

sendo que na última igualdade usamos (15.9), lembrando que, no caso presente, todas as funções e constantes são reais. Consequentemente, tem-se pelas hipóteses,

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1 - \lambda_2)\int_A^B u_1(x)\,u_2(x)\,r(x)\,dx \\
&\qquad = \lim_{b\to B_-} p(b)\Big(u_1(b)u_2'(b) - u_1'(b)u_2(b)\Big) - \lim_{a\to A_+} p(a)\Big(u_1(a)u_2'(a) - u_1'(a)u_2(a)\Big) = 0 .
\end{aligned}$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, isso implica $\int_A^B u_1(x)\,u_2(x)\,r(x)\,dx = 0$, como queríamos provar. ■

A relação (15.24) diz-nos que u_1 e u_2 são ortogonais em relação ao produto escalar real

$$\langle f,\ g\rangle_r := \int_A^B f(x)g(x)\,r(x)\ dx , \tag{15.25}$$

definido no conjunto de todas as funções $f : J \to \mathbb{R}$ tais que $\int_A^B f(x)^2\, r(x)\, dx < \infty$. Essas relações de ortogonalidade são de suma importância em aplicações, especialmente na resolução de equações diferenciais sob certas condições de contorno. O leitor interessado em exemplos pode passar diretamente à Seção 15.2, página 687. Aplicações à solução de equações diferenciais parciais de interesse em Física serão vistas no Capítulo 21, página 901.

15.1.2 Fórmulas de Rodrigues

As ideias desta pequena seção serão melhor ilustradas nos exemplos da Seção 15.2.

Consideremos a equação diferencial $\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) + \mu\, r(x)y(x) = 0$, ou seja, $Ly + \mu r y = 0$, com p, q e r satisfazendo as condições enumeradas em (15.6) e suponhamos também que r seja uma função infinitamente diferenciável de x. Consideremos que o intervalo J onde a equação é considerada seja $J = [-1,\ 1]$. Para $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, sejam definidas as funções

$$p_n(x) \;:=\; \frac{1}{r(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left(r(x)(1-x^2)^n\right) . \tag{15.26}$$

É fácil ver que se $m < n$, então

$$\int_{-1}^{1} x^m\, p_n(x)\, r(x)\, dx \;=\; 0 , \tag{15.27}$$

ou seja, cada p_n é ortogonal, segundo o produto escalar $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_r$ definido em (15.25), a todos os polinômios de grau menor que n. Para provar (15.27), basta escrever

$$\int_{-1}^{1} x^m\, p_n(x)\, r(x)\, dx \;=\; \int_{-1}^{1} x^m\, \frac{d^n}{dx^n}\left(r(x)(1-x^2)^n\right) dx$$

e fazer n vezes integração por partes, lembrando que a expressão $\frac{d^k}{dx^k}\Big(r(x)(1-x^2)^n\Big)$, com $k < n$, sempre contém um fator $(1 - x^2)$ que se anula em ± 1.

E. 15.1 *Exercício importante*. Faça isso! ✠

Se as funções p_n forem elas mesmas polinômios de grau n, o que ocorre em vários casos, concluímos que

$$\int_{-1}^{1} p_m(x)\, p_n(x)\, r(x)\, dx \;=\; 0 ,$$

sempre que $m \neq n$. Isso significa que os polinômios $p_n(x)$ são ortogonais dois-a-dois segundo o produto escalar $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_r$ no intervalo $J = [-1,\ 1]$.

Várias equações diferenciais do tipo mencionado acima, definidas em um intervalo finito $[-1,\ 1]$, têm soluções polinomiais, como por exemplo, a equação de Legendre e de Tchebychev. Como as mesmas, pelo Teorema 15.1, são ortogonais em relação ao produto escalar $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_r$ no intervalo $J = [-1,\ 1]$[6], as considerações acima sugerem que as soluções polinomiais possam ser escritas, a menos de uma constante multiplicativa, na forma (15.26). Isso é, de fato, verdade para várias equações importantes (como as de Legendre e Tchebychev) e da expressão (15.26) será possível obter várias propriedades daqueles polinômios. Isso será melhor discutido nos exemplos que trataremos na Seção 15.2.

A expressão (15.26) é denominada *fórmula de Rodrigues*[7].

E. 15.2 *Exercício*. Generalize a fórmula de Rodrigues (15.26) para um intervalo $J = [a,\ b]$ finito arbitrário. Sugestão: procure uma transformação linear que mapeie bijetivamente $[-1,\ 1]$ em $[a,\ b]$. ✠

As fórmulas de Rodrigues podem ser generalizadas para equações diferenciais definidas em intervalos não-finitos, como $J = (0,\ \infty)$ ou $J = (-\infty,\ \infty)$. Tratemos disso.

[6] Veremos isso explicitamente nos exemplos da Seção 15.2

[7] Benjamin Olinde Rodrigues (1794–1851). Rodrigues foi banqueiro e matemático amador, nascido na França, mas de origem judaico-portuguesa. Encontrou a fórmula que leva seu nome apenas para o caso dos polinômios de Legendre. A generalização aqui apresentada é posterior. Rodrigues também deu contribuições para a teoria dos quatérnions e para o grupo SO(3) (vide Proposição 22.5, página 1054). Apesar de banqueiro, Rodrigues foi líder do partido socialista francês.

Para o caso $J = (0,\ \infty)$ devemos supor novamente que $r(x)$ seja infinitamente diferenciável, mas devemos ainda supor que $r(x)$ seja limitada em $x = 0$ e que $r(x)$ e todas as suas derivadas $r^{(m)}(x)$ caiam no infinito mais rápido que qualquer potência, ou seja $\lim_{x\to\infty} x^k r^{(m)}(x) = 0$ para todo $k \geq 0$ e $m \geq 0$. Definimos, nesse caso,

$$p_n(x) \;:=\; \frac{1}{r(x)}\frac{d^n}{dx^n}\Big(r(x)\, x^n\Big) . \tag{15.28}$$

É fácil ver que se $m < n$, então

$$\int_0^{\infty} x^m\, p_n(x)\, r(x)\, dx \;=\; 0 , \tag{15.29}$$

Para ver isso, escrevemos novamente

$$\int_0^{\infty} x^m\, p_n(x)\, r(x)\, dx \;=\; \int_0^{\infty} x^m\, \frac{d^n}{dx^n}\left(r(x)\, x^n\right) dx$$

e fazemos integração por partes, usando que $\lim_{x\to\infty} x^k r^{(m)}(x) = 0$ para todos $k \geq 0$ e $m \geq 0$ e que a expressão $\frac{d^k}{dx^k}\Big(r(x)x^n\Big)$, com $k < n$, sempre contém um fator x que se anula em 0.

E. 15.3 *Exercício importante*. Complete os detalhes. ✠

Em certos exemplos, como na equação de Laguerre, as funções p_n são polinômios na variável x. Nesses casos, temos então que

$$\int_0^{\infty} p_m(x)\, p_n(x)\, r(x)\, dx \;=\; 0 ,$$

sempre que $m \neq n$. Isso significa que os polinômios $p_n(x)$ são ortogonais dois-a-dois segundo o produto escalar $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_r$ no intervalo $J = (0,\ \infty)$. Como antes, isso sugere que as soluções polinomiais de certas equações diferenciais definidas no intervalo $J = (0,\ \infty)$ possam ser escritas, a menos de uma constante multiplicativa, na forma sugerida pela fórmula de Rodrigues (15.28). Veremos que tal é o caso para os polinômios de Laguerre e isso nos permitirá obter algumas relações úteis sobre aqueles polinômios.

Para o caso $J = (-\infty,\ \infty)$ devemos supor novamente que $r(x)$ seja infinitamente diferenciável, mas devemos ainda supor que $r(x)$ e todas as suas derivadas $r^{(m)}(x)$ caiam no infinito mais rápido que qualquer potência, ou seja $\lim_{|x|\to\infty} |x|^k |r^{(m)}(x)| = 0$ para todo $k \geq 0$ e $m \geq 0$. Definimos, nesse caso,

$$p_n(x) \;:=\; \frac{1}{r(x)}\frac{d^n}{dx^n}\Big(r(x)\Big) . \tag{15.30}$$

É fácil ver que se $m < n$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m\, p_n(x)\, r(x)\, dx \;=\; 0 , \tag{15.31}$$

Para ver isso, escrevemos novamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m\, p_n(x)\, r(x)\, dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x^m\, \frac{d^n}{dx^n}\Big(r(x)\Big)\, dx$$

e fazemos integração por partes, usando que $\lim_{|x|\to\infty} |x|^k |r^{(m)}(x)| = 0$ para todos $k \geq 0$ e $m \geq 0$.

E. 15.4 *Exercício importante*. Complete os detalhes. ✠

Em certos exemplos, como na equação de Hermite, as funções p_n são polinômios na variável x. Nesses casos, temos então que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_m(x)\, p_n(x)\, r(x)\, dx \;=\; 0 ,$$

sempre que $m \neq n$. Isso significa que os polinômios $p_n(x)$ são ortogonais dois-a-dois segundo o produto escalar $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_r$ no intervalo $J = (-\infty,\ \infty)$. Como antes, isso sugere que as soluções polinomiais de certas equações diferenciais definidas no intervalo $J = (-\infty,\ \infty)$ possam ser escritas, a menos de uma constante multiplicativa, na forma sugerida pela fórmula de Rodrigues (15.30). Veremos que tal é o caso para os polinômios de Hermite e isso nos permitirá obter algumas relações úteis sobre os mesmos.

15.2 Propriedades de Algumas Funções Especiais

Vamos agora então reunir o conhecimento acumulado acima para obter várias propriedades úteis de algumas das funções especiais que encontramos como soluções de equações diferenciais de interesse. As várias identidades que provaremos podem ser obtidas de diferentes modos, de sorte que o leitor certamente encontrará na literatura demonstrações alternativas àquelas aqui apresentadas.

15.2.1 Propriedades dos Polinômios de Legendre

• **Relações de ortogonalidade para os polinômios de Legendre**

A equação de Legendre $\big((1-x^2)\,y'(x)\big)' + \lambda(\lambda+1)y(x) = 0$, é tipicamente considerada no intervalo $J = [-1,\ 1]$. Aqui, $p(x) = (1-x^2)$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1$ e $\mu = \lambda(\lambda+1)$. A função $p(x)$ anula-se nos extremos ± 1 do intervalo $J = [-1,\ 1]$.

Os polinômios de Legendre $P_m(x)$ foram definidos em (14.14), página 617, por

$$P_m(x) := \sum_{a=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(-1)^a\,(2m-2a)!}{2^m\,(m-a)!\,(m-2a)!\,a!}\ x^{m-2a}\ , \tag{15.32}$$

onde $\lfloor m/2 \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a $m/2$, e são soluções da equação de Legendre com $\mu = m(m+1)$, sendo (as únicas) soluções da equação de Legendre que permanecem limitadas nos pontos ± 1.

Como $p(x)$ anula-se nos extremos ± 1 e os $P_m(x)$ são limitados nesses pontos, vale para os polinômios de Legendre a relação (15.23) e concluímos pelo Teorema 15.1, página 684, que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\ dx \ = \ 0 \tag{15.33}$$

para todo $n \neq m$, com $m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. Notemos que isso implica

$$\int_{-1}^{1} x^k P_m(x)\ dx \ = \ 0 \tag{15.34}$$

para todo $k < m$, pois os monômios x^k podem ser escritos como combinações lineares dos polinômios P_n's com $n < m$. Para calcular as integrais de (15.33) no caso $n = m$, podemos elegantemente usar as relações

$$P'_{n+1}(x) \ = \ (2n+1)P_n(x) + P'_{n-1}(x)\ , \qquad n \geq 0\ , \tag{15.35}$$

e

$$P_n(1) \ = \ 1\ , \qquad P_n(-1) \ = \ (-1)^n\ , \qquad n \geq 0\ , \tag{15.36}$$

as quais serão demonstradas mais abaixo (relações (15.41) e (15.45), respectivamente) como consequência da fórmula de Rodrigues para os polinômios de Legendre. De fato, por integração por partes, tem-se

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P'_{n+1}(x)\ dx \ = \ P_n(x)P_{n+1}(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P'_n(x)P_{n+1}(x)\ dx\ .$$

Por (15.36), $P_n(x)P_{n+1}(x)\Big|_{-1}^{1} = 1 + (-1)^{2n} = 2$. Por (15.34), $\int_{-1}^{1} P'_n(x)P_{n+1}(x)\,dx = 0$, pois $P'_n(x)$ é seguramente um polinômio de grau $n-1$. Assim,

$$2 \ = \ \int_{-1}^{1} P_n(x)P'_{n+1}(x)\ dx \ \stackrel{(15.35)}{=} \ \int_{-1}^{1} P_n(x)\left[(2n+1)P_n(x) + P'_{n-1}(x)\right]\ dx \ = \ (2n+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\ dx\ ,$$

pois, novamente por (15.34), $\int_{-1}^{1} P_n(x)P'_{n-1}(x)\ dx = 0$, já que $P'_{n-1}(x)$ é um polinômio de grau $n-2$. Isso provou que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\ dx \ = \ \frac{2}{2n+1}\ \delta_{n,\,m}\ , \tag{15.37}$$

para todos $m,\ n \geq 0$. Estas são as *relações de ortogonalidade para os polinômios de Legendre*. Para uma outra demonstração, vide Exercício E. 15.28, página 739.

Em muitas situações práticas é conveniente expressar (15.37) através da mudança de variável $x = \cos\theta$, com $0 \leq \theta \leq \pi$. Ficamos com

$$\int_{0}^{\pi} P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\ \mathrm{sen}(\theta)\ d\theta \ = \ \frac{2}{2n+1}\ \delta_{n,\,m}\ , \tag{15.38}$$

para todos $m,\ n \geq 0$.

No Capítulo 16, página 742, é demonstrada a importante propriedade de completeza dos polinômios de Legendre no espaço de Hilbert $L^2([-1,\ 1],\ dx)$.

• **Fórmula de Rodrigues para os polinômios de Legendre**

Pelas nossas considerações gerais sobre as fórmulas de Rodrigues da Seção 15.1.2, página 685, podemos presumir que os polinômios P_m, por serem ortogonais entre si (vide (15.33)), possam ser expressos na forma (15.26) com $r(x) = 1$, ou seja,

$$P_m(x) \ = \ K_m\ \frac{d^m}{dx^m}\Big((1-x^2)^m\Big)\ ,$$

onde K_m são constantes que dependem da normalização adotada. De fato, essa pressuposição é correta pois, escrevendo $(1-x^2)^m = \sum_{a=0}^{m}\binom{m}{a}(-1)^{m-a}x^{2m-2a}$ (binômio de Newton) e notando que

$$\frac{d^m}{dx^m}\Big(x^{2m-2a}\Big) \ = \ \begin{cases} \dfrac{(2m-2a)!}{(m-2a)!}\,x^{m-2a}, & \text{para } 0 \leq a \leq \lfloor m/2 \rfloor \\[2ex] 0, & \text{para } \lfloor m/2 \rfloor + 1 \leq a \leq m \end{cases} \tag{15.39}$$

(justifique!), concluímos facilmente que

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m}\Big((1-x^2)^m\Big) \ &= \ \frac{d^m}{dx^m}\sum_{a=0}^{m}\binom{m}{a}(-1)^{m-a}x^{2m-2a} \\ &= \ \frac{d^m}{dx^m}\sum_{a=0}^{\lfloor m/2 \rfloor}\binom{m}{a}(-1)^{m-a}x^{2m-2a} \\ &= \ \sum_{a=0}^{\lfloor m/2 \rfloor}(-1)^{m-a}\binom{m}{a}\frac{(2m-2a)!}{(m-2a)!}\,x^{m-2a} \\ &= \ (-1)^m\,2^m\,m!\ \sum_{a=0}^{\lfloor m/2 \rfloor}\frac{(-1)^a\,(2m-2a)!}{2^m(m-a)!(m-2a)!a!}\,x^{m-2a} \\ &= \ (-1)^m\,2^m\,m!\ P_m(x)\ . \end{aligned}$$

Assim, $K_m = (-1)^m/(2^m\,m!)$ e

$$P_m(x) \ = \ \frac{1}{2^m\,m!}\ \frac{d^m}{dx^m}\Big((x^2-1)^m\Big)\ , \tag{15.40}$$

como pressuposto. Essa expressão é conhecida como *fórmula de Rodrigues para os polinômios de Legendre* e é válida para todo $m \geq 0$, inteiro.

De (15.40) outras relações úteis podem ser extraídas, nosso próximo assunto.

• **Relações de recorrência para os polinômios de Legendre**

Vamos aqui demonstrar as seguintes relações válidas para os polinômios de Legendre:

$$P'_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x) + P'_{n-1}(x) , \tag{15.41}$$

$$P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x) , \tag{15.42}$$

$$nP_n(x) = xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) , \tag{15.43}$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) , \tag{15.44}$$

$$P_n(1) = 1 , \qquad P_n(-1) = (-1)^n . \tag{15.45}$$

Todas as relações acima têm aplicações (vimos isso quando provamos as relações de ortogonalidade para os P_n's). A relação (15.44) é particularmente interessante por permitir determinar os P_n's recursivamente a partir dos dois primeiros: $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$.

Comecemos por provar (15.41). Como $\frac{d}{dx}(x^2-1)^{n+1} = 2(n+1)x(x^2-1)^n$, segue da fórmula de Rodrigues para P_{n+1} que

$$\begin{aligned}
P'_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\Big[2(n+1)x(x^2-1)^n\Big] \\
&= \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}\Big[(x^2-1)^n + 2nx^2(x^2-1)^{n-1}\Big] \\
&= \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}\Big[(2n+1)(x^2-1)^n + 2n(x^2-1)^{n-1}\Big] \\
&= (2n+1)P_n(x) + P'_{n-1}(x) ,
\end{aligned}$$

provando (15.41). Por outro lado, começando pela primeira linha obtida acima, e usando-se a regra de Leibniz, tem-se

$$\begin{aligned}
P'_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\Big[x(x^2-1)^n\Big] \\
&= \frac{1}{2^n\, n!}\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}\left(\frac{d^p}{dx^p}x\right)\left(\frac{d^{n+1-p}}{dx^{n+1-p}}(x^2-1)^n\right) \\
&= \frac{1}{2^n\, n!}\,x\,\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n + \frac{(n+1)}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \\
&= xP'_n(x) + (n+1)P_n(x) ,
\end{aligned}$$

provando (15.42). A relação (15.43) é obtida subtraindo-se (15.42) de (15.41). Por fim, para obter (15.44), multiplicamos (15.41) por x e escrevemos

$$\begin{aligned}
(2n+1)xP_n(x) &= xP'_{n+1}(x) - xP'_{n-1}(x) \\
&= \big(xP'_{n+1}(x) - P'_n(x)\big) + P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) \\
&\overset{(15.43)}{=} (n+1)P_{n+1}(x) + \big(P'_n(x) - xP'_{n-1}(x)\big) \\
&\overset{(15.42)}{=} (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) .
\end{aligned}$$

Disso (15.44) segue imediatamente.

Por fim, vamos provar (15.45) por indução. Como $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$, as relações acima valem para $n = 0$ e $n = 1$. Supondo-as válidas para $n-1$ e n, teremos por (15.44) que $(n+1)P_{n+1}(1) = (2n+1) - n = (n+1)$, o que implica $P_{n+1}(1) = 1$ e $(n+1)P_{n+1}(-1) = -(2n+1)(-1)^n + n(-1)^n = (n+1)(-1)^{n+1}$, o que implica $P_{n+1}(-1) = (-1)^{n+1}$. Isso encerra a demonstração de (15.41)-(15.45).

• **A função geratriz dos polinômios de Legendre**

A função geratriz[8] dos polinômios de Legendre é

$$L(x,\ t) := \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} , \tag{15.46}$$

válida para $|t| < 1$ e $|x| \leq 1$. Essa relação tem diversas demonstrações, a mais elegante sendo a seguinte (de [150]). Calculando-se $\frac{\partial}{\partial t}L(x,\ t)$ e usando-se (15.44), tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}L(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)\, t^{n-1} &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\, t^n \\
&\overset{(15.44)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\Big[(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\Big]\, t^n \\
&= 2x\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)\, t^n + x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n - \sum_{n=0}^{\infty} nP_{n-1}(x)\, t^n \\
&= 2x\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)\, t^n + x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_n(x)\, t^{n+1} \\
&= 2xt\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n + (x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n - t^2\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n \\
&= (2xt - t^2)\frac{\partial}{\partial t}L(x,\ t) + (x-t)L(x,\ t) .
\end{aligned}$$

E. 15.5 *Exercício*. Verifique! ✠

Assim, $L(x,\ t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{1}{L(x,\ t)}\frac{\partial}{\partial t}L(x,\ t) = \frac{(x-t)}{1-2xt+t^2} .$$

O lado direito é $-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}\ln\big(1-2xt+t^2\big)$. Logo,

$$L(x,\ t) = \frac{\exp(l(x))}{\sqrt{1-2tx+t^2}} ,$$

onde $l(x)$ é, em princípio, uma função arbitrária. Lembrando, porém, que $L(x,\ 0) = P_0(x) = 1$ para todo x, obtem-se de imediato que $l(x) = 0$ para todo x. Isso estabelece (15.46), como queríamos.

• **Representações integrais para os polinômios de Legendre**

A bem-conhecida Fórmula Integral de Cauchy, afirma que, para uma função f analítica em um domínio aberto simplesmente conexo D, vale

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw , \tag{15.47}$$

[8] A noção de função geratriz foi introduzida na Seção 6.1, página 266.

para todo $z \in D$, onde a curva C é uma curva diferenciável fechada inteiramente contida em D e dá precisamente uma volta no sentido anti-horário em torno de z. Combinando a fórmula de Rodrigues e a Fórmula Integral de Cauchy, obtem-se imediatamente

$$P_l(z) \;=\; \frac{1}{2^{l+1}\pi i}\int_C \frac{(w^2-1)^l}{(w-z)^{l+1}}\,dw\;, \tag{15.48}$$

onde C é uma curva fechada e diferenciável no plano complexo dando uma volta em torno de z no sentido anti-horário. Essa expressão é conhecida como *representação integral de Schläfli*[9] dos polinômios de Legendre.

Uma consequência dessa representação é a seguinte expressão:

$$P_l(z) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(z+i(1-z^2)^{1/2}\cos(\phi)\Big)^l\,d\phi\;, \tag{15.49}$$

válida para $|z|<1$. A demonstração dessa expressão será apresentada mais adiante como caso particular de uma identidade mais geral (expressão (15.59), abaixo), válida para os polinômios de Legendre associados. Como a equação de Legendre é invariante pela mudança $l\to-(l+1)$ (verifique que $l(l+1)$ é levado em si mesmo por essa transformação!), vale também a identidade[10]

$$P_l(z) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\Big(z+i(1-z^2)^{1/2}\cos(\phi)\Big)^{l+1}}\,d\phi\;. \tag{15.50}$$

Para z real no intervalo $[-1,\,1]$, podemos escrever, como é comum em aplicações, $z=\cos(\theta)$ com $0\le\theta\le\pi$ e com isso as duas identidades acima ficam

$$P_l(\cos(\theta)) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\cos(\theta)+i\,\mathrm{sen}(\theta)\,\cos(\phi)\Big)^l\,d\phi \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\Big(\cos(\theta)+i\,\mathrm{sen}(\theta)\,\cos(\phi)\Big)^{l+1}}\,d\phi\;.$$

Usando o binômio de Newton podemos usar a primeira identidade para escrever $P_l(\cos(\theta))$ como um polinômio em $\cos\theta$ e $\mathrm{sen}\theta$:

$$\begin{aligned}
P_l(\cos(\theta)) \;&=\; \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{l}\binom{l}{p}i^p\Big(\cos(\theta)\Big)^{l-p}\Big(\mathrm{sen}(\theta)\Big)^p\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\cos(\phi)\Big)^p\,d\phi\\
&=\;\sum_{q=0}^{\lfloor l/2\rfloor}\frac{(-1)^q}{2^{2q}}\binom{l}{2q}\binom{2q}{q}\Big(\cos(\theta)\Big)^{l-2q}\Big(\mathrm{sen}(\theta)\Big)^{2q}\\
&=\;\sum_{q=0}^{\lfloor l/2\rfloor}\frac{(-1)^q\,l!}{2^{2q}\,(l-2q)!\,(q!)^2}\Big(\cos(\theta)\Big)^{l-2q}\Big(\mathrm{sen}(\theta)\Big)^{2q}\;.
\end{aligned}$$

15.2.2 Propriedades dos Polinômios de Legendre Associados

Na Seção 14.3.1, página 660, introduzimos a equação de Legendre associada (14.156) e mostramos que para $\lambda=l\in\mathbb{N}_0$ e $\mu=m\in\mathbb{N}_0$ a mesma possui soluções da forma

$$P_l^m(z)\;:=\;(1-z^2)^{m/2}\,\frac{d^m}{dz^m}P_l(z)\;, \tag{15.51}$$

para $z\in\mathbb{C}$ com $|z|<1$, onde P_l é o polinômio de Legendre de grau l. É claro que $P_l^m(z)$ é nulo se $m>l$ (pois P_l é um polinômio de grau l). A relação (15.51), como dissemos na Seção 14.3.1, define os chamados *polinômios de Legendre associados*[11], ainda que eles não sejam exatamente polinômios na variável z.

[9] Ludwig Schläfli (1814–1895).

[10] Esse argumento envolvendo a transformação $l\to-(l+1)$ é ainda incompleto, mas pode-se provar que o lado direito de (15.50) é de fato igual ao esquerdo, pois é regular e satisfaz a equação de Legendre. Deixamos os detalhes como exercício.

[11] O leitor deve ser advertido que, lastimavelmente, não há uniformidade na literatura quanto à definição dos polinômios de Legendre associados. Alguns autores (e.g., [201]) introduzem um fator $(-1)^m$ no lado direito de (15.51). Assim, algumas das expressões que obtemos aqui podem diferir das correspondentes encontradas em alguns textos e o leitor deve compará-las cuidadosamente. A definição que seguimos é a recomendada pela *American Mathematical Society*.

Vimos também que, devido à fórmula de Rodrigues para os polinômios de Legendre, podemos escrever $P_l^m(z)$ como

$$P_l^m(z)\;=\;\frac{1}{2^l\,l!}\,(1-z^2)^{m/2}\,\frac{d^{l+m}}{dz^{l+m}}\Big((z^2-1)^l\Big)\;, \tag{15.52}$$

para $z\in\mathbb{C}$ com $|z|<1$ e $0\le m\le l$. Lá notamos também que essa expressão faz sentido mesmo para m inteiro negativo, mas tal que $-l\le m\le l$. Assim, definimos

$$P_l^{-m}(z)\;=\;\frac{1}{2^l\,l!}\,(1-z^2)^{-m/2}\,\frac{d^{l-m}}{dz^{l-m}}\Big((z^2-1)^l\Big)\;, \tag{15.53}$$

também com $0\le m\le l$ e para $z\in\mathbb{C}$ com $|z|<1$. Afirmamos que

$$P_l^{-m}(z)\;=\;(-1)^m\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,P_l^m(z)\;. \tag{15.54}$$

Essa relação é importante por mostrar que $P_l^{-m}(z)$ é também uma solução da equação de Legendre associada, por ser proporcional a $P_l^m(z)$. Fora isso a expressão acima é relevante para as chamadas funções harmônicas esféricas, das quais trataremos mais abaixo.

Apresentaremos duas demonstrações de (15.54), ambas instrutivas. Uma "a força bruta", usando diretamente as definições, é desenvolvida no Apêndice 15.A, página 740. Uma segunda, mais gentil, será vista logo abaixo e usa uma representação integral dos polinômios de Legendre associados.

• **Representações integrais para os polinômios de Legendre associados**

Nossa intenção agora é obter algumas representações integrais úteis para os polinômios de Legendre associados mas, *en passant*, encontraremos uma outra demonstração mais gentil da identidade (15.54).

As expressões (15.52) e (15.53) envolvem derivadas do tipo $\frac{d^k}{dz^k}(z^2-1)^l$ para $k=l+m$ e $k=l-m$, respectivamente. Procuremos primeiramente expressar genericamente $\frac{d^k}{dz^k}(z^2-1)^l$ em termos de certas integrais. Tomemos provisoriamente z real no intervalo aberto $-1<z<1$. Pela Fórmula Integral de Cauchy (15.47), podemos escrever[12]

$$\frac{d^k}{dz^k}(z^2-1)^l\;=\;\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{(w^2-1)^l}{(w-z)^{k+1}}\,dw\;, \tag{15.55}$$

onde C é uma curva fechada e diferenciável no plano complexo, dando uma volta em torno de z no sentido anti-horário. Escolhemos a curva C dada por $C:=\{w\in\mathbb{C}|\;|w-z|\;=\;(1-z^2)^{1/2}\}$, de modo que podemos escrever todo ponto w de C na forma

$$w\;=\;z+i(1-z^2)^{1/2}\,e^{i\phi}$$

com $-\pi\le\phi\le\pi$. Com isso, a integral em w sobre C pode ser escrita como uma integral em ϕ e para isso, usa-se

$$\begin{aligned}
dw\;&=\;-(1-z^2)^{1/2}\,e^{i\phi}\,d\phi\;,\\
w-z\;&=\;i(1-z^2)^{1/2}\,e^{i\phi}\;,\\
w^2-1\;&=\;-(1-z^2)\,(e^{2i\phi}+1)+2iz(1-z^2)^{1/2}\,e^{i\phi}\\
&=\;2\Big(i(1-z^2)^{1/2}\Big)^2 e^{i\phi}\,\left(\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}\right)+2iz(1-z^2)^{1/2}\,e^{i\phi}\\
&=\;2i(1-z^2)^{1/2}\,e^{i\phi}\Big(z+i(1-z^2)^{1/2}\cos(\phi)\Big)\;.
\end{aligned}$$

[12] As ideias que se seguem provavelmente originam-se dos trabalhos de Schläfli. Nossas fontes são [150] e [335], que seguimos com adaptações.

Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{d^k}{dz^k}(z^2-1)^l &= \frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{(w^2-1)^l}{(w-z)^{k+1}}\,dw \\
&= -(1-z^2)^{1/2}\,\frac{k!}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Big(2i(1-z^2)^{1/2}\,e^{i\phi}\Big(z+i(1-z^2)^{1/2}\cos(\phi)\Big)\Big)^l}{\Big(i(1-z^2)^{1/2}\,e^{i\phi}\Big)^{k+1}}\,e^{i\phi}\,d\phi \\
&= (1-z^2)^{(l-k)/2}\,\frac{2^l i^{l-k}\,k!}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(z+i(1-z^2)^{1/2}\cos(\phi)\Big)^l\,e^{i(l-k)\phi}\,d\phi
\end{aligned}
$$

e assim,

$$
\frac{d^k}{dz^k}(z^2-1)^l \;=\; (1-z^2)^{(l-k)/2}\,\frac{2^l i^{l-k}\,k!}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(z+i(1-z^2)^{1/2}\cos(\phi)\Big)^l\cos\big((l-k)\phi\big)\,d\phi\;, \tag{15.56}
$$

pois $\int_{-\pi}^{\pi}\Big(z+i(1-z^2)^{1/2}\cos(\phi)\Big)^l\,\mathrm{sen}\,((l-k)\phi)\;d\phi = 0$, pelo fato de o integrando ser uma função ímpar.

Aplicando (15.56) às expressões (15.52) e (15.53) de P_l^m e P_l^{-m} (adotando $k = l+m$ e $k = l-m$, respectivamente), chegamos a

$$
\begin{aligned}
P_l^m(z) &= \frac{i^{-m}\,(l+m)!}{2\pi l!}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(z+i(1-z^2)^{1/2}\cos(\phi)\Big)^l\cos\big(-m\phi\big)\,d\phi\;, \\
P_l^{-m}(z) &= \frac{i^{+m}\,(l-m)!}{2\pi l!}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(z+i(1-z^2)^{1/2}\cos(\phi)\Big)^l\cos\big(+m\phi\big)\,d\phi\;,
\end{aligned}
$$

e comparando-as, extraímos que

$$
P_l^m(z) \;=\; (-1)^m\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,P_l^{-m}(z)\;. \tag{15.57}
$$

Com isso, encontramos uma segunda demonstração de (15.54). As identidades acima foram provadas para z real em $-1 < z < 1$, mas valem para todo z complexo com $|z| < 1$ (e mesmo em $z = \pm 1$), pois lá $P_l^m(z)$ e $P_l^{-m}(z)$ têm uma extensão analítica única.

Coletemos o que provamos acima. Aplicando (15.55) à definição (15.52) de $P_l^m(z)$, agora para todo $m \in \mathbb{Z}$ com $-l \le m \le l$, chegamos à expressão

$$
P_l^m(z) \;=\; \frac{(l+m)!}{2^{l+1}\pi i\,l!}\,(1-z^2)^{m/2}\int_C\frac{(w^2-1)^l}{(w-z)^{l+m+1}}\,dw\;, \tag{15.58}
$$

onde C é uma curva fechada e diferenciável no plano complexo dando uma volta em torno de z no sentido anti-horário. Essa expressão generaliza a representação de Schläfli (15.48) para os polinômios de Legendre. Como consequência, estabelecemos também logo acima a representação integral

$$
P_l^m(z) \;=\; \frac{i^{-m}\,(l+m)!}{2\pi l!}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(z+i(1-z^2)^{1/2}\cos(\phi)\Big)^l\cos\big(m\phi\big)\,d\phi\;, \tag{15.59}
$$

válida para $|z| < 1$ e para todo $l \in \mathbb{N}_0$ e todo $m \in \mathbb{Z}$ com $-l \le m \le l$.

Assim como a equação de Legendre, a equação de Legendre associada é invariante pela transformação $l \to -(l+1)$. Assim, vale também[13]

$$
P_l^m(z) \;=\; \frac{i^m\,l!}{2\pi(l-m)!}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\Big(z+i(1-z^2)^{1/2}\cos(\phi)\Big)^{l+1}}\cos\big(m\phi\big)\,d\phi\;, \tag{15.60}
$$

[13] Esse argumento envolvendo a transformação $l \to -(l+1)$ é ainda incompleto, mas pode-se provar que o lado direito de (15.60) é de fato igual ao esquerdo, pois é regular e satisfaz a equação de Legendre associada. Deixamos os detalhes como exercício.

onde acima usamos o fato que $\frac{(l+m)!}{l!} = (l+m)(l+m-1)\cdots(l+1)$ é levado pela transformação $l \to -(l+1)$ em $(-1-l+m)(-2-l+m)\cdots(-l) = (-1)^m(l)(l+1)\cdots(l-m+1) = \frac{l!}{(l-m)!}$.

Em aplicações é comum tomar-se z real no intervalo $[-1,\,1]$ e escrever $z = \cos(\theta)$ com $0 \le \theta \le \pi$. Com isso, as duas identidades acima ficam

$$
P_l^m(\cos(\theta)) \;=\; \frac{i^{-m}\,(l+m)!}{2\pi l!}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\cos(\theta)+i\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi)\Big)^l\cos\big(m\phi\big)\,d\phi\;, \tag{15.61}
$$

$$
P_l^m(\cos(\theta)) \;=\; \frac{i^m\,l!}{2\pi(l-m)!}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\Big(\cos(\theta)+i\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi)\Big)^{l+1}}\cos\big(m\phi\big)\,d\phi\;. \tag{15.62}
$$

Através do binômio de Newton, a primeira identidade pode ser usada para expressar $P_l^m(\cos(\theta))$ como um polinômio em $\cos\theta$ e $\mathrm{sen}\theta$:

$$
\begin{aligned}
P_l^m\big(\cos(\theta)\big) &= \frac{i^{-m}\,(l+m)!}{2\pi l!}\sum_{p=0}^{l} i^p\binom{l}{p}\Big(\cos(\theta)\Big)^{l-p}\Big(\mathrm{sen}(\theta)\Big)^p\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\cos(\phi)\Big)^p\cos\big(m\phi\big)\,d\phi\;, \\
&= i^{-m+|m|}\,\frac{(l+m)!}{2^{|m|}\,l!}\sum_{q=0}^{\left\lfloor\frac{l-|m|}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^q}{2^{2q}}\binom{l}{2q+|m|}\binom{2q+|m|}{q}\Big(\cos(\theta)\Big)^{l-2q-|m|}\Big(\mathrm{sen}(\theta)\Big)^{2q+|m|} \\
&= i^{-m+|m|}\,\frac{(l+m)!}{2^{|m|}}\sum_{q=0}^{\left\lfloor\frac{l-|m|}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^q}{2^{2q}\,(l-2q-|m|)!\,(q+|m|)!\,q!}\Big(\cos(\theta)\Big)^{l-2q-|m|}\Big(\mathrm{sen}(\theta)\Big)^{2q+|m|}\;.
\end{aligned} \tag{15.63}
$$

Note que $i^{-m+|m|} = 1$ se $m \ge 0$ e $i^{-m+|m|} = (-1)^m$ se $m < 0$, de modo que $P_l^m(\cos(\theta))$ é real se $0 \le \theta \le \pi$. Note também que podemos colocar $\big(\mathrm{sen}(\theta)\big)^{|m|}$ em evidência em (15.63) e escrever $\big(\mathrm{sen}(\theta)\big)^{2q} = \Big(1-\big(\cos(\theta)\big)^2\Big)^q$, obtendo na somatória um polinômio em $\cos(\theta)$.

A expressão (15.63) é por vezes utilizada na prática para expressar as funções harmônicas esféricas (que definiremos abaixo) como polinômios em $\cos\theta$ e $\mathrm{sen}\theta$. Logo adiante faremos uso da mesma no estudo das relações de ortogonalidade das funções P_l^m.

- **A função geratriz dos polinômios de Legendre associados**

Usando (15.51), (15.46) e a identidade, válida para $m \ge 0$,

$$
\frac{d^m}{dx^m}(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}} \;=\; \frac{(2m)!}{2^m\,m!}\,t^m\,(1-2tx+t^2)^{-m-\frac{1}{2}}
$$

(prove-a!) é fácil mostrar que

$$
\sum_{l=0}^{\infty}P_{l+m}^m(x)\,t^l \;=\; \frac{(2m)!}{2^m\,m!}\,\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{(1-2tx+t^2)^{m+\frac{1}{2}}}\;, \tag{15.64}
$$

válida para todo $m \ge 0$.

E. 15.6 *Exercício*. Mostre isso. ✠

A expressão (15.64) é também denominada *função geratriz dos polinômios de Legendre associados*. A expressão (15.64) tem poucas aplicações diretas, mas pode ser usada para demonstrar outras relações sobre os polinômios de Legendre associados.

• Relações de recorrência para os polinômios de Legendre associados

Os polinômios de Legendre associados satisfazem uma série de relações de recorrência. Listemos as mais relevantes:

$$\begin{aligned}
P_l^{m+1}(x) &= \frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}}P_l^m(x) - \Big[l(l+1)-m(m-1)\Big]P_l^{m-1}(x) , \\
P_{l+1}^{m+1}(x) &= (2l+1)\sqrt{1-x^2}P_l^m(x) + P_{l-1}^{m+1}(x) , \\
(2l+1)\sqrt{1-x^2}P_l^m(x) &= (l+m)(l+m-1)P_{l-1}^{m-1}(x) - (l-m+1)(l-m+2)P_{l+1}^{m-1}(x) , \\
(2l+1)xP_l^m(x) &= (l+m)P_{l-1}^m(x) + (l-m+1)P_{l+1}^m(x) , \\
2\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}P_l^m(x) &= P_l^{m+1}(x) - (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) .
\end{aligned}$$

As demonstrações podem ser obtidas da seguinte forma: **1.** a partir das relações de recorrência dos polinômios de Legendre (15.41)-(15.45) com uso da definição (15.51); **2.** a partir de (15.52) ou, em alguns casos, **3.** com o uso da função geratriz (15.64). Deixamos as demonstrações como exercício.

E. 15.7 *Exercício*. Prove todas as relações acima. Sugestão: tente por conta própria seguir as sugestões do último parágrafo. Senão, consulte a literatura supracitada, mas com as seguintes precauções: **a.** diferentes textos apresentam definições diferentes dos P_l^m, o que conduz a relações de recorrência distintas das de acima; **b.** nem todos os livros-texto[14] provam todas as relações e **c.** alguns contêm erros. ✣

• Relações de ortogonalidade para os polinômios de Legendre associados

Obteremos agora relações de ortogonalidade para os polinômios de Legendre associados, relações essas de grande importância na Análise Harmônica e que inspiram a definição das chamadas funções harmônicas esféricas.

A equação de Legendre associada (14.156) é considerada na maioria das aplicações no intervalo $[-1,\ 1]$, como já mencionamos. A mesma, em analogia com a equação de Legendre, pode ser escrita como

$$\Big((1-x^2)y'(x)\Big)' + l(l+1)y(x) - \frac{m^2}{1-x^2}\,y(x) \;=\; 0 , \tag{15.65}$$

onde aqui já nos restringimos ao caso $l \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$ com $-l \leq m \leq l$. Como se vê, temos aqui $p(x) = (1-x^2)$, mas podemos fazer as seguintes escolhas

$$1) \qquad q(x) \;=\; -\frac{m^2}{1-x^2}, \qquad r(x) \;=\; 1, \qquad \mu \;=\; l(l+1) ,$$

$$2) \qquad q(x) \;=\; l(l+1), \qquad r(x) \;=\; \frac{1}{1-x^2}, \qquad \mu \;=\; -m^2 .$$

Analisaremos essas duas opções em separado. O caso 1 é o mais interessante, especialmente devido a sua aplicação para as funções harmônicas esféricas. O caso 2 não é de grande interesse e o leitor pode dispensar sua leitura, se o desejar[15].

Caso 1) A primeira questão que aqui se coloca é se a condição (15.23) é satisfeita para funções $P_l^m(x)$ e $P_{l'}^m(x)$ com $l \leq l'$, ou seja, se

$$p(x)\Big(P_l^m(x)\,(P_{l'}^m(x))' - P_{l'}^m(x)\,(P_l^m(x))'\Big)\Big|_{-1}^{1} \;=\; 0 , \tag{15.66}$$

com $l \leq l'$. A maneira mais fácil de discutir isso é escrever $x = \cos(\theta)$ e, como

$$\frac{d}{dx}P_{l'}^m(x) \;=\; -\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}\frac{d}{d\theta}P_{l'}^m(\cos\theta),$$

[14] Segundo o Houaiss, "livros-textos" ou "livros-texto" são dois plurais gramaticalmente corretos para "livro-texto", assim como "espaços-tempos" e "espaços-tempo" são plurais aceitáveis para "espaço-tempo".

[15] O caso 2 é um tanto patológico (pois a função $r(x)$ diverge em ± 1 e não é integrável) e é evitado por quase todos os livros-texto.

e $p(x) = \operatorname{sen}(\theta)^2$, (15.66) fica

$$\operatorname{sen}(\theta)\Big(P_l^m(\cos\theta)\frac{d}{d\theta}P_{l'}^m(\cos\theta) - P_{l'}^m(\cos\theta)\frac{d}{d\theta}P_l^m(\cos\theta)\Big)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} . \tag{15.67}$$

Agora, por (15.63), $P_l^m(\cos\theta)$ é um polinômio trigonométrico, e assim o é também $\frac{d}{d\theta}P_l^m(\cos\theta)$. Logo, ambos são finitos em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Como, porém, $\operatorname{sen}\theta$ anula-se nesses extremos, concluímos que (15.67) é nula, confirmando a validade de (15.23) no caso em questão. Concluímos assim, pelo Teorema 15.1, página 684, que deve valer

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)\,P_{l'}^m(x)\;dx \;=\; 0 \tag{15.68}$$

sempre que $l \neq l'$.

Interessamo-nos agora pelo caso $l' = l$. Caso $l = l' = 0$ vale $P_0^0(x) = 1$ e $\int_{-1}^{1}(P_0^0)^2\;dx = 2$. Para calcular $\int_{-1}^{1}\left(P_l^m(x)\right)^2\,dx$ com $l > 0$ podemos proceder de diferentes maneiras, a mais direta sendo a seguinte. Usando (15.54) e as expressões (15.52) e (15.53) para P_l^m e P_l^{-m}, respectivamente, escrevemos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_l^m(x)\,P_l^m(x)\;dx \;&=\; (-1)^m\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_l^{-m}(x)\;dx \\
&=\; \frac{(-1)^m}{2^{2l}\,(l!)^2}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l\right)\left(\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l\right)dx \\
&\overset{\text{int. por partes } l-m \text{ vezes}}{=}\; \frac{(-1)^l}{2^{2l}\,(l!)^2}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^{2l}}{dx^{2l}}(x^2-1)^l\right)(x^2-1)^l\;dx \\
&=\; \frac{(2l)!}{2^{2l}\,(l!)^2}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^l\;dx \\
&=\; \frac{(2l)!}{2^{2l}\,(l!)^2}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\left(\frac{2\,(2l)!!}{(2l+1)!!}\right) \\
&=\; \frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!} .
\end{aligned}$$

Na terceira linha aplicamos integração por partes $l-m$ vezes. Isso é justificado pois, como facilmente se vê por indução, derivadas como $\frac{d^p}{dx^p}(x^2-1)^l$, com $0 \leq p < l$ são proporcionais a $(x^2-1)^{l-p}$ e, por isso, os termos de fronteira se anulam. Na última passagem usamos o fato que $\frac{(2l)!}{(2l+1)!!} = \frac{(2l)!!}{2l+1}$ e o fato que $(2l)!! = 2^l\,l!$. Na penúltima passagem usamos a identidade

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^l\;dx \;=\; 2\frac{(2l)!!}{(2l+1)!!} , \tag{15.69}$$

a qual pode ser provada da seguinte forma. Seja $A_l := \int_{-1}^{1}(1-x^2)^l\,dx$. Então, para $l > 0$,

$$\begin{aligned}
A_l \;&:=\; \int_{-1}^{1}(1-x^2)^l\;dx \;=\; \int_{-1}^{1}\left(\frac{dx}{dx}\right)(1-x^2)^l\;dx \\
&\overset{\text{int. por partes}}{=}\; \underbrace{x(1-x^2)^l\Big|_{-1}^{1}}_{=\,0} + 2l\int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)^{l-1}\;dx \;=\; -2lA_l + 2lA_{l-1} .
\end{aligned}$$

Assim, $A_l = \frac{2l}{2l+1}A_{l-1}$ e como $A_0 = 2$, segue (15.69).

Demonstramos, assim, as relações de ortogonalidade

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)\,P_{l'}^m(x)\;dx \;=\; \frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{l,\,l'} , \tag{15.70}$$

válidas para todo $l,\ l' \in \mathbb{N}_0$ e $m,\ m' \in \mathbb{Z}$ com $-l \leq m \leq l$ e $-l' \leq m' \leq l'$. É por vezes útil expressar essas relações com a mudança de variáveis $x = \cos\theta$:

$$\int_0^\pi P_l^m(\cos\theta)\, P_{l'}^m(\cos\theta)\ \mathrm{sen}\theta\ d\theta \ = \ \frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{l,\,l'}\ . \tag{15.71}$$

Essa forma das relações de ortogonalidade dos polinômios de Legendre associados será particularmente relevante para as funções harmônicas esféricas, como veremos adiante.

Caso 2) A primeira questão que aqui se coloca é se a condição (15.23) é satisfeita para funções $P_l^m(x)$ e $P_l^{m'}(x)$, com $|m| \neq |m'|$ (lembre-se o leitor que $\mu = -m^2$ e, portanto $\mu \neq \mu'$ equivale a $|m| \neq |m'|$), ou seja, se

$$p(x)\Big(P_l^m(x)\left(P_l^{m'}(x)\right)' - P_l^{m'}(x)\left(P_l^m(x)\right)'\Big)\Big|_{-1}^{1} \ = \ 0\ . \tag{15.72}$$

sempre que $|m| \neq |m'|$. A mesma análise feita para o caso 1 mostra que isso é verdadeiro, confirmando a validade de (15.23) no caso em questão. Concluímos assim, pelo Teorema 15.1, página 684, que deve valer

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x)\, P_l^{m'}(x)\ \frac{1}{1-x^2}\,dx \ = \ 0, \quad \text{ou seja,} \quad \int_0^\pi P_l^m(\cos\theta)\, P_l^{m'}(\cos\theta)\ \frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)}\,d\theta \ = \ 0, \tag{15.73}$$

sempre que $|m| \neq |m'|$. A expressão (15.63) ensina-nos que $P_l^m(\cos\theta)$ é proporcional a $(\mathrm{sen}\theta)^{|m|}$. Logo, como $|m| \neq |m'|$, sempre haverá no produto $P_l^m(\cos\theta)P_l^{m'}(\cos\theta)$ pelo menos um fator $\mathrm{sen}\theta$ para compensar o $\frac{1}{\mathrm{sen}\theta}$, o que mostra que o integrando em (15.73) é limitado. O caso $|m'| = |m|$ é um tanto patológico (a integral diverge se $m = m' = 0$), difícil de demonstrar e sem consequências práticas relevantes, de modo que nos limitamos a apresentar o resultado final[16]:

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x)\, P_l^{m'}(x)\ \frac{1}{1-x^2}\,dx \quad = \quad \begin{cases} 0, & \text{se } |m'| \neq |m|, \\[2mm] \infty, & \text{se } m' = m = 0, \\[2mm] \dfrac{(-1)^m}{m}, & \text{se } -m' = m > 0, \\[2mm] \dfrac{1}{m}\,\dfrac{(l+m)!}{(l-m)!}, & \text{se } m' = m > 0. \end{cases} \tag{15.74}$$

Note o leitor que a condição $m > 0$ só pode ocorrer se $l > 0$.

Como já dissemos, as relações (15.74) são menos importantes na prática que as de (15.70). Essas inspiram uma definição importante: a das funções harmônicas esféricas.

15.2.2.1 As Funções Harmônicas Esféricas

No espaço $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, o conjunto de pontos que distam de uma unidade da origem formam a assim chamada *esfera unitária*[17], denotada por $\mathbb{S}^{n-1}$:

$$\mathbb{S}^{n-1} \ := \ \Big\{(x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n \Big|\ (x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2 \ = \ 1\Big\}\ .$$

O conjunto $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ é o círculo unitário e seus pontos podem ser descritos por um único ângulo φ com $-\pi \leq \varphi \leq \pi$:

$$\mathbb{S}^1 \ := \ \Big\{\big(\cos\varphi,\ \mathrm{sen}\varphi\big) \in \mathbb{R}^2,\ -\pi \leq \varphi \leq \pi\Big\}\ .$$

Como se vê, os pontos correspondentes a $\varphi = \pm\pi$ são identificados. O conjunto $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ é a esfera unitária e seus pontos podem ser descritos por dois ângulos: φ e θ, com $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq \pi$:

$$\mathbb{S}^2 \ := \ \Big\{\big(\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi),\ \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi),\ \cos(\theta)\big) \in \mathbb{R}^3,\ -\pi \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi\Big\}\ .$$

[16] Para uma referência mais detalhada, vide [221], pag. 74.
[17] Há aqui um abuso de linguagem, pois $\mathbb{S}^{n-1}$ é, estritamente falando, a superfície da esfera.

Novamente, os pontos correspondentes a $\varphi = \pm\pi$ são identificados e para os pontos correspondentes a $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ o ângulo φ é indeterminado.

As chamadas *Funções Harmônicas Esféricas*, ou simplesmente *Harmônicas Esféricas* (ou ainda *Harmônicos Esféricos*), são as funções definidas por

$$Y_l^m(\theta,\ \varphi) \ := \ (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\ P_l^m(\cos(\theta))\ e^{im\varphi}\ , \tag{15.75}$$

onde $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $l \in \mathbb{N}_0$ e $m \in \mathbb{Z}$ com $-l \leq m \leq l$. Note-se que

$$Y_l^0(\theta,\ \varphi) \ = \ \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos(\theta))\ , \tag{15.76}$$

onde P_l são os polinômios de Legendre. As funções harmônicas esféricas foram introduzidas por Mehler[18].

Mais uma vez o leitor deve ser advertido da existência de outras convenções sobre a definição das funções harmônicas esféricas. Essas funções são empregadas em diversas áreas de pesquisa, como na Física Atômica, no Eletromagnetismo, na Geofísica, na Geodesia, na Sismologia, no estudo do magnetismo terrestre e planetário e, mais modernamente, na Cosmologia, no estudo da radiação cósmica de fundo. Assim, diferentes comunidades empregam por vezes convenções diferentes quanto à normalização das funções harmônicas esféricas. A que adotamos é a mais frequentemente empregada na Física Quântica, mas mesmo lá há excessões: alguns autores substituem o fator $(-1)^m$ por i^m na definição (15.75). Outros não incluem o fator $(-1)^m$ na definição das funções harmônicas esféricas, mas sim na definição dos polinômios de Legendre associados o que, afinal, resulta no mesmo. O fator de fase $(-1)^m$, que adotamos em (15.75) é denominado *fase de Condon-Shortley*[19] em referência aos autores de um texto clássico sobre espectros atômicos (ref. [67]).

As funções harmônicas esféricas são solução da equação diferencial parcial

$$\frac{1}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left((\,\mathrm{sen}\theta)\frac{\partial Y}{\partial\theta}(\theta,\ \varphi)\right) + \frac{1}{(\,\mathrm{sen}\theta)^2}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}(\theta,\ \varphi) + l(l+1)Y(\theta,\ \varphi) \ = \ 0\ , \tag{15.77}$$

que é encontrada quando da resolução da equação de Helmholtz ou de Laplace em três dimensões em coordenadas esféricas, assim como no problema do átomo de hidrogênio na Mecânica Quântica ou qualquer outro problema quântico em três dimensões no qual o potencial seja esfericamente simétrico. Vide equação (21.45) e seguintes.

É um exercício relevante verificar que, devido à relação (15.54), tem-se, com a definição acima,

$$\overline{Y_l^m(\theta,\ \varphi)} \ = \ (-1)^m\,Y_l^{-m}(\theta,\ \varphi)\ . \tag{15.78}$$

As primeiras funções harmônicas esféricas são

$$Y_0^0(\theta,\ \varphi) \ = \ \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\ , \tag{15.79}$$

$$Y_1^{-1}(\theta,\ \varphi) \ = \ \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\theta e^{-i\varphi}\ , \qquad Y_1^0(\theta,\ \varphi) \ = \ \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\ , \qquad Y_1^1(\theta,\ \varphi) \ = \ -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\theta e^{i\varphi}\ , \tag{15.80}$$

$$Y_2^{-2} \ = \ \sqrt{\frac{15}{32\pi}}(\,\mathrm{sen}\theta)^2 e^{-2i\varphi}\ , \quad Y_2^{-1} \ = \ \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\theta\ \cos\theta\ e^{-i\varphi}\ , \quad Y_2^0 \ = \ \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}(\,\cos\theta)^2 - \frac{1}{2}\right)\ , \quad Y_2^1 \ = \ -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\theta\ \cos\theta\ e^{i\varphi}\ , \quad Y_2^2 \ = \ \sqrt{\frac{15}{32\pi}}(\,\mathrm{sen}\theta)^2 e^{2i\varphi}\ . \tag{15.81}$$

- **Relação com séries de Fourier**

No círculo unitário $\mathbb{S}^1$ valem as bem-conhecidas relações de ortogonalidade

$$\int_{\mathbb{S}^1}\overline{\mathbf{e}_{m'}}\,\mathbf{e}_m\ dl \ = \ \int_{-\pi}^{\pi}\overline{\mathbf{e}_{m'}(\varphi)}\,\mathbf{e}_m(\varphi)\ d\varphi \ = \ \delta_{m,\,m'} \tag{15.82}$$

onde, para $m \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbf{e}_m(\varphi) \ := \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{im\varphi}, \qquad -\pi \leq \varphi \leq \pi\ ,$$

[18] Gustav Ferdinand Mehler (1835–1895).
[19] Edward Uhler Condon (1902–1974). George H. Shortley (?–?).

$dl = d\varphi$ sendo a medida de comprimento do círculo unitário $\mathbb{S}^1$. Usando as relações de ortogonalidade (15.82) e as relações de ortogonalidade (15.71), é fácil constatar que

$$\int_{\mathbb{S}^2} \overline{Y_{l'}^{m'}}\, Y_l^m \, d\Omega \;=\; \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \overline{Y_{l'}^{m'}(\theta,\,\varphi)}\; Y_l^m(\theta,\,\varphi)\; \mathrm{sen}(\theta)\, d\theta\, d\varphi \;=\; \delta_{m,\,m'}\,\delta_{l,\,l'} \tag{15.83}$$

para todos $l,\ l' \in \mathbb{N}_0$ e todos $m,\ m' \in \mathbb{Z}$ com $-l' \le m' \le l'$ e $-l \le m \le l$, onde $d\Omega = \mathrm{sen}(\theta)\, d\theta\, d\varphi$ é a medida de área na esfera unitária $\mathbb{S}^2$ em coordenada polares. Essas são as *relações de ortogonalidade das funções harmônicas esféricas*, as quais desempenham um relevante papel na resolução de problemas envolvendo certas equações diferenciais parciais em três dimensões que tenham simetria esférica. As funções harmônicas esféricas surgem na importante solução de um problema fundamental da Mecânica Quântica, o problema do átomo de hidrogênio. As formas dos orbitais eletrônicos, de importância fundamental no estudo de átomos e moléculas e suas ligações químicas, estão intimamente relacionadas às funções $Y_l^m(\theta,\ \varphi)$ e aos polinômios de Laguerre associados.

Como se percebe da comparação de (15.82) com (15.83), as funções harmônicas esféricas desempenham na esfera unitária $\mathbb{S}^2$ o mesmo papel que as funções $\mathbf{e}_m$ desempenham no círculo $\mathbb{S}^1$: formam um conjunto ortonormal em relação à medida de área $d\Omega = \mathrm{sen}(\theta)\, d\theta\, d\varphi$. Assim como as funções $\mathbf{e}_m$ formam um conjunto ortonormal completo para as funções definidas em $\mathbb{S}^1$, o que nos permite expressar funções $f(\varphi)$, periódicas de período 2π, contínuas por partes ou apenas de quadrado integrável, em termos de uma série de Fourier:

$$f(\varphi) \;=\; \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m\, \mathbf{e}_m(\varphi) \qquad \text{com} \qquad c_m \;:=\; \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\mathbf{e}_m(\varphi)}\; f(\varphi)\, d\varphi\ ,$$

as funções harmônicas esféricas também formam um conjunto ortonormal completo para as funções definidas em $\mathbb{S}^2$. Assim, em um sentido a ser precisado, todas as funções $f(\theta,\ \varphi)$ definidas em $\mathbb{S}^2$, e que sejam contínuas por partes ou apenas de quadrado integrável, podem ser escritas em termos de uma série envolvendo funções harmônicas esféricas. Essa série é dada por

$$f(\theta,\ \varphi) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{l,\,m}\, Y_l^m(\theta,\ \varphi), \qquad \text{com} \qquad c_{l,\,m} \;:=\; \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \overline{Y_l^m(\theta,\ \varphi)}\;\; f(\theta,\ \varphi)\ \mathrm{sen}(\theta)\, d\theta\, d\varphi\ ,$$

e é uma espécie de generalização para a esfera $\mathbb{S}^2$ da série de Fourier. Essas considerações justificam a denominação de "funções harmônicas esféricas" para as funções Y_l^m.

As funções harmônicas esféricas também desempenham um papel na teoria de representações do grupo SO(3). Há também generalizações das funções harmônicas esféricas para as esferas $\mathbb{S}^n$ com $n \ge 3$. Essas generalizações são estudadas, por exemplo, em [150].

• A paridade das funções harmônicas esféricas

A transformação que leva cada vetor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ no vetor $-\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ é frequentemente denominada *operação de paridade* ou *inversão de paridade* ou *troca de paridade*. Trata-se, evidentemente, de uma reflexão em torno da origem. No contexto da Mecânica Quântica é importante estudar como funções de onda transformam-se por tal reflexão. Para coordenadas esféricas $(r,\ \theta,\ \varphi)$ a inversão de paridade é a transformação $(r,\ \theta,\ \varphi) \longmapsto (r,\ \pi-\theta,\ \varphi+\pi)$. Verifique!

Vamos determinar a forma como as funções harmônicas esféricas transformam-se pela inversão de paridade. Com a transformação $\theta \mapsto \pi - \theta$, temos $\cos(\theta) \mapsto -\cos(\theta)$ e $\mathrm{sen}(\theta) \mapsto \mathrm{sen}(\theta)$. Com isso, vemos imediatamente de (15.63) que

$$P_l^m\big(\cos(\pi-\theta)\big) \;=\; (-1)^{l-|m|}\; P_l^m\big(\cos(\theta)\big)\ .$$

Ao mesmo tempo, é claro que $e^{im(\varphi+\pi)} = (-1)^m e^{im\varphi}$. Segue desses dois fatos e da definição (15.75) das funções harmônicas esféricas que

$$Y_l^m\big(\pi-\theta,\ \varphi+\pi\big) \;=\; (-1)^l\; Y_l^m(\theta,\ \varphi)\ , \tag{15.84}$$

pois $-|m| + m$ é sempre um número par (igual a 0 ou a $2m$, caso m seja positivo ou negativo, respectivamente). A expressão (15.84) indica a forma como as funções harmônicas esféricas transformam-se por troca de paridade.

15.2.2.2 Fórmula de Adição de Funções Harmônicas Esféricas

Oa polinômios de Legendre e as funções harmônicas esféricas possuem uma propriedade especial utilizada na Eletrostática (na chamada expansão de multipolos, vide página 702) e na Mecânica Quântica, o chamado *teorema de adição de*

funções harmônicas esféricas, ou *fórmula de adição de funções harmônicas esféricas*. No que segue apresentaremos a demonstração dessa propriedade. Começamos com uma observação sobre o operador Laplaciano.

• Invariância por rotações do Laplaciano

Consideremos um sistema de coordenadas Cartesianas em $\mathbb{R}^3$ onde cada ponto do espaço é descrito por uma tripla $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ definidas em relação a um sistema de coordenadas ortonormais $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$. Por uma rotação desse sistema de coordenadas, as coordenadas de cada ponto do espaço são transformadas segundo $\left(\begin{smallmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{smallmatrix}\right) = R\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$, onde R é uma matriz ortogonal, ou seja, satisfazendo $R^TR = RR^T = \mathbb{1}$. Assim, para cada $i = 1,\ 2,\ 3$ vale $x'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}x_j$. Note que para todos a e b vale $\frac{\partial x'_a}{\partial x_b} = R_{ab}$, que são constantes. Com isso, é fácil ver que o operador Laplaciano em coordenadas Cartesianas é invariante por rotações. De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta \;=\; \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \;=\; \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial\, x'_l}{\partial x_k}\frac{\partial\, x'_m}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x'_l}\frac{\partial}{\partial x'_m} \;&=\; \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} R_{lk}R_{mk}\frac{\partial}{\partial x'_l}\frac{\partial}{\partial x'_m} \\
&=\; \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3} R_{lk}R^T_{km}\right)\frac{\partial}{\partial x'_l}\frac{\partial}{\partial x'_m} \\
&=\; \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\left(RR^T\right)_{lm}\frac{\partial}{\partial x'_l}\frac{\partial}{\partial x'_m} \\
&=\; \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\delta_{lm}\frac{\partial}{\partial x'_l}\frac{\partial}{\partial x'_m} \;=\; \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_l'^2} \;=\; \Delta'\ ,
\end{aligned}$$

como queríamos provar. O operador Laplaciano pode ser escrito em coordenadas esféricas como

$$\Delta \;=\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}L^2\ , \qquad \text{onde} \qquad L^2 \;:=\; \frac{1}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left((\mathrm{sen}\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{(\mathrm{sen}\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\ . \tag{15.85}$$

Como a coordenada radial é invariante por rotações, concluímos que

$$L^2 \;=\; \left(L^2\right)'\ , \qquad \text{ou seja,} \qquad \frac{1}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left((\mathrm{sen}\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{(\mathrm{sen}\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \;=\; \frac{1}{\mathrm{sen}\theta'}\frac{\partial}{\partial\theta'}\left((\mathrm{sen}\theta')\frac{\partial}{\partial\theta'}\right) + \frac{1}{(\mathrm{sen}\theta')^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi'^2}\ .$$

Acima θ e θ' são os ângulos polares em relação aos eixos definidos por $\hat{z}$ e $\hat{z}'$, respectivamente, e φ e φ' são os correspondentes ângulos azimutais.

O estudante familiarizado com a Mecânica Quântica há de perceber que o uso da notação L^2 para denotar a parte angular do operador Laplaciano provém da forma do operador momento angular orbital (ao quadrado) em coordenadas esféricas de um sistema composto por uma partícula.

Para o que segue o estudante deve recordar também que, segundo (15.77) (vide também a equação (21.45) e seguintes, página 915), as funções harmônicas esféricas satisfazem $L^2\,Y_l^m(\theta,\ \varphi) = l(l+1)Y_l^m(\theta,\ \varphi)$.

• Fórmula de adição de funções harmônicas esféricas

Sejam $\hat{n}$ e $\hat{n}'$ dois versores em $\mathbb{R}^3$. Suas coordenadas Cartesianas em relação a algum sistema de referência ortogonal definido por três versores $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ podem ser escritas em termos dos ângulos polar e azimutal de um sistema de coordenadas esféricas obtidas da maneira usual a partir do eixo definido por $\hat{z}$ como

$$\hat{n} \;:=\; \big(\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi),\ \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi),\ \cos(\theta)\big) \qquad \text{e} \qquad \hat{n}' \;:=\; \big(\mathrm{sen}(\theta')\cos(\varphi'),\ \mathrm{sen}(\theta')\,\mathrm{sen}(\varphi'),\ \cos(\theta')\big)\ .$$

Seja θ'' o ângulo entre as direções que estes vetores definem, de sorte que $\hat{n}\cdot\hat{n}' = \cos\theta''$. Naturalmente, escrevendo explicitamente o produto escalar $\hat{n}\cdot\hat{n}'$ em termos das componentes de $\hat{n}$ e $\hat{n}'$, obtemos

$$\cos\theta'' \;=\; \cos\theta\,\cos\theta' + \mathrm{sen}\theta\ \mathrm{sen}\theta'\,\cos\left(\varphi'-\varphi\right)\ ,$$

expressão essa que relaciona θ'' aos ângulos θ, φ, θ' e φ'.

Se realizarmos uma rotação do sistema de coordenadas de modo a fazer o versor $\hat{n}$ coincidir com o novo eixo $\hat{z}''$, as coordenadas que descreverão o vetor $\hat{n}$ serão $(0,\ 0,\ 1)$ e, como o ângulo entre $\hat{n}$ e $\hat{n}'$ é preservado, as coordenadas que descreverão o vetor $\hat{n}'$ serão $\big(\operatorname{sen}(\theta'')\cos(\varphi''),\ \operatorname{sen}(\theta'')\operatorname{sen}(\varphi''),\ \cos(\theta'')\big)$.

Denotamos por $\left(L^2\right)'$ o operador diferencial definido em (15.85) referente às coordenadas θ' e φ' e por $\left(L^2\right)''$ correspondente o operador diferencial referente às coordenadas θ'' e φ''. Como mencionamos acima, a invariância do Laplaciano por rotações de sistemas de coordenadas implica $\left(L^2\right)' = \left(L^2\right)''$.

Sendo uma função contínua de θ' e φ', a função $P_l(\cos\theta'') = P_l\big(\cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\varphi'-\varphi)\big)$ pode ser desenvolvida em série de funções harmônicas esféricas

$$P_l(\cos\theta'') \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} c_{nm}(\theta,\ \varphi)\, Y_n^m(\theta',\varphi') \tag{15.86}$$

mas só comparecem acima termos com $n = l$, a saber, tem-se

$$P_l(\cos\theta'') \;=\; \sum_{m=-l}^{l} c_{lm}(\theta,\ \varphi)\, Y_l^m(\theta',\ \varphi') \ . \tag{15.87}$$

Para provar (15.87) notamos que $P_l(\cos\theta'')$ satisfaz $\left(L^2\right)''P_l(\cos\theta'') = l(l+1)P_l(\cos\theta'')$ pois, devido a (15.76), tem-se $P_l(\cos\theta'') = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y_l^0(\theta'',\ \varphi'')$. Dessa forma,

$$l(l+1)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} c_{nm}(\theta,\varphi)\,Y_n^m(\theta',\ \varphi') \;=\; l(l+1)P_l(\cos\theta'') \;=\; \left(L^2\right)''P_l(\cos\theta'') \;=\; \left(L^2\right)'P_l(\cos\theta'')$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} c_{nm}(\theta,\ \varphi)\left(L^2\right)'Y_n^m(\theta',\ \varphi') \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} c_{nm}(\theta,\ \varphi)\,n(n+1)Y_n^m(\theta',\ \varphi') \ .$$

Assim, estabelecemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\Big[l(l+1) - n(n+1)\Big]\, c_{nm}(\theta,\ \varphi)\, Y_n^m(\theta',\ \varphi') \;=\; 0 \ ,$$

o que implica que para todos θ e φ tem-se $c_{nm}(\theta,\ \varphi) = 0$ sempre que $n(n+1) \neq l(l+1)$, ou seja, sempre que $n \neq l$ (a outra solução para n da equação $n(n+1) - l(l+1) = 0$ é $n = -l-1$, que é negativa e, portanto, deve ser descartada). Isso estabeleceu (15.87).

De maneira totalmente análoga é possível estabelecer que

$$Y_l^m(\theta',\ \varphi') \;=\; \sum_{q=-l}^{l} a_{lq}^m(\theta,\ \varphi)\, Y_l^q(\theta'',\ \varphi'') \ . \tag{15.88}$$

Por (15.86) e usando as relações de ortogonalidade das funções harmônicas esféricas, temos

$$c_{lm}(\theta,\ \varphi) \;=\; \int P_l(\cos\theta'')\,\overline{Y_l^m(\theta',\ \varphi')}\,d\Omega \;\stackrel{(15.88)}{=}\; \sum_{q=-l}^{l}\overline{a_{lq}^m(\theta,\ \varphi)}\int P_l(\cos\theta'')\,\overline{Y_l^q(\theta'',\ \varphi'')}\ d\Omega'' \ .$$

Lembrando por (15.76) que $P_l(\cos\theta'') = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y_l^0(\theta'',\ \varphi'')$ e usando as relações de ortogonalidade das funções harmônicas esféricas, obtemos,

$$c_{lm}(\theta,\ \varphi) \;=\; \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\ \overline{a_{l0}^m(\theta,\ \varphi)} \ . \tag{15.89}$$

No caso em que $\hat{n} = \hat{n}'$ tem-se, naturalmente, $\theta = \theta'$ e $\varphi = \varphi'$, mas também tem-se $\theta'' = 0$. A expressão (15.88) afirma, então, que

$$Y_l^m(\theta,\ \varphi) \;=\; \sum_{q=-l}^{l}\overline{a_{lq}^m(\theta,\ \varphi)}\ Y_l^q(0,\ \varphi'') \ .$$

Agora, pela definição (15.75), vale

$$Y_l^q(0,\ \varphi'') \;=\; (-1)^q\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-q)!}{(l+q)!}}\ P_l^q(1)\ e^{iq\varphi''} \ .$$

Como $P_l^q(1) = 0$ para $q \neq 0$ e $P_l^0(1) = 1$, obtemos $Y_l^m(\theta,\ \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\ a_{l0}^m(\theta,\ \varphi)$ e, portanto, $a_{l0}^m(\theta,\ \varphi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\ Y_l^m(\theta,\ \varphi)$. Levando isso a (15.89), obtemos

$$c_{lm}(\theta,\ \varphi) \;=\; \frac{4\pi}{2l+1}\ \overline{Y_l^m(\theta,\ \varphi)} \ ,$$

Portanto, obtemos por (15.86)

$$P_l(\cos\theta'') \;=\; \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}\overline{Y_l^m(\theta,\ \varphi)}\,Y_l^m(\theta',\ \varphi') \ .$$

Como $P_l(\cos\theta'')$ é real, podemos escrever isso também na forma

$$P_l(\cos\theta'') \;=\; \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}\overline{Y_l^m(\theta',\ \varphi')}\,Y_l^m(\theta,\ \varphi) \ . \tag{15.90}$$

Esta é a chamada *fórmula de adição das funções harmônicas esféricas* ou *teorema de adição das funções harmônicas esféricas*. Note que (15.90) afirma também que

$$P_l(\cos\theta'') \;=\; \sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)\,P_l^m(\cos\theta')\,e^{im(\varphi'-\varphi)} \ , \tag{15.91}$$

ou seja,

$$P_l(\cos\theta'') \;=\; P_l(\cos\theta)\,P_l(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)\,P_l^m(\cos\theta')\,\cos m(\varphi'-\varphi) \ . \tag{15.92}$$

Para o caso em que $\theta = \theta'$ e $\varphi = \varphi'$ tem-se $\theta'' = 0$ e a relação (15.90) informa que

$$\sum_{m=-l}^{l}\left|Y_l^m(\theta,\ \varphi)\right|^2 \;=\; \frac{2l+1}{4\pi} \ , \tag{15.93}$$

relação esta válida para todos θ e φ. Essa relação é por vezes denominada *regra de soma de quadrados de funções harmônicas esféricas*.

• Aplicação à Eletrostática. Expansão de multipolos

Apresentaremos aqui uma aplicação da fórmula de adição de harmônicos esféricos à Eletrostática.

Sejam $\vec{x}$ e $\vec{x}'$ dois vetores em $\mathbb{R}^3$ cujas componentes Cartesianas escritas em termos de um sistema de coordenadas esféricas sejam

$$\vec{x} \;=\; \big(r\operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi),\ r\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi),\ r\cos(\theta)\big) \qquad \text{e} \qquad \vec{x}' \;=\; \big(r'\operatorname{sen}(\theta')\cos(\varphi'),\ r'\operatorname{sen}(\theta')\operatorname{sen}(\varphi'),\ r'\cos(\theta')\big) \ .$$

Naturalmente, para $\vec{x} \neq \vec{x}'$ vale

$$\frac{1}{\|\vec{x}-\vec{x}'\|} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{x}'\|^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{x}'}} \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{r}\,\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\theta'' + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} \ , & \text{se } r' < r \ , \\[2ex] \dfrac{1}{r'}\,\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{r}{r'}\right)\cos\theta'' + \left(\frac{r}{r'}\right)^2}} \ , & \text{se } r < r' \ , \end{cases}$$

onde θ'' é o ângulo entre $\vec{x}$ e $\vec{x}'$ (de sorte que $\vec{x}\cdot\vec{x}' = rr'\cos\theta''$).

Usando a expressão (15.46), página 690, a fórmula da função geratriz dos polinônios de Legendre, escrevemos

$$\frac{1}{\|\vec{x}-\vec{x}'\|} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta'') , & \text{se } r' < r , \\ \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{l+1}} P_l(\cos\theta'') , & \text{se } r < r' . \end{cases}$$

Podemos agora fazer uso da fórmula de adição (15.90) e obter

$$\frac{1}{\|\vec{x}-\vec{x}'\|} = \begin{cases} \displaystyle 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1}\left(r'^l\,\overline{Y_l^m(\theta',\,\varphi')}\right)\left(\frac{Y_l^m(\theta,\,\varphi)}{r^{l+1}}\right) , & \text{se } r' < r , \\ \\ \displaystyle 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1}\left(\frac{\overline{Y_l^m(\theta',\,\varphi')}}{r'^{l+1}}\right)\left(r^l\,Y_l^m(\theta,\,\varphi)\right) , & \text{se } r < r' . \end{cases} \tag{15.94}$$

O interesse na expressão acima reside no fato de que as contribuições de $\vec{x}$ e $\vec{x}'$ ocorrem de forma fatorizada em cada termo das somas em l e m (os fatores entre parênteses).

Vams agora aplicar as expressões acima à Eletrostática (como referências gerais citamos [163], [121] ou [270]). Seja dada uma distribuição de cargas $\rho(\vec{x}')$ e vamos supor que ao potencial elétrico $\phi(\vec{x})$ não é imposta nenhuma condição de contorno, exceto anular-se no infinito. Sabemos que em tal caso a equação de Poisson[20] $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ tem por solução $\phi(\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \frac{\rho(\vec{x}')}{\|\vec{x}-\vec{x}'\|}\,d^3\vec{x}'$ se ρ decair a zero suficientemente rápido no infinito.

Se ρ tiver suporte compacto, de forma que para algum $R > 0$ tenha-se $\rho(\vec{x}') = 0$ para todo $\vec{x}'$ com $\|\vec{x}'\| > R$, então para todo $\vec{x}$ satisfazendo $\|\vec{x}\| > R$ podemos usar (15.94) (para o caso $r' < r$) e escrever

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{Q_{lm}}{2l+1}\left(\frac{Y_l^m(\theta,\,\varphi)}{r^{l+1}}\right) , \tag{15.95}$$

onde

$$Q_{lm} := \int \rho(\vec{x}')\left(r'^l\,\overline{Y_l^m(\theta',\,\varphi')}\right) d^3\vec{x}' = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \rho(r',\,\theta',\,\varphi')\,(r')^{l+2}\,\overline{Y_l^m(\theta',\,\varphi')}\,\operatorname{sen}\theta'\,d\varphi'\,d\theta'\,dr' . \tag{15.96}$$

A expansão (15.95) é denominada *expansão de multipolos* para o potencial ϕ. Os coeficientes Q_{lm} dados em (15.96) são denominados *momentos de multipolo*.

Usando que $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, vemos que primeiro termo da expansão de multipolos (correspondente ao termo com $l = 0$) é $\frac{Q_{00}}{\epsilon_0\sqrt{4\pi}}\frac{1}{r}$ sendo que, por (15.96), $Q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int\rho(\vec{x}')\,d^3\vec{x}' = \frac{Q_{total}}{\sqrt{4\pi}}$, sendo Q_{total} a carga total da distribuição ρ. Percebemos que o primeiro termo da expansão de multipolos corresponde à bem-conhecida Lei de Coulomb[21] e podemos assim compreender os demais como sendo correções a essa lei para distribuições de carga gerais ρ.

Mais detalhes sobre usos da expansão de multipolos na Eletrostática podem ser encontrados em bons livros de Eletromagnetismo (e.g. [163], [121] ou [270]).

15.2.3 Propriedades dos Polinômios de Hermite

• **Relações de ortogonalidade para os polinômios de Hermite**

A equação de Hermite $\left(e^{-x^2}y'(x)\right)' + \lambda e^{-x^2}y(x) = 0$ é tipicamente considerada no intervalo $J = (-\infty,\,\infty)$. Aqui

[20] Siméon Denis Poisson (1781–1840).

[21] Charles Augustin de Coulomb (1736–1806).

$p(x) = e^{-x^2}$, $q(x) = 0$, $r(x) = e^{-x^2}$ e $\mu = \lambda$. Note que $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$ em todo $J = (-\infty,\,\infty)$. Os polinômios de Hermite $H_m(x)$ foram definidos[22] em (14.20) por

$$H_m(x) := \sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor} \frac{(-1)^k\,m!}{k!\,(m-2k)!}\,(2x)^{m-2k} . \tag{15.97}$$

onde $\lfloor m/2\rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a $m/2$, e são soluções da equação de Hermite com $\mu = 2m$.

Como $p(x)$ decai a zero para $x \to \pm\infty$ e os $H_m(x)$ são polinômios, vale para os polinômios de Hermite a relação (15.23) e concluímos pelo Teorema 15.1 que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)\,e^{-x^2}\,dx = 0 \tag{15.98}$$

para todo $n \neq m$, com $m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. Para calcular as integrais acima no caso $n = m$, podemos elegantemente usar as relações

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) , \tag{15.99}$$

as quais serão provadas mais abaixo (expressão (15.106)). Seja $A_n := \int_{-\infty}^{\infty}(H_n(x))^2\,e^{-x^2}\,dx$. Tem-se que

$$\begin{aligned} 2nA_{n-1} &= \int_{-\infty}^{\infty}\bigl(2nH_{n-1}(x)\bigr)\,H_{n-1}(x)\,e^{-x^2}\,dx \\ &\overset{(15.99)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\bigl(2xH_n(x)\bigr)\,H_{n-1}(x)\,e^{-x^2}\,dx - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}H_{n+1}(x)\,H_{n-1}(x)\,e^{-x^2}\,dx}_{=0 \text{ por } (15.98)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}H_n(x)\,\bigl(2xH_{n-1}(x)\bigr)\,e^{-x^2}\,dx \\ &\overset{(15.99)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}H_n(x)\,H_n(x)\,e^{-x^2}\,dx + (2n-2)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}H_n(x)\,H_{n-2}(x)\,e^{-x^2}\,dx}_{=0 \text{ por } (15.98)} \\ &= A_n . \end{aligned}$$

Logo, $A_n = (2n)A_{n-1}$, ou seja, $A_n = (2n)!!\,A_0 = 2^n n!\,A_0$. Como $A_0 = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)\,e^{-x^2}\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi}\,\delta_{n,\,m} , \tag{15.100}$$

para todos $m,\ n \geq 0$. Estas são as *relações de ortogonalidade dos polinômios de Hermite*.

No Capítulo 16, página 742, é demonstrada a importante propriedade de completeza dos polinômios de Hermite no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R},\,e^{-x^2}dx)$.

• **A função geratriz exponencial dos polinômios de Hermite**

Vamos aqui considerar a função geratriz exponencial dos polinômios de Hermite e provar que a mesma satisfaz

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}\,t^n = e^{2xt-t^2} . \tag{15.101}$$

[22] **Advertência.** Nestas notas usamos a chamada "definição física" dos polinômios de Hermite. Há uma outra convenção, usada especialmente na Teoria das Probabilidades, que difere da definição usada em Física por um fator constante e por um reescalonamento do argumento. O leitor deve, por isso, ter cuidado ao comparar nossas expressões com outras usadas em textos da Teoria das Probabilidades.

Usando-se diretamente (15.97) e separando-se na soma n's pares de n's ímpares, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}\,t^n &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{H_{2m}(x)}{(2m)!}\,t^{2m}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{H_{2m+1}(x)}{(2m+1)!}\,t^{2m+1}\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\,(2x)^{2m-2k}\,t^{2m}}{k!\,(2m-2k)!}+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\,(2x)^{2m+1-2k}\,t^{2m+1}}{k!\,(2m+1-2k)!}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(2x)^{2m-2k}\,t^{2m}}{k!\,(2m-2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(2x)^{2m+1-2k}\,t^{2m+1}}{k!\,(2m+1-2k)!}\\
&\stackrel{m\to m+k}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(2x)^{2m}\,t^{2m+2k}}{k!\,(2m)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(2x)^{2m+1}\,t^{2m+1+2k}}{k!\,(2m+1)!}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,t^{2k}}{k!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2xt)^{2m}}{(2m)!}\right)+\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,t^{2k}}{k!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2xt)^{2m+1}}{(2m+1)!}\right)\\
&= e^{-t^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2xt)^n}{n!}\right)\\
&= e^{2xt-t^2}\,,
\end{aligned}$$

como queríamos provar.

• Fórmula de Rodrigues para os polinômios de Hermite

Pelas nossas considerações gerais sobre as fórmulas de Rodrigues, podemos presumir que os polinômios H_m, por serem ortogonais entre si (vide (15.98)), possam ser expressos na forma (15.30) com $r(x)=e^{-x^2}$, ou seja,

$$H_n(x) \;=\; K_n\,e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\,,$$

onde K_m são constantes que dependem da normalização adotada. De fato, essa pressuposição é correta pois, multiplicando (15.101) por e^{-x^2}, obtém-se

$$e^{-(x-t)^2} \;=\; \sum_{m=0}^{\infty}\frac{H_m(x)e^{-x^2}}{m!}\,t^m\,. \tag{15.102}$$

Encarando o lado direito como a expansão em série de Taylor em t, em torno de $t=0$, da função do lado esquerdo, concluímos que

$$H_n(x)e^{-x^2} \;=\; \left.\frac{d^n}{dt^n}e^{-(x-t)^2}\right|_{t=0}\,,$$

para todo $n\geq 0$. Com a mudança de variável $u=x-t$, $\frac{d}{dt}=-\frac{d}{du}$, ficamos com

$$H_n(x)e^{-x^2} \;=\; (-1)^n\,\left.\frac{d^n}{du^n}e^{-u^2}\right|_{u=x} \;=\; (-1)^n\,\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\,.$$

Assim,

$$H_n(x) \;=\; (-1)^n\,e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\,, \tag{15.103}$$

para todo $n\geq 0$. Essa é a *fórmula de Rodrigues dos polinômios de Hermite*.

E. 15.8 *Exercício*. Prove as relações de ortogonalidade (15.100) usando a relação (15.103), a relação (15.97) e integração por partes. ✤

• Relações de recorrência para os polinômios de Hermite

Tomando-se a derivada em x de (15.103), é elementar constatar que

$$H_n'(x) \;=\; 2xH_n(x)-H_{n+1}(x)\,. \tag{15.104}$$

Ao mesmo tempo,

$$\begin{aligned}
H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1}\,e^{x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2}\\
&= (-1)^{n+1}\,e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d}{dx}e^{-x^2}\right)\\
&= 2(-1)^n\,e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(xe^{-x^2}\right)\\
&\stackrel{Leibniz}{=} 2(-1)^n\,e^{x^2}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\left(\frac{d^p}{dx^p}\,x\right)\left(\frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}\,e^{-x^2}\right)\\
&= 2(-1)^n\,e^{x^2}\left(x\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)+n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{-x^2}\right)\right)\\
&= 2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)\,.
\end{aligned}$$

Assim, $H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$. Note que, como $H_0(x)=1$ e $H_1(x)=2x$, essa identidade vale também para $n=0$. Reunindo isso com (15.104), somos conduzidos a $H_n'(x)\;=\;2nH_{n-1}(x)$, $n\geq 0$. Resumindo, obtemos as seguintes relações:

$$H_n'(x) \;=\; 2xH_n(x)-H_{n+1}(x)\,, \tag{15.105}$$

$$H_{n+1}(x) \;=\; 2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)\,, \tag{15.106}$$

$$H_n'(x) \;=\; 2nH_{n-1}(x)\,, \tag{15.107}$$

válidas para todo $n\geq 0$. Estas expressões são bastante úteis. A relação (15.106), por exemplo, permite obter recursivamente todos os H_n's a partir de $H_0(x)=1$ e $H_1(x)=2x$.

Segue facilmente de (15.107) que para a p-ésima devivada de H_n tem-se

$$H_n^{(p)}(x) \;=\; 2^p\frac{n!}{(n-p)!}H_{n-p}(x) \tag{15.108}$$

para todo $p\in\{0,\;\ldots,\;n\}$. Verifique! Essa relação tem a seguinte consequência: usando-se a expansão em série de Taylor, segue que

$$H_n(x+y) \;=\; \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}H_n^{(p)}(x)y^p \;=\; \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}H_n^{(p)}(x)y^p \;\stackrel{(15.108)}{=}\; \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}2^p\frac{n!}{(n-p)!}H_{n-p}(x)y^p$$

e, portanto,

$$H_n(x+y) \;=\; \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}H_{n-p}(x)\,(2y)^p\,, \tag{15.109}$$

válida para todos x e $y\in\mathbb{C}$ e $n\in\mathbb{N}_0$.

15.2.3.1 As Funções de Hermite

As chamadas *funções de Hermite* são definidas por

$$h_n(x) \;:=\; c_nH_n(x)e^{-x^2/2}\,, \tag{15.110}$$

com $x \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ e onde

$$c_n := \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} .$$

Como podemos aprender na Seção 21.7, página 966, essas funções são as auto-funções normalizadas do operador Hamiltoniano para o oscilador harmônico unidimensional. De acordo com (15.100), essas funções satisfazem

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)h_m(x)\,dx = \delta_{n,m} \qquad (15.111)$$

para todos n, $m \in \mathbb{N}_0$, como facilmente se verifica. Na Seção 16.2, página 745, aprendemos também que essas funções formam uma base ortonormal completa no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

E. 15.9 *Exercício*. Usando as relações (15.105)–(15.107) e a definição (15.110), obtenha as relações

$$h_n'(x) = x\,h_n(x) - \sqrt{2(n+1)}\,h_{n+1}(x) , \qquad (15.112)$$

$$\sqrt{n+1}\,h_{n+1}(x) = \sqrt{2}\,x\,h_n(x) - \sqrt{n}\,h_{n-1}(x) , \qquad (15.113)$$

$$h_n'(x) = \sqrt{2n}\,h_{n-1}(x) - x\,h_n(x) , \qquad (15.114)$$

para todo $n \geq 0$. De (15.112) e (15.114) obtenha também

$$h_n'(x) = \sqrt{\frac{n}{2}}\,h_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\,h_{n+1}(x) . \qquad (15.115)$$

✠

Usando a fórmula de Rodrigues (15.103) para os polinômios de Hermite H_n, podemos escrever

$$h_n(x) = (-1)^n\,c_n\,e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} . \qquad (15.116)$$

Essa fórmula pode ser reescrita de uma forma que é mais conveniente para certos propósitos. É muito fácil perceber que se f é uma função infinitamente diferenciável, vale

$$e^{x^2/2}\frac{d}{dx}f(x) = \left(\frac{d}{dx} - x\right)\left(e^{x^2/2}f(x)\right) .$$

Verifique! Assim, tem-se a seguinte relação operatorial:

$$e^{x^2/2}\frac{d}{dx} = \left(\frac{d}{dx} - x\right)e^{x^2/2}$$

que nos permite escrever $e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n} = \left(\frac{d}{dx} - x\right)^n e^{x^2/2}$. Com isso obtemos a *fórmula de Rodrigues para as funções de Hermite*:

$$h_n(x) = c_n\left(x - \frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2} , \qquad (15.117)$$

válida para todo $n \in \mathbb{N}_0$. A relação (15.117) pode ser também demonstrada por indução a partir de (15.112). Faça-o!

Na Seção 38.2.2, página 1882, provamos que as funções de Hermite são auto-funções da transformada de Fourier, a saber, que vale

$$\mathcal{F}[h_n] = (-i)^n\,h_n .$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

*

Em livros de Mecânica Quântica o estudante poderá aprender que algumas das propriedades dos polinômios de Hermite e das funções de Hermite que obtivemos acima podem ser provadas com o uso dos chamados operadores de criação e aniquilação.

• Outras propriedades das funções de Hermite. A fórmula de Mehler

Vamos demonstrar mais algumas identidades úteis a respeito de funções de Hermite e polonômios de Hermite[23]. Nosso ponto de partida é a relação

$$e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2+2isx}\,ds . \qquad (15.118)$$

Essa identidade pode ser facilmente demonstrada por integração complexa. Neste texto são apresentadas outras demonstrações da mesma, por exemplo, na Proposição 38.9, página 1875, e no Exercício E. 38.60, página 1950.

Usando (15.118) em (15.116), obtemos

$$h_n(x) = \frac{(-2i)^n c_n e^{x^2/2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} s^n e^{-s^2+2isx}\,ds . \qquad (15.119)$$

E. 15.10 *Exercício*. Justifique por que é permitido diferenciar (15.118) sob o símbolo da integral. Algum conhecimento da teoria das Trasformadas de Fourier pode ajudar. Vide Seção 38.2, página 1866. ✠

A expressão (15.119) é uma *representação integral das funções de Hermite*. Para os polinômios de Hermite ela significa

$$H_n(x) = \frac{(-2i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} s^n e^{-s^2+2isx}\,ds , \qquad (15.120)$$

que é uma *representação integral dos polinômios de Hermite*.

Por motivos que revelaremos adiante, vamos agora considerar a expressão

$$U(x,\,x,\,z) := \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)\,h_n(y)\,z^n \qquad (15.121)$$

com x, $y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < 1$. Antes de prosseguirmos, façamos um breve comentário sobre a convergência dessa série. Temos por (15.119) que

$$|h_n(x)| \leq 2\frac{2^n c_n e^{x^2/2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} s^n e^{-s^2}\,ds \overset{(7.17)}{=} \frac{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{3/4}(n!)^{1/2}}\,e^{x^2/2} ,$$

onde Γ é a função gama de Euler (Capítulo 7, página 280). Usando na fórmula acima as aproximações de Stirling (7.70) e (7.78) para $n!$ e $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$, respectivamente, obtemos a estimativa assintótica $|h_n(x)| \leq \left(2^{1/4}\pi^{-1/2}\right)n^{-1/4}e^{x^2/2}$ (válida para todo n grande o suficiente). No que concerne à dependência em x esta é uma estimativa muito grosseira para $|h_n(x)|$ (é possível provar que para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}_0$ vale $|h_n(x)| \leq K$, onde $K \approx 1,086$), mas ela é suficiente para estabelecer que a série no lado direito de (15.121) é absolutamente convergente para x, $y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < 1$.

Retornando a (15.121), usando (15.119) e a definição de c_n, temos

$$\begin{aligned} U(x,\,x,\,z) &= \frac{e^{(x^2+y^2)/2}}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} z^n(-1)^n(2)^{2n}c_n^2\left(\int_{-\infty}^{\infty} s^n e^{-s^2+2isx}\,ds\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-t^2+2ity}\,dt\right) \\ &= \frac{e^{(x^2+y^2)/2}}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2-t^2+2i(sx+ty)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2zst)^n}{n!}\right)ds\,dt \\ &= \frac{e^{(x^2+y^2)/2}}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2-t^2+2i(sx+ty)-2zst}\,ds\,dt \end{aligned} \qquad (15.122)$$

[23]Seguiremos as indicações de [33].

E. 15.11 *Exercício*. Prove isso e justifique a troca de ordem das integrais com a somatória em n efetuada acima. ✠

Desejamos agora calcular a integral dupla do lado direito de (15.122). Isso é obtido por completamento de quadrados e há mais de uma forma de fazê-lo. Sugerimos escrever-se

$$-s^2 - t^2 + 2i(sx + ty) - 2zst \;=\; -\Big(s + \big(zt - ix\big)\Big)^2 - \big(1 - z^2\big)\left(t - i\frac{y - xz}{1 - z^2}\right)^2 + \left(\frac{-x^2 + 2xyz - y^2}{1 - z^2}\right) .$$

E. 15.12 *Exercício*. Prove isso. Isso pode ser feito partindo-se do lado esquerdo e chegando-se ao direito por completamento de quadrados ou expandindo-se o lado direito e constatando-se que é igual ao esquerdo. ✠

Com isso, temos

$$U(x,\ x,\ z) \overset{(15.122)}{=} \frac{e^{(x^2+y^2)/2}}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2-t^2+2i(sx+ty)-2zst}\, ds\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi^{3/2}}\exp\left(-\frac{(1+z^2)(x^2+y^2) - 4xyz}{2(1-z^2)}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(-\big(1 - z^2\big)\left(t - i\frac{y - xz}{1 - z^2}\right)^2\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(s+(zt-ix)\right)^2} ds\right)\right] dt .$$

Agora,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(s+(zt-ix)\right)^2} ds \;=\; \sqrt{\pi} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\big(1 - z^2\big)\left(t - i\frac{y - xz}{1 - z^2}\right)^2\right) dt \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1 - z^2}} .$$

Vide Corolário 38.1, página 1876, em particular, vide (38.59) . Note-se que $\mathrm{Re}\,(1-z^2) > 0$, pois estamos supondo $|z| < 1$. Assim, obtemos

$$U(x,\ x,\ z) \;=\; \frac{1}{\pi^{1/2}\sqrt{1 - z^2}}\exp\left(-\frac{(1+z^2)(x^2+y^2) - 4xyz}{2(1-z^2)}\right) ,$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)\, h_n(y)\, z^n \;=\; \frac{1}{\sqrt{\pi\big(1 - z^2\big)}}\exp\left(-\frac{(1+z^2)\big(x^2+y^2\big) - 4xyz}{2(1-z^2)}\right) \tag{15.123}$$

para $x,\ y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < 1$. Essa relação é por vezes denominada *fórmula de Mehler*[24]. Usando-se (15.110), obtemos disso também

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)\, H_n(y)\, z^n}{2^n n!} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}\exp\left(\frac{-z^2\big(x^2+y^2\big) + 2xyz}{1 - z^2}\right) . \tag{15.124}$$

Verifique! O lado esquerdo da expressão (15.123) é relevante na Mecânica Quântica (daí nosso interesse pela mesma) por estar relacionado ao chamado *propagador do oscilador harmônico unidimensional*. Vide página 968.

É fácil constatar que (15.123) pode ser reescrita como

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)\, h_n(y)\, z^n \;=\; \frac{1}{\sqrt{\pi(1+z)(1-z)}}\exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{1-z}{1+z}(x+y)^2 + \frac{1+z}{1-z}(x-y)^2\right)\right] . \tag{15.125}$$

Verifique! No limite formal $z \to 1$ a expressão do lado direito aproxima-se de uma sequência delta de Dirac (compare-se com (38.154), página 1903, com o parâmetro n que ocorre naquela expressão substituido por $1/\sqrt{2(1-z)}$) e obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)\, h_n(y) \;=\; \delta(x - y) , \tag{15.126}$$

(δ sendo a distribuição delta de Dirac). Essa relação deve ser entendida no sentido de distribuições temperadas (Seção 38.3, página 1899) e é uma manifestação da completeza das funções de Hermite em $L^2(\mathbb{R},\ dx)$, demonstrada na Seção 16.2, página 745.

[24] Gustav Ferdinand Mehler (1835–1895).

15.2.4 Propriedades dos Polinômios de Tchebychev

Os polinômios de Tchebychev foram introduzidos na Seção 14.1.5, página 622 (vide particularmente a página 623). Os polinômios de Tchebychev desempenham um papel importante na teoria das aproximações de funções contínuas por polinômios, mas no tratamento resumido que aqui prentedemos vamos mencionar apenas as relações de ortogonalidade que eles satisfazem.

• **Relações de ortogonalidade dos polinômios de Tchebychev**

Os polinômios de Tchebychev podem ser expressos no intervalo $[-1,\ 1]$ por

$$T_m(x) \;=\; \cos\big(m\arccos(x)\big) ,$$

para $m \in \mathbb{N}_0$. Os polinômios de Tchebychev são solução da equação de Tchebychev

$$(1 - z^2)y''(z) - z\,y'(z) + m^2 y(z) \;=\; 0$$

para $m \in \mathbb{N}_0$. Como já observamos (vide página 679), a forma canônica de Liouville da equação de Tchebychev é

$$\Big(\sqrt{1 - x^2}\, y'(x)\Big)' + m^2\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}y(x) \;=\; 0 .$$

Assim, identificamos $p(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ e $\mu = m^2$. Por nossas considerações anteriores, devem valer relações de ortogonalidade do tipo $\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = K_n\delta_{m,\,n}$ para certas constantes K_n. De fato, a mudança de variáveis $y = \arccos(x)$ permite-nos escrever

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \;=\; \int_{-1}^{1}\frac{\cos\big(m\arccos(x)\big)\cos\big(n\arccos(x)\big)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \overset{y=\arccos(x)}{=} \int_0^{\pi}\cos(my)\cos(ny)\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(my)\cos(ny)\, dy \overset{(37.63)}{=} \begin{cases} \pi\,\delta_{0,\,m} , & n = 0,\ m \in \mathbb{N}_0 . \\[4pt] \frac{\pi}{2}\,\delta_{n,\,m} , & n,\ m \in \mathbb{N} , \end{cases}$$

Logo,

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \;=\; K_n\,\delta_{m,\,n} , \tag{15.127}$$

com $K_0 = \pi/2$ e $K_n = \pi$ para $n > 0$. Essas são as relações de ortogonalidade dos polinômios de Tchebychev. Devido às mesmas, os polinômios de Tchebychev normalizados $Q_n(x) := T_n(x)/\sqrt{K_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, compõe um conjunto ortonormal completo no espaço de Hilbert $L^2\left((-1,\ 1),\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right)$. Disso trataremos na Seção 16.1, página 742.

15.2.5 Propriedades dos Polinômios de Laguerre

• **Relações de ortogonalidade para os polinômios de Laguerre**

A equação de Laguerre $\big(xe^{-x}\,y'(x)\big)' + \lambda e^{-x}y(x) = 0$ é tipicamente considerada no intervalo $J = [0,\ \infty)$. Para ela tem-se $p(x) = xe^{-x}$, $q(x) = 0$, $r(x) = e^{-x}$ e $\mu = \lambda$. Note que $p(x) > 0$ em $J^0 = (0,\ \infty)$, e anula-se em $x = 0$ e no infinito. Além disso, $r(x) > 0$ em todo $J = [0,\ \infty)$. Os polinômios de Laguerre foram definidos em (14.140) por

$$L_m(x) \;:=\; \sum_{n=0}^{m}(-1)^n\,\frac{m!}{n!}\binom{m}{n}\, x^n \tag{15.128}$$

e representam soluções da equação de Laguerre em $J = [0,\ \infty)$ para $\mu = m$. É bastante claro que para os polinômios de Laguerre vale a condição (15.23) e, portanto, pelo Teorema 15.1, segue que

$$\int_0^{\infty} L_n(x)L_m(x)\, e^{-x}\, dx \;=\; 0 \tag{15.129}$$

para todo $n \neq m$, com $m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. Notemos também aqui que (15.129) implica

$$\int_0^\infty x^k L_m(x)\, e^{-x}\, dx \;=\; 0 \tag{15.130}$$

para todo $k < m$, pois os monômios x^k podem ser escritos como combinações lineares dos polinômios L_n's com $n < m$. Para calcular as integrais de (15.129) no caso $m = n$ podemos fazer uso da identidade

$$L'_{n+1}(x) \;=\; (n+1)L'_n(x) - (n+1)L_n(x)\ , \tag{15.131}$$

que será demonstrada mais abaixo (expressão (15.135)). Com ela, vê-se que

$$\begin{aligned}
(n+1)\int_0^\infty L_n(x)^2\, e^{-x}\, dx \quad &= \quad \int_0^\infty L_n(x)\Big((n+1)L_n(x)\Big)\, e^{-x}\, dx \\
&\overset{(15.131)}{=} \quad (n+1)\underbrace{\int_0^\infty L_n(x)L'_n(x)\, e^{-x}\, dx}_{=0 \text{ por } (15.130)} - \int_0^\infty L_n(x)L'_{n+1}(x)\, e^{-x}\, dx \\
&\overset{\text{int. por partes}}{=} \quad -L_n(x)L_{n+1}(x)e^{-x}\Big|_0^\infty + \underbrace{\int_0^\infty L'_n(x)L_{n+1}(x)\, e^{-x}\, dx}_{=0 \text{ por } (15.130)} \\
&\qquad - \underbrace{\int_0^\infty L_n(x)L_{n+1}(x)\, e^{-x}\, dx}_{=0 \text{ por } (15.129)} \\
&= \quad L_n(0)L_{n+1}(0) \quad \overset{(15.128)}{=} \quad (n+1)(n!)^2\ .
\end{aligned}$$

Concluímos assim que

$$\int_0^\infty L_n(x)L_m(x)\, e^{-x}\, dx \;=\; (n!)^2\, \delta_{n,\,m} \tag{15.132}$$

para todos $n,\ m \geq 0$. Estas são as *relações de ortogonalidade para os polinômios de Laguerre*.

- **Fórmula de Rodrigues para os polinômios de Laguerre**

Pela ortogonalidade dos polinômios de Laguerre (15.129), podemos presumir, sob a luz das considerações da Seção 15.1.2, página 685, que os polinômios de Laguerre satisfazem, por (15.28), uma relação como

$$L_m(x) \;:=\; K_m\, \frac{1}{r(x)}\frac{d^m}{dx^m}\Big(r(x)\, x^m\Big) \;=\; K_m\, e^x\, \frac{d^m}{dx^m}\Big(x^m\, e^{-x}\Big)\ , \tag{15.133}$$

onde K_m é uma constante dependente da normalização adotada. De fato, pela regra de Leibniz,

$$\begin{aligned}
e^x\, \frac{d^m}{dx^m}\Big(x^m\, e^{-x}\Big) \quad &= \quad e^x \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \left(\frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}}x^m\right) \left(\frac{d^p}{dx^p}e^{-x}\right) \\
&= \quad \sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m}{p}\, \frac{m!}{p!}\, x^p \quad \overset{(15.128)}{=} \quad L_m(x)\ .
\end{aligned}$$

Assim, $K_m = 1$ e concluímos que

$$L_m(x) \;=\; e^x\, \frac{d^m}{dx^m}\Big(x^m\, e^{-x}\Big)\ , \tag{15.134}$$

para todo $m \geq 0$. Esta é a *fórmula de Rodrigues para os polinômios de Laguerre*.

- **Relações de recorrência para os polinômios de Laguerre**

Por (15.134), é elementar constatar que

$$\begin{aligned}
L'_{m+1}(x) \quad &= \quad e^x\, \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\Big(x^{m+1}\, e^{-x}\Big) + e^x\, \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\frac{d}{dx}\Big(x^{m+1}\, e^{-x}\Big) \\
&= \quad L_{m+1}(x) + (m+1)e^x\, \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\Big(x^m\, e^{-x}\Big) - e^x\, \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\Big(x^{m+1}\, e^{-x}\Big) \\
&\overset{(15.134)}{=} \quad (m+1)e^x\, \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\Big(x^m\, e^{-x}\Big) \quad = \quad (m+1)e^x\, \frac{d}{dx}\frac{d^m}{dx^m}\Big(x^m\, e^{-x}\Big) \\
&= \quad (m+1)e^x\, \frac{d}{dx}\Big(e^{-x}L_m(x)\Big) \\
&= \quad -(m+1)L_m(x) + (m+1)L'_m(x)\ .
\end{aligned}$$

Estabelecemos assim que

$$L'_{m+1}(x) \;=\; (m+1)L'_m(x) - (m+1)L_m(x)\ , \tag{15.135}$$

$m \geq 0$. Essa é uma das fórmulas de recorrência para os polinômios de Laguerre, a qual empregamos acima para provar as relações de ortogonalidade (15.132) no caso $m = n$. Há uma segunda, da qual trataremos agora. Pela fórmula de Rodrigues vale

$$\begin{aligned}
L_m(x) \quad &\overset{(15.134)}{=} \quad e^x\, \frac{d^m}{dx^m}\Big(x^m\, e^{-x}\Big) \quad = \quad e^x\, \frac{d^m}{dx^m}\left[x\left(x^{m-1}\, e^{-x}\right)\right] \\
&\overset{\text{Leibniz}}{=} \quad e^x \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \left(\frac{d^p}{dx^p}x\right) \frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}}\left(x^{m-1}\, e^{-x}\right) \\
&= \quad e^x\, x\, \frac{d^m}{dx^m}\left(x^{m-1}e^{-x}\right) + me^x\, \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(x^{m-1}e^{-x}\right) \\
&= \quad e^x\, x\, \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\, L_{m-1}(x)\right) + mL_{m-1}(x) \\
&= \quad -xL_{m-1}(x) + xL'_{m-1}(x) + mL_{m-1}(x)\ .
\end{aligned}$$

Estabelecemos que

$$L_m(x) \;=\; -xL_{m-1}(x) + xL'_{m-1}(x) + mL_{m-1}(x) \tag{15.136}$$

o que também implica (fazendo $m \to m+1$)

$$L_{m+1}(x) = -xL_m(x) + xL'_m(x) + (m+1)L_m(x)\ . \tag{15.137}$$

Multiplicando ambos os lados de (15.136) por $-m$ e somando o resultado a (15.137), teremos:

$$L_{m+1}(x) - mL_m(x) \;=\; -xL_m(x) + xL'_m(x) + (m+1)L_m(x) + mxL_{m-1}(x) - mxL'_{m-1}(x) - m^2L_{m-1}(x)\ . \tag{15.138}$$

Por (15.135), os termos $xL'_m(x) - mxL'_{m-1}(x)$ valem $x(L'_m(x) - mL'_{m-1}(x)) \overset{(15.135)}{=} -mxL_{m-1}(x)$. Introduzindo isso de volta a (15.138), inferimos que

$$L_{m+1}(x) \;=\; (2m - x + 1)L_m(x) - m^2L_{m-1}(x)\ .$$

Resumindo nossas conclusões, estabelecemos as seguintes relações:

$$L'_{m+1}(x) \quad = \quad (m+1)L'_m(x) - (m+1)L_m(x)\ , \tag{15.139}$$

$$L_{m+1}(x) \quad = \quad (2m - x + 1)L_m(x) - m^2L_{m-1}(x)\ . \tag{15.140}$$

Essas relações são denominadas *fórmulas de recorrência para os polinômios de Laguerre*. A relação (15.140), em particular, permite obter recursivamente todos os $L_m(x)$'s a partir de $L_0(x) = 1$ e $L_1(x) = 1 - x$.

• **A função geratriz exponencial dos polinômios de Laguerre**

Partindo de (15.128) obtemos para a função geratriz exponencial dos polinômios de Laguerre

$$\mathcal{L}(x,\ t) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{L_m(x)}{m!} t^m$$

o seguinte desenvolvimento[25]:

$$\mathcal{L}(x,\ t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}(-1)^n \frac{1}{n!}\binom{m}{n} x^n\, t^m = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!}\binom{m}{n} x^n\, t^m \tag{15.141}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!}\left(\sum_{m=n}^{\infty}\binom{m}{n} t^m\right) . \tag{15.142}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=n}^{\infty}\binom{m}{n} t^m &\overset{m\to m+n}{=} \frac{t^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{m!} t^m \\
&= \frac{t^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d^n}{dt^n} t^{m+n} = \frac{t^n}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^n\sum_{m=0}^{\infty} t^m\right) \\
&= \frac{t^n}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{t^n}{1-t}\right) \\
&\overset{Leibniz}{=} \frac{t^n}{n!}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\left(\frac{d^p}{dt^p}t^n\right)\left(\frac{d^{n-p}}{dt^{n-p}}(1-t)^{-1}\right) \\
&= \frac{t^n}{n!}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\left(\frac{n!}{(n-p)!}\, t^{n-p}\right)\left(\frac{(n-p)!}{(1-t)^{n-p+1}}\right) \\
&= \frac{t^n}{1-t}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{n-p} = \frac{t^n}{1-t}\left(1+\frac{t}{1-t}\right)^n = \frac{t^n}{(1-t)^{n+1}} .
\end{aligned}$$

Retornando com isso a (15.142), temos

$$\mathcal{L}(x,\ t) = \frac{1}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{xt}{1-t}\right)^n ,$$

e assim concluímos que

$$\mathcal{L}(x,\ t) = \frac{\exp\left(-\dfrac{xt}{1-t}\right)}{1-t} . \tag{15.143}$$

Essa é a *função geratriz exponencial dos polinômios de Laguerre*.

[25] Assumimos $|t|$ e $|x|$ pequenos o suficiente para justificar as diversas manipulações que faremos.

15.2.6 Propriedades dos Polinômios de Laguerre Associados

A equação de Laguerre associada

$$xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y = 0 , \tag{15.144}$$

com m e n inteiros com $0 \le m \le n$, é tipicamente considerada no intervalo $J = [0,\ \infty)$. A mesma pode ser ser levada à forma canônica (15.5), transformando-se em

$$(x^{m+1}e^{-x}y'(x))' + (n-m)x^m e^{-x}y(x) = 0 .$$

Tem-se, portanto, $p(x) = x^{m+1}e^{-x}$, $q(x) = 0$, $r(x) = x^m e^{-x}$ e $\mu = n - m$. Uma alternativa talvez melhor é tomar-se $p(x) = x^{m+1}e^{-x}$, $q(x) = -mx^m e^{-x}$, $r(x) = x^m e^{-x}$ e $\mu = n$. Note-se que $p(x)$ e $r(x)$ são os mesmos em ambas as escolhas.

Os polinômios de Laguerre associados foram definidos em (14.165) e expressões seguintes por[26]

$$L_n^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m}L_n(x) = \frac{d^m}{dx^m}\left(e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\right) = (-1)^m\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\frac{n!}{k!}\binom{n}{m+k}x^k , \tag{15.145}$$

com $0 \le m \le n$. O polinômio $L_n^{(m)}$ é a única solução de (15.144) que é regular em $x = 0$. É de se notar que, por essa definição, tem-se

$$L_n^{(0)}(x) = L_n(x) \tag{15.146}$$

para todo $n \ge 0$ e, portanto, os polinômios de Laguerre são polinômios de Laguerre associados.

E. 15.13 *Exercício*. Mostre que

$$L_n^{(m)}(x) = \frac{(-1)^m n!}{(n-m)!}e^x x^{-m}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left(x^n e^{-x}\right) .$$

✠

É bastante elementar constatar que, com m fixo, as funções $L_n^{(m)}$ com $n \ge m$ satisfazem (15.23) para o intervalo $J = [0,\ \infty)$. Assim, vale que

$$\int_0^{\infty} L_n^{(m)}(x)\, L_{n'}^{(m)}(x)\ x^m e^{-x}\, dx = 0 \tag{15.147}$$

sempre que $n \ne n'$. Para calcular a integral acima no caso $n' = n$ fazemos uso da relação (15.154), que será demonstrada logo adiante. Tomando (15.154), substituindo $n \to n-1$ e multiplicando-a por $n^{-1}L_n^{(m)}(x)$, obtemos

$$\frac{(n-m)}{n}\Big(L_n^{(m)}(x)\Big)^2 = (2n-m-x-1)L_{n-1}^{(m)}(x)L_n^{(m)}(x) - (n-1)^2L_{n-2}^{(m)}(x)L_n^{(m)}(x) .$$

Tomando (15.154) e multiplicando-a por $(n+1)^{-1}L_{n-1}^{(m)}(x)$, obtemos

$$\frac{(n+1-m)}{n+1}L_{n+1}^{(m)}(x)L_{n-1}^{(m)}(x) = (2n-m-x+1)L_n^{(m)}(x)L_{n-1}^{(m)}(x) - n^2\Big(L_{n-1}^{(m)}(x)\Big)^2 .$$

Subtraindo uma expressão da outra, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-m)}{n}\Big(L_n^{(m)}(x)\Big)^2 - \frac{(n+1-m)}{n+1}L_{n+1}^{(m)}(x)L_{n-1}^{(m)}(x) \\
&\qquad = -2L_{n-1}^{(m)}(x)L_n^{(m)}(x) - (n-1)^2L_{n-2}^{(m)}(x)L_n^{(m)}(x) + n^2\Big(L_{n-1}^{(m)}(x)\Big)^2 .
\end{aligned}$$

[26] Mais uma vez advertimos o leitor do fato de haver várias convenções distintas quanto à definição dos polinômios de Laguerre associados na literatura. Para comparação, polinômios de Laguerre associados definidos em [201], que denotamos aqui por ${}_LL_n^m(x)$, diferem dos nossos $L_n^{(m)}(x)$ da seguinte forma: ${}_LL_n^m(x) = \frac{(-1)^m}{(n+m)!}L_{n+m}^{(m)}(x)$.

Multiplicando agora esta expressão por $x^m e^{-x}$, integrando entre 0 e ∞ e usando (15.147), ficamos com

$$\int_0^\infty \left(L_n^{(m)}(x)\right)^2 x^m e^{-x}\,dx \;=\; \frac{n^3}{(n-m)}\int_0^\infty \left(L_{n-1}^{(m)}(x)\right)^2 x^m e^{-x}\,dx\;.$$

A indução pode ser feita diminuindo n até atingir o valor m, de onde extraímos que

$$\int_0^\infty \left(L_n^{(m)}(x)\right)^2 x^m e^{-x}\,dx \;=\; \frac{(n!)^3}{(m!)^3\,(n-m)!}\int_0^\infty \left(L_m^{(m)}(x)\right)^2 x^m e^{-x}\,dx\;.$$

Pela última igualdade em (15.145), tem-se $L_m^{(m)}(x) = (-1)^m m!$. Ao mesmo tempo, $\int_0^\infty x^m e^{-x}\,dx = m!$. Assim,

$$\int_0^\infty \left(L_n^{(m)}(x)\right)^2 x^m e^{-x}\,dx \;=\; \frac{(n!)^3}{(n-m)!}\;.$$

Essa expressão pressupõe, naturalmente, $0 \leq m \leq n$.

Concluímos assim que com nossas definições

$$\int_0^\infty L_n^{(m)}(x)\,L_{n'}^{(m)}(x)\;x^m e^{-x}\,dx \quad=\quad \frac{(n!)^3}{(n-m)!}\;\delta_{n,\,n'}\;. \tag{15.148}$$

Essas são as relações de ortogonalidade dos polinômios de Laguerre associados.

Comentário para o leitor mais avançado. Chamamos à atenção do leitor o fato que as relações de ortogonalidade (15.148) **não** são as relações de ortogonalidade da parte radial das auto-funções de energia do átomo de hidrogênio. Para cada $l \geq 0$ as funções $\rho^l e^{-\frac{\rho}{2p}} L_{p+l}^{(2l+1)}\left(\frac{\rho}{p}\right)$, com $p \geq l+1$, satisfazem as relações de ortogonalidade,

$$\int_0^\infty \left[\rho^l e^{-\frac{\rho}{2p'}} L_{p'+l}^{(2l+1)}\left(\frac{\rho}{p'}\right)\right]\left[\rho^l e^{-\frac{\rho}{2p}} L_{p+l}^{(2l+1)}\left(\frac{\rho}{p}\right)\right]\;\rho^2\,d\rho \;=\; \delta_{p,\,p'}\,\frac{2\,p^{2l+4}((p+l)!)^3}{(p-l-1)!}\;, \tag{15.149}$$

as quais discutiremos na Seção 21.8, página 969. Lamentavelmente, alguns livros-texto discutem incorretamente esse ponto quando tratam do átomo de hidrogênio. Uma exceção, um tanto surpreendentemente, é [13].

- **Uma consequência de (15.148) empregada no estudo do átomo de hidrogênio**

As relações (15.148) implicam um resultado que é usado no contexto do átomo de hidrogênio. Trata-se do seguinte: no caso $n = n'$ (15.148) diz-nos que

$$\int_0^\infty \left(L_n^{(m)}(x)\right)^2\;x^m e^{-x}\,dx \quad=\quad \frac{(n!)^3}{(n-m)!}\;.$$

No problema do átomo de hidrogênio surge a necessidade de se determinar a integral

$$\int_0^\infty \left(L_n^{(m)}(x)\right)^2\;x^{m+1}e^{-x}\,dx \tag{15.150}$$

que difere da anterior pois o fator x^m é substituído por x^{m+1}. Essa última integral pode ser calculada empregando-se a relação

$$xL_n^{(m)}(x) \;=\; -\frac{(n+1-m)}{n+1}L_{n+1}^{(m)}(x) + (2n-m+1)L_n^{(m)}(x) - n^2 L_{n-1}^{(m)}(x)\;,$$

que será provada logo abaixo (expressão (15.154)). Inserindo-a em (15.150) e usando as relações de ortogonalidade (15.148), obtem-se facilmente

$$\int_0^\infty \left(L_n^{(m)}(x)\right)^2\;x^{m+1}e^{-x}\,dx \quad=\quad \frac{(n!)^3}{(n-m)!}(2n-m+1)\;. \tag{15.151}$$

Essa expressão será usada quando da normalização das auto-funções de energia do átomo de hidrogênio.

- **Relações de recorrência para os polinômios de Laguerre associados**

Se explorarmos a primeira igualdade em (15.145), que define os polinômios $L_n^{(m)}$, algumas fórmulas de recorrência para os polinômios de Laguerre associados podem ser obtidas diretamente daquelas dos polinômios de Laguerre listadas em (15.139)-(15.140) simplesmente diferenciando-as m vezes em relação a x. Como facilmente se constata, obtem-se

$$L_{n+1}^{(m+1)}(x) \;=\; (n+1)L_n^{(m+1)}(x) - (n+1)L_n^{(m)}(x)\;, \tag{15.152}$$

$$L_{n+1}^{(m)}(x) \;=\; (2n-x+1)L_n^{(m)}(x) - mL_n^{(m-1)}(x) - n^2 L_{n-1}^{(m)}(x)\;, \tag{15.153}$$

onde, em (15.152), usamos o fato evidente que $L_l^{(m)\prime}(x) = L_l^{(m+1)}(x)$.

Tomando (15.152) e trocando $m \to m-1$, obtem-se $L_n^{(m-1)}(x) = -\frac{1}{(n+1)}L_{n+1}^{(m)}(x) + L_n^{(m)}(x)$. Inserindo isso em (15.153), obtem-se

$$(n+1-m)L_{n+1}^{(m)}(x) \;=\; (n+1)(2n-m-x+1)L_n^{(m)}(x) - n^2(n+1)L_{n-1}^{(m)}(x)\;. \tag{15.154}$$

Essas relações são denominadas *fórmulas de recorrência para os polinômios de Laguerre associados*.

- **A função geratriz exponencial dos polinômios de Laguerre associados**

A partir da definição (15.145) e de (15.143) é elementar constatar que a função geratriz exponencial dos polinômios de Laguerre associados é dada por

$$\mathcal{L}_{as.}(x,\,t) \;:=\; \sum_{l=m}^{\infty}\frac{L_l^{(m)}(x)}{l!}\,t^l \;=\; \frac{(-1)^m\,t^m}{(1-t)^{m+1}}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)\;. \tag{15.155}$$

A soma acima começa com $l = m$ pois $\frac{d^m}{dx^m}L_l(x) = 0$ caso $m > l$.

- **A equação de Laguerre generalizada**

A assim denominada *equação de Laguerre generalizada* é a equação diferencial

$$zy''(z) + (\alpha + 1 - z)y'(z) + ny(z)\;.$$

com $n \in \mathbb{N}_0$ e $\alpha > -1$, real. Trata-se de uma variante da equação de Laguerre associada, pois α aqui não é necessariamente um inteiro.

E. 15.14 *Exercício*. Mostre que essa equação tem uma solução da forma de um polinômio

$$\mathcal{L}_n^\alpha(z) \;:=\; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\,z^k\;,$$

onde Γ é a função Gama de Euler, apresentada no Capítulo 7, página 280. ✠

E. 15.15 *Exercício*. Mostre que

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x) \;=\; e^x x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\alpha}e^{-x}\right)\;,$$

$x > 0$. ✠

E. 15.16 *Exercício*. Mostre que

$$\int_0^\infty \mathcal{L}_n^\alpha(x)\mathcal{L}_m^\alpha(x)\,x^\alpha e^{-x}\,dx \;=\; 0$$

se $m \neq n$. Calcule a integral no caso $m = n$. ✠

E. 15.17 *Exercício*. Para $\alpha = m$, inteiro, mostre que

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x) \;=\; (-1)^m\frac{(n-m)!}{n!}\,L_n^{(m)}(x)\;.$$

✠

15.2.7 Algumas Propriedades das Funções de Bessel

Na presente seção apresentaremos algumas das propriedades mais importantes e mais empregadas das funções de Bessel, especialmente as de ordem inteira. Devido à sua importância em um sem-número de problemas aplicados, as funções de Bessel e de Neumann têm sido intensamente estudadas nos últimos duzentos anos e foi coletado um enorme conjunto de informações sobre as mesmas, gerando uma vasta literatura. Por isso, nossas pretensões aqui são relativamente modestas. Um texto clássico sobre o assunto é [325]. Outros excelentes são [335], [150] e [201], mas todas as referências listadas à página 613 tratam do assunto com maior ou menor grau de profundidade.

No estudo das propriedades das funções de Bessel $J_\nu(x)$ procederemos de um modo ligeiramente diferente do que fizemos acima. Isso se dá por várias razões. Uma delas é que as funções de Bessel não são polinômios, ao contrário dos casos de acima. Outra é a natureza das relações de ortogonalidade dessas funções.

• **Origens**

As funções de Bessel surgem em vários problemas da Física-Matemática, especialmente envolvendo a resolução de certas equações diferenciais em coordenadas cilíndricas. O mais célebre desses problemas é aquele que estuda as vibrações de uma membrana circular (um tambor), problema encontrado em vários livros-texto e que estudamos na Seção 21.6, página 964. Esse problema foi tratado pela primeira vez por Euler[27] em 1764, antecedendo a Bessel. Em verdade, certas funções de Bessel surgiram antes ainda, em 1703, na resolução da chamada equação de Riccati[28] por Jacob Bernoulli[29] (vide nota histórica à página 519) e em 1732, em trabalhos de Daniel Bernoulli[30] sobre o problema da corda vibrante e suas variantes (vide problema da corda pendurada na Seção 21.5.2, página 957). O trabalho do astrônomo Bessel[31] no qual as funções que levam seu nome foram (re)encontradas é bem posterior e data de 1817, tendo sido publicado em 1824[32].

O problema que conduziu Bessel não foi o de resolver uma equação diferencial, mas o de determinar coeficientes de Fourier que descrevem a trajetória de um planeta em movimento periódico em uma órbita elíptica em torno do Sol e obedecendo a *segunda lei de Kepler*[33], segundo a qual o raio-vetor que conecta o Sol ao planeta em questão varre áreas iguais em tempos iguais[34]. Bessel obteve para esses coeficientes uma expressão que vem a ser a representação integral das funções de Bessel que apresentamos em (15.186), mais abaixo. Posteriormente, identificou-se que esses coeficientes representavam as funções previamente tratadas por Daniel Bernoulli e Euler, mas as mesmas acabaram sendo nomeadas em honra a Bessel (segundo [145], o nome de Bessel foi atribuído à equação diferencial por Schlömilch[35] em 1857 e Lipschitz[36] em 1859). Em seu trabalho, na verdade, Bessel estendeu resultados anteriores de Lagrange[37], de 1769, o qual também dedicou-se à questão de determinar os coeficientes de Fourier que expressam como função do tempo a distância ao Sol de um planeta em órbita elíptica, calculando os três primeiros.

A determinação desses coeficientes de Fourier não é um mero exercício acadêmico, pois é importante para cálculos, via teoria de perturbações, da influência gravitacional que os planetas exercem entre si e da consequente previsão de desvios das suas órbitas elípticas. O estudo matemático de perturbações periódicas ou quase-periódicas em sistemas mecânicos (ou em equações diferenciais, em geral) é um vasto assunto de pesquisa que tem desafiado inúmeros pesquisadores até a atualidade.

Outras informações históricas sobre o desenvolvimento das funções de Bessel podem ser encontradas em [325]. Para o tratamento do problema de Kepler com uso de funções de Bessel, vide [47] ou [141].

Bessel é também autor de dois outros importantes feitos científicos, a proposição da existência de *estrelas binárias* e a medição da distância ao Sol de uma outra estrela. Bessel foi um dos primeiros a propor a existência de estrelas binárias, prevendo em 1834 a existência de uma companheira da estrela *Sirius*. Tal previsão foi possível em função de medidas de alta precisão, que Bessel produziu durante anos, da posição de várias estrelas. Tais medidas indicavam um movimento

[27] Leonhard Euler (1707–1783).
[28] Iacopo Francesco Riccati (1676–1754).
[29] Jacob Bernoulli (1654–1705).
[30] Daniel Bernoulli (1700–1782).
[31] Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846).
[32] F. W. Bessel, "Untersuchungen des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht". Berliner Abhandlungen, 1–52 (1824).
[33] Johannes Kepler (1571–1630).
[34] Como todo estudante de Física bem sabe, isso é consequência da conservação do momento angular sob uma força central.
[35] Oscar Xavier Schlömilch (1823–1901).
[36] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903).
[37] Joseph-Louis Lagrange (1736–1813).

elíptico periódico de *Sirius* cuja origem não poderia ser explicada em termos de movimentos da Terra ou do sistema solar. Bessel propôs que esse movimento fosse devido à presença de uma outra estrela menos brilhante nas proximidades de *Sirius* e que ambas orbitavam em torno do centro de massa comum, explicando assim as observações. Em 1840, Bessel anunciou a observação de tais movimentos periódicos em outra estrela, a estrela *Procyon*.

A existência da companheira de *Sirius* foi confirmada por observações feitas em 1862 por A. G. Clark[38] e a de *Procyon* em 1896, por J. M. Schaeberle[39], ambas após a morte de Bessel. As estatísticas atuais indicam que cerca de metade das estrelas da nossa galáxia é composta por estrelas binárias. Há também sistemas triplos de estrelas (com α-*Centauri* sendo o exemplo mais popularmente conhecido), quádruplos (como ϵ-*Lyrae* e como *Capella*, na constelação de *Auriga*) etc.

Um problema matemático, levantado pela primeira vez por Laplace[40] em 1785 e ainda hoje em aberto, ao qual nomes como o de Poincaré[41] deram importantes contribuições, é o de saber se sistemas múltiplos como esses, ou como o nosso próprio sistema solar, são estáveis. Esse problema deu origem a uma importante área de pesquisa atual, a teoria dos sistemas dinâmicos[42]. Métodos como os que Bessel e outros empregaram para a detecção de sistemas binários são empregados hoje em dia na detecção de planetas orbitando estrelas, outro tema atual de pesquisa.

Bessel foi também o primeiro, em 1838, a determinar a distância ao Sol de uma outra estrela, usando para tal o método de paralaxe. A estrela em questão foi *61 Cygni* e Bessel calculou sua distância ao Sol como sendo cerca de 10 anos-luz. O valor atualmente aceito é de cerca de 10,7 anos-luz, ou 3,3 parsecs[43]. Com esse trabalho, Bessel contribuiu para o estudo das escalas de distância cosmológicas, tarefa em implementação até os nossos dias.

• **Relações de recorrência para as funções de Bessel**

Seja a função de Bessel $J_\nu(x)$, definida em (14.106), página 641, por

$$J_\nu(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} , \tag{15.156}$$

onde Γ é a função gama de Euler, estudada no Capítulo 7, página 280. Consideremos provisoriamente ν diferente de 0 ou de um inteiro negativo (pois $\Gamma(y)$ diverge se y for um inteiro não-positivo. Vide Capítulo 7, página 280). Multiplicando $J_\nu(x)$ por x^ν e diferenciando em relação a x, obtem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+\nu} (x)^{2k+2\nu} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(k+\nu)}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+\nu-1} (x)^{2k+2\nu-1} \\
&= x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} \\
&= x^\nu J_{\nu-1}(x) .
\end{aligned}$$

[38] Alvan Graham Clark (1832–1897).
[39] John Martin Schaeberle (1853–1924).
[40] Pierre-Simon Laplace (1749–1827).
[41] Jules Henri Poincaré (1854–1912).
[42] Em verdade, boa parte da topologia moderna foi criada por Poincaré no seu tratamento do problema de estabilidade.
[43] Um ano-luz é a distância que a luz percorre em um ano e corresponde a aproximadamente $9,46\,10^{12}$ km, ou $9,5$ trilhões de quilômetros. Um parsec é definido como a distância de um objeto cuja paralaxe em relação à Terra seja de um segundo de arco, uma medida de distância usada tradicionalmente na Astronomia. Um parsec corresponde a aproximadamente $3,262$ anos-luz, ou $3,09\,10^{13}$ km.

Multiplicando J_ν por $x^{-\nu}$ e diferenciando em relação a x, obtem-se analogamente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu}J_\nu(x)\right) &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+\nu}(x)^{2k}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!\,\Gamma(k+1+\nu)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+\nu-1}(x)^{2k-1}\\
&= x^{-\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!\,\Gamma(k+1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}\\
&\overset{k\to k+1}{=} -x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+2+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu+1}\\
&= -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,.
\end{aligned}$$

Provamos assim que, para $\nu \neq 0,\ -1,\ -2,\ -3\ldots$,

$$\frac{d}{dx}\big(x^\nu J_\nu(x)\big) = x^\nu J_{\nu-1}(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{dx}\big(x^{-\nu}J_\nu(x)\big) = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,. \tag{15.157}$$

Adotando-se a já mencionada definição $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$, para m inteiro positivo ou zero, vemos que a expressão acima também vale para $\nu = 0,\ -1,\ -2,\ -3\ldots$.

E. 15.18 *Exercício*. Mostre isso! ✠

Para $\nu = 0$, a segunda relação em (15.157) diz-nos que

$$J_0'(x) = -J_1(x)\,, \tag{15.158}$$

e para $\nu = 1$, a primeira relação em (15.157) diz-nos que

$$xJ_0(x) = \frac{d}{dx}\big(xJ_1(x)\big)\,. \tag{15.159}$$

Expandindo as derivadas em (15.157), teremos que

$$\begin{aligned}
x^\nu J_\nu'(x) + \nu x^{\nu-1}J_\nu(x) &= x^\nu J_{\nu-1}(x) \quad \text{e}\\
x^{-\nu}J_\nu'(x) - \nu x^{-\nu-1}J_\nu(x) &= -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$xJ_\nu'(x) = xJ_{\nu-1}(x) - \nu J_\nu(x) \qquad \text{e} \qquad xJ_\nu'(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x)\,. \tag{15.160}$$

Somando e subtraindo essas duas expressões obtemos as seguintes relações importantes:

$$J_\nu'(x) = \frac{1}{2}\Big(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\Big)\,, \tag{15.161}$$

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{1}{x}\Big(2\nu J_\nu(x) - xJ_{\nu-1}(x)\Big)\,. \tag{15.162}$$

Essas relações, válidas para todo $\nu \in \mathbb{C}$, são denominadas *relações de recorrência das funções de Bessel*. A segunda delas permite, por exemplo, obter todas as funções J_m com m inteiro positivo a partir de J_0 e J_1. Na verdade, por (15.158), basta conhecer J_0 e sua derivada. Vide adiante.

Resumindo, obtivemos as seguintes relações

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x)\,, \tag{15.163}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu}J_\nu(x)\right) = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,, \tag{15.164}$$

$$xJ_\nu'(x) = xJ_{\nu-1}(x) - \nu J_\nu(x)\,, \tag{15.165}$$

$$xJ_\nu'(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x)\,, \tag{15.166}$$

$$J_\nu'(x) = \frac{1}{2}\Big(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\Big)\,, \tag{15.167}$$

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{1}{x}\Big(2\nu J_\nu(x) - xJ_{\nu-1}(x)\Big)\,, \tag{15.168}$$

válidas para todo $\nu \in \mathbb{C}$ e todo $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 0$.

Expressões análogas às de acima são também válidas para as funções $N_\nu(x)$.

- **A relação entre J_n e J_0, $n \in \mathbb{N}$**

A segunda expressão em (15.157) diz-nos que

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\big(x^{-\nu}J_\nu(x)\big) = -x^{-(\nu+1)}J_{\nu+1}(x)\,.$$

Disso segue imediatamente que

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\big(x^{-\nu}J_\nu(x)\big) = (-1)^n x^{-(\nu+n)}J_{\nu+n}(x)\,, \tag{15.169}$$

válida para todo ν, $x \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$. No caso particular em que $\nu = 0$, obtem-se,

$$J_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \big(J_0(x)\big)\,, \tag{15.170}$$

válida para todo $x \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$. A expressão (15.170) generaliza (15.158) e guarda certa semelhança com as fórmulas de Rodrigues.

E. 15.19 *Exercício*. Obtenha (15.169) e (15.170) diretamente da definição (15.156). ✠

- **As relações integrais de Sonin**

Para μ e $\nu \in \mathbb{C}$ tais que $\mathrm{Re}\,(\nu) > \mathrm{Re}\,(\mu) > -1$ vale a seguinte relação entre J_μ e J_ν:

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\Gamma(\nu-\mu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\mu}\int_0^1 t^{\mu+1}\big(1-t^2\big)^{\nu-\mu-1}J_\mu\big(xt\big)\,dt\,, \tag{15.171}$$

para todo $x \in \mathbb{C}$. Essa expressão é denominada *relação integral de Sonin*[44] entre funções de Bessel, ou também *primeira integral de Sonin* ou *primeira identidade de Sonin*.

No caso em que $\nu - \mu \in \mathbb{N}$, (15.171) pode ser demonstrada a partir da primeira igualdade em (15.157) por integração

[44] Nikolay Yakovlevich Sonin (1849–1915). Seu sobrenome é por vezes grafado como “Sonine”.

e por indução. Apresentamos uma prova direta de (15.171) para o caso geral. Pela definição de J_μ, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{\mu+1}\big(1-t^2\big)^{\nu-\mu} J_\mu(xt)\,dt &\overset{(15.156)}{=} \int_0^1 t^{\mu+1}\big(1-t^2\big)^{\nu-\mu-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\mu)}\,\left(\frac{xt}{2}\right)^{2k+\mu}\right)dt\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\mu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\mu}\int_0^1 t^{2k+2\mu+1}\big(1-t^2\big)^{\nu-\mu-1}\,dt\\
&\overset{(7.38)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\mu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\mu}\frac{1}{2}\frac{\Gamma(k+\mu+1)\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(k+\nu+1)}\\
&= \frac{\Gamma(\nu-\mu)}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}\\
&= \frac{\Gamma(\nu-\mu)}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu-\nu}J_\nu(x)\,,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

E. 15.20 *Exercício*. Justifique a troca de integral pela somatória realizada na segunda igualdade acima e entenda por que fazemos a restrição $\mathrm{Re}\,(\nu) > \mathrm{Re}\,(\mu) > -1$. ✣

De (15.171), para $\mu = 0$ e $\mathrm{Re}\,(\nu) > 0$, tem-se o seguinte caso particular relevante de (15.171):

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int_0^1 t\big(1-t^2\big)^{\nu-1}J_0(xt)\,dt\,, \tag{15.172}$$

válido para $\mathrm{Re}\,(\nu) > 0$ e para todo $x \in \mathbb{C}$. Usando a primeira relação em (14.121), obtemos também, tomando-se $\mu = 1/2$ em (15.171),

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2}{\Gamma(\nu-1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}\int_0^1 t\big(1-t^2\big)^{\nu-3/2}\,\mathrm{sen}(xt)\,dt\,, \tag{15.173}$$

para $\mathrm{Re}\,(\nu) > 1/2$ e $x \in \mathbb{C}$. Usando a segunda relação em (14.121), obtemos também, tomando-se $\mu = -1/2$ em (15.171),

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2}{\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int_0^1 \big(1-t^2\big)^{\nu-1/2}\cos(xt)\,dt\,, \tag{15.174}$$

para $\mathrm{Re}\,(\nu) > -1/2$ e $x \in \mathbb{C}$.

E. 15.21 *Exercício*. Verifique! ✣

Mais adiante (vide eqs. (15.202) e (15.204)) usaremos (15.173) e (15.174) para obter certas transformadas de Fourier relacionadas às funções de Bessel.

• A função geratriz das funções de Bessel

A determinação da função geratriz das funções de Bessel é importante, entre outras razões, por nos permitir obter certas representações integrais para essas funções, representações essas que possuem grande relevância em várias aplicações.

Tomemos as funções de Bessel de ordem inteira definidas por

$$J_m(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+m)!}\,\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}\,, \tag{15.175}$$

para $m \geq 0$, convencionando-se que $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ (vide (14.124) e a discussão que lhe acompanha). Vamos aqui considerar a função geratriz das funções de Bessel de ordem inteira, definida por

$$\mathcal{J}(x,\ t) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(x)$$

para $t \neq 0$ e vamos provar que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)\,. \tag{15.176}$$

Dessa importante relação serão extraídos vários fatos úteis sobre as funções de Bessel de ordem inteira. Antes de provarmos isso, mostremos que $\mathcal{J}(x,\ t)$ está bem definida. Por (15.175), vale

$$|J_m(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,(k+m)!}\,\left|\frac{x}{2}\right|^{2k+m} \leq \frac{1}{m!}\left|\frac{x}{2}\right|^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\left|\frac{x}{2}\right|^{2k} = \frac{1}{m!}\left|\frac{x}{2}\right|^m e^{|x/2|^2}\,,$$

de modo que

$$|\mathcal{J}(x,\ t)| \leq |J_0(x)| + \sum_{m=1}^{\infty}|t|^m|J_m(x)| + \sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{1}{t}\right|^m|J_m(x)| \leq |J_0(x)| + e^{|x/2|^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left|\frac{xt}{2}\right|^m + e^{|x/2|^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left|\frac{x}{2t}\right|^m\,,$$

sendo que as últimas somas são convergentes para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $t \in \mathbb{C}$ com $t \neq 0$, o que prova que $\mathcal{J}(x,\ t)$ é analítica para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $t \in \mathbb{C}$ com $t \neq 0$.

Podemos com isso demonstrar (15.176) de modo bem simples, tomando a derivada parcial em relação a x de $\mathcal{J}(x,\ t)$, derivando termo a termo na soma (o que é permitido, devido à analiticidade) e usando (15.161):

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{J}(x,\ t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m'(x) \tag{15.177}$$

$$\overset{(15.161)}{=} \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_{m-1}(x) - \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_{m+1}(x) \tag{15.178}$$

$$\overset{\substack{k=m-1,\\ l=m+1}}{=} \frac{t}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} t^k J_k(x) - \frac{t^{-1}}{2}\sum_{l=-\infty}^{\infty} t^l J_l(x) \tag{15.179}$$

$$= \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\mathcal{J}(x,\ t)\,. \tag{15.180}$$

Assim, $\mathcal{J}(x,\ t)$ satisfaz a equação diferencial $\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{J}(x,\ t) = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\mathcal{J}(x,\ t)$, cuja solução geral é

$$\mathcal{J}(x,\ t) = f(t)\exp\left(\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)\,,$$

para alguma função $f(t)$. Agora, como $J_m(0) = 0$ para $m \neq 0$ e $J_0(0) = 1$, segue que $\mathcal{J}(0,\ t) = 1$, o que implica $f(t) = 1$, provando (15.176).

Estudando a demonstração acima o leitor poderá reconhecer a importância de definir-se $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$, para m inteiro positivo.

• Fórmula de adição das funções de Bessel

Uma das relações mais úteis que advêm de (15.176) é a seguinte:

$$J_m(x+y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)J_{m-n}(y)\,, \tag{15.181}$$

válida para todo $m \in \mathbb{Z}$ e todos $x,\ y \in \mathbb{C}$. Essa expressão é denominada por alguns autores *fórmula de adição das funções de Bessel* (a "adição", aqui, refere-se à adição dos argumentos da função no lado esquerdo). As funções de Bessel satisfazem várias outras relações de adição do tipo de acima e remetemos o leitor à literatura supracitada (por exemplo, à referência [150]) para generalizações.

A demonstração de (15.181) é obtida de (15.176) calculando-se o produto $\mathcal{J}(x,\ t)\mathcal{J}(y,\ t)$ de duas formas: por um lado,

$$\mathcal{J}(x,\ t)\mathcal{J}(y,\ t) \ = \ \exp\left(\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)\exp\left(\frac{y}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right) \ = \ \exp\left(\frac{x+y}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right) \ = \ \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(x+y)\ . \tag{15.182}$$

Por outro lado,

$$\mathcal{J}(x,\ t)\mathcal{J}(y,\ t) \ = \ \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t^k J_k(x)\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} t^l J_l(y)\right) \ = \ \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} t^{k+l} J_k(x) J_l(y) \ = \ \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) J_{m-n}(y)\right)\ . \tag{15.183}$$

Comparando-se (15.182) a (15.183) obtem-se (15.181).

Se em (15.181) tomarmos $y=-x$ e $m=0$, e usarmos que $J_n(x) = J_{-n}(-x)$ e que $J_0(0)=1$, obteremos

$$1 \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(J_n(x)\Big)^2 \ = \ \Big(J_0(x)\Big)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\Big(J_n(x)\Big)^2\ . \tag{15.184}$$

Como $J_n(x)$ é real para $x \in \mathbb{R}$, isso ensina-nos que $|J_0(x)| \leq 1$ e $|J_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n>0$, n inteiro.

E. 15.22 *Exercício*. Justifique! ✣

É possível estabelecer limites superiores mais precisos para $|J_n(x)|$, mas não trataremos disso aqui.

• Representações integrais das funções de Bessel

Já obtivemos em (15.171), (15.172), (15.173) e (15.174) algumas relações integrais envolvendo funções de Bessel. Trataremos de obter mais algumas outras agora.

A relação (15.176) tem vários usos, um deles é o de fornecer uma representação integral para as funções de Bessel, com a qual outras propriedades podem ser obtidas. A relação (15.176) foi provada para todo $x \in \mathbb{C}$ e $t \in \mathbb{C}$ com $t \neq 0$. Tomemos $t \in \mathbb{C}$ com $|t|=1$, ou seja, tomemos t da forma $t = e^{i\varphi}$, com $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Obtemos de (15.176)

$$e^{ix\,\mathrm{sen}(\varphi)} \ = \ \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) e^{im\varphi}\ . \tag{15.185}$$

O ponto interessante é que podemos interpretar o lado direito como sendo a série de Fourier (para a teoria das séries de Fourier, vide Seção 37.4, página 1809) na variável φ da função periódica de período 2π do lado esquerdo, de onde tiramos que

$$J_m(x) \ = \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\,\mathrm{sen}(\varphi)} e^{-im\varphi}\, d\varphi \ = \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\,\mathrm{sen}(\varphi)-im\varphi}\, d\varphi\ ,$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$. Usando $e^{ia} = \cos(a) + i\,\mathrm{sen}(a)$, tem-se

$$J_m(x) \ = \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\big(x\,\mathrm{sen}(\varphi) - m\varphi\big)\, d\varphi + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}\big(x\,\mathrm{sen}(\varphi) - m\varphi\big)\, d\varphi\ .$$

A segunda integral do lado direito é nula, pois o integrando é uma função ímpar em φ. Como o integrando da primeira integral do lado direito é uma função par em φ, segue que

$$J_m(x) \ = \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\big(x\,\mathrm{sen}(\varphi) - m\varphi\big)\, d\varphi \ = \ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos\big(x\,\mathrm{sen}(\varphi) - m\varphi\big)\, d\varphi\ , \tag{15.186}$$

válida para todo $m \in \mathbb{Z}$. Essa expressão é a importante *representação integral da função de Bessel* $J_m(x)$, $m \in \mathbb{Z}$.

Tomando-se $t = ie^{i\varphi}$ em (15.176), obtém-se

$$e^{ix\cos(\varphi)} \ = \ \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(x) e^{im\varphi}\ , \tag{15.187}$$

de onde se extrai

$$J_m(x) \ = \ \frac{(-i)^m}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\cos(\varphi)-im\varphi}\, d\varphi\ , \tag{15.188}$$

e disso se obtém

$$J_m(x) \ = \ \frac{(-i)^m}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\cos(\varphi)}\cos(m\varphi)\, d\varphi\ . \tag{15.189}$$

É fácil obter de (15.188) que

$$J_{2m}(x) \ = \ \frac{(-1)^m}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\Big(x\cos(\varphi) - 2m\varphi\Big)\, d\varphi\ ,$$

$$J_{2m+1}(x) \ = \ \frac{(-1)^m}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}\Big(x\cos(\varphi) - (2m+1)\varphi\Big)\, d\varphi\ .$$

para todo $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. De (15.188) segue, em particular, a relação

$$J_0(x) \ = \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\cos(\varphi)}\, d\varphi\ . \tag{15.190}$$

Aplicações dessa identidade encontram-se nos Exercícios E. 15.23 e E. 15.24.

E. 15.23 *Exercício*. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ integrável e seja

$$\mathcal{F}[f](\vec{p}) \ := \ \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{x}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\, d^2\vec{x}$$

sua transformada de Fourier, onde $\vec{x} = (x_1,\ x_2)$, $\vec{p} = (p_1,\ p_2)$ e $\vec{p}\cdot\vec{x} = p_1x_1 + p_2x_2$. Suponha que f dependa apenas da coordenada radial: $f(\vec{x}) = f(r)$, com $r = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Mostre que

$$\mathcal{F}[f](\vec{p}) \ = \ \int_0^{\infty} f(r) J_0(pr) r\, dr\ ,$$

onde $p = |\vec{p}|$. *Sugestão:* use (15.190). ✣

E. 15.24 *Exercício*. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definida por $f(\vec{x}) = f(r) = \begin{cases} f_0, & 0 \leq r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}$, sendo f_0 e R constantes com $R > 0$. Mostre que

$$\mathcal{F}[f](\vec{p}) \ = \ \frac{f_0 R}{p} J_1(pR)\ .$$

Sugestão: De (15.157) segue que $xJ_0(x) = \big(xJ_1(x)\big)'$. ✣

• Propriedades adicionais

De (15.185) podemos extrair mais algumas relações de interesse. Mostremos algumas aqui. Separando a parte real e a parte imaginária de ambos os lados de (15.185), teremos

$$\cos\Big(x\,\mathrm{sen}(\varphi)\Big) \ = \ \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)\cos(m\varphi)\ ,$$

$$\mathrm{sen}\Big(x\,\mathrm{sen}(\varphi)\Big) \ = \ \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)\,\mathrm{sen}(m\varphi)\ .$$

Usando que $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$, obtemos alguns cancelamentos que conduzem a

$$\cos\Big(x\,\mathrm{sen}(\varphi)\Big) \;=\; J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)\cos(2k\varphi)\;, \tag{15.191}$$

$$\mathrm{sen}\Big(x\,\mathrm{sen}(\varphi)\Big) \;=\; 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x)\,\mathrm{sen}\big((2k-1)\varphi\big)\;. \tag{15.192}$$

Em particular, para $\varphi = \pi/2$, isso diz-nos que

$$\cos(x) \;=\; J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(x)\;, \tag{15.193}$$

$$\mathrm{sen}(x) \;=\; 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} J_{2k-1}(x)\;. \tag{15.194}$$

Tomando $\varphi = 0$ em (15.191), segue também a identidade

$$1 \;=\; J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)\;.$$

De (15.191)-(15.192), obtem-se também, usando as bem-conhecidas relações de ortogonalidade das funções seno e cosseno,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\big(x\,\mathrm{sen}\varphi\big)\,\cos(m\varphi)d\varphi \;=\; \begin{cases} J_m(x), & m \text{ par} \\ 0, & m \text{ ímpar} \end{cases}\;.$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\big(x\,\mathrm{sen}\varphi\big)\,\mathrm{sen}(m\varphi)d\varphi \;=\; \begin{cases} 0, & m \text{ par} \\ J_m(x), & m \text{ ímpar} \end{cases}\;.$$

E. 15.25 *Exercício*. Usando (14.41), mostre a partir de (15.191) que vale a identidade

$$\cos\Big(x\sqrt{1-u^2}\Big) \;=\; J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)T_{2k}(u)\;, \tag{15.195}$$

onde T_m é o m-ésimo polinômio de Tchebychev. ✠

• **A transformada de Fourier de J_m**

Seguindo a convenção que adotamos no Capítulo 38, página 1852, definimos a transformada de Fourier $\mathcal{F}[f]$ de uma função de uma variável f e a transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}[f]$ por

$$\mathcal{F}[f](p) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}^{-1}[f](p) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} f(x)\,dx\;.$$

A relação (15.189) pode ser escrita na forma

$$J_m(x) \;=\; \frac{(-i)^m}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos(\varphi)}\cos(m\varphi)\,d\varphi\;. \tag{15.196}$$

Adotando $m \in \mathbb{N}_0$, com a mudança de variáveis $\varphi = \arccos u$, isso fica

$$J_m(x) \;=\; \frac{(-i)^m}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{ixu}\cos\big(m\arccos(u)\big)\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \;\overset{(14.41)}{=}\; \frac{(-i)^m}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{ixu}\,\frac{T_m(u)}{\sqrt{1-u^2}}\,du\;, \tag{15.197}$$

onde T_m é o m-ésimo polinômio de Tchebychev (vide página 623). Definamos uma função $\widehat{J_m}$ por

$$\widehat{J_m}(u) \;:=\; (-i)^m\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{T_m(u)}{\sqrt{1-u^2}}\,\chi_{[-1,\,1]}(u)\;, \tag{15.198}$$

onde $\chi_{[-1,\,1]}$ é a função característica do intervalo $[-1,\,1]$:

$$\chi_{[-1,\,1]}(u) \;:=\; \begin{cases} 1\;, & u \in [-1,\,1]\;, \\ 0\;, & u \notin [-1,\,1]\;. \end{cases} \tag{15.199}$$

Então, (15.197) traduz-se na afirmação que

$$J_m(x) \;=\; \mathcal{F}^{-1}\Big[\widehat{J_m}\Big](x) \tag{15.200}$$

e, portanto,

$$\mathcal{F}[J_m](u) \;=\; \widehat{J_m}(u) \;=\; (-i)^m\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{T_m(u)}{\sqrt{1-u^2}}\,\chi_{[-1,\,1]}(u)\;. \tag{15.201}$$

Essa expressão determina a transformada de Fourier das funções de Bessel de ordem $m \in \mathbb{N}_0$. A função $\widehat{J_m}$ é integrável, ou seja, um elemento de $L^1(\mathbb{R},\,dx)$ (justifique!) e, portanto, (15.200) está bem definida. As funções J_m não são integráveis em $\mathbb{R}$, nem de quadrado integrável, mas a expressão (15.201) é válida no sentido de distribuições temperadas. Vide Seção 38.3.6, página 1923.

• **Mais algumas transformadas de Fourier relacionadas a funções de Bessel**

É fácil constatar que a expressão (15.173), página 721, pode ser escrita na forma

$$J_\nu(x) \;=\; \frac{\sqrt{2}}{i\Gamma(\nu-1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[-1,\,1]}(t)\,t\big(1-t^2\big)^{\nu-3/2}e^{ixt}\,dt\;,$$

para $\mathrm{Re}\,(\nu) > 1/2$, com $\chi_{[-1,\,1]}$ definida em (15.199). Disso concluímos que para $\mathrm{Re}\,(\nu) > 1/2$ vale

$$\mathcal{F}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^{\nu-1}}\right](t) \;=\; -i\frac{\chi_{[-1,\,1]}(t)}{2^{\nu-3/2}\Gamma(\nu-1/2)}\,t\big(1-t^2\big)^{\nu-3/2}\;, \tag{15.202}$$

no sentido de distribuições. Usando (15.174), página 721, escrevemos

$$J_\nu(x) \;=\; \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[-1,\,1]}(t)\,\big(1-t^2\big)^{\nu-1/2}e^{ixt}\,dt\;, \tag{15.203}$$

para $\mathrm{Re}\,(\nu) > -1/2$ e obtemos, novamemte no sentido de distribuições,

$$\mathcal{F}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^{v}}\right](t) \;=\; \frac{\chi_{[-1,\,1]}(t)}{2^{\nu-1/2}\Gamma(\nu+1/2)}\,\big(1-t^2\big)^{\nu-1/2}\;, \tag{15.204}$$

para $\mathrm{Re}\,(\nu) > -1/2$. Observe-se que (15.202) é obtida de (15.204) por derivação e multiplicação por i, como esperado.

E. 15.26 *Exercício*. Verifique e justifique as afirmativas de acima. ✠

*** ** * ** ***

Outras identidades podem ser obtidas a partir das várias apresentadas de acima, ou com os mesmos métodos, mas encerramos aqui nossa apresentação das mesmas, convidando o leitor a um passeio à literatura pertinente às funções de Bessel. Nossa intenção agora é a de discutir as relações de ortogonalidade para as funções de Bessel.

15.2.7.1 Propriedades de Zeros das Funções de Bessel

Para entrarmos na discussão sobre as relações de ortogonalidade das funções de Bessel em $J = [0,\ 1]$ precisamos fazer alguns comentários sobre os zeros das funções de Bessel $J_\nu(y)$ e de funções associadas às de Bessel, como as funções $AJ_\nu(y) + ByJ'_\nu(y)$, onde A e B são constantes. Por razões que ficarão claras adiante, o maior interesse está no caso em que $\nu > -1$, que corresponde também à grande maioria das aplicações.

Os resultados mais relevantes nesse sentido serão demonstrados na Seção 16.4, página 749, fazendo uso da teoria dos operadores compactos e da teoria do problema de Sturm-Liouville, tratados nos Capítulos 40 e 18, páginas 1999 e 829, respectivamente.

Enunciados similares aos apresentados abaixo sobre zeros de funções de Bessel e sua primeira derivada podem ser encontrados em [201], [150], [71] e [141] e suas demonstrações podem ser encontradas em [325] ou (parcialmente) em [71] e [150]. As provas que não apresentarmos aqui podem ser encontradas nessas referências. O leitor não deve ser desestimulado a estudá-las também, pois elas são elementares e utilizam-se essencialmente apenas do material que já apresentamos aqui.

Os seguintes teoremas são válidos:

Teorema 15.2 *Seja ν real com $\nu > -1$. Então, a função $J_\nu(z)$, na região $z \in \mathbb{C}$ com $|\arg z| < \pi$, $z \neq 0$, possui apenas zeros reais, todos simples e positivos, sendo a coleção desses zeros uma coleção infinita enumerável de zeros. Para $\nu > 0$ a função $J_\nu(z)$ possui um zero de ordem ν em $z = 0$.*

Cada função $J_n(z)$, $z \in \mathbb{C}$, com $n \in \mathbb{Z}$, possui apenas zeros reais, sendo a coleção desses zeros reais uma coleção infinita e enumerável. Todos esses zeros são simples, exceto $z = 0$, que é um zero de ordem $|m|$ de $J_m(z)$ para $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$. Os zeros de $J_n(z)$, com $n \in \mathbb{Z}$, não possuem pontos de acumulação em $\mathbb{R}$. Como $J_n(x) = (-1)^n J_n(-x)$, vemos que os zeros de $J_n(x)$ são simétricos em relação ao ponto $x = 0$. Fora isso, como $J_{-n}(x) = (-1)^{n+1} J_n(x)$, os zeros de $J_n(x)$ coincidem com os de $J_{-n}(x)$. Por fim, os zeros positivos das funções de Bessel de ordem inteira positiva possuem a seguinte propriedade de alternância: entre dois zeros positivos sucessivos de J_n existe um zero de J_{n-1} e um de J_{n+1}, para todos $n \geq 0$.

Seja

$$\mathcal{Z}_\nu \ := \ \Big\{ x > 0 \ \big| \ J_\nu(x) = 0 \Big\} \tag{15.205}$$

a coleção dos zeros reais e positivos da função J_ν, $\nu > -1$. Como se trata de um conjunto enumerável, escrevemos

$$\mathcal{Z}_\nu \ := \ \big\{ \gamma_{\nu,\,k} > 0, \ k \in \mathbb{N} \big\} \ ,$$

que consideraremos como um conjunto ordenado em ordem crescente, ou seja, $\gamma_{\nu,\,k} < \gamma_{\nu,\,l}$ para $k < l$. Então, o conjunto formado pelas inversas desses zeros, ou seja, $\{1/\gamma_{\nu,\,k},\ k \in \mathbb{N}\}$, possui um único ponto de acumulação em $\mathbb{R}$, a saber, o zero. □

O teorema acima é essencialmente um caso particular do Teorema 15.5, abaixo.

Teorema 15.3 *Seja $\nu \in \mathbb{C}$. Então, todos os zeros das funções de Bessel $J_\nu(z)$ na região $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ são simples.* □

Prova. Devido à convergência da expansão (15.156) sabemos que a função $z^{-\nu} J_\nu(z)$ é uma função inteira (ou seja, analítica em todo em todo $\mathbb{C}$). Consequentemente, os zeros de $J_\nu(z)$ são isolados.

A equação de Bessel $z^2 y''(z) + zy'(z) + \big(z^2 - \nu^2\big) y(z) = 0$, com $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, equivale ao sistema

$$\begin{aligned} y_1'(z) &= y_2(z) \ , \\ y_2'(z) &= -\frac{1}{z} y_2(z) - \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y_1(z) \ . \end{aligned}$$

O lado direito desse sistema é analítico na variável z em toda a região $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e contínuo e diferenciável (linear, evidentemente) em y_1 e y_2. Consequentemente, esse sistema (e, portanto, a equação de Bessel) obedece o Teorema de

Picard-Lindelöff[45] para condições iniciais gerais fixadas em qualquer ponto de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, garantindo nesses casos existência e unicidade de soluções em uma certa vizinhança da condição inicial.

Se $z_0 \neq 0$ fosse um zero de ordem maior que 1 de $J_\nu(z)$ na região $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, teríamos $J_\nu(z_0) = 0$ e $J'_\nu(z_0) = 0$. Pela existência e unicidade de soluções da equação de Bessel, teríamos $J_\nu(z)$ identicamente nula em alguma vizinhança de z_0, o que sabemos não ser o caso. Isso mostra que, exceto eventualmente em $z_0 = 0$, todos os zeros de $J_\nu(z)$ no plano complexo são simples. ■

O resultado a seguir pode ser facilmente provado com uso de (15.161) e das afirmações de acima.

Teorema 15.4 *Para $\nu \geq 0$ os zeros da função $J'_\nu(x)$ na região $x \in [0,\ \infty)$ são simples, exceto em $x = 0$, e entre dois zeros sucessivos de $J'_\nu(x)$ há exatamente um zero de $J_\nu(x)$.* □

Na resolução de problemas envolvendo condições de contorno de tipo de Dirichlet, de Neumann ou mistas é frequentemente útil termos informações sobre os zeros da função de variável complexa

$$J_\nu^{A,\,B}(z) \ := \ AJ_\nu(z) + BzJ'_\nu(z) \ ,$$

Nesse contexto, o teorema seguinte é particularmente útil.

Teorema 15.5 *Para A e B reais, com $(A,\ B) \neq (0,\ 0)$, e ν real, com $\nu > -1$, seja a função de variável complexa*

$$J_\nu^{A,\,B}(z) \ := \ AJ_\nu(z) + BzJ'_\nu(z) \ ,$$

definida na região $|\arg z| < \pi$.

Essa função possui uma uma coleção não-vazia enumerável de zeros reais positivos para todos A e B reais com $(A,\ B) \neq (0,\ 0)$.

No caso em que $A = 0$ e $\nu \geq 0$ a função $J_\nu^{0,\,B}(z)$ não possui raízes complexas. No caso em que $B = 0$ e $\nu > -1$ a função $J_\nu^{A,\,0}(z)$ não possui raízes complexas.

No caso em que $B \neq 0$ mas $\nu + A/B \geq 0$, a função $J_\nu^{A,\,B}(z)$ não possui raízes complexas fora as reais. Caso $\nu + A/B < 0$, a função $J_\nu^{A,\,B}(z)$ possui adicionalmente duas raízes imaginárias puras.

O conjunto enumerável dos zeros reais positivos de $J_\nu^{A,\,B}(z)$, com $\nu > -1$, será denotado por $\mathcal{Z}_\nu^{A,\,B}$:

$$\mathcal{Z}_\nu^{A,\,B} \ := \ \big\{ x > 0, \ AJ_\nu(x) + BxJ'_\nu(x) \ = \ 0 \big\} \ .$$

Como se trata de um conjunto enumerável, vamos escrevê-lo também na forma

$$\mathcal{Z}_\nu^{A,\,B} \ := \ \Big\{ (\gamma_\nu^{A,\,B})_k \ > 0 \ , \ k \in \mathbb{N} \Big\}$$

e consideraremos esse conjunto como sendo ordenado em ordem crescente: $(\gamma_\nu^{A,\,B})_k < (\gamma_\nu^{A,\,B})_l$ para $k < l$. Então, o conjunto formado pelas inversas desses zeros, ou seja, $\{1/(\gamma_\nu^{A,\,B}),\ k \in \mathbb{N}\}$, possui um único ponto de acumulação em $\mathbb{R}$, a saber, o zero. □

Evidentemente, $\mathcal{Z}_\nu^{A,\,0} = \mathcal{Z}_\nu$ para qualquer A real não-nulo e $(\gamma_\nu^{A,\,0})_k = \gamma_{\nu,\,k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, também para qualquer A real não-nulo. O conjunto $\mathcal{Z}_\nu^{0,\,B}$, com B real e não nulo, coincide com o dos zeros da função $J'_\nu(x)$ na região $x \in (0,\ \infty)$.

Prova parcial do Teorema 15.5. Apresentaremos a prova de quase todas as afirmações de acima. A afirmação sobre a existência de duas raízes imaginárias puras no caso $\nu + A/B < 0$ pode ser encontrada na literatura supracitada.

A existência de uma coleção não-vazia enumerável de zeros reais positivos para $\nu > -1$ e quaisquer A e B é enunciada no Teorema 16.1, página 755, o qual é demonstrado ao longo da Seção 16.4, página 749, fazendo uso de resultados da teoria dos operadores compactos. Sabemos do tratamento da mesma Seção 16.4 que, para $\nu > -1$, os zeros das funções $J_\nu^{A,\,B}(z)$ são ou reais ou imaginários puros e o conjunto $\{1/(\gamma_\nu^{A,\,B})_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ dos zeros reais e positivos é tal que $\{1/(\gamma_\nu^{A,\,B})_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, possui um único ponto de acumulação em $\mathbb{R}$, a saber, o zero.

[45] Vide Teorema 11.2 página 513 ou, com mais generalidade, Teorema 28.4, página 1386.

Tratemos agora das afirmações sobre zeros imaginários. É fácil constatar, usando a expansão (15.156), que

$$(z/2)^{-\nu} J_\nu^{A,\,B}(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\big(A+(2k+\nu)B\big)}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

e, portanto, tomando-se z imaginário puro, na forma $z = i\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, teremos

$$(i\alpha/2)^{-\nu} J_\nu^{A,\,B}(i\alpha) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A+(2k+\nu)B}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k} . \tag{15.206}$$

Observe-se que $\Gamma(k+1+\nu) > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, caso $\nu > -1$, como supomos. Logo, se $A+(2k+\nu)B$ tiver sempre o mesmo sinal (ou anular-se) quando k varia em $\mathbb{N}_0$, o lado direito de (15.206) não poderá se anular para nenhum $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, pois é uma soma infinita de termos de mesmo sinal.

No caso em que $B = 0$, a condição de $A+(2k+\nu)B$ ter sempre o mesmo sinal é sempre satisfeita. No caso $A = 0$ a condição de $A+(2k+\nu)B$ ter sempre o mesmo sinal é satisfeita se $\nu \geq 0$.

Por fim, no caso em que $B \neq 0$, para que $A+(2k+\nu)B$ não troque de sinal é necessário e suficiente que $A/B+\nu+2k$ não troque de sinal. Como essa expressão é positiva para todo k suficientemente grande, precismos garantir que que tenhamos $A/B+\nu+2k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Por fim, é evidente que essa condição será válida se $A/B+\nu \geq 0$. ■

Sobre o número de zeros imaginários puros temos também o seguinte resultado, que não demonstraremos.

Teorema 15.6 *Seja ν real. Então, na região $z \in \mathbb{C}$ com $|\arg z| < \pi$ a função $J_\nu(z)$ possui uma coleção infinita enumerável de zeros reais e positivos e um número finito $2N(\nu)$ de zeros conjugados complexos, sendo que*

1. *$N(\nu) = 0$ se $\nu > -1$ ou $-\nu \in \mathbb{N}$,*
2. *$N(\nu) = m$ se $-m-1 < \nu < -m$ com $m \in \mathbb{N}$.* □

Por fim, comentamos a existência de um resultado, devido a Siegel[46], que o provou em 1929, que afirma que se $m,\, n \in \mathbb{N}_0$ com $m \neq n$, então $J_m(x)$ e $J_m(x)$ não possuem zeros comuns, exceto eventualmente $x = 0$.

15.2.7.2 Relações de Ortogonalidade das Funções de Bessel no Intervalo $[0,\, 1]$

Em muitos problemas, por exemplo, naquele em que estudamos os modos de vibração de uma membrana circular (vide Seção 21.6, página 964), estamos interessados nas soluções da equação de Bessel em um intervalo finito fechado. Consideraremos, para fixar ideias, o caso em que o intervalo é $J = [0,\, 1]$. Em uma tal situação encontraremos relações de ortogonalidade, as quais são muito importantes na resolução de certos problemas envolvendo equações diferenciais parciais submetidas a condições iniciais e de contorno.

Devido aos comentários que fizemos acima sobre os zeros das funções de Bessel consideraremos no que segue apenas o caso em que ν é real.

Seja para um dado $\alpha \in \mathbb{R}$ a função $f_\alpha(x) := J_\nu(\alpha x)$. É fácil verificar que $f_\alpha(x)$ é solução da equação

$$\big(xy'(x)\big)' - \frac{\nu^2}{x}\, y(x) + \alpha^2 x y(x) \;=\; 0 \; . \tag{15.207}$$

E. 15.27 *Exercício importante*. Verifique isso. ✢

Como α aparece elevada ao quadrado na expressão acima podemos sem perda de generalidade considerar $\alpha > 0$ (o caso $\alpha = 0$ é trivial, pois corresponde a uma função constante).

Nosso principal resultado será o seguinte teorema, o qual estabelece uma classe bastante geral de relações de ortogonalidade para as funções de Bessel. Essas relações de ortogonalidade são de suma importância nas aplicações dessas funções à solução de certas equações diferenciais submetidas a certas condições iniciais e de contorno.

[46] Carl Ludwig Siegel (1896–1981).

Teorema 15.7 *Seja $\nu > -1$ e sejam fixados números reais A, B com $(A,\, B) \neq (0,\, 0)$. Seja $\mathcal{Z}_\nu^{A,\,B}$ o conjunto de todos os números reais positivos $\alpha > 0$ tais que*

$$AJ_\nu(\alpha) + B\alpha J_\nu'(\alpha) \;=\; 0 \, , \tag{15.208}$$

ou seja,

$$\mathcal{Z}_\nu^{A,\,B} \;:=\; \Big\{\alpha > 0 |\; AJ_\nu(\alpha) + B\alpha J_\nu'(\alpha) \;=\; 0\Big\} \, . \tag{15.209}$$

Pelo Teorema 15.5, página 728, esse conjunto é não-vazio e enumerável. Então, a condição (15.23) do Teorema 15.1, página 684, com $J = [0,\, 1]$, é satisfeita para todas as funções $f_\alpha(x) = J_\nu(\alpha x)$ com $\alpha \in \mathcal{Z}_\nu^{A,\,B}$ e, portanto, para $\alpha,\, \beta \in \mathcal{Z}_\nu^{A,\,B}$ com $\alpha \neq \beta$ valem as relações de ortogonalidade (com $r(x) = x$)

$$\int_0^1 f_\alpha(x) f_\beta(x)\, x\, dx \;=\; 0 \, ,$$

ou seja,

$$\int_0^1 J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x)\, x\, dx \;=\; 0 \tag{15.210}$$

para todos $\alpha,\, \beta \in \mathcal{Z}_\nu^{A,\,B}$ com $\alpha \neq \beta$. Para todos $\alpha,\, \beta \in \mathcal{Z}_\nu^{A,\,B}$, tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^1 J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x)\, x\, dx \;&=\; \frac{\delta_{\alpha,\,\beta}}{2}\left[\big(J_\nu'(\alpha)\big)^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)\big(J_\nu(\alpha)\big)^2\right] \\ &\overset{(15.165),\,(15.168)}{=} \frac{\delta_{\alpha,\,\beta}}{2}\left[\big(J_\nu(\alpha)\big)^2 - J_{\nu-1}(\alpha)J_{\nu+1}(\alpha)\right] .\end{aligned} \tag{15.211}$$

Essa expressão é denominada relação de ortogonalidade das funções de Bessel. Note que há uma relação de ortogonalidade para cada tripla $(\nu,\, A,\, B)$ com $\nu > -1$ e $(A,\, B) \neq (0,\, 0)$, pois o conjunto $\mathcal{Z}_\nu^{A,\,B}$ é fixado pela tripla $(\nu,\, A,\, B)$.

A relação (15.208) corresponde a condições de contorno frequentemente encontradas na resolução de equações diferenciais parciais da Física, como por exemplo no problema de propagação de ondas em uma membrana circular (um tambor). No caso $A = 1$ e $B = 0$, o conjunto $\mathcal{Z}_\nu^{1,\,0}$ coincide evidentemente com o conjunto $\mathcal{Z}_\nu$ dos zeros da função de Bessel $J_\nu(x)$. No caso $A = 0$ e $B = 1$, o conjunto $\mathcal{Z}_\nu^{0,\,1}$ coincide com o dos zeros da função $J_\nu'(x)$.

Em particular, se $\nu > -1$ e $\gamma_{\nu,\,k}$ é o k-ésimo zero da função $J_\nu(x)$ no intervalo $(0,\, \infty)$, então $J_\nu\big(\gamma_{\nu,\,k}\big) = 0$ e a primeira igualdade em (15.211) fica

$$\int_0^1 J_\nu\big(\gamma_{\nu,\,k}x\big)\, J_\nu\big(\gamma_{\nu,\,l}x\big)\, x\, dx \;=\; \delta_{k,\,l}\, \frac{\big(J_\nu'(\gamma_{\nu,\,k})\big)^2}{2} \;=\; \delta_{k,\,l}\, \frac{\big(J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,\,k})\big)^2}{2} \, . \tag{15.212}$$

para todos $k,\, l \in \mathbb{N}$. Analogamente, se $\nu > -1$ e $\beta_{\nu,\,k} = \big(\gamma_\nu^{0,\,1}\big)_k$ é o k-ésimo zero da função $J_\nu'(x)$ no intervalo $(0,\, \infty)$, então $J_\nu'\big(\beta_{\nu,\,k}\big) = 0$ e a primeira igualdade em (15.211) torna-se

$$\int_0^1 J_\nu\big(\beta_{\nu,\,k}x\big)\, J_\nu\big(\beta_{\nu,\,l}x\big)\, x\, dx \;=\; \delta_{k,\,l}\, \left(1 - \left(\frac{\nu}{\beta_{\nu,\,k}}\right)^2\right) \frac{\big(J_\nu(\beta_{\nu,\,k})\big)^2}{2} \, , \tag{15.213}$$

para todos $k,\, l \in \mathbb{N}$. □

Comentários. Incidentalmente, a evidente positividade do lado esquerdo de (15.211) quando $\alpha = \beta$ implica que

$$\big(J_\nu(\alpha)\big)^2 \;>\; J_{\nu-1}(\alpha)J_{\nu+1}(\alpha) \tag{15.214}$$

para todo $\alpha \in \mathcal{Z}_\nu^{A,\,B}$. No caso em que $B = 0$ vale $\mathcal{Z}_\nu^{A,\,0} = \mathcal{Z}_\nu$ e tem-se $J_\nu(\alpha) = 0$ para $\alpha \in \mathcal{Z}_\nu$, conduzindo à conclusão que em tais pontos $J_{\nu-1}(\alpha)$ e $J_{\nu+1}(\alpha)$ são não-nulos e têm sinais opostos.

Da relação (15.213) percebemos casualmente que $\beta_{\nu,\,k} > \nu$ para todo k, pois o lado esquerdo é certamente positivo quando $k = l$. Aqui, $\beta_{\nu,\,k}$ é o k-ésimo zero da função $J_\nu'(x)$ no intervalo $(0,\, \infty)$. ♣

Prova do Teorema 15.7. Podemos encarar a equação (15.207) como sendo da forma canônica (15.5) para o intervalo $J = (0,\, 1]$ com $p(x) = x$, $q(x) = -\frac{\nu^2}{x}$, $r(x) = x$ e $\mu = \alpha^2$. Perguntemo-nos agora se para duas funções $f_\alpha(x) := J_\nu(\alpha x)$

e $f_\beta(x) := J_\nu(\beta x)$ a condição (15.23) do Teorema 15.1, página 684 é satisfeita nos extremos do intervalo $J = (0,\ 1]$, ou seja, se

$$p(1)\Big(f_\alpha(1)f'_\beta(1) - f'_\alpha(1)f_\beta(1)\Big) - \lim_{x\to 0} p(x)\Big(f_\alpha(x)f'_\beta(x) - f'_\alpha(x)f_\beta(x)\Big) \;=\; 0\ ,$$

isto é, se

$$\Big(J_\nu(\alpha)\beta J'_\nu(\beta) - \alpha J'_\nu(\alpha)J_\nu(\beta)\Big) - \lim_{x\to 0} x\Big(J_\nu(\alpha x)\beta J'_\nu(\beta x) - \alpha J'_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)\Big) \;=\; 0\ .$$

Usando (15.166), é fácil ver que

$$x\Big(J_\nu(\alpha x)\beta J'_\nu(\beta x) - \alpha J'_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)\Big) \;=\; x\Big(\alpha J_{\nu+1}(\alpha x)J_\nu(\beta x) - \beta J_\nu(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x)\Big)\ . \tag{15.215}$$

Verifique! O termo de menor grau da expansão (15.156) de $J_\nu(x)$, correspondente a $k = 0$, é $C_0 x^\nu$, onde $C_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}$. Consequentemente, o termo de menor grau em x de ambos os termos do lado direito de (15.215) é proporcional a $xx^{\nu+1}x^\nu = x^{2\nu+2}$. Concluímos que sempre que $\nu > -1$ valerá

$$\lim_{x\to 0} x\Big(J_\nu(\alpha x)\beta J'_\nu(\beta x) - \alpha J'_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)\Big) \;=\; 0\ .$$

Para $\nu < -1$ o limite $x \to 0$ da expressão acima é singular. Concluímos que para $\nu > -1$ vale

$$p(1)\Big(f_\alpha(1)f'_\beta(1) - f'_\alpha(1)f_\beta(1)\Big) - \lim_{x\to 0} p(x)\Big(f_\alpha(x)f'_\beta(x) - f'_\alpha(x)f_\beta(x)\Big) \;=\; J_\nu(\alpha)\beta J'_\nu(\beta) - \alpha J'_\nu(\alpha)J_\nu(\beta)\ .$$

Procuramos agora identificar condições sob as quais o lado direito se anula, o que nos garantirá a aplicabilidade do teorema de ortogonalidade, Teorema 15.1. Um caso óbvio é aquele no qual α e β são zeros da função de Bessel J_ν. Outro caso óbvio é aquele no qual α e β são zeros de J'_ν, a derivada da função de Bessel J_ν. Um caso mais geral está na seguinte proposição.

Proposição 15.2 *Suponhamos que para certos números A e B com $(A,\ B) \neq (0,\ 0)$ existam constantes reais α e β tais que*

$$AJ_\nu(\alpha) + B\alpha J'_\nu(\alpha) \;=\; 0 \quad e \tag{15.216}$$

$$AJ_\nu(\beta) + B\beta J'_\nu(\beta) \;=\; 0\ . \tag{15.217}$$

Então,

$$J_\nu(\alpha)\beta J'_\nu(\beta) - \alpha J'_\nu(\alpha)J_\nu(\beta) \;=\; 0\ .$$

□

Prova. As relações (15.216)-(15.217) podem ser expressas em forma matricial como

$$\begin{pmatrix} J_\nu(\alpha) & \alpha J'_\nu(\alpha) \\ J_\nu(\beta) & \beta J'_\nu(\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}.$$

Como por hipótese $(A,\ B) \neq (0,\ 0)$, a relação acima só é possível se a matriz 2×2 do lado esquerdo for não-inversível, ou seja, se tiver determinante nulo. Assim, devemos ter

$$0 \;=\; \det\begin{pmatrix} J_\nu(\alpha) & \alpha J'_\nu(\alpha) \\ J_\nu(\beta) & \beta J'_\nu(\beta)\end{pmatrix} \;=\; J_\nu(\alpha)\beta J'_\nu(\beta) - \alpha J'_\nu(\alpha)J_\nu(\beta)\ ,$$

que é o que queríamos estabelecer. ■

Com essa proposição, fica estabelecido que a condição (15.23) do Teorema 15.1, página 684, com $J = [0,\ 1]$, é satisfeita para todas as funções $f_\alpha(x) = J_\nu(\alpha x)$ com $\alpha \in \mathcal{Z}_\nu^{A,\,B}$ e, portanto, para $\alpha,\ \beta \in \mathcal{Z}_\nu^{A,\,B}$ com $\alpha \neq \beta$ valem as relações de ortogonalidade (com $r(x) = x$)

$$\int_0^1 f_\alpha(x)f_\beta(x)\,x\,dx \;=\; 0 \qquad \text{ou seja,} \qquad \int_0^1 J_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)\,x\,dx \;=\; 0\ ,$$

para todos $\alpha,\ \beta \in \mathcal{Z}_\nu^{A,\,B}$ com $\alpha \neq \beta$.

Passemos à questão de provar (15.211) para o caso em que $\alpha = \beta$. Isso pode ser feito de diversas maneiras, a mais direta sendo a seguinte. Escrevamos a equação (15.207) na forma

$$x^2y''(x) + xy'(x) + \left(\alpha^2x^2 - \nu^2\right)y(x) \;=\; 0\ . \tag{15.218}$$

Multiplicando-a por $2y'(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; 2x^2y'(x)y''(x) + 2x\big(y'(x)\big)^2 + 2\left(\alpha^2x^2 - \nu^2\right)y(x)y'(x) \\ &=\; x^2\frac{d}{dx}\big(y'(x)\big)^2 + 2x\big(y'(x)\big)^2 + \left(\alpha^2x^2 - \nu^2\right)\frac{d}{dx}\big(y(x)\big)^2 \\ &=\; \frac{d}{dx}\left(x^2\big(y'(x)\big)^2\right) + \left(\alpha^2x^2 - \nu^2\right)\frac{d}{dx}\big(y(x)\big)^2 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$0 \;=\; \frac{d}{dx}\left(x^2\big(y'(x)\big)^2\right) + \frac{d}{dx}\left[\left(\alpha^2x^2 - \nu^2\right)\big(y(x)\big)^2\right] - 2\alpha^2x\big(y(x)\big)^2\ . \tag{15.219}$$

Vamos considerar primeiramente o caso $\nu \geq 0$ para depois tratar do caso $-1 < \nu < 0$. Integrando-se ambos os lados da igualdade (15.219) entre 0 e 1, obtem-se

$$0 \;=\; \left(x^2\big(y'(x)\big)^2\right)\Big|_0^1 + \left[\left(\alpha^2x^2 - \nu^2\right)\big(y(x)\big)^2\right]\Big|_0^1 - 2\alpha^2\int_0^1 x\big(y(x)\big)^2\,dx\ . \tag{15.220}$$

Como $f_\alpha(x) = J_\nu(\alpha x)$ é solução de (15.218), podemos adotar $y(x) = J_\nu(\alpha x)$, acima. Assim,

$$\left(x^2\big(y'(x)\big)^2\right)\Big|_0^1 \;=\; \alpha^2\left(x^2\big(J'_\nu(\alpha x)\big)^2\right)\Big|_0^1 \;=\; \alpha^2\big(J'_\nu(\alpha)\big)^2\ .$$

$$\left[\left(\alpha^2x^2 - \nu^2\right)\big(y(x)\big)^2\right]\Big|_0^1 \;=\; \left(\alpha^2 - \nu^2\right)\big(J_\nu(\alpha)\big)^2 + \nu^2\big(J_\nu(0)\big)^2 \;=\; \left(\alpha^2 - \nu^2\right)\big(J_\nu(\alpha)\big)^2\ ,$$

pois $\nu^2\big(J_\nu(0)\big)^2 = 0$ para todo $\nu \geq 0$ (por que?). Portanto, (15.220) fica

$$2\alpha^2\int_0^1 x\big(J_\nu(\alpha x)\big)^2\,dx \;=\; \alpha^2\big(J'_\nu(\alpha)\big)^2 + \left(\alpha^2 - \nu^2\right)\big(J_\nu(\alpha)\big)^2\ , \tag{15.221}$$

o que conduz à primeira linha de (15.211) no caso $\alpha = \beta$. A identidade

$$\big(J'_\nu(\alpha)\big)^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)\big(J_\nu(\alpha)\big)^2 \;=\; \big(J_\nu(\alpha)\big)^2 - J_{\nu-1}(\alpha)J_{\nu+1}(\alpha)$$

segue diretamente de (15.165)–(15.167). Com isso, o Teorema 15.7 está demonstrado no caso $\nu \geq 0$.

No caso $-1 < \nu < 0$ procedemos de forma ligeiramente diferente. Integrando-se ambos os lados da igualdade (15.219) entre $\epsilon > 0$ e 1, obtem-se

$$0 \;=\; \left(x^2\big(y'(x)\big)^2\right)\Big|_\epsilon^1 + \left[\left(\alpha^2x^2 - \nu^2\right)\big(y(x)\big)^2\right]\Big|_\epsilon^1 - 2\alpha^2\int_\epsilon^1 x\big(y(x)\big)^2\,dx\ . \tag{15.222}$$

Como $f_\alpha(x) = J_\nu(\alpha x)$ é solução de (15.218), podemos adotar $y(x) = J_\nu(\alpha x)$, acima. Assim,

$$\left(x^2\big(y'(x)\big)^2\right)\Big|_\epsilon^1 = \alpha^2\left(x^2\big(J_\nu'(\alpha x)\big)^2\right)\Big|_\epsilon^1 = \alpha^2\big(J_\nu'(\alpha)\big)^2 - (\alpha\epsilon)^2\big(J_\nu'(\alpha\epsilon)\big)^2 .$$

$$\left[\left(\alpha^2x^2-\nu^2\right)\big(y(x)\big)^2\right]\Big|_0^1 = \left(\alpha^2-\nu^2\right)\big(J_\nu(\alpha)\big)^2 - \left((\alpha\epsilon)^2-\nu^2\right)\big(J_\nu(\alpha\epsilon)\big)^2 .$$

Portanto, (15.222) fica

$$2\alpha^2\int_\epsilon^1 x\,\big(J_\nu(\alpha x)\big)^2\,dx = \alpha^2\big(J_\nu'(\alpha)\big)^2 + \left(\alpha^2-\nu^2\right)\big(J_\nu(\alpha)\big)^2 + B(\epsilon) , \tag{15.223}$$

onde

$$B(\epsilon) := -\big(\alpha\epsilon J_\nu'(\alpha\epsilon)\big)^2 - \left((\alpha\epsilon)^2-\nu^2\right)\big(J_\nu(\alpha\epsilon)\big)^2 .$$

Desejamos provar que $\lim_{\epsilon\to 0}B(\epsilon) = 0$. Usando (15.166), é fácil ver que

$$B(\epsilon) := -(\alpha\epsilon)^2\big(J_{\nu+1}(\alpha\epsilon)\big)^2 + 2\nu(\alpha\epsilon)J_\nu(\alpha\epsilon)J_{\nu+1}(\alpha\epsilon) - (\alpha\epsilon)^2\big(J_\nu(\alpha\epsilon)\big)^2 \tag{15.224}$$

Observemos em (15.156) que o termo de menor grau em x na expansão de $J_\nu(x)$ é o termo correspondente a $k = 0$, que é C_0x^ν, com $C_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}$. Assim, vemos que os três termos do lado direito de (15.224) comportam-se quando $\epsilon \to 0$ como, respectivamente, $\epsilon^{2\nu+4}$, $\epsilon^{2\nu+2}$ e $\epsilon^{2\nu+2}$. Verifique! Portanto, $\lim_{\epsilon\to 0}B(\epsilon) = 0$ sempre que $\nu > -1$. Assim, tomando-se o limite $\epsilon \to 0$ em (15.223), concluímos novamente pela validade de (15.221). As demais conclusões são idênticas às do caso $\nu \geq 0$. Com isso, o Teorema 15.7 está demonstrado. ■

• Generalizações das relações de ortogonalidade das funções de Bessel e Neumann

Algumas vezes lidamos com problemas envolvendo a equações de Bessel em intervalos como $[R_1,\ R_2]$ com $0 < R_1 < R_2 < \infty$ e procuramos soluções que anulam-se nos extremos desse intervalo. Exemplos de tais situações encontram-se no problema descrito no Exercício E. 21.57, página 1016 e no problema descrito no Exercício E. 21.58, página 1016. Como o ponto 0 não é um ponto da fronteira do intervalo considerado, as relações de ortogonalidade acima encontradas não se aplicam diretamente. O teorema a seguir fornece as relações de ortogonalidade desejadas nessa situação.

Teorema 15.8 *Sejam $0 < R_1 < R_2 < \infty$ e $S_{\nu n}(x)$ definida no intervalo $[R_1,\ R_2]$ por*

$$S_{\nu n}(x) := \begin{cases} J_{-\nu}\left(\frac{\mu_{\nu n}R_1}{R_2}\right)J_\nu\left(\frac{\mu_{\nu n}\rho}{R_2}\right) - J_\nu\left(\frac{\mu_{\nu n}R_1}{R_2}\right)J_{-\nu}\left(\frac{\mu_{\nu n}\rho}{R_2}\right) , & \text{para } \nu \notin \mathbb{Z} , \\ \\ N_m\left(\frac{\mu_{mn}R_1}{R_2}\right)J_m\left(\frac{\mu_{mn}\rho}{R_2}\right) - J_m\left(\frac{\mu_{mn}R_1}{R_2}\right)N_m\left(\frac{\mu_{mn}\rho}{R_2}\right) , & \text{para } \nu = m \in \mathbb{Z} , \end{cases}$$

onde, para $\nu \notin \mathbb{Z}$, $\mu_{\nu n}$ é o n-ésimo zero em $(0,\ \infty)$ da função

$$J_{-\nu}\left(\frac{R_1}{R_2}x\right)J_\nu(x) - J_\nu\left(\frac{R_1}{R_2}x\right)J_{-\nu}(x)$$

e para $\nu = m \in \mathbb{Z}$, μ_{mn} é o n-ésimo zero em $(0,\ \infty)$ da função

$$N_m\left(\frac{R_1}{R_2}x\right)J_m(x) - J_m\left(\frac{R_1}{R_2}x\right)N_m(x) .$$

Pelas definições, $S_{\nu n}(R_1) = S_{\nu n}(R_2) = 0$ para todo $\nu \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $S_{\nu n}(x)$ é solução da equação de Bessel

$$x^2y''(x) + xy'(x) + \left(\alpha^2x^2-\nu^2\right)y(x) = 0 \tag{15.225}$$

no intervalo $[R_1,\ R_2]$, com $\alpha = \frac{\mu_{\nu n}}{R_2}$, também para todo $\nu \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Então, as funções $S_{\nu n}(x)$ satisfazem as relações de ortogonalidade

$$\int_{R_1}^{R_2} S_{\nu n}(x)S_{\nu n'}(x)\,x\,dx = 0 \tag{15.226}$$

para $n \neq n'$ e todo $\nu \in \mathbb{R}$, com

$$\int_{R_1}^{R_2}\big(S_{\nu n}(x)\big)^2\,x\,dx = K_{\nu n} \tag{15.227}$$

para todo $\nu \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$, onde

$$\begin{aligned} K_{\nu n} = \frac{1}{2}\Bigg\{&(R_2)^2\left[J_{-\nu}\left(\mu_{\nu n}\frac{R_1}{R_2}\right)J_\nu'(\mu_{\nu n}) - J_\nu\left(\mu_{\nu n}\frac{R_1}{R_2}\right)J_{-\nu}'(\mu_{\nu n})\right]^2 \\ &-(R_1)^2\left[J_{-\nu}\left(\mu_{\nu n}\frac{R_1}{R_2}\right)J_\nu'\left(\mu_{\nu n}\frac{R_1}{R_2}\right) - J_\nu\left(\mu_{\nu n}\frac{R_1}{R_2}\right)J_{-\nu}'\left(\mu_{\nu n}\frac{R_1}{R_2}\right)\right]^2\Bigg\} \end{aligned}$$

para $\nu \notin \mathbb{Z}$ e

$$\begin{aligned} K_{mn} = \frac{1}{2}\Bigg\{&(R_2)^2\left[N_m\left(\mu_{mn}\frac{R_1}{R_2}\right)J_m'(\mu_{mn}) - J_m\left(\mu_{mn}\frac{R_1}{R_2}\right)N_m'(\mu_{mn})\right]^2 \\ &-(R_1)^2\left[N_m\left(\mu_{mn}\frac{R_1}{R_2}\right)J_m'\left(\mu_{mn}\frac{R_1}{R_2}\right) - J_m\left(\mu_{mn}\frac{R_1}{R_2}\right)N_m'\left(\mu_{mn}\frac{R_1}{R_2}\right)\right]^2\Bigg\} \end{aligned}$$

para $\nu = m \in \mathbb{Z}$. □

Prova. As relações (15.226) seguem diretamente do Teorema 15.1, página 684 pelo fato que $S_{\nu n}(R_1) = S_{\nu n}(R_2) = 0$ para todo $\nu \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Para demonstrar (15.227) consideraremos apenas o caso $\nu \notin \mathbb{Z}$, pois o caso $\nu = m \in \mathbb{Z}$ é tratado identicamente. Nosso ponto de partida é a equação (15.219), página 732:

$$0 = \frac{d}{dx}\left(x^2\big(y'(x)\big)^2\right) + \frac{d}{dx}\left[\left(\alpha^2x^2-\nu^2\right)\big(y(x)\big)^2\right] - 2\alpha^2x\big(y(x)\big)^2 , \tag{15.228}$$

válida para qualquer solução de (15.225) (vide página 732). Integrando-se ambos os lados da igualdade entre R_1 e R_2, obtem-se

$$0 = \left(x^2\big(y'(x)\big)^2\right)\Big|_{R_1}^{R_2} + \left[\left(\alpha^2x^2-\nu^2\right)\big(y(x)\big)^2\right]\Big|_{R_1}^{R_2} - 2\alpha^2\int_{R_1}^{R_2}x\,\big(y(x)\big)^2\,dx . \tag{15.229}$$

Como

$$y(x) = S_{\nu n}(x) := J_{-\nu_m}\left(\frac{\mu_{mn}R_1}{R_2}\right)J_{\nu_m}\left(\frac{\mu_{mn}}{R_2}x\right) - J_{\nu_m}\left(\frac{\mu_{mn}R_1}{R_2}\right)J_{-\nu_m}\left(\frac{\mu_{mn}}{R_2}x\right) ,$$

é solução de (15.225) com $\alpha = \frac{\mu_{mn}}{R_2}$ temos, para essa y,

$$\left(x^2\big(y'(x)\big)^2\right)\Big|_{R_1}^{R_2} = \left(x^2\big(S_{\nu n}'(x)\big)^2\right)\Big|_{R_1}^{R_2} = \left[(R_2)^2\big(S_{\nu n}'(R_2)\big)^2 - (R_1)^2\big(S_{\nu n}'(R_1)\big)^2\right] ,$$

$$\left[\left(\alpha^2x^2-\nu^2\right)\big(y(x)\big)^2\right]\Big|_{R_1}^{R_2} = \left[\left(\alpha^2x^2-\nu^2\right)\big(S_{\nu n}(x)\big)^2\right]\Big|_{R_1}^{R_2} = 0 ,$$

pois $S_{\nu n}(x)$ anula-se em R_1 e em R_2. Portanto, (15.229) fica

$$2\alpha^2\int_{R_1}^{R_2}x\,\big(S_{\nu n}(x)\big)^2\,dx = \left[(R_2)^2\big(S_{\nu n}'(R_2)\big)^2 - (R_1)^2\big(S_{\nu n}'(R_1)\big)^2\right] ,$$

o que conduz à

$$\int_{R_1}^{R_2} x\,(S_{\nu n}(x))^2\,dx \;=\; \frac{(R_2)^2}{2(\mu_{mn})^2}\left[(R_2)^2\left(S'_{\nu n}(R_2)\right)^2-(R_1)^2\left(S'_{\nu n}(R_1)\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg\{(R_2)^2\left[J_{-\nu_m}\left(\mu_{mn}\frac{R_1}{R_2}\right)J'_{\nu_m}(\mu_{mn})-J_{\nu_m}\left(\mu_{mn}\frac{R_1}{R_2}\right)J'_{-\nu_m}(\mu_{mn})\right]^2$$

$$-(R_1)^2\left[J_{-\nu_m}\left(\mu_{mn}\frac{R_1}{R_2}\right)J'_{\nu_m}\left(\mu_{mn}\frac{R_1}{R_2}\right)-J_{\nu_m}\left(\mu_{mn}\frac{R_1}{R_2}\right)J'_{-\nu_m}\left(\mu_{mn}\frac{R_1}{R_2}\right)\right]^2\Bigg\},$$

como queríamos provar. ■

15.2.7.3 Comentário sobre a equação de Bessel no intervalo $J = [0,\ \infty)$

Seja a equação de Bessel $x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-\nu^2)y(x)=0$ e consideremo-la agora no intervalo semi-infinito $J=[0,\ \infty)$. A mesma pode ser escrita como

$$\big(xy'(x)\big)'-\frac{\nu^2}{x}\,y(x)+xy(x)\;=\;0\,, \tag{15.230}$$

e aqui temos $p(x)=x$ e poderíamos adotar $q(x)=x$, $r(x)=\frac{1}{x}$ e $\mu=-\nu^2$. Há, porém, uma diferença marcante em relação aos casos anteriormente tratados. Para as funções $J_\nu(x)$, mesmo com ν inteiro, não vale a relação (15.23), pois $\lim_{x\to\infty}p(x)J_\nu(x)J_{\nu'}(x)$ não se anula e, portanto, o Teorema 15.1 não se aplica nesse caso. De fato, $J_\nu(x)$ comporta-se para $x\to\infty$ como

$$J_\nu(x)\;\approx\;\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{x}}\,.$$

Infelizmente, não apresentaremos a demonstração dessa expressão assintótica nestas Notas. O leitor poderá encontrá-la em vários textos, por exemplo, em [325], [335], [150] e mesmo em [194]. Em [150], por exemplo, encontra-se demonstrada a expressão assintótica mais detalhada

$$J_\nu(x)\;\approx\;\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{x}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\Gamma\left(\nu+2r+\frac{1}{2}\right)}{(2r)!\,\Gamma\left(\nu-2r+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2x}\right)^{2r}$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{x}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\Gamma\left(\nu+2r+\frac{3}{2}\right)}{(2r+1)!\,\Gamma\left(\nu-2r-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2x}\right)^{2r+1},$$

válida para $x\to\infty$. Com isso, percebemos que não devem valer para as funções de Bessel com ν's diferentes relações de ortogonalidade envolvendo integrais em $J=[0,\ \infty)$.

15.2.8 Propriedades das Funções de Bessel Esféricas

As funções de Bessel e Neumann esféricas de ordem ν foram definidas em (14.129) e (14.130) por

$$j_\nu(z)\;:=\;\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,J_{\nu+\frac{1}{2}}(z)\,,\qquad n_\nu(z)\;:=\;\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,N_{\nu+\frac{1}{2}}(z)\,. \tag{15.231}$$

Por serem fortemente relacionadas às funções de Bessel, suas propriedades podem ser facilmente deduzidas das propriedades estudadas acima daquelas funções.

Por (14.106), tem-se

$$j_\nu(z)\;=\;\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\nu+1/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Pela fórmula de duplicação (14.27), podemos escrever isso como

$$j_\nu(z)\;=\;2^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\Gamma(k+1+\nu)}{k!\,\Gamma(2(k+1+\nu))}\,z^{2k+\nu}\,.$$

Em particular, para $\nu=l\in\mathbb{N}_0$, vale

$$j_l(z)\;=\;2^l\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+l)!}{k!\,(2k+2l+1)!}\,z^{2k+l}\,.$$

• **Relações de recorrência para as funções de Bessel esféricas**

Fórmulas de recorrência para as funções de Bessel esféricas também podem ser obtidas daquelas para as funções de Bessel listadas em (15.163)-(15.168). Analisando-as, é imediato ver que de (15.163) e (15.164) segue facilmente que

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu+1}j_\nu(x)\right)\;=\;x^{\nu+1}j_{\nu-1}(x)\qquad\text{e}\qquad\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu}j_\nu(x)\right)\;=\;-x^{-\nu}j_{\nu+1}(x)\,. \tag{15.232}$$

De (15.165) e (15.166) segue facilmente que

$$xj'_\nu(x)\;=\;xj_{\nu-1}(x)-(\nu+1)j_\nu(x)\qquad\text{e}\qquad xj'_\nu(x)\;=\;\nu j_\nu(x)-xj_{\nu+1}(x)\,. \tag{15.233}$$

Dessas duas relações segue facilmente que

$$j'_\nu(x)\;=\;\frac{1}{2}\left(j_{\nu-1}(x)-\frac{j_\nu(x)}{x}-j_{\nu+1}(x)\right), \tag{15.234}$$

$$j_{\nu+1}(x)\;=\;\frac{1}{x}\Big((2\nu+1)j_\nu(x)-xj_{\nu-1}(x)\Big), \tag{15.235}$$

para todo ν. Usando (15.235), é fácil ver que (15.234) pode ser reescrita como

$$(2\nu+1)\,j'_\nu(x)\;=\;\nu j_{\nu-1}(x)-(\nu+1)j_{\nu+1}(x) \tag{15.236}$$

para todo ν.

Resumindo nossas conclusões, obtivemos que

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu+1}j_\nu(x)\right)\;=\;x^{\nu+1}j_{\nu-1}(x)\,, \tag{15.237}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu}j_\nu(x)\right)\;=\;-x^{-\nu}j_{\nu+1}(x)\,, \tag{15.238}$$

$$xj'_\nu(x)\;=\;xj_{\nu-1}(x)-(\nu+1)j_\nu(x)\,, \tag{15.239}$$

$$xj'_\nu(x)\;=\;\nu j_\nu(x)-xj_{\nu+1}(x)\,, \tag{15.240}$$

$$(2\nu+1)\,j'_\nu(x)\;=\;\nu j_{\nu-1}(x)-(\nu+1)j_{\nu+1}(x)\,, \tag{15.241}$$

$$j_{\nu+1}(x)\;=\;\frac{1}{x}\Big((2\nu+1)j_\nu(x)-xj_{\nu-1}(x)\Big)\,. \tag{15.242}$$

Expressões análogas são válidas para as funções $n_\nu(x)$.

Com o uso das relações de recorrência acima é possível obter para as funções de Bessel esféricas o análogo da expressão (15.170).

• **A relação entre j_n e j_0, $n\in\mathbb{N}$**

A expressão (15.238) diz-nos que

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu}j_\nu(x)\right)\;=\;-x^{-(\nu+1)}j_{\nu+1}(x)\,.$$

Disso segue imediatamente que

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(x^{-\nu}j_\nu(x)\right) = (-1)^n x^{-(\nu+n)} j_{\nu+n}(x) , \tag{15.243}$$

válida para todo ν, $x \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$. No caso particular em que $\nu = 0$, obtem-se,

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n (j_0(x)) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) , \tag{15.244}$$

válida para todo $x \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$. A expressão (15.244) guarda certa semelhança com as fórmulas de Rodrigues.

Para as funções de Neumann esféricas tem-se uma expressão análoga:

$$n_n(x) = (-1)^{n+1} x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right) . \tag{15.245}$$

As primeiras funções de Bessel esféricas são

$$j_0(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} , \qquad j_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} , \qquad j_2(x) = (3-x^2)\frac{\operatorname{sen} x}{x^3} - 3\frac{\cos x}{x^2} \tag{15.246}$$

e as primeiras funções de Neumann esféricas são

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x} , \qquad n_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\operatorname{sen} x}{x} , \qquad n_2(x) = -(3-x^2)\frac{\cos x}{x^3} - 3\frac{\operatorname{sen} x}{x^2} . \tag{15.247}$$

15.2.8.1 Relações de Ortogonalidade Para as Funções de Bessel Esféricas no Intervalo [0, 1]

As relações de ortogonalidade para as funções de Bessel esféricas podem ser provadas diretamente daquelas expressas no Teorema 15.7.

Observemos em primeiro lugar que o conjunto $\mathcal{Z}^{A,\,B}_{\nu+1/2}$ que, pela definição (15.209), é

$$\mathcal{Z}^{A,\,B}_{\nu+1/2} := \left\{\alpha > 0 \middle|\ AJ_{\nu+1/2}(\alpha) + B\alpha J'_{\nu+1/2}(\alpha) = 0\right\}$$

pode ser caracterizado em termos de j_ν como

$$\mathcal{Z}^{A,\,B}_{\nu+1/2} := \left\{\alpha > 0 \middle|\ \left(A + \frac{B}{2}\right) j_\nu(\alpha) + B\alpha j'_\nu(\alpha) = 0\right\} .$$

Assim, ao lidarmos com problemas que possuem condições de contorno do tipo

$$Aj_\nu(\alpha) + B\alpha j'_\nu(\alpha) = 0$$

o conjunto de α's que satisfazem isso é $\mathcal{Z}^{A-B/2,\,B}_{\nu+1/2}$.

Isso mostra que podemos aplicar diretamente as conclusões do Teorema 15.7, tomando o cuidado de substituir: **1.** ν por $\nu+1/2$, **2.** $J_\nu(\alpha)$ por $\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}j_\nu(\alpha)$, **3.** (na integral) $J_\nu(\alpha x)$ por $\sqrt{\frac{2\alpha x}{\pi}}j_\nu(\alpha x)$ e **3.** e $J'_\nu(\alpha)$ por $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{j_\nu(\alpha)}{2\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}j'_\nu(\alpha)\right)$. Após algumas contas elementares, obtem-se o seguinte:

Teorema 15.9 *Seja $\nu > -3/2$ e sejam fixados certos números reais A, B com $(A,\ B) \neq (0,\ 0)$ (vide Teoremas 15.2-15.5) e seja definido*

$$\mathcal{W}^{A,\,B}_\nu := \left\{\alpha > 0 \middle|\ Aj_\nu(\alpha) + B\alpha j'_\nu(\alpha) = 0\right\} = \mathcal{Z}^{A-B/2,\,B}_{\nu+1/2} .$$

Pelo Teorema 15.5, esse conjunto é não-vazio e enumerável. Para todos α, $\beta \in \mathcal{W}^{A,\,B}_\nu$, tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^1 j_\nu(\alpha x)j_\nu(\beta x)\,x^2\,dx &= \frac{\delta_{\alpha,\,\beta}}{2}\left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{j_\nu(\alpha)}{2\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}\,j'_\nu(\alpha)\right)^2 + \left(1 - \frac{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha^2}\right)\left(j_\nu(\alpha)\right)^2\right] \\ &\overset{(15.240-(15.242)}{=} \frac{\delta_{\alpha,\,\beta}}{2}\left[\left(j_\nu(\alpha)\right)^2 - j_{\nu-1}(\alpha)j_{\nu+1}(\alpha)\right] .\end{aligned} \tag{15.248}$$

Essa expressão é denominada relação de ortogonalidade das funções de Bessel esféricas. Note que há uma relação de ortogonalidade para cada tripla $(\nu,\ A,\ B)$ com $\nu > -3/2$ e $(A,\ B) \neq (0,\ 0)$, pois cada tripla $(\nu,\ A,\ B)$ fixa o conjunto $\mathcal{Z}^{A,\,B}_\nu$.

No caso $A = 1$, $B = 0$ o conjunto $\mathcal{W}^{1,\,0}_\nu$ coincide com o dos zeros da função de Bessel esférica $j_\nu(x)$. No caso $A = 0$, $B = 1$ o conjunto $\mathcal{W}^{0,\,1}_\nu$ coincide com o dos zeros da função $j'_\nu(x)$.

Em particular, se $\nu \geq 0$ e $\gamma_{\nu,\,k}$ é o k-ésimo zero da função $j_\nu(x)$ no intervalo $(0,\ \infty)$, então

$$\int_0^1 j_\nu\left(\gamma_{\nu,\,k}x\right) j_\nu\left(\gamma_{\nu,\,l}x\right) x^2\,dx = \delta_{k,\,l}\,\frac{\left(j'_\nu(\gamma_{\nu,\,k})\right)^2}{2} = \delta_{k,\,l}\,\frac{\left(j_{\nu+1}(\gamma_{\nu,\,k})\right)^2}{2} . \tag{15.249}$$

Analogamente, se $\nu \geq 0$ e $\beta_{\nu,\,k}$ é o k-ésimo zero da função $j'_\nu(x)$ no intervalo $(0,\ \infty)$, então

$$\int_0^1 j_\nu\left(\beta_{\nu,\,k}x\right) j_\nu\left(\beta_{\nu,\,l}x\right) x^2\,dx = \delta_{k,\,l}\left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{(\beta_{\nu,\,k})^2}\right)\frac{\left(j_\nu(\beta_{\nu,\,k})\right)^2}{2} . \tag{15.250}$$

Dessa relação percebemos incidentalmente que $\beta_{\nu,\,k} > \sqrt{\nu(\nu+1)}$ para todo k, pois o lado esquerdo é certamente positivo quando $k = l$. □

É instrutivo considerar a relação (15.249) no caso $\nu = 0$, quando $j_0(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ e, portanto, $\gamma_{0,\,k} = k\pi$, com $k > 0$ inteiro. Como $j'_0(x) = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}$, (15.249) está dizendo que

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(k\pi x)\operatorname{sen}(l\pi x)}{kl\pi^2}\,dx = \frac{\delta_{k,\,l}}{2}\left(\frac{\cos(k\pi)}{k\pi}\right)^2 = \frac{1}{2(k\pi)^2}\,\delta_{k,\,l} ,$$

ou seja,

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(k\pi x)\operatorname{sen}(l\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\,\delta_{k,\,l} .$$

Essa é uma relação bem conhecida que, evidentemente, pode também ser provada por meios mais elementares.

15.3 Exercícios Adicionais

E. 15.28 *Exercício-dirigido*. A ideia deste exercício é provar as relações de ortogonalidade dos polinômios de Legendre usando diretamente a fórmula de Rodrigues, expressão (15.40), página 688.

a. Usando a fórmula de Rodrigues para os polinômios de Legendre, mostre que

$$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)dx \;=\; 0 \tag{15.251}$$

para todo $0 \leq m < n$, m inteiro. *Sugestão:* integração por partes.

b. Mostre que

$$\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx \;=\; (-1)^n \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

c. Mostre que

$$\int_{-1}^{1} x^n P_n(x)dx \;=\; \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}\;. \tag{15.252}$$

Sugestão: use a fórmula de Rodrigues, integração por partes e a expressão do item **b**.

d. Usando (15.251) e (15.252) mostre a validade das relações de ortogonalidade

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx \;=\; \frac{2}{2n+1}\delta_{n,\,m}\;.$$

Sugestão: use a fórmula de Rodrigues ou a expressão (15.32) para obter o coeficiente de maior grau dos polinômios de Legendre.

✠

E. 15.29 *Exercício*. Prove que no intervalo $(-1,\;1)$ vale

$$|x| \;=\; \frac{P_0(x)}{2} + \frac{5P_2(x)}{8} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}\,(4m+1)\,(2m-3)!}{2^{2m-1}\,(m+1)!\,(m-2)!}\,P_{2m}(x)\;. \tag{15.253}$$

Sugestão: para calcular integrais como $\int_0^1 xP_{2m}(x)dx$ pode-se usar (15.41) e/ou (15.44), integração por partes e os fatos que $P_n(1)=1$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, e $P_{2m}(0) = \frac{(-1)^m(2m-1)!!}{2^m\,m!}$, $\forall m \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 1$, o qual segue de (15.32). ✠

Apêndices

15.A Provando (15.54) a Força Bruta

A ideia é tomar (15.52), escrever $(z^2-1)^l = (z-1)^l(z+1)^l$ e aplicar a regra de Leibniz. Tudo está resumido nas seguintes linhas auto-explicativas, acompanhadas de uns poucos comentários ao final:

$$\begin{aligned}
P_l^m(z) \quad &:= \quad \frac{(1-z^2)^{m/2}}{2^l\,l!}\,\frac{d^{l+m}}{dz^{l+m}}\Big((z^2-1)^l\Big)\\
&= \quad \frac{(1-z^2)^{m/2}}{2^l\,l!}\,\frac{d^{l+m}}{dz^{l+m}}\Big((z-1)^l(z+1)^l\Big)\\
&\overset{Leibniz}{=} \quad \frac{(1-z^2)^{m/2}}{2^l\,l!}\sum_{p=0}^{l+m}\binom{l+m}{p}\frac{d^p}{dz^p}\Big((z-1)^l\Big)\frac{d^{l+m-p}}{dz^{l+m-p}}\Big((z+1)^l\Big)\\
&\overset{(*)}{=} \quad \frac{(1-z^2)^{m/2}}{2^l\,l!}\sum_{p=m}^{l}\binom{l+m}{p}\frac{d^p}{dz^p}\Big((z-1)^l\Big)\frac{d^{l+m-p}}{dz^{l+m-p}}\Big((z+1)^l\Big)\\
&= \quad \frac{(1-z^2)^{m/2}}{2^l\,l!}\sum_{p=m}^{l}\binom{l+m}{p}\left(\frac{l!}{(l-p)!}(z-1)^{l-p}\right)\left(\frac{l!}{(p-m)!}(z+1)^{p-m}\right)\\
&= \quad \frac{(1-z^2)^{m/2}}{2^l\,l!}\sum_{p=m}^{l}\binom{l+m}{p}\frac{(l!)^2}{(l-p)!\,(p-m)!}(z-1)^{l-p}(z+1)^{p-m}\\
&\overset{(**)}{=} \quad (-1)^m\frac{(z^2-1)^m}{(1-z^2)^m}\,\frac{(1-z^2)^{m/2}}{2^l\,l!}\sum_{p=m}^{l}\binom{l+m}{p}\frac{(l!)^2}{(l-p)!\,(p-m)!}(z-1)^{l-p}(z+1)^{p-m}\\
&= \quad \frac{(-1)^m\,(1-z^2)^{-m/2}}{2^l\,l!}\sum_{p=m}^{l}\binom{l+m}{p}\frac{(l!)^2}{(l-p)!\,(p-m)!}(z-1)^{l-p+m}(z+1)^{p}\\
&\overset{p\to p+m}{=} \quad \frac{(-1)^m\,(1-z^2)^{-m/2}}{2^l\,l!}\sum_{p=0}^{l-m}\binom{l+m}{p+m}\frac{(l!)^2}{(l-p-m)!\,p!}(z-1)^{l-p}(z+1)^{p+m}\\
&= \quad \frac{(-1)^m\,(1-z^2)^{-m/2}}{2^l\,l!}\sum_{p=0}^{l-m}\frac{(l+m)!\,(l!)^2}{(l-p)!\,(p+m)!\,(l-p-m)!\,p!}(z-1)^{l-p}(z+1)^{p+m}\\
&= \quad (-1)^m\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\frac{(1-z^2)^{-m/2}}{2^l\,l!}\sum_{p=0}^{l-m}\frac{(l-m)!\,(l!)^2}{(l-p)!\,(p+m)!\,(l-p-m)!\,p!}(z-1)^{l-p}(z+1)^{p+m}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{(1-z^2)^{-m/2}}{2^l\, l!} \sum_{p=0}^{l-m} \binom{l-m}{p} \left(\frac{l!}{(l-p)!} (z-1)^{l-p} \right) \left(\frac{l!}{(p+m)!} (z+1)^{p+m} \right) \\
&= \quad (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{(1-z^2)^{-m/2}}{2^l\, l!} \sum_{p=0}^{l-m} \binom{l-m}{p} \left(\frac{d^p}{dz^p} (z-1)^l \right) \left(\frac{d^{l-m-p}}{dz^{l-m-p}} (z+1)^l \right) \\
&\overset{Leibniz}{=} \quad (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{(1-z^2)^{-m/2}}{2^l\, l!} \frac{d^{l-m}}{dz^{l-m}} \big((z-1)^l (z+1)^l \big) \\
&= \quad (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{(1-z^2)^{-m/2}}{2^l\, l!} \frac{d^{l-m}}{dz^{l-m}} (z^2-1)^l \quad = \quad (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(z) \, ,
\end{aligned}
$$

como queríamos provar.

No ponto indicado por $(*)$ acima, usamos o fato que $\frac{d^p}{dz^p}(z-1)^l = 0$ se $p > l$ e $\frac{d^{l+m-p}}{dz^{l+m-p}}(z-1)^l = 0$ se $l+m-p > l$. Ambas as condições juntas implicam $m \leq p \leq l$, daí a mudança nos limites da soma. No ponto indicado por $(**)$ multiplicamos toda a expressão por $1 = (-1)^m \frac{(z^2-1)^m}{(1-z^2)^m}$. Na linha seguinte o fator $(z^2-1)^m$ é escrito como $(z-1)^m(z+1)^m$ e distribuído dentro da soma. Fora isso, usamos também que $\frac{1}{(1-z^2)^m}(1-z^2)^{m/2} = (1-z^2)^{-m/2}$.