Capítulo 25

Uma Breve Introdução à Teoria das Representações de Grupos

Conteúdo

25.1 Representações de Grupos 1247
25.2 Médias Invariantes. A Medida de Haar 1253
25.3 Representações de Grupos Compactos 1255
25.3.1 Representações de Grupos Compactos em Espaços de Hilbert Separáveis 1256
25.4 O Teorema de Peter-Weyl 1262
25.5 Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de SU(2) 1271
25.6 Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de $\mathscr{L}_+^\uparrow$ 1276
25.7 Exercícios Adicionais 1279

Grupos desempenham um papel importante na Física devido à sua relação com transformações de simetria. Na Física Quântica (na Mecânica Quântica ou na Teoria Quântica de Campos), o conjunto de estados puros de um sistema físico compõe um espaço de Hilbert e, portanto, torna-se relevante estudar a ação de grupos de simetria em espaços vetoriais. Essa é a motivação básica do estudo de representações de grupos, ao qual dedicamos o presente capítulo. Inicialmente fazemos uma apresentação resumida das ideias gerais da teoria de representações de grupos. Na Seção 25.2, página 1253, apresentamos a noção de medida invariante e na Seção 25.4, página 1262, apresentamos o importante Teorema de Peter-Weyl. Na Seção 25.5, página 1271, discutimos com algum detalhe um tema de grande interesse para a Física Quântica: a classificação de representações irredutíveis dos grupos SU(2). Há muitas referências que estendem e aprofundam o material aqui apresentado e limitamo-nos a sugerir algumas poucas: as referências [248], [28], [296], [116] e [347]. Para aplicações ao contexto de funções especiais destaca-se [340]. Para aplicações gerais à Física Quântica, vide [359], [346], [94] e [95].

Em algumas das seções que seguem faremos uso de algumas noções de Topologia e de Análise. A noção de *grupo topológico* foi introduzida na Seção 24.2, página 1220. As noções de *espaço topológico compacto* e de *espaço topológico localmente compacto* foram introduzido na Seção 34.3.1, página 1579. Vide também Seção 34.3, página 1579, e Seção 34.3.6, página 1611. A teoria básica dos *espaços de Hilbert* foi desenvolvida no Capítulo 40, página 2013. O tratamento de operadores compactos é feito na Seção 41.8, página 2173. Referências a material contido em outros capítulos deste texto serão feitas se e quando necessário.

25.1 Representações de Grupos

A noção de representação de grupos foi introduzida na Seção 2.1.9.2, página 110. Recordemo-la: uma *representação* de um grupo G em um espaço vetorial V é uma aplicação que a cada $g \in G$ associa um operador linear inversível $\Pi(g) : V \to V$ de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

1. $\Pi(g)\Pi(h) = \Pi(gh)$, $\forall g,\ h \in G$.
2. $\Pi(e) = \mathbb{1}$.
3. $\Pi(g^{-1}) = \Pi(g)^{-1}$, $\forall g \in G$.

Acima, e é a unidade de G e $\mathbb{1}$ o operador identidade agindo em V. O item 1 afirma que uma representação é um homomorfismo de G no grupo $\mathrm{GL}(V)$ dos operadores lineares inversíveis de V em V. Comentamos que as propriedades dos itens 2 e 3, acima, derivam da propriedade 1 (como é o caso para homomorfismos de grupos. Vide comentários à página 111), tendo sido colocadas aqui apenas por ênfase.

Podemos também, equivalentemente, dizer que uma representação de um grupo em um espaço vetorial V é uma ação à esquerda de G em V através de operadores lineares inversíveis.

• A representação trivial

A representação que associa todo $g \in G$ ao operador identidade em V, ou seja, tal que $\pi(g) = \mathbb{1}$, $\forall g \in G$, é denominada *representação trivial*.

• Intertwiners

Seja G um grupo e V_1, V_2 dois espaços vetoriais (sobre o mesmo corpo) onde atuem duas representações de G: Π_1 e Π_2, respectivamente em V_1 e V_2. Um operador $U : V_1 \to V_2$ tal que

$$U\Pi_1(g) \;=\; \Pi_2(g)U \;,$$

para todo $g \in G$, é dito ser um *operador de entrelaçamento* de Π_1 e Π_2. Operadores de entrelaçamento são mais frequentemente denominados *intertwiners*.

Voltaremos a falar sobre intertwiners quando tratarmos do importante Lema de Schur, adiante.

• Representações equivalentes

Duas representações Π_1 e Π_2 de um mesmo grupo G, agindo em espaços vetoriais V_1 e V_2, respectivamente, são ditas ser *representações equivalentes* se existir um operador linear inversível $U : V_1 \to V_2$ tal que

$$U\Pi_1(g) \;=\; \Pi_2(g)U$$

para todo $g \in G$, ou seja, se Π_1 e Π_2 possuírem um intertwiner inversível.

É muito fácil mostrar que a equivalência de duas representações é uma relação de equivalência (no sentido usual) e que, portanto, a classe de todas as representações de um grupo pode ser quebrada em classes de representações equivalentes.

Um grupo pode ter várias representações distintas (e inequivalentes) em um mesmo espaço vetorial.

E. 25.1 *Exercício*. Seja $G = (\mathbb{R},\ +)$ e $V = \mathbb{R}^2$. Mostre que

$$T_1(x) \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;, \quad T_2(x) \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad R(x) \;:=\; \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix} \;,$$

$x \in \mathbb{R}$, são três representações de G. Mostre que T_1 e T_2 são equivalentes (*sugestão:* tome $U = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$). Mostre que R e T_1 (ou T_2) não são equivalentes (*sugestão:* se o fossem, veja o que ocorreria para $x = 2\pi$). ♣

• Subespaços invariantes

Seja G um grupo, V um espaço vetorial e Π uma representação de G em V. Um subespaço W de V é dito ser um *subespaço invariante* por Π se $\Pi(g)w \in W$ para todo $w \in W$ e todo $g \in G$, ou seja, se $\Pi(G)W \subset W$.

Qualquer representação possui sempre pelo menos dois subespaços invariantes: aquele formado apenas pelo vetor nulo $W = \{0\}$ e aquele formado pelo espaço todo $W = V$. Esses subespaços invariantes são ditos *triviais*.

E. 25.2 *Exercício*. **1.** Mostre que a representação T_1, definida acima, tem um subespaço invariante de dimensão 1, a saber, o subespaço formado pelos vetores da forma $\left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $a \in \mathbb{R}$. Mostre que nenhum outro subespaço de dimensão 1 de $\mathbb{R}^2$ é invariante por T_1. **2.** Mostre que a representação T_2, definida acima, tem um subespaço invariante de dimensão 1, a saber, o subespaço formado pelos vetores da forma $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ b \end{smallmatrix}\right)$, $b \in \mathbb{R}$. Mostre que nenhum outro subespaço de dimensão 1 de $\mathbb{R}^2$ é invariante por T_2. **3.** Mostre que a representação R, definida acima, não tem nenhum subespaço invariante não-trivial. ♣

E. 25.3 *Exercício*. Verifique que as expressões abaixo definem representações de $G = (\mathbb{R},\ +)$ em $V = \mathbb{R}^4$ e identifique seus subespaços invariantes.

$$\Pi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos x & -\operatorname{sen} x \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}, \quad \Pi_3(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} x & \cos x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos x & -\operatorname{sen} x \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}.$$

✠

• Representações irredutíveis

De grande importância é o conceito de *representação irredutível de um grupo* G em um espaço vetorial V. Uma representação Π de um grupo G em um espaço vetorial V é dita ser *irredutível* se os seus únicos subespaços invariantes forem os triviais.

Uma representação que não é irredutível é dita ser *redutível*.

E. 25.4 *Exercício*. Mostre que as representações T_1 e T_2, definidas à página 1248, são redutíveis. Mostre que a representação R, também acima, é irredutível. ✠

Vamos supor que V seja um espaço de dimensão finita, digamos $n \geq 2$, e que Π seja uma representação de um grupo G em V que possua um subespaço invariante não-trivial W (ou seja, Π é redutível). Seja m (com $0 < m < n$) a dimensão de W. Então, é possível encontrar uma base em V tal que $\Pi(g)$ possui a representação matricial em blocos

$$\Pi(g) = \begin{pmatrix} \pi_1(g) & \phi(g) \\ 0 & \pi_2(g) \end{pmatrix}$$

para todo $g \in G$, onde $\pi_1(g)$ é uma matriz $m \times m$, $\pi_2(g)$ é uma matriz $(n-m)\times(n-m)$, e $\phi(g)$ é uma matriz $m \times (n-m)$. Mostrar isso é bem simples, basta representar cada $v \in V$ em uma base $e_1, \ldots, e_n$, onde $e_1 \ldots, e_m$ formam uma base de W. Faça-o!

O seguinte exercício revela uma propriedade importante dos blocos π_1 e π_2:

E. 25.5 *Exercício*. Mostre que π_1 e π_2 definidos acima são também *representações* de G. Para tal, mostre que, como $\Pi(g)\Pi(h) = \Pi(gh)$ para todos $g, h \in G$, então valem $\pi_1(g)\pi_1(h) = \pi_1(gh)$, $\pi_2(g)\pi_2(h) = \pi_2(gh)$ e $\pi_1(g)\phi(h) + \phi(g)\pi_2(h) = \phi(gh)$. ✠

Uma representação Π de um grupo G em um espaço vetorial de dimensão finita V é dita ser uma *representação totalmente redutível* se for redutível e se V puder ser escrita como uma soma direta de subespaços invariantes por Π: $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$. Em tal caso, $\Pi(g)$ pode ser escrita em uma base conveniente na forma de blocos

$$\Pi(g) = \begin{pmatrix} \pi_1(g) & & \\ & \ddots & \\ & & \pi_k(g) \end{pmatrix}$$

para todo $g \in G$, onde cada $\pi_i(g)$ é uma representação de G agindo no espaço invariante V_i de Π. Em um tal caso podemos escrever Π na forma $\Pi = \pi_1 \oplus \cdots \oplus \pi_k$ (vide a noção de representação soma direta à página 151. Vide, em particular, a definição (2.73)).

Particularmente importante é a situação em que Π é totalmente redutível e cada π_i é irredutível. Em tal caso dizemos que Π é uma *representação maximalmente redutível*, ou ainda uma *representação completamente redutível*.

E. 25.6 *Exercício*. Sejam as representações T_1 e T_2 definidas à página 1248. Mostre que T_1 e T_2 não são totalmente redutíveis. ✠

E. 25.7 *Exercício*. Sejam as representações Π_1, Π_2 e Π_3 definidas à página 1248. Mostre que Π_1 e Π_2 são totalmente mas não maximalmente redutíveis. Mostre que Π_3 é maximalmente redutível. ✠

As definições acima, de representações totalmente e maximalmente redutíveis, podem ser estendidas ao caso de representações em espaços de dimensão não-finita (notadamente, a espaços de Hilbert separáveis), mas não faremos uso dessas noções em nosso tratamento inicial, restringindo-nos ao caso de dimensão finita. Nesse contexto, a seguinte proposição é importante:

Proposição 25.1 *Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita, dotado de um produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e seja Π uma representação de um grupo G por operadores unitários (em relação a esse produto escalar). Então, ou Π é irredutível ou é maximalmente redutível.* □

Para provar essa proposição, vamos antes demonstrar o seguinte lema, o qual tem importância por si só, como veremos mais adiante.

Lema 25.1 *Seja V um espaço vetorial complexo, dotado de um produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e seja Π uma representação de um grupo G por operadores unitários (em relação a esse produto escalar). Se W é um subespaço invariante por Π, então seu complemento ortogonal $W^\perp$ (em relação ao produto escalar) também o é.* □

Prova. Como Π é unitária, vale $\Pi(g)^* = \Pi(g)^{-1} = \Pi\big(g^{-1}\big)$ para todo $g \in G$. Seja $w' \in W^\perp$ e $w \in W$. Então, para qualquer $g \in G$

$$\big\langle \Pi(g)w', \, w \big\rangle = \big\langle w', \, \Pi(g)^* w \big\rangle = \big\langle w', \, \Pi(g^{-1})w \big\rangle = 0 ,$$

pois $\Pi\big(g^{-1}\big)w \in W$, já que W é invariante, e w' é ortogonal a todo elemento de W. Como w é um elemento arbitrário de W, isso mostrou que $\Pi(g)w' \in W^\perp$ para todo $g \in G$, e para qualquer $w' \in W^\perp$, provando assim que $W^\perp$ é invariante. ■

Prova da Proposição 25.1. Se Π é unitária e é redutível, então V possui um subespaço invariante não-trivial V_1 e, pelo lema acima, $V_2 \equiv V_1^\perp$ é também invariante. Logo, Π é totalmente redutível, $V = V_1 \oplus V_2$ e $\Pi = \pi_1 \oplus \pi_2$. Agora, é fácil ver que cada π_1 é também uma representação unitária (justifique!). Assim, podemos aplicar a mesma conclusão a cada π_i e, se π_i for redutível, podemos tornar a quebrar o subespaço V_i em subespaços invariantes ainda menores e π_i em uma soma de representações unitárias menores. Como a dimensão de V é finita, esse procedimento terá forçosamente um fim e cada representação menor a que se chegar será forçosamente irredutível. ■

E. 25.8 *Exercício*. Mostre que as mesmas conclusões valem para representações ortogonais em espaços vetoriais reais. ✠

O Lema 25.1 possui um outro corolário relevante ao contexto de representações unitárias em espaços de Hilbert[1].

Corolário 25.1 *Seja V um espaço de Hilbert complexo, dotado de um produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e seja Π uma representação de um grupo G por operadores unitários (em relação a esse produto escalar). Se W é um subespaço invariante por Π, então seu fecho $\overline{W}$ também o é.* □

Prova. Pela Proposição 40.2, página 2019, tem-se $\overline{W} = \big(W^\perp\big)^\perp$. Pelo Lema 25.1, $W^\perp$ é um subespaço invariante por Π e pelo mesmo Lema 25.1, $\big(W^\perp\big)^\perp$ também o é. ■

• Representações irredutíveis para operadores

Um outro conceito importante é o seguinte. Uma representação Π de um grupo G em um espaço vetorial V é dita ser uma *representação irredutível para operadores* se possuir a seguinte propriedade: os únicos operadores lineares $A : V \to V$ tais que vale

$$A\Pi(g) = \Pi(g)A$$

para todo $g \in G$ são da forma $A = \lambda\mathbb{1}$, ou seja, são múltiplos da identidade.

[1] Espaços de Hilbert são estudados no Capítulo 40, página 2013.

Podemos nos perguntar: qual a relação entre essa noção e a de representação irredutível? Vamos demonstrar adiante os seguintes fatos:

1. Em um espaço de Hilbert, toda representação unitária que seja irredutível para operadores é também irredutível.
2. Toda representação irredutível complexa de dimensão finita é irredutível para operadores.

Várias das consequências mais importantes da teoria das representações de grupos são extraídas dessas observações. Como vemos, ambas as afirmações juntas dizem-nos que, para representações unitárias e em espaços de Hilbert de dimensão finita (de particular interesse na Física Quântica), os conceitos de representação irredutível e representação irredutível para operadores são coincidentes. Esse fato é importante por diversas razões. Uma delas é prática: por vezes, a maneira mais fácil de se demonstrar que uma dada representação unitária e de dimensão finita de um grupo é irredutível e provar que a mesma é irredutível por operadores.

Vamos começar demonstrando a afirmação 1, a qual formulamos na seguinte proposição:

Proposição 25.2 *Seja Π uma representação unitária em um espaço de Hilbert complexo $\mathcal{H}$. Se Π é irredutível para operadores, então Π é também uma representação irredutível.* □

Prova. Vamos supor que W seja um subespaço invariante por Π. Pelo Corolário 25.1, página 1250, podemos supor que W é fechado. Seja P o projetor sobre W. Então, pelo Teorema da Decomposição Ortogonal, Teorema 40.2, página 2019, $\mathbb{1}-P$ é o projetor sobre $W^\perp$, que é também invariante, pois Π é unitária. É evidente que, para cada $x \in \mathcal{H}$ vale

$$\Pi(g)Px \ = \ P\Pi(g)Px \ ,$$

pois $\Pi(g)Px \in W$. Por outro lado, como $x = Px + (\mathbb{1}-P)x$, então

$$P\Pi(g)x \ = \ P\Pi(g)Px + P\Pi(g)(\mathbb{1}-P)x \ = \ P\Pi(g)Px \ ,$$

pois $P\Pi(g)(\mathbb{1}-P)x = 0$, já que $W^\perp$ é invariante. Comparando-se, concluímos que $\Pi(g)Px = P\Pi(g)x$ para todo $x \in \mathcal{H}$ e todo $g \in G$, ou seja,

$$\Pi(g)P \ = \ P\Pi(g)$$

para todo $g \in G$. Porém, como Π é irredutível para operadores, isso só é possível se $P = \lambda\mathbb{1}$. Como $P^2 = P$, tem-se $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. No primeiro caso $P = 0$, no segundo, $P = \mathbb{1}$, ou seja, no primeiro caso $W = \{0\}$ e no segundo $W = \mathcal{H}$. Ora, isso diz precisamente que Π é irredutível. ■

• O Lema de Schur

Vamos agora passar à demonstração da afirmação 2 da página 1251, acima. A mesma é consequência (Corolário 25.3, abaixo) de um lema algébrico de grande importância: o chamado Lema de Schur[2].

Lema 25.2 (Lema de Schur) *Se Π_1 e Π_2 são duas representações irredutíveis de um grupo G em espaços vetoriais não-triviais[3] V_1 e V_2, respectivamente, e $A : V_1 \to V_2$ é um intertwiner de Π_1 e Π_2, ou seja, $A\Pi_1(g) = \Pi_2(g)A$ para todo $g \in G$, então ou A é bijetor ou $A = 0$.* □

Prova. Sejam $\operatorname{Ker}(A) := \{x \in V_1 |\, Ax = 0\}$ e $\operatorname{Ran}(A) := \{y \in V_2 |\, y = Ax$ para algum $x \in V_1\}$, o núcleo e a imagem de A, respectivamente. É fácil ver que $\operatorname{Ker}(A)$ e $\operatorname{Ran}(A)$ são subespaços invariantes de Π_1 e Π_2, respectivamente. De fato, se $x \in \operatorname{Ker}(A)$ tem-se $Ax = 0$. Logo, $A\Pi_1(g)x = \Pi_2(g)Ax = 0$, provando que $\Pi_1(g)x \in \operatorname{Ker}(A)$ para todo $g \in G$, ou seja, $\operatorname{Ker}(A)$ é invariante por Π_1. Analogamente, se $y \in \operatorname{Ran}(A)$, temos que $y = Ax$ para algum $x \in V_1$. Assim, $\Pi_2(g)y = \Pi_2(g)Ax = A\Pi_1(g)x \in \operatorname{Ran}(A)$, mostrando que $\operatorname{Ran}(A)$ é invariante por Π_2.

Pelas hipóteses do lema, Π_1 e Π_2 são irredutíveis e só possuem subespaços invariantes triviais. Podem, portanto, valer apenas os seguintes quatro casos:

[2] Issai Schur (1875–1941). O trabalho original de Schur é Issai Schur "Neue Begrundung der Theorie der Gruppencharaktere", Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 406–432 (1905).

[3] Um espaço vetorial é dito não-trivial se não for composto apenas pelo vetor nulo.

1. $\operatorname{Ker}(A) = V_1$ e $\operatorname{Ran}(A) = V_2$.
2. $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$ e $\operatorname{Ran}(A) = V_2$.
3. $\operatorname{Ker}(A) = V_1$ e $\operatorname{Ran}(A) = \{0\}$.
4. $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$ e $\operatorname{Ran}(A) = \{0\}$.

Os casos 1 e 4 são impossíveis: se $\operatorname{Ker}(A) = V_1$ não se pode ter $\operatorname{Ran}(A) = V_2$ (pois se $\operatorname{Ker}(A) = V_1$, então $\operatorname{Ran}(A) = \{0\}$); se $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$ não se pode ter $\operatorname{Ran}(A) = \{0\}$ (pois se $\operatorname{Ran}(A) = \{0\}$, então $\operatorname{Ker}(A) = V_1$). Assim, podem valer apenas os casos 2 e 3. No caso 2 tem-se que A é bijetora. No caso 3, tem-se que $A = 0$. ■

O Lema de Schur tem várias consequências importantes que listamos nos corolários que seguem. Ele será também usado de forma crucial na demonstração do importante Teorema de Peter-Weyl, Teorema 25.5, página 1263.

Corolário 25.2 *Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais não-triviais complexos de dimensão finita, e sejam Π_1 e Π_2 duas representações irredutíveis de um grupo G em V_1 e V_2, respectivamente. Seja $A : V_1 \to V_2$ é um intertwiner de Π_1 e Π_2, ou seja, $A\Pi_1(g) = \Pi_2(g)A$ para todo $g \in G$. Se A for bijetor, então A e único, a menos de multiplicação por escalar.* □

Prova. Se A é bijetor, então a dimensão de V_1 é igual à de V_2 e A pode ser visto como uma matriz quadrada. Seja B um outro intertwiner de Π_1 e Π_2. Então, para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$ tem-se $(\lambda A - B)\Pi_1(g) = \Pi_2(g)(\lambda A - B)$. Portanto, pelo Lema de Schur, Lema 25.2, ou $\lambda A - B$ é nulo ou é inversível. Afirmamos, porém, que podemos escolher λ de modo que $\det(\lambda A - B) = 0$. De fato, como A possui inversa, temos $\lambda A - B = A\big(\lambda\mathbb{1} - A^{-1}B\big)$ e vale $\det(\lambda A - B) = \det(A)\det\big(\lambda\mathbb{1} - A^{-1}B\big)$. Agora, $\det(A) \neq 0$, mas $\det\big(\lambda\mathbb{1} - A^{-1}B\big)$ é um polinômio não-nulo em λ (o polinômio característico da matriz $A^{-1}B$) e polinômios sempre têm raízes complexas. Se escolhermos λ como uma dessas raízes, teremos que a matriz $\lambda A - B$ não será inversível e, portanto, será nula e valerá $B = \lambda A$. ■

Corolário 25.3 *Se Π é uma representação irredutível complexa de dimensão finita de um grupo G, então Π é irredutível para operadores.* □

Prova. Seja A tal que $A\Pi(g) = \Pi(g)A$ para todo $g \in G$. Sabemos também que $\mathbb{1}\Pi(g) = \Pi(g)\mathbb{1}$, trivialmente. Pela unicidade afirmada no Corolário 25.2, $A = \lambda\mathbb{1}$. ■

A afirmação do Corolário 25.3 possui uma extensão importante para representações em espaços de Hilbert.

Corolário 25.4 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo e seja Π uma representação irredutível de um grupo G por operadores limitados agindo em $\mathcal{H}$. Seja $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador limitado e agindo em $\mathcal{H}$ que satisfaça $A\Pi(g) = \Pi(g)A$ para todo $g \in G$. Então $A = \lambda\mathbb{1}$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.* □

Prova. Temos trivialmente que $\mathbb{1}\Pi(g) = \Pi(g)\mathbb{1}$ para todo $g \in G$. Logo, para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$, vale também $(A - \lambda\mathbb{1})\Pi(g) = \Pi(g)(A - \lambda\mathbb{1})$ para todo $g \in G$. Pelo Lema de Schur, Lema 25.2, ou $A - \lambda\mathbb{1} = 0$ ou $A - \lambda\mathbb{1}$ é bijetor. Mas se escolhermos λ no espectro de A (que é não-vazio. Vide e.g., Proposição 41.36, página 2106), isso não seria possível. Logo, para um tal $\lambda \in \sigma(A)$ vale $A = \lambda\mathbb{1}$ ■

Outro corolário útil é o seguinte:

Corolário 25.5 *As representações irredutíveis complexas de dimensão finita de um grupo Abeliano são unidimensionais.* □

Prova. Se G é Abeliano e Π uma representação de G, vale $\Pi(h)\Pi(g) = \Pi(g)\Pi(h)$ para quaisquer $g, h \in G$. Assim, se Π é irredutível complexa e de dimensão finita, segue do corolário anterior que $\Pi(h) = \lambda(h)\mathbb{1}$, ou seja, $\Pi(h)$ é uma matriz diagonal com $\lambda(h)$ na diagonal. Como Π é irredutível, a dimensão do espaço só pode ser igual a 1. ■

A afirmação do Corolário 25.5 não é necessariamente válida no caso de representações irredutíveis reais de dimensão finita de um grupo Abeliano: o grupo SO(2) tem representações irredutíveis reais que **não** são unidimensionais. Por exemplo, aquela que define o próprio grupo SO(2): $R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\mathrm{sen}(\phi) \\ \mathrm{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$, $\phi \in (-\pi, \ \pi]$.

• **Exemplos de representações irredutíveis de grupos Abelianos**

E. 25.9 *Exercício*. Mostre que as representações irredutíveis complexas de dimensão finita do grupo $\mathbb{Z}_N$, $N \geq 2$, são

$$\Pi_k(a) \ = \ \exp\left(\frac{2\pi i k}{N} a\right) \ ,$$

$a \in \mathbb{Z}_N$, $k = 0, \ , \ldots \ N-1$. ✣

E. 25.10 *Exercício*. Mostre que as representações irredutíveis, complexas, contínuas e de dimensão finita do grupo SO(2) são

$$\Pi_p(\phi) \ = \ \exp(ip\phi) \, ,$$

$\phi \in [0, \ 2\pi)$, $p \in \mathbb{Z}$. ✣

E. 25.11 *Exercício*. Mostre que as representações irredutíveis, complexas, contínuas e de dimensão finita do grupo $(\mathbb{R}, \ +)$ são

$$\Pi_z(x) \ = \ \exp(zx) \ ,$$

$x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. ✣

E. 25.12 *Exercício*. Mostre que as representações irredutíveis, unitárias, contínuas e de dimensão finita do grupo $(\mathbb{R}, \ +)$ são

$$\Pi_k(x) \ = \ \exp(ikx) \ ,$$

$x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$. ✣

E. 25.13 *Exercício*. Mostre que as representações irredutíveis, complexas, contínuas e de dimensão finita do grupo $(\mathbb{R}_+, \ \cdot)$ são

$$\Pi_z(x) \ = \ \exp\big(z\ln(x)\big) \ =: \ x^z \ ,$$

$x \in \mathbb{R}_+$, $z \in \mathbb{C}$. ✣

E. 25.14 *Exercício*. Mostre que as representações irredutíveis, unitárias, contínuas e de dimensão finita do grupo $(\mathbb{R}_+, \ \cdot)$ são

$$\Pi_k(x) \ = \ \exp\big(ik\ln(x)\big) \ = \ x^{ik} \ ,$$

$x \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{R}$. ✣

25.2 Médias Invariantes. A Medida de Haar

Seja G um grupo finito e seja $f : G \to \mathbb{C}$ uma função que a cada elemento g do grupo associa um número complexo $f(g)$. Podemos definir a média de f em G por

$$\mu(f) \ := \ \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} f(g) \ ,$$

onde $\#G$ é o número de elementos de G.

Essa noção de média de uma função em um grupo finito possui algumas propriedades importantes. Seja h um elemento fixo mas arbitrário de G e definamos as funções $f_h^e(g) := f(hg)$, $f_h^d(g) := f(gh)$ e $f^i(g) = f(g^{-1})$. Então, vale que para qualquer $h \in G$

$$\mu(f_h^e) \ = \ \mu(f_h^d) \ = \ \mu(f^i) \ = \ \mu(f) \ ,$$

ou seja, a média é invariante por multiplicação à direita ou à esquerda por elementos de G ou pela inversão do argumento de f.

E. 25.15 *Exercício*. Mostre isso! ✣

Note-se também que a média acima foi normalizada de modo que se $f(g) = 1$ para todo $g \in G$, então $\mu(f) = 1$. Por fim, note-se também que a média acima é positiva: se $f \geq 0$, então $\mu(f) \geq 0$. Fora isso, se $f \geq 0$ e $\mu(f) = 0$, então $f(g) = 0$ para todo $g \in G$.

Grupos finitos não são os únicos a possuir médias invariantes positivas. Vamos a alguns exemplos. Para o grupo SO(2) podemos definir

$$\mu(f) \ := \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \ ,$$

caso a integral seja finita. É fácil ver que as propriedades de invariância observadas no caso de grupos finitos são válidas aqui também, inclusive a normalização e a positividade. Para o grupo $(\mathbb{R}, \ +)$ podemos definir

$$\mu(f) \ := \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \ ,$$

caso a integral seja finita. Como se vê essa média é positiva, invariante por translações $f(x) \to f(x+y)$ e pela troca do argumento da f por seu inverso: $f(x) \to f(-x)$, em analogia ao caso de grupos finitos. Note-se, porém, que essa média não pode ser normalizada, pois o grupo não é compacto. No caso do grupo $(\mathbb{Z}, \ +)$ a média invariante é dada por

$$\mu(f) \ := \ \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) \ ,$$

caso o somatório infinito seja convergente.

Outro exemplo é o grupo $(\mathbb{R}_+, \ \cdot)$. Aqui a média invariante é

$$\mu(f) \ := \ \int_0^{\infty} f(x) \, \frac{1}{x} dx \ ,$$

caso a integral seja finita.

E. 25.16 *Exercício*. Mostre que essa média é invariante pelas transformações $f(x) \to f(xy)$, $y \in \mathbb{R}_+$, e por $f(x) \to f(1/x)$. ✣

Novamente, note-se que essa média não é normalizada, pois $\mathbb{R}_+$ não é compacto.

Podemos nos perguntar: quais grupos possuem médias invariantes positivas como nos exemplos acima? Uma resposta parcial foi dada por Haar[4]. O teorema de Haar afirma que se G é um grupo compacto, então existe uma medida de integração $d\mu(g)$ em G, denominada *medida de Haar*, tal que se a média

$$\mu(f) \ = \ \int_G f(g) d\mu(g)$$

é finita, então tem-se

$$\int_G f(g) d\mu(g) \ = \ \int_G f(hg) d\mu(g) \ = \ \int_G f(gh) d\mu(g) \ = \ \int_G f(g^{-1}) d\mu(g)$$

para todo $h \in G$. Fora isso, a média é normalizada: $\int_G d\mu(g) = 1$ e positiva: se $f \geq 0$, então $\int_G f d\mu \geq 0$ sendo que se $f \geq 0$ e $\int_G f d\mu = 0$, então $f(g) = 0$ para quase todo $g \in G$.

O Teorema de Haar pode ser parcialmente estendido a grupos localmente compactos (como $(\mathbb{R}, \ +)$ e $(\mathbb{R}_+, \ \cdot)$): Se G é localmente compacto existem medidas positivas de integração $d\mu^e(g)$ e $d\mu^d(g)$ em G tais que

$$\int_G f(g) d\mu^e(g) \ = \ \int_G f(hg) d\mu^e(g) \ = \ \int_G f(g^{-1}) d\mu^e(g)$$

e

$$\int_G f(g) d\mu^d(g) \ = \ \int_G f(gh) d\mu^d(g) \ = \ \int_G f(g^{-1}) d\mu^d(g) \ ,$$

[4] Alfréd Haar (1885–1933).

para quaisquer $h \in G$. Ou seja, existem uma medida invariante à esquerda e uma outra invariante à direita. Em alguns casos essas medidas μ^d e μ^e coincidem (por exemplo, para grupos Abelianos), mas tal nem sempre é o caso para grupos não-Abelianos. Um fato importante, que não demonstraremos aqui, é que no caso de grupos compactos a medida invariante à esquerda e a medida invariante à direita também coincidem.

No caso de grupos apenas localmente compactos as duas medidas podem ser distintas e nem sempre podem ser normalizadas. O seguinte exercício ilustra esses fatos.

E. 25.17 *Exercício*. Mostre que o conjunto de todas matrizes reais da forma $m(a,\ b) := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, com $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$, forma um grupo com relação ao produto usual de matrizes. Esse grupo, que denotaremos por G, é não-Abeliano, não-compacto mas localmente compacto. Verifique que $m(a,\ b)m(x,\ y) = m(ax,\ ay + b)$ e que $m(x,\ y)m(a,\ b) = m(ax,\ xb + y)$.

Seja $f : G \to \mathbb{R}$ uma função contínua e de suporte compacto que denotaremos por $f\big(m(x,\ y)\big)$, sendo $(x,\ y) \in (0,\ \infty) \times \mathbb{R}$. Defina

$$\mu_e(f) := \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} f\big(m(x,\ y)\big)\,\frac{dx\,dy}{x^2} \qquad \text{e} \qquad \mu_d(f) := \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} f\big(m(x,\ y)\big)\,\frac{dx\,dy}{x}\ .$$

Mostre que $\mu_e(f)$ é invariante à esquerda pela ação de G e que $\mu_d(f)$ é invariante à direita, ou seja, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} f\Big(m(a,\ b)m(x,\ y)\Big)\,\frac{dx\,dy}{x^2} = \mu_e(f) \qquad \text{e que} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} f\Big(m(x,\ y)m(a,\ b)\Big)\,\frac{dx\,dy}{x} = \mu_d(f)\ .$$

para toda $m(a,\ b) \in G$. *Sugestão:* constate e use o fato que o determinante Jacobiano da transformação $(x,\ y) \mapsto (ax,\ ay + b)$ vale a^2, enquanto que o determinante Jacobiano da transformação $(x,\ y) \mapsto (ax,\ xb + y)$ vale a.

Do exposto acima vê-se que para o grupo em questão a medida invariante à esquerda, que na parametrização usada é dada por $\frac{dx\,dy}{x^2}$, difere da medida invariante à direita, que na mesma parametrização é dada por $\frac{dx\,dy}{x}$. ✠

Na presente versão destas Notas não nos estenderemos no estudo da medida de Haar. O estudante é convidado a procurar os clássicos do assunto (p. ex. [247]: "The Haar Integral", de Leopoldo Nachbin[5]. Vide também [149]-[150]). Como veremos, a medida de Haar de grupos compactos desempenha um papel muito importante no estudo das representações dessa classe de grupos. A construção da medida de Haar especificamente em grupos de Lie é mais simples, vide e.g., [344].

25.3 Representações de Grupos Compactos

Nessa seção trataremos de alguns aspectos mais profundos de representações de grupos compactos e, para tal, alguma familiaridade com noções de Topologia, com a teoria dos Espaços de Hilbert e com a teoria dos operadores compactos é requerida.

• Representações de grupos topológicos em espaços de Hilbert separáveis

Seja G um grupo topológico e seja $\Pi : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ uma representação de G em um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$. Aqui, $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ denota o grupo dos operadores lineares inversíveis agindo em $\mathcal{H}$. O produto escalar em $\mathcal{H}$ será denotado por $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathcal{H}}$, ou simplesmente por $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$, e a norma por $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, ou simplesmente por $\|\cdot\|$. Vamos no que segue considerar apenas representações por operadores limitados em $\mathcal{H}$.

Dizemos que Π é uma *representação fortemente contínua* se para cada $g \in G$ e todo $u \in \mathcal{H}$ valer $\|\Pi(g)u - \Pi(g')u\| \to 0$ sempre que $g' \to g$. Mais tecnicamente, isso significa que para cada $g \in G$ e todo $u \in \mathcal{H}$ vale que para cada $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $N_{g,\,\epsilon} \ni g$ tal que $\|\Pi(g)u - \Pi(g')u\| < \epsilon$ para todo $g' \in N_{g,\,\epsilon}$.

No que segue trataremos quase exclusivamente de representações que sejam fortemente contínuas e, como usual, denotaremos por $\|\Pi(h)\|$ a norma operatorial[6] de $\Pi(h)$ com $h \in G$.

• Representações limitadas

Uma representação $\Pi : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ é dita ser uma *representação limitada* se $\sup_{g\in G}\|\Pi(g)\| < \infty$. Um fato que nos será relevante é que se G for compacto e Π fortemente contínua, então Π é uma representação limitada. Isso será estabelecido no Corolário, 25.6, logo abaixo. Faremos uso do seguinte lema sobre grupos localmente compactos, o qual possui interesse por si só:

[5] Leopoldo Nachbin (1922–1993). Vide http://www.dmm.im.ufrj.br/doc/nachbin.htm

[6] A noção de norma operatorial de um operador agindo em um espaço de Banach ou de Hilbert é introduzida na Seção 41.1, página 2054.

Lema 25.3 *Seja G um grupo topológico localmente compacto e seja $\Pi : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ uma representação de G por operadores limitados inversíveis em um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$. Assumamos também que Π seja fortemente contínua.*

Seja $g \in G$ e seja C_g uma vizinhança compacta de g. Então, existe uma constante finita $K_{C_g} > 0$ tal que

$$\big\|\Pi(h)\big\| \le K_{C_g}$$

para todo $h \in C_g$. □

Prova. Seja $g \in G$ e seja C_g uma vizinhança compacta de g. Para $u \in \mathcal{H}$, defina-se $\mathcal{O} \equiv \mathcal{O}_{u,\,C_g} := \{\Pi(h)u,\ h \in C_g\}$. Como C_g é compacto e Π é fortemente contínua, segue (do Teorema 34.5, página 1584) que $\mathcal{O}$ é um subconjunto compacto de $\mathcal{H}$ e é, portanto, limitado (vide Teorema 34.11, página 1591). Logo, o conjunto de operadores $\mathcal{S} := \{\Pi(h),\ h \in C_g\}$ tem a propriedade que para cada $u \in \mathcal{H}$ existe uma constante finita $M_u > 0$ tal que $\big\|\Pi(h)u\big\| \le M_u$ para todo $\Pi(h) \in \mathcal{S}$. Pelo Teorema de Banach-Steinhaus, Teorema 41.6, página 2072, existe M finito tal que $\big\|\Pi(h)\big\| \le M$ para todo $\Pi(h) \in \mathcal{S}$. Essa constante M é a constante K_{C_g} do enunciado, ela depende apenas da vizinhança compacta C_g escolhida. ■

25.3.1 Representações de Grupos Compactos em Espaços de Hilbert Separáveis

Para representações de grupos compactos em espaços de Hilbert separáveis, tema no qual focaremos agora, vale o seguinte:

Corolário 25.6 *Seja G um grupo topológico compacto e seja $\Pi : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ uma representação de G por operadores limitados inversíveis em um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$. Assumamos também que Π seja fortemente contínua. Então, Π é uma representação limitada, ou seja, existe uma constante finita $K > 0$ tal que $\big\|\Pi(g)\big\| \le K$ para todo $g \in G$.* □

Prova. Use-se o Lema 25.3 tomando-se $C_g = G$. ■

• Equivalência com representações unitárias

Seja G um grupo compacto e seja μ sua medida invariante. Vamos supor que Π seja uma representação de G por operadores limitados em um espaço de Hilbert complexo $\mathcal{H}$ no qual esteja definido um produto escalar $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$. Vamos supor também que Π seja fortemente contínua.

Com o uso de Π e $d\mu$ podemos definir em $\mathcal{H}$ um outro produto escalar $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{G,\,\Pi,\,\mu}$, que denotaremos simplificadamante por $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_G$, através da expressão

$$\langle x,\ y\rangle_G := \int_G \Big\langle \Pi(g)x,\ \Pi(g)y\Big\rangle\, d\mu(g)\ ,$$

$x,\ y \in \mathcal{H}$. (Recorde-se que para um grupo compacto vale $\int_G d\mu(g) = 1$).

E. 25.18 *Exercício*. Prove que essa expressão de fato define um produto escalar em $\mathcal{H}$. A única dificuldade está em provar que $\langle x,\ x\rangle_G = 0$ se somente se $x = 0$. ✠

Denotemos por $\|\cdot\|_G$ a norma em $\mathcal{H}$ definida pelo produto escalar $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_G$:

$$\|x\|_G^2 := \int_G \Big\|\Pi(g)x\Big\|^2\, d\mu(g)\ ,$$

e demonstremos a seguinte afirmação:

Lema 25.4 *A norma $\|\cdot\|_G$ e a norma original do espaço de Hilbert, $\|\cdot\|$, são equivalentes. Logo, $\mathcal{H}$ é também um espaço de Hilbert em relação ao produto escalar $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_G$.* □

Prova. Das hipóteses e do Corolário 25.6, página 1256, que existe constante $K>0$ tal que $\big\|\Pi(g)\big\|\leq K$ para todo $g\in G$. Logo, para $x\in\mathcal{H}$,

$$\|x\|_G^2 \;=\; \int_G \Big\|\Pi(g)x\Big\|^2 d\mu(g) \;\leq\; K^2\,\|x\|^2\int_G d\mu(g) \;=\; K^2\,\|x\|^2\,. \tag{25.1}$$

Por outro lado, temos que $\|x\| = \Big\|\Pi\big(g^{-1}\big)\Pi(g)x\Big\| \leq \Big\|\Pi\big(g^{-1}\big)\Big\|\,\Big\|\Pi(g)x\Big\| \leq K\Big\|\Pi(g)x\Big\|$. Logo, pela positividade da medida μ,

$$\int_G\left(\|x\|^2-K^2\Big\|\Pi(g)x\Big\|^2\right)\,d\mu(g)\;\leq\;0\,.$$

Assim,

$$\|x\|^2 \;=\; \int_G\|x\|^2\,d\mu(g) \;\leq\; K^2\int_G\Big\|\Pi(g)x\Big\|^2 d\mu(g) \;=\; K^2\|x\|_G^2\,. \tag{25.2}$$

Em (25.1) e (25.2) estabelecemos que para todo $x\in\mathcal{H}$ vale $K^{-1}\|x\|\leq\|x\|_G\leq K\,\|x\|$, provando que as normas $\|\cdot\|_G$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes. ■

O fato mais importante sobre esse produto escalar é o seguinte: para todo $h\in G$ e todos $x,\,y\in\mathcal{H}$ valem

$$\Big\langle\Pi(h)x,\;\Pi(h)y\Big\rangle_G \;=\; \langle x,\;y\rangle_G \qquad\text{e}\qquad \Big\langle x,\;\Pi(h)y\Big\rangle_G \;=\; \Big\langle\Pi(h^{-1})x,\;y\Big\rangle_G\,.$$

E. 25.19 *Exercício*. Prove a primeira relação usando a invariância da medida μ. Prove a segunda usando a primeira. ✣

Essas igualdades afirmam que, no espaço de Hilbert complexo $\mathcal{H}$ com o produto escalar $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_G$, cada $\Pi(h)$, $h\in G$, é um operador *unitário*. Como consequência, vale a seguinte afirmação:

Proposição 25.3 *Seja G um grupo topológico compacto e seja $\Pi: G\to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ uma representação de G por operadores limitados inversíveis em um espaço de Hilbert complexo separável $\mathcal{H}$. Assumamos também que Π seja fortemente contínua. Então, Π é equivalente a uma representação unitária.* □

Essa ideia de se modificar o produto escalar em $\mathcal{H}$ da forma acima explicitada de modo a transformar Π em uma representação unitária é conhecida como *truque de Weyl*.

• O operador de Peter-Weyl

Vamos agora definir e estudar propriedades de um objeto que nos será útil no estudo de representações de grupos compactos que imediatamente faremos. Trata-se do *operador de Peter-Weyl* (também denominado *operador de Weyl*). Esse operador foi introduzido e analisado na referência citada na nota-de-rodapé 11, página 1262.

Teorema 25.1 *Seja G um grupo topológico compacto e seja $\Pi: G\to\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ uma representação de G por operadores lineares limitados em um espaço de Hilbert complexo separável $\mathcal{H}$. Assumamos também que Π seja fortemente contínua.*

Para cada $y\in\mathcal{H}$, defina-se o operador linear $\mathcal{W}_y:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, denominado operador de Peter-Weyl*, por*

$$\mathcal{W}_y x \;:=\; \int_G\Big\langle\Pi(g)y,\;x\Big\rangle\,\Pi(g)y\;d\mu(g)\,,\qquad x\in\mathcal{H}\,. \tag{25.3}$$

(Que esse operador está definido para todo $x\in\mathcal{H}$ decorre facilmente da hipótese de Π ser uma representação limitada e G compacto). Então, valem as seguintes afirmações:

1. *$\mathcal{W}_y$ é limitado.*
2. *$\mathcal{W}_y$ é autoadjunto: $\mathcal{W}_y=\mathcal{W}_y^*$.*

3. *$\mathcal{W}_y$ é um operador de Hilbert-Schmidt*[7]*.*
4. *Para todo $h\in G$ e todo $y\in\mathcal{H}$ vale $\Pi(h)\mathcal{W}_y=\mathcal{W}_y\Pi\big(h^{-1}\big)^*$. Se Π for uma representação unitária, isso diz que $\Pi(h)\mathcal{W}_y=\mathcal{W}_y\Pi\big(h\big)$.*
5. *Para $y\neq 0$ tem-se $\mathcal{W}_y\neq 0$.* □

Demonstração. *Prova do item 1.* Já vimos (Corolário 25.6, página 1256) que, sob as hipóteses, existe $K>0$ tal que $\big\|\Pi(g)\big\|\leq K$ para todo $g\in G$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\big\|\mathcal{W}_y x\big\| \;\leq\; \int_G\Big|\Big\langle\Pi(g)y,\;x\Big\rangle\Big|\;\big\|\Pi(g)y\big\|\;d\mu(g)\;\leq\;K\big\|y\big\|\int_G\Big\|\Pi(g)y\Big\|\;\|x\|\;d\mu(g)\;\leq\;K^2\big\|y\big\|^2\|x\|\,.$$

Daí, vale $\|\mathcal{W}_y\|\leq K^2\|y\|^2$.

Prova do item 2. Para $x,\;x'\in\mathcal{H}$, tem-se

$$\begin{aligned}\big\langle x'\,,\mathcal{W}_y x\big\rangle \;&:=\; \int_G\Big\langle\Pi(g)y,\;x\Big\rangle\Big\langle x',\;\Pi(g)y\Big\rangle\,d\mu(g) \;=\; \int_G\Big\langle\overline{\Big\langle x',\;\Pi(g)y\Big\rangle}\Pi(g)y,\;x\Big\rangle\;d\mu(g)\\ &=\;\Big\langle\int_G\Big\langle\Pi(g)y,\;x'\Big\rangle\Pi(g)y\;d\mu(g),\;x\Big\rangle\;=\;\big\langle\mathcal{W}_y x'\,,x\big\rangle\,.\end{aligned}$$

Como isso vale para $x,\;x'\in\mathcal{H}$ arbitrários, mostramos que $\mathcal{W}_y=\mathcal{W}_y^*$.

Prova do item 3. Para $x\in\mathcal{H}$, vale

$$\begin{aligned}\|\mathcal{W}_y x\|^2 \;=\; \big\langle\mathcal{W}_y x,\;\mathcal{W}_y x\big\rangle \;&=\; \int_G\int_G\overline{\Big\langle\Pi(h)y,\;x\Big\rangle}\Big\langle\Pi(g)y,\;x\Big\rangle\Big\langle\Pi(h)y,\;\Pi(g)y\Big\rangle\,d\mu(h)\,d\mu(g)\\ &=\;\int_G\int_G\Big\langle\Pi(g)y,\;x\Big\rangle\Big\langle x,\;\Pi(h)y\Big\rangle\Big\langle\Pi(h)y,\;\Pi(g)y\Big\rangle\,d\mu(h)\,d\mu(g)\,.\end{aligned}$$

Seja $\{x_n,\;n\in\mathbb{N}\}$ uma base ortonormal completa em $\mathcal{H}$. Temos, para $M\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^M\|\mathcal{W}_y x_n\|^2 \;&=\; \sum_{n=1}^M\int_G\int_G\Big\langle\Pi(g)y,\;x_n\Big\rangle\Big\langle x_n,\;\Pi(h)y\Big\rangle\Big\langle\Pi(h)y,\;\Pi(g)y\Big\rangle\,d\mu(h)\,d\mu(g)\\ &=\;\int_G\int_G\left(\sum_{n=1}^M\Big\langle\Pi(g)y,\;x_n\Big\rangle\Big\langle x_n,\;\Pi(h)y\Big\rangle\right)\Big\langle\Pi(h)y,\;\Pi(g)y\Big\rangle\,d\mu(h)\,d\mu(g)\\ &=\;\left|\int_G\int_G\left(\sum_{n=1}^M\Big\langle\Pi(g)y,\;x_n\Big\rangle\Big\langle x_n,\;\Pi(h)y\Big\rangle\right)\Big\langle\Pi(h)y,\;\Pi(g)y\Big\rangle\,d\mu(h)\,d\mu(g)\right|\\ &\leq\;\int_G\int_G\left|\sum_{n=1}^M\Big\langle\Pi(g)y,\;x_n\Big\rangle\Big\langle x_n,\;\Pi(h)y\Big\rangle\right|\;\Big|\Big\langle\Pi(h)y,\;\Pi(g)y\Big\rangle\Big|\;d\mu(h)\,d\mu(g)\,.\end{aligned} \tag{25.4}$$

[7] Para a definição da noção de operador de Hilbert-Schmidt e suas propriedades, vide Seção 41.10.2, página 2221.

Agora, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz para somas finitas,

$$\left|\sum_{n=1}^{M}\Big\langle\Pi(g)y,\ x_n\Big\rangle\Big\langle x_n,\ \Pi(h)y\Big\rangle\right| \leq \sum_{n=1}^{M}\left|\Big\langle\Pi(g)y,\ x_n\Big\rangle\right|\ \left|\Big\langle x_n,\ \Pi(h)y\Big\rangle\right|$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{M}\left|\Big\langle\Pi(g)y,\ x_n\Big\rangle\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{M}\left|\Big\langle\Pi(h)y,\ x_n\Big\rangle\right|^2\right)^{1/2} \leq \left\|\Pi(g)y\right\|\left\|\Pi(h)y\right\|,$$

sendo que na última passagem empregamos a desigualdade de Bessel, expressão (40.22), página 2028. Portanto, retornando com isso a (25.4), usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e usando que $\left\|\Pi(h)\right\| \leq K$ para todo $h \in G$, temos

$$\sum_{n=1}^{M}\|\mathcal{W}_y x_n\|^2 \leq \int_G\int_G \left\|\Pi(g)y\right\|\left\|\Pi(h)y\right\|\left|\Big\langle\Pi(h)y,\ \Pi(g)y\Big\rangle\right|\ d\mu(h)\,d\mu(g) \leq K^4\ \|y\|^4.$$

Isso mostra que $\lim_{M\to\infty}\sum_{n=1}^{M}\|\mathcal{W}_y x_n\|^2$ existe e estabelece que $\mathcal{W}_y$ é um operador de Hilbert-Schmidt.

Prova do item 4. Usando a invariância da medida μ temos, para todo $x \in \mathcal{H}$,

$$\Pi(h)\mathcal{W}_y x = \int_G\Big\langle\Pi(g)y,\ x\Big\rangle\,\Pi(h)\Pi(g)y\ d\mu(g) = \int_G\Big\langle\Pi(g)y,\ x\Big\rangle\,\Pi(hg)y\ d\mu(g)$$

$$\stackrel{g\to h^{-1}g}{=} \int_G\Big\langle\Pi\big(h^{-1}g\big)y,\ x\Big\rangle\,\Pi(g)y\ d\mu(g) = \int_G\Big\langle\Pi(g)y,\ \Pi\big(h^{-1}\big)^*x\Big\rangle\,\Pi(g)y\ d\mu(g) = \mathcal{W}_y\Pi\big(h^{-1}\big)^*x.$$

Provando que $\Pi(h)\mathcal{W}_y = \mathcal{W}_y\Pi\big(h^{-1}\big)^*$. Se Π for uma representação unitária, isso diz que $\Pi(h)\mathcal{W}_y = \mathcal{W}_y\Pi\big(h\big)$.

Prova do item 5. Pela definição (25.3) tem-se

$$\langle y,\ \mathcal{W}_y y\rangle = \int_G\left|\Big\langle\Pi(g)y,\ y\Big\rangle\right|^2 d\mu(g). \qquad (25.5)$$

Agora, $\left|\Big\langle\Pi(e)y,\ y\Big\rangle\right| = \langle y,\ y\rangle > 0$, se $y \neq 0$. Como Π é fortemente contínua, existe uma vizinhança da unidade e onde $\left|\Big\langle\Pi(g)y,\ y\Big\rangle\right|$ é estritamente positiva. Isso implica que o lado direito de (25.5) é estritamente positivo e, portanto, $\big\langle y,\ \mathcal{W}_y y\big\rangle > 0$, mostrando que $\mathcal{W}_y$ não é o operador nulo. ∎

Ainda sobre o operador de Peter-Weyl, no caso de representações unitárias temos o seguinte resultado relevante:

Proposição 25.4 *Seja G um grupo topológico compacto e seja $\Pi : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ uma representação de G por operadores unitários em um espaço de Hilbert complexo separável $\mathcal{H}$. Assumamos também que Π seja fortemente contínua.*

Seja $\mathcal{W}_y$: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ o operador de Peter-Weyl definido em (25.3) com $y \neq 0$. Pelo Teorema 25.1, página 1257, $\mathcal{W}_y$ é autoadjunto e é de Hilbert-Schmidt e, portanto, é também um operador compacto (Proposição 41.99, página 2230). Consequentemente, seu espectro pontual $\sigma_p(\mathcal{W}_y)$ é um conjunto contável de $\mathbb{R}$ e cada autovalor não-nulo é finitamente degenerado.

Como $\mathcal{W}_y \neq 0$ (pois $y \neq 0$), $\sigma_p(\mathcal{W}_y) \setminus \{0\}$ é não-vazio, pois $\big\{-\|\mathcal{W}_y\|,\ \|\mathcal{W}_y\|\big\} \cap \sigma_p(\mathcal{W}_y) \neq \emptyset$. Denotemos por $\{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\} = \sigma_p(\mathcal{W}_y) \setminus \{0\}$ o conjunto dos autovalores não-nulos de $\mathcal{W}_y$ e convencionemos que $\lambda_0 = 0$ se este for também autovalor de $\mathcal{W}_y$.

O espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ decompõe-se em uma soma direta de subespaços ortogonais $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty}\mathcal{H}_k\right)$, onde $\mathcal{H}_0 := \mathrm{Ker}\,(\mathcal{W}_y)$ é o subespaço dos autovetores de $\mathcal{W}_y$ com autovalor 0 e $\mathcal{H}_k := \mathrm{Ker}\,(\lambda_k\mathbb{1} - \mathcal{W}_y)$ é o subespaço dos autovetores de $\mathcal{W}_y$ com autovalor λ_k. Cada $\mathcal{H}_k$ com $k \geq 1$ tem dimensão finita e $\mathcal{H}_0$ pode ter dimensão infinita. O subespaço $\bigoplus_{k=1}^{\infty}\mathcal{H}_k$ é não-trivial, pois $\sigma_p(\mathcal{W}_y) \setminus \{0\}$ é não-vazio.

Por fim, cada subespaço $\mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, é invariante pela ação da representação Π. □

Prova. As primeiras afirmações são consequência de resultados gerais sobre operadores compactos: Teorema 41.36, página 2190, e Teorema 41.38, página 2194.

Vamos agora provar que cada subespaço $\mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, é invariante pela ação da representação Π. Seja $\psi \in \mathcal{H}_k$. Naturalmente, $\mathcal{W}_y\psi = \lambda_k\psi$. Como Π é unitária, sabemos pelo item 4 do Teorema 25.1, página 1257, que $\mathcal{W}_y\Pi(h) = \Pi(h)\mathcal{W}_y$ para todo $h \in G$. Logo, $\Pi(h)\mathcal{W}_y\psi = \mathcal{W}_y\Pi(h)\psi$ e, portanto, $\mathcal{W}_y\Pi(h)\psi = \lambda_k\Pi(h)\psi$, estabelecendo que $\Pi(h)\psi \in \mathcal{H}_k$ para todo $h \in G$, ou seja, estabelecendo que cada $\mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, é invariante pela ação de Π. ∎

• Representações irredutíveis de um grupo compacto

Chegamos agora a um resultado importante sobre representações irredutíveis de grupos compactos em um espaço de Hilbert: elas são de dimensão finita!

Teorema 25.2 *Seja G um grupo topológico compacto e seja $\Pi : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ uma representação de G por operadores limitados inversíveis em um espaço de Hilbert complexo separável $\mathcal{H}$. Assumamos também que Π seja fortemente contínua. Então, se Π for irredutível, Π é de dimensão finita.* □

Comentário. A hipótese de compacidade, acima, é importante. O grupo de Heisenberg, por exemplo, não admite representações unitárias de dimensão finita em espaços de Hilbert, pois a álgebra de Heisenberg não pode ser representada por operadores lineares autoadjuntos limitados em espaços de Hilbert. Vide Nota à página 1037. ♣

Prova do Teorema 25.2. Aqui, seguimos proximanente [28]. Como vimos, podemos sem perda de generalidade considerar que Π é unitária. Nesse caso, o item 4 do Teorema 25.1, página 1257, informa-nos que $\Pi(h)\mathcal{W}_y = \mathcal{W}_y\Pi\big(h\big)$ para todo $h \in G$, onde $\mathcal{W}_y$ (para $y \in \mathcal{H}$) é o operador de Peter-Weyl, definido em (25.3). Pelo Corolário 25.4, página 1252, isso implica que $\mathcal{W}_y = \lambda(y)\mathbb{1}$. Nossa primeira tarefa é obter informações sobre $\lambda(y)$ das quais extrairemos a conclusão sobre a finitude da dimensão de $\mathcal{H}$.

É claro que para todo $x \in \mathcal{H}$ tem-se

$$\lambda(y)\langle x,\ x\rangle = \langle x,\ \mathcal{W}_y x\rangle = \int_G\Big\langle\Pi(g)y,\ x\Big\rangle\Big\langle x,\ \Pi(g)y\Big\rangle\,d\mu(g) = \int_G\left|\Big\langle\Pi(g)y,\ x\Big\rangle\right|^2 d\mu(g).$$

Em resumo,

$$\lambda(y)\,\|x\|^2 = \int_G\left|\Big\langle\Pi(g)y,\ x\Big\rangle\right|^2 d\mu(g). \qquad (25.6)$$

É claro por essa expressão que $\lambda(y) \geq 0$. Agora, temos também

$$\lambda(y)\,\|x\|^2 = \int_G\left|\Big\langle\Pi(g)y,\ x\Big\rangle\right|^2 d\mu(g) = \int_G\left|\Big\langle x,\ \Pi(g)y\Big\rangle\right|^2 d\mu(g) \stackrel{g\to g^{-1}}{=} \int_G\left|\Big\langle x,\ \Pi(g^{-1})y\Big\rangle\right|^2 d\mu(g)$$

$$\stackrel{\text{unitariedade}}{=} \int_G\left|\Big\langle x,\ \Pi(g)^*y\Big\rangle\right|^2 d\mu(g) = \int_G\left|\Big\langle\Pi(g)x,\ y\Big\rangle\right|^2 d\mu(g) \stackrel{(25.6)}{=} \lambda(x)\,\|y\|^2.$$

Do fato que $\lambda(y)\,\|x\|^2 = \lambda(x)\,\|y\|^2$ para todos $x,\ y \in \mathcal{H}$ concluímos imediatamente que para todo $x \in \mathcal{H}$ vale $\lambda(x) = \kappa\|x\|^2$ para alguma constante $\kappa \geq 0$. Com $\lambda(x) = \kappa\|x\|^2$, (25.6) fica

$$\kappa\|x\|^2\|y\|^2 = \int_G\left|\Big\langle\Pi(g)y,\ x\Big\rangle\right|^2 d\mu(g). \qquad (25.7)$$

Tomando-se $x = y$ e $\|x\| = 1$ em (25.7), temos

$$\kappa = \int_G\left|\Big\langle\Pi(g)x,\ x\Big\rangle\right|^2 d\mu(g). \qquad (25.8)$$

Disso segue que $\kappa > 0$, pois o integrando $\left|\left\langle \Pi(g)x,\ x\right\rangle\right|^2$ é não-negativo, é contínuo e assume em $g = e$ o valor $|\langle x,\ x\rangle|^2 = 1$.

Se $\{x_n,\ n = 1,\ \ldots,\ M\}$ é um conjunto ortonormal em $\mathcal{H}$, teremos por (25.7)

$$\kappa \;=\; \int_G \left|\left\langle \Pi(g)x_1,\ x_k\right\rangle\right|^2 d\mu(g)\;, \tag{25.9}$$

para todo $k \in \{1,\ \ldots,\ M\}$. Logo,

$$M\kappa \;=\; \sum_{n=1}^{M}\int_G \left|\left\langle \Pi(g)x_1,\ x_k\right\rangle\right|^2 d\mu(g) \;=\; \int_G \sum_{n=1}^{M}\left|\left\langle \Pi(g)x_1,\ x_k\right\rangle\right|^2 d\mu(g) \;\overset{\dagger}{\leq}\; \int_G \left\|\Pi(g)x_1\right\|^2 d\mu(g) \;=\; \|x_1\|^2 \;=\; 1\;. \tag{25.10}$$

A desigualdade indicada com "†", acima, segue da desigualdade de Bessel, expressão (40.22), página 2028. Concluímos disso que $M \leq 1/\kappa$, demonstrando que não pode haver no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ onde Π é irredutível um conjunto ortonormal com mais que $\kappa^{-1} < \infty$ elementos, estabelecendo que $\mathcal{H}$ tem dimensão finita. ■

Nota. Se a dimensão de $\mathcal{H}$ for exatamente M, então toda (25.10) é uma igualdade e temos $M = \kappa^{-1} = \left(\int_G |\langle \Pi(g)x,\ x\rangle|^2\, d\mu(g)\right)^{-1}$ para qualquer $x \in \mathcal{H}$ com $\|x\| = 1$. ♣

O seguinte corolário é crucial para o que segue:

Corolário 25.7 *Seja G um grupo topológico compacto e seja $\Pi : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ uma representação de G por operadores unitários em um espaço de Hilbert complexo separável $\mathcal{H}$. Assumamos também que Π seja fortemente contínua. Então, existe um subespaço de dimensão finita, não-trivial, $\mathcal{K}$ de $\mathcal{H}$ onde Π age unitária e irredutivelmente. O complemento ortogonal $\mathcal{K}^\perp$ é um subespaço invariante por Π e em $\mathcal{K}^\perp$ também age unitariamente.* □

Prova. Sabemos da Proposição 25.4, página 1259, que ao menos um dos subespaços de dimensão finita $\mathcal{H}_k$ com $k \geq 1$ é não-trivial. Seja $\mathcal{H}_j$ um tal subespaço e seja P_j o projetor ortogonal sobre $\mathcal{H}_j$. Sabemos da mesma Proposição que $\mathcal{H}_j$ é invariante por Π. Segue facilmente disso que $\Pi(g)P_j = P_j\Pi(g) = P_j\Pi(g)P_j$. Defina-se $\Pi_j(g) := \Pi(g)P_j$. É fácil checar que Π_j é uma representação de G em $\mathcal{H}_j$, pois $\Pi_j(g)\Pi_j(h) = P_j\Pi(g)\Pi(h)P_j = P_j\Pi(gh)P_j = \Pi_j(gh)$ e $\Pi_j(e) = P_j$.

Em verdade, Π_j é uma representação unitária de G em $\mathcal{H}_j$, pois se $\psi,\ \phi \in \mathcal{H}_j$ temos para todo $g \in G$ que

$$\left\langle \Pi_j(g)\psi,\ \Pi_j(g)\phi\right\rangle \;=\; \left\langle \Pi(g)P_j\psi,\ \Pi(g)P_j\phi\right\rangle \;=\; \left\langle \Pi(g)\psi,\ \Pi(g)\phi\right\rangle \;=\; \left\langle \psi,\ \phi\right\rangle\;,$$

pois Π é unitária.

Como $\mathcal{H}_j$ tem dimensão finita, temos pela Proposição 25.1, página 1250, que Π_j ou é irredutível ou maximalmente redutível. Em qualquer caso, Π_j é uma soma direta finita de representações unitárias irredutíveis de G e, portanto, existe um subespaço de dimensão finita $\mathcal{K}$ de $\mathcal{H}_j$ (e, portanto, de $\mathcal{H}$) onde Π_j (e, portanto, Π) age unitária e irredutivelmente.

Como $\mathcal{K}$ é invariante por Π, seu complemento ortogonal $\mathcal{K}^\perp$ também o é e em $\mathcal{K}^\perp$ também age unitariamente (pelo Corolário 25.1, página 1250). ■

Reunindo os resultados acima, temos a seguinte consequência importante, a qual diz-nos que, no caso de grupos compactos, as representações irredutíveis unitárias de dimensão finita são os tijolos com os quais se constroem todas as representações:

Teorema 25.3 *Toda representação unitária fortemente contínua Π de um grupo compacto G em um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$ é uma soma direta contável de representações unitárias irredutíveis de dimensão finita.* □

Comentário. Grupos não-compactos podem não admitir nenhuma representação unitária de dimensão finita. Tal é o caso do grupo de Lorentz próprio ortócrono $\mathscr{L}_+^\uparrow$ (que é apenas localmente compacto, mas não é compacto), tal como discutimos na Seção 25.6, página 1276. Vide Proposição 25.7, página 1278. ♣

Prova do Teorema 25.4. Sabemos do Corolário 25.7 que existe um subespaço de dimensão finita não-trivial $\mathcal{K}$ em $\mathcal{H}$ onde Π age irredutivelmente e unitariamente. Seu complemento ortogonal $\mathcal{K}^\perp$ é igualmente invariante e nele Π também age unitariamente.

Seja $\mathcal{M}$ a soma direta contável de <u>todos</u> os subespaços de dimensão finita de $\mathcal{H}$ onde Π age unitária e irredutivelmente. Pelas considerações acima, sabemos que $\mathcal{M} \neq \{0\}$. É claro que Π age unitariamente em $\mathcal{M}$ e como $\mathcal{M}$ é invariante por Π, seu complemento ortogonal $\mathcal{M}^\perp$ também o é (pelo Corolário 25.1, página 1250). Mas $\mathcal{M}^\perp$ é fechado e, portanto, é também um espaço de Hilbert separável, é invariante por Π e nele Π age unitariamente. Logo, se $\mathcal{M}^\perp \neq \{0\}$ temos pelo Corolário 25.7 que existe um subespaço de dimensão finita não-trivial $\mathcal{L}$ em $\mathcal{M}^\perp$ onde Π age irredutivelmente e unitariamente. Isso contraria a hipótese que $\mathcal{M}$ é a soma direta de <u>todos</u> os subespaços de dimensão finita de $\mathcal{H}$ onde Π age unitária e irredutivelmente. Logo, devemos ter $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$, o que implica que $\mathcal{M} = \mathcal{H}$. ■

Juntando o Teorema 25.3 à Proposição 25.3, página 1257, temos também:

Teorema 25.4 *Toda representação fortemente contínua de um grupo compacto G por operadores limitados inversíveis em um espaço de Hilbert complexo separável é equivalente a uma soma direta contável de representações unitárias irredutíveis de dimensão finita.* □

Notar que o teorema acima, pelo Corolário 25.5, página 1252, afirma que toda representação fortemente contínua de um grupo compacto Abeliano G por operadores limitados inversíveis é equivalente a uma soma direta contável de representações unitárias de dimensão 1.

25.4 O Teorema de Peter-Weyl

Um dos resultados mais profundos da teoria de representações de grupos compactos é um teorema sobre a ortogonalidade de suas representações irredutíveis unitárias de dimensão finita, o qual, em vários aspectos, generaliza o célebre Teorema de Fourier[8] da Análise Harmônica (vide Teorema 38.12, página 1871). Como veremos, esse teorema, devido a Peter[9] e Weyl[10], é também em parte um corolário do Lema de Schur.

O estudante iniciante deve ser informado que evocaremos em algumas das demonstrações que seguem resultados sobre espaços de Hilbert e sobre a teoria dos operadores compactos, os quais podem ser encontrados no Capítulo 40, página 2013, e na Seção 41.8, página 2173. Demonstrações semelhantes do Teorema de Peter-Weyl podem ser encontradas em diversos textos, como [28], [248] ou [296]. A maioria das demonstrações segue mais ou menos proximamente a demonstração original[11] de Peter e Weyl.

• <u>A representação regular à direita</u>

Em diversos resultados anteriores constatamos a qualidade especial de representações unitárias e fortemente contínuas de um grupo compacto G. Há uma representação específica que possui essas duas propriedades e que assume um papel importante no estudo de representações de grupos compactos, a chamada representação regular à direita.

A chamada *representação regular à direita* de G em $L^2(G,\ d\mu)$ é definida por

$$\big(R(g)\,\psi\big)(h) \;:=\; \psi\big(hg\big)\;, \tag{25.11}$$

para $g \in G$ e $\psi \in L^2(G,\ d\mu)$. É elementar constatar que R é uma representação: para cada $g_1,\ g_2 \in G$ e $\psi \in L^2(G,\ d\mu)$,

$$\Big(R(g_1)\big(R(g_2)\,\psi\big)\Big)(h) \;=\; \big(R(g_2)\,\psi\big)(hg_1) \;=\; \psi\big(hg_1g_2\big) \;=\; \big(R(g_1g_2)\,\psi\big)(h)\;,$$

ou seja, $R(g_1)R(g_2) = R(g_1g_2)$. Além disso, é fácil verificar que R é uma representação unitária. De fato,

$$\Big\langle \psi,\ R(g)\phi\Big\rangle_{L^2(G,\ d\mu)} \;=\; \int_G \overline{\psi(h)}\ \phi\big(hg\big)\ d\mu_h \;\overset{h\to hg^{-1}}{=}\; \int_G \overline{\psi\big(hg^{-1}\big)}\ \phi\big(h\big)\ d\mu_{hg^{-1}} \;\overset{\text{inv. de }\mu}{=}\; \int_G \overline{\psi\big(hg^{-1}\big)}\ \phi\big(h\big)\ d\mu_h$$

$$\overset{(25.11)}{=}\; \int_G \overline{\Big(R(g^{-1})\psi\Big)(h)}\ \phi\big(h\big)\ d\mu_h \;=\; \Big\langle R(g^{-1})\psi,\ \phi\Big\rangle_{L^2(G,\ d\mu)} \;=\; \Big\langle R(g)^{-1}\psi,\ \phi\Big\rangle_{L^2(G,\ d\mu)}$$

[8]Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).
[9]Fritz Peter (1899–1949).
[10]Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955).
[11]A referência original é F. Peter and H. Weyl, "Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe", Math. Ann. **97**, 737–755, (1927). doi:10.1007/BF01447892

para todos $\psi,\ \phi \in L^2(G,\ d\mu)$, estabelecendo que $R(g)^{-1} = R(g)^*$ para todo $g \in G$ e, portanto, que R é unitária.

R é também fortemente contínua. Para provar essa afirmação temos que estabelecer que para todo $\psi \in L^2(G,\ d\mu)$ e para cada $\epsilon > 0$ existe para cada $g' \in G$ uma vizinhança aberta $N_{\psi,\ \epsilon,\ g'}$ de g' tal que $\left\|R(g)\psi - R(g')\psi\right\|_{L^2(G,\ d\mu)} < \epsilon$ sempre que $g \in N_{\psi,\ \epsilon,\ g'}$. Como R é unitária, isso equivale a estabelecer que para todo $\psi \in L^2(G,\ d\mu)$ e para cada $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança aberta $N_{\psi,\ \epsilon,\ e} \equiv N_{\psi,\ \epsilon}$ da unidade $e \in G$ tal que $\left\|\psi - R(g)\psi\right\|_{L^2(G,\ d\mu)} < \epsilon$ sempre que $g \in N_{\psi,\ \epsilon}$.

Em verdade, como os operadores $R(g)$ são limitados (por serem todos unitários) é suficiente provar isso para elementos $\psi \in L^2(G,\ d\mu)$ que sejam funções contínuas, pois $C(G,\ \mathbb{C})$ (o conjunto das funções complexas contínuas em G) é um conjunto denso em $L^2(G,\ d\mu)$. Seja, portanto, $\psi \in C(G,\ \mathbb{C})$. Temos que

$$\left\|\psi - R(g)\psi\right\|^2_{L^2(G,\ d\mu)} \;=\; \int_G \left|\psi(h) - \psi(hg)\right|^2 d\mu(h) \ .$$

Como ψ é contínua e G é compacto, ψ é também uniformemente contínua (vide, *e.g.*, [28] ou [248]). Dessa forma, para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar uma vizinhança aberta V_ϵ do elemento neutro em G tal que se restringirmos g a V_ϵ, teremos $\left|\psi(h) - \psi(hg)\right| \leq \epsilon$ para todo $h \in G$. Como μ uma medida positiva e finita, com $\int_G d\mu = 1$, concluímos que para $g \in V_\epsilon$ vale $\left\|\psi - R(g)\psi\right\|_{L^2(G,\ d\mu)} \leq \epsilon$. Isso provou que R é fortemente contínua. Faremos no que segue uso importante dessas propriedades do operador R quando provarmos o Teorema de Peter-Weyl, especialmente a parte do mesmo referente à propriedade de completeza.

• O Teorema de Peter-Weyl

Dentro da coleção de todas as representações unitárias de dimensão finita de um grupo compacto (ou finito) G podemos estabelecer uma relação de equivalência, como já observamos, dizendo que duas representações são equivalentes se possuírem um intertwiner inversível. Podemos tomar em cada classe um representante Π^α e formar assim uma coleção $\{\Pi^\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$, de todas as representações unitárias de dimensão finita não-equivalentes entre si do grupo compacto (ou finito) G. Acima, Λ designa o conjunto de índices que rotulam as representações.

Cada Π^α age em um espaço vetorial complexo V_α. No que segue designaremos por d_α a dimensão de V_α.

O importante teorema de Peter e Weyl afirma que Λ é um conjunto contável e, mais importante, afirma que os elementos de matriz $\Pi^\alpha(g)_{ij}$, $i,\ j = 1,\ \ldots,\ d_\alpha$, são ortogonais entre si em relação ao produto escalar definido pela medida de Haar do grupo compacto (ou finito) G. Mais que isso, elas formam uma base ortogonal completa no espaço de Hilbert separável $L^2(G,\ d\mu)$ das funções complexas definidas em G e de quadrado integrável em relação à medida μ.

Teorema 25.5 (Teorema de Peter-Weyl) *Seja $\widehat{G} \equiv \{\Pi^\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ a coleção de todas as representações unitárias irredutíveis de dimensão finita não-equivalentes entre si de um grupo compacto (ou finito) G. Seja $d\mu$ a medida de Haar de G. Então, Λ é um conjunto contável. Além disso, sejam $\Pi^\alpha(g)_{ij}$, $i,\ j = 1,\ \ldots,\ d_\alpha$ os elementos de matriz da representação Π^α. Então, valem as relações de ortogonalidade*

$$\int_G \overline{\Pi^\alpha(g)_{ij}}\ \Pi^\beta(g)_{kl}\ d\mu(g) \;=\; \frac{1}{d_\alpha}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{ik}\,\delta_{jl} \ . \tag{25.12}$$

Por fim, as funções $\Pi^\alpha(g)_{ij}$, $\alpha \in \Lambda$, $i,\ j = 1,\ \ldots,\ d_\alpha$, formam uma base ortogonal completa no espaço de Hilbert $L^2(G,\ d\mu)$. Com isso, todo elemento $f \in L^2(G,\ d\mu)$ pode ser escrito na forma

$$f(g) \;=\; \sum_{\alpha\in\Lambda}\sum_{i,\ j=1}^{d_\alpha} f^\alpha_{ij}\ \Pi^\alpha(g)_{ij} \ , \tag{25.13}$$

onde

$$f^\alpha_{ij} \;:=\; d_\alpha \int_G \overline{\Pi^\alpha(g)_{ij}}\ f(g)\ d\mu(g) \ .$$

A convergência do lado direito de (25.13) se dá no sentido da norma de $L^2(G,\ d\mu)$. Finalmente, vale a identidade de Parseval[12]*:*

$$\int_G |f(g)|^2\ d\mu(g) \;=\; \sum_{\alpha\in\Lambda}\frac{1}{d_\alpha}\sum_{i,\ j=1}^{d_\alpha}\left|f^\alpha_{ij}\right|^2 \ , \tag{25.14}$$

[12] Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755–1836). Parseval deduziu esta identidade no contexto das séries de Fourier (que correspondem aqui ao caso do grupo $SO(2) \simeq U(1)$) e transformadas de Fourier em 1805.

para toda $f \in L^2(G,\ d\mu)$. □

As relações acima afirmam que as funções $\Pi^\alpha(g)_{ij}$, $i,\ j = 1,\ \ldots,\ d_\alpha$ são ortogonais em relação ao produto escalar definido pela medida de Haar. No caso de G ser um grupo finito devemos substituir $\int_G d\mu \to \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}$, de modo que, por exemplo, as relações de ortogonalidade ficam

$$\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\overline{\Pi^\alpha(g)_{ij}}\ \Pi^\beta(g)_{kl} \;=\; \frac{1}{d_\alpha}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{ik}\,\delta_{jl} \ . \tag{25.15}$$

No que segue apresentaremos a demonstração para o caso de grupos compactos, sendo o caso de grupos finitos um mero caso particular.

Prova do Teorema 25.5. Parte I: ortogonalidade. Apresentaremos primeiramente uma demonstração das relações de ortogonalidade (25.12), demonstração essa que como veremos faz uso elegante do Lema de Schur.

Seja $E^{[i,\ j]}$ a matriz $d_\alpha \times d_\beta$ tal que seu elemento de matriz ab seja $\left(E^{[i,\ j]}\right)_{ab} = \delta_{ia}\delta_{jb}$. Aqui $i \in \{1,\ \ldots,\ d_\alpha\}$ e $j \in \{1,\ \ldots,\ d_\beta\}$. Considere-se a matriz

$$\begin{aligned} A^{[i,\ j]} \;&:=\; \int_G \Pi^\alpha(g^{-1})\ E^{[i,\ j]}\ \Pi^\beta(g)\ d\mu(g) \\ &=\; \int_G \Pi^\alpha(g)^*\ E^{[i,\ j]}\ \Pi^\beta(g)\ d\mu(g) \ . \end{aligned}$$

Usando as propriedades de invariância da medida $d\mu$, é fácil provar que

$$\Pi^\alpha(h)\ A^{[i,\ j]} \;=\; A^{[i,\ j]}\ \Pi^\beta(h)$$

para todo $h \in G$. *(Exercício!)*. Pelo Lema de Schur, ou $A^{[i,\ j]} = 0$ ou $A^{[i,\ j]}$ é inversível. No caso de termos $\alpha \neq \beta$, sabemos, por construção, que Π^α e Π^β são inequivalentes. Portanto, nesse caso temos forçosamente $A^{[i,\ j]} = 0$. Isso obviamente implica que todos os elementos de matriz de $A^{[i,\ j]}$ são nulos, ou seja,

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \left(A^{[i,\ j]}\right)_{ab} \;&=\; \sum_{k,\ l}\int_G \Pi^\alpha(g)^*_{ak}\ \left(E^{[i,\ j]}\right)_{kl}\ \Pi^\beta(g)_{lb}\ d\mu(g) \\ &=\; \sum_{k,\ l}\int_G \Pi^\alpha(g)^*_{ak}\ \delta_{ik}\delta_{jl}\ \Pi^\beta(g)_{lb}\ d\mu(g) \\ &=\; \int_G \Pi^\alpha(g)^*_{ai}\Pi^\beta(g)_{jb}\ d\mu(g) \\ &=\; \int_G \overline{\Pi^\alpha(g)_{ia}}\Pi^\beta(g)_{jb}\ d\mu(g) \ . \end{aligned}$$

Note que essa relação vale para $\alpha \neq \beta$ mas $i,\ j,\ a,\ b$ arbitrários. Isso provou (25.12) para $\alpha \neq \beta$.

Vamos agora tratar o caso em que $\alpha = \beta$. Nesse caso, como vimos, $\Pi^\alpha(h)\ A^{[i,\ j]} = A^{[i,\ j]}\ \Pi^\alpha(h)$ para todo $h \in G$. Aqui $A^{[i,\ j]}$ são matrizes $d_\alpha \times d_\alpha$. Pelo Corolário 25.3, $A^{[i,\ j]} = \lambda^{[i,\ j]}\mathbb{1}$. Vamos determinar as constantes $\lambda^{[i,\ j]}$. Por um lado, tomando-se o traço de $A^{[i,\,j]}$ tem-se $\mathrm{Tr}(A^{[i,\,j]}) = d_\alpha \lambda^{[i,\,j]}$. Por outro lado, pela definição de $A^{[i,\,j]}$ tem-se

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(A^{[i,\,j]}\right) &= \int_G \mathrm{Tr}\left(\Pi^\alpha(g^{-1})\, E^{[i,\,j]}\, \Pi^\alpha(g)\right)\, d\mu(g) \\
&= \int_G \mathrm{Tr}\left(\Pi^\alpha(g)\Pi^\alpha(g^{-1})\, E^{[i,\,j]}\right)\, d\mu(g) \\
&= \int_G \mathrm{Tr}\left(E^{[i,\,j]}\right)\, d\mu(g) \\
&= \delta_{ij}\int_G d\mu(g) \\
&= \delta_{ij}\;,
\end{aligned}
$$

pois $\mathrm{Tr}\left(E^{[i,\,j]}\right) = \delta_{ij}$. Logo,

$$
\lambda^{[i,\,j]} \;=\; \frac{1}{d_\alpha}\delta_{ij}\;.
$$

Assim,

$$
\frac{1}{d_\alpha}\delta_{ij}\mathbb{1} \;=\; A^{[i,\,j]} \;=\; \int_G \Pi^\alpha(g)^*\, E^{[i,\,j]}\, \Pi^\alpha(g)\, d\mu(g)\;.
$$

Considerando-se o elemento de matriz ab de ambos os lados da última expressão, tem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{d_\alpha}\delta_{ij}\delta_{ab} &= \sum_{k,\,l}\int_G \Pi^\alpha(g)^*_{ak}\,\left(E^{[i,\,j]}\right)_{kl}\,\Pi^\alpha(g)_{lb}\, d\mu(g) \\
&= \sum_{k,\,l}\int_G \Pi^\alpha(g)^*_{ak}\,\delta_{ik}\delta_{jl}\,\Pi^\alpha(g)_{lb}\, d\mu(g) \\
&= \int_G \Pi^\alpha(g)^*_{ai}\,\Pi^\alpha(g)_{jb}\, d\mu(g) \\
&= \int_G \overline{\Pi^\alpha(g)_{ia}}\,\Pi^\alpha(g)_{jb}\, d\mu(g)\;.
\end{aligned}
$$

Isso prova (25.12) para $\alpha = \beta$, completando a prova das relações de ortogonalidade. Passamos agora à demonstração da completeza[13] e, para tal, necessitamos de uma definição e de um lema.

Para $\alpha \in \Lambda$, seja H^α o subespaço de dimensão d_α^2 de $L^2(G,\, d\mu)$ gerado pelas funções $\sqrt{d_\alpha}\,\Pi^\alpha(g)_{ij}$, $i,\ j = 1,\, \ldots,\, d_\alpha$. As relações de ortogonalidade (25.12), anteriormente provadas, dizem-nos que H^α pode ser escrito na forma da decomposição ortogonal de subespaços $\mathsf{H}^\alpha = \mathsf{H}^{\alpha,\,1}\oplus\cdots\oplus\mathsf{H}^{\alpha,\,d_\alpha}$, onde $\mathsf{H}^{\alpha,\,k}$ é o subespaço de dimensão d_α de $L^2(G,\, d\mu)$ gerado pelas funções $\sqrt{d_\alpha}\,\Pi^\alpha(g)_{kj}$, $j = 1,\, \ldots,\, d_\alpha$. O seguinte fato é relevante para o que segue:

Lema 25.5 *Cada subespaço $\mathsf{H}^{\alpha,\,k}$ é invariante pela ação da representação regular à direita R.* □

Prova do Lema 25.5. Sem perda de generalidade, fixemos um $k \in \{1,\, \ldots,\, d_\alpha\}$. Sejam os elementos de $\mathsf{H}^{\alpha,\,k}$ definidos por

$$
\xi_j^\alpha(g) \;\equiv\; \xi_j^{\alpha,\,k}(g) \;:=\; \sqrt{d_\alpha}\,\Pi^\alpha(g)_{kj}, \qquad j = 1,\, \ldots,\, d_\alpha\;.
$$

Pelas relações de ortogonalidade (25.12), anteriormente provadas, temos que $\left\langle \xi_j^\alpha,\ \xi_l^\alpha\right\rangle_{L^2(G,\,d\mu)} = \delta_{jl}$ para todos $j,\ l \in \{1,\, \ldots,\, d_\alpha\}$. Podemos representar cada elemento $f \in \mathsf{H}^{\alpha,\,k}$ na base de $\mathsf{H}^{\alpha,\,k}$ definida pelos vetores ξ_j^α, $j = 1,\, \ldots,\, d_\alpha$, por

$$
f(h) \;=\; \sum_{j=1}^{d_\alpha}\left\langle \xi_j^\alpha,\ f\right\rangle \xi_j^\alpha(h)\;.
$$

[13] No restante da demonstração do Teorema de Peter-Weyl seguimos proximamente [28], com correções e adaptações.

Logo, a ação de $R(g)$ em $\mathsf{H}^{\alpha,\,k}$ é dada por,

$$
\begin{aligned}
\big(R(g)f\big)(h) &= \sum_{j=1}^{d_\alpha}\left\langle \xi_j^\alpha,\ f\right\rangle\Big(R(g)\xi_j^\alpha\Big)(h) \;=\; \sum_{j=1}^{d_\alpha}\left\langle \xi_j^\alpha,\ f\right\rangle \xi_j^\alpha(hg) \;=\; \sum_{j=1}^{d_\alpha}\left\langle \xi_j^\alpha,\ f\right\rangle\sqrt{d_\alpha}\,\Pi^\alpha(hg)_{kj} \\
&= \sum_{j=1}^{d_\alpha}\left\langle \xi_j^\alpha,\ f\right\rangle\sqrt{d_\alpha}\left(\sum_{a=1}^{d_\alpha}\Pi^\alpha\big(h\big)_{ka}\Pi^\alpha(g)_{aj}\right) \;=\; \sum_{a=1}^{d_\alpha}\left(\sum_{j=1}^{d_\alpha}\Pi^\alpha(g)_{aj}\,\left\langle \xi_j^\alpha,\ f\right\rangle\right)\xi_a^\alpha(h)\;. \qquad (25.16)
\end{aligned}
$$

Isso claramente mostra que cada $\mathsf{H}^{\alpha,\,k}$ é invariante pela ação da representação regular à direita R. ■

A demonstração do Lema 25.5 tem o seguinte corolário:

Corolário 25.8 *Seja $\widehat{G} \equiv \{\Pi^\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ a coleção de todas as representações unitárias irredutíveis de dimensão finita não-equivalentes entre si de um grupo compacto (ou finito) G. Então, cada elemento de $\widehat{G}$ é equivalente a uma subrepresentação de R, ou seja, R contém todos os elementos de $\widehat{G}$ como subrepresentações.*

Como R é unitária, fortemente contínua e age em um espaço de Hilbert separável, concluímos do Teorema 25.3, página 1261, que Λ é contável. □

Prova do Corolário 25.8. Sem perda de generalidade, fixemos um $k \in \{1,\, \ldots,\, d_\alpha\}$. A relação (25.16) mostra que cada subespaço $\mathsf{H}^{\alpha,\,k}$ é invariante pela ação da representação regular à direita R. Logo, $R(g)$ restrita a $\mathsf{H}^{\alpha,\,k}$ é uma (sub)representação de G. Por fim, vemos também de (25.16) que a ação de $R(g)$ restrita a $\mathsf{H}^{\alpha,\,k}$ é equivalente à ação da matriz $\Pi^\alpha(g)$ nas componentes de cada vetor de $\mathsf{H}^{\alpha,\,k}$ na base $\left\{\xi_j^\alpha(g) := \sqrt{d_\alpha}\,\Pi^\alpha(g)_{kj}\right\}$, pela transformação $\left\langle \xi_j^\alpha,\ f\right\rangle \longmapsto \sum_{j=1}^{d_\alpha}\Pi^\alpha(g)_{aj}\,\left\langle \xi_j^\alpha,\ f\right\rangle$. ■

Podemos agora completar a prova do Teorema de Peter-Weyl, Teorema 25.5.

Prova do Teorema 25.5. Parte II: completeza. Tratemos agora da questão da completeza e suas consequências.

Como vimos, o conjunto $P \equiv \left\{\sqrt{d_\alpha}\Pi^\alpha(g)_{ij},\ \ i,\, j \in \{1,\, \ldots,\, d_\alpha\}\right\},\ \alpha \in \Lambda\Big\}$ é um conjunto ortonormal em $L^2(G,\, d\mu)$. Seja $\mathcal{H}_0 := \overline{\mathrm{span}\,(P)}$, o fecho em $L^2(G,\, d\mu)$ da varredura linear de P, ou seja, o fecho do conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de P.

Pelo Lema 25.5, acima, $\mathcal{H}_0$ é invariante pela ação da representação regular à direita R definida em (25.11). Como R é uma representação unitária, isso implica que $\mathcal{H}_0^\perp$ é igualmente invariante pela ação da representação regular à direita R.

De acordo com a definição de conjunto ortonormal *completo* (vide Capítulo 40, página 2013), desejamos demonstrar que $\mathcal{H}_0^\perp = \{0\}$. Tentaremos uma demonstração por absurdo, supondo $\mathcal{H}_0^\perp \neq \{0\}$. Seja $\phi \in \mathcal{H}_0^\perp$, com $\phi \neq 0$. Defina-se

$$
\psi(g) \;:=\; \int_G \overline{\phi(h)}\,\big(R(g)\phi\big)(h)\, d\mu_h\;.
$$

Trata-se claramente de uma função contínua em G e podemos facilmente verificar que $\psi \in \mathcal{H}_0^\perp$. De fato, temos

$$
\begin{aligned}
\left\langle \Pi_{ij}^\alpha,\ \psi\right\rangle &= \int_G \overline{\Pi^\alpha(g)_{ij}}\,\psi(g)\, d\mu_g \;=\; \int_G \overline{\Pi^\alpha(g)_{ij}}\left(\int_G \overline{\phi(h)}\,\big(R(g)\phi\big)(h)\, d\mu_h\right) d\mu_g \\
&= \int_G \overline{\phi(h)}\left(\int_G \overline{\Pi^\alpha(g)_{ij}}\,\big(R(g)\phi\big)(h)\, d\mu_g\right) d\mu_h\;,
\end{aligned}
$$

onde, na última passagem, usamos o Teorema de Fubini para trocar a ordem das integrais. Agora, usando a invariância da medida μ, temos

$$\int_G \overline{\Pi^\alpha(g)_{ij}}\,\big(R(g)\phi\big)(h)\,d\mu_g \;=\; \int_G \overline{\Pi^\alpha(g)_{ij}}\,\phi(hg)\,d\mu_g \;\overset{g\to h^{-1}g}{=}\; \int_G \overline{\Pi^\alpha\big(h^{-1}g\big)_{ij}}\,\phi(g)\,d\mu_{h^{-1}g} \;=\; \int_G \overline{\Pi^\alpha\big(h^{-1}g\big)_{ij}}\,\phi(g)\,d\mu_g$$

$$= \sum_{a=1}^{d_\alpha}\overline{\Pi^\alpha\big(h^{-1}\big)_{ia}}\int_G \overline{\Pi^\alpha(g)_{aj}}\,\phi(g)\,d\mu_g \;=\; \sum_{a=1}^{d_\alpha}\Pi^\alpha(h)_{ai}\int_G \overline{\Pi^\alpha(g)_{aj}}\,\phi(g)\,d\mu_g \;=\; \sum_{a=1}^{d_\alpha}\Pi^\alpha(h)_{ai}\,\big\langle \Pi^\alpha_{aj},\,\phi\big\rangle \;=\; 0\,,$$

pois $\big\langle \Pi^\alpha_{aj},\,\phi\big\rangle = 0$, já que $\phi\in\mathcal{H}_0^\perp$. Isso mostra que $\big\langle \Pi^\alpha_{ij},\,\psi\big\rangle = 0$ para todos $\alpha\in\Lambda$ e todos $i,\,j\in\{1,\,\ldots,\,d_\alpha\}$, provando que também temos $\psi\in\mathcal{H}_0^\perp$.

Isto posto, definimos agora a função

$$\varphi(g) \;:=\; \psi(g) + \overline{\psi\big(g^{-1}\big)} \tag{25.17}$$

e o operador linear

$$(\Xi f)(g) \;:=\; \int_G \varphi\big(gh^{-1}\big)f(h)\,d\mu_h\,, \qquad f\in L^2(G,\,d\mu)\,.$$

Como φ é contínua, Ξ é um operador compacto. Vamos estabelecer alguns fatos adicionais sobre o operador compacto Ξ.

I. Ξ é autoadjunto, pois, para todos $f_1,\ f_2\in L^2(G,\,d\mu)$,

$$\langle f_1,\,\Xi f_2\rangle \;=\; \int_G \overline{f_1(g)}\,(\Xi f_2)(g)\,d\mu_g \;=\; \int_G \overline{f_1(g)}\left(\int_G \varphi\big(gh^{-1}\big)f_2(h)\,d\mu_h\right)d\mu_g$$

$$= \int_G\left(\int_G \overline{f_1(g)}\varphi\big(gh^{-1}\big)\,d\mu_g\right)f_2(h)\,d\mu_h \;=\; \int_G \overline{\left(\int_G \varphi\big(hg^{-1}\big)f_1(g)\,d\mu_g\right)}\,f_2(h)\,d\mu_h$$

$$= \int_G \overline{(\Xi f_1)(h)}\,f_2(h)\,d\mu_h \;=\; \langle \Xi f_1,\,f_2\rangle\,.$$

Acima, na quarta igualdade, usamos o fato que $\overline{\varphi(g)} = \varphi\big(g^{-1}\big)$ para todo $g\in G$, como se vê da definição (25.17.) A mudança de ordem de integração na terceira igualdade usa novamente o Teorema de Fubini.

II. Para todos $\alpha,\ i,\ j$, vale

$$\Xi\,\Pi^\alpha_{ij} \;=\; 0\,. \tag{25.18}$$

De fato,

$$\Big(\Xi\Pi^\alpha_{ij}\Big)(g) \;=\; \int_G \varphi\big(gh^{-1}\big)\,\Pi^\alpha(h)_{ij}\,d\mu_h \;\overset{h\to h^{-1}g}{=}\; \int_G \varphi(h)\,\Pi^\alpha\big(h^{-1}g\big)_{ij}\,d\mu_h$$

$$= \sum_{a=1}^{d_\alpha}\left(\int_G \varphi(h)\,\Pi^\alpha\big(h^{-1}\big)_{ia}\,d\mu_h\right)\Pi^\alpha\big(g\big)_{aj} \;=\; \sum_{a=1}^{d_\alpha}\left(\int_G \overline{\Pi^\alpha\big(h\big)_{ai}}\varphi(h)\;d\mu_h\right)\Pi^\alpha\big(g\big)_{aj}\,.$$

Agora, para todos a e b vale

$$\int_G \overline{\Pi^\alpha\big(h\big)_{ab}}\varphi(h)\;d\mu_h \;=\; \int_G \overline{\Pi^\alpha\big(h\big)_{ab}}\psi(h)\;d\mu_h + \overline{\int_G \Pi^\alpha\big(h\big)_{ab}\psi\big(h^{-1}\big)\;d\mu_h}\,.$$

O primeiro termo é nulo, pois é igual a $\langle \Pi^\alpha_{ab},\,\psi\rangle$, mas $\psi\in\mathcal{H}_0^\perp$, como já vimos. O segundo termo também é nulo, pois

$$\int_G \Pi^\alpha\big(h\big)_{ab}\psi\big(h^{-1}\big)\;d\mu_h \;\overset{h\to h^{-1}}{=}\; \int_G \Pi^\alpha\big(h^{-1}\big)_{ab}\psi(h)\;d\mu_h \;=\; \int_G \overline{\Pi^\alpha(h)_{ba}}\psi(h)\;d\mu_h \;=\; \langle \Pi^\alpha_{ba},\,\psi\rangle \;=\; 0\,,$$

também pois $\psi\in\mathcal{H}_0^\perp$. Isso demonstrou (25.18).

III. Ξ e a representação regular à direita R comutam. De fato, para $g\in G$ e $f\in L^2(G,\,d\mu)$,

$$\Big(R(g)\Xi f\Big)(h) \;=\; (\Xi f)(hg) \;=\; \int_G \varphi\big(hgs^{-1}\big)f(s)\,d\mu_s \;\overset{s\to sg}{=}\; \int_G \varphi\big(hs^{-1}\big)f(sg)\,d\mu_s$$

$$= \int_G \varphi\big(hs^{-1}\big)\,\big(R(g)f\big)(s)\,d\mu_s \;=\; \Big(\Xi\big(R(g)f\big)\Big)(h)\,,$$

estabelecendo que $R(g)\Xi = \Xi R(g)$ para cada $g\in G$.

Pela definição de ψ, tem-se $\psi(e) = \|\phi\|^2 > 0$, por hipótese. Logo, ψ é não-nula (por ser contínua) e, portanto, Ξ é um operador não-nulo. Por ser compacto e autoadjunto e não-nulo, Ξ possui ao menos um auto-valor real, não-nulo e finitamente degenerado (Teorema 41.36, página 2190). Seja λ um tal autovalor não-nulo e $\mathcal{H}_\lambda$ o correspondente subespaço de dimensão finita gerado pelos autovetores de autovalor λ. Se $\omega\in\mathcal{H}_\lambda$, temos $\Xi\omega = \lambda\omega$ e, naturalmente, valerá $\big\langle \Pi^\alpha_{ij},\,\omega\big\rangle = \frac{1}{\lambda}\big\langle \Pi^\alpha_{ij},\,\Xi\omega\big\rangle = \frac{1}{\lambda}\big\langle \Xi\,\Pi^\alpha_{ij},\,\omega\big\rangle = 0$, o que estabelece que $\mathcal{H}_\lambda\subset\mathcal{H}_0^\perp$.

Como Ξ e $R(g)$ comutam, $\mathcal{H}_\lambda$ é invariante pela ação da representação unitária R. A restrição de R a $\mathcal{H}_\lambda$ é unitária e de dimensão finita e, portanto, é ou irredutível ou maximalmente redutível (vide Proposição 25.1, página 1250). Seja $\mathcal{H}^S_\lambda\subset\mathcal{H}_\lambda$ um subespaço invariante não-nulo onde R age irredutivelmente. A restrição de R às funções de $\mathcal{H}^S_\lambda$ define, portanto, uma representação unitária irredutível e de dimensão finita de G. Essa representação, que denotaremos por D deve ser equivalente a um dos elementos de $\widehat{G}$, pois $\widehat{G}$ é a coleção de todas as representações com tais características. Assim, existe um operador inversível V tal que $D = V\Pi^\beta V^{-1}$ para todo $g\in G$, com $\beta\in\Lambda$.

Seja $\{f_a,\ a=1,\,\ldots,\,k\}$, com $0<k<\infty$, uma base ortonormal em $\mathcal{H}^S_\lambda$. Temos que

$$\big(R(g)f_a\big)(h) \;=\; \sum_{b=1}^{k} D_{ba}(g)f_b(h)\,.$$

Como $\big(R(g)f_a\big)(h) = f_a(hg)$, temos que $f_a(hg) = \sum_{b=1}^{k} D_{ba}(g)f_b(h)$. Tomando-se $h=e$, temos $f_a(g) = \sum_{b=1}^{k} f_b(e)D_{ba}(g)$, que é uma combinação linear finita das funções $D_{ba}(g)$, Como $D = V\Pi^\beta V^{-1}$, vemos que $f_a(g)$ é também uma combinação linear finita das funções $\Pi^\beta(g)_{ij}$. Assim, estabelecemos que $\mathcal{H}^S_\lambda$ é um subespaço de $\mathcal{H}_0$. Isso contradiz o fato que $\mathcal{H}^S_\lambda\subset\mathcal{H}_\lambda\subset\mathcal{H}_0^\perp$. Logo, a hipótese de partida, a existência de um elemento não-nulo em $\mathcal{H}_0^\perp$ é falsa e estabelecemos que $\mathcal{H}_0^\perp = \{0\}$.

Isso demonstrou que P é uma base ortonormal completa em $L^2(G,\,d\mu)$. As demais afirmações em (25.13) e (25.14) são consequência imediada de propriedades de bases ortonormais completas, tal como estabelecido no Teorema 40.6, página 2030. Isso completa a demonstração do Teorema de Peter-Weyl, Teorema 25.5. ■

• Caráteres e funções centrais

Dada uma representação Π de dimensão finita de um grupo G, define-se o *caráter* de Π como sendo a função

$$\chi^\Pi(g) \;:=\; \mathrm{Tr}\Big(\Pi(g)\Big)\,, \qquad g\in G\,.$$

Um fato relevante sobre caráteres é a seguinte identidade:

$$\chi^\Pi\Big(hgh^{-1}\Big) \;=\; \mathrm{Tr}\Big(\Pi\big(hgh^{-1}\big)\Big) \;=\; \mathrm{Tr}\Big(\Pi(h)\Pi(g)\Pi\big(h^{-1}\big)\Big) \;=\; \mathrm{Tr}\Big(\Pi\big(h^{-1}\big)\Pi(h)\Pi(g)\Big) \;=\; \mathrm{Tr}\Big(\Pi(g)\Big) \;=\; \chi^\Pi(g)$$

para quaisquer $g,\ h\in G$. Isso sugere a seguinte definição: uma função $f: G\to\mathbb{C}$ é dita ser *central* se $f(g) = f\big(hgh^{-1}\big)$ para todos $g,\ h\in G$. Equivalentemente, podemos definir funções centrais como sendo as funções tais que $f(gh) = f(hg)$ para todos $g,\ h\in G$.

E. 25.20 *Exercício*. Mostre a equivalência dessas definições. ✣

Caráteres são, portanto, funções centrais. Das relações (25.12), tomando-se $i=j$, $k=l$ e somando-se nesses índices, obtém-se facilmente que os caráteres χ^α das representações irredutíveis unitárias de dimensão finita Π^α satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\int_G \overline{\chi^\alpha(g)}\chi^\beta(g)\,d\mu(g) \;=\; \delta_{\alpha\beta}\,. \tag{25.19}$$

E. 25.21 *Exercício*. Verifique! ✠

Como consequência do Teorema de Peter-Weyl podemos igualmente provar que os caráteres das representações irredutíveis unitárias de dimensão finita formam uma base ortogonal no espaço de Hilbert das funções centrais de quadrado integrável de um grupo finito ou compacto. Não apresentaremos a demonstração aqui. Notemos apenas que no caso do grupo SO(2) os caráteres das representações irredutíveis unitárias de dimensão finita são $\chi^p(\theta) = e^{ip\theta}$, $p \in \mathbb{Z}$. Assim, a afirmação acima, que os caráteres formam uma base no espaço das funções centrais de quadrado integrável, é nesse contexto um bem conhecido resultado da teoria das séries de Fourier.

• Classe de conjugação

Seja G um grupo. Podemos estabelecer uma relação de equivalência em G da seguinte forma. Se $x, y \in G$, dizemos que $x \sim y$ se existir algum elemento $h \in G$ tal que $x = hyh^{-1}$.

E. 25.22 *Exercício*. Verifique que isso, de fato, define uma relação de equivalência. ✠

As classes de equivalência de G por essa relação são denominadas *classe de conjugação*, ou *classes de elementos conjugados*.

E. 25.23 *Exercício*. Verifique que, em um grupo, a identidade é o único elemento de sua classe de conjugação. ✠

O fato importante sobre funções centrais e classes conjugadas é a seguinte afirmação: toda função central de um grupo G é constante nas classes conjugadas de G. A prova é elementar: se x, y pertencem à mesma classe, então existe h tal que $x = hyh^{-1}$. Logo, $f(x) = f\big(hyh^{-1}\big) = f(y)$.

Assim, para determinar uma função central, como um caráter de uma representação, por exemplo, basta determinar seus valores nas classes de conjugação. Essa observação desempenhará um papel abaixo.

• Caráteres de grupos finitos

Caráteres desempenham um papel especial no caso de grupos finitos. Se G é finito, as relações de ortogonalidade (como (25.19)) ficam

$$\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\overline{\chi^\alpha(g)}\chi^\beta(g) \;=\; \delta_{\alpha\beta} \; . \tag{25.20}$$

E. 25.24 *Exercício*. Prove isso a partir das relações de ortogonalidade (25.15). ✠

No caso de grupos finitos, os caráteres possuem uma propriedade de ortogonalidade adicional que é muito útil no estudo de propriedades desses grupos. Vamos apresentá-la.

Se f é uma função central de um grupo finito, então f é automaticamente de quadrado integrável (pois o grupo é finito) e, pelo teorema de Peter-Weyl, podemos escrevê-la como

$$f(h) \;=\; \sum_{\alpha\in\Lambda} c_\alpha \chi^\alpha(h) \; ,$$

onde

$$c_\alpha \;=\; \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\overline{\chi^\alpha(g)}f(g) \; .$$

Como tanto χ^α quanto f são constantes nas classes de equivalência C_k, $k = 1, \ldots, K$, de G, podemos escrever essa última expressão como

$$c_\alpha \;=\; \frac{1}{\#G}\sum_{k=1}^{K}(\#C_k)\overline{\chi^\alpha(C_k)}f(C_k) \; ,$$

onde $\#C_k$ é o número de elementos do grupo que pertencem à classe C_k e $f(C_k)$ é o valor de f em C_k.

Assim,

$$\begin{aligned} f(h) \;&=\; \sum_{\alpha\in\Lambda}\frac{1}{\#G}\sum_{k=1}^{K}(\#C_k)\overline{\chi^\alpha(C_k)}f(C_k)\chi^\alpha(h) \\ &=\; \sum_{k=1}^{K} f(C_k)\left[\frac{\#C_k}{\#G}\sum_{\alpha\in\Lambda}\overline{\chi^\alpha(C_k)}\chi^\alpha(h)\right] \end{aligned}$$

Tomando $h \in C_j$, teremos

$$f(C_j) \;=\; \sum_{k=1}^{K} f(C_k)\left[\frac{\#C_k}{\#G}\sum_{\alpha\in\Lambda}\overline{\chi^\alpha(C_k)}\chi^\alpha(C_j)\right] \; .$$

Como f é arbitrária, segue que

$$\left(\frac{\#C_k}{\#G}\right)\sum_{\alpha\in\Lambda}\overline{\chi^\alpha(C_k)}\,\chi^\alpha(C_j) \;=\; \delta_{jk} \; . \tag{25.21}$$

Essa relação de ortogonalidade especial tem várias consequências relevantes para o estudo de representações irredutíveis unitárias de grupos finitos. Uma delas é a seguinte:

Proposição 25.5 *Se G é um grupo finito, o número de representações irredutíveis unitárias inequivalentes de G é igual ao número de classes de conjugação de G.* □

Prova. Seja G um grupo finito e C_k, $k = 1, \ldots, K$ suas classes de conjugação. Sabemos que as funções centrais são constantes nas classes de conjugação e, portanto, vale para toda função central f a seguinte identidade

$$f(g) \;=\; \sum_{k=1}^{K} f_k\, \delta_{C_k}(g) \; ,$$

onde f_k é o valor que f assume em C_k e

$$\delta_{C_k}(g) \;:=\; \begin{cases} 1, & \text{se } g \in C_k \; , \\ 0, & \text{se } g \notin C_k \; . \end{cases}$$

Isso significa que o espaço vetorial $C(G)$ das funções centrais de G tem uma base formada pelas funções δ_{C_k}, $k = 1, \ldots, K$, e, portanto, tem dimensão K.

Por (25.20) as funções χ^α, $\alpha \in \Lambda$, formam uma base ortogonal no espaço $C(G)$. Portanto, o número $\#\Lambda$ de representações irredutíveis de G é menor ou igual à dimensão de $C(G)$, que é K, como acabamos de ver: $\#\Lambda \leq K$.

Por outro lado, (25.21) diz-nos que o espaço vetorial de todas as funções $\Lambda \to \mathbb{C}$, o qual tem dimensão $\#\Lambda$ (por que?), possui um conjunto de K funções ortogonais, a saber, as funções $h_k(\alpha) = \chi^\alpha(C_k)$, $\alpha \in \Lambda$. Logo, $K \leq \#\Lambda$. Isso completa a prova que $K = \#\Lambda$ ■

Sob a luz da Proposição 25.5 podemos reescrever (25.21) como

$$\left(\frac{\#C_k}{\#G}\right)\sum_{a=1}^{K}\overline{\chi^a(C_k)}\chi^a(C_j) \;=\; \delta_{jk} \; , \tag{25.22}$$

$j, k = 1, \ldots, K$.

Outra consequência de (25.22) é a seguinte. Tomando-se $C_j = C_k = C_1$, onde C_1 é a classe de conjugação da identidade, a qual só possui um elemento, concluímos que

$$\sum_{a=1}^{K} d_a^2 \;=\; \#G \; , \tag{25.23}$$

pois $\chi^a(C_1) = \mathrm{Tr}(\Pi^a(e)) = d_a$.

Essa curiosa expressão nos mostra uma relação insuspeita entre as dimensões das representações irredutíveis de G e a ordem de G. Em muitos casos é possível extrair informações sobre as representações irredutíveis do grupo a partir da mesma. Isso pois (25.23) não pode ser satisfeita por quaisquer números inteiros K, d_a e $\#G$. Por exemplo, um grupo que possua 6 elementos e 3 classes de conjugação só pode ter duas representações irredutíveis unidimensionais e uma bidimensional, pois $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$ e não há outra forma de escrever o número 6 como soma de três quadrados. Esse, aliás, é precisamente o caso do grupo de permutações de 3 elementos, S_3, o qual possui 6 elementos e 3 classes de conjugação (identifique-as!).

E. 25.25 *Exercício*. A única outra possibilidade de se escrever 6 como soma de quadrados é $6 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$. Há algum grupo que corresponde a essa situação? Ele deveria ter 6 elementos e 6 classes de conjugação. Mostre que esse último fato implica que deve ser um grupo Abeliano e, com isso, identifique qual é esse grupo. Constate que o fato de esse grupo possuir 6 representações irredutíveis unidimensionais está de acordo com o Exercício E. 25.9, página 1253. ✠

25.5 Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de SU(2)

Um capítulo importante das aplicações da teoria de grupos à Física envolve a classificação das representações irredutíveis de dimensão finita do grupo SU(2). Como esse grupo é compacto (vide Proposição 22.18, página 1082), é suficiente, pela Proposição 25.3, página 1257, considerarmos suas representações unitárias irredutíveis de dimensão finita.

Como já vimos (vide Seção 22.3.4, página 1071) que o grupo SU(2) é formado por matrizes da forma $U(\theta,\ \vec{\eta}) = \exp\left(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{l}\ \right)$, onde $\theta \in [-2\pi,\ 2\pi)$, $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$ é um vetor unitário e $l_k = \frac{1}{2}\sigma_k$, onde σ_k são as matrizes de Pauli. As matrizes l_k satisfazem $[l_a,\ l_b] = i\epsilon_{abc}l_c$ (adotamos doravante a convenção de Einstein de soma sobre índices repetidos) e são autoadjuntas: $l_a^* = l_a$.

É fácil concluir que se Π é uma representação de dimensão finita de SU(2), Π é da forma

$$\Pi\Big(U(\theta,\ \vec{\eta})\Big) \ = \ \exp\Big(\theta\vec{\eta}\cdot\Pi(\vec{l})\Big) \ ,$$

onde $\Pi(l_1)$, $\Pi(l_2)$, $\Pi(l_3)$ satisfazem $[\Pi(l_a),\ \Pi(l_b)] = i\epsilon_{abc}\Pi(l_c)$. As matrizes $\Pi(l_a)$ são, por definição, os geradores dos subgrupos uniparamétricos $\Pi\Big(e^{i\theta l_a}\Big)$. Para simplificar um pouco a notação $L_a \equiv \Pi(l_a)$ e escrevamos, portanto,

$$\Pi\Big(U(\theta,\ \vec{\eta})\Big) \ = \ \exp\Big(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{L}\ \Big) \ , \tag{25.24}$$

com $[L_a,\ L_b] = i\epsilon_{abc}L_c$. É importante notar que se $\Pi(g)$ é unitária para todo $g \in \mathrm{SO}(3)$, então cada L_a é autoadjunta: $L_a^* = L_a$.

E. 25.26 *Exercício*. Justifique! ✠

• Operador de Casimir

Um fato muito importante, válido para qualquer representação de SU(2) como acima, é que a matriz, denotada por L^2, e definida por

$$L^2 \ := \ \big(L_1\big)^2 + \big(L_2\big)^2 + \big(L_3\big)^2$$

comuta com todos os três geradores L_a: $[L^2,\ L_a] = 0$, para todo $a = 1,\ 2,\ 3$.

E. 25.27 *Exercício muito importante*. Verifique essa afirmação. *Sugestão:* prove (e use) a identidade $[A^2,\ B] = A[A,\ B]+[A,\ B]A$, válida para quaisquer matrizes $n \times n$ A e B. ✠

Um operador com essa propriedade, a de comutar com todos os elementos de uma álgebra de Lie, é dito ser um *operador de Casimir*[14]. Por um teorema devido a Racah[15], L^2 é o único operador de Casimir para a álgebra su(2) (os demais são combinações lineares de potências de L^2).

[14] Hendrik Brugt Gerhard Casimir (1909–2000).
[15] Giulio Racah (1909–1965).

A importância dos operadores de Casimir é a seguinte. Como L^2 comuta com cada L_a, segue facilmente de (25.24) que $L^2\Pi(g) = \ \Pi(g)L^2$ para todo $g \in \mathrm{SU}(2)$. Assim, pelo Corolário 25.3, página 1252 (um dos corolários do Lema de Schur), se Π é uma representação irredutível, então L^2 deve ser um múltiplo da identidade. Isso abre o caminho para classificar as representações irredutíveis de SU(2): estudando os possíveis autovalores de L^2. Em cada subespaço formado por autovetores com um dado autovalor fixo, teremos uma representação irredutível.

Essa estratégia é comum à classificação e estudo de representações irredutíveis de vários grupos e o leitor verá no que segue a instância mais elementar de sua aplicação.

• Autovalores de L^2 e de L_3

Sejam L_a, $a = 1,\ 2,\ 3$, matrizes complexas autoadjuntas agindo em um espaço vetorial de dimensão finita, satisfazendo $[L_a,\ L_b] = i\epsilon_{abc}L_c$ e L^2 definida como acima. Vamos estudar os possíveis autovalores de L^2. É evidente que L^2 é autoadjunta e, portanto, que seus autovalores são reais.

Comecemos mostrando que os autovalores de L^2 são números reais não-negativos. Seja Ψ um autovetor de L^2 com autovalor λ: $L^2\Psi = \lambda\Psi$. Então,

$$\lambda\langle\Psi,\ \Psi\rangle \ = \ \langle\Psi,\ L^2\Psi\rangle \ = \ \langle\Psi,\ L_1^2\Psi\rangle + \langle\Psi,\ L_2^2\Psi\rangle + \langle\Psi,\ L_3^2\Psi\rangle \ = \ \langle L_1\Psi,\ L_1\Psi\rangle + \langle L_2\Psi,\ L_2\Psi\rangle + \langle L_3\Psi,\ L_3\Psi\rangle \ .$$

Na última igualdade usamos o fato que $L_a^* = L_a$. Como $\langle L_a\Psi,\ L_a\Psi\rangle \geq 0$, concluímos que $\lambda \geq 0$, como queríamos.

Todo número $\lambda \geq 0$ pode ser escrito na forma $\lambda = l(l+1)$ com $l \geq 0$. Por futura conveniência, escreveremos doravante os autovalores de L^2 na forma $l(l+1)$ com $l \geq 0$.

Recordemos agora o fato[16] que, como $[L^2,\ L_3] = 0$, podemos escolher uma base ortogonal formada por vetores que são simultaneamente autovetores de L^2 e L_3. Denotaremos esses vetores por $\Psi_{l,m}$, tendo-se $L^2\Psi_{l,m} = l(l+1)\Psi_{l,m}$ e $L_3\Psi_{l,m} = m\Psi_{l,m}$. Iremos em breve fazer uso dessa base.

É conveniente definir $L_\pm := L_1 \pm iL_2$. Tem-se que $L_\pm^* = L_\mp$. Como $L_1 = (L_+ + L_-)/2$ e $L_2 = (L_+ - L_-)/(2i)$, podemos reescrever as relações algébricas $[L_a,\ L_b] = i\epsilon_{abc}L_c$ em termos de $L_\pm$ e L_3. Obtemos

$$[L_3,\ L_\pm] \ = \ \pm L_\pm \ , \tag{25.25}$$

$$[L_+,\ L_-] \ = \ 2L_3 \ . \tag{25.26}$$

Fora isso, valem também

$$L^2 \ = \ L_+L_- + L_3(L_3 - \mathbb{1}) \ , \tag{25.27}$$

$$L^2 \ = \ L_-L_+ + L_3(L_3 + \mathbb{1}) \ . \tag{25.28}$$

E. 25.28 *Exercício muito importante*. Prove as relações (25.25)–(25.28). ✠

Vamos usar as relações (25.25)–(25.28) para provar vários fatos sobre os autovalores de L^2 e L_3. De (25.28) tem-se

$$L_-L_+\psi_{l,m} \ = \ \big[l(l+1) - m(m+1)\big]\psi_{l,m} \ = \ (l-m)(l+m+1)\psi_{l,m} \ . \tag{25.29}$$

De (25.27) tem-se

$$L_+L_-\psi_{l,m} \ = \ \big[l(l+1) - m(m-1)\big]\psi_{l,m} \ = \ (l+m)(l-m+1)\psi_{l,m} \ . \tag{25.30}$$

Assim,

$$\big\langle\psi_{l,m},\ L_-L_+\psi_{l,m}\big\rangle \ = \ (l-m)(l+m+1)\|\psi_{l,m}\|^2 \tag{25.31}$$

e

$$\big\langle\psi_{l,m},\ L_+L_-\psi_{l,m}\big\rangle \ = \ (l+m)(l-m+1)\big\|\psi_{l,m}\big\|^2 \ . \tag{25.32}$$

Porém, como $L_\pm^* = L_\mp$, segue que

$$\big\langle\psi_{l,m},\ L_-L_+\psi_{l,m}\big\rangle \ = \ \big\langle L_+\psi_{l,m},\ L_+\psi_{l,m}\big\rangle \ \geq \ 0 \quad \text{e} \quad \big\langle\psi_{l,m},\ L_+L_-\psi_{l,m}\big\rangle \ = \ \big\langle L_-\psi_{l,m},\ L_-\psi_{l,m}\big\rangle \ \geq \ 0 \ .$$

[16] Vide Seção 9.4.1, página 393.

Logo, concluímos de (25.31) e de (25.32) que

$$(l-m)(l+m+1) \geq 0 , \tag{25.33}$$

$$(l+m)(l-m+1) \geq 0 . \tag{25.34}$$

De (25.33), segue que vale uma das seguintes alternativas

a) $l-m \geq 0$ e $l+m+1 \geq 0$, ou

b) $l-m \leq 0$ e $l+m+1 \leq 0$.

No caso b), se somarmos ambas as desigualdades teremos $2l+1 \leq 0$. Isso é impossível, pois $l \geq 0$. Assim, vale a) que, em particular, diz que $m \leq l$. Por (25.34), isso implica $l+m \geq 0$, ou seja, $m \geq -l$. Concluímos, portanto, que

$$-l \leq m \leq l . \tag{25.35}$$

Assim, para cada l, os valores de m não podem ser maiores que l nem menores que $-l$.

Vamos agora provar a seguinte proposição, que utilizaremos logo abaixo.

Proposição 25.6 *Seja $\psi_{l,m}$ um autovetor de L^2 e de L_3 com autovalores $l(l+1)$ e m, respectivamente. Então, se $L_+\psi_{l,m}=0$ segue que $m=l$. Analogamente, se $L_-\psi_{l,m}=0$ segue que $m=-l$.* □

Prova. Se $L_+\psi_{l,m}=0$ segue, evidentemente, que $L_-L_+\psi_{l,m}=0$. Por (25.29) isso implica $(l-m)(l+m+1)=0$. Assim, ou $m=l$ ou $m=-(l+1)$. Esse último caso é proibido por (25.35) e, portanto, $m=l$. Se $L_-\psi_{l,m}=0$ segue, evidentemente, que $L_+L_-\psi_{l,m}=0$. Por (25.30) isso implica $(l+m)(l-m+1)=0$. Assim, ou $m=-l$ ou $m=l+1$. Esse último caso é proibido por (25.35) e, portanto, $m=-l$. ■

Vamos agora prosseguir tentando estabelecer mais alguns fatos sobre os possíveis valores de l e m. Usando as relações de comutação entre L_3 e L_+, é fácil ver que

$$L_3L_+\psi_{l,m} = [L_3, L_+]\psi_{l,m} + L_+L_3\psi_{l,m} = (m+1)L_+\psi_{l,m} .$$

Analogamente, usando as relações de comutação entre L_3 e L_-, tem-se

$$L_3L_-\psi_{l,m} = [L_3, L_-]\psi_{l,m} + L_-L_3\psi_{l,m} = (m-1)L_-\psi_{l,m} .$$

Essas duas relações dizem-nos que $L_\pm\psi_{l,m}$ é um autovetor de L_3 com autovalor $m\pm1$. Note-se que, como L^2 comuta com $L_\pm$, tem-se também $L^2L_\pm\psi_{l,m}=l(l+1)L_\pm\psi_{l,m}$. Assim, aplicar o operador $L_\pm$ a $\psi_{l,m}$ aumenta (diminui) de uma unidade o autovalor de L_3 sem alterar o de L^2.

Percebemos disso que caso $m=l$ teremos $L_3L_+\psi_{l,l}=(l+1)L_+\psi_{l,l}$ o que, em função de (25.35), só é possível se $L_+\psi_{l,l}=0$. Analogamente, caso $m=-l$ teremos $L_3L_-\psi_{l,-l}=-(l+1)L_-\psi_{l,-l}$ o que, em função de (25.35), só é possível se $L_-\psi_{l,-l}=0$. Junto com a Proposição 25.6 isso conduz ao

Corolário 25.9 *Seja $\psi_{l,m}$ um autovetor não-nulo de L^2 e de L_3 com autovalores $l(l+1)$ e m, respectivamente. Então, tem-se $L_+\psi_{l,m}=0$ se e somente se $m=l$. Analogamente, $L_-\psi_{l,m}=0$ se e somente se $m=-l$.* □

Precisamos mostrar que existem autovetores não-nulos de L_3 com autovalores $\pm l$. Certamente existe um autovetor não-nulo $\psi_{l,m}$ para algum m satisfazendo (25.35). Pelo que vimos acima, $L_+^p\psi_{l,m}$ é um autovetor de L_3 com autovalor $m+p$. Suponhamos que $m<l$ e seja $p_0\geq 0$ o maior inteiro não-negativo tal que $m+p_0\leq l$. Então, $m+p_0+1>l$, o que implica que $0=\big(L_+\big)^{p_0+1}\psi_{l,m}=L_+\big(L_+\big)^{p_0}\psi_{l,m}$. Pelo Corolário 25.9, isso implica que ou $\big(L_+\big)^{p_0}\psi_{l,m}$ é nulo ou é autovetor de L_3 com autovalor l. Se $p_0=0$, então $\psi_{l,m}\neq 0$, por hipótese. Se $p_0>0$, então, caso $\big(L_+\big)^{p_0}\psi_{l,m}=0$, concluiríamos, também pelo Corolário 25.9, que $\big(L_+\big)^{p_0-1}\psi_{l,m}$ é autovetor não-nulo de L_3 com autovalor l. A repetição desse argumento conduz à conclusão que há um autovetor não-nulo de L_3 com autovalor l. Analogamente, conclui-se que existe autovetor não-nulo de L_3 com autovalor $-l$.

Estamos agora preparados para chegar a uma importante conclusão sobre os possíveis valores de l, a saber, que l só pode assumir valores inteiros ou semi-inteiros.

Ao aplicarmos repetidamente o operador L_+, ao vetor não-nulo $\psi_{l,-l}$ obtemos sucessivos vetores $\big(L_+\big)^p\psi_{l,-l}$ com autovalores $-l+p$ de L_3. Chegará um momento em que a desigualdade $-l\leq m\leq l$ será violada, ou seja, existe p tal que $\big(L_+\big)^{p+1}\psi_{l,-l}$ seria o primeiro autovetor de L_3 com autovalor maior que l. Como isso é impossível, segue que $\big(L_+\big)^{p+1}\psi_{l,-l}=0$ e $\big(L_+\big)^p\psi_{l,-l}$ deve ser autovetor de L_3 com autovalor máximo l. Mas o autovalor de L_3 em $\big(L_+\big)^p\psi_{l,-l}$ é $-l+p$. Logo $-l+p=l$, ou seja, $2l=p$. Como p é um número inteiro, segue que l é ou um inteiro (caso p seja par) ou um semi-inteiro (caso p seja ímpar).

Como os autovalores m são da forma $-l+p$, para p inteiro, segue que m será inteiro se l o for ou semi-inteiro, caso l o seja. A conclusão importante é que os autovalores de L^2 são números da forma $l(l+1)$ com $l\geq 0$ inteiro ou semi-inteiro.

• **Não-degenerescência dos autovalores de L_3**

Um ponto importante sobre o qual não discutimos ainda diz respeito à degenerescência dos autovalores de L_3. Façamo-lo agora. Como deduzimos acima, se $\psi_{l,m}$ é um autovetor de L^2 e de L_3 com autovalores $l(l+1)$ e m, respectivamente, então os $2l+1$ vetores

$$\big(L_-\big)^{l+m}\psi_{l,m}, \;\ldots,\; \big(L_-\big)\psi_{l,m}, \;\psi_{l,m}, \;\big(L_+\big)\psi_{l,m}, \;\ldots,\; \big(L_+\big)^{l-m}\psi_{l,m} \tag{25.36}$$

são igualmente autovetores não-nulos de L^2, com autovalor $l(l+1)$, e são autovetores de L_3 com autovalores $-l, \ldots, l$, sucessivamente. Naturalmente, os $2l+1$ vetores acma são mutuamente ortogonais, pois L_3 é autoadjunto.

Vamos agora supor que $\phi_{l,m}$ seja um outro autovetor não-nulo de L^2 e de L_3 com autovalores $l(l+1)$ e m, respectivamente. Podemos, sem perda de generalidade, supor que $\phi_{l,m}$ é ortogonal a $\psi_{l,m}$. Pelos mesmos argumentos, os $2l+1$ vetores

$$\big(L_-\big)^{l+m}\phi_{l,m}, \;\ldots,\; \big(L_-\big)\phi_{l,m}, \;\phi_{l,m}, \;\big(L_+\big)\phi_{l,m}, \;\ldots,\; \big(L_+\big)^{l-m}\phi_{l,m} \tag{25.37}$$

são igualmente autovetores não-nulos de L^2, com autovalor $l(l+1)$, e são autovetores de L_3 com autovalores $-l, \ldots, l$, sucessivamente.

Sejam U e V os subespaços $(2l+1)$-dimensionais gerados pelos vetores (25.36) e (25.37), respectivamente. Afirmamos que U e V são subespaços mutuamente ortogonais. Como autovetores de autovalores distintos de L_3 são ortogonais (pois L_3 é autoadjunto), é suficiente provar que

$$\Big\langle \big(L_-\big)^a\psi_{l,m}, \;\big(L_-\big)^a\phi_{l,m}\Big\rangle = 0 \qquad \text{para todo } a=0, \ldots, l+m , \tag{25.38}$$

e que

$$\Big\langle \big(L_+\big)^b\psi_{l,m}, \;\big(L_+\big)^b\phi_{l,m}\Big\rangle = 0 \qquad \text{para todo } b=0, \ldots, l-m . \tag{25.39}$$

Vamos tratar apenas do caso das relações (25.38), pois o caso de (25.39) é análogo. Para $a=0$ a afirmação é óbvia, pois $\big\langle\psi_{l,m}, \;\phi_{l,m}\big\rangle=0$, por hipótese. Procedendo por indução, suponhamos que tenhamos estabelecido que

$$\Big\langle \big(L_-\big)^{a-1}\psi_{l,m}, \;\big(L_-\big)^{a-1}\phi_{l,m}\Big\rangle = 0 .$$

Teremos, usando que $(L_-)^*=L_+$, que

$$\begin{aligned}
\Big\langle \big(L_-\big)^a\psi_{l,m}, \;\big(L_-\big)^a\phi_{l,m}\Big\rangle &= \Big\langle \big(L_-\big)^{a-1}\psi_{l,m}, \;L_+L_-\big(L_-\big)^{a-1}\phi_{l,m}\Big\rangle \\
&\overset{(25.27)}{=} \Big\langle \big(L_-\big)^{a-1}\psi_{l,m}, \;\big(L^2-L_3(L_3-\mathbb{1})\big)\big(L_-\big)^{a-1}\phi_{l,m}\Big\rangle \\
&= \big[l(l+1)-(m-a+1)(m-a)\big]\Big\langle \big(L_-\big)^{a-1}\psi_{l,m}, \;\big(L_-\big)^{a-1}\phi_{l,m}\Big\rangle = 0 .
\end{aligned}$$

Na última passagem usamos o fato já discutido que $\big(L_-\big)^{a-1}\psi_{l,m}$ é autovetor de L^2 com autovalor $l(l+1)$ e autovetor de L_3 com autovalor $m-a+1$.

Isso provou (25.38) e a prova de (25.39) é totalmente análoga, estabelecendo que U e V são subespaços ortogonais. Observe-se, porém, que U e V são ambos subespaços invariantes pela álgebra gerada por L_1, L_2 e L_3 (ou por $L_\pm$ e L_3). Logo, essa álgebra não é irredutível, contrariando as hipóteses. Portanto, os autovalores de L_3 são simplesmente degenerados em cada representação irredutível e (25.36) apresenta todos os seus autovetores respectivos.

• Indexando as representações irredutíveis

Como vimos, cada representação irredutível de SU(2) é caracterizada por um autovalor de L^2 e podemos, portanto, classificar as representações irredutíveis de SU(2) pelo índice l: Π_l, com $l \in \mathbb{N}_0/2$. Esse fato é de grande importância na Física Quântica, pois os números $l(l+1)$ e m são associados aos autovalores dos operadores de momento angular total L^2 e azimutal L_3.

• Elementos de matriz dos geradores L_1, L_2 e L_3

É possível fixar a forma dos geradores L_a em cada representação irredutível Π_l. Para isso, escolhemos como base os $2l+1$ vetores $\psi_{l,m}$ com $-l \leq m \leq l$. Nessa base L_3 é diagonal tendo elemento de matriz m na m-ésima posição da diagonal. Para obter os elementos de matriz de L_1 e L_2, obtemos primeiramente os elementos de matriz de $L_\pm$. Os mesmos podem ser fixados a partir de (25.31)–(25.32), que dizem-nos que,

$$\big\|L_+\psi_{l,m}\big\|^2 = (l-m)(l+m+1) = \big[l(l+1)-m(m+1)\big] \tag{25.40}$$

e

$$\big\|L_-\psi_{l,m}\big\|^2 = (l+m)(l-m+1) = \big[l(l+1)-m(m-1)\big] \tag{25.41}$$

para $\|\psi_{l,m}\| = 1$. Sabemos que $L_\pm\psi_{l,m}$ deve ser múltiplo de $\psi_{l,m\pm1}$. Com as relações acima, podemos convencionar (fixando os fatores de fase como sendo iguais a 1),

$$L_+\psi_{l,m} = \sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\;\psi_{l,\,m+1}\;, \tag{25.42}$$

$$L_-\psi_{l,m} = \sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\;\psi_{l,\,m-1}\;. \tag{25.43}$$

Isso fornece a ação das matrizes $L_\pm$ na base $\psi_{l,m}$. Escrevendo $L_\pm = L_1 \pm iL_2$, obtemos também facilmente a ação das matrizes L_1 e L_2 naquela base. O resultado, incluindo a ação da matriz L_3, é

$$L_1\psi_{l,m} = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\;\psi_{l,\,m+1}+\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\;\psi_{l,\,m-1}\Big)\;, \tag{25.44}$$

$$L_2\psi_{l,m} = \frac{1}{2i}\Big(\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\;\psi_{l,\,m+1}-\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\;\psi_{l,\,m-1}\Big)\;, \tag{25.45}$$

$$L_3\psi_{l,m} = m\,\psi_{l,m}\;. \tag{25.46}$$

Com as expressões acima podemos obter explicitamente os elementos de matriz de L_1, L_2, L_3 e $L_\pm$ na base $\psi_{l,m}$:

$$\big\langle\psi_{l,m'}\,,\;L_1\psi_{l,m}\big\rangle = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\;\delta_{m',\,m+1}+\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\;\delta_{m',\,m-1}\Big)\;, \tag{25.47}$$

$$\big\langle\psi_{l,m'}\,,\;L_2\psi_{l,m}\big\rangle = \frac{1}{2i}\Big(\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\;\delta_{m',\,m+1}-\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\;\delta_{m',\,m-1}\Big)\;, \tag{25.48}$$

$$\big\langle\psi_{l,m'}\,,\;L_3\psi_{l,m}\big\rangle = m\,\delta_{m',\,m}\;. \tag{25.49}$$

É elementar constatar por (25.47)–(25.49) que $\big\langle\psi_{l,m}\,,\;L_a\psi_{l,m'}\big\rangle = \overline{\big\langle\psi_{l,m'}\,,\;L_a\psi_{l,m}\big\rangle}$ para cada $a = 1, 2, 3$ e, portanto, vale $L_a = L_a^*$ para cada $a = 1, 2, 3$, confirmando que os geradores L_a são autoadjuntos.

E. 25.29 *Exercício*. Escreva explicitamente as matrizes L_1, L_2 e L_3 nos casos $l = 1/2$, $l = 1$ e $l = 3/2$. Constate que no primeiro caso obtém-se, a menos de um fator $1/2$, as matrizes de Pauli. Compare as matrizes do caso $l = 1$ com os geradores do grupo SO(3) dadas em (22.46)–(22.48), página 1054. ✠

Com as expressões acima, é até mesmo possível escrever de modo explícito a forma das representações $\Pi_l\Big(U(\theta,\;\vec{\eta})\Big) = \exp\Big(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{L}\Big)$, para $l \in \mathbb{N}_0/2$, arbitrário, mas não faremos isso aqui.

25.6 Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de $\mathscr{L}_+^\uparrow$

As representações unitárias irredutíveis de dimensão finita do grupo SU(2) obtidas na Seção 25.5, página 1271, permitem também determinar as representações irredutíveis de dimensão finita do grupo de Lorentz próprio ortócrono $\mathscr{L}_+^\uparrow$. Tal se deve ao fato especial – e um tanto inesperado – de a álgebra de Lie de $\mathscr{L}_+^\uparrow$ decompor-se, na forma como iremos especificar no que segue, em duas cópias da álgebra de Lie de SU(2) e que comutam entre si.

Seja Π uma representação de dimensão finita do grupo de Lorentz próprio ortócrono $\mathscr{L}_+^\uparrow$ em espaço vetorial real ou complexo. Sejam

$$\mathbf{j}_a := \Pi(\mathcal{J}_a) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{m}_a := \Pi(\mathcal{M}_a)\;,$$

$a = 1,\ 2,\ 3$, com $\mathcal{J}_a$ e $\mathcal{M}_a$ dados em (22.161) e (22.160), respectivamente, e que satisfazem as relações de comutação (22.162)–(22.164), página 1114, que definem a álgebra de Lie real $\ell_+^\uparrow(\mathbb{R})$.

As matrizes $\mathbf{j}_a$ e $\mathbf{m}_a$, $a = 1,\ 2,\ 3$, são os geradores de rotações e *boosts*, respectivamente, na representação $\Pi\big(\mathscr{L}_+^\uparrow\big)$ e compõe uma representação $\Pi\big(\ell_+^\uparrow(\mathbb{R})\big)$ da álgebra de Lie real $\ell_+^\uparrow(\mathbb{R})$, na qual valem as relações de comutação

$$[\mathbf{j}_a,\;\mathbf{j}_b] = \varepsilon_{abc}\,\mathbf{j}_c\;, \tag{25.50}$$

$$[\mathbf{m}_a,\;\mathbf{m}_b] = -\varepsilon_{abc}\,\mathbf{j}_c\;, \tag{25.51}$$

$$[\mathbf{j}_a,\;\mathbf{m}_b] = \varepsilon_{abc}\,\mathbf{m}_c\;, \tag{25.52}$$

em concordância com (22.162)–(22.164), página 1114. Acima e adiante adotamos a convenção de somar (de 1 a 3) sobre índices repetidos. Os elementos da álgebra de Lie real $\Pi\big(\ell_+^\uparrow(\mathbb{R})\big)$ são combinações lineares da forma $\alpha_k\mathbf{j}_k + \beta_k\mathbf{m}_k$, onde $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3) \in \mathbb{R}^6$.

Definamos

$$\mathbf{k}_a := \frac{1}{2}\big(\mathbf{m}_a + i\mathbf{j}_a\big) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{n}_a := \frac{1}{2}\big(-\mathbf{m}_a + i\mathbf{j}_a\big)$$

$a = 1,\,2,\,3$, com o que podemos, naturalmente, escrever

$$\mathbf{j}_a = \frac{1}{i}\big(\mathbf{k}_a + \mathbf{n}_a\big) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{m}_a = \big(\mathbf{k}_a - \mathbf{n}_a\big)\;.$$

É também claro que elementos genéricos da álgebra de Lie real $\Pi\big(\ell_+^\uparrow(\mathbb{R})\big)$ podem ser escritos em termos dos geradores $\{\mathbf{j}_a,\ \mathbf{m}_a,\ a = 1,\,2,\,3\}$, ou em termos dos geradores $\{\mathbf{k}_a,\ \mathbf{n}_a,\ a = 1,\,2,\,3\}$, pois tem-se

$$\alpha_a\mathbf{j}_a + \beta_a\mathbf{m}_a = (\beta_a - i\alpha_a)\mathbf{k}_a - \overline{(\beta_b - i\alpha_b)}\mathbf{n}_b\;, \tag{25.53}$$

com $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3) \in \mathbb{R}^6$.

Há, porém, uma vantagem em se usar os geradores $\{\mathbf{k}_a,\ \mathbf{n}_a,\ a = 1,\,2,\,3\}$. Para encontrá-la, consideremos a álgebra de Lie *complexa* $\Pi\big(\ell_+^\uparrow(\mathbb{C})\big)$ cujos elementos são da forma $w_k\mathbf{k}_k + z_k\mathbf{n}_k$ com $(w_1,\ w_2,\ w_3,\ z_1,\ z_2,\ z_3) \in \mathbb{C}^6$. A álgebra de Lie real $\Pi\big(\ell_+^\uparrow(\mathbb{R})\big)$ é a subálgebra real de $\Pi\big(\ell_+^\uparrow(\mathbb{C})\big)$ composta por elementos da forma $w_k\mathbf{k}_k - \overline{w_k}\mathbf{n}_k$, com $(z_1,\ z_2,\ z_3) \in \mathbb{C}^3$ (vide (25.53)).

É um exercício elementar, mas importante (e que recomendamos fortemente ao estudante), verificar a partir de (25.50)–(25.52) que os geradores $\{\mathbf{k}_a,\ \mathbf{n}_a,\ a = 1,\,2,\,3\}$ satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[\mathbf{k}_a,\;\mathbf{n}_b] = 0\;, \tag{25.54}$$

$$[\mathbf{k}_a,\;\mathbf{k}_b] = i\varepsilon_{abc}\,\mathbf{k}_c\;, \tag{25.55}$$

$$[\mathbf{n}_a,\;\mathbf{n}_b] = i\varepsilon_{abc}\,\mathbf{n}_c\;, \tag{25.56}$$

válidas para todos $a,\ b \in \{1,\ 2,\ 3\}$. O que constatamos disso é que os geradores $\{\mathbf{k}_a,\ a = 1, 2, 3\}$ e os geradores $\{\mathbf{n}_a,\ a = 1, 2, 3\}$ geram separadamente duas subálgebras de Lie complexas de $\Pi\big(\ell_+^\uparrow(\mathbb{C})\big)$, as quais comutam entre si (por (25.54)) e cada uma delas é isomorfa à complexificação $\mathrm{su}(2,\ \mathbb{C}) \simeq \mathrm{sl}(2,\ \mathbb{C})$ da álgebra de Lie real su(2) (por (25.55) e por (25.56)).

Os elementos da representação $\Pi\big(\mathscr{L}_+^\uparrow\big)$ são, portanto, da forma $\exp\big(w_a\mathbf{k}_a\big)\exp\big(-\overline{w_b}\mathbf{n}_b\big)$ com $(w_1,\ w_2,\ w_3) \in \mathbb{C}^3$.

• Representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathscr{L}_+^\uparrow$

As representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathrm{su}(2,\ \mathbb{C}) \simeq \mathrm{sl}(2,\ \mathbb{C})$ são as mesmas de sua versão real $\mathrm{su}(2) \simeq \mathrm{so}(3)$ e que foram estudadas na Seção 25.5, página 1271. Elas são classificadas por um número inteiro ou semi-inteiro não-negativo $l \in \mathbb{N}_0/2 := \big\{0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2,\ 2,\ 5/2,\ \ldots\big\}$. Assim, as representações irredutíveis de dimensão finita de $\ell_+^\uparrow(\mathbb{C})$ e as do grupo de Lorentz próprio ortócrono $\mathscr{L}_+^\uparrow$ são indexadas por um par $(l_1,\ l_2) \in \big(\mathbb{N}_0/2\big) \times \big(\mathbb{N}_0/2\big)$. Elas são comummente denotadas por $\mathscr{D}^{(l_1,\ l_2)}$, com $(l_1,\ l_2) \in \big(\mathbb{N}_0/2\big) \times \big(\mathbb{N}_0/2\big)$ e são da forma

$$\mathscr{D}^{(l_1,\ l_2)}(w_1,\ w_2,\ w_3) \;=\; \exp\Big(w_a\mathbf{k}_a^{(l_1)}\Big)\exp\Big(-\overline{w_b}\mathbf{n}_b^{(l_2)}\Big) \;=\; \exp\Big(-\overline{w_b}\mathbf{n}_b^{(l_2)}\Big)\exp\Big(w_a\mathbf{k}_a^{(l_1)}\Big)\,, \tag{25.57}$$

com $(w_1,\ w_2,\ w_3) \in \mathbb{C}^3$, onde denotamos por $\mathbf{k}_a^{(l_1)}$ e $\mathbf{n}_b^{(l_2)}$ os geradores das representações irredutíveis de $\mathrm{su}(2,\ \mathbb{C})$ indexados por $l_1 \in \mathbb{N}_0/2$ e $l_2 \in \mathbb{N}_0/2$, respectivamente.

Adaptando o que aprendemos na Seção 25.5, página 1271, podemos explicitar a forma das matrizes $\mathbf{k}_a^{(l_1)}$ e $\mathbf{n}_b^{(l_2)}$.

As matrizes $\mathbf{k}_a^{(l_1)}$ agem em um espaço vetorial $2l_1+1$ dimensional $\mathbb{C}^{2l_1+1}$ dotado de uma base ortonormal $\{\psi_{l_1,\, m_1},\ -l_1 \leq m_1 \leq l_1\}$, sendo que m_1 assume $2l_1+1$ valores semi-inteiros (caso l_1 seja semi-inteiro) ou inteiros (caso l_1 seja inteiro) entre $-l_1$ e l_1. De acordo com (25.47)–(25.49), temos

$$\Big\langle \psi_{l_1,m_1'}\,,\ \mathbf{k}_1^{(l_1)}\psi_{l_1,m_1}\Big\rangle \;=\; \frac{1}{2}\Big(\sqrt{l_1(l_1+1)-m_1(m_1+1)}\;\delta_{m_1',\,m_1+1} + \sqrt{l_1(l_1+1)-m_1(m_1-1)}\;\delta_{m_1',\,m_1-1}\Big)\,, \tag{25.58}$$

$$\Big\langle \psi_{l_1,m_1'}\,,\ \mathbf{k}_2^{(l_1)}\psi_{l_1,m_1}\Big\rangle \;=\; \frac{1}{2i}\Big(\sqrt{l_1(l_1+1)-m_1(m_1+1)}\;\delta_{m_1',\,m_1+1} - \sqrt{l_1(l_1+1)-m_1(m_1-1)}\;\delta_{m_1',\,m_1-1}\Big)\,, \tag{25.59}$$

$$\Big\langle \psi_{l_1,m_1'}\,,\ \mathbf{k}_3^{(l_1)}\psi_{l_1,m_1}\Big\rangle \;=\; m_1\,\delta_{m_1',\,m_1}\,, \tag{25.60}$$

sendo que para o operador de Casimir vale

$$\left(\sum_{a=1}^{3}\big(\mathbf{k}_a^{(l_1)}\big)^2\right)\psi_{l_1,m_1} \;=\; l_1(l_1+1)\psi_{l_1,m_1}\,.$$

Analogamente, as matrizes $\mathbf{n}_a^{(l_2)}$ agem no espaço vetorial $2l_2+1$ dimensional $\mathbb{C}^{2l_2+1}$ dotado de uma base ortonormal $\{\phi_{l_2,\,m_2},\ -l_2 \leq m_2 \leq l_2\}$, sendo que m_2 assume $2l_2+1$ valores semi-inteiros (caso l_2 seja semi-inteiro) ou inteiros (caso l_2 seja inteiro) entre $-l_2$ e l_2. Tem-se aqui

$$\Big\langle \phi_{l_2,m_2'}\,,\ \mathbf{n}_1^{(l_2)}\phi_{l_2,m_2}\Big\rangle \;=\; \frac{1}{2}\Big(\sqrt{l_2(l_2+1)-m_2(m_2+1)}\;\delta_{m_2',\,m_2+1} + \sqrt{l_2(l_2+1)-m_2(m_2-1)}\;\delta_{m_2',\,m_2-1}\Big)\,, \tag{25.61}$$

$$\Big\langle \phi_{l_2,m'}\,,\ \mathbf{n}_2^{(l_2)}\phi_{l_2,m_2}\Big\rangle \;=\; \frac{1}{2i}\Big(\sqrt{l_2(l_2+1)-m_2(m_2+1)}\;\delta_{m_2',\,m_2+1} - \sqrt{l_2(l_2+1)-m_2(m_2-1)}\;\delta_{m_2',\,m_2-1}\Big)\,, \tag{25.62}$$

$$\Big\langle \phi_{l_2,m_2'}\,,\ \mathbf{n}_3^{(l_2)}\phi_{l_2,m_2}\Big\rangle \;=\; m_2\,\delta_{m_2',\,m_2}\,. \tag{25.63}$$

sendo que para o operador de Casimir vale

$$\left(\sum_{a=1}^{3}\big(\mathbf{n}_a^{(l_2)}\big)^2\right)\phi_{l_2,m_2} \;=\; l_2(l_2+1)\phi_{l_2,m_2}\,.$$

Das expressões (25.58)–(25.60) e (25.61)–(25.63) obtém-se imediatamente os elementos de matriz dos geradores de rotações de *boosts*

$$\mathbf{j}_a^{(l_1,\,l_2)} \;:=\; \frac{1}{i}\Big(\mathbf{k}_a^{(l_1)} + \mathbf{n}_a^{(l_2)}\Big) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{m}_a^{(l_1,\,l_2)} \;:=\; \Big(\mathbf{k}_a^{(l_1)} - \mathbf{n}_a^{(l_2)}\Big)\,, \tag{25.64}$$

mas não temos necessidade de explicitá-los aqui.

• As representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathscr{L}_+^\uparrow$

A representação $\mathscr{D}^{(l_1,\,l_2)}$, com $(l_1,\ l_2) \in \big(\mathbb{N}_0/2\big) \times \big(\mathbb{N}_0/2\big)$, age no espaço $\mathbb{C}^{2l_1+1} \otimes \mathbb{C}^{2l_2+1} \simeq \mathbb{C}^{(2l_1+1)(2l_2+1)}$ que possui como base ortonormal os vetores $\psi_{l_1,m_1} \otimes \phi_{l_2,m_2}$, $-l_1 \leq m_1 \leq l_1$ e $-l_2 \leq m_2 \leq l_2$.

A representação $\mathscr{D}^{(0,\,0)}$ é trivial e associa todo elemento de $\mathscr{L}_+^\uparrow$ a 1. Os primeiros casos de interesse são as representações $\mathscr{D}^{(1/2,\,0)}$ e $\mathscr{D}^{(0,\,1/2)}$, que agem em $\mathbb{C}^2$. Temos por (25.57) que

$$\mathscr{D}^{(1/2,\,0)}(w_1,\ w_2,\ w_3) \;=\; \exp\Big(w_a\mathbf{k}_a^{(1/2)}\Big) \qquad \text{e} \qquad \mathscr{D}^{(0,\,1/2)}(w_1,\ w_2,\ w_3) \;=\; \exp\Big(-\overline{w_b}\mathbf{n}_b^{(1/2)}\Big)\,.$$

Nesse caso podemos identificar $\mathbf{k}_a^{(1/2)} = \mathbf{n}_a^{(1/2)} = \sigma_a$ (o que segue das expressões (25.58)–(25.60) e (25.61)–(25.63)) e temos

$$\mathscr{D}^{(1/2,\,0)}(w_1,\ w_2,\ w_3) \;=\; \exp\big(w_a\sigma_a\big) \qquad \text{e} \qquad \mathscr{D}^{(0,\,1/2)}(w_1,\ w_2,\ w_3) \;=\; \exp\big(-\overline{w_b}\sigma_b\big)\,. \tag{25.65}$$

Além das representações $\mathscr{D}^{(l_1,\,l_2)}$, com $(l_1,\ l_2) \in \big(\mathbb{N}_0/2\big) \times \big(\mathbb{N}_0/2\big)$, temos também representações obtidas tomando seu complexo conjugado. Tais representações são denotadas por $\overline{\mathscr{D}^{(l_1,\,l_2)}}$.

Mais propriedades das representações $\mathscr{D}^{(1/2,\,0)}$, $\mathscr{D}^{(0,\,1/2)}$, $\overline{\mathscr{D}^{(1/2,\,0)}}$ e $\overline{\mathscr{D}^{(0,\,1/2)}}$ serão estudadas na Seção 26.2, página 1287.

• A questão da unitariedade das representações de dimensão finita de $\mathscr{L}_+^\uparrow$

Todas as matrizes $\mathbf{k}_a^{(l_1)}$ e $\mathbf{n}_a^{(l_2)}$, cujos elementos de matriz foram explicitados em (25.58)–(25.60) e (25.61)–(25.63) são autoadjuntas (como comentamos na Seção 25.5, página 1271). Portanto, por (25.64), os geradores de *boosts* $\mathbf{m}_a^{(l_1,\,l_2)}$ são autoadjuntos, mas os geradores de rotações $\mathbf{j}_a^{(l_1,\,l_2)}$ são antiautoadjuntos: $\Big(\mathbf{j}_a^{(l_1,\,l_2)}\Big)^* = -\mathbf{j}_a^{(l_1,\,l_2)}$. Segue desses dois fatos que as representações irredutíveis $\mathscr{D}^{(l_1,\,l_2)}(w_1,\ w_2,\ w_3)$ fornecidas em (25.57) não são representações unitárias (exceto no caso da representação trivial na qual $l_1 = l_2 = 0$). Pela Proposição 25.1, página 1250, somos levados à seguinte conclusão:

Proposição 25.7 *O grupo de Lorentz próprio ortócrono $\mathscr{L}_+^\uparrow$ não possui representações unitárias de dimensão finita não-triviais.* □

25.7 Exercícios Adicionais

E. 25.30 *Exercício*. A Proposição 24.6, página 1226, estabelceu que toda representação contínua do grupo aditivo dos reais $(\mathbb{R}, +)$ em $\mathbb{C}^n$ (ou, respectivamente, em $\mathbb{R}^n$) é da forma $\pi_M(t) := \exp\big(tM\big)$, $t \in \mathbb{R}$, para algum $M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C}, n)$ (ou, respectivamente, para algum $M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{R}, n)$).

Mostre que toda representação contínua do grupo multiplicativo dos reais positivos $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ em $\mathbb{C}^n$ (ou, respectivamente, em $\mathbb{R}^n$) é da forma $\pi_M(\lambda) := \exp\big(\ln(\lambda)M\big)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, para algum $M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C}, n)$ (ou, respectivamente, para algum $M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{R}, n)$). *Sugestão:* use o fato que a função logaritmo $\ln$ é um isomorfismo de $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ em $(\mathbb{R}, +)$. ✠