Capítulo 24
Espaços Métricos

Sumário

24.1 Métricas e Espaços Métricos . . . 1305
24.1.1 Completeza e o Completamento Canônico . . . 1316
24.1.2 Conjuntos de Sequências . . . 1323
24.2 Pseudométricas . . . 1324
24.3 A Noção de Topologia de Espaços Métricos ou Pseudométricos . . . 1326
24.4 Espaços de Funções Limitadas e Completeza . . . 1330
24.5 Espaços de Banach e de Hilbert . . . 1334
24.5.1 Espaços de Banach em Espaços de Sequências . . . 1336
24.5.1.1 Decrescimento das Normas dos Espaços $\ell_p(\mathbb{N})$ . . . 1346
24.6 Teorema do Melhor Aproximante em Espaços Normados Uniformemente Convexos . . 1348
24.7 Exercícios Adicionais . . . 1354
APÊNDICES . . . 1357
24.A Números Reais e p-ádicos . . . 1357
24.A.1 A Construção de Cantor dos Números Reais . . . 1357
24.A.2 Outros Completamentos dos Racionais. Números p-ádicos . . . 1360
24.B Aproximações para π . . . 1363

Todos estamos familiarizados com a noção usual e intuitiva de distância entre pontos da reta real $\mathbb{R}$, do plano bidimensional $\mathbb{R}^2$ ou do espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$. O estudante há de reconhecer que boa parte do material tratado em cursos de cálculo de funções de uma ou várias variáveis, reais ou complexas, como as noções de derivação e integração, assenta-se sobre noções como as de convergência e limite, as quais, por sua vez, assentam-se sobre a noção intuitiva de distância entre pontos. Assim, por exemplo, dizemos que uma sequência x_n de pontos na reta real converge a um ponto x se a distância $|x_n - x|$ entre x_n e x torna-se menor e menor à medida que n cresce. Mais adiante faremos essas ideias mais precisas e gerais.

Ao longo do seu desenvolvimento, especialmente após o século XIX, a Matemática reconheceu a importância de abstrair e generalizar a noção intuitiva de distância de modo a aplicá-la a outros tipos de conjuntos que não os familiares espaços de dimensão finita $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Esse desenvolvimento conduziu às noções de *métrica*, de *espaços métricos* e de *espaços métricos completos*, as quais definiremos mais adiante, e permitiu aplicar muitas das noções geométricas e instrumentos analíticos, originalmente desenvolvidos em espaços mais familiares, para conjuntos menos acessíveis à intuição, como por exemplo espaços vetoriais de dimensão infinita, tais como espaços de funções ou de sequências. Uma importante aplicação dessas ideias à teoria das equações diferenciais e integrais será vista no Capítulo 25, página 1369, quando trataremos do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Lembramos ao estudante que o estudo de espaços de dimensão infinita não é uma mera abstração desprovida de uso ou interesse prático. Ao se decompor uma função f, contínua, diferenciável e periódica de período 2π, em sua série de Fourier[1],

$$f(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$$

tal como ocorre, por exemplo, no problema da corda vibrante, o que estamos fazendo é precisamente expressar uma tal função em termos de componentes em uma base de um espaço de dimensão infinita, no caso a base formada pelas infinitas funções $\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$ com $n \in \mathbb{Z}$.

Para o estudo de espaços de dimensão infinita, como o desse exemplo, seria muito importante se pudéssemos reter algumas das noções geométricas familiares em espaços de dimensão finita. O emprego de ideias geométricas análogas

[1] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830). A teoria das séries de Fourier é desenvolvida no Capítulo 37, página 1937.

àquelas encontradas nos espaços $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ é de grande importância na tarefa de explorar espaços de dimensão infinita, como o espaço das funções contínuas periódicas de período 2π, justamente por trazerem tais espaços para mais perto da nossa intuição. Por razões evolutivas, o cérebro humano só é capaz de produzir e desenvolver imagens em uma, duas ou três dimensões e, portanto, para o estudo de espaços com mais dimensões faz-se necessário dispor de instrumentos abstratos que permitam desenvolver raciocínios o mais próximo possível daqueles empregados em espaços de dimensão 1, 2 ou 3.

Devido às bem conhecidas "relações de ortogonalidade"

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}\,dt \;=\; \delta_{n,\,m}$$

sabemos que, as constantes a_n da decomposição de Fourier acima são dadas por

$$a_n \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}} f(t)\,dt\,,$$

e podem ser interpretadas geometricamente como as projeções, ou componentes, da função f na "direção" das funções $\frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}}$. (A noção de projeção, ou componente, de um vetor é familiar em $\mathbb{R}^2$ ou em $\mathbb{R}^3$). Como é bem sabido (para a teoria das séries de Fourier, vide [158]), vale também a relação, conhecida como Identidade de Parseval[2],

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} \big|f(t)\big|^2\,dt} \;=\; \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2}\,.$$

Sendo o lado direito a raiz quadrada da soma do quadrado das componentes ortogonais de f, podemos interpretar o lado esquerdo como o "módulo" ou "comprimento" da função f (entendida como vetor no espaço de dimensão infinita das funções periódicas de período 2π), tal como no Teorema de Pitágoras[3] em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Se levada adiante, essa analogia geométrica nos permite definir uma possível noção de **distância** entre duas funções contínuas periódicas f e g, que denotaremos por[4] $d_2(f,\,g)$, como o módulo (ou "comprimento") da diferença entre duas funções, tal como se faz em espaços de dimensão finita:

$$d_2(f,\,g) \;:=\; \sqrt{\int_0^{2\pi} \big|f(t) - g(t)\big|^2\,dt}\,.$$

Com esse instrumento em mãos podemos agora empregar conceitos como o de convergência e limite de sequências no espaço de dimensão infinita das funções contínuas periódicas e, eventualmente, prosseguir desenvolvendo em tais espaços outros ingredientes do Cálculo e da Análise.

Para implementar tais desenvolvimentos, vamos no presente capítulo introduzir algumas importantes noções gerais, como as de métrica, de espaço métrico, de sequências de Cauchy em espaços métricos, de completamento de espaços métricos e de topologia de espaços métricos, noções essas que provaram ser de grande importância na tarefa de levar os instrumentos familiares de abordagem matemática de espaços de dimensão finita a espaços de dimensão infinita e outros.

24.1 Métricas e Espaços Métricos

As noções de *Métrica* e de *Espaço Métrico* foram introduzidas por Fréchet[5] em sua tese de doutorado *"Sur quelques points du calcul fonctionnel"*, apresentada, sob supervisão de Hadamard[6], à École Normale Supérieure de Paris em 1906. A expressão "espaço métrico", no entanto, não foi sua invenção, tendo sido cunhada por Hausdorff[7] em 1914. Vamos a essas importantes definições.

[2] Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755–1836).
[3] Pitágoras de Samos (ci. 569 A.C. – ci. 475 A.C.).
[4] A razão de empregarmos o subíndice "2" na definição de $d_2(f,\,g)$ será esclarecida mais adiante.
[5] Maurice René Fréchet (1878–1973). Fréchet também introduziu a noção de compacidade.
[6] Jacques Salomon Hadamard (1865–1963).
[7] Felix Hausdorff (1868–1942).

• **Métricas**

Uma questão importante que se coloca é a de identificar quais propriedades básicas a noção intuitiva de distância possui para permitir seu emprego em várias instâncias. O desenvolvimento da Matemática conduziu a uma identificação desses ingredientes em um conjunto de quatro propriedades, as quais resumem tudo o que é essencialmente necessário na demonstração de resultados nos quais a noção de distância é empregada. Surgiu da identificação dessas propriedades a noção matemática de *métrica*, a qual abstrai e generaliza a noção intuitiva de distância. Vamos a essa definição.

Seja X um conjunto (entendido doravante como não vazio). Uma função $d: X \times X \to \mathbb{R}$ é dita ser uma *métrica* em X se possuir as seguintes propriedades:

1. Positividade: $d(a, b) \geq 0$ para todos $a, b \in X$.
2. Condição de distância nula: $d(a, b) = 0$ se e somente se $a = b$.
3. Simetria: para todos a e $b \in X$ vale $d(a, b) = d(b, a)$.
4. Desigualdade triangular: para todos a, b e $c \in X$ vale $d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c)$.

A quarta propriedade acima é particularmente importante e é denominada *desigualdade triangular* devido a seu significado geométrico nos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ com a métrica usual. (Justifique!) As quatro propriedades listadas acima são aquelas identificadas como essenciais à noção intuitiva de distância e qualquer função d que as satisfaça, ou seja, qualquer métrica, pode potencialmente ser empregada como equivalente àquela noção. Um ponto importante da definição de métrica é a condição que afirma que $d(x, y) = 0$ se e somente se x e y forem iguais. Compare com a definição de pseudométrica à página 1324.

Comentários. Mencionamos *en passant* que as condições de simetria e de positividade, acima, são, em verdade, consequência da desigualdade triangular e da suposição que $d(a, b) = 0$ se e somente se $a = b$.

Se supomos que $d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c)$ para todos a, b e $c \in X$, então, tomando $c = a$ isso diz-nos que $d(a, b) \leq d(b, a)$. Trocando-se as letras $a \leftrightarrow b$, isso diz-nos que $d(b, a) \leq d(a, b)$ e, portanto, vale $d(b, a) = d(a, b)$ para todos a e $b \in X$, estabelecendo a condição de simetria.

Agora, usando-se a condição de simetria e a desigualdade triangular, podemos também estabelecer a condição de positividade. De fato, usando essas duas condições, pode-se provar o seguinte fato mais forte: para todos $x, y, z \in X$ vale

$$d(x, y) \geq \big|d(x, z) - d(z, y)\big| , \tag{24.1}$$

o que, em particular, garante que $d(x, y) \geq 0$. Para provar isso, note-se que pela desigualdade triangular e pela condição de simetria, temos $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Logo,

$$d(x, y) \geq d(x, z) - d(y, z) . \tag{24.2}$$

Trocando-se x por y e usando-se a condição de simetria, obtemos também

$$d(x, y) = d(y, x) \geq d(y, z) - d(x, z) . \tag{24.3}$$

Ambas as relações (24.2) e (24.3) dizem que $d(x, y) \geq |d(x, z) - d(y, z)|$, como queríamos mostrar.

Dessa forma, a definição de métrica pode ser reduzida às seguintes condições:

1. Condição de distância nula: $d(a, b) = 0$ se e somente se $a = b$.
2. Desigualdade triangular: para todos a, b e $c \in X$ vale $d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c)$.

A inclusão das condições de positividade e simetria é supérflua e a fazemos apenas para enfatizar essas importantes propriedades. ♣

O exemplo mais básico de uma métrica é oferecido, no caso $X = \mathbb{R}$, pela função $d(x, y) = |y - x|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Outro exemplo essencialmente idêntico em $X = \mathbb{C}$, é oferecido pela função $d(z, w) = |z - w|$, $z, w \in \mathbb{C}$. Essas são as chamadas *métricas usuais em* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$, respectivamente. Deixamos ao leitor a tarefa simples de verificar que essas funções satisfazem as condições da definição de métrica.

• **Espaços métricos e outros exemplos básicos**

Se X é um conjunto não vazio e d é uma métrica em X, dizemos que o par (X, d) é um *espaço métrico*. Ou seja, um espaço métrico vem a ser um conjunto munido de uma métrica.

Como mencionamos, as propriedades requeridas na definição de métrica, acima, foram enunciadas sob inspiração do exemplo familiar do próximo exercício.

E. 24.1 *Exercício.* Verifique que a função $d_2(x, y) := \sqrt{(y^1 - x^1)^2 + \cdots + (y^m - x^m)^2}$, onde $x = (x^1, \ldots, x^m)$ e $y = (y^1, \ldots, y^m)$, é uma métrica em $\mathbb{R}^m$ (chamada de métrica Euclidiana). ✠

É importante que o estudante familiarize-se desde cedo com o fato que um conjunto X pode ter várias métricas. O exemplo anterior e os dois abaixo ilustram isso.

E. 24.2 *Exercício.* Verifique que a função $d_\infty(x, y) := \max\{|y^1 - x^1|, \ldots, |y^m - x^m|\}$, onde $x = (x^1, \ldots, x^m)$ e $y = (y^1, \ldots, y^m)$, é uma métrica em $\mathbb{R}^m$. Essa métrica é por vezes denominada *métrica de Tchebychev*[8]. ✠

E. 24.3 *Exercício.* Verifique que a função $d_1(x, y) := |y^1 - x^1| + \cdots + |y^m - x^m|$, onde $x = (x^1, \ldots, x^m)$ e $y = (y^1, \ldots, y^m)$, é uma métrica em $\mathbb{R}^m$. ✠

Para $p \geq 1$ todas as funções

$$d_p(x, y) := \Big[\big|y^1 - x^1\big|^p + \cdots + \big|y^m - x^m\big|^p\Big]^{1/p} , \tag{24.4}$$

com $p \geq 1$ são métricas em $\mathbb{R}^m$. A desigualdade triangular segue facilmente da desigualdade de Minkowski (5.61), página 351, provada na Seção 5.3.3.1, página 351. Uma outra demonstração será apresentada adiante na Seção 24.5.1, página 1336.

Para $0 < p < 1$ a expressão

$$d_p(x, y) := \big|y^1 - x^1\big|^p + \cdots + \big|y^m - x^m\big|^p , \tag{24.5}$$

também define métricas em $\mathbb{R}^m$. A desigualdade triangular nesse caso é estabelecida em (5.67), página 352.

O estudante deve observar a diferença entre (24.4) e (24.5): a ausência na segunda relação do expoente $1/p$.

Uma característica importante da noção abstrata de métrica é que a mesma aplica-se também a espaços outros que não os familiares espaços $\mathbb{R}^m$. Os exercícios abaixo ilustram isso no caso do conjunto $X = C([0, 1])$, que vem a ser o conjunto das funções contínuas reais definidas no intervalo $[0, 1]$.

O leitor deve se recordar que, como o intervalo $[0, 1]$ é compacto, toda função f contínua nele definida é limitada, pois $|f|$ é contínua e possui um máximo e um mínimo (essa bem conhecida afirmação encontra-se provada no Teorema 32.16, página 1628, vide também os bons livros de Cálculo e Análise).

E. 24.4 *Exercício.* Seja $X = C([0, 1])$ o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas em $[0, 1]$. Considere a seguinte função $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}$:

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} \big|f(x) - g(x)\big| .$$

Mostre que d_∞ uma métrica em X. ✠

E. 24.5 *Exercício.* Seja $X = C([0, 1])$ o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas em $[0, 1]$. Considere a seguinte função $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$:

$$d_1(f, g) = \int_0^1 \big|f(x) - g(x)\big| \, dx .$$

Mostre que d_1 uma métrica em X. ✠

E. 24.6 *Exercício.* Seja $X = C([0, 1])$ o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas em $[0, 1]$. Considere a seguinte função $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$:

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 \big|f(x) - g(x)\big|^2 \, dx} .$$

Mostre que d_2 uma métrica em X. ✠

Mais adiante mostraremos que em $C([0, 1])$ todas as funções

$$d_p(f, g) = \left[\int_0^1 \big|f(x) - g(x)\big|^p \, dx\right]^{1/p} .$$

com $p \geq 1$ são igualmente métricas.

O exemplo a seguir mostra que uma métrica pode ser definida em qualquer conjunto não vazio.

[8] Pafnuty Lvovich Tchebychev (1821–1894).

E. 24.7 *Exercício*. Seja X um conjunto não vazio e considere a seguinte função $d_t : X \times X \to \mathbb{R}$:

$$d_t(x,\ y) := \begin{cases} 0\ , & \text{se } x = y\ , \\ 1\ , & \text{se } x \neq y\ . \end{cases} \tag{24.6}$$

Mostre que d_t uma métrica em X, denominada *métrica trivial*. ✣

E. 24.8 *Exercício*. Seja $M = [1, \infty) \cup \{\infty\} \equiv [1,\ \infty]$, composto pelos reais maiores ou iguais a 1 em união com ∞ (para o conjunto estendido dos reais, vide Seção 2.1.3.1, página 126). Defina

$$\begin{aligned} d(x,\ y) &:= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|\ , \text{ para } x,\ y \in [1, \infty)\ , \\ d(x,\ \infty) = d(\infty,\ x) &:= \frac{1}{x}\ , \text{ para } x \in [1, \infty)\ , \\ d(\infty,\ \infty) &:= 0\ . \end{aligned}$$

Mostre que d é uma métrica em M. ✣

Exemplo 24.1 Seja $D_1 := \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ o disco aberto de raio 1 centrado na origem de $\mathbb{C}$. As expressões,

$$d(z_1,\ z_2) := \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}\, z_2}\right| \qquad \text{e} \qquad \varrho(z_1,\ z_2) := \operatorname{argtanh}\big(d(z_1,\ z_2)\big)\ ,$$

com $z_1,\ z_2 \in D_1$, definem métricas em D_1, conhecidas como *métrica pseudo-hiperbólica* e *métrica de Poincaré*, respectivamente. Que tais expressões definam métricas são afirmações não triviais que são demonstradas na Seção 9.5.3.1, página 492. Como discutido naquela seção, essas métricas possuem a virtude de serem invariantes por automorfismos de D_1. ♦

• Métricas não-Arquimedianas e espaços ultramétricos

Seja $(M,\ d)$ um espaço métrico. A métrica d é dita ser uma *métrica não-Arquimediana*[9] se valer

$$d(x,\ y) \leq \max\big\{d(x,\ z),\ d(z,\ y)\big\} \tag{24.7}$$

para todos $x,\ y,\ z \in M$. É elementar constatar (faça-o!) que (24.7) implica a desigualdade triangular. Na literatura, uma métrica não-Arquimediana é também dita ser uma *ultramétrica* (ou ainda uma *supermétrica*) e um espaço métrico dotado de uma ultramétrica é dito ser um *espaço ultramétrico* (ou um *espaço supermétrico*).

A métrica trivial (24.6) é um exemplo elementar de métrica não-Arquimediana (verifique!). Um exemplo mais relevante de métrica não-Arquimediana será encontrado na discussão sobre números p-ádicos da Seção 24.A, página 1357.

Para exemplos de aplicações de métricas não-Arquimedianas em Física, notadamente na Mecânica Estatística, vide [409]. Um exemplo de espaço ultramétrico relevante na Teoria das Probabilidades, na Teoria dos Processos Estocásticos e mesmo na Mecânica Estatística, é o espaço de sequências apresentado na Seção 24.1.2, página 1323.

• Métricas e normas em espaços vetoriais

Se $\mathcal{E}$ é um espaço vetorial dotado de uma norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ (a noção de norma em espaços vetoriais foi introduzida na Seção 3.2, página 274), podemos definir uma métrica em $\mathcal{E}$ por meio da seguinte expressão: para $u,\ v \in \mathcal{E}$,

$$d_{\mathcal{E}}(u,\ v) = \|u - v\|_{\mathcal{E}}\ .$$

Essa métrica é dita ser a *métrica induzida pela norma* $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$.

E. 24.9 *Exercício*. Prove que essa expressão de fato satisfaz as propriedades definidoras de métrica. Sugestão: para demonstrar a desigualdade triangular, use a propriedade de norma $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ para provar que $\|u-v\|_{\mathcal{E}} = \|u-w+w-v\|_{\mathcal{E}} \leq \|u-w\|_{\mathcal{E}} + \|w-v\|_{\mathcal{E}}$ para todos $u,\ v,\ w \in \mathcal{E}$. ✣

[9] Arquimedes de Siracusa (ci. 287 A.C. – ci. 212 A.C.).

E. 24.10 *Exercício*. Diversas métricas apresentadas acima são induzidas por normas. Identifique-as! ✣

Como vimos, se $\mathcal{E}$ é um espaço vetorial normado, então é também um espaço métrico com a métrica induzida pela norma, definida acima. O próximo exercício trata da questão de saber que condições são necessárias e suficientes para que uma métrica definida em um espaço vetorial seja induzida por uma norma, ou seja, da questão de saber quando é possível definir uma norma a partir de uma métrica.

E. 24.11 *Exercício relevante*. Seja $\mathcal{E}$ um espaço vetorial complexo dotado de uma métrica d. Mostre que para que a métrica d seja uma métrica induzida por uma norma é necessário e suficiente supor que d satisfaz as seguintes condições:

1. Invariância translacional: $d(u+t,\ v+t) = d(u,\ v)$ para todos $u,\ v$ e $t \in \mathcal{E}$.
2. Transformação de escala: $d\big(\alpha u,\ \alpha v\big) = |\alpha| d(u,\ v)$ para todos $u,\ v \in \mathcal{E}$ e todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

Sugestão. Prove que sob as hipóteses *1* e *2*, a expressão $\|u\| := d(u,\ 0)$ com $u \in \mathcal{E}$, define uma norma em $\mathcal{E}$ e mostre que essa é a norma que induz a métrica d. ✣

E. 24.12 *Exercício relevante*. Verifique que a métrica d_p, $p \geq 1$, definida em (24.4), página 1307, provém de uma norma, por satisfazer as condições de invariância translacional e transformação de escala, acima, mas que a métrica d_p, $0 < p < 1$, definida em (24.5), página 1307, não provém de uma norma, pois não satisfaz a condição de transformação de escala, acima. ✣

• A métrica de Minkowski

Seja $\mathcal{E}$ um espaço vetorial real dotado de uma métrica d. Essa métrica é dita ser uma *métrica de Minkowski*[10][11] se satisfazer:

1. Invariância translacional: $d(u+t,\ v+t) = d(u,\ v)$ para todos $u,\ v$ e $t \in \mathcal{E}$.
2. Linearidade em segmentos: $d\big(u,\ (1-\lambda)u + \lambda v\big) = \lambda d(u,\ v)$ para todos $u,\ v \in \mathcal{E}$ e todo $\lambda \in [0,\ 1]$.

Se d é uma métrica de Minkowski, definimos $\|u\| := d(u,\ 0)$. Observe-se que $\|u - v\| := d(u - v,\ 0) = d(u,\ v)$ sendo que, na última igualdade, usou-se a invariância translacional. Isso mostra que se $\|\cdot\|$ for uma norma, ela induz a métrica d.

Provemos que $\|\cdot\|$ é, de fato, uma norma em $\mathcal{E}$. Tem-se, usando-se a invariância translacional e a simetria, $\|-u\| = d(-u,\ 0) = d(0,\ u) = d(u,\ 0) = \|u\|$ para todo $u \in \mathcal{E}$. Provemos a propriedade $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{E}$. Para $\alpha = 0$ não há o que se provar e, pela propriedade anteriormente provada, basta considerar $\alpha > 0$. Há dois casos a considerar (usaremos repetidas vezes a invariância translacional e a linearidade em segmentos):

1. Caso $0 < \alpha \leq 1$, temos, $\|\alpha u\| = d(\alpha u,\ 0) = d(0,\ -\alpha u) = d\big(u,\ (1-\alpha)u\big) = \alpha d(u,\ 0) = \alpha\|u\|$.
2. Caso $\alpha > 1$, temos, $\alpha^{-1}\|\alpha u\| = \big\|\alpha^{-1}\alpha u\big\| = \|u\|$, usando o resultado do item anterior, pois $0 < \alpha^{-1} < 1$.

Como o leitor já deve ter intuído, uma métrica de Minkowski também satisfaz a condição de transformação de escala listada no Exercício E. 24.11, página 1309, a saber $d(\alpha u,\ \alpha v) = |\alpha| d(u,\ v)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todos $u,\ v \in \mathcal{E}$. Isso pode ser provado diretamente das propriedades de invariância translacional e a linearidade em segmentos. Novamente, é suficiente tomarmos $\alpha > 0$ e usaremos repetidas vezes essas propriedades:

1. Caso $0 < \alpha \leq 1$, temos $d(\alpha u,\ \alpha v) = d\big(u,\ (1-\alpha)u + \alpha v\big) = \alpha d(u,\ v)$.
2. Caso $\alpha > 1$, temos $\alpha^{-1} d(\alpha u,\ \alpha v) = d(\alpha^{-1}\alpha u,\ \alpha^{-1}\alpha v) = d(u,\ v)$, sendo que na primeira igualdade usamos o resultado do item anterior, pois $0 < \alpha^{-1} < 1$.

*

[10] Hermann Minkowski (1864–1909).

[11] Não confundir com a noção homônima usada na Teoria da Relatividade. A noção aqui apresentada de métrica de Minkowski provém de [422].

A métrica de Minkowski pode ser definida restrita a subconjuntos convexos Ω de um espaço vetorial real $\mathcal{E}$. Nesse caso, porém, não faz sentido, em geral, associar essa métrica a uma norma, pois Ω pode não conter o vetor nulo nem múltiplos arbitrários de um vetor de Ω estão necessariamente em Ω.

• **Métricas e funções subaditivas**

A composição de uma função subaditiva com propriedades adequadas e uma métrica definida em um conjunto M fornece novamente uma métrica em M. Esse é o resultado da seguinte proposição útil:

Proposição 24.1 *Seja $(d,\ M)$ um espaço métrico e seja $h : [0,\ \infty) \to [0,\ \infty)$ uma função satisfazendo as seguintes condições:*

1. *$h(0) = 0$ e $h(x) > 0$ para todo $x > 0$;*
2. *h é crescente: $h(x) \le h(y)$ sempre que $0 \le x \le y$;*
3. *h é subaditiva: $h(x + y) \le h(x) + h(y)$ para todos $x,\ y \in [0,\ \infty)$.*

Então, $D : M \to [0,\ \infty)$ dada por $D := h \circ d$ é também uma métrica em M.

Pelo Lema 5.4, página 330, toda função $h : [0,\ \infty) \to [0,\ \infty)$ que seja crescente, côncava[12] *e satisfaça $h(0) = 0$ é subaditiva e, portanto, a condição de concavidade pode substituir suficientemente a condição subaditividade, acima, para a validade da afirmação.* □

Prova. Sejam $a,\ b \in M$. É claro que $D(a,\ b) = h\big(d(a,\ b)\big) \ge 0$ em todo M. Como h anula-se apenas em 0, é claro também que $D(a,\ b) = 0$ se e somente se $d(a,\ b) = 0$ e, portanto, se e somente se $a = b$.

A simetria de D decorre trivialmente da de d: $D(a,\ b) = h\big(d(a,\ b)\big) = h\big(d(b,\ a)\big) = D(b,\ a)$ para todos $a,\ b \in M$.

Finalmente, para $a,\ b,\ c \in M$,

$$D\big(a,\ b\big) \ = \ h\big(d(a,\ b)\big) \overset{h \text{ é crescente}}{\le} h\big(d(a,\ c) + d(c,\ b)\big) \overset{\text{subaditividade}}{\le} h\big(d(a,\ c)\big) + h\big(d(c,\ b)\big) \ = \ D\big(a,\ c\big) + D\big(c,\ b\big)\ ,$$

que é a desigualdade triangular para D. ■

Exemplo 24.2 Se $d(a,\ b)$ é uma métrica em um conjunto M, então $d(a,\ b)^{1/q}$ é também uma métrica em M para qualquer $q \ge 1$ pois a função $[0,\ \infty) \ni x \mapsto x^{1/q} \in [0,\ \infty)$ é positiva, côncava, crescente e anula-se em $x = 0$. ♦

E. 24.13 *Exercício*. Mostre que a função $\ell(x) := x/(1+x)$ é positiva, crescente e côncava para $x \ge 0$ e satisfaz $\ell(0) = 0$ (sugestão: estude suas duas primeiras derivadas). Conclua da Proposição 24.1, página 1310, que se d é uma métrica em um conjunto M, então $D : M \times M \to [0,\ \infty]$ dada por $D(x,\ y) := d(x,\ y)/\big(1 + d(x,\ y)\big)$, $x,\ y \in M$, é também uma métrica em M. ✠

• **Bolas em espaços métricos**

A noção de *bola* em espaços vetoriais normados foi introduzida à página 281. Vamos agora estender essa noção a espaços métricos gerais.

Seja X um espaço métrico com uma métrica d e seja $x \in X$. Define-se a *bola aberta* de raio $r > 0$ centrada em x como sendo o conjunto

$$B(x,\ r) \ = \ \big\{y \in X,\ \text{ tal que } d(x,\ y) \ < \ r\big\}\ .$$

Em palavras, $B(x,\ r)$ é o conjunto de todos os pontos de X que, segundo a métrica d, distam de x menos do que r. Bolas abertas desempenham um papel importante no estudo de espaços métricos. O conjunto

$$\overline{B(x,\ r)} \ = \ \big\{y \in X,\ \text{ tal que } d(x,\ y) \ \le \ r\big\}$$

define a *bola fechada* de raio $r > 0$ centrada em x.

Comentário sobre a notação. Nestas Notas as bolas $B(x,\ r)$ e $\overline{B(x,\ r)}$ serão por vezes denotadas por $B_r(x)$ e $\overline{B_r(x)}$, respectivamente. ♣

[12] Ou seja, tal que $h\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \ge \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$ para todo $\lambda \in [0,\ 1]$ e todos $x,\ y \ge 0$.

E. 24.14 *Exercício*. Prove que toda bola aberta (fechada) em um espaço métrico é um conjunto aberto (fechado) na topologia métrica desse espaço (as noções de conjuntos abertos ou fechados em um espaço métrico serão introduzidas na Seção 24.3, página 1326). ✠

Ao contrário do que o nome sugere, bolas abertas em espaços métricos não têm necessariamente um formato "redondo". Na Figura 3.1, página 1311, exibimos o aspecto das bolas fechadas de raio 1, centradas em 0, relacionadas às métricas d_p e d_∞ em $\mathbb{R}^2$.

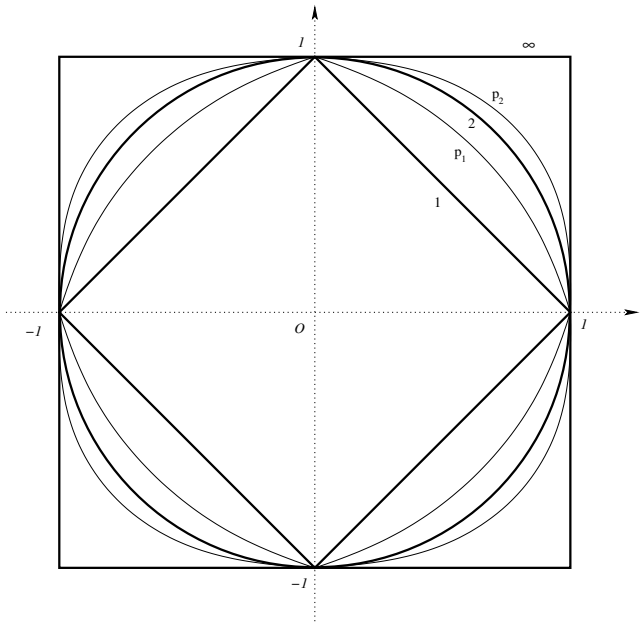

Figura 24.1: As bolas fechadas $\overline{B(0,\ 1)}$ de raio 1 centradas em 0, relacionadas às métricas d_p e d_∞ em $\mathbb{R}^2$. As linhas sólidas indicam os bordos $\partial B(0,\ 1)$. O índice 1 indica a bola $\overline{B(0,\ 1)}$ para a métrica d_1. Trata-se de um quadrado oblíquo com arestas de comprimento $\sqrt{2}$ centrado na origem O. O índice p_1 indica as bolas $\overline{B(0,\ 1)}$ para as métricas d_{p_1} quando $1 < p_1 < 2$. O índice 2 indica a bola $\overline{B(0,\ 1)}$ para a métrica d_2. Essa é a única bola que coincide com o disco fechado de raio 1 centrado na origem O. O índice p_2 indica as bolas $\overline{B(0,\ 1)}$ para as métricas d_{p_2} quando $p_2 > 2$. O índice ∞ indica a bola $\overline{B(0,\ 1)}$ para a métrica d_∞. Trata-se de um quadrado com arestas de comprimento 2 centrado na origem O.

E. 24.15 *Exercício*. Confirme o formato das diversas bolas descritas na Figura 24.1, página 1311. ✠

• **Sequências**

Antes de prosseguirmos, recordemos uma definição básica.

Se X é um conjunto não vazio, uma função $a : \mathbb{N} \to X$ é dita ser uma *sequência* em X. Como é familiar ao estudante, o valor de a em $n \in \mathbb{N}$ é frequentemente denotado por a_n ao invés de $a(n)$. Analogamente, uma sequência $a : \mathbb{N} \to X$ é frequentemente denotada por $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, por $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, ou ainda, com um certo abuso de linguagem, simplesmente por

a_n. Essa última notação é, talvez, a mais frequente, mas pode, em certas ocasiões, causar alguma confusão pois, como mencionamos, a_n designa, estritamente falando, o valor de a em n, não a sequência toda.

Vamos agora introduzir várias noções fundamentais, as quais provêm de definições bem conhecidas no contexto da reta real.

• **Subsequências**

Seja X um conjunto e seja $a : \mathbb{N} \to X$ uma sequência em X. Seja também $\kappa : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função estritamente crescente (ou seja, $k(m) < k(n)$ se $m < n$). Então, $a \circ \kappa : \mathbb{N} \to X$ é dita ser uma *subsequência de* a.

• **Convergência em espaços métricos**

Seja $(X,\ d)$ um espaço métrico. Dizemos que uma sequência a em X converge para um elemento $x \in X$ em relação à métrica d se para todo $\epsilon > 0$ existir um número natural $N(\epsilon)$ (eventualmente dependente de ϵ) tal que $d(x,\ a_n) < \epsilon$ para todo $n > N(\epsilon)$.

Uma outra maneira de frasear a noção de convergência de uma sequência em um espaço métrico é a seguinte: dizemos que uma sequência a em X converge para um elemento $x \in X$ em relação à métrica d se para todo $\epsilon > 0$ existir um número natural $N(\epsilon)$ (eventualmente dependente de ϵ) tal que para todo $n > N(\epsilon)$ tem-se $a_n \in B(x,\ \epsilon)$ (a bola aberta de raio ϵ centrada em x).

A seguinte proposição é fundamental, pois nos diz que, em um espaço métrico, uma sequência, se for convergente, só pode convergir a um ponto:

Proposição 24.2 *Seja $(X,\ d)$ um espaço métrico e seja b uma sequência em X. Suponha que b converge a um elemento $x \in X$ e a um elemento $y \in X$. Então, $x = y$.* □

Prova. Pela desigualdade triangular, temos que $d(x,\ y) \le d(x,\ b_n) + d(b_n,\ y)$ para qualquer n. Agora, como b converge a x sabemos que, para qualquer $\epsilon > 0$ teremos $d(x,\ b_n) < \epsilon$ para todo n grande o suficiente, ou seja, para todo n maior que um certo inteiro $N_x(\epsilon)$. Analogamente, como b_n converge a y sabemos que, para qualquer $\epsilon > 0$ teremos $d(y,\ b_n) < \epsilon$ para todo n grande o suficiente, ou seja, para todo n maior que um certo inteiro $N_y(\epsilon)$. Assim, para todo n maior que $\max\{N_x(\epsilon),\ N_y(\epsilon)\}$ teremos $d(x,\ y) < 2\epsilon$. Ora, como ϵ é um número positivo arbitrário, uma tal desigualdade só pode ser válida se $d(x,\ y) = 0$. Como d é uma métrica, isso implica $x = y$. ■

O estudante pode constatar que a demonstração acima faz uso de todas as propriedades definidoras da noção de métrica, o que ilustra a importância de noções abstratas como aquela.

Um pouco de notação. Se uma sequência a em X converge a $x \in X$ em relação à métrica d então x é dito ser o *d-limite* de a, ou simplesmente o *limite* de a, se a métrica d estiver subentendida. Denotamos esse fato escrevendo $x = d\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, ou simplesmente $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (se a métrica d estiver subentendida). Outra notação frequentemente empregada para dizer que x é o d-limite de a é $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} x$, que é autoexplicativa.

• **Sequências de Cauchy**

Seja um espaço métrico X com uma métrica d. Uma sequência a de elementos de X é dita ser uma *sequência de Cauchy*[13] em relação à métrica d se para todo $\epsilon > 0$ existir um número natural $N(\epsilon)$ (eventualmente dependente de ϵ) tal que $d(a_i,\ a_j) < \epsilon$ para todo i e j tais que $i > N(\epsilon)$ e $j > N(\epsilon)$.

A seguinte proposição é fundamental:

Proposição 24.3 *Seja um espaço métrico X com uma métrica d e seja b uma sequência convergente em relação à métrica d a um elemento $x \in X$. Então, b é uma sequência de Cauchy em relação à métrica d.* ■

Prova. Sejam m e n arbitrários. Pela desigualdade triangular, vale $d(b_n,\ b_m) \le d(b_n,\ x) + d(x,\ b_m)$. Agora, como b converge a x sabemos que para todo $\epsilon > 0$ teremos $d(b_n,\ x) < \epsilon/2$ e $d(b_m,\ x) < \epsilon/2$ desde que ambos m e n sejam maiores que algum $N(\epsilon/2)$. Nesse caso, então, $d(b_n,\ b_m) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Isso completa a prova. ■

[13] Augustin Louis Cauchy (1789–1857).

Uma questão de fundamental importância que agora se coloca é a seguinte: será válida a recíproca da proposição acima, ou seja, será que toda sequência de Cauchy em um espaço métrico é convergente? A importância dessa questão é a seguinte. Dada uma sequência concreta x_n em um espaço métrico X, não sabemos a priori se x_n convergirá ou não a menos que encontremos um elemento x em X com a propriedade desejada (para todo $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon)$ tal que $d(x_n,\ x) < \epsilon$ sempre que $n > N(\epsilon)$). Nem sempre pode ser fácil ou possível encontrar explicitamente tal x, e gostaríamos de possuir um critério *baseado apenas em propriedades verificáveis da sequência* x_n que nos permita dizer se ela converge ou não. A propriedade de uma sequência ser de Cauchy é uma propriedade cuja validade ou não depende apenas da sequência e, portanto, em face à Proposição 24.3, é um ótimo candidato a ser um tal critério de convergência.

Sucede, porém, que, em geral, a resposta à pergunta acima é negativa: existem espaços métricos nos quais há sequências de Cauchy que não convergem. Isso é ilustrado pelos seguintes exemplos. Considere-se o conjunto $X = \mathbb{Q}$ dos números racionais e adotemos em $\mathbb{Q}$ a métrica usual: $d(r,\ s) = |r - s|$, com $r,\ s \in \mathbb{Q}$. Há, sabidamente, exemplos de sequências de $\mathbb{Q}$ que são de Cauchy em relação à métrica d que convergem em $\mathbb{Q}$. Um exemplo é encontrado no exercício seguinte.

E. 24.16 *Exercício*. Seja r um número racional com $r > 1$. Prove que a sequência de números racionais $s_n = \sum\limits_{a=0}^{n} \dfrac{1}{r^a}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy e que a mesma converge ao número racional $\dfrac{r}{r-1}$. Sugestão: prove primeiramente que $s_n = (r - r^{-n})/(r-1)$ e use esse fato. ✠

O ponto, porém, é que há também exemplos de sequências de $\mathbb{Q}$ que são de Cauchy em relação à métrica d mas que **não** convergem em $\mathbb{Q}$. Um exemplo famoso, e que pode ser tratado com detalhe, é o da sequência

$$s_n \;=\; 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\ ,$$

que é uma sequência de Cauchy de racionais, mas que **não** converge a um número racional[14]. Tratamos esse exemplo com detalhe no próximo tópico. A leitura do mesmo pode ser dispensada pelo estudante já familiarizado com esses fatos, mas pode ser instrutiva para os demais. Por um teorema de Lambert[15] (vide [213]), sabe-se que se r é um número racional não nulo então e^r não é racional. Assim, as sequências de racionais $s_n = 1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \cdots + \frac{r^n}{n!}$ convergem a irracionais. Analogamente, esse teorema de Lambert implica que $\ln(r)$ não pode ser racional se r o for, Assim, para $-1 < r < 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, r^{n+1}}{n+1}$ converge ao irracional $\ln(1+r)$.

Outro exemplo é a sequência $p_n = 4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, que converge ao irracional π. Uma prova que π é irracional pode ser encontrada em [473] ou em [213]. Vide página 95 para mais comentários. Para uma breve discussão sobre aproximações para π recheada de digressões históricas, vide Seção 24.B, página 1363.

Esses exemplos, que estão longe de ser únicos, ilustram um fato muito importante: existem espaços métricos nos quais não vale a recíproca da Proposição 24.3, ou seja, existem espaços métricos nos quais sequências de Cauchy não são necessariamente convergentes.

De grande importância são os espaços métricos onde vale a recíproca da Proposição 24.3. Tais espaços métricos são denominados *completos* e deles falaremos na Seção 24.1.1, página 1316, logo adiante.

• **O número e é um número irracional**

Seja a sequência de números racionais

$$s_n \;=\; 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\ ,$$

Vamos provar que essa sequência é de Cauchy em relação à métrica usual em $\mathbb{Q}$, mas que a mesma não converge a um número racional.

Primeiro provemos que esta sequência é de Cauchy. Vamos supor $j > i$. Como a sequência s_n é crescente, segue que

[14] O estudante bem sabe que essa sequência converge no conjunto dos reais ao número e. Abaixo provaremos que esse número não é racional.
[15] Johann Heinrich Lambert (1728–1777).

$d(s_i,\ s_j) = |s_i - s_j| = s_j - s_i$. Temos, então,

$$\begin{aligned} d(s_i,\ s_j) &= s_j - s_i = \frac{1}{(i+1)!} + \cdots + \frac{1}{j!} \\ &= \frac{1}{(i+1)!}\left(1 + \frac{1}{i+2} + \frac{1}{(i+2)(i+3)} + \cdots + \frac{(i+1)!}{j!}\right) \\ &\leq \frac{1}{(i+1)!}\left(1 + \frac{1}{(i+2)} + \frac{1}{(i+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(i+2)^{j-i-1}}\right) \\ &< \frac{1}{(i+1)!}\sum_{a=0}^{\infty}\frac{1}{(i+2)^a} \\ &= \frac{1}{(i+1)!}\,\frac{i+2}{i+1} < \frac{2}{(i+1)!} \quad \text{para } i > 0\,. \end{aligned} \tag{24.8}$$

Como o número $\dfrac{2}{(i+1)!}$ pode ser feito arbitrariamente pequeno tomando-se i grande, fica provado que a sequência s_n é de Cauchy.

E. 24.17 *Exercício*. Justifique cada passagem acima. ✠

Vamos agora provar que essa sequência não converge a um número racional. Para isso vamos supor o contrário e constatar que isso leva a um absurdo. Vamos então supor que a sequência converge a um racional e. Como e é suposto ser racional, e seria da forma $e = p/q$ onde p e q são números inteiros primos entre si. Da desigualdade triangular segue que

$$d(e,\ s_i) \leq d(s_i,\ s_j) + d(e,\ s_j) < \frac{2}{(i+1)!} + \epsilon\,,$$

para qualquer $\epsilon > 0$, desde que j seja escolhido grande o suficiente (pois s_j converge a e). Assim, como a desigualdade vale para qualquer $\epsilon > 0$, conclui-se que

$$d(e,\ s_i) \leq \frac{2}{(i+1)!}\,.$$

Como s_i é uma sequência crescente e $s_i \neq s_j$ para $i \neq j$, segue que $d(e,\ s_i) = e - s_i$. Logo,

$$0 < e - s_i = \frac{p}{q} - s_i \leq \frac{2}{(i+1)!}$$

e, portanto,

$$s_i < \frac{p}{q} \leq s_i + \frac{2}{(i+1)!} \tag{24.9}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Para $i = 2$ a relação (24.9) fica (verifique!)

$$\frac{5}{2} < \frac{p}{q} \leq \frac{17}{6}\,. \tag{24.10}$$

Como $17/6 < 3$, concluímos que $5/2 < p/q < 3$. Esse fato mostra que p/q não é inteiro. Disso, segue que $q \geq 2$, fato que usaremos logo abaixo[16].

Como (24.9) vale para todo i, tomemos em particular $i = q$. A relação (24.9) diz, então, que

$$1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{q!} < \frac{p}{q} \leq 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{2}{(q+1)!}\,.$$

[16] É possível extrair um pouco mais de (24.10). A primeira desigualdade em (24.10) diz-nos que $p > 5q/2$. Como $q \geq 2$, segue que $p > 5$. A segunda desigualdade em (24.10) diz-nos que $q \geq 6p/17$. Como $p \geq 6$, segue que $q \geq 36/17 > 2$. Assim, conclui-se que $q \geq 3$.

Multiplicando-se ambos os lados por $q!$ concluímos que

$$A < p(q-1)! \leq A + \frac{2}{q+1} < A + 1, \text{ pois } q \geq 2\,,$$

onde

$$A := q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) = q! + q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{q!}$$

é um número inteiro positivo, pois é, claramente, uma soma de inteiros positivos. Assim, o que provamos é que $A < p(q-1)! < A + 1$. Agora, como A é um inteiro, essas últimas desigualdades dizem que o número inteiro $p(q-1)!$ está contido no intervalo aberto entre dois inteiros sucessivos (A e $A+1$) e, portanto, não pode ser um inteiro: uma contradição. Isso prova, então, que e não pode ser da forma p/q e, portanto, não pode ser racional.

O número irracional e é denominado[17] *número de Euler*[18], ou *número de Napier*[19].

Diversas demonstrações elegantes da irracionalidade de certos números podem ser encontradas no capítulo 6 de [9].

E. 24.18 *Exercício*. A chamada constante de Euler-Mascheroni[20] é o número definido[21] por

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right) \simeq 0,577215664901532860606512090082402431042159335939 92\ldots\,,$$

onde acima apresentamos seus primeiros 50 dígitos. A constante γ surge em várias situações, por exemplo na definição das funções de Bessel de segundo tipo (vide Seção 15.2.3, página 828) e em propriedades da função Gama de Euler (vide Capítulo 7, página 386). A prova que o limite acima existe pode ser encontrada em qualquer bom livro de Cálculo, por exemplo em [473]. Até hoje não é conhecido se γ é um número racional ou irracional. Resolva essa questão. ✠

• Sequências de Cauchy são limitadas

Sequências de Cauchy em espaços métricos e, em particular, em espaços vetoriais normados, são limitadas. O significado preciso dessa afirmação é o conteúdo da proposição que segue e do corolário que lhe segue.

Proposição 24.4 *Seja M um conjunto não vazio dotado de uma métrica d e seja $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de Cauchy em M em relação à métrica d. Então, existe $C > 0$ tal que $\sup\limits_{a,\ b\in\mathbb{N}} d(x_a,\ x_b) \leq C$.* □

Prova. Seja $\epsilon > 0$, fixo. Por hipótese existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,\ x_m) \leq \epsilon$ para todos $n,\ m \geq N(\epsilon)$. A coleção de números naturais menores que $N(\epsilon)$ é, evidentemente, finita. Seja, $C_0 := \max\limits_{a,\ b<N(\epsilon)} d(x_a,\ x_b)$. Tomemos também $n_0 > N(\epsilon)$, fixo, e seja $C_1 := \max\limits_{a<N(\epsilon)} d(x_a,\ x_{n_0})$. Temos que para todo $b < N(\epsilon)$ e todo $n \geq N(\epsilon)$ vale $d(x_b,\ x_n) \leq d(x_b,\ x_{n_0}) + d(x_{n_o},\ x_n) \leq C_1 + \epsilon$. Assim, resumindo, para $k,\ l \in \mathbb{N}$ arbitrários, temos

$$d(x_k,\ x_l) \leq \begin{cases} \epsilon\,, & \text{se } k,\ l \geq N(\epsilon)\,, \\ C_1 + \epsilon\,, & \text{se } k < N(\epsilon) \text{ e } l \geq N(\epsilon)\,, \\ C_0\,, & \text{se } k,\ l < N(\epsilon)\,, \end{cases}$$

mostrando que $d(x_k,\ x_l) \leq \max\{\epsilon,\ C_1 + \epsilon,\ C_0\} \equiv C$, para todos $k,\ l \in \mathbb{N}$. ■

[17] Seu valor aproximado, com 100 dígitos, é

$$2,718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353547594571382178525166427 4\ldots\,.$$

[18] Leonhard Euler (1707–1783).
[19] John Napier of Merchiston (1550–1617).
[20] Lorenzo Mascheroni (1750–1800).
[21] Essa constante foi introduzida por Euler em 1735, o qual calculou seus primeiros 16 dígitos decimais. Em 1790, Mascheroni calculou seus primeiros 32 dígitos decimais, dos quais apenas os primeiros 19 estavam corretos.

Corolário 24.1 *Seja V um espaço vetorial dotado de uma norma $\|\cdot\|$ e seja $d(u,\ v) := \|u - v\|$ a métrica associada a essa norma. Seja $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de Cauchy em V em relação à métrica d. Então, existe $K > 0$ tal que $\|u_n\| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.* □

Prova. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$, fixo. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $\|u_n\| = \big\|(u_n - u_{n_0}) + u_{n_0}\big\| \leq \|u_n - u_{n_0}\| + \|u_{n_0}\| \leq C + \|u_{n_0}\|$, onde C é a constante, descrita na Proposição 24.4, que majora $\|u_n - u_{n_0}\|$ para todos $n,\ n_0 \in \mathbb{N}$. Adotando-se $K = C + \|u_{n_0}\|$ a demonstração está completa. ■

24.1.1 Completeza e o Completamento Canônico

• **Completeza**

Dizemos que o espaço métrico X é *completo* em relação à métrica d se toda sequência de Cauchy em X convergir a um elemento de X.

Assim, em um espaço métrico completo, para garantirmos que uma sequência converge basta verificarmos que a mesma é de Cauchy. Como comentamos à página 1313, a propriedade de uma sequência ser de Cauchy pode ser verificada analisando apenas propriedades da mesma, daí sua vantagem. Dessa forma, dada uma sequência concreta $\{x_n\}$ em um espaço métrico completo X, para sabermos se $\{x_n\}$ converge não é necessário adivinhar o elemento ao qual converge, mas basta constatar a propriedade de Cauchy, o que pode ser feito apenas estudando a distância entre elementos de $\{x_n\}$.

Nota. O estudante mais adiantado deve ser advertido que a noção de completeza de um espaço métrico **não** é uma noção topológica. Vide discussão à página 1329. ♣

Pelo que vimos nas últimas páginas, o espaço métrico formado pelos números racionais com a métrica usual não é um espaço métrico completo. Vale, porém a seguinte afirmação:

Proposição 24.5 *O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo em relação à métrica usual: $d(x,\ y) = |x - y|,\ x,\ y \in \mathbb{R}$.* □

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em todos os bons livros de Cálculo ou Análise Real. Discutiremos com detalhe esse fato ao apresentarmos uma "construção" dos números reais, devida a Cantor[22] (seguindo ideias de Weierstrass[23]), na Seção 24.A, da qual a proposição acima é um corolário imediato.

O mesmo vale para o conjunto dos números complexos:

Proposição 24.6 *O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é um espaço métrico completo em relação à métrica $d(z,\ w) = |z - w|,\ z,\ w \in \mathbb{C}$.* □

Vale também a seguinte afirmação, cuja demonstração será apresentada como caso particular de uma outra afirmação mais geral na Seção 24.5.1, página 1336:

Proposição 24.7 *Para todo $m \geq 1$, o conjunto $\mathbb{R}^m$ é um espaço métrico completo em relação às métricas d_∞, d_1, d_2 e d_p com $p \geq 1$, definidas à página 1306.* □

Vamos a outros exemplos.

E. 24.19 *Exercício.* Vamos mostrar que $C\big([0,\ 1]\big)$, o conjunto das funções contínuas (reais ou complexas) definidas no intervalo $[0,\ 1]$, não é completo em relação à métrica d_1:

$$d_1(f,\ g) \ = \ \int_0^1 \big|f(x) - g(x)\big|\, dx \ .$$

[22] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918).
[23] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897).

Considere a seguinte sequência de funções contínuas em $[0,\ 1]$:

$$f_n(x) \ = \ \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \big[0,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\big] \ , \\ n\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right), & \text{se } x \in \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{n},\ \frac{1}{2}\big) \ , \\ 1, & \text{se } x \in \big[\frac{1}{2},\ 1\big] \ , \end{cases} \tag{24.11}$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Vide Figura 24.2.

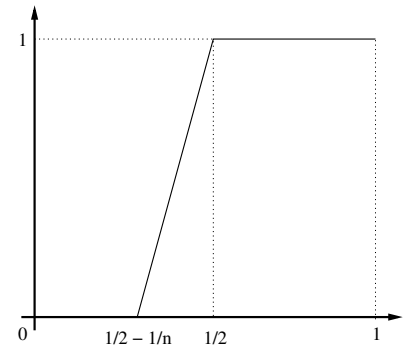

Figura 24.2: Gráfico das funções f_n.

a) Convença-se que essas funções são todas contínuas e, portanto, elementos de $C\big([0,\ 1]\big)$.

b) Calcule $d_1(f_n,\ f_m)$ e mostre que a sequência f_n é uma sequência de Cauchy em relação à métrica d_1.

c) As funções f_n valem 1 no intervalo $[1/2,\ 1]$. Fora isso, para cada $x \in [0,\ 1/2)$ vale $f_n(x) = 0$ para todo n suficientemente grande. Convença-se que esses fatos implicam que se existir uma função f tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \big|f_n(x) - f(x)\big|\, dx = 0$ então f deve ser da forma

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \big[0,\ \frac{1}{2}\big] \ , \\ 1, & \text{se } x \in \big(\frac{1}{2},\ 1\big] \ , \end{cases} \tag{24.12}$$

(a menos, eventualmente, de conjuntos de medida nula, como o ponto $x = 1/2$, onde pode estar indefinida) pois de outro modo ter-se-ia $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \big|f_n(x) - f(x)\big| dx \neq 0$. Calcule $\int_0^1 \big|f_n(x) - f(x)\big|\, dx$ e mostre explicitamente que o limite dessa integral é zero quando $n \to \infty$. Como f não é contínua, isso mostra que a sequência de Cauchy $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não converge a uma função contínua e, portanto, $C\big([0,\ 1]\big)$ não é um espaço métrico completo em relação à métrica d_1.

✣

Vamos agora demonstrar o seguinte fato importante:

Proposição 24.8 *Seja $[a,\ b]$ com $-\infty < a \leq b < \infty$ um intervalo compacto e seja $C\big([a,\ b]\big)$ o conjunto das funções contínuas (reais ou complexas) definidas em $[a,\ b]$. Então, $C\big([a,\ b]\big)$ é completo em relação à métrica $d_\infty(f,\ g) := \sup\limits_{x\in[a,\ b]} \big|f(x) - g(x)\big|,\ f,\ g \in C\big([a,\ b]\big)$.*

Um outro modo de formular a afirmação acima é dizer que o limite uniforme de uma sequência de funções contínuas em um intervalo compacto $[a,\ b]$ é também uma função contínua. □

A Seção 24.4, página 1330, é dedicada a teoremas de completeza para certos conjuntos de funções assumindo valores em espaços métricos completos. Uma importante generalização da Proposição 24.8 é apresentada no Corolário 24.2, página 1334.

Prova da Proposição 24.8. O leitor deve se recordar que, como o intervalo $[a,\ b]$ é compacto, toda função f contínua nele definida é limitada, pois $|f|$ é contínua e possui um máximo e um mínimo (Teorema 32.16, página 1628). Assim, $d_\infty(f,\ g) := \sup\limits_{x\in[a,\ b]} \big|f(x) - g(x)\big|$ está definida para todas $f,\ g \in C\big([a,\ b]\big)$.

Seja f_n uma sequência de Cauchy em $C\big([a,\ b]\big)$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe um inteiro positivo $N(\epsilon)$ tal que $\sup_{x\in[a,\ b]} \big|f_n(x) - f_m(x)\big| < \epsilon$, sempre que m e n sejam maiores que $N(\epsilon)$. Isso significa que para cada $x \in [a,\ b]$ tem-se $\big|f_n(x) - f_m(x)\big| < \epsilon$ sempre que m e n sejam maiores que $N(\epsilon)$. Assim, para cada $x \in [a,\ b]$ fixo, a sequência numérica $f_n(x)$ é uma sequência de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$, conforme o caso) é completo, segue que cada sequência $f_n(x)$ é convergente. Vamos denominar por $f(x)$ seu limite.

Claramente $[a,\ b] \ni x \mapsto f(x)$ é uma função (certo?). Essa função f é um forte candidato a ser o limite da sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na métrica d_∞. Colocamo-nos, então, as seguintes questões: **1.** Será a função f também um elemento de $C\big([a,\ b]\big)$, ou seja, contínua? **2.** Se a resposta à pergunta anterior for positiva, será que a sequência f_m converge à função f na métrica d_∞? Se a resposta a essas perguntas for positiva, estará provado que $C\big([a,\ b]\big)$ é completo na métrica d_∞.

Precisamos agora mostrar que a sequência $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ aproxima essa função f na métrica d_∞.

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Vamos definir uma sequência crescente de números inteiros e positivos $N_k(\epsilon)$, $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ com $N_{k+1}(\epsilon) > N_k(\epsilon)$, da seguinte forma: $N_k(\epsilon)$ é tal que $d_\infty(f_m,\ f_n) < \epsilon/2^k$ para todos $m,\ n > N_k(\epsilon)$. Note que uma tal sequência $N_k(\epsilon)$ sempre pode ser encontrada pois, por hipótese, f_m é uma sequência de Cauchy em d_∞. Vamos agora escolher uma sequência crescente de índices $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} < n_k < \cdots$ tais que $n_k > N_k(\epsilon)$. A essa sequência está associada a subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Note que, pela definição, tem-se

$$d_\infty(f_{n_{l+1}},\ f_{n_l}) \ < \ \frac{\epsilon}{2^l}\ ,$$

pois n_l e n_{l+1} são maiores que $N_l(\epsilon)$.

Com essas definições, teremos que, para todo $k > 1$,

$$f_{n_k}(x) - f_{n_1}(x) \ = \ \sum_{l=1}^{k-1} \big[f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_l}(x)\big]\ .$$

(Justifique!). Logo,

$$\begin{aligned}
\big|f_{n_k}(x) - f_{n_1}(x)\big| \ &\leq \ \sum_{l=1}^{k-1} \big|f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_l}(x)\big| \\
&\leq \ \sum_{l=1}^{k-1} \sup_{x\in[a,\ b]} \big|f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_l}(x)\big| \ = \ \sum_{l=1}^{k-1} d_\infty(f_{n_{l+1}},\ f_{n_l}) \\
&< \ \epsilon \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{2^l} \ = \ \epsilon\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)\ .
\end{aligned}$$

Daqui, concluímos que para cada $x \in [a,\ b]$,

$$\begin{aligned}
\big|f(x) - f_{n_1}(x)\big| \ &= \ \Big|f(x) - f_{n_k}(x) + f_{n_k}(x) - f_{n_1}(x)\Big| \\
&\leq \ \big|f(x) - f_{n_k}(x)\big| + \big|f_{n_k}(x) - f_{n_1}(x)\big| \\
&< \ \big|f(x) - f_{n_k}(x)\big| + \epsilon\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)\ ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|f(x) - f_{n_1}(x)| \ < \ \big|f(x) - f_{n_k}(x)\big| + \epsilon\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)\ .$$

O lado esquerdo desta expressão independe de k. Tomando-se o limite $k \to \infty$ e lembrando que a sequência numérica $f_{n_k}(x)$ converge a $f(x)$, concluímos que $|f(x) - f_{n_1}(x)| \leq \epsilon$ e, para todo $n > N_1(\epsilon)$ valerá $|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon + \epsilon/2 = (3/2)\epsilon$. Como isso vale para todo x, segue que

$$d_\infty(f,\ f_n) \ = \ \sup_{x\in[a,\ b]} \big|f(x) - f_n(x)\big| \ \leq \ (3/2)\epsilon \tag{24.13}$$

para todo $n > N_1(\epsilon)$. Isso demonstra que a sequência f_n converge a f em relação à métrica d_∞.

Vamos agora provar que a função f é contínua. Para tal, notemos que para quaisquer $x,\ y \in [a,\ b]$,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| \ &= \ \Big|f(x) - f_{n_1}(x) + f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y) + f_{n_1}(y) - f(y)\Big| \\
&\leq \ \big|f(x) - f_{n_1}(x)\big| + \big|f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)\big| + \big|f_{n_1}(y) - f(y)\big| \\
&\leq \ \sup_{x\in[a,\ b]} \big|f(x) - f_{n_1}(x)\big| + \big|f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)\big| + \sup_{y\in[a,\ b]} \big|f_{n_1}(y) - f(y)\big| \\
&= \ 2d_\infty(f,\ f_{n_1}) + \big|f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)\big| \\
&\leq \ 3\epsilon + \big|f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)\big|\ .
\end{aligned}$$

Notemos agora que $f_{n_1} \in C([a,\ b])$ e é, portanto, uma função contínua. Logo, pela definição de continuidade de funções, para x fixo, existe um número positivo δ tal que $|f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)| < \epsilon$ para todo y tal que $|y - x| < \delta$.

Assim, concluímos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo y tal que $|y - x| < \delta$ tem-se $|f(x) - f(y)| < 4\epsilon$. Isso nos diz precisamente que f é contínua, como queríamos provar. ■

E. 24.20 *Exercício*. Mostre que a sequência de funções f_n definida em (24.11) não é uma sequência de Cauchy em relação à métrica d_∞. Observe que isso é coerente com a Proposição 24.8, pois a função f dada em (24.12), obtida pelo limite pontual $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para cada $x \in [a,\ b]$, não é contínua. ✠

• **Conjuntos densos em espaços métricos**

Se M é um conjunto dotado de uma métrica d, dizemos que um conjunto S, subconjunto de M, é d-denso em M (ou simplesmente denso em M) se todo $x \in M$ puder ser aproximado por elementos de S no sentido da métrica d, ou seja, se para todo $x \in M$ e todo $\epsilon > 0$ existirem elementos $s \in S$ (eventualmente dependentes de x e de ϵ) tais que $d(x,\ s) < \epsilon$.

Por exemplo, o conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ para a métrica usual $d(x,\ y) = |y - x|$. Para cada p, $\mathbb{Q}$ é também denso na métrica p-ádica d_p no conjunto $\mathbb{Q}_p$ de números p-ádicos (para as definições, vide Seção 24.A, página 1357). Muito importante também é o Teorema de Weierstrass, Teorema 37.3, página 1950, que afirma que em cada intervalo fechado e limitado $[a,\ b]$ os polinômios são densos no conjunto $C([a,\ b])$ das funções contínuas definidas em $[a,\ b]$.

• **Isometrias**

Sejam $(M_1,\ d_1)$ e $(M_2,\ d_2)$ dois espaços métricos. Uma função $h : M_1 \to M_2$ é dita ser uma *isometria* se preservar distâncias, ou seja, se para todos $x,\ y \in M_1$ valer

$$d_2\big(h(x),\ h(y)\big) \ = \ d_1(x,\ y)\ .$$

E. 24.21 *Exercício*. Mostre que se $h : M_1 \to M_2$ for uma isometria ela é necessariamente injetora. ✠

E. 24.22 *Exercício*. Mostre que se $h : M_1 \to M_2$ for uma isometria ela é necessariamente contínua. ✠

Se uma isometria $h : M_1 \to M_2$ for sobrejetora, ela é automaticamente bijetora e, portanto, existe uma inversa $h^{-1} : M_2 \to M_1$. É trivial verificar (faça-o!) que essa inversa é também uma isometria.

Se existir uma isometria bijetora $h : M_1 \to M_2$ entre dois espaços métricos $(M_1,\ d_1)$ e $(M_2,\ d_2)$, dizemos que esses espaços são *espaços métricos isométricos* pela isometria h.

Na literatura matemática isometrias bijetoras são também denominadas em certos contextos *isometrias globais*, *isomorfismos isométricos* ou ainda *aplicações congruentes*.

E. 24.23 *Exercício*. Mostre que se dois espaços métricos $(M_1,\ d_1)$ e $(M_2,\ d_2)$ são isométricos por uma isometria bijetora $h : M_1 \to M_2$ e $(M_1,\ d_1)$ for um espaço métrico completo, então $(M_2,\ d_2)$ é também um espaço métrico completo. *Sugestão:* mostre que se $\{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ for uma sequência de Cauchy em M_2 em relação a d_2, então $\{h^{-1}(b_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de Cauchy em M_1 em relação a d_1. Esse fato, então, implica que a sequência $\{h^{-1}(b_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ converge a algum elemento $a \in M_1$ (pois $(M_1,\ d_1)$ é completo). Mostre que $h(a) \in M_2$ é o limite na métrica d_2 da sequência original $\{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Isso estabeleceu que toda sequência de Cauchy em $(M_2,\ d_2)$ converge e, portanto, que $(M_2,\ d_2)$ é completo. ✠

E. 24.24 *Exercício*. Sejam $(M_1,\ d_1)$, $(M_2,\ d_2)$ e $(M_3,\ d_3)$ três espaços métricos e sejam $h_{12} : M_1 \to M_2$ e $h_{23} : M_2 \to M_3$ duas isometrias entre os espaços métricos $(M_1,\ d_1)$ e $(M_2,\ d_2)$ e, respectivamente, $(M_2,\ d_2)$ e $(M_3,\ d_3)$. Mostre que a composição $h_{23} \circ h_{12} : M_1 \to M_3$ é uma isometria entre os espaços métricos $(M_1,\ d_1)$ e $(M_3,\ d_3)$. ✠

E. 24.25 *Exercício*. Seja $(M,\ d)$ um espaço métrico e seja $\mathrm{Iso}(M,\ d)$ o conjunto de todas as isometrias bijetoras de M em si mesmo, ou seja, o conjunto de todas as aplicações bijetores $h : M \to M$ tais que $d\big(h(x),\ h(y)\big) = d(x,\ y)$ para todos $x,\ y \in M$. Mostre que $\mathrm{Iso}(M,\ d)$ é um grupo pela operação de composição de funções. ✠

• Espaços Métricos. O Completamento Canônico

Dado um conjunto X dotado de uma métrica d e que não seja completo em relação a esta métrica, é muito importante, por vezes, identificar um conjunto X', dotado de uma métrica d' que possua as seguintes propriedades:

a. X' contém X como subconjunto.

b. X é denso em X' em relação à métrica d'.

c. d' quando restrita a X é idêntica a d.

d. X' é completo em relação a d'.

Em um tal caso, dizemos que o espaço métrico $(X',\ d')$ é um *completamento* do espaço métrico $(X,\ d)$.

Como exemplo, mencionamos que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um completamento do conjunto dos números racionais, caso adotemos neste a métrica $d(r,\ s) = |r - s|$, $r,\ s \in \mathbb{Q}$. A métrica d' em $\mathbb{R}$ seria também $d'(x,\ y) = |x - y|$, $x,\ y \in \mathbb{R}$.

Dado um espaço métrico $(X,\ d)$, que eventualmente não é completo em relação a uma métrica d dada, podemos completá-lo usando um procedimento padrão devido a Cantor[24], conhecido como *completamento canônico* de espaços métricos. Isso é o conteúdo do seguinte teorema:

Teorema 24.1 (Completamento Canônico) *Dado um conjunto X, dotado de uma métrica d, existe um outro conjunto $\widetilde{X}$, dotado de uma métrica $\widetilde{d}$, e uma aplicação injetora $E : X \to \widetilde{X}$ tais que:*

1. *$\widetilde{d}\big(E(x),\ E(y)\big) = d(x,\ y)$ para todo $x,\ y \in X$.*

2. *O conjunto $E(X)$, a imagem de X por E, é um conjunto $\widetilde{d}$-denso em $\widetilde{X}$.*

3. *$\widetilde{X}$ é completo em relação à métrica $\widetilde{d}$.* □

[24] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918).

Nota. Comentemos que E é uma bijeção entre X e $E(X)$ (por ser injetora). Nesse sentido, podemos também dizer, com um pequeno abuso de linguagem, que $\widetilde{X}$ é um completamento de X. Comentamos também que o fato de ter-se $\widetilde{d}\big(E(x),\ E(y)\big) = d(x,\ y)$ para todo $x,\ y \in X$ por si já implica que E é injetora. ♣

Na Seção 24.A ilustramos uma aplicação importante do Teorema 24.1 (mais precisamente, da demonstração do Teorema 24.1) ao delinearmos como podemos "construir" os números reais a partir dos racionais. Em seguida, adotando métricas especiais no conjunto $\mathbb{Q}$, mostraremos como construir um conjunto especial de números, os chamados números p-ádicos.

Prova do Teorema 24.1. Consideremos o conjunto $\mathcal{C}_d(X)$ formado por todas as sequências em X que sejam de Cauchy em relação à métrica d. Vamos introduzir em $\mathcal{C}_d(X)$ a seguinte relação de equivalência: para duas sequências de Cauchy $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizemos que a é equivalente a b, $a \sim b$, se e somente se $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n,\ b_n) = 0$.

E. 24.26 *Exercício*. Prove que esta é, de fato, uma relação de equivalência. Sugestão: use a desigualdade triangular. ✠

O conjunto $\mathcal{C}_d(X)$ é, então, a união disjunta de suas classes de equivalência pela relação acima[25]. Vamos denotar por $\widetilde{X}$ o conjunto de todas essas classes de equivalência. Como usualmente se faz, denotaremos por $[x]$ a classe de equivalência de um elemento $x \in \mathcal{C}_d(X)$, ou seja, $[x]$ é o conjunto de todas as sequências de Cauchy em X que são equivalentes à sequência de Cauchy x.

Podemos fazer de $\widetilde{X}$ um espaço métrico definindo uma métrica $\widetilde{d} :\ \widetilde{X} \times \widetilde{X} \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$\widetilde{d}\big([x],\ [y]\big) \ = \ \lim_{n\to\infty} d(x_n,\ y_n)\ , \tag{24.14}$$

para duas sequências de Cauchy $x = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $y = \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \widetilde{X}$.

A respeito da definição (24.14) há alguns pontos a comentar, o que faremos com os três exercícios que seguem. O primeiro exercício mostra que o limite no lado direito de (24.14) de fato existe e esclarece por que é importante o uso de sequências de Cauchy na construção, e não sequências quaisquer. O segundo exercício esclarece que $\widetilde{d}$ é de fato uma função de classes de equivalência (independente dos representantes x e y tomados em $[x]$ e $[y]$, respectivamente). O terceiro exercício estabelece que $\widetilde{d}$ é, de fato, uma métrica.

E. 24.27 *Exercício*. Mostre que o limite em (24.14) existe. Para tal, note que, pela desigualdade triangular,

$$d(x_i,\ y_i) \ \le \ d(x_i,\ x_j) + d(x_j,\ y_j) + d(y_j,\ y_i)$$

e, portanto,

$$\big|d(x_i,\ y_i) - d(x_j,\ y_j)\big| \ \le \ d(x_i,\ x_j) + d(y_j,\ y_i)\ .$$

Como x e y são sequências de Cauchy o lado direito pode ser feito $\le \epsilon$ para qualquer $\epsilon > 0$, desde que i e j sejam feitos grandes o suficiente. Complete os detalhes faltantes. ✠

E. 24.28 *Exercício*. Mostre que se $x' \in \mathcal{C}_d(X)$ e $x' \in [x]$ (ou seja x' é uma sequência de Cauchy equivalente a $x \in \mathcal{C}_d(X)$) então

$$\lim_{n\to\infty} d(x'_n,\ y_n) \ = \ \lim_{n\to\infty} d(x_n,\ y_n) \tag{24.15}$$

para toda $y \in \mathcal{C}_d(X)$. Sugestão: Usando a desigualdade triangular, tem-se que

$$d(x_n,\ y_n) \ \le \ d(x_n,\ x'_n) + d(x'_n,\ y_n)\ .$$

Prove daí que $|d(x_n,\ y_n) - d(x'_n,\ y_n)| \le d(x_n,\ x'_n)$ e conclua (24.15) disso. ✠

Esse exercício estabelece que a definição (24.14) independe do particular elemento x de $[x]$ adotado. Analogamente, (24.14) independe do particular elemento y de $[y]$ adotado e, portanto, $\widetilde{d}$ é legitimamente uma função de classes de equivalência. No próximo exercício é provado que $\widetilde{d}$ é, de fato, uma métrica.

E. 24.29 *Exercício*. Mostre que $\widetilde{d}$ é uma métrica em $\widetilde{X}$. Sugestão: positividade e simetria são evidentes. É também fácil ver que $\widetilde{d}([x],\ [y]) = 0$ se e somente se $x \sim y$, o que implica $[x] = [y]$. Por fim, a desigualdade triangular para $\widetilde{d}$ segue facilmente da desigualdade triangular para d. Complete os detalhes faltantes. ✠

[25] Para as noções de relação de equivalência e classes de equivalência, vide Seção 1.1.2.8, página 71.

Vamos agora mostrar que $\widetilde{X}$ é completo em relação a $\widetilde{d}$. Seja $\{[x^a],\ a \in \mathbb{N}\}$, uma sequência de Cauchy em $\widetilde{X}$. Cada elemento x^a é, ele mesmo, uma sequência de Cauchy em X: $\{x^a_1,\ x^a_2,\ x^a_3, \ldots\}$. Como $[x^a]$, $a \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy em $\widetilde{X}$ vale que, para todo $\epsilon > 0$, existe $A(\epsilon) \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\widetilde{d}([x^a],\ [x^b]) < \epsilon$ desde que a e $b \geq A(\epsilon)$. Daí segue que, pela definição de limite, existe $I(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x^a_i,\ x^b_i) \ < \ \epsilon \ ,$$

desde que a e $b \geq A(\epsilon)$ e que $i \geq I(\epsilon)$. Fora isso, como $\{x^a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy para cada a, existe para todo $\epsilon > 0$ um $J_a(\epsilon)$ tal que

$$d(x^a_i,\ x^a_j) \ < \ \epsilon \ ,$$

desde que $i,\ j \geq J_a(\epsilon)$

Defina-se então para $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha(n) \ := \ \max\big\{A(1/p),\ 1 \leq p \leq n\big\} \quad \text{e}$$

$$\beta(n) \ := \ \max\Big\{\max\big\{I(1/q),\ 1 \leq q \leq n\big\}\ ,\ \max\big\{J_{\alpha(r)}(1/r),\ 1 \leq r \leq n\big\}\Big\}\ .$$

É evidente por essas definições que para $n > m$ teremos

$$\alpha(n) \ \geq \ \alpha(m) \ \geq \ A(1/m) \tag{24.16}$$

e

$$\beta(n) \ \geq \ \beta(m) \ \geq \ \max\big\{I(1/m),\ J_{\alpha(m)}(1/m)\big\}\ . \tag{24.17}$$

Defina-se agora a sequência $\underline{x}$ em X dada por $\underline{x}_n := x^{\alpha(n)}_{\beta(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Desejamos provar que essa é uma sequência de Cauchy em X e, para tal, observemos que

$$d(\underline{x}_n,\ \underline{x}_m) \ = \ d\left(x^{\alpha(n)}_{\beta(n)},\ x^{\alpha(m)}_{\beta(m)}\right) \ \leq \ d\left(x^{\alpha(n)}_{\beta(n)},\ x^{\alpha(m)}_{\beta(n)}\right) + d\left(x^{\alpha(m)}_{\beta(n)},\ x^{\alpha(m)}_{\beta(m)}\right)\ .$$

Agora, para $m < n$ valerá

$$d\left(x^{\alpha(n)}_{\beta(n)},\ x^{\alpha(m)}_{\beta(n)}\right) \ < \ \frac{1}{m}\ , \tag{24.18}$$

pois $\beta(n) > I(1/m)$ (por (24.17)) e $\alpha(n) \geq \alpha(m) \geq A(1/m)$ (por (24.16)). Paralelamente, temos também

$$d\left(x^{\alpha(m)}_{\beta(n)},\ x^{\alpha(m)}_{\beta(m)}\right) \ < \ \frac{1}{m}\ ,$$

pois $\beta(n) \geq \beta(m) \geq J_{\alpha(m)}(1/m)$ (por (24.17)). Estabelecemos que para todos $n > m$ tem-se $d(\underline{x}_n,\ \underline{x}_m) < \frac{2}{m}$ e isso diz-nos claramente que $\underline{x}$ é uma sequência de Cauchy.

A classe de equivalência de $\underline{x}$, ou seja, $[\underline{x}]$, é um candidato a ser o limite em $\widetilde{X}$ (na métrica $\widetilde{d}$) da sequência $[x^a]$. Provemos que isso é de fato verdade.

Consideremos a subsequência $[x^{\alpha(m)}]$, $m \in \mathbb{N}$. Temos que

$$\widetilde{d}\big([x^{\alpha(m)}],\ [\underline{x}]\big) \ = \ \lim_{n\to\infty} d\left(x^{\alpha(m)}_n,\ x^{\alpha(n)}_{\beta(n)}\right)\ .$$

Porém,

$$d\left(x^{\alpha(m)}_n,\ x^{\alpha(n)}_{\beta(n)}\right) \ \leq \ d\left(x^{\alpha(m)}_n,\ x^{\alpha(m)}_{\beta(n)}\right) + d\left(x^{\alpha(m)}_{\beta(n)},\ x^{\alpha(n)}_{\beta(n)}\right)\ .$$

Agora, para todo $n \geq J_{\alpha(m)}(1/m)$ vale, $d\left(x^{\alpha(m)}_n, x^{\alpha(m)}_{\beta(n)}\right) < \frac{1}{m}$ pois, por (24.17), tem-se também $\beta(n) \geq J_{\alpha(m)}(1/m)$. Paralelamente, temos por (24.18) $d\left(x^{\alpha(m)}_{\beta(n)}, x^{\alpha(n)}_{\beta(n)}\right) < \frac{1}{m}$. Assim, provamos que para todo $n \geq J_{\alpha(m)}(1/m)$ vale

$$d\left(x^{\alpha(m)}_n,\ x^{\alpha(n)}_{\beta(n)}\right) \ \leq \ \frac{2}{m}\ , \qquad \text{o que estabelece que} \qquad \widetilde{d}\big([x^{\alpha(m)}],\ [\underline{x}]\big) \ \leq \ \frac{2}{m}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Isso provou que subsequência $[x^{\alpha(m)}]$, $m \in \mathbb{N}$, converge a $[\underline{x}]$ na métrica $\widetilde{d}$. Como $[x^a]$ é uma sequência de Cauchy, isso provou que a própria sequência $[x^a]$ converge a $[\underline{x}]$ na métrica $\widetilde{d}$ e, portanto, estabelecemos que $\widetilde{X}$ é completo.

Para cada $x \in X$, podemos associar uma sequência de Cauchy constante $\widetilde{x}_i = x$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Seja $E : X \to \widetilde{X}$ definida por

$$X \ni x \mapsto \ E(x) \ := \ [\widetilde{x}] \ \in \widetilde{X}\ .$$

É fácil provar que E é injetora. De fato, se $x,\ y \in X$ são tais que $E(x) = E(y)$, então $[\widetilde{x}] = [\widetilde{y}]$ e isso implica $\widetilde{x} \sim \widetilde{y}$. Isso, por sua vez, significa que $d(\widetilde{x}_i,\ \widetilde{y}_i) = 0$, Porém, $\widetilde{x}_i = x$ e $\widetilde{y}_i = y$ e, portanto, provou-se que $d(x,\ y) = 0$, o que implica $x = y$, como queríamos.

Há então uma bijeção E de X sobre o subconjunto $E(X) := \{E(x) \in \widetilde{X},\ x \in X\} \subset \widetilde{X}$. Temos também que

$$\widetilde{d}\big(E(x),\ E(y)\big) \ = \ \widetilde{d}\big([\widetilde{x}],\ [\widetilde{y}]\big) \ = \ \lim_{n\to\infty} d(\widetilde{x}_n,\ \widetilde{y}_n) \ = \ \lim_{n\to\infty} d(x,\ y) \ = \ d(x,\ y)\ .$$

Assim, aprendemos que a bijeção E preserva distâncias (é, portanto, o que se chama de uma *isometria* de X em $E(X)$).

Resta-nos mostrar que o conjunto $E(X)$ é denso em $\widetilde{X}$, ou seja, qualquer elemento de $\widetilde{X}$ pode ser aproximado (no sentido da distância $\widetilde{d}$) por elementos de $E(X)$. Seja então $[x]$ um elemento de $\widetilde{X}$. Como x é uma sequência de Cauchy, vale que para cada $\epsilon > 0$ tem-se

$$d(x_i,\ x_j) \ < \ \epsilon \tag{24.19}$$

desde que i e j sejam maiores que um certo $N(\epsilon)$. Seja a sequência de Cauchy constante igual ao elemento $x_{N(\epsilon)+1}$, ou seja, $\widetilde{x_{N(\epsilon)+1}}$. Teremos

$$\widetilde{d}\left([x],\ [\widetilde{x_{N(\epsilon)+1}}]\right) \ = \ \widetilde{d}\big([x],\ E(x_{N(\epsilon)+1})\big) \ = \ \lim_{n\to\infty} d\left(x_n,\ \left(\widetilde{x_{N(\epsilon)+1}}\right)_n\right) \ = \ \lim_{n\to\infty} d(x_n,\ x_{N(\epsilon)+1})$$

Agora, por (24.19),

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,\ x_{N(\epsilon)+1}) \ < \ \epsilon\ .$$

Logo, $\widetilde{d}\big([x],\ E(x_{N(\epsilon)+1})\big) < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, o que precisamente afirma que qualquer $[x] \in \widetilde{X}$ pode ser arbitrariamente aproximado no sentido da métrica $\widetilde{d}$ por elementos de $E(X)$. Isso completa a demonstração do Teorema 24.1. ■

24.1.2 Conjuntos de Sequências

Vamos agora apresentar um exemplo de espaço ultramétrico completo relevante na Teoria das Probabilidades, na Teoria dos Processos Estocásticos e na Mecânica Estatística,

Seja Ω um conjunto com mais de um elemento (para que o exemplo não seja trivial) e seja $\Omega^{\mathbb{N}}$ a coleção de todas as sequências em Ω. Para $\omega,\ \omega' \in \Omega^{\mathbb{N}}$ definimos

$$N\big(\omega,\ \omega'\big) \ := \ \begin{cases} \infty\ , & \text{se } \omega = \omega'\ , \\ \min\big\{j \in \mathbb{N} \big|\ \omega_j \neq \omega'_j\big\}\ , & \text{se } \omega \neq \omega'\ . \end{cases}$$

Em palavras, $N\big(\omega,\ \omega'\big)$ é o menor índice para o qual as sequências ω e ω' diferem. Note-se que vale a propriedade de simetria: $N\big(\omega,\ \omega'\big) = N\big(\omega',\ \omega\big)$.

Afirmamos que para $\omega,\ \omega'$ e $\omega'' \in \Omega^{\mathbb{N}}$ vale

$$N\big(\omega,\ \omega'\big) \ \geq \ \min\big\{N\big(\omega,\ \omega''\big),\ N\big(\omega',\ \omega''\big)\big\}\ . \tag{24.20}$$

Para provar isso, vamos primeiramente assumir que $\omega,\ \omega'$ e ω'' sejam distintos. Suponhamos sem perda de generalidade que $J \equiv N\big(\omega,\ \omega''\big) = \min\big\{N\big(\omega,\ \omega''\big),\ N\big(\omega',\ \omega''\big)\big\}$. O fato que $N\big(\omega',\ \omega''\big) \geq J$ significa que $\omega'_j = \omega''_j$ para todo $j \in \{1,\ \ldots,\ J-1\}$. Porém, pela própria definição de N, tem-se $\omega_j = \omega''_j$ para todo $j \in \{1,\ \ldots,\ J-1\}$. Assim, pela

transitividade da igualdade, vale também $\omega_j = \omega'_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, J-1\}$. Isso, porém, significa que $N(\omega, \omega') \geq J$, ou seja, que vale (24.20), como desejávamos provar.

Caso $\omega = \omega'$, (24.20) é válido trivialmente, pois $N(\omega, \omega') = \infty$. Caso $\omega = \omega''$, então (24.20) é igualmente válido, pois $N(\omega, \omega'') = \infty$ e a afirmação de (24.20) seria que $N(\omega, \omega') \geq N(\omega', \omega'')$, o que é trivialmente verdade dado que $\omega = \omega''$ e dado que N é simétrica. Por fim, se $\omega' = \omega''$, temos $N(\omega', \omega'') = \infty$ e (24.20) afirma que $N(\omega, \omega') \geq N(\omega, \omega'')$, o que, novamente, é trivialmente verdade, pois $\omega' = \omega''$.

Uma vez estabelecida a relação (24.20), definamos

$$d(\omega, \omega') := \begin{cases} 0 , & \text{se } \omega = \omega' , \\ 2^{-N(\omega, \omega')} , & \text{se } \omega \neq \omega' . \end{cases} \tag{24.21}$$

Afirmamos que d é uma ultramétrica em $\Omega^{\mathbb{N}}$. De fato, $d(\omega, \omega') \geq 0$ e $d(\omega, \omega') = 0$ se e somente se $\omega = \omega'$. Fora isso, d é simétrica, pois N o é. Por fim, a propriedade de ultrametricidade decorre do fato que, por (24.20),

$$-N(\omega, \omega') \leq -\min\{N(\omega, \omega''), N(\omega', \omega'')\} = \max\{-N(\omega, \omega''), -N(\omega', \omega'')\} ,$$

o que implica que

$$2^{-N(\omega, \omega')} \leq 2^{\max\{-N(\omega, \omega''), -N(\omega', \omega'')\}} = \max\left\{2^{-N(\omega, \omega'')}, 2^{-N(\omega', \omega'')}\right\} ,$$

pois a função exponencial é crescente. Isso estabeleceu que $d(\omega, \omega') \leq \max\left\{d(\omega, \omega''), d(\omega', \omega'')\right\}$, como desejávamos, que é a propriedade de ultrametricidade.

O espaço métrico composto por $\Omega^{\mathbb{N}}$ com a métrica d é um espaço métrico completo, como passaremos a demonstrar.

Seja ω^a, $a \in \mathbb{N}$, uma sequência de Cauchy de elementos de $\Omega^{\mathbb{N}}$. Isso significa que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $N(n) \in \mathbb{N}$ tal que $d(\omega^a, \omega^b) \leq 2^{-n}$ sempre que a e b forem $\geq N(n)$. É importante aqui notar que sempre podemos escolher $N(n) \geq n$, o que faremos doravante. Pela definição de d, isso significa que $(\omega^a)_j = (\omega^b)_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ sempre que a e b forem $\geq N(n)$.

Seja $\overline{\omega} \in \Omega^{\mathbb{N}}$ a sequência definida por $\overline{\omega}_l := (\omega^{N(l)})_l$, para cada $l \in \mathbb{N}$. Afirmamos que a sequencia ω^a, $a \in \mathbb{N}$, converge a $\overline{\omega}$ na métrica d. De fato, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $(\omega^a)_j = (\omega^{N(j)})_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ sempre que $a \geq N(n)$. Assim, temos $(\omega^a)_j = \overline{\omega}_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ para $a \geq N(n)$. Isso implica que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $d(\omega^a, \overline{\omega}) \leq 2^{-n}$ sempre que $a \geq N(n)$, ou seja, que a sequência ω^a, $a \in \mathbb{N}$, converge em $\Omega^{\mathbb{N}}$ à sequência $\overline{\omega}$, demonstrando a completeza de $\Omega^{\mathbb{N}}$.

24.2 Pseudométricas

Seja M um conjunto não vazio. Uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que satisfaz

1. Positividade: para todos $x, y \in M$ vale $d(x, y) \geq 0$.
2. Simetria: para todos $x, y \in M$ vale $d(x, y) = d(y, x)$.
3. Desigualdade triangular: para todos $x, y, z \in M$ vale $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.
4. Para todo $x \in M$ vale $d(x, x) = 0$.

é dita ser uma *pseudométrica* em M. O par (M, d) é dito ser um *espaço pseudométrico*.

Como já provamos no Comentário da página 1306, as condições de positividade e simetria seguem da desigualdade triangular e da condição que $d(x, x) = 0$ para todo $x \in M$. Assim, para definir-se a noção de pseudométrica basta listar

1. Desigualdade triangular: para todos $x, y, z \in M$ vale $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

2. Para todo $x \in M$ vale $d(x, x) = 0$.

Os outros itens são listados apenas por ênfase.

O seguinte fato é evidente: toda métrica é uma pseudométrica e uma pseudométrica d é uma métrica somente se $d(x, y) = 0$ implicar $x = y$. Assim, em uma pseudométrica pode haver pontos *distintos* x e y tais que $d(x, y) = 0$.

Passemos agora a discutir uma outra propriedade de pseudométricas de particular importância na teoria dos chamados espaços localmente convexos. Seja $d : M \times M \to \mathbb{R}$ uma pseudométrica. Então, $f : M \times M \to \mathbb{R}$ definida por

$$D(a, b) = \frac{d(a, b)}{1 + d(a, b)} \tag{24.22}$$

é também uma pseudométrica.

Em primeiro lugar, é claro que $D(a, a) = 0$ para todo $a \in M$. Como a simetria de D é também óbvia, precisamos apenas mostrar que D satisfaz a desigualdade triangular. Para demonstrar isso, notemos em primeiro lugar que a função

$$\ell(x) := \frac{x}{1 + x}$$

é crescente para $x \geq 0$. De fato, se $y > x \geq 0$, então

$$\ell(y) - \ell(x) = \frac{y - x}{(1 + y)(1 + x)} > 0 .$$

Assim, como pela desigualdade triangular para d vale que $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$, teremos

$$\begin{aligned} D(a, b) &= \frac{d(a, b)}{1 + d(a, b)} \\ &\leq \frac{d(a, c) + d(c, b)}{1 + d(a, c) + d(c, b)} \\ &= \frac{d(a, c)}{1 + d(a, c) + d(c, b)} + \frac{d(c, b)}{1 + d(a, c) + d(c, b)} \\ &\leq \frac{d(a, c)}{1 + d(a, c)} + \frac{d(c, b)}{1 + d(c, b)} \\ &= D(a, c) + D(c, b) , \end{aligned} \tag{24.23}$$

provando a desigualdade triangular para D. Acima, na passagem da terceira para a quarta linha usamos os fatos óbvios que $1 + d(a, c) + d(c, b) \geq 1 + d(a, c)$ e $1 + d(a, c) + d(c, b) \geq 1 + d(c, b)$, pois d é positiva.

Uma consequência disso é que se d é uma métrica então D também o é. Para um argumento alternativo vide Exercício E. 24.13, página 1310.

E. 24.30 *Exercício*. Por quê? ✠

• **Famílias de Pseudométricas**

Em muitas situações são definidas em um conjunto M não uma mas toda uma família de pseudométricas: $\mathfrak{D} = \{d_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$, Λ sendo um conjunto arbitrário não vazio de índices, onde todas as d_α são pseudométricas.

Diz-se que uma família de pseudométricas: $\mathfrak{D} = \{d_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ *separa pontos* se para quaisquer dois pontos distintos $x, y \in M$ existir um $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $d_{\alpha_0}(x, y) \neq 0$.

Tem-se a seguinte proposição, que mostra que a toda família contável de pseudométricas que separa pontos vem naturalmente associada uma *métrica*:

Proposição 24.9 *Seja M um conjunto e seja $\mathfrak{D} = \{d_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ uma família contável de pseudométricas em M que separa pontos. Então, $D : M \times M \to \mathbb{R}$ definida por*

$$D(x,\ y) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x,\ y)}{1 + d_n(x,\ y)}$$

é uma métrica em M. □

Prova. Em primeiro lugar notemos que a soma infinita do lado direito é bem definida pois

$$0 \ \leq \ \frac{d_n(x,\ y)}{1 + d_n(x,\ y)} \ \leq \ 1$$

e o fator 2^{-n} garante a convergência. Que D é uma pseudométrica é evidente pelo fato que cada termo $d_n(x,\ y)/(1 + d_n(x,\ y))$ o é, como vimos acima. Resta mostrar que $D(x,\ y) = 0$ implica $x = y$. Como a soma contém apenas termos positivos, $D(x,\ y) = 0$ só é possível se $d_n(x,\ y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathfrak{D}$ separa pontos, se tivéssemos $x \neq y$ haveria pelo menos um m para o qual $d_m(x,\ y) \neq 0$. Como tal não é o caso, tem-se forçosamente $x = y$. ■

• **Bolas em espaços pseudométricos**

Em espaços pseudométricos podemos introduzir as noções de bola aberta e fechada de forma inteiramente análoga ao caso de espaços métricos. Seja X um espaço métrico com uma pseusométrica d e seja $x \in X$. Define-se a *bola aberta* de raio $r > 0$ centrada em x como sendo o conjunto

$$B(x,\ r) \ = \ \big\{y \in X,\ \text{ tal que } d(x,\ y) \ < \ r\big\} \ .$$

O conjunto

$$\overline{B(x,\ r)} \ = \ \big\{y \in X,\ \text{ tal que } d(x,\ y) \ \leq \ r\big\}$$

define a *bola fechada* de raio $r > 0$ centrada em x.

24.3 A Noção de Topologia de Espaços Métricos ou Pseudométricos

Vamos agora discutir alguns fatos relevantes sobre topologias de espaços métricos ou pseudométricos. Essa discussão é estendida e complementada na Seção 27.3.1, página 1440, onde mais instrumentos estarão à nossa disposição.

As definições e resultados que apresentamos aqui valem em espaços métricos ou pseudométricos, ou seja, dotados de uma métrica ou de uma pseudométrica. Como uma métrica é também uma pseudométrica, podemos tratar do caso pseudométricas e obter máxima generalidade.

• **Conjuntos Abertos em Espaços (Pseudo)Métricos**

Um espaço pseudométrico possui, naturalmente, muitos subconjuntos. Há, porém, uma classe de subconjuntos que têm uma importância destacada, os chamados conjuntos abertos. Seja X um conjunto dotado de uma pseudométrica d. Um subconjunto não vazio A de X é dito ser um *conjunto d-aberto*, ou simplesmente um *conjunto aberto* em relação à pseudométrica d, se possuir a seguinte propriedade: para cada $x \in A$ existe um número real $\delta(x) > 0$ (eventualmente dependente de x) tal que todo $x' \in X$ satisfazendo $d(x,\ x') < \delta(x)$ é também um elemento de A.

Uma outra forma equivalente de refrazear essa definição é dizer que um subconjunto A de X é dito ser um *conjunto d-aberto*, ou simplesmente um *conjunto aberto* em relação à pseudométrica d, se para cada $x \in A$ existe um número real $\delta(x) > 0$ (eventualmente dependente de x) tal que $B\big(x,\ \delta(x)\big) \subset A$. Aqui, $B\big(x,\ \delta(x)\big)$ é a bola aberta de raio $\delta(x)$ centrada em x.

Por essa definição o conjunto X é, ele mesmo, um conjunto aberto em relação à métrica d. O conjunto vazio $\emptyset$ é honorificamente declarado um conjunto aberto em relação à métrica d.

A coleção de todos os conjuntos abertos em X em relação à pseudométrica d é dito ser uma *topologia (pseudo)métrica* em X, ou simplesmente uma *topologia*[26] em X. Esse é o conteúdo da proposição que segue.

Proposição 24.10 *Seja X um conjunto não vazio e d uma pseudométrica em X.*

I. *Se A e B são abertos em X em relação à pseudométrica d então $A \cap B$ também o é.*

II. *Seja I um conjunto arbitrário de índices e $\{A_\lambda \subset X,\ \lambda \in I\}$ uma coleção de subconjuntos de X abertos em relação à pseudométrica d. Então $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$ é também um conjunto aberto em relação pseudométrica d.* □

Comentário. As afirmativas contidas nessa proposição são importantes pois inspiram a definição do conceito de espaço topológico. Espaços topológicos serão estudados com mais detalhe e generalidade no Capítulo 27, página 1419. ♣

Prova da Proposição 24.10. Prova de **I**. Se $A \cap B = \emptyset$ a afirmação está provada, pois $\emptyset$ é declarado aberto em relação a d. Seja então $A \cap B \neq \emptyset$ e seja $x \in A \cap B$. Como $x \in A$, existe $\delta_A(x) > 0$ tal que $B\big(x,\ \delta_A(x)\big) \subset A$. Analogamente, como $x \in B$, existe $\delta_B(x) > 0$ tal que $B\big(x,\ \delta_B(x)\big) \subset B$. Assim, se $\delta(x) := \min\big\{\delta_A(x),\ \delta_B(x)\big\}$ valerá $B\big(x,\ \delta(x)\big) \subset B\big(x,\ \delta_A(x)\big) \subset A$ e $B\big(x,\ \delta(x)\big) \subset B\big(x,\ \delta_B(x)\big) \subset B$ e, portanto, $B\big(x,\ \delta(x)\big) \subset A \cap B$. Isso mostra que $A \cap B$ é aberto em relação à pseudométrica d.

Prova de **II**. Seja $\{A_\lambda \subset X,\ \lambda \in I\}$ uma coleção de subconjuntos de X, todos abertos em relação à pseudométrica d. Se todos forem vazios, não há o que se demonstrar. Vamos, então supor que ao menos um seja não vazio e considere-se $x \in \displaystyle\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$. Pela definição de união de conjuntos, existe ao menos um índice $\lambda_0 \in I$ tal que $x \in A_{\lambda_0}$. Como A_{λ_0} é aberto em relação à pseudométrica d, existe $\delta(x) > 0$ tal que $B\big(x,\ \delta(x)\big) \subset A_{\lambda_0}$. Isso, porém, garante que $B\big(x,\ \delta(x)\big) \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$, provando que $\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$ é aberto em relação à pseudométrica d. ■

• **Alguns exercícios simples**

E. 24.31 *Exercício*. Prove que toda bola aberta (fechada) em um espaço pseudométrico é um conjunto aberto (fechado) na topologia métrica desse espaço. ✠

E. 24.32 *Exercício*. Mostre explicitamente que, para $a,\ b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, o conjunto $(a,\ b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\}$ é um conjunto aberto em relação à métrica $d(x,\ y) = |x - y|$. ✠

E. 24.33 *Exercício*. Mostre explicitamente que, para $a,\ b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, o conjunto $[a,\ b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x < b\}$ **não** é um conjunto aberto em relação à métrica $d(x,\ y) = |x - y|$. ✠

E. 24.34 *Exercício*. Mostre explicitamente que, para $r > 0$ a bola de raio r em $\mathbb{R}^3$ centrada na origem em relação à métrica Euclidiana, $B_r := \{x \in \mathbb{R}^3 |\ d_E(x, 0) < r\}$, é um conjunto aberto na topologia definida por essa métrica. ✠

E. 24.35 *Exercício*. Seja X é um conjunto não vazio. Mostre que todo subconjunto não vazio de X é aberto em relação à métrica trivial, definida em (24.6), página 1308. ✠

E. 24.36 *Exercício*. Se d_1 e d_2 são (pseudo)métricas em um conjunto X, mostre que para quaisquer $a,\ b \geq 0$, ambos não simultaneamente nulos, a expressão $ad_1(x,\ y) + bd_2(x,\ y)$, com $x,\ y \in X$, também define uma (pseudo)métrica em X. ✠

• **Métricas equivalentes. Métricas que geram a mesma topologia**

Seja M um conjunto e sejam d_1 e d_2 duas métricas em M. As métricas d_1 e d_2 são ditas *equivalentes*, em símbolos

[26] A definição de topologia foi introduzida na Seção 1.2.7, página 107 e será mais elaborada no Capítulo 27, página 1419.

$d_1 \sim d_2$, se existirem dois números c_1 e c_2 com $0 < c_1 \leq c_2$ tais que para todos $x,\ y \in M$ valha

$$c_1 d_1(x,\ y)\ \leq\ d_2(x,\ y)\ \leq\ c_2 d_1(x,\ y)\ .$$

E. 24.37 *Exercício*. Mostre que a relação $d_1 \sim d_2$ define uma relação de equivalência no conjunto de todas as métricas em M. ✠

E. 24.38 *Exercício*. Sejam d_1 e d_2 duas métricas equivalentes em M. Mostre, que todo conjunto d_1-aberto de M é d_2-aberto e vice-versa. Isso significa que se d_1 e d_2 são equivalentes, ambas geram a mesma topologia. ✠

Os exercícios que seguem e a Proposição 24.11, adiante, mostram que a recíproca não é geralmente verdadeira: métricas que geram a mesma topologia não são necessariamente equivalentes (no sentido da definição acima).

E. 24.39 *Exercício*. Seja M um espaço métrico com uma métrica $d(x,\ y)$, para $x,\ y \in M$. Prove que

$$d_0(x,\ y)\ :=\ \frac{d(x,\ y)}{1 + d(x,\ y)} \tag{24.24}$$

também define uma métrica em M. Sugestão: para demonstrar a desigualdade triangular será útil provar antes que a função

$$\ell(t)\ =\ \frac{t}{1+t}$$

é crescente na região $t \geq 0$. Outra sugestão: dê uma olhada na página 1325 ou no Exercício E. 24.13, página 1310. ✠

Para a métrica trivial $d(x,\ y) = 0$ se $x = y$ e $d(x,\ y) = 1$ se $x \neq y$, a correspondente métrica d_0 é dada por $d_0(x,\ y) = 0$ se $x = y$ e $d_0(x,\ y) = 1/2$ se $x \neq y$.

E. 24.40 *Exercício*. Mostre que as métricas d e d_0 do Exercício E. 24.39 só são equivalentes (no sentido da definição acima) se d for limitada, ou seja, se existir $D > 0$ tal que $d(x,\ y) \leq D$ para todos $x,\ y \in M$. Sugestão: tem-se que $l(x) \leq x$ para todo $x \geq 0$, mas mostre que não existe nenhuma constante $c > 0$ tal que $cx \leq l(x)$ para todo $x \geq 0$. Todavia, uma tal constante pode ser achada se nos limitarmos a $x \in [0,\ D]$. ✠

Mesmo não sendo equivalentes, as métricas d e d_0 do Exercício E. 24.39 definem a mesma topologia. Para futura referência, coloquemos essa afirmação na forma de uma proposição:

Proposição 24.11 *Seja M um conjunto não vazio e d uma métrica em M. Seja $d_0(x,\ y) := d(x,\ y)/\big(1 + d(x,\ y)\big)$ com $x,\ y \in M$. Como vimos no Exercício E. 24.39, d_0 também define uma métrica em M. Então, d e d_0 definem a mesma topologia, ou seja, um conjunto é d-aberto se e somente se for d_0-aberto.* □

Prova. Considere $l : [0,\ \infty) \to [0,\ 1)$ definida por $l(t) := \frac{t}{1+t}$. Essa função é contínua e estritamente crescente, pois $l'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$, e sua inversa $l^{-1} : [0,\ 1) \to [0,\ \infty)$ é dada por $l^{-1}(s) = \frac{s}{1-s}$, igualmente contínua e estritamente crescente, com $\big(l^{-1}\big)'(s) = \frac{1}{(1-s)^2} > 0$.

Seja $B^d(x,\ r)$ a bola de raio $r > 0$ centrada em $x \in M$ em relação à métrica d. Seja também $B^{d_0}(x,\ r)$ a bola de raio $0 < r < 1$ centrada em $x \in M$ em relação à métrica d_0 (como d_0 assume valores somente no intervalo $[0,\ 1)$ só faz sentido aqui tomarmos $0 < r < 1$).

Como $d_0(x,\ y) = l\big(d(x,\ y)\big)$ e $d(x,\ y) = l^{-1}\big(d_0(x,\ y)\big)$, segue que, para $0 < r < 1$,

$$B^{d_0}(x,\ r)\ :=\ \big\{y \in M \,|\, d_0(x,\ y) < r\big\}\ =\ \big\{y \in M \,|\, l\big(d(x,\ y)\big) < r\big\}\ =\ \big\{y \in M \,|\, d(x,\ y) < l^{-1}(r)\big\}\ =\ B^d\big(x,\ l^{-1}(r)\big) \tag{24.25}$$

e, analogamente, para $r > 0$,

$$B^d(x,\ r)\ :=\ \big\{y \in M \,|\, d(x,\ y) < r\big\}\ =\ \big\{y \in M \,|\, l^{-1}\big(d_0(x,\ y)\big) < r\big\}\ =\ \big\{y \in M \,|\, d_0(x,\ y) < l(r)\big\}\ =\ B^{d_0}\big(x,\ l(r)\big)\ . \tag{24.26}$$

Assim, se $A \subset M$ é d_0-aberto, existe para cada $x \in A$ um número $0 < r_x < 1$ tal que $B^{d_0}(x,\ r_x) \subset A$, o que implica, por (24.25), que $B^d\big(x,\ l^{-1}(r_x)\big) \subset A$, estabelecendo que A é também d-aberto. Reciprocamente, se $A \subset M$ é d-aberto,

existe para cada $x \in A$ um número $r_x > 0$ tal que $B^d(x,\ r_x) \subset A$, o que implica, por (24.26), que $B^{d_0}\big(x,\ l(r_x)\big) \subset A$, estabelecendo que A é também d_0-aberto.

Com isso, provamos que $A \subset M$ é d-aberto se e somente se for d_0-aberto, o que estabelece a identidade duas topologias associadas a d e a d_0. ■

• Conjuntos fechados em espaços métricos

Paralelamente à noção de conjunto aberto em um espaço métrico existe a noção de *conjunto fechado em um espaço métrico*: se M é dotado de uma métrica d, um conjunto $F \subset M$ é dito ser *fechado* em relação à métrica d se seu conjunto complementar $F^c = M \setminus F$ for aberto em relação à métrica d.

A noção de conjunto fechado é tão relevante quanto a de conjunto aberto e muitas propriedades de espaços métricos podem ser expressas em termos de propriedades de conjuntos fechados. A proposição que segue apresenta uma caracterização importante da noção de conjuntos fechados em espaços métricos.

Proposição 24.12 *Seja M um conjunto não vazio dotado de uma métrica d. Então, $F \subset M$ é fechado se e somente se toda sequência de elementos de F que for convergente em M convergir a um elemento de F.* □

A demonstração dessa proposição será apresentada na Seção 27.3.1, página 1440 (na forma do Corolário 27.2, página 1441). Para o caso de espaços métricos completos vale o seguinte afirmação importante:

Proposição 24.13 *Se M é um espaço métrico completo em relação a uma métrica d, então $F \subset M$ é fechado na topologia induzida por essa métrica se e somente se F for igualmente completo em relação à métrica d.* □

Essa proposição será demonstrada à página 1441 (vide Proposição 27.12, página 1441) e será usada, por exemplo, na discussão do Capítulo 25, página 1369.

Topologias, e não apenas topologias relacionadas a espaços métricos, serão estudadas com mais profundidade no Capítulo 27, página 1419.

• A noção de conjunto limitado em um espaço métrico (e uma advertência)

Seja $(M,\ d)$ um espaço métrico. Um conjunto $A \subset M$ é dito ser um *conjunto limitado* em relação à métrica d, ou um *conjunto d-limitado*, se $\mathrm{diam}_d(A) := \sup\{d(x,\ y),\ x,\ y \in A\} < \infty$. Por razões óbvias, $\mathrm{diam}_d(A)$ é dito ser o *diâmetro* de A em relação à metrica d.

Essa noção será ainda desenvolvida em diversas direções (vide, por exemplo, a Proposição 32.21, página 1620), mas por ora cabe a seguinte

Advertência. Em um espaço métrico, a noção de limitação de um conjunto **não** é uma noção topológica, pois pode acontecer de um conjunto ser limitado em relação a uma métrica, mas não em relação a outra, mesmo quando ambas geram a mesma topologia métrica!

Um exemplo claro é o seguinte: dada uma métrica d em M: todo o conjunto A é limitado na métrica d_0 definida em (24.24), pois sempre vale $d_0(x,\ y) < 1$ para todo $x,\ y \in M$, mesmo que A não seja d-limitado. Tomemos, a título de ilustração, $M = \mathbb{R}$ e nele a métrica usual $d(x,\ y) = |y - x|$. O conjunto $[0,\ \infty)$ não é d-limitado, mas é d_0-limitado, tendo nessa métrica um diâmetro $\mathrm{diam}_{d_0}\big([0,\ \infty)\big) = 1$.

• Completeza de espaços métricos e sua topologia. Uma advertência

Vamos neste ponto retornar à nossa discussão sobre a topologia de espaços métricos e discutir sua relação com a noção de completeza. A verdade é que os dois conceitos não são totalmente relacionados. O fato de um espaço métrico ser completo não é diretamente relacionado à topologia adotada mas sim à métrica usada. Em outras palavras, completeza **não** é uma propriedade topológica!

Para ver isso trataremos de exibir um exemplo de um espaço M dotado de duas métricas que geram as mesmas topologias, sendo M completo em relação à primeira métrica mas não em relação à segunda métrica. No exemplo (extraído de [98]) em questão $M = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 1\}$. Em M adotaremos duas métricas: $d_1(x,\ y) = |y - x|$ e

$d_2(x,\ y) = \left|\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\right|$.

E. 24.41 *Exercício*. Mostre que d_2 é de fato uma métrica em M. ✣

O fato é que d_1 e d_2 geram a mesma topologia em M. Para ver isso notemos que $d_2(x,\ y) = d_1(x,\ y)/(xy) \leq d_1(x,\ y)$ e, portanto, para todo $x \in M$ e todo $r > 0$ vale $B_{d_1}(x,\ r) \subset B_{d_2}(x,\ r)$. Se A é aberto em τ_{d_2} (a topologia associada à métrica d_2), então para todo $x \in A$ há uma bola $B_{d_2}\big(x,\ r(x,\ A)\big)$ inteiramente contida em A e, pelo que acabamos de ver, há também uma bola $B_{d_1}\big(x,\ r(x,\ A)\big)$ inteiramente contida em A. Daqui se conclui que todo aberto de τ_{d_2} é também aberto de τ_{d_1}. Logo $\tau_{d_2} \subset \tau_{d_1}$. Igualmente é claro que para todo y da bola aberta $B_{d_1}(x,\ r)$ de τ_{d_1} podemos achar um r' suficientemente pequeno tal que $B_{d_2}(y,\ r') \subset B_{d_1}(x,\ r)$ (como?). Como as bolas abertas B_{d_1} geram τ_{d_1} isso implica $\tau_{d_1} \subset \tau_{d_2}$, provando a igualdade das duas topologias.

O fato que queremos ressaltar é que M é completo em relação a d_1 mas não em relação a d_2. Que M é completo em relação a d_1 pode ser provado diretamente ou pelo seguinte argumento topológico: M é completo em relação a d_1 pois M é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ na topologia usual $\tau_{\mathbb{R}}$, induzida por d_1, e $\mathbb{R}$ é completo em relação a d_1 (vide Proposição 24.13, página 1329, e a discussão à página 1441, em particular a Proposição 27.12).

Para ver que M **não** é completo em relação a d_2 observe que a sequência $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, é de Cauchy em relação a d_2 mas não há nenhum elemento em M ao qual ela converge. Assim, M é completo em relação a d_1, mas não em relação a d_2, embora ambas as métricas gerem a mesma topologia!

As considerações acima dizem-nos que **completeza não é uma noção de natureza topológica**. Uma vez posta essa advertência, cabe notar, porém, que espaços métricos compactos são sempre completos em quaisquer que sejam as métricas que geram a topologia. Vide Teorema 32.11, item I, página 1622.

Nota. Não se pode argumentar, como fizemos com a métrica d_1, que M é completo em d_2 por ser um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ na topologia induzida em $\mathbb{R}$ por d_2, pois tal topologia não existe! d_2 é uma métrica em M, mas não em $\mathbb{R}$, ao contrário do que ocorre com d_1. Poder-se-ia, então, argumentar que d_2 é uma métrica em $X = (0, \infty)$ (de fato é, verifique!) e que M é um subconjunto fechado de $X = (0, \infty)$ nessa topologia (de fato é, verifique!). Sucede, porém, que $X = (0, \infty)$ não é completo em relação a d_2, pelo mesmo exemplo acima, e isso viola uma das condições da Proposição 24.13 da página 1329 (ou equivalentemente, da Proposição 27.12, página 1441). ♣

E. 24.42 *Exercício*. Um outro exemplo (de [492]) de métricas que geram uma mesma topologia, mas que diferem no que concerne à completeza é o seguinte. Considere $M = \mathbb{R}$. Mostre que $d_s(x,\ y) := \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$ é uma métrica em $\mathbb{R}$. Mostre que essa métrica gera a mesma topologia que a métrica usual de $\mathbb{R}$. Mostre que $a_n = n$ é uma sequência de Cauchy na métrica d_s mas que não converge em $\mathbb{R}$ nessa métrica. ✣

E. 24.43 *Exercício*. O conjunto $\mathbb{R}$ é fechado na topologia induzida pela métrica d_s, acima. Por que então os fatos descritos no Exercício E. 24.42 não estão em contradição com a Proposição 24.13, página 1329? ✣

24.4 Espaços de Funções Limitadas e Completeza

Nesta seção apresentaremos alguns resultados importantes sobre a completeza de certos espaços de funções. O Corolário 24.2, adiante, generaliza a Proposição 24.8, da página 1317. Os resultados apresentados abaixo serão utilizados quando discutirmos certos exemplos espaços de Banach e em outros lugares deste texto.

• **Funções limitadas sobre um espaço métrico**

Seja X um conjunto não vazio e M um conjunto, também não vazio, dotado de uma métrica d. Dizemos que uma função $f : X \to M$ é uma *função d-limitada* (ou simplesmente uma *função limitada* quando a métrica d estiver implícita) se existir um ponto de referência $y \in M$ e uma constante $K \geq 0$ tais que $d\big(f(x),\ y\big) \leq K$ para todo $x \in X$.

Note que se f é d-limitada segundo essa definição, então para qualquer $z \in M$ valerá, pela desigualdade triangular, $d\big(f(x),\ z\big) \leq d\big(f(x),\ y\big) + d(y,\ z) \leq K + d(y,\ z)$. Assim, a definição de função limitada dada acima independe do ponto de referência $y \in M$ tomado, podendo este ser substituído por qualquer outro, mudando-se eventualmente a constante K adotada.

Podemos, portanto, alternativamente definir a noção de função d-limitada da seguinte forma: dizemos que uma função $f : X \to M$ é uma *função limitada*, ou uma *função d-limitada*, se para cada $y \in M$ existir uma constante $K_y \geq 0$ (eventualmente dependente de y) tal que $d\big(f(x),\ y\big) \leq K_y$ para todo $x \in X$.

Vale, equivalentemente, dizer que $f : X \to M$ é d-limitada se para algum $y \in M$ valer $\sup\Big\{d\big(f(x),\ y\big),\ x \in X\Big\} < \infty$.

A seguinte proposição oferece uma propriedade que pode ser tomada como uma definição alternativa da noção de função limitada:

Proposição 24.14 *Seja X um conjunto não vazio e M um conjunto, também não vazio, dotado de uma métrica d. Uma função $f : X \to M$ é uma função d-limitada no sentido da definição acima se e somente se existir uma constante $L \geq 0$ tal que $d\big(f(x),\ f(x')\big) \leq L$ para todos x e $x' \in X$.* □

Prova. Suponhamos que f seja d-limitada segundo a definição de acima. Sejam x e $x' \in X$, arbitrários. Teremos, pela desigualdade triangular $d\big(f(x),\ f(x')\big) \leq d\big(f(x),\ y\big) + d\big(y,\ f(x')\big) \leq 2K_y$ e podemos tomar $L = 2K_y$.

Suponhamos agora que exista uma constante $L > 0$ tal que $d\big(f(x),\ f(x')\big) < L$ para todos x e $x' \in X$. Fixemos x' e tomemos $y = f(x')$ como ponto de referência. Teremos que $d\big(f(x),\ y\big) \leq L$ para todo $x \in X$, provando que f é d-limitada segundo a definição acima. ■

O conjunto de todas as funções limitadas de X em M é denotado por $\mathcal{B}(X,\ M)$ (ou por $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$ quando for necessário especificar a métrica em M em relação à qual a noção de limitação é considerada). O conjunto $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$ é ele mesmo um espaço métrico em relação à métrica d_∞ definida por

$$d_\infty(f,\ g) := \sup\Big\{d\big(f(x),\ g(x)\big),\ x \in X\Big\} \tag{24.27}$$

para todas $f,\ g \in \mathcal{B}(X,\ M,\ d)$. Que tal realmente define uma métrica pode ser facilmente demonstrado. Em primeiro lugar, é claro que $d_\infty(f,\ g) \geq 0$ e que $d_\infty(f,\ g) = d_\infty(g,\ f)$ para todos $f,\ g \in \mathcal{B}(X,\ M,\ d)$. Em segundo lugar, se $d_\infty(f,\ g) = 0$ para algum par $f,\ g \in \mathcal{B}(X,\ M,\ d)$ então, segundo a definição, $d(f(x),\ g(x)) = 0$ para todo $x \in X$, o que implica $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$, ou seja, $f = g$. Em terceiro lugar, para $f,\ g,\ h \in \mathcal{B}(X,\ M,\ d)$ vale (pela desigualdade triangular para d) $d(f(x),\ g(x)) \leq d(f(x),\ h(x)) + d(h(x),\ g(x))$ para todo $x \in X$. Logo,

$$\sup_{x\in X}\Big\{d\big(f(x),\ g(x)\big)\Big\} \ \leq\ \sup_{x\in X}\Big\{d\big(f(x),\ h(x)\big)\Big\} + \sup_{x\in X}\Big\{d\big(h(x),\ g(x)\big)\Big\}\ ,$$

provando a desigualdade triangular $d_\infty(f,\ g) \leq d_\infty(f,\ h) + d_\infty(h,\ g)$ para todos $f,\ g,\ h \in \mathcal{B}(X,\ M,\ d)$.

A métrica d_∞ é frequentemente denominada *métrica uniforme*.

• **Completeza das funções limitadas sobre um espaço métrico completo**

O seguinte teorema sobre o conjunto de funções limitadas $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$, válido quando M é completo, é fundamental.

Teorema 24.2 *Sejam X e M conjuntos não vazio, sendo M dotado de uma métrica d e completo nessa métrica. Então, $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$ é completo na métrica uniforme d_∞ definida por $d_\infty(f,\ g) := \sup\Big\{d\big(f(x),\ g(x)\big),\ x \in X\Big\}$ para todas $f,\ g \in \mathcal{B}(X,\ M,\ d)$.* □

Prova. Seja f_n uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$ em relação à métrica d_∞. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe um inteiro positivo $N(\epsilon)$ tal que $d_\infty(f_n,\ f_m) < \epsilon$ sempre que m e n sejam maiores que $N(\epsilon)$, ou seja, $\sup\Big\{d(f_n(x),\ f_m(x)),\ x \in X\Big\} < \epsilon$, sempre que m e n sejam maiores que $N(\epsilon)$. Isso significa que para cada $x \in X$ tem-se $d\big(f_n(x),\ f_m(x)\big) < \epsilon$ sempre que m e n sejam maiores que $N(\epsilon)$. Assim, para cada $x \in X$ fixo, a sequência $f_n(x)$ de elementos de M é uma sequência de Cauchy na métrica d. Como M é completo, segue que cada sequência $f_n(x)$ é convergente em M. Vamos denominar por $f(x)$ seu limite.

Seja f a função $X \ni x \mapsto f(x)$. Essa função f é um forte candidato a ser o limite da sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na métrica d_∞. Colocamo-nos, então, as seguintes questões: **1.** Será a função f também um elemento de $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$, ou seja, uma função d-limitada? **2.** Se a resposta à pergunta anterior for positiva, será que a sequência f_m converge à função f na

métrica d_∞? Se a resposta a essas perguntas for positiva (e veremos que é), estará provado que $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$ é completo na métrica d_∞, como queremos provar.

Precisamos agora mostrar que a sequência $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ aproxima essa função f na métrica d_∞.

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Vamos definir uma sequência crescente de números inteiros e positivos $N_k(\epsilon)$, $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ com $N_{k+1}(\epsilon) > N_k(\epsilon)$, da seguinte forma: $N_k(\epsilon)$ é tal que $d_\infty(f_m,\ f_n) < \epsilon/2^k$ para todos $m,\ n > N_k(\epsilon)$. Note que uma tal sequência $N_k(\epsilon)$ sempre pode ser encontrada pois, por hipótese, f_m é uma sequência de Cauchy em d_∞. Vamos agora escolher uma sequência crescente de índices $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} < n_k < \cdots$ tais que $n_k > N_k(\epsilon)$. A essa sequência está associada a subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Note que, pela definição, tem-se

$$d_\infty(f_{n_{l+1}},\ f_{n_l}) \ < \ \frac{\epsilon}{2^l}\ , \tag{24.28}$$

pois n_l e n_{l+1} são maiores que $N_l(\epsilon)$. Com essas definições, teremos que para todo $k > 1$ vale, por uso repetido da desigualdade triangular

$$d\big(f_{n_k}(x),\ f_{n_1}(x)\big) \ \leq \ \sum_{l=1}^{k-1} d\big(f_{n_{l+1}}(x),\ f_{n_l}(x)\big) \ \overset{(24.28)}{<} \ \sum_{l=1}^{k-1}\frac{\epsilon}{2^l} \ = \ \epsilon\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)\ . \tag{24.29}$$

para cada $x \in X$ (justifique!).

De (24.29), concluímos que para cada $x \in X$,

$$\begin{aligned} d\big(f(x),\ f_{n_1}(x)\big) \ &\leq \ d\big(f(x),\ f_{n_k}(x)\big) + d\big(f_{n_k}(x),\ f_{n_1}(x)\big) \\ &< \ d\big(f(x),\ f_{n_k}(x)\big) + \epsilon\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)\ , \end{aligned}$$

ou seja,

$$d\big(f(x),\ f_{n_1}(x)\big) \ < \ d\big(f(x),\ f_{n_k}(x)\big) + \epsilon\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)\ .$$

O lado esquerdo desta expressão independe de k. Tomando-se o limite $k \to \infty$ e lembrando que a sequência $f_{n_k}(x)$ converge a $f(x)$ em M, concluímos que

$$d\big(f(x),\ f_{n_1}(x)\big) \ \leq \ \epsilon\ , \tag{24.30}$$

para todo $x \in M$.

Se $y \in M$, vale

$$d\big(f(x),\ y\big) \ \leq \ d\big(f(x),\ f_{n_1}(x)\big) + d\big(f_{n_1}(x),\ y\big) \ \overset{(24.30)}{\leq} \ \epsilon + d\big(f_{n_1}(x),\ y\big)\ .$$

Como f_{n_1} é d-limitado, existe $K \geq 0$ tal que $d\big(f_{n_1}(x),\ y\big) \leq K$ para todo $x \in X$. Logo, $d\big(f(x),\ y\big) \leq K + \epsilon$ para todo $x \in X$, provando que $f \in \mathcal{B}(X,\ M,\ d)$.

Além disso, como (24.30) vale para todo x, segue que

$$d_\infty(f,\ f_{n_1}) \ = \ \sup\big\{d\big(f(x),\ f_{n_1}(x)\big),\ x \in X\big\} \ \leq \ \epsilon\ . \tag{24.31}$$

Isso demonstra que a sequência f_n converge a f em relação à métrica d, completando a demonstração. ■

• **Funções contínuas e limitadas sobre espaços métricos**

A partir deste ponto utilizaremos noções sobre continuidade de funções em espaços topológicos gerais (vide Seção 30.5, página 1515) e sobre conjuntos compactos (vide Seção 32.3, página 1610).

Se X e M são dois conjuntos não vazio dotados topologias τ_X e τ_M, respectivamente, denotamos por $C(X,\ M)$ o conjunto de todas as funções contínuas de X em M em relação àquelas topologias (vide Seção 30.5, página 1515). Estamos interessados no caso em que M, é dotado de uma métrica d e τ_M é igual a τ_d, a topologia gerada em M pela métrica d.

Denotamos $C(X,\ M) \cap \mathcal{B}(X,\ M,\ d)$, o conjunto de todas as funções contínuas e d-limitadas de X em M, por $C_b(X,\ M)$. Como vimos acima, $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$ é um espaço métrico com a métrica uniforme d_∞ e, como tal, é um espaço topológico. Denotamos por τ_{d_∞} a topologia métrica induzida por d_∞ em $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$.

Teorema 24.3 *Sejam X e M conjuntos não vazio com X dotado de uma topologia τ_X e M dotado de uma métrica d. Suponhamos que M seja completo na métrica d. Então, $C_b(X,\ M)$, o conjunto de todas as funções contínuas e limitadas de X em M, é um subconjunto τ_{d_∞}-fechado de $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$ e completo na métrica d_∞.* □

Prova. Sob as hipóteses, sabemos que $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$ é completo (Teorema 24.2, página 1331). Pelo Corolário 27.2, página 1441, é suficiente provarmos que sequências de elementos de $C_b(X,\ M)$ convergentes em $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$ na métrica d_∞ convergem a uma função de $C_b(X,\ M)$. Portanto, uma sequência convergente de $C_b(X,\ M)$ convergirá a uma função de $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$, restando apenas provar que o limite é uma função contínua.

Supomos então que f_n seja uma sequência de $C_b(X,\ M)$ convergente em $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$ na métrica d_∞ e que $f \in \mathcal{B}(X,\ M,\ d)$ seja seu limite. Desejamos provar que f é também contínua.

Seja $B \subset M$ um conjunto d-aberto e seja $A \equiv f^{-1}(B) \subset X$ sua pré-imagem em X. Desejamos provar que A é um conjunto τ_X-aberto (vide Seção 30.5, página 1515). A estratégia da demonstração é provarmos que para cada $x \in A$ existe um conjunto τ_X-aberto A_x inteiramente contido em A e que contém x. Isso implica que $A = \cup_{x\in X} A_x$. Como o lado direito é uma união de τ_X-abertos, provou-se que A é um τ_X-aberto.

Os conjuntos A_x serão da forma $A_x = f_{n_x}^{-1}(B_x)$, onde n_x é algum inteiro (eventualmente dependente de x) e $B_x \subset M$, satisfazendo:

i. B_x é um d-aberto em M (o que garante que $A_x = f_{n_x}^{-1}(B_x)$ é um τ_X-aberto, pois as funções f_n são contínuas),

ii. $f_{n_x}(x) \in B_x$ (o que garante que $x \in f_{n_x}^{-1}(B_x) = A_x$) e

iii. $f_{n_x}^{-1}(B_x) \subset A$ (o que garante $A_x = f_{n_x}^{-1}(B_x) \subset A$).

Toda a demonstração resume-se agora em encontrar um conjunto B_x com as propriedades acima para cada $x \in A = f^{-1}(B)$. Seja então x um elemento genérico de A. Como B é aberto, existe uma bola aberta centrada em $f(x)$ de um certo raio $r_x > 0$ que está inteiramente contida em B (vide definição de conjuntos abertos em espaços métricos à página 1326), $B\big(f(x),\ r_x\big) \subset B$.

Afirmamos que $B_x := B\big(f(x),\ r_x/2\big)$ tem as propriedades desejadas. Naturalmente $B_x \subset B\big(f(x),\ r_x\big) \subset B$, sendo que B_x é d-aberto e contém $f(x)$. Agora, se escolhermos n_x grande o suficiente teremos

$$d_\infty(f,\ f_{n_x}) \ < \ \frac{r_x}{4} \tag{24.32}$$

pois f_n converge a f na métrica d_∞, por hipótese, e, portanto,

$$d\big(f(x),\ f_{n_x}(x)\big) \ \leq \ d_\infty(f,\ f_{n_x}) \ < \ \frac{r_x}{4}\ , \tag{24.33}$$

do que concluímos que $f_{n_x}(x) \in B\big(f(x),\ r_x/4\big) \subset B\big(f(x),\ r_x/2\big) = B_x$. Resta provar que $f_{n_x}^{-1}(B_x) \subset A$, o que será feito por contradição. Suponha que exista $z \in f_{n_x}^{-1}(B_x)$ tal que $z \notin A$. Então, $f(z) \notin B$. Porém,

$$\begin{aligned} d\big(f(x),\ f(z)\big) \ \leq \ d\big(f(x),\ f_{n_x}(z)\big) + d\big(f_{n_x}(z),\ f(z)\big) \ &\overset{f_{n_x}(z)\in B_x}{\leq} \ \frac{r_x}{2} + d\big(f_{n_x}(z),\ f(z)\big) \ \leq \ \frac{r_x}{2} + d_\infty\big(f_{n_x},\ f\big) \\ &\overset{(24.32)}{\leq} \ \frac{r_x}{2} + \frac{r_x}{4} \ = \ \frac{3r_x}{4}\ , \end{aligned}$$

provando que $f(z) \in B\big(f(x),\ 3r_x/4\big) \subset B\big(f(x),\ r_x\big) \subset B$, uma contradição.

Com as considerações precedentes isso prova que f é contínua, estabelecendo que $C_b(X,\ M)$ é um subconjunto τ_{d_∞}-fechado de $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$. Pela Proposição 27.12, página 1441, isso implica que $C_b(X,\ M)$ é completo na métrica d_∞, completando a demonstração. ■

O Teorema 24.3 tem o seguinte corolário imediato:

Corolário 24.2 *Sejam X e M conjuntos não vazio com X dotado de uma topologia τ_X e M dotado de uma métrica d. Suponhamos que X seja τ_X-compacto e que M seja completo na métrica d. Então, $C(X,\ M)$, o conjunto de todas as funções contínuas X em M, é um subconjunto τ_{d_∞}-fechado de $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$ e completo na métrica d_∞. Note-se que isso, em particular, afirma que, sob as hipóteses, todo elemento de $C(X,\ M)$ é uma função d-limitada.* □

Prova. Seja $f \in C(X,\ M)$. Para $y \in M$, fixo, a aplicação $F : X \to \mathbb{R}_+$ definida por $F(x) := d\big(f(x),\ y\big)$ é contínua, por ser a composição de duas funções contínuas, f e $d\big(\cdot,\ y\big)$. Logo, pelo Teorema 32.16, página 1628, F tem um máximo, o que significa dizer que f é d-limitada. Assim, provamos que devido à compacidade de X toda função de $C(X,\ M)$ é d-limitada, ou seja, $C(X,\ M) = C_b(X,\ M)$. Portanto, as afirmativas do enunciado seguem do Teorema 24.3. ■

É bastante claro que o Corolário 24.2 generaliza a Proposição 24.8, da página 1317.

24.5 Espaços de Banach e de Hilbert

Nesta seção suporemos que o leitor esteja familiarizado com os conceitos de produto escalar e norma em espaços vetoriais, conceitos esses introduzidos na Seção 3.1.3, página 270, e, respectivamente, na Seção 3.2, página 274 (vide, em particular, página 270). Por simplicidade, trataremos também apenas de espaços vetoriais sob o corpo dos complexos.

• **Espaços de Banach**

Se $\mathcal{E}$ é um espaço vetorial dotado de uma norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, podemos, como já comentamos, definir uma métrica em $\mathcal{E}$, a chamada *métrica induzida pela norma* $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, por meio da expressão $d_{\mathcal{E}}(u,\ v) = \|u - v\|_{\mathcal{E}}$ definida para todos $u,\ v \in \mathcal{E}$. Assim, se $\mathcal{E}$ é um espaço vetorial normado, então é também um espaço métrico com a métrica induzida pela norma. Com isso em mente, introduzimos então a seguinte importante definição:

Definição. Espaços de Banach Um espaço vetorial $\mathcal{B}$ é dito ser um *espaço de Banach*[27] em relação a uma norma nele definida se for um espaço métrico completo em relação à métrica induzida por essa norma. ♠

• **Espaços de Hilbert**

Seja $\mathcal{E}$ um espaço vetorial dotado de um produto escalar $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathcal{E}}$. Como discutimos à página 276 e seguintes, podemos com o uso desse produto escalar definir uma norma em $\mathcal{E}$ por $\|u\|_{\mathcal{E}} := \sqrt{\langle u,\ u\rangle_{\mathcal{E}}}$. Essa norma é dita ser a *norma induzida pelo produto escalar* $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathcal{E}}$. Caímos, assim, no caso acima, pois, sendo $\mathcal{E}$ um espaço vetorial normado, podemos definir uma métrica em $\mathcal{E}$ por meio da seguinte expressão: para $u,\ v \in \mathcal{E}$,

$$d_{\mathcal{E}}(u,\ v) \ = \ \|u - v\|_{\mathcal{E}} \ = \ \sqrt{\Big\langle (u - v),\ (u - v)\Big\rangle_{\mathcal{E}}}\ .$$

Essa métrica é dita ser a *métrica induzida pelo produto escalar* $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathcal{E}}$.

Assim, se $\mathcal{E}$ é um espaço vetorial dotado de um produto escalar, então é também um espaço métrico com a métrica induzida pelo produto escalar definida acima. Com isso em mente, introduzimos então a seguinte importante definição:

Definição. Espaços de Hilbert Um espaço vetorial $\mathcal{H}$ é dito ser um *espaço de Hilbert*[28] em relação a um produto escalar nele definido se for um espaço métrico completo em relação à métrica induzida por esse produto escalar. ♠

Nota histórica. A noção abstrata de Espaço de Hilbert foi introduzida por Schmidt[29], por volta de 1905, inspirado em ideias de Hilbert sobre equações integrais, notadamente sobre a equação de Fredholm[30], discutida na Seção 19.3.2, página 1049 e no Capítulo 19, página 1027. A noção abstrata de Espaço de Banach é posterior, tendo sido introduzida por Banach em 1920. O termo "espaço de Banach" foi cunhado por Fréchet[31], enquanto que o termo "espaço de Hilbert" foi cunhado por von Neumann[32]. ♣

[27] Stefan Banach (1892–1945).
[28] David Hilbert (1862–1943).
[29] Erhard Schmidt (1876–1959). Schmidt é conhecido por várias contribuições, como o Teorema de Hilbert-Schmidt sobre operadores compactos e, mais popularmente, pelo método de ortogonalização de Gram-Schmidt, descrito na Seção 3.3, página 283.
[30] Erik Ivar Fredholm (1866–1927).
[31] Maurice René Fréchet (1878–1973).
[32] John von Neumann (1903–1957).

O estudante deve notar que todo espaço de Hilbert é naturalmente um espaço de Banach. A recíproca não é necessariamente verdadeira, pois um espaço de Banach não é necessariamente dotado de um produto escalar associada a sua norma. Para que tal ocorra é necessário (e suficiente) que a norma satisfaça a identidade do paralelogramo, relação (3.31), página 277. Esse é o conteúdo do Teorema de Fréchet, von Neumann e Jordan, Teorema 3.3, página 279.

Também ressaltamos ao estudante que não apenas a existência de um produto escalar é importante na definição de um espaço de Hilbert, mas também a propriedade de completeza, a qual é fundamental para a demonstração de várias propriedades importantes daqueles espaços. Vide Capítulo 39, página 2122.

Exemplos 24.3 Os espaços vetoriais de dimensão finita $\mathbb{C}^m$ são espaços de Banach em relação à norma $\|x\|_p := \big[|x^1|^p + \cdots + |x^m|^p\big]^{1/p}$ para todo $p \geq 1$. O caso $p = 2$ é importante: $\mathbb{C}^m$ é um espaço de Hilbert em relação ao produto escalar $\langle x,\ y\rangle_{\mathbb{C}} := \overline{x^1}y^1 + \cdots + \overline{x^m}y^m$. O mesmo vale para os espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^m$. Esses fatos serão provados logo adiante quando considerarmos os espaços de sequências tipo ℓ_p, $p \geq 1$, os quais, como veremos, são exemplos de espaços de Banach (de dimensão infinita). O espaço ℓ_2 é um espaço de Hilbert. Outro exemplo importante de espaço de Banach é o espaço vetorial $C([0,\ 1])$. Provamos na Proposição 24.8, página 1317, que $C([0,\ 1])$ é completo na norma $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in[0,\ 1]} |f(x)|$. Portanto, $C([0,\ 1])$ é um espaço de Banach em relação a essa norma. ♦

Espaços de Hilbert têm uma importância fundamental na Mecânica Quântica e na Teoria Quântica de Campos. Na Matemática, espaços de Banach e de Hilbert são também fundamentais em áreas como a teorias das equações diferenciais parciais (e outras). O estudo de espaços de Hilbert e de Banach, e de operadores lineares agindo nos mesmos, compõe uma área da Matemática denominada *Análise Funcional*.

Nestas Notas, estudaremos com mais detalhe as propriedades gerais de espaços de Hilbert no Capítulo 39, página 2122. No restante desta seção apresentaremos exemplos de espaços de Hilbert e de Banach estudando espaços de sequências.

• **Espaços de Banach em Espaços de Funções**

Os resultados da Seção 24.4, página 1330, permitem encontrar exemplos importantes de espaços de Banach entre certos espaços de funções:

Exemplo 24.4 Seja X um conjunto não vazio qualquer e seja B um espaço de Banach (em relação ao corpo dos reais ou dos complexos) com norma $\|\cdot\|_B$. Seja $\mathcal{B}(X,\ B)$ o conjunto de todas as funções limitadas de X em B:

$$\mathcal{B}(X,\ B) \ = \ \Big\{ f : X \to B,\ \ \sup_{x\in X} \|f(x)\|_B < \infty \Big\}\ .$$

É elementar constatar que $\mathcal{B}(X,\ B)$ é um espaço vetorial (em relação ao corpo dos reais ou dos complexos) e que $\mathcal{B}(X,\ B) \ni f \mapsto \|f\| := \sup_{x\in X} \|f(x)\|_B$ é uma norma em $\mathcal{B}(X,\ B)$, a chamada *norma uniforme*. Pelo Teorema 24.2, página 1331, $\mathcal{B}(X,\ B)$ é um espaço de Banach em relação à norma uniforme. ♦

Exemplo 24.5 Seja X um espaço topológico e seja B um espaço de Banach (em relação ao corpo dos reais ou dos complexos) com norma $\|\cdot\|_B$. Seja $C_b(X,\ B)$ o conjunto de todas as funções contínuas e limitadas de X em B:

$$C_b(X,\ B) \ = \ \Big\{ f : X \to B,\ \ f \in \mathcal{B}(X,\ B) \text{ e } f \text{ é contínua} \Big\}\ .$$

É claro que $C_b(X,\ B) \subset \mathcal{B}(X,\ B)$, que $C_b(X,\ B)$ é um subespaço vetorial e que a norma uniforme $\|\cdot\|$ está definida em $C_b(X,\ B)$. Pelo Teorema 24.3, página 1333, $C_b(X,\ B)$ é um espaço de Banach em relação à norma uniforme. ♦

Exemplo 24.6 Seja X um espaço topológico compacto e B um espaço de Banach (em relação ao corpo dos reais ou dos complexos) com norma $\|\cdot\|_B$. Seja $C(X,\ B)$ o conjunto de todas as as funções contínuas X em B. Pelo Corolário 24.2, página 1334, $C(X,\ B)$ é um espaço de Banach em relação à norma uniforme. ♦

Alguns exemplos ilustrativos dos casos acima são encontrados entre espaços de sequências, aos quais dedicaremos a Seção 24.5.1, página 1336.

24.5.1 Espaços de Banach em Espaços de Sequências

Vamos denotar por $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ (por $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$) a coleção de todas as sequências de números complexos (reais). Um fato simples, mas importante de se comentar, é que $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ é um espaço vetorial complexo (e, respectivamente, $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial real). De fato, se a e b são duas sequências de números complexos podemos, para quaisquer $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ definir $\alpha a + \beta b$ como sendo a sequência $(\alpha a + \beta b)_n := \alpha a_n + \beta b_n$, $n \in \mathbb{N}$. (Para $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$, o caso é análogo).

Por simplicidade, iremos daqui para frente discutir apenas o espaço $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$, das sequências complexas, mas tudo o que falaremos tem seu análogo para o espaço $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$.

O espaço vetorial $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ possui vários subespaços, alguns de interesse especial, como os espaços ℓ_p, com $p \geq 1$, e o espaço ℓ_∞, os quais serão definidos mais adiante. O seguinte exercício exibe um dos subespaços de $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$.

E. 24.44 *Exercício*. Denotemos por $\mathfrak{c}(\mathbb{C})$, ou simplesmente $\mathfrak{c}$, a coleção de todas as sequências de Cauchy de números complexos com relação à métrica usual $d(z,\ w) = |w - z|$, $\forall z,\ w \in \mathbb{C}$. Mostre que $\mathfrak{c}(\mathbb{C})$ é um subespaço de $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$, ou seja, mostre que se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são duas sequências de Cauchy de números complexos, então para quaisquer $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ a sequência $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é também uma sequência de Cauchy de números complexos. ✠

Outros exemplos de conjuntos de sequências são os seguintes[33]:

$$\ell_\infty \ := \ \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}(\mathbb{C}) \ \middle| \ \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \ < \ \infty \right\} . \tag{24.34}$$

$$\mathfrak{c} \ := \ \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}(\mathbb{C}) \ \middle| \ \lim_{n\to\infty} a_n \text{ existe na métrica usual} \right\} . \tag{24.35}$$

$$\mathfrak{c}_0 \ := \ \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}(\mathbb{C}) \ \middle| \ \lim_{n\to\infty} a_n \ = \ 0 \right\} . \tag{24.36}$$

$$\ell_p \ := \ \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}(\mathbb{C}) \ \middle| \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \ < \ \infty \right\} . \tag{24.37}$$

$$\mathfrak{s} \ := \ \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}(\mathbb{C}) \ \middle| \ \lim_{n\to\infty} n^k |a_n| \ = \ 0 \text{ para todo } k > 0 \right\} . \tag{24.38}$$

$$\mathfrak{j} \ := \ \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}(\mathbb{C}) \ \middle| \ \lim_{n\to\infty} \exp(rn) |a_n| \ = \ 0 \text{ para todo } r > 0 \right\} . \tag{24.39}$$

$$\mathfrak{d} \ := \ \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}(\mathbb{C}) \ \middle| \ a_n = 0, \text{ exceto para um conjunto finito de } n\text{'s} \right\} . \tag{24.40}$$

Acima, $\mathfrak{c}$ coincide com a coleção de todas as sequências de Cauchy de complexos com relação à métrica usual $d(z,\ w) = |w - z|$, $\forall z,\ w \in \mathbb{C}$ pois $\mathbb{C}$ é completo nessa métrica. Note que $\mathfrak{c}_0 \subset \mathfrak{c}$ (justifique!). Em um exercício à página 1337, discutiremos as relações de continência entre os conjuntos de sequências acima e provaremos que $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{j} \subset \mathfrak{s} \subset \ell_p \subset \mathfrak{c}_0 \subset \mathfrak{c} \subset \ell_\infty$.

E. 24.45 *Exercício*. Prove que os conjuntos $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}$ e ℓ_∞ são espaços vetoriais. ✠

Mais adiante (Proposição 24.15, página 1338) provaremos que os conjuntos ℓ_p com $p > 0$ também são espaços vetoriais. As provas para $0 < p < 1$ e $p \geq 1$ são diferentes.

E. 24.46 *Exercício*. Mostre que as sequências $a_n = \exp(-n)$ e $a_n = \exp(-n^2)$, $n \in \mathbb{N}$, pertencem a $\mathfrak{s}$. Mostre que nenhuma sequência $a_n = \dfrac{1}{n^r}$, $n = 1,\ 2, \ldots$, com $r > 0$, pertence a $\mathfrak{s}$. ✠

[33] A ordenação dessa lista de exemplos é inspirada em [412].

• **Sequências ℓ_∞ e ℓ_p**

Na expressão (24.34) definimos o conjunto ℓ_∞, subconjunto de $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$, formado por todas as sequências limitadas, ou seja, uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é do tipo ℓ_∞ se existir algum $M \geq 0$ tal que, para todo n, tem-se $|a_n| < M$. Note que as sequências limitadas não são de Cauchy, mas toda a sequência de Cauchy é limitada (por quê?). Assim, $\mathfrak{c}(\mathbb{C}) \subset \ell_\infty$.

Exemplo 24.7 As sequências $a_n = \alpha$, $a_n = \alpha/n^2$, $a_n = \beta + \alpha/n$ $a_n = \beta + \alpha e^{-n}$, $a_n = \alpha(-1)^n$, $a_n = \alpha\,\mathrm{sen}(n\beta)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, são, para todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$, elementos de ℓ_∞. As sequências $a_n = \alpha(-1)^n$ e $a_n = \alpha\,\mathrm{sen}(n\beta)$ não são de Cauchy. ♦

E. 24.47 *Exercício importante*. Mostre que se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são duas sequências do tipo ℓ_∞ então, para quaisquer $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ a sequência $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é também do tipo ℓ_∞. ✠

Esse exercício diz-nos que ℓ_∞ não é apenas um subconjunto, mas também um subespaço vetorial de $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$. Mais adiante, mostraremos que ℓ_∞ é um espaço de Banach em relação a uma norma conveniente, a saber, a norma definida no próximo exercício.

E. 24.48 *Exercício importante*. Seja $a \equiv \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$. Mostre que

$$\|a\|_\infty \ := \ \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

define uma norma em ℓ_∞. ✠

Outra família importante de subconjuntos de $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ é formada pelas chamadas sequências ℓ_p, com $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$:

$$\ell_p \ := \ \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}(\mathbb{C}) \ \middle| \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \ < \ \infty \right\} .$$

E. 24.49 *Exercício*. Seja $p > 0$. Mostre que para $\delta > 0$ a sequência $a_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{p}+\delta}}$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, é do tipo ℓ_p. O que acontece se $\delta = 0$? Mostre que $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, é do tipo ℓ_p para todo $p > 1$ mas não é do tipo ℓ_1. Mostre que a sequência $a_n = \exp(-n)$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, pertence a todos os espaços ℓ_p com $p > 0$. ✠

Pela definição, se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de tipo ℓ_p, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ é convergente. Isso só é possível se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Isso, por sua vez, significa que para todo n grande o suficiente, digamos, maior que um certo $N_0 \in \mathbb{N}$, tem-se $|a_n| \leq 1$. Se $p' \geq p$ segue então que $|a_n|^{p'} \leq |a_n|^p$ para todo $n > N_0$.

E. 24.50 *Exercício*. Use esses fatos para concluir que

$$\ell_p \ \subset \ \ell_{p'} \tag{24.41}$$

para todos $p,\ p'$ com $0 < p \leq p'$. ✠

E. 24.51 *Exercício*. Conclua também que

$$\mathfrak{d} \ \subset \ \mathfrak{j} \ \subset \ \mathfrak{s} \ \subset \ \ell_p \ \subset \ \ell_{p'} \ \subset \ \mathfrak{c}_0 \ \subset \ \mathfrak{c} \ \subset \ \ell_\infty \ , \tag{24.42}$$

para todos $p,\ p'$ com $0 < p \leq p'$. ✠

E. 24.52 *Exercício*. Dê exemplos de elementos de ℓ_∞ que não pertencem a nenhum dos demais conjuntos acima. ✠

E. 24.53 *Exercício*. Dê exemplos de elementos de $\mathfrak{c}_0$ que não pertencem a nenhum ℓ_p com $p > 0$. Sugestão: considere a sequência $a_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$ com $n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$. Mostre que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^p} = \infty$ para todo $p > 0$. Para isso, use o fato (e prove-o!) que $\displaystyle\int_b^\infty \frac{1}{(\ln(x))^p} dx = \int_{\ln(b)}^\infty \frac{e^u}{u^p} du = \infty$ para todo $b > 1$ e $p \in \mathbb{R}$. ✠

Vamos agora estabelecer um fato importante sobre os conjuntos de sequências: combinações lineares de sequências ℓ_p são também sequências ℓ_p.

• **A estrutura linear dos conjuntos ℓ_p**

Proposição 24.15 *Os conjuntos ℓ_p, com $p > 0$, são espaços vetoriais complexos.* □

A prova faz uso da Proposição 5.19, página 349, da Seção 5.3.3, página 347.

Prova. Há dois casos a considerar em separado: $0 < p < 1$ e $p \geq 1$.

Caso $0 < p < 1$**.** Sejam $a,\ b \in \mathbb{C}$. Como $|a+b| \leq |a| + |b|$, a segunda desigualdade em (5.52), página 349, implica

$$|a+b|^p \ \leq\ (|a|+|b|)^p \ \leq\ |a|^p + |b|^p \ .$$

Assim, se a_n e b_n são duas sequências do tipo ℓ_p com $0 < p < 1$, teremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha a_n + \beta b_n|^p \ \leq\ |\alpha|^p \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p + |\beta|^p \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \ <\ \infty \tag{24.43}$$

para quaisquer $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$. Isso provou que a sequência $\alpha a_n + \beta b_n$ também é uma sequência do tipo ℓ_p com $0 < p < 1$. Assim, ℓ_p com $0 < p < 1$ é um espaço vetorial complexo.

Caso $p \geq 1$**.** Sejam $a,\ b \in \mathbb{C}$. Como $|a+b| \leq |a| + |b|$, a segunda desigualdade em (5.53), página 349, implica

$$|a+b|^p \ \leq\ (|a|+|b|)^p \ \leq\ 2^{p-1}\left(|a|^p + |b|^p\right) \ .$$

Assim, se a_n e b_n são duas sequências do tipo ℓ_p com $p \geq 1$, teremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha a_n + \beta b_n|^p \ \leq\ 2^{p-1}|\alpha|^p \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p + 2^{p-1}|\beta|^p \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \ <\ \infty$$

para quaisquer $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$. Isso provou que a sequência $\alpha a_n + \beta b_n$ também é uma sequência do tipo ℓ_p com $p \geq 1$. Isso é o que queríamos provar. ■

Mais adiante demonstraremos o seguinte fato muito importante: para todo $p \geq 1$ os conjuntos ℓ_p não são meramente espaços vetoriais, mas também espaços vetoriais normados, com a norma

$$\|a\|_p \ :=\ \left[\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right]^{\frac{1}{p}} \ , \tag{24.44}$$

para $a \equiv \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$, $p \geq 1$. Que essa expressão de fato define uma norma em ℓ_p, $p \geq 1$, não é nada óbvio e será provado mais adiante. Mais que isso, cada espaço ℓ_p, $p \geq 1$, é um espaço de Banach em relação à norma acima.

Veremos também que ℓ_2 é um espaço de Hilbert com produto escalar

$$\langle a,\ b\rangle \ :=\ \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} b_n \ ,$$

onde $a \equiv \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $b \equiv \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$.

Para $0 < p < 1$ a situação é diferente. Nesse caso, os conjuntos ℓ_p ainda são espaços vetoriais, mas para $0 < p < 1$ a expressão (24.44) não representa uma norma. Esse fato reduz um tanto o interesse nesses espaços. Vale, porém a seguinte afirmação:

Proposição 24.16 *Para cada $0 < p < 1$ os espaços ℓ_p são espaços métricos com a métrica*

$$D_p(a,\ b) \ =\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p \ , \tag{24.45}$$

$a,\ b \in \ell_p$. □

Prova. A desigualdade triangular para D_p segue facilmente de (24.43). ■

Note-se que (24.45) define uma métrica, não uma norma. É possível provar também, por uma modificação do Teorema de Riesz-Fischer, que veremos adiante, que para cada $0 < p < 1$ os espaços ℓ_p são completos na métrica D_p definida acima.

• **As desigualdades de Hölder e Minkowski para sequências**

Vamos aqui enunciar e demonstrar em um caso particular duas desigualdades importantes que tornaremos a encontrar quando tratarmos da teoria da integração e de espaços de Banach, as quais são conhecidas como desigualdades de Hölder[34] e de Minkowski[35]. Uma demonstração alternativa da desigualdade de Minkowski para sequências (finitas ou não) usando convexidade pode ser encontrada na Seção 5.3.3.1, página 351. Uma generalização para espaços de funções p-integráveis em espaços de medida encontra-se na Seção 31.4.1, página 1562.

Teorema 24.4 Desigualdades de Hölder e de Minkowski para sequências

I. Desigualdade de Hölder.

Sejam $x = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_p$ e $y = \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_q$ com $p > 0$ e $q > 0$ e seja $r > 0$ definido por $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$. Então, vale

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^r |y_i|^r\right)^{1/r} \ \leq\ \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{1/q} \ . \tag{24.46}$$

Para todo $p > 0$ e para todos $x = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_p$ e $y = \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ vale

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p |y_i|^p\right]^{1/p} \ \leq\ \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sup_{i\in\mathbb{N}} |y_i|\right) \ . \tag{24.47}$$

II. Desigualdade de Minkowski.

Sejam $x = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $y = \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, ambas do tipo ℓ_p com $p \geq 1$. Então, vale

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{1/p} \ . \tag{24.48}$$

□

As desigualdades de Hölder e Minkowski serão demonstradas nas páginas seguintes. Vamos antes a alguns comentários.

Para duas sequências x e y denotamos por $x \cdot y$ a sequência produto $(x \cdot y)_i := x_i y_i$, $i \in \mathbb{N}$. A desigualdade de Hölder (24.46) afirma, portanto, que se $x \in \ell_p$ com $p > 0$, $y \in \ell_q$ com $q > 0$, então $x \cdot y \in \ell_r$ com $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$. Analogamente, concluímos da desigualdade (24.47) que se $x \in \ell_p$ com $p > 0$ e $y \in \ell_\infty$, então $x \cdot y \in \ell_p$.

O caso particular mais relevante da desigualdade de Hölder acima se dá para $p > 1$ e $q > 1$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Nesse caso, a desigualdade de Hölder (24.46) afirma que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\,|y_i| \ \leq\ \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{1/q} \ . \tag{24.49}$$

A desigualdade de Minkowski também pode ser usada para mostrar que os conjuntos ℓ_p com $p \geq 1$ são espaços vetoriais (faça-o!), fato que já estabelecemos com mais generalidade na Proposição 24.15, página 1338. O fato mais

[34] Otto Ludwig Hölder (1859–1937).
[35] Hermann Minkowski (1864–1909). O nome de Minkowski surge também na Teoria da Relatividade.

importante, porém, é que a desigualdade de Minkowski afirma que

$$\|x\|_p \;:=\; \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}$$

é uma *norma* nos espaços ℓ_p, $p \geq 1$, pois afirma que

$$\|x+y\|_p \;\leq\; \|x\|_p + \|y\|_p\,, \qquad \forall x,\; y \in \ell_p\,,$$

as demais condições que definem norma sendo elementares de se provar. Mostraremos logo adiante (página 1344) que os espaços ℓ_p, $p \geq 1$, são exemplos de *espaços de Banach* em relação às normas acima e que o espaço ℓ_2 é, em particular, um *espaço de Hilbert*.

Com essa definição de norma, podemos reescrever a desigualdade de Hölder (24.46) nos casos em que $p > 1$, $q > 1$ e $r \geq 1$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ na forma

$$\|x \cdot y\|_r \;\leq\; \|x\|_p\, \|y\|_q\,, \tag{24.50}$$

onde $x \cdot y$ é a sequência produto $(x \cdot y)_i := x_i y_i$, $i \in \mathbb{N}$. Para $p \geq 1$, a desigualdade (24.47) fica

$$\|x \cdot y\|_p \;\leq\; \|x\|_p\, \|y\|_\infty$$

para todos $x \in \ell_p$ e $y \in \ell_\infty$.

• **A desigualdade de Hölder. Demonstração**

Vamos agora então provar a desigualdade de Hölder (24.46). Para começar, notemos que a desigualdade de Hölder (24.46) para $r > 0$ é consequência do caso particular $r = 1$. De fato, sejam $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_p$ e $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_q$ com

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \;=\; \frac{1}{r}\,,$$

sendo $0 < p < \infty$ e $0 < q < \infty$. Definindo novas sequências $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tais que $|a_i| = |x_i|^r$ e $|b_i| = |y_i|^r$ e definindo $p' = p/r$ e $q' = q/r$, teremos

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^{p'} \;=\; \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p \;<\; \infty \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^{q'} \;=\; \sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q \;<\; \infty$$

o que prova que $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_{p'}$ e $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_{q'}$. Como

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} \;=\; 1\,,$$

então, supondo válida a desigualdade de Hölder (24.46) no caso $r = 1$, teremos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^r|y_i|^r\right)^{1/r} &= \left[\sum_{i=1}^{\infty}|a_i||b_i|\right]^{1/r} \\
&\overset{(24.46)\text{ com } r=1}{\leq} \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^{p'}\right)^{1/p'}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^{q'}\right)^{1/q'}\right]^{1/r} \\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^{p}\right)^{r/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^{q}\right)^{r/q}\right]^{1/r} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^{q}\right)^{1/q}\,,
\end{aligned}$$

que é a desigualdade de Hölder (24.46) no caso geral $r > 0$. Por causa disso, basta demonstrarmos (24.46) para o caso $r = 1$, que é o que faremos.

Nossa estratégia será provar primeiro a desigualdade de Hölder (24.46), com $r = 1$, para sequências finitas e depois generalizar para sequências infinitas. Sejam $x_1,\; \ldots,\; x_n$ e $y_1,\; \ldots,\; y_n$ duas sequências finitas arbitrárias de números complexos ($n \in \mathbb{N}$). A desigualdade de Hölder afirma que

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i| \;\leq\; \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}\,,$$

para quaisquer p, q com $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$ e tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Vamos a isso. Em primeiro lugar, note que a desigualdade é trivialmente verdadeira caso todos os x_i ou todos os y_i sejam nulos, pois nesse caso tanto o lado direito quanto o lado esquerdo da desigualdade são iguais a zero.

Vamos então considerar o caso em que os x_i e os y_i não são todos identicamente nulos. Sejam, para um j fixo

$$a \;=\; \frac{|x_j|^p}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p} \qquad \text{e} \qquad b \;=\; \frac{|y_j|^q}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q}\,.$$

Da desigualdade de Young (5.51), tratada na Seção 5.3.3, página 347, segue que

$$\frac{|x_j||y_j|}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}} \;\leq\; \frac{1}{p}\,\frac{|x_j|^p}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p} + \frac{1}{q}\,\frac{|y_j|^q}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q}\,.$$

Somando ambos os lados dessa desigualdade para todo j entre 1 e n, teremos

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|x_j||y_j|}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}} \;\leq\; \frac{1}{p}\,\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p} + \frac{1}{q}\,\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|y_j|^q}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q} \;=\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \;=\; 1\,, \tag{24.51}$$

que é o que queríamos provar.

Vamos agora generalizar a desigualdade de Hölder para sequências infinitas. Seja $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência do tipo ℓ_p e seja $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência do tipo ℓ_q com $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ e $1/p + 1/q = 1$. Como vimos, temos para qualquer $n \in \mathbb{N}$ a desigualdade

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i| \;\leq\; \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}\,.$$

Assim, segue que

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i| \;\leq\; \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q\right)^{1/q} \;<\; \infty\,.$$

Essa desigualdade vale para todo n e diz, em particular, que a sequência $s_n \;=\; \displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i|$, $n \in \mathbb{N}$, é monótona crescente e limitada. Assim, existe $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ e vale

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i||y_i| \;\leq\; \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q\right)^{1/q} \;<\; \infty\,.$$

Essa última relação é a de Hölder (24.46), com $r = 1$. Isso provou (24.46) para todo $r > 0$.

A desigualdade de Hölder (24.49) envolve sequências dos tipos ℓ_p e ℓ_q com $1/p + 1/q = 1$, sendo que $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$. É de se notar que os casos $p = 1$ ou $q = 1$ foram excluídos. Há também uma desigualdade como a de Hölder envolvendo a sequências do tipo ℓ_p e ℓ_∞, incluindo o caso $p = 1$. Sejam $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência do tipo ℓ_p com $p > 0$ e $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência do tipo ℓ_∞. Então, é bem fácil de se verificar que

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p |y_i|^p\right]^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sup_{i\in\mathbb{N}} |y_i|\right) .$$

Essa é a desigualdade de Hölder (24.47).

A desigualdade de Hölder pode ser generalizada ainda mais, como veremos quando tratarmos da teoria da integração. Vamos agora provar uma das consequências da desigualdade de Hölder, conhecida como desigualdade de Minkowski.

• **A desigualdade de Minkowski. Demonstração**

Novamente, nossa estratégia será considerar primeiro sequências finitas e depois estender o obtido para sequências infinitas.

Sejam $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ duas sequências finitas arbitrárias de números complexos ($n \in \mathbb{N}$). A desigualdade de Minkowski afirma que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

para qualquer $p \geq 1$. Vamos demonstrá-la. O caso $p = 1$ é trivial (por quê?). Consideremos então $p > 1$. Teremos que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i||x_i + y_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i + y_i|^{p-1} . \tag{24.52}$$

Usando a desigualdade de Hölder (caso $r = 1$) podemos dizer que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q} ,$$

onde $1/p + 1/q = 1$, ou seja, $p = q(p-1)$. A última desigualdade diz então que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/q}$$

e, analogamente,

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/q} .$$

Substituindo estas duas últimas relações em (24.52), teremos

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/q} ,$$

donde tiramos que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} , \tag{24.53}$$

que é o que queríamos provar.

Assim como a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Minkowski pode ser generalizada para sequências infinitas. Sejam $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sequências infinitas de números complexos, ambas do tipo ℓ_p. Temos que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{1/p} < \infty .$$

Como a desigualdade vale para qualquer n, segue que a sequência $s_n = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p}$, $n \in \mathbb{N}$, é monótona crescente e limitada e, portanto, converge. Fora isso, vale

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{1/p} < \infty .$$

Essa é a desigualdade de Minkowski para sequências infinitas de números complexos $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, ambas do tipo ℓ_p com $p \geq 1$. Isso completa a prova do Teorema 24.4. ■

Em [426] e leitor poderá encontrar uma interessante demonstração da desigualdade de Minkowski que não faz uso da de Hölder.

• **Dualidade em espaços ℓ_p**

Na Proposição 40.7, página 2181, demonstraremos com o uso da desigualdade de Hölder que ℓ_q pode ser identificado como o dual topológico de ℓ_p (e vice-versa) para todos $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$ relacionados por $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ou seja, todo funcional linear contínuo em ℓ_p é da forma $l_b(a) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k a_k$, para todo $a \in \ell_p$, onde a sequência b_k, $k \in \mathbb{N}$, pertence a ℓ_q.

• **A desigualdade de Cauchy para sequências. Um produto escalar para ℓ_2**

A desigualdade de Hölder tem um caso particular bastante especial. Sejam $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ duas sequências de números complexos complexos do tipo ℓ_2. Então, a desigualdade de Hölder nos diz que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i||y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\right)^{1/2} . \tag{24.54}$$

Essa desigualdade é conhecida como *desigualdade de Cauchy* (para sequências) e é, sem exagero, uma das desigualdades mais importantes. Muitos resultados importantes são extraídos dela, alguns dos quais iremos tratar adiante.

A expressão (24.54) mostra-nos que para quaisquer $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ a série complexa $\sum_{i=1}^{\infty} \overline{x_i}\, y_i$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente. Com isso, ela define um produto escalar em ℓ_2, que denotamos por $\langle x,\ y\rangle_{\ell_2}$:

$$\langle x,\ y\rangle_{\ell_2} := \sum_{i=1}^{\infty} \overline{x_i}\, y_i . \tag{24.55}$$

E. 24.54 *Exercício*. Prove essas últimas afirmações, ou seja, prove que $\langle x,\ y\rangle_{\ell_2}$ definida em (24.55) é um produto escalar em ℓ_2. ✣

Como veremos adiante, ℓ_2 é completo na norma relacionada a esse produto escalar, que é a norma $\|\cdot\|_2$. Isso prova que ℓ_2 é um espaço de Hilbert.

Veremos agora uma aplicação da desigualdade de Minkowski.

• **As métricas d_p em $\mathbb{C}^m$**

Seja $X = \mathbb{C}^m$ (ou $\mathbb{R}^m$) para algum $m \in \mathbb{N}$ e seja a seguinte função em $X \times X$:

$$d_p(x,\ y) = \left(|x^1 - y^1|^p + \cdots + |x^m - y^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} ,$$

onde $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{C}^m$ e $y = (y^1, \ldots, y^m) \in \mathbb{C}^m$.

Mostrar que, para $p \geq 1$, d_p define uma métrica em X é bem simples. A única dificuldade está em demonstrar a desigualdade triangular, o que pode ser feito facilmente com o uso da desigualdade de Minkowski mostrada acima. Para outra demonstração da desigualdade de Minkowski, vide Seção 5.3.3.1, página 351.

E. 24.55 *Exercício*. Usando a desigualdade de Minkowski, mostre que d_p satisfaz a desigualdade triangular, ou seja, que $d_p(x,\ y) \leq d_p(x,\ z) + d_p(z,\ y)$ para $p \geq 1$ e quaisquer $x = (x^1,\ \ldots,\ x^m)$, $y = (y^1,\ \ldots,\ y^m)$ e $z = (z^1,\ \ldots,\ z^m) \in \mathbb{C}^m$. ✠

Para o caso particular $p = 2$ a métrica d_2 é idêntica à métrica Euclidiana d_E introduzida anteriormente. Nesse sentido as métricas d_p são um tipo de generalização da métrica Euclidiana usual.

• **Seminormas em ℓ_p, $p \geq 1$**

Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos definir em ℓ_p, $p \geq 1$, a seminorma (o conceito de seminorma encontra-se à página 274)

$$\|x\|_{p,\,n} \;=\; \left[\sum_{j=1}^{n} |x^j|^p\right]^{1/p} . \tag{24.56}$$

Note que $\|x\|_{p,\,n}$ é de fato uma seminorma em ℓ_p, $p \geq 1$, pois satisfaz $\|\lambda x\|_{p,\,n} = |\lambda|\,\|x\|_{p,\,n}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e

$$\|x+y\|_{p,\,n} \;\leq\; \|x\|_{p,\,n} + \|y\|_{p,\,n} \tag{24.57}$$

para todos $x,\ y \in \ell_p$, $p \geq 1$, devido à desigualdade de Minkowski para sequências finitas (24.53).

Note também que

$$\|x\|_{p,\,n} \;\leq\; \|x\|_p \;<\; \infty \tag{24.58}$$

para todo $x \in \ell_p$, $p \geq 1$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Por fim, para qualquer $x \in \ell_p$, vale

$$\|x\|_p \;=\; \lim_{n\to\infty} \|x\|_{p,\,n} .$$

• **Generalizando a identidade do paralelogramo**

Sabemos do Corolário 5.6, página 350, que para $z,\ w \in \mathbb{C}$, valem as desigualdades $|z+w|^p + |z-w|^p \leq 2\big(|z|^p + |w|^p\big)$ para $0 < p < 2$ e $|z+w|^p + |z-w|^p \leq 2^{p-1}\big(|z|^p + |w|^p\big)$, para $p \geq 2$. É imediato dessas desigualdades que para todos $u,\ v \in \ell_p$ valem

$$\|u+v\|_p^p + \|u-v\|_p^p \;\leq\; 2\Big(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p\Big) , \qquad \text{caso } 1 \;\leq\; p \;<\; 2 , \tag{24.59}$$

e

$$\|u+v\|_p^p + \|u-v\|_p^p \;\leq\; 2^{p-1}\Big(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p\Big) , \qquad \text{caso } p \;\geq\; 2 . \tag{24.60}$$

Note-se que no caso $p = 2$ (e somente nesse caso), (24.60) não é apenas uma desigualdade, mas sim uma igualdade, a identidade do paralelogramo.

E. 24.56 *Exercício*. Mostre isso! ✠

As desigualdades (24.59) e (24.60) substituem em certos casos a identidade do paralelogramo. Veremos sua utilidade quando discutirmos a propriedade de convexidade uniforme na Seção 24.6, página 1348.

• **O Teorema de Riesz-Fischer para sequências. Completeza dos espaços ℓ_∞ e ℓ_p, $p \geq 1$**

Vamos agora mostrar que os espaços ℓ_p, $p \geq 1$, e ℓ_∞ são completos em relação às suas respectivas normas. Essa afirmação, especialmente na sua forma mais geral, em espaços de funções mensuráveis (tratada na Seção 31.4.2, página 1565), é conhecida como *Teorema de Riesz*[36]*-Fischer*[37] e data de 1907.

Seja $p \geq 1$, fixo, e seja $\{a^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, uma sequência de elementos de ℓ_p. Como cada a^m é uma sequência de números complexos, indicaremos seus elementos por a_i^m, $i \in \mathbb{N}$. Assim, convencionamos que o índice superior indexa a sequência e o inferior é o índice de cada elemento da sequência.

Suponhamos que $\{a^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de Cauchy em ℓ_p na métrica induzida pela norma $\|\cdot\|_p$. Isso significa que para todo $\epsilon > 0$ existe um inteiro $N(\epsilon) > 0$ tal que $\|a^n - a^m\|_p < \epsilon$ sempre que $m,\ n > N(\epsilon)$. Assim, se $m,\ n > N(\epsilon)$,

[36] Frigyes Riesz (1880–1956).
[37] Ernst Sigismund Fischer (1875–1954).

é fácil ver que, para os elementos a_i^m e a_i^n isso significa que

$$|a_i^m - a_i^n| \;\leq\; \left[\sum_{j=1}^{\infty} |a_j^m - a_j^n|^p\right]^{1/p} \;=\; \|a^n - a^m\|_p \;<\; \epsilon .$$

Isso diz-nos que, para cada i fixo, a sequência de números $\{a_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$ e, portanto, converge (pois $\mathbb{C}$ é completo). Seja $\alpha_i \in \mathbb{C}$ o limite dessa sequência.

A sequência $\alpha = \{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é um forte candidato a ser o limite da sequência $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na métrica definida pela norma $\|\cdot\|_p$. Colocamo-nos, então, as seguintes questões: **1.** Será a sequência α também um elemento de ℓ_p? **2.** Se a resposta à pergunta anterior for positiva, será que a sequência a^m converge à sequência $\alpha = \{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ na norma de ℓ_p? Se a resposta a essas perguntas for positiva, estará provado que ℓ_p é completo.

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Vamos definir uma sequência crescente de números inteiros e positivos $N_k(\epsilon)$, $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ com $N_{k+1}(\epsilon) > N_k(\epsilon)$, da seguinte forma: $N_k(\epsilon)$ é tal que $\|a^m - a^n\|_p < \epsilon/2^k$ para todos $m,\ n > N_k(\epsilon)$. Note que uma tal sequência $N_k(\epsilon)$ sempre pode ser encontrada pois, por hipótese, $\{a^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\|\cdot\|_p$. Vamos agora escolher uma sequência crescente de índices $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} < n_k < \cdots$ tais que $n_k > N_k(\epsilon)$. A essa sequência está associada a subsequência $\{a^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Para simplificar a notação, denotaremos $b^k \equiv a^{n_k}$, $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. Tem-se

$$\big\|b^{l+1} - b^l\big\|_p \;<\; \frac{\epsilon}{2^l} , \tag{24.61}$$

pois n_l e n_{l+1} são maiores que $N_l(\epsilon)$. Note que para cada i, b_i^k converge a α_i quando $k \to \infty$.

Com essas definições, teremos para todo $k > 1$ que (verifique!)

$$b^k - b^1 \;=\; \sum_{l=1}^{k-1} \big[b^{l+1} - b^l\big] .$$

Utilizando as seminormas $\|\cdot\|_{p,\,n}$, definidas em (24.56), e usando (24.57) e (24.58) e (24.61), teremos

$$\begin{aligned}
\|b^k\|_{p,\,n} \quad &= \quad \left\|b^1 + \sum_{l=1}^{k-1}\big[b^{l+1} - b^l\big]\right\|_{p,\,n} \\
&\overset{(24.57)}{\leq} \quad \|b^1\|_{p,\,n} + \sum_{l=1}^{k-1}\big\|b^{l+1} - b^l\big\|_{p,\,n} \\
&\overset{(24.58)}{\leq} \quad \|b^1\|_p + \sum_{l=1}^{k-1}\big\|b^{l+1} - b^l\big\|_p \\
&\overset{(24.61)}{<} \quad \|b^1\|_p + \sum_{l=1}^{k-1}\frac{\epsilon}{2^l} \;\leq\; \|b^1\|_p + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^l} \;=\; \|b^1\|_p + \epsilon .
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|b^k\|_{p,\,n} \;<\; \|b^1\|_p + \epsilon . \tag{24.62}$$

Note que o lado esquerdo é $\left[\sum_{i=1}^{n} |b_i^k|^p\right]^{1/p}$ e envolve uma soma <u>finita</u> de $|b_i^k|'s$. Assim, como cada b_i^k converge a α_i quando $k \to \infty$ temos, tomando o limite $k \to \infty$,

$$\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} |b_i^k|^p\right]^{1/p} \;=\; \left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p\right]^{1/p} \;=\; \|\alpha\|_{p,\,n} .$$

Como o lado direito de (24.62) não depende de k, concluímos que $\|\alpha\|_{p,\,n} \leq \|b^1\|_p + \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, isso diz que

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p \;\leq\; \big(\|b^1\|_p + \epsilon\big)^p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. O lado direito não depende de n. Como o lado esquerdo é uma sequência crescente e limitada (pelo lado direito), segue que o lado esquerdo converge quando $n \to \infty$. Isso prova então que $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p < \infty$, ou seja, $\alpha \in \ell_p$.

Resta-nos agora responder à segunda pergunta colocada à página 1345 e mostrar que a sequência a^m converge a α em relação à norma $\|\cdot\|_p$.

Repetindo o mesmo raciocínio que conduziu a (24.62), apenas mantendo b^1 do lado esquerdo, concluímos que $\|b^k - b^1\|_{p,\,n} < \epsilon$. Novamente, usando o mesmo argumento de acima, podemos tomar o limite $k \to \infty$ e obter $\|\alpha - b^1\|_{p,\,n} \leq \epsilon$. Como o lado direito independe de n, segue novamente pelo mesmo raciocínio acima que $\|\alpha - b^1\|_p \leq \epsilon$. Isso significa[38] que para todo $\epsilon > 0$ existe $b^1 \in \ell_p$ tal que $\|\alpha - b^1\|_p \leq \epsilon$. Como b^1 é escolhido na sequência a^m, isso prova que $\alpha = \lim_{m\to\infty} a^m$ na topologia definida por $\|\cdot\|_p$.

Com isso, provamos que todo ℓ_p com $p \geq 1$ é completo na norma definida por $\|\cdot\|_p$ e é, portanto, um espaço de Banach nessa norma. Como comentamos, isso também implica que ℓ_2 é um espaço de Hilbert com relação ao produto escalar definido em (24.55).

A demonstração que ℓ_∞ é um espaço de Banach em relação à norma $\|\cdot\|_\infty$ é idêntica, adotando-se nesse caso as seminormas $\|x\|_{\infty,\,n} := \sup\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

E. 24.57 *Exercício*. Complete os detalhes da prova que ℓ_∞ é um espaço de Banach em relação à norma $\|\cdot\|_\infty$. ✣

24.5.1.1 Decrescimento das Normas dos Espaços $\ell_p(\mathbb{N})$

Em toda esta seção denotaremos $\left[\sum |x_k|^p\right]^{1/p}$ pelo símbolo de norma $\|x\|_p$ para todo $p > 0$, ainda que saibamos que, estritamente falando, essa função só representa uma norma se $p \geq 1$.

Vimos em (24.41) e (24.42), página 1337, que $\ell_p \subset \ell_{p'}$ para todos $p,\ p'$ com $0 < p \leq p'$. Podemos com isso nos questionar como se relacionam as funções $\|x\|_p$ para diferentes valores de p. Temos o seguinte resultado, que é usado em diversas situações nestas Notas, por exemplo, na Seção 6.3.1.2, página 375:

Teorema 24.5 *Seja $m \in \mathbb{N}$ e, para $x \equiv (x_1,\ \ldots,\ x_m) \in \mathbb{C}^m$, seja $\|x\|_{p,\,m} := \left[\sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|^p\right]^{1/p}$. Então, para cada $x \in \mathbb{C}^m$ vale*

$$\|x\|_{p',\,m} \ \leq\ \|x\|_{p,\,m} \tag{24.63}$$

sempre que $0 < p \leq p'$, ou seja, $(0,\ \infty) \ni p \mapsto \|x\|_{p,\,m}$ é, para cada $x \in \mathbb{C}^m$ uma função decrescente de p.

Como corolário, temos também que se $x \in \ell_p(\mathbb{N})$ com $p > 0$, então

$$\|x\|_{p'} \ \leq\ \|x\|_p \tag{24.64}$$

sempre que $0 < p \leq p'$.

Por fim, valem,

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_{p,\,m} \ =\ \|x\|_{\infty,\,m} \ :=\ \max\left\{|x_1|,\ \ldots,\ |x_m|\right\} \tag{24.65}$$

e, para $x \in \ell_p(\mathbb{N})$ com $p > 0$,

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p \ =\ \|x\|_\infty\ , \tag{24.66}$$

com $\|x\|_\infty := \sup\left\{|x_k|,\ k \in \mathbb{N}\right\}$. □

Comentário. Para medidas de probabilidade a desigualdade entre normas expressa em (24.64) reverte-se! Vide (31.52), página 1565, que é uma simples consequência da desigualdade de Hölder naquele caso. Vide também Exercício E. 24.62, página 1356, em particular, (24.76) e (24.77). ♣

[38] O estudante aqui talvez tenha que recordar a maneira como $b^1 = a^{n_1}$ foi definido no parágrafo que antecede (24.61).

Prova do Teorema 24.5. Seja $p > 0$, $m \in \mathbb{N}$ e $x \equiv (x_1,\ \ldots,\ x_m) \in \mathbb{C}^m$ um vetor não nulo (para $x = 0$ a afirmação é trivialmente correta). Desejamos provar que $\frac{d}{dp}\|x\|_{p,\,m} \leq 0$. Temos, usando que $\frac{d}{dp} y^p = y^p \ln y$ para $y > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|x\|_{p,\,m}} \frac{d}{dp}\|x\|_{p,\,m} \ &=\ \frac{d}{dp} \ln\left(\|x\|_{p,\,m}\right) \ =\ \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\ln\left[\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\right]\right) \\
&=\ -\frac{1}{p^2}\ln\left[\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\right] + \frac{1}{p}\,\frac{\sum\limits_{k=1,\ x_k\neq 0}^{m} |x_k|^p \ln|x_k|}{\sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|^p} \\
&=\ \frac{1}{p}\left[-\ln\left(\|x\|_{p,\,m}\right) + \frac{\sum\limits_{k=1,\ x_k\neq 0}^{m} |x_k|^p \ln|x_k|}{\left(\|x\|_{p,\,m}\right)^p}\right].
\end{aligned}$$

Observe-se que, como $x \in \mathbb{C}^m$ é não nulo, ao menos uma de suas componentes é não nula. Assim, estabelecemos que

$$\frac{d}{dp}\|x\|_{p,\,m} \ =\ \frac{\|x\|_{p,\,m}}{p}\left[\frac{\sum\limits_{k=1,\ x_k\neq 0}^{m} |x_k|^p \ln|x_k|}{\left(\|x\|_{p,\,m}\right)^p} - \ln\left(\|x\|_{p,\,m}\right)\right]. \tag{24.67}$$

Vamos agora demonstrar que o fator entre $\left[\cdots\right]$ do lado direito de (24.67) é não positivo. Sabemos que para cada k vale $\left[\sum\limits_{j=1}^{m} |x_j|^p\right]^{1/p} \geq |x_k|$. Assim, caso $x_k \neq 0$, temos

$$\ln\left(\left[\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p\right]^{1/p}\right) \ \geq\ \ln|x_k| \qquad \text{e, também vale,} \qquad |x_k|^p \ln\left(\left[\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p\right]^{1/p}\right) \ \geq\ |x_k|^p \ln|x_k|\ .$$

Somando para todo $x_k \neq 0$, temos

$$\left(\sum_{k=1,\ x_k\neq 0}^{m} |x_k|^p\right) \ln\left(\left[\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p\right]^{1/p}\right) \ \geq\ \sum_{k=1,\ x_k\neq 0}^{m} |x_k|^p \ln|x_k|\ . \tag{24.68}$$

Agora,

$$\sum_{k=1,\ x_k\neq 0}^{m} |x_k|^p \ =\ \sum_{k=1}^{m} |x_k|^p \ =\ \left(\|x\|_{p,\,m}\right)^p$$

e (24.68) fica

$$\left(\|x\|_{p,\,m}\right)^p \ln\left(\|x\|_{p,\,m}\right) \ \geq\ \sum_{k=1,\ x_k\neq 0}^{m} |x_k|^p \ln|x_k|\ .$$

e, portanto,

$$\frac{\sum\limits_{k=1,\ x_k\neq 0}^{m} |x_k|^p \ln|x_k|}{\left(\|x\|_{p,\,m}\right)^p} - \ln\left(\|x\|_{p,\,m}\right) \ \leq\ 0\ .$$

Isso demonstra, retornando a (24.67), que $\frac{d}{dp}\|x\|_{p,\,m} \leq 0$. Isso provou que $\|x\|_{p',\,m} \leq \|x\|_{p,\,m}$ sempre que $0 < p \leq p'$.

Seja $x \in \ell_p(\mathbb{N}) \subset \ell_{p'}(\mathbb{N})$, com $0 < p \leq p'$. Vale $\|x\|_p = \lim\limits_{m\to\infty} \|x\|_{p,\,m}$ para todo $p > 0$, o que implica $\|x\|_{p'} \leq \|x\|_p$.

Para demonstrar (24.65), supomos $x \neq 0$, pois se $x = 0$ a igualdade é trivial. Notemos que

$$\|x\|_{p,\,m} \;=\; \|x\|_{\infty,\,m}\left[d + \sum_{\substack{k=1\\ |x_k|<\|x\|_{\infty,\,m}}}^{m}\left(\frac{|x|_k}{\|x\|_{\infty,m}}\right)^p\right]^{1/p},$$

onde d é o número de componentes x_j de x com $|x_j| = \|x\|_{\infty,\,m}$. É claro que $1 \leq d \leq m$. É claro também que, para $|x_k| < \|x\|_{\infty,\,m}$ vale $\left(\frac{|x|_k}{\|x\|_{\infty,\,m}}\right)^p \to 0$ se $p \to \infty$. Segue facilmente disso que

$$\lim_{p\to\infty}\left[d + \sum_{\substack{k=1\\ |x_k|<\|x\|_{\infty,m}}}^{m}\left(\frac{|x|_k}{\|x\|_{\infty,\,m}}\right)^p\right]^{1/p} \lim_{p\to\infty}\exp\left[\frac{1}{p}\ln\left(d + \sum_{\substack{k=1\\ |x_k|<\|x\|_{\infty,m}}}^{m}\left(\frac{|x|_k}{\|x\|_{\infty,\,m}}\right)^p\right)\right] \;=\; 1\,,$$

devido à continuidade da exponencial, devido ao fato de o argumento do logaritmo ser limitado inferiormente por $d \geq 1$ assim como superiormente, por ser decrescente em p, e devido ao fator $1/p$ em frente ao logaritmo. Isso prova (24.65).

Resta-nos ainda demonstrar que para $x \in \ell_p(\mathbb{N})$ vale $\|x\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p$. Novamente, consideremos $x \neq 0$. É evidente pela definição que $|x_k| \leq \|x\|_\infty$. Afirmamos que não pode existir uma subsequência infinita $\{|x_{k_j}|,\ j \in \mathbb{N}\}$ de $\{|x_k|,\ k \in \mathbb{N}\}$ cujo limite seja $\|x\|_\infty$, pois isso faria com que a soma $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|x_{k_j}|^p$ fosse divergente. Logo, existe apenas um conjunto finito $\{x_{k_1},\ \ldots,\ x_{k_d}\}$ de $d \geq 1$ elementos tais que $|x_{k_j}| = \|x\|_\infty$, $j = 1,\ \ldots,\ d$. Além disso, deve existir $r \in [0,\ 1)$ tal que $\frac{|x_k|}{\|x\|_\infty} \leq r$ para todos o $k \notin \{k_1,\ \ldots,\ k_d\} \equiv K$. Assim,

$$\|x\|_p \;=\; \|x\|_\infty\left[d + \sum_{\substack{k=1\\ k\notin K}}^{\infty}\left(\frac{|x|_k}{\|x\|_\infty}\right)^p\right]^{1/p}.$$

A soma $\sum\limits_{\substack{k=1\\ k\notin K}}^{\infty}\left(\frac{|x|_k}{\|x\|_\infty}\right)^p$ é convergente para cada p e seus termos são decrescentes em p e, assim, a soma também decrescente em p e, portanto, limitada superiormente. Portanto,

$$\lim_{p\to\infty}\left[d + \sum_{\substack{k=1\\ k\notin K}}^{\infty}\left(\frac{|x|_k}{\|x\|_\infty}\right)^p\right]^{1/p} \;=\; \lim_{p\to\infty}\exp\left(\frac{1}{p}\ln\left(d + \sum_{\substack{k=1\\ k\notin K}}^{\infty}\left(\frac{|x|_k}{\|x\|_\infty}\right)^p\right)\right) \;=\; 1\,,$$

devido à continuidade da exponencial, devido ao fato de o argumento do logaritmo ser limitado inferiormente por $d \geq 1$ assim como superiormente, por ser decrescente em p, e devido ao fator $1/p$ em frente ao logaritmo. Isso completa a prova de $\|x\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p$. ■

24.6 Teorema do Melhor Aproximante em Espaços Normados Uniformemente Convexos

Seja V um espaço vetorial normado, seja $C \subset V$ um subconjunto não vazio de V e seja $x \in V$. Defina-se $D \equiv D_{x,\,C} := \inf\{\|y - x\|,\ y \in C\}$, quantidade essa que pode ser interpretada como a menor distância possível entre x e o conjunto C.

Há diversos problemas que reduzem-se à seguinte questão: dados $x \in V$ e $C \subset V$, como acima, deseja-se saber se existe $y \in C$ tal que $\|y - x\| = D_{x,\,C}$ e se um tal y, se existir, é único. Em um tal problema deseja-se, portanto, saber se existe um elemento y em C que assuma a menor distância possível a um dado $x \in V$ dentre todos os elementos de C e se um tal elemento y é o único com tal propriedade.

Um problema dessa natureza é por vezes dito ser um *problema de minimalização*, ou um *problema de minimização*. Se C for um subespaço de dimensão finita de V, um tal problema é por vezes denominado um *problema de Tchebychev*[39].

Condições que garantam existência e unicidade de soluções de problemas de minimalização, como o que expusemos acima, são muito importantes tanto em aplicações como por razões teóricas. A motivação de Tchebychev, por exemplo, um dos pioneiros da área, envolvia um problema mecânico prático de transformação de movimentos lineares em circulares (e vice-versa) em máquinas dotadas de pistões (vide [291]). Já na teoria dos espaços de Hilbert, por exemplo, há um teorema dessa natureza, denominado Teorema do Melhor Aproximante (Teorema 39.1, página 2126), que desempenha um papel fundamental naquele contexto.

Na presente seção tencionamos apresentar um teorema que dispõe de condições suficientes bastante gerais para que um problema de minimalização possua solução única. Nosso ponto de partida é a definição da noção de espaço uniformemente convexo. O resultado principal desta seção é o Teorema 24.6, da página 1351. Após o mesmo faremos alguns comentários gerais sobre problemas de minimalização como o que expusemos acima. O leitor interessado poderá encontrar na Seção 10.9, página 607, uma discussão detalhada sobre um outro problema de minimalização correlato, cuja solução envolve a chamada pseudoinversa de Moore-Penrose.

• **Espaços uniformemente convexos**

Seja W um espaço vetorial (sobre os reais ou complexos). Recordemos que um conjunto não vazio $C \subset W$ é dito ser *convexo* se valer $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$ para todos $x,\ y \in C$ e $\lambda \in [0,\ 1]$.

Seja W um espaço vetorial normado e seja $\overline{\mathcal{B}_1} := \{z \in W,\ \|z\| \leq 1\}$ a bola fechada de raio 1 centrada em 0 (a noção de bola em um espaço normado foi introduzida à página 281). Sabemos (vide página 281) que $\overline{\mathcal{B}_1}$ é um subconjunto convexo de W.

Um espaço vetorial normado W é dito ser um *espaço uniformemente convexo* se for válida a seguinte propriedade: se $x_n,\ y_n \in \overline{\mathcal{B}_1}$, $n \in \mathbb{N}$, são sequências em $\overline{\mathcal{B}_1}$ tais que valha $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| = 1$, então tem-se $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$.

O significado geométrico da definição é o seguinte. Se os pontos das sequências x_n e y_n encontram-se em $\overline{\mathcal{B}_1}$, então os pontos $(x_n + y_n)/2$ encontra-se também em $\overline{\mathcal{B}_1}$. Cada ponto $(x_n + y_n)/2$ é o ponto intermediário entre x_n e y_n. Se tivermos $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| = 1$, então esses pontos intermediários estão se aproximando da superfície externa de $\overline{\mathcal{B}_1}$, o bordo de $\overline{\mathcal{B}_1}$. A condição de W ser uniformemente convexo diz que se isso ocorre, então os pontos x_n e y_n aproximam-se quando $n \to \infty$.

Em um sentido simples a condição de um espaço ser uniformemente convexo garante que a bola $\overline{\mathcal{B}_1}$ é "suficientemente redonda" para que se possa garantir que se o ponto intermediário entre dois pontos se aproxima de sua superfície, então esses dois pontos aproximam-se um do outro. O estudante deve nesse ponto notar que tal propriedade não é válida, por exemplo, para um cilindro infinito no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$. Se o ponto intermediário entre dois pontos se aproxima da superfície do cilindro, não se tem necessariamente que esses pontos se aproximam um do outro, pois eles podem tender a alinhar-se paralelamente ao eixo do cilindro, mantendo uma distância não nulo entre si.

Exemplo 24.8 Para ilustração, considere-se em $\mathbb{R}^3$ (com a norma Euclidiana usual) o cilindro $\mathcal{C} := \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = 1\right\}$ e considere-se as sequências em $\mathcal{C}$ dadas por $x_n = (1 - 1/n,\ 0,\ 0)$ e $y_n = (1 - 1/n,\ 0,\ 2)$, $n \in \mathbb{N}$. Claro está que $(x_n + y_n)/2 = (1 - 1/n,\ 0,\ 1)$ e que esse ponto intermediário $(x_n + y_n)/2$ aproxima-se da superfície do cilindro $\mathcal{C}$ (assim como os pontos x_n e y_n) quando $n \to \infty$, mas $\|x_n - y_n\| = 2$ para todo n. ♦

Dois outros casos análogos serão vistos no Exemplo 24.10, logo abaixo. Contemplando a Figura 3.1, página 282, a qual ilustra como são as bolas $\overline{\mathcal{B}_1}$ para as normas $\|\cdot\|_p$ com $1 \leq p \leq \infty$, o leitor poderá convencer-se visualmente que o espaço $\mathbb{R}^2$ não é uniformemente convexo para das normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ mas o é nos outros casos. Essas afirmações vão ser tornadas rigorosas no que segue.

[39] Pafnuty Lvovich Tchebychev (1821–1894).

• **Exemplos de espaços normados uniformemente convexos**

Vamos agora a exemplos de espaços normados uniformemente convexos.

Vamos supor que a norma em V satisfaça a identidade do paralelogramo (3.31), página 277. Como sabemos do Teorema de Fréchet, von Neumann e Jordan, Teorema 3.3, página 279, isso ocorre se e somente se a norma provier de um produto escalar em V. Em todo caso, se valer a identidade do paralelogramo, é elementar constatar que teremos

$$\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|^2+\left\|\frac{x_n-y_n}{2}\right\|^2 \;=\; \frac{1}{2}\Big(\|x_n\|^2+\|y_n\|^2\Big)$$

para quaisquer sequências x_n e $y_n\in V$. Se $\|x_n\|\leq 1$ e $\|y_n\|\leq 1$, segue disso que

$$\left\|\frac{x_n-y_n}{2}\right\|^2 \;\leq\; 1-\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|^2 .$$

Assim, a condição $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|=1$ implica $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$, estabelecendo que V é uniformemente convexo.

Constatamos, assim, que todo espaço de Hilbert é uniformemente convexo, por ser sua norma derivada de um produto escalar, satisfazendo, portanto, a identidade do paralelogramo.

Os espaços ℓ_p com $p\geq 2$ são também uniformemente convexos. Para ver isso, fazemos isso da desigualdade (24.60). Adotando na mesma $u=x_n/2$ e $v=y_n/2$, $n\in\mathbb{N}$, temos

$$\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{x_n-y_n}{2}\right\|_p^p \;\leq\; \frac{1}{2}\Big(\|x_n\|_p^p+\|y_n\|_p^p\Big) .$$

Verifique! Assim, para $\|x_n\|_p\leq 1$ e $\|y_n\|_p\leq 1$, temos

$$\left\|\frac{x_n-y_n}{2}\right\|_p^p \;\leq\; 1-\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|_p^p .$$

Logo, se $\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|_p\to 1$ para $n\to\infty$, teremos $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|_p=0$, estabelecendo que os espaços ℓ_p com $p\geq 2$ são uniformemente convexos nas respectivas normas $\|\cdot\|_p$.

Os espaços ℓ_p com $1<p<2$ também são uniformemente convexos nas respectivas normas $\|\cdot\|_p$, mas a demonstração não será apresentada aqui (vide, e.g., [317]). Como veremos logo abaixo, os espaços de sequências ℓ_1 e ℓ_∞ não são uniformemente convexos para as respectivas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$.

As mesmas afirmações acima se aplicam (com as mesmas demonstrações, essencialmente) aos espaços de integração $L_p(\mu)$. Para um tratamento que também inclui o caso $1<p<2$, vide também [317].

• **Exemplos de espaços normados que não são uniformemente convexos**

Nem todo espaço normado é uniformemente convexo. Vejamos alguns exemplos relevantes.

Exemplo 24.9 Seja $V=C\big([0,\ 1]\big)$ o espaço vetorial das funções contínuas no intervalo $[0,\ 1]$ dotado da norma do supremo: $\|f\|_\infty:=\sup\big\{|f(x)|,\ x\in[0,\ 1]\big\}$, $f\in C\big([0,\ 1]\big)$. Sejam as sequências de funções $f_n(x)=1$, $g_n(x)=4x(1-x)$ (no caso, f_n e g_n são sequências constantes: independem de n). É fácil ver que $\|f_n\|_\infty=\|g_n\|_\infty=1$ para todo n e é elementar constatar que $\|(f_n+g_n)/2\|_\infty=1$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Porém, é igualmente elementar verificar que $\|f_n-g_n\|_\infty=1$, também para todo $n\in\mathbb{N}$. Assim, constatamos que $C\big([0,\ 1]\big)$ com a norma do supremo não é uniformemente convexo. ♦

Exemplo 24.10 Considere-se em $\mathbb{R}^2$ as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ definidas para $x\equiv(x_1,\ x_2)\in\mathbb{R}^2$ por $\|x\|_1:=|x_1|+|x_2|$ e $\|x\|_\infty:=\max\big\{|x_1|,\ |x_2|\big\}$, respectivamente. As bolas $\overline{\mathcal{B}}_1$ relativas a essas métricas estão ilustradas na Figura 3.1, página 282. Ambas são quadrados e, portanto, têm bordos não "arredondados". É de se esperar que $\mathbb{R}^2$ não seja uniformemente convexo em relação a essas duas normas e, de fato, assim o é.

No caso da norma $\|\cdot\|_\infty$, tome-se em $\mathbb{R}^2$ as sequências $x_n=(1-1/n,\ 1/2)$ e $y_n=(1-1/n,\ -1/2)$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Temos que $\|x_n\|_\infty=\|y_n\|_\infty=1-1/n<1$ e, portanto, x_n e y_n são sequências na bola de raio 1 centrada em 0 para a norma $\|\cdot\|_\infty$. É claro que $(x_n+y_2)/2=(1-1/n,\ 0)$ e que $\big\|(x_n+y_n)/2\big\|_\infty=1-1/n\to 1$ para $n\to\infty$. Porém, $x_n-y_n=(0,\ 1)$ e $\|x_n-y_2\|_\infty=1$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Logo, $\mathbb{R}^2$ não é uniformemente convexo para a norma $\|\cdot\|_\infty$.

No caso da norma $\|\cdot\|_1$, tome-se em $\mathbb{R}^2$ as sequências $x_n=\big(5/8-1/n,\ 3/8-1/n\big)$ e $y_n=\big(3/8-1/n,\ 5/8-1/n\big)$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$. Temos que $\|x_n\|_1=\|y_n\|_1=1-2/n<1$ e, portanto, x_n e y_n são sequências na bola de raio 1 centrada em 0 para a norma $\|\cdot\|_1$. Teremos $(x_n+y_n)/2=\big(1/2-1/n,\ 1/2-1/n\big)$ e $\big\|(x_n+y_n)/2\big\|_1=2\big(1/2-1/n\big)\to 1$ para $n\to\infty$. Porém, $x_n-y_n=\big(1/4,\ -1/4\big)$ e, portanto, $\|x_n-y_n\|_1=1/2$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Logo, $\mathbb{R}^2$ não é uniformemente convexo para a norma $\|\cdot\|_1$. ♦

Como vimos acima, porém, $\mathbb{R}^2$ é uniformemente convexo para as normas $\|\cdot\|_p$ com $1<p<\infty$.

De forma análoga à do Exemplo 24.10, é fácil ver que os espaços de sequências ℓ_1 e ℓ_∞ não são uniformemente convexos para as respectivas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$.

• **Um Teorema do Melhor Aproximante em espaços uniformemente convexos**

O resultado principal da corrente seção é o seguinte teorema:

Teorema 24.6 (Teorema do Melhor Aproximante em Espaços Uniformemente Convexos) *Seja V um espaço normado e uniformemente convexo. Seja C um subconjunto não vazio de V e que seja convexo e completo (em relação à norma de V). Então, para cada $x\in V$ existe um e somente um elemento $y\in C$ tal que $\|x-y\|=D_{x,C}:=\inf\big\{\|y-x\|,\ y\in C\big\}$.* □

Prova da Existência. Denotemos $D_{x,C}$ simplesmente por D. Para cada $n\in\mathbb{N}$ seja $y_n\in C$ um vetor com a propriedade que

$$\|x-y_n\|^2 \;<\; D^2+\frac{1}{n} . \tag{24.69}$$

Notemos que tais vetores sempre existem. Se tal não fosse o caso, ou seja, se para algum n, digamos n_0, não existisse vetor nenhum y' em C tal que $\big\|x-y'\big\|^2<D^2+\frac{1}{n_0}$, isso significaria que para todo $y'\in C$ valeria que $\big\|x-y'\big\|^2\geq D^2+\frac{1}{n_0}$. Mas isso contraria a definição de D como o ínfimo de $\big\|x-y'\big\|$, $y'\in C$.

Caso tenhamos $D=0$, então a sequência y_n converge a x (sendo, portanto, uma sequência de Cauchy em C) e como C é completo, concluímos que $x\in C$. Podemos, portanto, tomar $y=x$ e a afirmação de existência de um $y\in C$ tal que $\|x-y\|=D_{x,C}$ está completa, nesse caso. Mais adiante trataremos da unicidade.

Vamos agora considerar o caso $D>0$ e vamos provar que toda sequência y_n satisfazendo (24.69) também é uma sequência de Cauchy em C. Defina-se $z_n:=x-y_n$ e $s_n:=\|z_n\|-D=\|x-y_n\|-D=\sqrt{D^2+\frac{1}{n}}-D$. É evidente que $s_n\geq 0$ e que $\lim_{n\to\infty}s_n=0$.

Como C é convexo, tem-se que $(y_m+y_n)/2\in C$ para todos $m,\ n\in\mathbb{N}$. Logo, tem-se pela definição de D que

$$D \;\leq\; \left\|x-\frac{y_m+y_n}{2}\right\| \;=\; \left\|\frac{z_m+z_n}{2}\right\| \;\leq\; \frac{1}{2}\|z_m\|+\frac{1}{2}\|z_n\| \;=\; \frac{1}{2}(s_m+s_n)+D .$$

Como $\lim_{n\to\infty}s_n=0$, conclui-se dessas desigualdades que para todo $\epsilon>0$ existe $N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ tais que

$$\left|\left\|\frac{z_m+z_n}{2}\right\|-D\right| \;\leq\; \epsilon \tag{24.70}$$

para todos $m,\ n\geq N(\epsilon)$.

Como $\lim_{n\to\infty}\|z_n\|=D$, podemos assumir $\|z_n\|\neq 0$ para todo n suficientemente grande. Defina-se para tais n's $w_n:=\|z_n\|^{-1}z_n$. É claro que $\|w_n\|=1$ e temos que

$$\frac{D}{2}\big(w_m+w_n\big) \;=\; \frac{D}{2\|z_m\|}z_m+\frac{D}{2\|z_n\|}z_n \;=\; \frac{1}{2}(z_m+z_n)+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{\|z_m\|}-1\right)z_m+\left(\frac{D}{\|z_n\|}-1\right)z_n\right] .$$

Logo,

$$D\left\|\frac{w_m+w_n}{2}\right\| \;\leq\; \left\|\frac{1}{2}(z_m+z_n)\right\|+\frac{1}{2}\Big[\big(\|z_m\|-D\big)+\big(\|z_n\|-D\big)\Big] \;=\; \left\|\frac{1}{2}(z_m+z_n)\right\|+\frac{s_m+s_n}{2} .$$

Com isso, temos que

$$D\left(\left\|\frac{w_m+w_n}{2}\right\|-1\right) \;\leq\; \left(\left\|\frac{1}{2}(z_m+z_n)\right\|-D\right)+\frac{s_m+s_n}{2} .$$

Por (24.70) e do fato já estabelecido que $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$, concluímos que para todo $\epsilon > 0$ existe $N'(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \left\| \frac{w_m + w_n}{2} \right\| - 1 \right| \ \leq \ \epsilon \ .$$

Defina-se $a_n = w_n$ e $b_n = w_{n+k}$. Pelo que acabamos de ver, temos que $\|a_n\| = \|b_n\| = 1$ e que $\left\|\frac{a_n+b_n}{2}\right\| \to 1$ para $n \to \infty$. Assim, pela hipótese de que V é uniformemente convexo temos que $\|a_n - b_n\| \to 0$ para $n \to \infty$, ou seja, temos que para todo $k \in \mathbb{N}$ vale $\|w_n - w_{n+k}\| \to 0$ para $n \to \infty$. Isso significa que para todo $\epsilon > 0$ existe $N''(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|w_n - w_{n+k}\| \leq \epsilon$ para todo $n \geq N''(\epsilon)$. Como k é arbitrário, isso está dizendo que

$$\|w_n - w_m\| \ \leq \ \epsilon \quad \text{para todos } m, \ n \ \geq \ N''(\epsilon) \ . \tag{24.71}$$

Note-se agora que

$$\|y_n - y_m\| \ = \ \|z_n - z_m\| \ = \ \Big\| \|z_n\| w_n - \|z_m\| w_m \Big\| \ = \ \Big\| (D + s_n) w_n - (D + s_m) w_m \Big\|$$

$$\leq \ D\|w_n - w_m\| + s_n \|w_n\| + s_m \|w_m\| \ = \ D\|w_n - w_m\| + s_n + s_m \ ,$$

pois $\|w_n\| = 1$ para todo n. Como $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$, concluímos disso e que (24.71) que para todo $\epsilon > 0$ existe $N'''(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_n - y_m\| \leq \epsilon$ sempre que $m, \ n \geq N'''(\epsilon)$. Logo $\{y_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de Cauchy em C e como este é completo, concluímos que existe $y \in C$ ao qual essa sequência converge.

Vamos agora estabelecer que $\|y - x\| = D$. Temos que $\|y - x\| = \big\|(y - y_n) - (y_n - x)\big\| \leq \|y - y_n\| + \|z_n\| = \|y - y_n\| + s_n + D$. Mas $\|y - y_n\| \to 0$ e $s_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo, $\|y - x\| \leq D$. Por outro lado, tem-se pela definição de D que $D \leq \|y - x\|$, já que $y \in C$. Logo, concluímos que $\|y - x\| = D$, como desejávamos provar.

Prova da Unicidade. Resta-nos demonstrar que esse y é o único elemento de C com essa propriedade. Para tal, vamos supor que haja outro $y' \in C$ com $\big\|x - y'\big\| = D$ e definamos em C uma sequência $\tilde{y}_n$ da seguinte forma: $\tilde{y}_n = y$ caso n seja par e $\tilde{y}_n = y'$ caso n seja ímpar. É claro que $\|x - \tilde{y}_n\| = D$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto, tem-se trivialmente

$$\big\|x - \tilde{y}_n\big\|^2 \ < \ D^2 + \frac{1}{n} \ .$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, tal como em (24.69). Ora, vimos acima que toda sequência com essa propriedade é uma sequência de Cauchy. Mas nesse caso, isso só é possível se $y = y'$, completando a demonstração do Teorema 24.6. ■

• **Exemplos e comentários gerais sobre problemas de minimalização**

A Figura 24.3, página 1353, ilustra quatro situações de problemas de minimalização. No caso, o espaço vetorial é o plano $\mathbb{R}^2$ e há quatro conjuntos C indicados. Para $x = (x_1, \ x_2) \in \mathbb{R}^2$ consideremos as normas $\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e $\|x\|_\infty := \max\big\{|x_1|, \ |x_2|\big\}$. Como comentamos acima, $\mathbb{R}^2$ é uniformemente convexo em relação à norma $\|\cdot\|_2$, mas não à norma $\|\cdot\|_\infty$. Temos o seguinte:

- No caso 1, C é um conjunto fechado (e, portanto, completo) mas não é convexo. Para o ponto x indicado há dois pontos em C que minimizam a distância a x definida pela norma $\|\cdot\|_2$, a saber, os pontos a e b. Solução do problema de minimalização portanto, existe, mas não é única.
- No caso 2, C é um disco aberto (e, portanto, não é completo) e é convexo. Para o ponto x indicado não há nenhum elemento em C que minimize a distância a x definida pela norma $\|\cdot\|_2$. Solução do problema de minimalização portanto, não existe.
- No caso 3, C é um disco fechado (e, portanto, completo) e é convexo. Para o ponto x indicado há um único elemento em C que minimize a distância a x definida pela norma $\|\cdot\|_2$, a saber, o ponto a indicado. Uma solução do problema de minimalização portanto, existe e é única.
- No caso 4, C é um retângulo fechado (e, portanto, completo) e é convexo. Para o ponto x indicado há um único ponto em C que minimiza a distância a x definida pela norma $\|\cdot\|_2$, a saber, o ponto a indicado. Se, no entanto, considerarmos a norma $\|\cdot\|_\infty$, todos os pontos do segmento A–B são solução do problema de minimalização. Isso ilustra como a unicidade da solução de um problema de minimalização pode depender da norma adotada.

Sob a luz do Teorema 24.6, esses exemplos ilustram a ideia de que a completeza do conjunto C garante a existência de solução do problema de minimalização, enquanto que a convexidade de C garante a unicidade da solução, ao menos no caso de espaços normados que sejam uniformemente convexos.

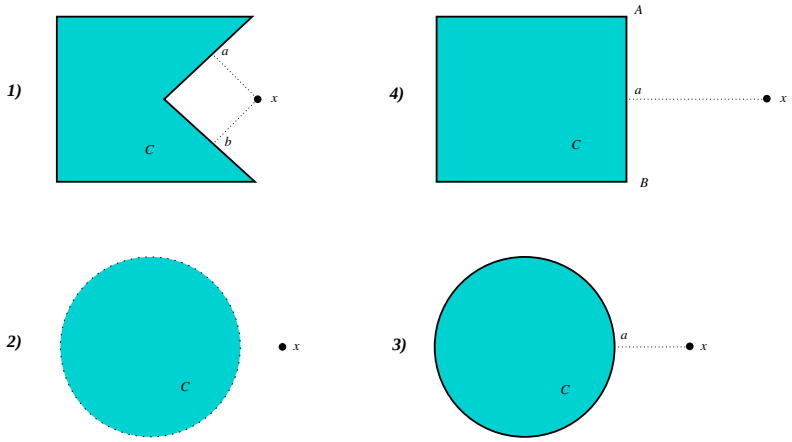

Figura 24.3: Quatro problemas de minimalização ilustrativos em $\mathbb{R}^2$.

24.7 Exercícios Adicionais

E. 24.58 *Exercício.* Os itens abaixo ilustram situações úteis de se ter em mente concernentes à propriedade de completeza.

1. Mostre que $M_1 := (0,\ 1)$ não é completo na métrica definida por $d(x,\ y) := |x - y|$. Para tal, mostre que $a_n := 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, é uma sequência de Cauchy em $M_1 = (0,\ 1)$ em relação à essa métrica, mas mostre que essa sequência não converge nesse conjunto, ou seja, mostre que não existe $x \in M_1$ tal que $\lim_{n\to\infty} d(x,\ a_n) = 0$.
2. Mostre que $M_2 := [0,\ 1]$ é completo na mesma métrica $d(x,\ y) := |x - y|$.
3. Mostre que $d_I(x,\ y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ define uma métrica em $M_3 := [1,\ \infty)$.
4. Mostre que $M_3 = [1,\ \infty)$ é completo na métrica $d(x,\ y) := |x - y|$ mas não na métrica $d_I(x,\ y)$. Para esse último caso, mostre que $a_n := n$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy em M_3 em relação à métrica d_I, mas que essa sequência não converge nesse conjunto, ou seja, mostre que não existe $x \in M_3$ tal que $\lim_{n\to\infty} d_I(x,\ a_n) = 0$.

O Exercício E. 24.60 explora algumas das ideias de acima para mostrar que $\mathbb{R}$ pode não ser um espaço métrico completo para certas métricas nele definidas. ✠

E. 24.59 *Exercício.* No Exercício E. 24.58 vimos que $[1,\ \infty)$ não é completo na métrica d_I. Podemos nos perguntar: como seria um possível completamento de $[1,\ \infty)$ nessa métrica d_I?

Para responder à questão acima e construir um completamento de $[1,\ \infty)$ na métrica d_I podemos nos guiar pela seguinte intuição. Como vimos no Exercício E. 24.60, a sequência $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy em $[1,\ \infty)$ na métrica d_I. Para que ela fosse convergente, deveríamos ter em $[1,\ \infty)$ um elemento que fizesse o papel de "infinito", já que a_n é ilimitadamente crescente. Isso pode ser feito acrescentando-se ao conjunto $[1,\ \infty)$ um objeto que, em algum sentido, faça o papel de infinito. Como veremos, esse objeto pode ser escolhido arbitrariamente (mas fora do conjunto $[1,\ \infty)$) desde que de forma a desempenhar o papel desejado. Vejamos de modo mais preciso como isso pode ser feito.

Para construirmos um completamento de $[1,\ \infty)$ na métrica d_I, consideremos os dois seguintes espaços métricos: $\big([1,\ \infty),\ d_I\big)$ e $\big((0,\ 1],\ d\big)$. Constate que o segundo espaço métrico também não é completo. Constate que a função bijetora $h : [1,\ \infty) \to (0,\ 1]$ definida por $h(x) := 1/x$ é uma isometria bijetora entre esses espaços, ou seja, que é bijetora e satisfaz $d\big(h(x),\ h(y)\big) = d_I(x,\ y)$ para todos $x,\ y \in [1,\ \infty)$. Constate que o intervalo fechado $[0,\ 1]$ é um completamento de $(0,\ 1]$ na métrica d. Seja Ω um objeto qualquer, mas com $\Omega \notin [1,\ \infty)$ (por exemplo, tome Ω como sendo uma letra do alfabeto grego ☺), e defina $M_4 := [1,\ \infty) \cup \{\Omega\}$. Faça de M_4 um espaço métrico definindo nele uma métrica $\tilde{d}_I$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_I(x,\ y) &= d_I(x,\ y)\ , && \text{se } x \text{ e } y \text{ são elementos de } [1,\ \infty)\ ,\\
\tilde{d}_I(x,\ \Omega) = \tilde{d}_I(\Omega,\ x) &= 1/x\ , && \text{se } x \in [1,\ \infty)\ ,\\
\tilde{d}_I(\Omega,\ \Omega) &= 0\ .
\end{aligned}$$

Mostre que $\tilde{d}_I$ define, de fato, uma métrica em M_4.

A esta altura o estudante pode ter intuído (corretamente) que Ω faz o papel de um número "infinito" que é adicionado ao conjunto $[1,\ \infty)$ e que agora uma sequência como $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ (que é também uma sequência de Cauchy em M_4 em relação à métrica $\tilde{d}_I$) converge a Ω. Mostre que, de fato, $\lim_{n\to\infty} \tilde{d}_I(a_n,\ \Omega) = 0$. Mostre que a aplicação $\tilde{h} : M_4 \to [0,\ 1]$ dada por

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x) = 1/x\ , & \text{se } x \in [1,\ \infty)\ ,\\ 0\ , & \text{se } x = \Omega\ , \end{cases}$$

é bijetora e que é uma isometria entre os espaços métricos $(M_4,\ \tilde{d}_I)$ e $\big([0,\ 1],\ d\big)$, ou seja, que $d\big(\tilde{h}(x),\ \tilde{h}(y)\big) = \tilde{d}_I(x,\ y)$ para todos $x,\ y \in M_4$. Note também que $\tilde{h}$ é uma extensão de h ao conjunto M_4.

Prove que $(M_4,\ \tilde{d}_I)$ é um espaço métrico completo. *Sugestão:* use o fato que $\big([0,\ 1],\ d\big)$ é completo e que $\tilde{h}$ é uma isometria.

Conclua que $(M_4,\ \tilde{d}_I)$ é um completamento do espaço métrico $\big([1,\ \infty),\ d_I\big)$. ✠

E. 24.60 *Exercício.* Seja $f : \mathbb{R} \to (1,\ \infty)$ uma função bijetora (um exemplo concreto é $f(x) = e^x + 1$). Mostre que

$$d_f(x,\ y) := \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right|\ ,$$

com $x,\ y \in \mathbb{R}$, define uma métrica em $\mathbb{R}$. Mostre que $a_n := f^{-1}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ com relação à métrica d_f. Mostre que essa sequência não converge em $\mathbb{R}$ na métrica d_f, ou seja, mostre que não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} d_f(x,\ a_n) = 0$. Conclua que $\mathbb{R}$ não é completo na métrica d_f. Seguindo os passos delineados no Exercício E. 24.59, construa um possível completamento de $\mathbb{R}$ para as métricas d_f (você precisará de um elemento para o papel de $+\infty$ e outro para o papel de $-\infty$). ✠

E. 24.61 *Exercício-dirigido.* Este exercício trata de um exemplo de um espaço vetorial de funções dotado de duas normas no qual podemos exibir uma sequência de funções com a propriedade de convergir a uma função em relação a uma das normas e a uma outra função distinta em relação à outra norma.

Seja V o espaço das funções assumindo valores complexos, contínuas e 2π-periódicas em $\mathbb{R}$. Vamos definir nesse espaço duas normas, que denotaremos por $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$.

1. *Definição da norma* $\|\cdot\|_a$. Para $u \in V$, denotemos por u_k seu k-ésimo coeficiente de Fourier: $u_k := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} u(x)\, dx$ com $k \in \mathbb{Z}$ (a teoria das séries de Fourier é desenvolvida na Seção 37.4, página 1964).
   Para $u \in V$, defina-se
   $$\|u\|_a := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} |u_k|\ . \tag{24.72}$$
   Afirmamos que $\|\cdot\|_a$ é uma norma em V. Notemos em primeiro lugar que $\|u\|_a$ está bem definida em V, pois se $\|u\|_\infty := \sup_{x\in[-\pi,\ \pi]} |u(x)|$, então é evidente que $|u_k| \leq \sqrt{2\pi}\|u\|_\infty$ para todo k e, portanto, a série do lado direito de (24.72) converge. É também evidente que $\|u\|_a \geq 0$ e que $\|\lambda u\|_a = |\lambda|\|u\|_a$ para todos $\lambda \in \mathbb{C}$ e $u \in V$. A prova da desigualdade triangular $\|u + v\|_a \leq \|u\|_a + \|v\|_a$, para $u,\ v \in V$ é elementar e deixada ao leitor. Por fim, observe-se que $\|u\|_a = 0$ se e somente se $u_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ o que, pelo Corolário 37.4, página 1973, ocorre se e somente se u for identicamente nula. Isso estabelece que (24.72) define uma norma em V.
2. *Definição da norma* $\|\cdot\|_b$. Seja $\mathsf{Q} := \mathbb{Q} \cap [-1/2,\ 1/2)$ a coleção de todos os racionais do intervalo $[-1/2,\ 1/2)$. O conjunto Q é contável, e podemos representá-lo na forma $\mathsf{Q} = \{r_j,\ j \in \mathbb{N}\}$. Seja $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência positiva e somável, ou seja, satisfazendo $b_j > 0$ para todo j e $\sum_{j=1}^{\infty} b_j < \infty$.
   Para $u \in V$, defina-se
   $$\|u\|_b := \sum_{j=1}^{\infty} b_j \left|u(2\pi r_j)\right|\ . \tag{24.73}$$
   Afirmamos que $\|\cdot\|_b$ define uma norma em V. Notemos em primeiro lugar que $\|u\|_b$ está bem definida em V, pois é claro que $\left|u(2\pi r_j)\right| \leq \|u\|_\infty$ para todo j e, portanto, a série em (24.73) converge. É também evidente que $\|u\|_b \geq 0$ e que $\|\lambda u\|_b = |\lambda|\|u\|_b$ para todos $\lambda \in \mathbb{C}$ e $u \in V$. A prova da desigualdade triangular $\|u + v\|_b \leq \|u\|_b + \|v\|_b$, para $u,\ v \in V$ é elementar e deixada ao leitor. Observe-se agora que $\|u\|_b = 0$ se e somente se $u(2\pi r_j) = 0$ para todo j. Porém, o conjunto $\{2\pi r_j,\ r_j \in \mathsf{Q}\}$ é denso no intervalo $[-\pi,\ \pi)$. Logo, $\|u\|_b = 0$ se e somente u anular-se em um conjunto denso em $[-\pi,\ \pi)$. Como u é contínua e 2π-periódica, isso implica que u é identicamente nula. Isso estabelece que (24.73) define uma norma em V.

Seja agora $u^n(x) := \cos(n!\, x)$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de elementos de V. É elementar constatar (faça-o!) que os coeficientes de Fourier de u^n são dados por

$$u^n{}_k = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(\delta_{k,\ -n!} + \delta_{k,\ n!}\Big)\ , \qquad k \in \mathbb{Z}\ .$$

Logo, segue de (24.72) que

$$\|u^n\|_a = \frac{\sqrt{2\pi}}{1 + (n!)^2}\ ,$$

mostrando que a sequência u^n converge na norma $\|\cdot\|_a$ à função identicamente nula quando $n \to \infty$.

Vamos agora considerar o que ocorre em relação à norma $\|\cdot\|_b$ quando esse limite é tomado nessa sequência. Observe-se primeiramente que para $r_j \in \mathsf{Q}$ tem-se $u^n(2\pi r_j) = \cos(2\pi n!\, r_j)$. Agora, como número racional, r_j é da forma $r_j = \pm p_j/q_j$, com $p_j \geq 0$ e $q_j > 0$, ambos inteiros e primos entre si. Assim, para todo $n > q_j$ teremos que $n!\, r_j$ é um inteiro e, portanto, $\cos(2\pi n!\, r_j) = 1$. Com isso, vemos que

$$\big\|u^n - 1\big\|_b = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \left|\cos(2\pi n!\, r_j) - 1\right|$$

converge a 0 quando $n \to \infty$ pois, à medida que n cresce, mais e mais termos na somatória são nulos. Prove essa afirmação rigorosamente notando que, como $\sum_{j=1}^{\infty} b_j < \infty$, então para cada $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j>N(\epsilon)} b_j < \epsilon$.

Com isso, vemos que u^n converge na norma $\|\cdot\|_b$ à função identicamente igual a 1 quando $n \to \infty$. Assim, estabelecemos que $u^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_a} 0$, mas $u^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_b} 1$.

Comentemos *en passant* que V não é completo nem na norma $\|\cdot\|_a$ nem na norma $\|\cdot\|_b$. Comentemos também que a sequência $a_k = \frac{1}{1+k^2}$ que ocorre na definição (24.72) pode ser substituída por qualquer sequência somável de números positivos, sem alterar a argumentação de acima. ✠

E. 24.62 *Exercício*. Seja uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números complexos. Usando a desigualdade de Hölder (24.49), página 1339, prove que para todo $p \geq 1$ e todo $m \in \mathbb{N}$, vale

$$\left|\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_j\right| \;\leq\; \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|x_j| \;\leq\; \left[\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|x_j|^p\right]^{1/p} . \tag{24.74}$$

Usando isso, mostre que se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(\mathbb{N})$ para algum $p > 1$ (para tal é suficiente supor que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1(\mathbb{N})$. Vide Exercício E. 24.50, página 1337), então

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_j \;=\; 0 \,, \tag{24.75}$$

ou seja, a média aritmética dos m primeiros termos de uma sequência numérica pertencente a $\ell_p(\mathbb{N})$, $p \geq 1$, converge a zero quando $m \to \infty$.

A relação (24.74) pode ser estendida ainda mais com uso da versão (24.46) da desigualdade de Hölder. Usando-a prove que para $0 < r \leq p$ e $m \in \mathbb{N}$,

$$\left[\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|x_j|^r\right]^{1/r} \;\leq\; \left[\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|x_j|^p\right]^{1/p} . \tag{24.76}$$

Sugestão: adote $y_j = 1$ para todo j. Se definirmos em $\mathbb{C}^m$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\|x\|_p^{\#} \;:=\; \left[\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|x_j|^p\right]^{1/p}$$

a relação (24.76) fica

$$\|x\|_r^{\#} \;\leq\; \|x\|_p^{\#} \tag{24.77}$$

para $0 < r \leq p$. Observe-se que $\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}$ é uma integral associada a uma medida de probabilidade em $\mathbb{C}^m$: a medida de contagem normalizada pelo fator $1/m$. Compare com (31.52), página 1565. ✠

Apêndices

24.A Números Reais e p-ádicos

Neste apêndice ilustraremos a construção do completamento canônico de espaços métricos, desenvolvida a partir da página 1320, apresentando brevemente uma construção do conjunto dos números reais a partir dos racionais que é também devida a Cantor. O mérito dessa construção não é apenas ilustrativo, pois o mesmo conjunto de ideias permite a construção de outros conjuntos "exóticos" de números, os chamados números p-ádicos (p, aqui, sendo um número primo), introduzidos por Hensel[40] entre 1897 e 1899[41].

A estudo desta seção não é essencial ao que segue e pode ser dispensado em uma primeira leitura. A demonstração de completeza de $\mathbb{R}$, em particular, é um tanto elaborada e delicada.

24.A.1 A Construção de Cantor dos Números Reais

• **Uma Métrica no Conjunto dos Racionais**

Considere o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. e considere a função $d:\ \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}_+$ dada por $d(r,\ s) = |r-s|$. Esta função tem as seguintes propriedades

1. $d(r,\ s) \in \mathbb{Q}_+$ para todo $r,\ s \in \mathbb{Q}$.
2. $d(r,\ s) = 0$ se e somente se $r = s$.
3. Para todo a e $b \in \mathbb{Q}$ vale $d(a,\ b) = d(b,\ a)$.
4. Para todo a, b e $c \in \mathbb{Q}$ vale $d(a,\ b) \leq d(a,\ c) + d(c,\ b)$.

A função d define o que se chama de uma *métrica* em $\mathbb{Q}$. A desigualdade $d(a,\ b) \leq d(a,\ c) + d(c,\ b)$ é chamada desigualdade triangular.

Nota. Como a princípio desejamos "construir" o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, devemos tomar o cuidado de definir a métrica d assumindo valores em $\mathbb{Q}_+$, o conjunto dos racionais ≥ 0, não em $\mathbb{R}_+$, como fizemos até agora. Por essa razão, algumas adaptações ao que fizemos até agora serão necessárias. ♣

Uma sequência de números racionais é uma função $\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$. Para uma sequência a denota-se frequentemente seu valor $a(i)$ por a_i para $i \in \mathbb{N}$.

• **Sequências de Cauchy de Números Racionais**

Uma sequência a de números racionais é dita ser uma sequência de Cauchy[42] em relação à métrica d se para todo $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ existir um número natural $N(\epsilon)$ (eventualmente dependente de ϵ) tal que $d(a_i,\ a_j) = |a_i - a_j| < \epsilon$ para todo i e j tais que $i > N(\epsilon)$ e $j > N(\epsilon)$.

Uma sequência de números racionais a converge para um número racional r no sentido da métrica d se para todo $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ existir um número natural $N(\epsilon)$ (eventualmente dependente de ϵ) tal que $d(r,\ a_i) < \epsilon$ para todo $i > N(\epsilon)$.

E. 24.63 *Exercício*. Prove que se uma sequência a converge a um número racional r então a é uma sequência de Cauchy. Sugestão: use a desigualdade triangular. ✠

• **Números Reais. A Construção de Cantor. Completamento**

Como já discutimos em páginas anteriores, há sequências de Cauchy de números racionais que não convergem a números racionais. Esse fato é a motivação de uma construção muito importante: a dos números reais.

[40] Kurt Wilhelm Sebastian Hensel (1861–1941).
[41] K. Hensel, "Über eine neue Begrundung der Theorie der algebraischen Zahlen", Jahresber. Deutsch. Math.-Verein, **6** : 1, pp. 83–88, (1899).
[42] Augustin Louis Cauchy (1789–1857).

Para mostrar como essa construção é feita (o que faremos aqui com o objetivo de ilustrar outras construções análogas futuras) vamos primeiramente considerar o conjunto $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ de todas as sequências de Cauchy de números racionais e construir em $\mathcal{C}$ uma relação de equivalência da seguinte forma. Dizemos que duas sequências de Cauchy a e b são equivalentes se a sequência $c_i = a_i - b_i$, $i \in \mathbb{N}$ converge a zero. Ou seja, $a \sim b$ se para todo racional $\epsilon > 0$ existir inteiro $N > 0$ tal que $d(a_i,\ b_i) = |a_i - b_i| < \epsilon$ para todo $i > N$.

E. 24.64 *Exercício*. Mostre que se a e b são sequências de Cauchy então a sequência $c_i = a_i - b_i$, $i \in \mathbb{N}$ também o é. Sugestão: use a desigualdade triangular. ✠

E. 24.65 *Exercício*. Prove que a relação acima é de fato uma relação de equivalência. ✠

Isto posto, sabemos que o conjunto $\mathcal{C}$ pode ser escrito como uma união disjunta de suas classes de equivalência pela relação acima. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é então definido como sendo o conjunto formado por essas classes de equivalência ou, se quiserem, como o conjunto formado escolhendo-se um elemento de cada classe de equivalência, ou seja, por uma sequência de Cauchy de números racionais em relação à métrica d.

Assim, uma sequência de Cauchy como a sequência $a_i = 1 + 1/1! + 1/2! + \cdots + 1/i!$ acima define um número real (no caso o número e).

Se x é uma sequência de Cauchy de racionais em relação à métrica d denotaremos sua classe de equivalência por $[x]$. Pela definição, $[x]$ é um número real.

• Relação de ordem e operações aritméticas nos reais

É possível definir em $\mathbb{R}$ uma relação de ordem total da seguinte forma: dizemos que $[x] < [y]$ se existirem sequências de racionais $x^0 \in [x]$ e $y^0 \in [y]$ e um inteiro I tais que $x_i^0 < y_j^0$ para todo $i,\ j > I$ e se $[x^0 - y^0] \neq [0]$, onde $[0]$ é a classe que contém a sequência identicamente nula. (Essa última condição é para evitar sequências com $x_i^0 < y_i^0$ mas que se aproximem no limite $i \to \infty$).

E. 24.66 *Exercício*. Mostre que isso define uma relação de ordem total em $\mathbb{R}$. O ponto trivial, dados $[x] \neq [y]$, é mostrar a existência de sequências de racionais $x^0 \in [x]$ e $y^0 \in [y]$ e um inteiro I tais que $x_i^0 < y_j^0$ ou que $x_i^0 < y_j^0$ para todo $i,\ j > I$. ✠

As operações elementares de soma, subtração e multiplicação podem ser definidas em $\mathbb{R}$ da seguinte forma: definimos $[x]+[y] := [x+y]$, $[x]-[y] := [x-y]$ e $[x][y] := [xy]$, onde $x \pm y$ e xy são sequências definidas por $(x \pm y)_n := x_n \pm y_n$, $n \in \mathbb{N}$ e $(xy)_n := x_n y_n$, $n \in \mathbb{N}$, respectivamente. Analogamente a operação de divisão é definida para $[y] \neq [0]$ por $[x]/[y] := [x/y]$, onde x/y é a sequência definida por $(x/y)_n := x_n/y_n$, $n \in \mathbb{N}$, pressupondo-se, naturalmente, que nenhum elemento da sequência y seja nulo.

E. 24.67 *Exercício*. Mostre que as definições acima são bem-postas, no sentido de independerem dos representantes tomados nas classes. Prove que a operação de adição é associativa, comutativa e tem a sequência nula $[0]$ como elemento neutro. Prove que a operação de subtração é a inversa da de adição. Prove que operação de multiplicação é associativa, comutativa e tem a sequência $[1]$ como elemento neutro. Prove que a operação de divisão é a inversa da de multiplicação. Prove que a operação de multiplicação é distributiva em relação à de adição. Acima, $[0]$ e $[1]$ representam as classes das sequências constantes $0 \equiv (0,\ 0,\ 0,\ \ldots)$ e $1 \equiv (1,\ 1,\ 1,\ \ldots)$, respectivamente ✠

O Exercício E. 24.67, acima, afirma que o conjunto $\mathbb{R}$, dotado dessas operações de soma e multiplicação, é um *corpo* (para a definição de corpo, vide Seção 2.1.4 página 2.1.4).

• Uma métrica para os reais

Poderíamos tentar fazer de $\mathbb{R}$ um espaço métrico, definindo, por analogia com o que fizemos anteriormente na construção do completamento canônico, uma métrica em $\mathbb{R}$ por

$$\widetilde{d}\big([x],\ [y]\big) \ = \ \lim_{n\to\infty} d(x_n,\ y_n)\ .$$

Isso não pode ser feito dessa forma, porém, sem incidirmos em uma tautologia, pois a sequência de racionais $d(x_n,\ y_n) = |x_n - y_n|$ pode não ter limite nos racionais, mas sim nos reais (que estamos ainda tentando definir). É fácil provar, porém, que a sequência de racionais $d(x_n,\ y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy na métrica d. Para tal, note que,

pela desigualdade triangular,

$$d(x_i,\ y_i) \ \leq \ d(x_i,\ x_j) + d(x_j,\ y_j) + d(y_j,\ y_i)$$

e, portanto,

$$\big|d(x_i,\ y_i) - d(x_j,\ y_j)\big| \ \leq \ d(x_i,\ x_j) + d(y_j,\ y_i)\ .$$

Como o x e y são sequências de Cauchy o lado direito pode ser feito $\leq \epsilon \in \mathbb{Q}_+$ para qualquer $\epsilon > 0$, desde que i e j sejam feitos grandes o suficiente.

Com isso, sabemos que a sequência $d(x_n,\ y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, pertence a alguma classe de equivalência que denotaremos por $[d(x,\ y)]$. Com isso, podemos agora definir uma métrica em $\mathbb{R}$ por

$$\widetilde{d}\big([x],\ [y]\big) \ := \ \big[d(x,\ y)\big]\ .$$

E. 24.68 *Exercício*. Mostre que essa definição não depende dos particulares representantes x e y que tomarmos nas classes $[x]$ e $[y]$. ✠

E. 24.69 *Exercício*. Mostre que $\widetilde{d}$ define uma métrica em $\mathbb{R}$. A desigualdade triangular usa a relação de ordem em $\mathbb{R}$ definida acima, o mesmo valendo para operação de soma etc. ✠

• Convergência de sequências e completeza nos reais

Com os ingredientes acima (a definição de $\mathbb{R}$, de ordem em $\mathbb{R}$ e da métrica $\widetilde{d}$ em $\mathbb{R}$), podemos definir as noções de convergência em $\mathbb{R}$ e de sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ de modo análogo ao que fizemos anteriormente: Uma sequência de reais $[x]^n \equiv [x^n]$, $n \in \mathbb{N}$, converge ao real $[x]$ se para todo $[\epsilon] > 0$ existir um inteiro N tal que $\widetilde{d}([x]^n,\ [x]) < [\epsilon]$ sempre que $n > N$. Uma sequência de reais $[x]^n$ é dita ser uma sequência de Cauchy em relação à métrica $\widetilde{d}$ se para todo $[\epsilon] > 0$ existir um inteiro N tal que $\widetilde{d}([x]^m,\ [x]^n) < [\epsilon]$ sempre que $m > N$ e $n > N$.

Coloca-se então a grande questão, será $\mathbb{R}$ completo? Ou seja, será toda a sequência de Cauchy de reais convergente a um número real?

Provemos que sim. Seja $[x]^n \equiv [x^n]$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de Cauchy em relação à métrica $\widetilde{d}$. Então, para qualquer $[\epsilon] \in \mathbb{R}$ existirá inteiro $N(\epsilon)$

$$\widetilde{d}\big([x]^m,\ [x]^n\big) \ = \ \big[|x^m - x^n|\big] \ < \ [\epsilon] \tag{24.A.1}$$

sempre que $m > N(\epsilon)$ e $n > N(\epsilon)$. Vamos tomar $[\epsilon]$ um racional ou seja, suporemos que exista em $[\epsilon]$ uma sequência constante $\epsilon_i = \epsilon \in \mathbb{Q}_+$.

A condição (24.A.1) significa que existem sequências de racionais $\big|x_i^m - x_i^n\big|$ e um inteiro $I(\epsilon)$ tais que $\big|x_i^m - x_i^n\big| < \epsilon$ para todos $m > N(\epsilon)$ e $n > N(\epsilon)$ e $i > I(\epsilon)$.

Como cada x^m é uma sequência de Cauchy de racionais, existe para todo $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ um inteiro $J_m(\epsilon)$ tal que $\big|x_i^m - x_j^m\big| < \epsilon$ sempre que $i,\ j > J_m(\epsilon)$.

Vamos então tomar $\epsilon = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, e definir, em analogia ao que foi feito na demonstração do Teorema 24.1, página 1320,

$$a(k) \ := \ \max\big\{N(1/l),\ 1 \leq l \leq k\big\} + 1\ , \qquad \text{e} \qquad b(k) \ := \ \max\Big\{\max\big\{I(1/l),\ J_{a(l)}(1/l)\big\},\ 1 \leq l \leq k\Big\} + 1$$

e $\underline{x}_k = x_{b(k)}^{a(k)}$. Teremos,

$$|\underline{x}_k - \underline{x}_{k'}| \ = \ \Big|x_{b(k)}^{a(k)} - x_{b(k')}^{a(k')}\Big| \ \leq \ \Big|x_{b(k)}^{a(k)} - x_{b(k')}^{a(k)}\Big| + \Big|x_{b(k')}^{a(k)} - x_{b(k')}^{a(k')}\Big| \ \leq \ 2\max\{1/k,\ 1/k'\}\ .$$

Isso prova que $\{\underline{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy de racionais. Portanto a ela está associado o número real $[\underline{x}]$. Resta-nos provar que $[x^m]$ converge a $[\underline{x}]$ em $\widetilde{d}$ quando $m \to \infty$.

De fato $\widetilde{d}\big([\underline{x}],\ [x^m]\big) = \big[d(\underline{x},\ x^m)\big]$ e

$$d\big(\underline{x}_k,\ x_k^m\big) \ = \ \big|\underline{x}_k - x_k^m\big| \ = \ \big|x_{b(k)}^{a(k)} - x_k^m\big| \ \leq \ \big|x_{b(k)}^{a(k)} - x_k^{a(k)}\big| + \big|x_k^{a(k)} - x_k^m\big| \ < \ 2/l$$

para qualquer $l \in \mathbb{N}$, desde que $m > a(l)$ e $k > b(l)$. Isso prova que para $m > a(l)$ tem-se $\left[\{d(\underline{x},\ x^m)\}_{m\in\mathbb{N}}\right] = [0]$, demonstrando que $[x^m]$ converge a $[\underline{x}]$ em $\widetilde{d}$. Isso demonstrou que $\mathbb{R}$ é completo.

*

Como vemos podemos operar com esse novo conjunto de números da mesma forma como operamos com os racionais, ou seja, podemos definir sua soma, seu produto etc. Fora isso o conjunto dos reais assim definido é provido de uma relação de ordem total $x \leq y$. Gostaríamos recordar como a construção dos reais foi feita: partimos do conjunto dos racionais, definimos uma métrica sobre os mesmos e definimos os conceitos de sequências e de sequências de Cauchy (em relação à métrica dada). Definimos também o conceito de convergência e constatamos que sequências de Cauchy de racionais não convergem sempre a racionais. Definimos então no espaço de todas as sequências de Cauchy (em relação à métrica dada) uma relação de equivalência e assim o conjunto de classes de equivalência define uma nova classe de objetos com os quais, como afirmamos, podemos operar como números. Esses são os números reais.

O procedimento de completar os racionais por meio da criação das classes de equivalência de suas sequências de Cauchy é chamado de *completamento canônico dos racionais* e foi inventado por Cantor[43] (seguindo ideias de Weierstrass[44]). A construção de números reais acima é devida a Cantor (há uma outra construção "equivalente" devida a Dedekind[45], a dos chamados "cortes de Dedekind"). O completamento de Cantor é importante, pois seu método pode ser estendido a qualquer espaço métrico não completo para a obtenção de uma classe de objetos ainda maior.

24.A.2 Outros Completamentos dos Racionais. Números p-ádicos

A construção acima indicou um procedimento de completamento dos racionais a partir de suas sequências de Cauchy. É importante frisar, porém, que o conceito de sequência de Cauchy depende de uma função métrica específica dada previamente. Assim, toda a construção do completamento depende da métrica usada. O que acontece se trocarmos a métrica usada nos racionais? Podemos, ao proceder o completamento de Cantor, obter uma classe de objetos diferente da dos reais? A resposta é positiva.

Vamos mostrar que há outros completamentos possíveis dos números racionais se mudarmos a métrica usada, mais especificamente trataremos de definir uma nova classe de completamentos dos racionais, os chamados números p-ádicos (p, aqui, sendo um número primo). Seguiremos parcialmente [167], onde uma outra construção poderá ser encontrada.

Para uma referência introdutória aos números p-ádicos, mas que segue uma abordagem diferente da que aqui esboçamos, recomendamos a referência [193], de autoria do matemático brasileiro Fernando Quadros Gouvêa. Vide também as outras referências lá citadas.

Sabemos do Teorema Fundamental da Aritmética, Teorema 8.1, página 428[46],que todo número natural não nulo pode ser escrito de forma única como um produto de números primos. Para todo número racional $r \neq 0$ temos consequentemente a decomposição única em fatores primos

$$r \;=\; (\pm 1)\prod_i p_i^{w_{p_i}(r)}\ ,$$

onde os p_i são números primos e $w_p(r) \in \mathbb{Z}$ é o expoente do primo p na decomposição do racional r. O produto acima envolve todos os primos, porém, apenas para um número finito deles tem-se $w_{p_i}(r) \neq 0$ (por quê?).

Para um número racional $r \neq 0$ e para um primo p (que fixamos daqui por diante), seja a função $w_p(r)$ que dá o expoente de p na decomposição (única) de r em fatores primos dada acima. Vamos com o uso de w_p definir a seguinte função $\phi_p :\ \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_+$:

$$\phi_p(s) \;:=\; \begin{cases} p^{-w_p(s)}, & \text{se } s \neq 0,\ s \in \mathbb{Q}\ , \\ 0, & \text{se } s = 0\ . \end{cases}$$

A função ϕ_p tem as seguintes propriedades:

[43] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918).
[44] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897).
[45] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916).
[46] Para uma demonstração vide e.g. [213] ou o Apêndice 8.A, página 454.

1. $\phi_p(s) \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{Q}$.
2. $\phi_p(s) = 0$ se e somente se $s = 0$.
3. $\phi_p(rs) = \phi_p(r)\phi_p(s)$ para dois racionais quaisquer r e s.
4. Para dois racionais quaisquer r e s tem-se $\phi_p(r+s) \leq \max\{\phi_p(r),\ \phi_p(s)\}$ e, portanto,

$$\phi_p(r+s) \;\leq\; \phi_p(r) + \phi_p(s)\ . \tag{24.A.2}$$

Demonstraremos apenas o item 4, deixando os demais como exercício (fácil). O item 4 é uma consequência imediata da seguinte propriedade, que provaremos abaixo: para qualquer primo p e quaisquer racionais r e s vale

$$w_p(r+s) \geq \min\{w_p(r),\ w_p(s)\}.$$

Para provar essa desigualdade escrevemos r e s em sua decomposição em fatores primos:

$$r \;=\; (\pm 1)\prod_i p_i^{w_{p_i}(r)}\ , \qquad s \;=\; (\pm 1)\prod_i p_i^{w_{p_i}(s)}\ .$$

Assim,

$$r+s \;=\; (\pm 1)\prod_i p_i^{w_{p_i}(r)} + (\pm 1)\prod_i p_i^{w_{p_i}(s)} \tag{24.A.3}$$

Multiplicando e dividindo por $\prod_i p_i^{\min\{w_{p_i}(r),\ w_{p_i}(s)\}}$ ficamos com

$$r+s \;=\; \prod_i p_i^{\min\{w_{p_i}(r),\ w_{p_i}(s)\}}\left[(\pm 1)\prod_i p_i^{w_{p_i}(r)-\min\{w_{p_i}(r),\ w_{p_i}(s)\}} + (\pm 1)\prod_i p_i^{w_{p_i}(s)-\min\{w_{p_i}(r),\ w_{p_i}(s)\}}\right]\ .$$

Como obviamente (por quê?) $w_{p_i}(r) - \min\{w_{p_i}(r),\ w_{p_i}(s)\} \geq 0$ e $w_{p_i}(s) - \min\{w_{p_i}(r),\ w_{p_i}(s)\} \geq 0$, segue que o número entre colchetes é um <u>inteiro</u>, tendo uma decomposição em fatores primos da forma $(\pm)\prod_j p_j^{\gamma_j}$, onde os γ_i são positivos ou nulos (pois o número é inteiro). Assim,

$$r+s \;=\; \pm\prod_i p_i^{\min\{w_{p_i}(r),\ w_{p_i}(s)\}+\gamma_i}\ ,$$

provando que

$$w_{p_i}(r+s) \;=\; \min\{w_{p_i}(r),\ w_{p_i}(s)\} + \gamma_i \;\geq\; \min\{w_{p_i}(r),\ w_{p_i}(s)\}\ ,$$

para todo primo p_i, o que completa a prova que queríamos.

Em função das propriedades demonstradas no último exercício, podemos, com o uso dessa função ϕ_p, construir uma métrica em $\mathbb{Q}$, que denotaremos por d_p, dada por

$$d_p(a,\ b) \;:=\; \phi_p(a-b)$$

para racionais a e b.

E. 24.70 *Exercício*. Demonstre, usando as propriedades 1-4 de ϕ_p mencionadas acima, que esta função é de fato uma métrica, ou seja, que satisfaz

1. $d_p(r,\ s) \in \mathbb{Q}_+$ para todo $r,\ s \in \mathbb{Q}$.
2. $d_p(r,\ s) = 0$ se e somente se $r = s$.
3. Para todo a e $b \in \mathbb{Q}$ vale $d_p(a,\ b) = d_p(b,\ a)$.
4. Para todo a, b e $c \in \mathbb{Q}$ vale $d_p(a,\ b) \leq d_p(a,\ c) + d_p(c,\ b)$.

Para provar o último item, use (24.A.2) para estabelecer que

$$d_p(a,\ b)\ \leq\ \max\big\{d_p(a,\ c),\ d_p(c,\ b)\big\} \tag{24.A.4}$$

de onde a desigualdade triangular segue trivialmente. Uma métrica que satisfaça (24.A.4) é dita ser uma *métrica não-Arquimediana*[47]. Os números p-ádicos são, portanto, exemplos de *espaços ultramétricos*. ✠

Também aqui podemos definir a noção de sequência de Cauchy em relação à métrica d_p. Uma sequência a de elementos de $\mathbb{Q}$ é dita ser uma sequência de Cauchy (em relação à métrica d_p) se para todo $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$, $\epsilon > 0$, existir um número natural $N(\epsilon)$ (eventualmente dependente de ϵ) tal que $d_p(a_i,\ a_j) < \epsilon$ para todo i e j tais que $i > N(\epsilon)$ e $j > N(\epsilon)$.

Uma sequência a em $\mathbb{Q}$ converge para um elemento $b \in \mathbb{Q}$ no sentido da métrica d_p se para todo $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ existir um número natural $N(\epsilon)$ (eventualmente dependente de ϵ) tal que $d_p(b,\ a_i) < \epsilon$ para todo $i > N(\epsilon)$.

Também neste caso podem ser exibidas sequências de Cauchy de racionais que não convergem no sentido da métrica d_p a um outro racional. O conjunto $\mathbb{Q}$, assim, não é completo em relação à métrica d_p. Podemos então completá-lo usando o procedimento de completamento de Cantor: tomamos o conjunto $\mathcal{C}_p$ de todas as sequências de Cauchy de números racionais em relação à d_p e construímos em $\mathcal{C}_p$ uma relação de equivalência da seguinte forma. Dizemos que duas sequências de Cauchy a e b são equivalentes se a sequência $d_p(a_i,\ b_i)$, converge a zero quando $i \to \infty$.

Sabemos que o conjunto $\mathcal{C}_p$ pode então ser escrito como uma união disjunta de suas classes de equivalência $[\cdot]_p$ pela relação acima. Define-se então uma nova classe de números, denominados *números p-ádicos*, como sendo o conjunto dessas classes de equivalência ou, se quiserem, como sendo o conjunto formado escolhendo-se um elemento de cada classe de equivalência, ou seja, por uma sequência de Cauchy de números racionais em relação à métrica d_p.

É possível provar que podemos operar com esse novo conjunto de números da mesma forma como operamos com os racionais, ou seja, podemos definir sua soma, seu produto, sua razão etc. (os mesmos formam um corpo). Para a definição de corpo vide Seção 2.1.4, página 132.

Para cada primo p, o conjunto dos números p-ádicos, denominado $\mathbb{Q}_p$, é distinto do conjunto dos reais. Possui, porém, em comum com os reais o fato de ambos terem os racionais como subconjunto denso.

Note, por exemplo, que a sequência de números racionais $a_n = p^n$, $n \in \mathbb{N}$, diverge na reta real mas, no conjunto $\mathbb{Q}_p$ a mesma sequência converge a zero (no sentido de d_p), sendo que precisamente o oposto ocorre em relação à sequência $b_n = p^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

E. 24.71 *Exercício*. Constate a veracidade das afirmativas do último parágrafo. ✠

E. 24.72 *Exercício*. Verifique que, em relação a d_3, a sequência de números positivos $s_n = \sum_{a=0}^{n} 2 \cdot 3^a$ converge ao número -1 (!). Sugestão: mostre que $s_n = 3^{n+1} - 1$. Após isso mostre que $d_3(s_n,\ -1) = \phi_3(s_n + 1) = 3^{-(n+1)}$, e conclua que $s_n \to -1$. ✠

E. 24.73 *Exercício*. É possível dotar cada conjunto $\mathbb{Q}_p$, acima definido, de operações de soma e multiplicação que fazem do mesmo um *corpo* (para a definição de corpo, vide Seção 2.1.4 página 2.1.4). Sejam $x \equiv (x^1,\ x^2,\ x^3,\ \ldots)$ e $y \equiv (y^1,\ y^2,\ y^3,\ \ldots)$ duas sequências de Cauchy de racionais em relação à métrica d. Defina-se a sequência $x + y := (x^1 + y^1,\ x^2 + y^2,\ x^3 + y_3,\ \ldots)$ e a sequência $x \cdot y := (x^1 y^1,\ x^2 y^2,\ x^3 y^3,\ \ldots)$. Definimos, então as operações de soma e multiplicação em $\mathbb{R}$ por

$$[x]_p + [y]_p\ :=\ [x + y]_p, \qquad [x]_p \cdot [y]_p\ :=\ [x \cdot y]_p\ .$$

Mostre que essas operações estão bem definidas nas classes de equivalência, ou seja, que ambas independem dos representantes tomados nas classes na definição das operações. Mostre que a sequência identicamente nula, ou seja, $0 \equiv (0,\ 0,\ 0,\ \ldots)$, e a sequência constante igual a 1, ou seja, $1 \equiv (1,\ 1,\ 1,\ \ldots)$, são os elementos neutros das operações de soma e de produto, respectivamente. Mostre que $\mathbb{Q}_p$ é um corpo com relação às operações de soma e produto definidas acima. Use o fato que $\mathbb{Q}$ é um corpo. ✠

Mencionamos ainda que todo elemento x de $\mathbb{Q}_p$ pode ser escrito na forma

$$x\ =\ \pm \sum_{n=N}^{\infty} d_n\, p^n\ , \tag{24.A.5}$$

[47] Arquimedes de Siracusa (ci. 287 A.C. – ci. 212 A.C.).

onde $N \in \mathbb{Z}$ e $d_n \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ p-1\}$, sendo que N e os d_n's dependem de x. Essa é a chamada *decomposição p-ádica* de x. Sabidamente, existe algo semelhante no caso dos reais. Se $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, todo real pode ser escrito em uma decomposição na base b:

$$x\ =\ \pm \sum_{n=-\infty}^{N} d_n\, \frac{1}{b^n}\ , \tag{24.A.6}$$

onde $N \in \mathbb{Z}$ e $d_n \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ b-1\}$. Tanto (24.A.5) quando (24.A.6) são séries convergentes nas respectivas métricas d_p e d.

Observe as semelhanças e diferenças entre (24.A.5) e (24.A.6). No caso de $\mathbb{R}$ a escolha de $b \geq 2$ é arbitrária, mas no caso de $\mathbb{Q}_p$ só podemos usar potências de p em (24.A.5). No caso dos reais, o sistema mais popular em nossa cultura atual é o da base decimal, com $b = 10$, havendo também largo uso da base binária, $b = 2$, na Ciência da Computação. A escolha b sofreu variações culturais, históricas e geográficas. Para uma interessantíssima discussão sobre esse e outros temas correlatos da História da Matemática, vide [42].

*

Os conjuntos $\mathbb{Q}_p$ possuem propriedades extremamente curiosas, tanto do ponto de vista algébrico quando do ponto de vista topológico, algumas das quais vimos nos exercícios acima. Números p-ádicos são empregados com grande relevância na Teoria dos Números e outras áreas da Matemáticas. O fato de formarem, para cada primo p, um corpo e que o mesmo seja um completamento dos racionais, permite edificar a Análise também sobre os p-ádicos, em analogia à Análise real. Assim, é possível, por exemplo, construir as noções de derivação e integração de funções definidas sobre os p-ádicos seguindo passos semelhantes aos dados no caso familiar de funções definidas em $\mathbb{R}$. Muitas outras estruturas matemáticas (espaços de Hilbert, grupos de Lie) foram também edificadas nesse contexto.

Aplicações significativas dos números p-ádicos em Física são, no momento, desconhecidas. Sugestões especulativas de seu uso já foram apresentadas no contexto das Teorias Quânticas de Campos, sem consequências relevantes, contudo.

Para uma referência introdutória à Análise p-ádica recomendamos a referência [193], de autoria do matemático brasileiro Fernando Quadros Gouvêa. Vide também as outras referências lá citadas ou a referência [167].

24.B Aproximações para π

Métodos para calcular aproximações para o valor de π são procurados desde a Antiguidade. Comentam os historiadores da Matemática que a mais antiga referência ao assunto talvez seja encontrada em um papiro egípcio, denominado papiro de Rhind, de cerca de 1650 A.C., o qual fornecia a aproximação $4(8/9)^2 \simeq 3.1605$ para π. Arquimedes[48] foi provavelmente o primeiro a propor um procedimento sistemático de aproximação, que consistia em aproximar um círculo de diâmetro 1, e perímetro π, por polígonos regulares inscritos e circunscritos. O perímetro de um polígono regular pode ser computado com o uso de considerações geométricas simples[49]. Os perímetros dos polígonos regulares inscritos fornecem limites inferiores para π, enquanto que os perímetros dos polígonos regulares circunscritos fornecem limites superiores. Usando hexágonos (vide Figura 24.B.4), por exemplo, chega-se facilmente a $3 < \pi < 2\sqrt{3}$, o que fornece as aproximações $3 < \pi < 3,46$, as quais são ainda um tanto grosseiras.

Usando polígonos regulares de 96 lados, Arquimedes concluiu que $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, o que fornece as aproximações $3,0140845 < \pi < 3,1428571$ em base decimal. Como se observa, o limite superior fornece π com o valor correto das duas primeiras casas decimais após a vírgula. Fragmentos incompletos de sua obra indicam que Arquimedes teria chegado a determinar a aproximação $3,1416$ para o valor de π, usando polígonos regulares ainda maiores.

O método de Arquimedes foi empregado na Europa até meados do século XVII para aproximar o valor de π. Ludolph van Ceulen[50] empreendeu boa parte da sua vida aperfeiçoando o método de Arquimedes, chegando, pouco antes de sua morte, a estimar o valor de π com o uso de polígonos regulares de 2^{62} lados, o que fornece π com 32 casas decimais de precisão.

Várias outras aproximações foram empregadas para aproximar π. Listemos algumas.

[48] Arquimedes de Siracusa (ci. 287 A.C. – ci. 212 A.C.).
[49] Vide [111], onde uma descrição, mais detalhada do método de Arquimedes pode ser encontrada.
[50] Ludolph van Ceulen (1539–1610).

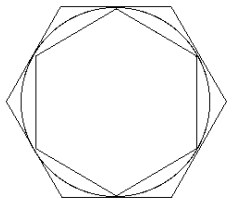

Figura 24.B.4: Círculo, hexágono inscrito e circunscrito.

1. Aproximação de Wallis[51], ou Fórmula de Produto de Wallis, para π, de 1665:

$$\pi \;=\; \lim_{n\to\infty} 2\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1} \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n+1}(n!)^4}{(2n+1)\,[(2n)!]^2} \;=\; 2\times\frac{2\times 2}{1\times 3}\,\frac{4\times 4}{3\times 5}\,\frac{6\times 6}{5\times 7}\,\frac{8\times 8}{7\times 9}\,\frac{10\times 10}{9\times 11}\cdots\,.$$

Uma demonstração dessa expressão encontra-se na Seção 6.2.1, página 368. Vide também o Exercício E. 7.4, página 401.

2. Aproximação de Gregory[52]-Leibniz[53] para π, de 1671:

$$\pi \;=\; \lim_{n\to\infty} 4\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} \;=\; 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\cdots\right)\,,$$

Essa série provem do fato que $\pi = 4\arctan(1)$. O arco-tangente pode ser calculado pela série de Taylor[54]

$$\arctan(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2k+1}}{2k+1}\,.$$

fornecendo, assim, a aproximação dada acima para π.

Um comentário histórico é que a identidade $\pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\cdots\right)$ é por vezes atribuída a Leibniz, que a divulgou em 1674, três anos após a descoberta por Gregory da série de Taylor da função arco-tangente. Historiadores comentam que Gregory provavelmente já a conhecia. Todavia, essa identidade já seria conhecida por matemáticos hindus séculos antes.

3. Aproximação de Newton[55]. Usando uma identidade como por exemplo $\pi = 6\,\mathrm{arcsen}(1/2)$, Newton empregou a série de Taylor da função arco-seno

$$\mathrm{arcsen}(x) \;=\; x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(2n-1)!!]^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

para determinar aproximações para π. Disso resulta a identidade (prove-a!)

$$\pi \;=\; 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\,(2n-1)!}{2^{4n-1}\,n(2n+1)\,[(n-1)!]^2}\,. \tag{24.B.7}$$

Newton calculou as primeiras 15 casas decimais de π (em data incerta), para o que é necessário somar cerca de 40 termos da série (24.B.7). Newton o fez, segundo confessou, "por não ter muito o que fazer à época".

Como, para n grande, $(2n-1)! \approx 2^{2n}n^{2n}$ e $[(n-1)!]^2 \approx n^{2n}$, os termos da série (24.B.7) decaem como 2^{-2n}. Machin encontrou uma outra identidade que permite uma convergência mais rápida.

[51] John Wallis (1616–1703). Wallis foi um dos pioneiros do Cálculo Diferencial e Integral e, uma curiosidade, foi o inventor do símbolo ∞.
[52] James Gregory (1638–1675).
[53] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716).
[54] Brook Taylor (1685–1731). A série de Taylor da função arco-tangente foi, em verdade, descoberta por Gregory em 1671.
[55] Sir Isaac Newton (1643–1727).

4. Aproximação de Machin[56] para π, de 1706:

$$\pi \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{2k+1}\left(\frac{16}{5^{2k+1}}-\frac{4}{239^{2k+1}}\right)\,.$$

Essa série provem do fato, demonstrado por Machin, que

$$\pi \;=\; 16\arctan(1/5)-4\arctan(1/239)\,.$$

Usando-se a série de Taylor da função arco-tangente dada acima, obtém-se a série de Machin para π.

5. Aproximação de Euler[57] para π por frações contínuas. Euler demonstrou que

$$\pi \;=\; \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\cfrac{11^2}{\ddots}}}}}}}\,.$$

Mencionamos *en passant* que Euler também obteve a seguinte expressão para e em termos de frações contínuas:

$$e \;=\; 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\cfrac{5}{6+\cfrac{6}{\ddots}}}}}}}\,,$$

que é também uma aproximação para e por racionais.

Usando a expansão de Euler para a função cotangente dada em (6.90), página 384, é fácil obter também (tome $x = 1/4$)

$$\pi \;=\; 4-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-1}\,,$$

série esta que converge lentamente. Note que as aproximações de Wallis, Gregory, Newton, Machin e Euler acima são aproximações a π por números racionais.

6. Euler também obteve (no ano de 1735) uma série de identidades envolvendo séries infinitas do tipo $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}$, com $m = 1,\ 2,\ 3$ etc., as quais podem ser usadas para calcular π. As primeiras identidades são

$$\frac{\pi^2}{6} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\,,\quad \frac{\pi^4}{90} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\,,\quad \frac{\pi^6}{945} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}\,,\quad \frac{\pi^8}{9450} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^8}\,,\quad \frac{\pi^{10}}{93555} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{10}}$$

etc. Tais relações são bem conhecidas da teoria das séries de Fourier (vide [158]). Como o lado esquerdo das igualdades acima envolve potências de π, essas séries não fornecem aproximações a π por racionais. As últimas séries à direita convergem de modo relativamente rápido. Apenas com os cinco primeiros termos da última série à direita obtém-se a aproximação $3,141592647$ para π, cujos primeiros sete dígitos após a vírgula estão corretos. Para

[56] John Machin (1680–1751).
[57] Leonhard Euler (1707–1783).

obter-se uma precisão análoga com a primeira série à esquerda, é preciso somar cerca de cem milhões de termos, como é fácil de verificar usando um programa de computador (faça!).

A fórmula geral para as somas acima[58] é a seguinte (para a demonstração, vide Seção 6.1.3, página 361):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \;=\; \frac{(-1)^{m+1}\, 2^{2m-1}\, B_{2m}}{(2m)!}\, \pi^{2m}\,, \qquad m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\,, \tag{24.B.8}$$

onde B_n são os chamados *números de Bernoulli*[59], definidos pela série de Taylor

$$\frac{x}{e^x - 1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\,.$$

Essa definição é também de Euler (a definição original de Bernoulli, publicada postumamente em 1713, era outra (vide [473])). Os números de Bernoulli satisfazem $B_n = 0$ para n ímpar, exceto para $n = 1$, sendo $B_0 = 1$ e $B_1 = -1/2$. Os números de Bernoulli podem ser calculados recursivamente pela identidade

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j \;=\; 0\,, \qquad n \;>\; 1\,.$$

Os primeiros são $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_8 = -1/30$. O leitor interessado poderá encontrar mais detalhes sobre os fatos acima envolvendo números de Bernoulli na Seção 6.1.3, página 361, ou em vários textos, por exemplo em [473] e [158]. Nesse último texto, a relação (24.B.8) é provada usando séries de Fourier.

Como os termos da série do lado esquerdo de (24.B.8) decaem muito rapidamente quando $n \to \infty$, exceto o termo com $k = 1$, inferimos que

$$\pi \;=\; \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n-1}\, B_{2n}}\right]^{\frac{1}{2n}}\,.$$

7. Aproximação de Ramanujan[60] para π, de 1914[61]:

$$\pi \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{9.801}{\sqrt{8}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(4k)!\ \left[1.103 + 26.390\, k\right]}{(k!)^4\ 396^{4n}}}\,.$$

Devido à presença do fator $\sqrt{8}$, esta não é uma aproximação a π por racionais.

8. Aproximação de Borwein e Borwein[62] para π, de 1987: $\pi = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{p_n}$, onde

$$p_n \;:=\; 12 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (6k)!\ \left[212.175.710.912\sqrt{61} + 1.657.145.277.365 + k\left(13.773.980.892.672\sqrt{61} + 107.578.229.802.750\right)\right]}{(k!)^3\ (3k)!\ \left[5.280\left(236.674 + 30.303\sqrt{61}\right)\right]^{3k+3/2}}\,.$$

Aqui aplica-se o mesmo comentário acima: devido à presença do número $\sqrt{61}$ e da potência $3/2$ no denominador, a aproximação acima não é uma aproximação a π por racionais.

A aproximação de Borwein e Borwein converge a π de modo impressionantemente rápido. Já a primeira aproximação, $1/p_0$, fornece corretamente os primeiros 24 dígitos de π na base decimal! Cada termo seguinte da sequência acrescenta aproximadamente 25 dígitos corretos ao valor de π na base decimal. No caso da aproximação de Ramanujan a convergência

[58] Até a presente data, não são conhecidas expressões fechadas para somas como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ para o caso em que n é ímpar, $n \geq 3$.
[59] Jacob Bernoulli (1654–1705).
[60] Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887–1920).
[61] A aproximação de Ramanujan surgiu em "Modular Equations and Approximations to π". S. Ramanujan. The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics. **45**, 350–372 (1914).
[62] Jonathan M. Borwein e Peter B. Borwein são irmãos. Para mais detalhes sobre seu trabalho sobre a aproximação de π, vide "Pi and the AGM. A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity". Jonathan M. Borwein e Peter B. Borwein. Editora John Willey and Sons. inc. 1986.

é um pouco mais lenta: cada termo da sequência acrescenta aproximadamente 8 dígitos corretos ao valor de π na base decimal. As aproximações de Wallis e Gregory são extremamente lentas. Usando-as, um supercomputador do início dos anos 1990 levaria cerca de 100 anos para computar apenas os primeiros 100 dígitos corretos de π na base decimal. A aproximação de Borwein e Borwein baseia-se em trabalhos de Ramanujan sobre as chamadas equações modulares.

A fórmula de Machin (e ligeiras variantes da mesma) converge mais rapidamente que as de Wallis e Gregory (justifique!) e foi usada desde o século XVIII até a década de 1970 para cálculos de π (manuais ou com computadores).

Em 1844, Dase[63] calculou corretamente, usando a fórmula de Machin, as primeiras 205 casas decimais de π. O cálculo foi feito à mão (!) e durou alguns meses. O feito de Dase foi superado em 1873 por Shanks[64], que calculou 707 casas decimais de π. O cálculo também foi feito à mão e custou-lhe 20 anos de trabalho (!). Infelizmente, porém, Shanks cometeu erros que resultaram em que seus últimos 80 dígitos estavam incorretos. Isso só foi percebido 73 anos depois (!), em 1946, por D. F. Ferguson, que computou corretamente os primeiros 620 dígitos decimais de π, também à mão, entre maio de 1944 e julho de 1946, usando a identidade (que ele mesmo provara)

$$\pi \;=\; 12 \arctan\left(\frac{1}{4}\right) + 4 \arctan\left(\frac{1}{20}\right) + 4 \arctan\left(\frac{1}{1985}\right)\,.$$

Esse foi o último "record" obtido com cálculos manuais. Ferguson prosseguiu ainda, agora com o uso de uma calculadora de mesa, até atingir a marca de 808 dígitos, todos corretos.

Com o advento dos computadores eletrônicos tais cálculos deixaram de ser feitos por meios românticos. O primeiro cálculo computacional de π foi feito em 1949 por von Neumann[65] e colaboradores usando a fórmula de Machin no lendário computador ENIAC (considerado por muitos o primeiro computador eletrônico. Vide [339]), com suas 18 mil válvulas elétricas. Esse cálculo forneceu 2.037 dígitos decimais de π e consumiu 70 horas.

Em 1987, usando a aproximação de Borwein e Borwein, π foi calculado por um supercomputador com uma precisão de cem milhões de casas decimais. Essa precisão foi aumentada desde então. Em 1999, π era conhecido com $3 \times 2^{36} = 206.158.430.208$ (cerca de duzentos bilhões) de dígitos decimais. O feito é de Y. Kanada e D. Takahashi e foi alcançado com dois algoritmos distintos (para comparação), o dos irmãos Borwein e outro denominado Gauss-Legendre. O primeiro consumiu 46 horas de computação em um supercomputador e o segundo 37 horas. O récorde atual, obtido em 2003, é dos mesmos autores: 1,2411 trilhão de dígitos decimais, consumindo 600 horas de um supercomputador.

Em 1996 Bailey, Borwein e Plouffe publicaram um algoritmo que permite determinar o n-ésimo dígito hexadecimal de π sem o conhecimento dos dígitos precedentes. Em 1997 Plouffe descobriu um algoritmo para determinar o n-ésimo dígito de π em qualquer base, também sem o conhecimento dos dígitos precedentes.

Outras informações históricas, especialmente sobre esses desenvolvimentos mais recentes, podem ser encontradas em *"The quest for Pi"*, de D. H. Bailey, J. M. Borwein, P. B. Borwein e S. Plouffe. The Mathematical Intelligencer **19**, 50-57 (1997). Uma apresentação histórica mais detalhada e informações mais atuais podem ser encontradas em *"History of the formulas and algorithms for π"*, de Jesús Guillera Goyanes (arXiv:0807.0872 [math.HO], julho de 2008) .

Ainda que no passado a determinação de valores aproximados de π tivesse importância em áreas como a Física, a Astronomia e a Engenharia, dificilmente cálculos ultraprecisos de π podem ter relevância em aplicações: com apenas 37 dígitos decimais é possível computar o perímetro de um círculo com o "raio" do universo conhecido (cerca de $1,3 \times 10^{26}$ m) com uma precisão equivalente ao "diâmetro" de um átomo de hidrogênio (cerca de $1,0 \times 10^{-10}$ m). Há, porém, um certo interesse matemático em tais cálculos, envolvendo conjecturas sobre a distribuição dos dígitos decimais de π. Valores precisos de π são também úteis em simulações numéricas. Ainda assim, hoje em dia, a prática de cálculos ultraprecisos de π tem motivação predominantemente esportiva.

[63] Zacharias Dase (1824–1861).
[64] William Shanks (1812–1882).
[65] John von Neumann (1903–1957).

IF THESE CLOWNS ASK ME
FOR ONE MORE DECIMAL ON π
I'M GOING TO THROW UP!