

Capítulo 28

O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas de Suas Consequências

Conteúdo

28.1	O Teorema de Ponto Fixo de Banach	1371
28.1.1	Generalizações do Teorema de Ponto Fixo de Banach	1373
28.2	Diversas Aplicações do Teorema de Ponto Fixo de Banach	1376
28.2.1	Aplicação a Equações Numéricas. O Método de Newton	1376
28.2.2	Aplicação a Sistemas Lineares. O Método de Jacobi	1379
28.2.3	Aplicação às Equações Integrais de Fredholm e de Volterra	1380
28.2.4	Aplicações à Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias	1387
28.2.4.1	O Teorema de Picard-Lindelöf	1387
28.2.4.2	Generalizando o Teorema de Picard-Lindelöf. Soluções Globais	1391
28.2.4.3	Um Teorema de Comparação de Soluções de EDO's	1392
28.3	O Teorema da Função Implícita e o Teorema da Função Inversa	1394
28.3.1	O Teorema da Função Implícita	1395
28.3.2	O Teorema da Função Inversa	1399
	APÊNDICES	1400
28.A	O Lema de Grönwall	1400



SEJA X um conjunto não-vazio e $f : X \rightarrow X$ uma função de X em X . Muitas vezes, em problemas práticos e teóricos, estamos interessados em encontrar os pontos $x \in X$ que são levados em si mesmos pela função f , ou seja, os pontos $x \in X$ tais que

$$x = f(x).$$

Os pontos que satisfazem essa equação são chamados de *pontos fixos* da transformação f e a equação acima é denominada *equação de ponto fixo*. Veremos abaixo vários exemplos de equações desse tipo, tanto no contexto de equações numéricas quanto no de equações integrais e diferenciais.

Na prática, dada uma função f , pode afigurar-se difícil saber se sequer existe um ponto fixo para ela. Muitas vezes estamos interessados em saber quantos pontos fixos há e, frequentemente, gostaríamos de garantir que há um e apenas um ponto fixo de uma dada função (a chamada “unicidade da solução”).

Teoremas que nos garantam existência e, por vezes, unicidade de soluções de equações de ponto fixo são chamados de *teoremas de ponto fixo*. Há vários teoremas de tal tipo na literatura matemática, como por exemplo, o Teorema de Ponto Fixo de Banach¹, o Teorema de Ponto Fixo Brouwer², o Teorema do Ponto Fixo de Schauder³ e vários outros, todos com pressupostos distintos sobre o conjunto X e sobre a função f .

Seja, por exemplo, o disco fechado D_n de \mathbb{R}^n :

$$D_n := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq 1 \right\}.$$

O chamado *Teorema do Ponto Fixo de Brouwer* afirma que toda função contínua (na topologia usual) de D_n em D_n tem pelo menos um ponto fixo. Aqui a unicidade nem sempre pode ser garantida: pense no exemplo das rotações em \mathbb{R}^3 em torno de um eixo que passa pela origem. Todo ponto ao longo do eixo de rotação é levado em si mesmo pela rotação e, portanto, um ponto fixo da mesma.

O *Teorema do Ponto Fixo de Schauder* afirma que se X é um subconjunto convexo e compacto⁴ de um espaço de

¹Stefan Banach (1892–1945).

²Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966).

³Juliusz Pawel Schauder (1899–1943).

⁴Para a definição da noção de compacidade e suas propriedades, vide Seção 34.3, página 1579.

Banach então toda função contínua (na topologia da norma) de X em X tem um ponto fixo (não-necessariamente único).

Aqui trataremos de um teorema de ponto fixo extremamente útil conhecido como *Teorema de Ponto Fixo de Banach*, que é válido em espaços métricos completos. De fato, este é de longe o teorema de ponto fixo com mais aplicações, sendo que sua influência se estende aos domínios das equações integrais, das equações diferenciais, das equações numéricas em \mathbb{C} , da Análise Numérica e de muitas outras áreas da Matemática pura e aplicada. Na Seção 28.2.4, página 1387, tratamos de aplicações do Teorema de Ponto Fixo de Banach à teoria das equações diferenciais ordinárias. Na Seção 21.10, página 981, tratamos de uma importante aplicação do Teorema de Ponto Fixo de Banach à teoria das equações diferenciais parciais, a saber, usamos o mesmo para obter a solução geral de equações diferenciais parciais de tipo hiperbólico com coeficientes constantes em duas dimensões.

O Teorema de Ponto Fixo de Banach foi estabelecido por Banach em 1922⁵. Uma das razões de sua importância reside no fato de fornecer, junto com seu enunciado, um método iterativo aproximativo para a determinação do ponto fixo, método este que é muito eficiente. Outra razão é o fato de o teorema reunir condições que garantem unicidade do ponto fixo. Vamos ao seu enunciado.

28.1 O Teorema de Ponto Fixo de Banach

Teorema 28.1 (Teorema de Ponto Fixo de Banach) *Seja M um conjunto dotado de uma métrica d e suponha M completo em relação a d . Seja A um subconjunto fechado de M e seja $T : A \rightarrow A$ uma função de A em A . Vamos então supor que exista um número q com $0 \leq q < 1$ tal que para todos os pontos x e y de A valha*

$$d(T(x), T(y)) \leq qd(x, y). \tag{28.1}$$

Então, a equação de ponto fixo

$$x = T(x), \tag{28.2}$$

tem solução em A e essa solução é única. Além disso, para qualquer $x_0 \in A$, a sequência $x_n = T(x_{n-1})$, $n \geq 1$, obtida aplicando-se repetidamente T a partir de x_0 , converge (rapidamente) ao ponto fixo x na métrica d . A saber, tem-se que

$$d(x_n, x) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \tag{28.3}$$

□

Uma função $T : A \rightarrow A$ tal que existe um número q com $0 \leq q < 1$ e tal que para todos os pontos x e y de A valha a desigualdade (28.1) é dita ser uma *contração* em relação à métrica d . A constante q é por vezes denominada *constante de Lipschitz*⁶. O teorema acima afirma que toda contração em um espaço métrico completo tem um, e somente um, ponto fixo. É também importante frisar que o teorema fornece também um método iterativo de determinação aproximada do ponto fixo, sendo que, por (28.3), a aproximação é tanto melhor quanto mais iterações forem feitas. Mais adiante apresentaremos um teorema análogo ao Teorema 28.1 no qual a condição de contração é enfraquecida. Vide Teorema 28.2, página 1373. Vamos primeiro provar o Teorema 28.1 para depois vermos vários exemplos de seu uso.

Prova do Teorema 28.1. Como A é um subconjunto fechado de um espaço métrico completo, então A é também completo em relação à mesma métrica (vide Proposição 27.9, página 1331, ou equivalentemente, a Proposição 29.12, página 1423).

Para simplificar a notação denotaremos por T^n a n -ésima composição de T consigo mesma: $\underbrace{T \circ \dots \circ T}_n$. Definimos então para um $x_0 \in A$ arbitrário $x_n = T^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$.

Vamos agora provar que $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em A . Para isso sejam m e n dois números naturais

⁵S. Banach “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales”. Fund. Math. **3**, 133–181 (1922).

⁶Rudolf Otto Sigmund Lipschitz (1832–1903). Essa denominação provém da noção de função Lipschitz-contínua. Vide, e.g., página 1489.

quaisquer tais que $m < n$. Então, usando a desigualdade triangular $n - m$ vezes temos o seguinte:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_n) \\ &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + d(x_{m+2}, x_n) \\ &\quad \vdots \\ &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Pela propriedade de contração, temos que

$$d(x_a, x_{a+1}) = d(T(x_{a-1}), T(x_a)) \leq q d(x_{a-1}, x_a) \leq \cdots \leq q^a d(x_0, x_1).$$

Dáí

$$d(x_m, x_n) \leq (q^m + q^{m+1} + \cdots + q^{n-1}) d(x_0, x_1)$$

e, portanto,

$$d(x_m, x_n) \leq q^m (1 + q + \cdots + q^{n-1-m}) d(x_0, x_1) \leq q^m \left(\sum_{a=0}^{\infty} q^a \right) d(x_0, x_1) = \frac{q^m}{1-q} d(x_0, x_1).$$

Isso prova que $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy, pois q^m pode ser feito arbitrariamente pequeno tomando m grande, para qualquer $n > m$.

Como $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em A e A é completo, deve haver x em A , único, ao qual a seqüência converge. Temos sempre, usando a desigualdade triangular, que

$$d(x, x_m) \leq d(x, x_n) + d(x_n, x_m).$$

Tomando $n > m$, temos

$$d(x, x_m) \leq d(x, x_n) + \frac{q^m}{1-q} d(x_0, x_1).$$

Como x_n se aproxima de x para n grande, podemos fazer o termo $d(x, x_n)$ arbitrariamente pequeno, tomando n grande, sem alterar os demais. Dáí, concluímos que

$$d(x, x_m) \leq \frac{q^m}{1-q} d(x_0, x_1). \tag{28.4}$$

Essa última desigualdade mostra que x_m de fato se aproxima exponencialmente rápido de x .

Vamos agora provar que x , o limite da seqüência $\{x_n\}$, é um ponto fixo. Para isso calculemos $d(x, T(x))$. Teremos, pela desigualdade triangular

$$d(x, T(x)) \leq d(x, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, T(x)),$$

para todo m . Usando (28.4) e a contratividade de T teremos,

$$d(x, T(x)) \leq \frac{q^{m+1}}{1-q} d(x_0, x_1) + q d(x_m, x) \leq \frac{q^{m+1}}{1-q} d(x_0, x_1) + \frac{q^{m+1}}{1-q} d(x_0, x_1) = 2 \frac{q^{m+1}}{1-q} d(x_0, x_1).$$

Como m é arbitrário podemos fazer $m \rightarrow \infty$ e obtemos $d(x, T(x)) = 0$, o que implica que $x = T(x)$.

Por fim, resta-nos provar que x é o único ponto fixo de T . Para tal, vamos supor que haja um outro: $x' = T(x')$. Teríamos, usando a contratividade, que

$$d(x, x') = d(T(x), T(x')) \leq q d(x, x'),$$

ou seja, $(1-q)d(x, x') \leq 0$. Como $q < 1$ isso implica $d(x, x') = 0$, que implica $x = x'$. Isso completa a prova do Teorema de Ponto Fixo de Banach. ■

• **Uma recíproca para o Teorema de Ponto Fixo de Banach**

Suponhamos que M seja um conjunto dotado de uma métrica d e suponhamos que toda contração $T : M \rightarrow M$ possua um ponto fixo único. Podemos inferir disso que M é completo em relação a d ? Em outras palavras, vale uma recíproca para o Teorema de Ponto Fixo de Banach? Essa questão foi e vem sendo bastante estudada na literatura matemática e sua resposta é geralmente não. Contraexemplos, assim como condições adicionais para a validade da recíproca e referências à literatura pertinente podem ser encontradas em: Márton Eleke, “On a converse to Banach’s Fixed Point Theorem”, arXiv:1108.5920v1, August 31, (2011).

28.1.1 Generalizações do Teorema de Ponto Fixo de Banach

Nesta seção lidaremos com duas extensões do Teorema de Ponto Fixo de Banach, uma tratando de um caso onde a condição de contratividade $q < 1$ não é estritamente satisfeita e outro onde a aplicação T não é contrativa, mas alguma potência de T o é. Esse segundo caso será relevante na discussão das equações integrais de Volterra, assim como na apresentação de teoremas de existência e unicidade de soluções de problemas de valor inicial em equações diferenciais ordinárias, temas tratados mais adiante.

A condição que $q < 1$ é crucial para a demonstração do Teorema 28.1 e sem ela suas conclusões podem não mais ser válidas. Vejamos o seguinte exemplo, citado em diversos livros-texto. Seja $M = [1, \infty)$ com a métrica usual $d(x, y) = |x - y|$ e seja $T : M \rightarrow M$ dada por $T(x) = x + x^{-1}$. Então, vale para todo x e $y \in M$, $x \neq y$,

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y).$$

De fato, para $1 \leq x < y$,

$$T(y) - T(x) = \int_x^y T'(t) dt = \int_x^y \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) dt < \int_x^y dt = y - x,$$

pois $1 - t^{-2} < 1$ para $t > 1$, sendo essa a melhor estimativa possível. Assim,

$$|T(y) - T(x)| < |y - x|,$$

como queríamos provar. Note agora, porém, que T não tem nenhum ponto fixo. De fato, $T(x) = x$ significa $x + x^{-1} = x$, ou seja, $x^{-1} = 0$, o que não é possível se $x \in [1, \infty)$.

Em espaços métricos compactos, porém, a condição de contração $q < 1$ pode ser enfraquecida preservando essencialmente os mesmos resultados do Teorema 28.1. Esse é o conteúdo do Teorema 28.2, adiante.

• **Enfraquecendo a condição de contratividade. Aplicações em compactos**

Seja M um conjunto dotado de uma métrica d . Recordemos⁷ que $A \subset M$ é dito ser compacto se e somente se possuir a propriedade de Bolzano⁸-Weierstrass⁹: toda seqüência em A possui uma subsequência convergente em A em relação à métrica d . Por um teorema geral (Teorema 34.11, página 1591), o fato de A ser compacto em um espaço métrico implica que A é fechado, completo e limitado.

O seguinte teorema é devido a Edelstein¹⁰.

Teorema 28.2 *Seja M um conjunto dotado de uma métrica d . Seja $A \subset M$ compacto (na topologia induzida em M pela métrica d) e seja $T : A \rightarrow A$ uma função de A em A . Vamos supor que valha a condição*

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y) \tag{28.5}$$

para todos $x, y \in A$ com $x \neq y$. Então, a equação de ponto fixo $x = T(x)$ tem solução em A e essa solução é única. □

⁷Para a definição da noção de compacidade e suas propriedades, vide Seção 34.3, página 1579.

⁸Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848).

⁹Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815-1897).

¹⁰M. Edelstein, “An extension of Banach’s contraction principle”. Proc. Am. Math. Soc. **12** (1) (1961), 7-10. M. Edelstein, “On fixed and periodic points under contractive mappings”. J. London Math. Soc. **37** (1) (1962), 74-79.

Comentário. O fato de A ser suposto compacto faz com que seja dispensável supor que M seja completo, pois A o é. Vide Teorema 34.11, página 1591. ♣

Prova do Teorema 28.2. Observemos em primeiro lugar que se T possuir um ponto fixo, este é único. De fato, sejam $x, y \in A$ tais que $T(x) = x$ e $T(y) = y$. Se $x \neq y$, valeria $d(x, y) = d(T(x), T(y)) < d(x, y)$, o que é uma desigualdade impossível. Logo $x = y$.

Pelas hipóteses, para $x_0 \in A$ a sequência $x_n = T^n(x_0)$ de elementos de A tem ao menos uma subsequência convergente a um elemento $x_* \in A$. Vamos provar que esse x_* é um ponto fixo de T , ou seja, $x_* = T(x_*)$. Vamos supor que $T(x_*) \neq x_*$ e mostrar que isso leva a uma contradição.

Seja $x_{n_k}, k \in \mathbb{N}$, uma subsequência que converge a x_* da sequência $x_n = T^n(x_0)$, ou seja, que satisfaz a propriedade: para todo $\epsilon > 0$ existe $K(\epsilon)$ tal que $d(x_{n_k}, x_*) \leq \epsilon$ para todo $k \geq K(\epsilon)$.

Por (28.5), $d(T(x_*), T(x_{n_k})) \leq d(x_*, x_{n_k})$ (a igualdade se dando apenas se $x_* = x_{n_k}$), o que implica que $(x_{n_k}, T(x_{n_k}))$ converge a $(x_*, T(x_*))$ em $A^2 \equiv A \times A$ se x_{n_k} converge a x_* .

Seja $r_0 := d(T(x_*), (x_*)/3)$. Para todo $k \geq K(r_0)$ vale $d(x_*, x_{n_k}) \leq r_0$ e pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} 3r_0 &= d(T(x_*), x_*) \leq d(T(x_*), T(x_{n_k})) + d(T(x_{n_k}), x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_*) \\ &\stackrel{(28.5)}{\leq} 2d(x_*, x_{n_k}) + d(T(x_{n_k}), x_{n_k}) \leq 2r_0 + d(T(x_{n_k}), x_{n_k}). \end{aligned}$$

Logo, para todo $k \geq K(r_0)$, $r_0 \leq d(T(x_{n_k}), x_{n_k})$, ou seja,

$$d(T(x_*), x_*) \leq 3d(T(x_{n_k}), x_{n_k}). \quad (28.6)$$

Seja agora $D := \{(x, x), x \in A\} \subset A^2$, o conjunto diagonal de A^2 e defina-se em $A^2 \setminus D$ a função $F : A^2 \setminus D \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$F(x, y) := \frac{d(T(x), T(y))}{d(x, y)}.$$

Provemos em primeiro lugar que F é contínua em $A^2 \setminus D$. De fato, da desigualdade triangular segue que $d(T(x), T(y)) \leq d(T(x), T(x')) + d(T(x'), T(y')) + d(T(y'), T(y))$. Portanto,

$$d(T(x), T(y)) - d(T(x'), T(y')) \leq d(T(x), T(x')) + d(T(y'), T(y)) \stackrel{(28.5)}{\leq} d(x, x') + d(y', y).$$

Analogamente, prova-se que $d(T(x'), T(y')) - d(T(x), T(y)) \leq d(x, x') + d(y', y)$. Ambas as relações mostram que

$$\left| d(T(x'), T(y')) - d(T(x), T(y)) \right| \leq d(x, x') + d(y, y'),$$

o que prova que $d(T(x), T(y))$ é contínua em A^2 , pois se o par (x', y') converge ao par (x, y) , então $d(T(x'), T(y'))$ converge a $d(T(x), T(y))$. Demonstra-se analogamente (tome $T = \text{id}$) que a função $d(x, y)$ é contínua em A^2 e isso mostra que F é contínua em $A^2 \setminus D$.

Pela hipótese (28.5) vale $F(x, y) < 1$ para todos $(x, y) \in A^2 \setminus D$. Como, por hipótese $T(x_*) \neq x_*$, o par $(x_*, T(x_*))$ não pertence a D e, portanto, $F(x_*, T(x_*))$ está definido.

Seja $r > 0$ e \overline{B}_r a bola fechada de raio r em $A^2 \setminus D$ centrada em $(x_*, T(x_*))$:

$$\overline{B}_r := \left\{ (x, y) \in A^2 \setminus D \mid d(x, x_*) \leq r \text{ e } d(y, T(x_*)) \leq r \right\}.$$

Por ser contínua, F assume um valor máximo f em \overline{B}_r . Escolhendo r pequeno o suficiente, podemos garantir que $f < 1$ (para r pequeno f vale aproximadamente $F(x_*, T(x_*)) < 1$). Assim, para todo $(x, y) \in \overline{B}_r$ tem-se

$$d(T(x), T(y)) \leq fd(x, y). \quad (28.7)$$

Como $(x_{n_k}, T(x_{n_k}))$ converge a $(x_*, T(x_*))$, concluímos que para todo l grande o suficiente, digamos $l \geq L$, vale $(x_{n_l}, T(x_{n_l})) \in \overline{B}_r$. Assim, por (28.7) devemos ter

$$d\left(T(x_{n_l}), T(T(x_{n_l}))\right) \leq fd(x_{n_l}, T(x_{n_l})),$$

ou seja,

$$d(x_{n_l+1}, x_{n_l+2}) \leq fd(x_{n_l}, x_{n_l+1}). \quad (28.8)$$

Temos, assim, que

$$\begin{aligned} d(x_{n_{l+1}}, T(x_{n_{l+1}})) &= d(T^{n_{l+1}}(x_0), T^{n_{l+1}+1}(x_0)) \\ &\stackrel{(28.5)}{\leq} d(T^{n_l+1}(x_0), T^{n_l+2}(x_0)) = d(x_{n_l+1}, x_{n_l+2}) \\ &\stackrel{(28.8)}{\leq} fd(x_{n_l}, x_{n_l+1}) = fd(x_{n_l}, T(x_{n_l})). \end{aligned}$$

Acima, na passagem da primeira para a segunda linha, usamos $n_{l+1} - n_l - 1$ vezes a condição (28.5).

Provamos, portanto, que $d(x_{n_{l+1}}, T(x_{n_{l+1}})) \leq fd(x_{n_l}, T(x_{n_l}))$ para todo $l \geq L$. Por indução, isso implica que para todo $k \geq l \geq L$ vale

$$d(x_{n_k}, T(x_{n_k})) \leq f^{k-l} d(x_{n_l}, T(x_{n_l})).$$

Fixando l , isso implica que $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, T(x_{n_k})) = 0$, pois $f < 1$. Por (28.6), isso contradiz a hipótese que $d(T(x_*), x_*) = 0$, completando a prova. ■

• Enfraquecendo a condição de contratividade. Potências contrativas

Antes de tratarmos das importantes aplicações do Teorema de Ponto Fixo de Banach a equações integrais vamos a uma outra pequena generalização do mesmo. Esta nos será útil, por exemplo, quando tratarmos da equação integral de Volterra. Ocorre por vezes que uma aplicação T , como discutida acima, não é uma contração, mas alguma de suas potências o é. Nesse caso, podemos também garantir os mesmos resultados do Teorema de Ponto Fixo de Banach. Temos o seguinte:

Proposição 28.1 *Seja M um conjunto dotado de uma métrica d e suponha M completo em relação a d . Seja A um subconjunto fechado em M e seja T uma função de A em A , $T : A \rightarrow A$. Vamos supor que exista um número $m \in \mathbb{N}$ tal que a aplicação T^m seja uma contração, cujo ponto fixo, único, é $x \in A$ (a existência e a unicidade de tal ponto fixo são garantidas pelo Teorema de Ponto Fixo de Banach, Teorema 28.1). Então, T também tem um ponto fixo único, a saber, o mesmo x . □*

Prova. Para provar que x é também ponto fixo de T , notemos que, como $x = T^m(x)$, temos também que

$$T(x) = T^{m+1}(x) = T^m(T(x)).$$

Isso diz que $T(x)$ é ponto fixo de T^m . Pelo Teorema de Ponto Fixo de Banach este último é x e é único. Daí $T(x) = x$. Ora, isso diz precisamente que x é ponto fixo de T .

Provemos agora que x é também o único ponto fixo de T . Para tal, suponha que haja um outro: y . Então, $y = T(y)$. Daqui tiramos que $T(y) = T^2(y)$. Juntando as duas vemos que $y = T(y) = T^2(y)$. Repetindo esse procedimento, chegamos a $y = T(y) = T^2(y) = \dots = T^m(y)$. Isso diz que y é ponto fixo de T^m . Agora, pelas hipóteses, o único ponto fixo de T^m é x . Logo $y = x$. ■

28.2 Diversas Aplicações do Teorema de Ponto Fixo de Banach

Nesta seção discutiremos diversos usos do Teorema de Ponto Fixo de Banach, em problemas aplicados e teóricos, um dos mais relevantes sendo o teorema de existência e unicidade de soluções de problemas de valor inicial em equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach, que discutiremos na Seção 28.2.4, página 1387.

28.2.1 Aplicação a Equações Numéricas. O Método de Newton

• Equações numéricas

Vamos a alguns exemplos simples de aplicações do Teorema de Ponto Fixo de Banach. Seja a reta real e a seguinte equação de ponto fixo em \mathbb{R} :

$$x = \lambda \cos(x),$$

onde $0 < \lambda < 1$ é uma constante dada. Terá essa equação uma solução? Será ela única? Como $T(x) := \lambda \cos(x)$ é uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} , podemos adotar em \mathbb{R} a métrica usual em relação à qual \mathbb{R} é completo. Em face do Teorema de Ponto Fixo de Banach a questão natural é saber se T é uma contração. Vamos provar que isso é verdade.

$$d(T(x), T(y)) = \lambda |\cos(x) - \cos(y)| = \lambda \left| \int_x^y \sin(t) dt \right| \leq \lambda |x - y| = \lambda d(x, y),$$

pois $|\sin(t)| \leq 1$. Assim, vemos que T é uma contração com $q = \lambda$.

O Teorema de Ponto Fixo de Banach nos afirma então que, partindo-se de qualquer número real x_0 , as iteradas sucessivas de T convergem ao número x , ponto fixo de T :

$$x_n = \underbrace{\lambda \cos \left(\lambda \cos \left(\dots \lambda \cos(x_0) \dots \right) \right)}_{n \text{ vezes}}.$$

No caso $\lambda = 1/2$, o estudante que tenha uma simples calculadora é estimulado a determinar que o ponto fixo é $x \approx 0,450183611\dots$

E. 28.1 *Exercício.* Nesse caso, tomando por exemplo $x_0 = 0$, estime o erro da aproximação se pararmos após 30 iterações. ✱

E. 28.2 *Exercício.* O que acontece na equação de ponto fixo acima se $\lambda > 1$? A solução permanece única? Faça gráficos das funções $a(x) = x$ e $b(x) = \lambda \cos(x)$ para esclarecer essa questão. ✱

E. 28.3 *Exercício.* Use o Teorema de Ponto Fixo de Banach para mostrar que, em $[0, \infty)$, a equação $x = e^{-x}$ tem uma e somente uma solução. Qual é ela, aproximadamente? Use para tal o método iterativo sugerido pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach e estime o erro após 40 iterações. ✱

• O mapa logístico

Seja $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual $d(x, y) = |x - y|$ e seja $A = [0, 1]$. Considere a função $T(x) = ax(1 - x)$, onde a é uma constante real.

É fácil ver que para $a \in [0, 4]$ a função T leva pontos de A em pontos de A , pois, para $x \in [0, 1]$ vale $0 \leq T(x) \leq a/4$. A equação de ponto fixo $T(x) = x$ é $ax(1 - x) = x$, que tem como soluções $x^\alpha = 0$ e $x^\beta = (a - 1)/a$. A primeira solução pertence a A , mas a segunda só pertence a A se $a \geq 1$. No caso $a = 1$ temos $x^\alpha = x^\beta = 0$. Concluímos que a função T tem um único ponto fixo em A se $a \in [0, 1]$ e dois pontos fixos distintos se $a \in (1, 4]$.

Para $a \in [0, 4]$ analisemos essa aplicação sob o ponto de vista de Teorema de Ponto Fixo de Banach. É fácil ver que $|T'(x)| = a|1 - 2x| \leq a$ para $x \in A$. Logo, com $0 \leq x \leq y \leq 1$,

$$d(T(x), T(y)) = |T(x) - T(y)| = \left| \int_x^y T'(t) dt \right| \leq \int_x^y |T'(t)| dt < a|x - y| = ad(x, y).$$

Logo, para $a \in [0, 1]$ a função T é uma contração e, pelo Teorema de Ponto Fixo de Banach, tem um e somente um ponto fixo, que vimos ser $x^\alpha = 0$. O fato de T possuir também apenas um ponto fixo quando $a = 1$ (o mesmo $x^\alpha = 0$), quanto temos $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ para $x \neq y$, não é explicado pelo Teorema de Ponto Fixo de Banach, mas sim pelo Teorema 28.2. Para $a > 1$ não podemos mais garantir contratividade e, de fato, constatamos que T tem dois pontos fixos em A para $a \in (1, 4]$.

Consideremos $a \in [0, 4]$. Partindo de um ponto $x_0 \in A$ podemos definir uma sequência de pontos $x_{n+1} = T(x_n) \in A$. A evolução $x_n \mapsto T(x_n) = x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$, é frequentemente denominada *mapa logístico*. O mapa logístico foi originalmente introduzido pelo biólogo Robert May¹¹, em 1976, como um modelo para evolução de populações sob certos fatores limitantes de crescimento.

Na região contrativa $0 \leq a < 1$ a sequência x_n converge ao ponto fixo $x^\alpha = 0$. Na região $1 < a < 3$, já fora da contratividade e da validade do Teorema do Ponto Fixo de Banach, a sequência converge ao ponto fixo x^β (x^α torna-se um ponto fixo repulsivo), sendo que na região $2 < a < 3$ essa convergência é “lenta”. Para $3 < a < 1 + \sqrt{6} \approx 3,45$ a sequência torna-se oscilante, oscilando entre dois valores fixos. Dai para frente, a oscilação se dá sucessivamente entre 4, 8, 16 etc. pontos, à medida que a cresce. A partir de $a \approx 3,57$ estabelece-se um regime caótico, com a sequência x_n preenchendo densamente subconjuntos de Cantor do intervalo $[0, 1]$. O mapa logístico é protótipo de um sistema dinâmico discreto exibindo comportamento caótico.

Talvez o estudante possa se divertir escrevendo programas que exibam as propriedades descritas no parágrafo acima.

Para mais detalhes sobre o mapa logístico, vide e.g. [155] ou [7].

• O método de Newton para zeros de funções

O bem conhecido método de Newton¹² de determinação de zeros de funções reais¹³ pode ser estudado sob a luz do Teorema de Ponto Fixo de Banach. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função da qual desejamos determinar um zero, ou seja, uma solução da equação $f(x) = 0$. Notemos que essa equação equivale (trivialmente) à equação $\chi = \chi - \frac{f(x)}{f'(x)}$, pelo menos se $f'(x) \neq 0$. Colocado dessa forma o problema torna-se um problema de ponto fixo para a aplicação $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Isso motiva a seguinte proposição.

Proposição 28.2 *Se f for pelo menos duas vezes diferenciável, então f possuirá um zero χ , único, num dado intervalo $[a, b]$ se existir λ com $0 \leq \lambda < 1$ tal que*

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq \lambda, \quad \text{para todo } x \in [a, b], \quad (28.9)$$

e se

$$\left| \frac{f(x)}{f'(x)} \right| \leq (1 - \lambda)\alpha, \quad (28.10)$$

onde $\underline{x} := \frac{a+b}{2}$ e $\alpha := \frac{b-a}{2}$. Nesse caso, tem-se $\chi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, onde a sequência $x_n \in [a, b]$ é determinada iterativamente por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

sendo $x_0 \in [a, b]$, arbitrário. Ter-se-á,

$$|\chi - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |T(x_0) - x_0| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} (b - a), \quad n \geq 0. \quad (28.11)$$

Se adotarmos $x_0 = \underline{x}$ teremos ainda $|\chi - x_n| \leq \alpha \lambda^n$, $n \geq 0$, por (28.10). □

¹¹Lord Robert McCredie May, Baron May of Oxford, (1936–). A referência ao artigo original de May é: May, Robert M., “Simple mathematical models with very complicated dynamics.” Nature 261(5560):459-467 (1976).

¹²Sir Isaac Newton (1643–1727).

¹³Para a motivação geométrica do método de Newton, vide discussão à página 1378 sobre a Figura 28.1.

Nota. A condição (28.9) pressupõe $f'(x) \neq 0$ em $[a, b]$. Como veremos abaixo, a condição (28.9) é importante por garantir a contratividade de T , enquanto que (28.10) é suficiente para garantir que T leve pontos de $[a, b]$ em $[a, b]$, podendo ser eventualmente substituída por outra condição que garanta o mesmo. Notemos, por fim, que o método de Newton funciona mesmo sob condições mais fracas sobre a função f , nesse caso fora do contexto do Teorema de Ponto Fixo de Banach. A convergência das iterações pode, então, ser mais lenta que aquela garantida em (28.11). Vide para tal qualquer bom livro de Cálculo Numérico. ♣

Prova. Sejam $x, y \in [a, b]$. Tem-se

$$\begin{aligned} T(y) - T(x) &= y - \frac{f(y)}{f'(y)} - x + \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= \int_x^y \frac{d}{dt} \left[t - \frac{f(t)}{f'(t)} \right] dt = \int_x^y \frac{f(t)f''(t)}{(f'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Assim, (28.9) garante que

$$|T(y) - T(x)| \leq \lambda|y - x|.$$

Isso estaria dizendo-nos que T é um contração. Precisamos, porém, garantir que T leve pontos de $[a, b]$ em $[a, b]$. Isso equivale a garantir que $|T(x) - x| \leq \alpha$ para todo $x \in [a, b]$, ou seja, para todo x tal que $|x - x| \leq \alpha$. Uma maneira de impor isso usando (28.9) é supor válida a condição (28.10). De fato,

$$\begin{aligned} |T(x) - x| &= \left| T(x) - T(x) + \frac{f(x)}{f'(x)} \right| \leq |T(x) - T(x)| + \left| \frac{f(x)}{f'(x)} \right| \\ &\stackrel{\text{por (28.9)}}{\leq} \lambda|x - x| + \left| \frac{f(x)}{f'(x)} \right| \\ &\stackrel{\text{por (28.10)}}{\leq} \lambda|x - x| + (1 - \lambda)\alpha \\ &\stackrel{\text{pois } x \in [a, b]}{\leq} \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Com isso, provamos que T é uma contração que mapeia o espaço métrico completo $[a, b]$ em si mesmo. O Teorema de Ponto Fixo de Banach garante o resto. ■

E. 28.4 Exercício-Exemplo. Usando o método de Newton determine um valor aproximado para $\sqrt{2}$ calculando o zero positivo de $f(x) = x^2 - 2$. As iterações serão $x_{n+1} = T(x_n)$ com $T(x) = \frac{x^2+2}{2x}$. Que intervalo $[a, b]$ é conveniente adotar? O que ocorre próximo a $x = 0$ e por que?

Partindo-se, por exemplo, de $x_0 = 2$ obtem-se os valores sucessivos $3/2, 17/12, 577/408$. Esse último valor aproxima $\sqrt{2}$ com um erro de 2×10^{-6} . Note que esse procedimento fornece aproximações de $\sqrt{2}$ por números racionais. ♣

E. 28.5 Exercício-Exemplo. Faça o mesmo para $\sqrt{3}$. ♣

O método de Newton pode ser motivado geometricamente pela Figura 28.1. A linha reta que passa pelo ponto $(x_n, f(x_n))$ tangencia o gráfico da função f . Sua inclinação é, portanto, $f'(x_n)$. Assim, o ponto x_{n+1} indicado na figura vale $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (verifique!). Repetindo-se o procedimento a partir do ponto x_{n+1} aproximamo-nos mais ainda do zero χ de f .

No método de Newton usual, a reta tangente tem uma inclinação diferente a cada passo: $f'(x_n)$. Um método alternativo, por vezes denominado *método de Newton simplificado*, consiste em usar retas de inclinação fixa, tal como na Figura 28.2. Nessa situação, o problema de determinar o zero χ de f equivale ao problema de ponto fixo $x = T(x)$ com

$$T(x) = x - \frac{1}{\gamma}f(x).$$

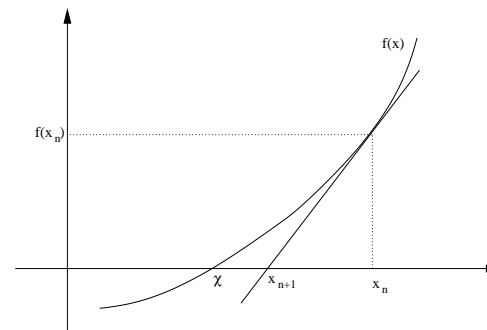


Figura 28.1: Iteração no método de Newton. O ponto χ é um zero de f . A linha reta tangencia o gráfico de f no ponto $(x_n, f(x_n))$ e sua inclinação é $f'(x_n)$. O ponto em que essa reta corta o eixo horizontal determina x_{n+1} .

E. 28.6 Exercício. Usando o Teorema de Ponto Fixo de Banach estude esse problema de ponto fixo e determine condições suficientes sobre a função f e sobre a inclinação γ para garantir a existência de um zero único de f em um intervalo $[a, b]$. ♣

O método de Newton simplificado, descrito acima, pode ser empregado mesmo em situações nas quais f não é diferenciável na região de interesse.

E. 28.7 Exercício-desafio. Generalize o método de Newton usando parábolas tangentes, ao invés de retas tangentes. Assuma, se o desejar, que a função f a ser considerada é ao menos duas vezes diferenciável. ♣

O método de Newton descrito acima pode ser generalizado para funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n , mas não trataremos disso aqui.

28.2.2 Aplicação a Sistemas Lineares. O Método de Jacobi

Considere-se o problema de determinar a solução do sistema linear $Ax = b$, onde $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ e $b \in \mathbb{C}^n$ são dados e $x \in \mathbb{C}^n$ é a solução procurada. Naturalmente, a solução (única) existirá se e somente se $\det(A) \neq 0$ e será dada por $x = A^{-1}b$. Se for procurada uma solução numérica concreta pode ser computacionalmente custoso obter explicitamente a inversa de A , dada a dificuldade que os métodos de determinação de inversas de matrizes podem oferecer, especialmente no caso de matrizes de ordem elevada. Sob a luz do Teorema do Ponto Fixo de Banach discutiremos aqui um método, denominado *método iterativo de Jacobi*¹⁴, que mostra em certos casos ser relativamente eficaz, envolvendo custos computacionais relativamente baixos, especialmente se sistemas de processamento paralelo estiverem à disposição.

Uma hipótese do método é a suposição que os elementos da diagonal de A sejam não-nulos: $A_{ii} \neq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Seja D a matriz diagonal composta pelos elementos da diagonal de A : $D := \text{diag}(A_{11}, \dots, A_{nn})$. Pela hipótese, temos $\det D \neq 0$. Com isso, podemos escrever $A = D + (A - D) = D(\mathbb{1} - B)$, onde $B := D^{-1}(A - D) = \mathbb{1} - D^{-1}A$. Assim, a equação $Ax = b$ equivale a equação $x = Bx + c$, onde $c := D^{-1}b$. O interesse nisso reside no fato de que essa nova versão do sistema linear, a saber, a equação $x = Bx + c$, pode ser encarada como uma equação de ponto fixo para a transformação $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ definida por $T(y) := By + c$.

Seja $\|\cdot\|_*$ uma norma vetorial em \mathbb{C}^n , com a qual definimos a métrica $d_*(x, y) := \|x - y\|_*$. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, a condição de contratividade de T consiste no requerimento que $\|B(x - y)\|_* \leq q\|x - y\|_*$ para todos $x, y \in \mathbb{C}^n$, onde q é uma constante satisfazendo $0 \leq q < 1$. Considerando-se a norma matricial associada a essa norma

¹⁴Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

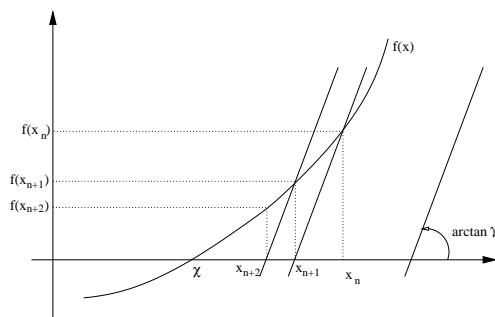


Figura 28.2: Alternativa ao método de Newton. As linhas retas não são tangentes ao gráfico de f , são todas paralelas, todas com inclinação fixa γ . Os pontos em que essas retas cortam o eixo horizontal são os pontos da iteração.

vetorial, definida da forma usual como

$$\|M\|_* := \sup_{\substack{u \in \mathbb{C}^n \\ u \neq 0}} \frac{\|Mu\|_*}{\|u\|_*}$$

para $M \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$, temos $\|B(x-y)\|_* \leq \|B\|_* \|x-y\|_*$. Assim, se $\|B\|_* < 1$, vemos que as condições do Teorema do Ponto Fixo de Banach são satisfeitas e a solução (única) do problema será dada pelo limite da iteração $x_{k+1} = Bx_k + c$, $k \geq 0$, com x_0 arbitrário. Essa iteração convergirá ao ponto fixo de T , que é a solução de $Ax = b$. Esse é o método iterativo de Jacobi (também denominado *método de Gauss-Jacobi* por alguns autores. Não confundir com um outro método muito similar, denominado *método de Gauss-Seidel*).

E. 28.8 Exercício. Mostre que as iteradas são dadas por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= B^{k+1}x_0 + (\mathbb{1} + B + B^2 + \dots + B^k)c = B^{k+1}x_0 + (\mathbb{1} - B^{k+1})(\mathbb{1} - B)^{-1}c \\ &= (\mathbb{1} - B)^{-1}c + B^{k+1}(x_0 - (\mathbb{1} - B)^{-1}c). \end{aligned} \quad (28.12)$$

(Note-se que $\mathbb{1} - B = D^{-1}A$, que possui inversa, pelas hipóteses). Como, pela hipótese de contração, $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$, constate que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = (\mathbb{1} - B)^{-1}c = A^{-1}b$, que é a solução esperada. *

E. 28.9 Exercício. Em princípio, para termos satisfeita a condição de contratividade, qualquer norma vetorial $\|\cdot\|_*$ pode ser adotada. Por exemplo, a norma $\|z\|_\infty := \max\{|z_1|, \dots, |z_n|\}$, onde z_j são as componentes de $z \in \mathbb{C}^n$. Mostre que, para essa norma, a condição $\|B\|_\infty < 1$ é garantida pelo conjunto de n condições

$$|A_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |A_{kj}|,$$

$k = 1, \dots, n$. Esse conjunto de condições é denominado *dominação diagonal* da matriz A . *

28.2.3 Aplicação às Equações Integrais de Fredholm e de Volterra

No Capítulo 19, página 874, introduzimos algumas equações integrais de interesse e discutimos alguns métodos de solução. Na presente seção discutiremos métodos iterativos de solução de dois tipos de equações integrais, as chamadas equações integrais de Fredholm¹⁵ de segundo tipo e as equações integrais de Volterra¹⁶ de segundo tipo. Ambas surgem em

¹⁵Erik Ivar Fredholm (1866–1927).

¹⁶Vito Volterra (1860–1940).

problemas de Física-Matemática (a equação integral de Fredholm, por exemplo, surge no problema de Sturm-Liouville. Vide Capítulo 18, página 831) e trataremos de exemplos de aplicações adiante. A razão de tratarmos das mesmas aqui está na possibilidade de utilizarmos o Teorema de Ponto Fixo de Banach para estudar a existência de soluções. O mesmo teorema fornece, também neste caso, um poderoso método iterativo de solução, de grande importância prática. Para uma introdução à teoria das equações integrais, vide também [263] e [338]. Para um tratamento extensivo da equação integral de Volterra, vide [235].

Antes de tratarmos dessas equações integrais, vamos discutir uma condição que usaremos adiante.

• A condição de Lipschitz

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. f é dita satisfazer a *condição de Lipschitz*¹⁷ em toda a reta real se existir uma constante $M \geq 0$ tal que, para todos x e x' em \mathbb{R} tenhamos

$$|f(x') - f(x)| \leq M|x' - x|.$$

Note que toda função que satisfaz a condição de Lipschitz para algum M é necessariamente uma função contínua (por que?).

Para que uma função satisfaça a condição de Lipschitz há uma condição suficiente que é útil. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função *diferenciável* e tal que $|f'(y)| \leq M$, para algum $M \geq 0$ e para todo $y \in \mathbb{R}$. Então, f satisfaz a condição de Lipschitz. Para provar isso, notemos que, pelo teorema fundamental do cálculo, vale

$$f(x') - f(x) = \int_x^{x'} f'(y)dy.$$

Daí,

$$|f(x') - f(x)| = \left| \int_x^{x'} f'(y)dy \right| \leq \int_x^{x'} |f'(y)| dy \leq \int_x^{x'} M dy = M|x' - x|.$$

(Aqui tomamos $x < x'$, sem perda de generalidade).

E. 28.10 Exercício. Mostre que as funções \sin e \cos satisfazem a condição de Lipschitz. Qual M pode ser adotado para ambas? *

E. 28.11 Exercício. Mostre que a função $f(y) = y^2$ não pode satisfazer a condição de Lipschitz em toda a reta real. Sugestão: $|x^2 - y^2| \leq M|x - y|$ implica $|x + y| \leq M$ para $x \neq y$. *

E. 28.12 Exercício. Mostre que a função $f(y) = y^{1/3}$ não pode satisfazer a condição de Lipschitz em toda a reta real. Sugestão: tome $x' = 0$ e mostre que a relação $|x^{1/3}| \leq M|x|$ não pode ser válida para todo $x \in \mathbb{R}$ com $M \geq 0$ fixo qualquer. *

Uma função que satisfaz a condição de Lipschitz é dita ser *Lipschitz-contínua*. Para a demonstração de resultados é muito útil, por vezes, (veremos exemplos adiante) mostrar-se que uma função dada é Lipschitz-contínua.

A condição discutida acima tem, aliás, uma generalização da qual não faremos uso aqui. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser *Hölder*¹⁸-*contínua* se existirem $M \geq 0$ e $\gamma > 0$ tais que para todos x e x' em \mathbb{R} valha

$$|f(x') - f(x)| \leq M|x' - x|^\gamma.$$

A condição de ser Lipschitz-contínua é o caso particular deste quando $\gamma = 1$.

• As equações integrais de Fredholm

Seja I o intervalo $[a, b]$ da reta real (com a e b dados e $a < b$) e sejam duas funções $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $K : I \times I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que consideraremos contínuas em seus domínios de definição. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, constante.

¹⁷Rudolf Otto Sigmund Lipschitz (1832–1903).

¹⁸Otto Ludwig Hölder (1859–1937).

A chamada *equação integral de Fredholm* de segundo tipo, ou simplesmente equação integral de Fredholm, é a seguinte equação integral:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y, u(y)) dy .$$

Acima $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ é a função incógnita. Note que K , que é chamada de *núcleo* da equação integral, é uma função de três variáveis e que a incógnita $u(y)$ aparece na posição de seu terceiro argumento, dentro da integral.

Seja $C_0(I)$ a coleção de todas as funções contínuas de I em \mathbb{R} . Já vimos anteriormente (Proposição 27.7, página 1323) que $C_0(I)$ é um espaço métrico completo em relação à métrica

$$d_\infty(h, l) = \sup_{x \in I} |h(x) - l(x)| ,$$

onde h e l pertencem a $C_0(I)$.

Seja T a aplicação que leva $C_0(I)$ em si mesmo dada por

$$T(h)(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y, h(y)) dy .$$

Note que se h é uma função contínua em I então $T(h)$ também é uma função contínua em I . A equação integral de Fredholm pode ser então entendida como a equação de ponto fixo em $C_0(I)$ dada por

$$u = T(u) .$$

É natural, portanto, procurar condições que façam de T uma contração no espaço métrico completo $C_0(I)$, pois assim poderemos evocar o Teorema de Ponto Fixo de Banach. É neste momento que a condição de Lipschitz se faz útil. Vamos supor que a função K satisfaça a condição de Lipschitz para a terceira variável: vamos supor que existe $M \geq 0$ tal que para todo $x, y \in I$ e todos $z \in \mathbb{R}$ valha

$$|K(x, y, z') - K(x, y, z)| \leq M|z' - z| . \tag{28.13}$$

Então, pelo menos no caso em que $M(b - a) < 1$, a aplicação T é uma contração em $C_0(I)$ com relação à métrica d_∞ dada. Para provar isso, usamos que, para duas funções $h, l \in C_0(I)$ temos

$$T(h)(x) - T(l)(x) = \lambda \int_a^b [K(x, y, h(y)) - K(x, y, l(y))] dy ,$$

donde tiramos que

$$\begin{aligned} |T(h)(x) - T(l)(x)| &\leq |\lambda| \int_a^b |K(x, y, h(y)) - K(x, y, l(y))| dy \\ &\leq |\lambda| M \int_a^b |h(y) - l(y)| dy \\ &\leq |\lambda| M(b - a) \sup_{y \in I} |h(y) - l(y)| = |\lambda| M(b - a) d_\infty(h, l) . \end{aligned} \tag{28.14}$$

Logo,

$$d_\infty(T(h), T(l)) = \sup_{x \in I} |T(h)(x) - T(l)(x)| \leq |\lambda| M(b - a) d_\infty(h, l) .$$

Assim, vimos que, sob as hipóteses acima, T é uma contração se $|\lambda| < 1/M(b - a)$. Essa condição, se satisfeita, garante, pelo Teorema de Ponto Fixo de Banach, que há uma e somente uma função u em $C_0(I)$ que é solução da equação integral de Fredholm. Com isso, a solução pode ser aproximada (exponencialmente, na métrica d_∞) partindo-se de qualquer $u_0 \in C_0(I)$ através da sequência iterada $u_n = T(u_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

A condição suficiente para termos contratividade $M(b - a) < 1$ é, em suma, uma condição sobre a função K e sobre o intervalo I . Note-se que não há qualquer restrição à função f , além da que seja contínua.

E. 28.13 *Exercício.* Mostre que a equação integral de Fredholm

$$u(x) = 2 \cos(x) + \int_0^1 \sin \left(x + \frac{yu(y)}{2} \right) dy , \quad x \in [0, 1] ,$$

tem uma solução única em $C_0([0, 1])$. Sugestão: neste caso a função K é $K(x, y, z) = \sin \left(x + \frac{yz}{2} \right)$ (certo?). Mostre que a mesma é Lipschitz-contínua em relação a z com $M = 1/2$. Para tal estude a derivada parcial de K em relação a z e mostre que $|\partial_z K(x, y, z)| \leq 1/2$ para todo $x, y \in I$ e todo $z \in \mathbb{R}$. \star

• **As equações integrais de Volterra**

A chamada *equação integral de Volterra* de segundo tipo, ou simplesmente equação integral de Volterra, é a seguinte equação integral:

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, y, u(y)) dy .$$

Acima $u : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I := [a, b]$ com $b > a$ é a função incógnita e f e K são definidas tal como no caso das equações integrais de Fredholm. Note que K , que é chamada de *núcleo* da equação integral, é uma função de três variáveis e que a incógnita $u(y)$ aparece na posição de seu terceiro argumento, dentro da integral. Note também que a equação integral de Volterra difere da equação integral de Fredholm pelo aparecimento de mais uma dependência em x , a saber, no limite superior do intervalo de integração.

Seja T a aplicação que leva $C_0(I)$ em si mesmo dada por

$$T(h)(x) = f(x) + \int_a^x K(x, y, h(y)) dy .$$

Note que se h é uma função contínua em I então $T(h)$ também é uma função contínua em I . A equação integral de Volterra pode ser então entendida como a equação de ponto fixo em $C_0(I)$ dada por

$$u = T(u) .$$

Como no caso da equação integral de Fredholm, poderíamos procurar condições que façam de T uma contração no espaço métrico completo $C_0(I)$ pois, assim, poderíamos novamente evocar o Teorema de Ponto Fixo de Banach. Todavia, como veremos, podemos aqui proceder de um modo diferente do caso da equação de Fredholm e obter condições mais fracas para garantir a existência de solução. O que faremos não é procurar condições que garantam que T seja uma contração, mas provaremos que T^m o é, para algum $m > 0$. Assim, poderemos evocar a generalização do Teorema de Ponto Fixo de Banach fornecida na Proposição 28.1, página 1375.

Para tal, procedemos como antes e assumimos ser a função K Lipschitz-contínua em relação à terceira variável, ou seja, que valha a condição descrita em (28.13). Daqui tiramos, para $x \in I$,

$$T(h)(x) - T(l)(x) = \int_a^x [K(x, y, h(y)) - K(x, y, l(y))] dy ,$$

donde segue que

$$\begin{aligned} |T(h)(x) - T(l)(x)| &\leq \int_a^x |K(x, y, h(y)) - K(x, y, l(y))| dy \\ &\leq M \int_a^x |h(y) - l(y)| dy \\ &\leq M(x - a) \sup_{y \in I} |h(y) - l(y)| = M(x - a) d_\infty(h, l) . \end{aligned}$$

A diferença entre essa última expressão e a expressão correspondente (28.14) para a equação de Fredholm é que aqui surge o fator $(x - a)$, que ainda depende de x , ao invés do fator constante $(b - a)$. Como se verá no que segue, essa diferença é importante. Vamos agora provar por indução que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$|T^n(h)(x) - T^n(l)(x)| \leq M^n \frac{(x - a)^n}{n!} d_\infty(h, l) , \quad \forall x \in I . \tag{28.15}$$

Como já vimos que isso é verdade para $n = 1$, assumamos que essa relação é válida para um certo n genérico. Então,

$$\begin{aligned} |T^{n+1}(h)(x) - T^{n+1}(l)(x)| &\leq \int_a^x \left| K(x, y, T^n(h)(y)) - K(x, y, T^n(l)(y)) \right| dy \\ &\leq M \int_a^x |T^n(h)(y) - T^n(l)(y)| dy \\ &\leq M \left(\int_a^x M^n \frac{(y-a)^n}{n!} dy \right) d_\infty(h, l) \\ &= M^{n+1} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} d_\infty(h, l), \end{aligned}$$

o que prova (28.15) para todo $n \in \mathbb{N}$, por indução. Assim, temos também que

$$d_\infty(T^n(h), T^n(l)) \leq M^n \frac{(b-a)^n}{n!} d_\infty(h, l), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note-se agora que, para quaisquer M , a e b fixos, existe n grande o suficiente tal que

$$\frac{[M(b-a)]^n}{n!} < 1$$

(por que?). Assim, para um tal n , T^n será uma contração. Pela generalização do Teorema de Ponto Fixo de Banach fornecida pela Proposição 28.1, página 1375, vemos que T tem também um ponto fixo único. Isso garante existência e unicidade das soluções da equação de Volterra em $C_0(I)$. Note-se que, aqui, foi suficiente assumir que K satisfaça a relação descrita em (28.13), não havendo restrições ao valor do produto $M(b-a)$, ao contrário do que ocorreu no caso da equação de Fredholm.

• **Equações diferenciais de segunda ordem e as equações integrais de Volterra**

Vamos aqui tratar de mostrar algumas aplicações das equações integrais de Volterra à resolução de problemas (muito frequentemente encontrados em Física) envolvendo equações diferenciais de segunda ordem com certas condições iniciais dadas.

Para tal, faremos uso da seguinte identidade, válida para qualquer função ϕ que seja pelo menos duas vezes diferenciável em \mathbb{R} :

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \dot{\phi}(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t (t - t') \ddot{\phi}(t') dt'. \tag{28.16}$$

E. 28.14 Exercício. Prove essa identidade. Sugestão: use as identidades

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\phi}(t') dt' \quad \text{e} \quad \dot{\phi}(t) = \dot{\phi}(t_0) + \int_{t_0}^t \ddot{\phi}(t') dt'$$

e use integração por partes. *

Para ilustrar o uso que podemos fazer da identidade (28.16), vamos considerar a bem conhecida equação do pêndulo simples

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l} \text{sen}(\theta(t))$$

(para $g > 0$ e $l > 0$) com condições iniciais $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = \omega_0$. Substituindo o lado direito em (28.16) temos

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t - \frac{g}{l} \int_0^t (t - t') \text{sen}(\theta(t')) dt', \tag{28.17}$$

que é uma equação integral de Volterra não-linear para θ .

E. 28.15 Exercício. Constate que o núcleo dessa equação integral

$$K(t, t', z) = -\frac{g}{l} (t - t') \text{sen}(z)$$

satisfaz a condição de Lipschitz na terceira variável para t e t' contidos em qualquer intervalo finito $[-T, T]$, $0 < T < \infty$. *

Deste último exercício concluímos que a equação do pêndulo simples, com as condições iniciais dadas, tem solução única em qualquer intervalo finito $[-T, T]$, $0 < T < \infty$.

E. 28.16 Exercício. Calcule as duas primeiras aproximações para a solução da equação integral (28.17) seguindo o procedimento iterativo sugerido pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach. Tome como ponto de partida a função identicamente nula: $\theta_0(t) \equiv 0$. Você consegue, olhando o resultado do cômputo das duas primeiras aproximações, interpretar fisicamente o que elas representam? *

E. 28.17 Exercício. Seja a conhecida equação do pêndulo simples no limite de pequenas oscilações:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l} \theta(t),$$

com condições iniciais $\theta(0) = \phi_0$ e $\dot{\theta}(0) = \omega_0$. Usando (28.16) transforme-a em uma equação integral de Volterra e resolva-a pelo método iterativo, tomando como ponto de partida a função identicamente nula: $\theta_0(t) \equiv 0$. Para tal, determine a n -ésima iterada θ_n exatamente e mostre que a mesma converge a uma certa combinação linear de $\cos(\omega t)$ e $\text{sen}(\omega t)$, onde $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Para tal você precisará lembrar-se da série de Taylor das funções sen e \cos . *

Uma outra ilustração do uso das equações integrais de Volterra, e sua resolução via Teorema de Ponto Fixo de Banach, pode ser encontrada no estudo das equações diferenciais lineares de segunda ordem não-homogêneas com coeficientes não necessariamente constantes

$$\ddot{u}(t) + a(t)\dot{u}(t) + b(t)u(t) = c(t), \tag{28.18}$$

com condições iniciais dadas do tipo $u(0) = u_0$ e $\dot{u}(0) = v_0$. Tais equações são muito frequentemente encontradas em problemas de Física-Matemática e o estudante certamente já as viu surgir, por exemplo, em Mecânica Clássica.

Nosso objetivo é transformar o problema de determinar a solução u da equação diferencial com condições iniciais acima no problema de resolver uma equação integral de Volterra equivalente.

Há mais de uma maneira de se obter uma tal equação integral a partir de (28.18). Para o propósito de demonstrar existência e unicidade da solução, com condições pouco exigentes sobre as funções a , b e c , vamos considerar primeiro uma equação integral para \ddot{u} . Uma outra equação integral diretamente para u será vista depois.

Vamos supor aqui que haja um intervalo fechado finito $I = [-T, T]$, $0 < T < \infty$, onde as funções a , b e c que aparecem acima sejam contínuas. Pelo teorema fundamental do cálculo e pela identidade (28.16), temos que

$$\dot{u}(t) = v_0 + \int_0^t \ddot{u}(t') dt', \tag{28.19}$$

$$u(t) = u_0 + v_0 t + \int_0^t (t - t') \ddot{u}(t') dt'. \tag{28.20}$$

Substituindo-se em (28.18) u e \dot{u} pelo lado direito de (28.19) e (28.20), respectivamente, teremos

$$\ddot{u}(t) = f(t) + \int_0^t K(t, t') \ddot{u}(t') dt', \tag{28.21}$$

onde

$$f(t) := c(t) - (b(t)t + a(t))v_0 - b(t)u_0 \tag{28.22}$$

e

$$K(t, t') := -a(t) - b(t)(t - t'). \tag{28.23}$$

E. 28.18 Exercício. Verifique tudo isso. *

A equação (28.21) é claramente uma equação de Volterra linear para \ddot{u} que, pelas hipóteses de continuidade sobre as funções a , b e c , possui solução única no intervalo I , dado que nesse intervalo K é limitado (por que?). A função u pode ser então obtida integrando-se duas vezes a solução \ddot{u} da equação (28.21) ou usando-se novamente a identidade (28.16).

O que vimos acima pode ser então resumido no seguinte teorema:

Teorema 28.3 *Sejam as funções a , b e c contínuas no intervalo $I = [-T, T]$, $T > 0$. Então, nesse intervalo, a solução da equação diferencial linear de segunda ordem não-homogênea*

$$\ddot{u}(t) + a(t)\dot{u}(t) + b(t)u(t) = c(t), \tag{28.24}$$

com condições iniciais dadas do tipo $u(0) = u_0$ e $\dot{u}(0) = v_0$, existe e é única. □

É notável que seja suficiente exigir tão pouco (só continuidade dos coeficientes) para garantir-se existência e unicidade da equação acima. Há funções contínuas que não são diferenciáveis em parte alguma (você conhece um exemplo?) ou mesmo algumas que são crescentes mas têm derivada nula quase em toda parte (a função de Cantor tratada no capítulo de teoria da medida é um exemplo) e mesmo com tais funções nos coeficientes de (28.18) tem-se garantida existência e unicidade da solução. Para um outro tratamento da equação (28.18) usando a chamada série de Dyson, vide Capítulo 13.

A equação integral (28.21) é uma equação para \ddot{u} . O leitor pode estar se perguntando se não podemos ter uma equação integral diretamente para u . A resposta é positiva. Fazendo mais uma vez uso da identidade (28.16), temos

$$u(t) = u_0 + v_0 t + \int_0^t (t-t') \left[-a(t')\dot{u}(t') - b(t')u(t') + c(t') \right] dt'. \tag{28.25}$$

Integrando-se por partes o termo com $-(t-t')a(t')\dot{u}(t')$, obtemos

$$u(t) = f(t) + \int_0^t K(t, t')u(t') dt', \tag{28.26}$$

onde agora

$$f(t) := u_0 + t(v_0 + a(0)u_0) + \int_0^t (t-t')c(t')dt' \tag{28.27}$$

e

$$K(t, t') := -a(t') + (t-t')(a'(t') - b(t')). \tag{28.28}$$

E. 28.19 *Exercício.* Verifique isso. ✦

Novamente, se a , a' e b forem contínuas no intervalo I , assim como a função $\int_0^t (t-t')c(t')dt'$, então a existência e a unicidade da solução da equação tratada estarão garantidas no mesmo intervalo I . Note-se que aqui podemos admitir também casos em que c não é contínua, desde que $\int_0^t (t-t')c(t')dt'$ o seja.

E. 28.20 *Exercício.* Seja a equação do pêndulo simples forçado no limite de pequenas oscilações

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 \theta(t) = f(t)$$

onde f representa (a menos de uma constante) uma força externa dependente do tempo. Considere o caso em que f é periódica de período $T > 0$, $f(t) = f(t + nT)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, com f dada no intervalo $[0, T)$ por

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & \text{se } 0 \leq t < T/2, \\ 0, & \text{se } T/2 < t < T. \end{cases}$$

Transforme essa equação em uma equação integral de Volterra equivalente e mostre como a mesma pode ser resolvida iterativamente. ✦

E. 28.21 *Exercício.* O mesmo para a equação do pêndulo simples forçado

$$\ddot{\theta}(t) + \omega^2 \sin(\theta(t)) = f(t)$$

com a mesma f dada acima. ✦

28.2.4 Aplicações à Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias

Iremos agora tratar de algumas das mais importantes aplicações do Teorema de Ponto Fixo de Banach, a saber, à teoria das equações diferenciais ordinárias (EDO's). O principal resultado que obteremos é o célebre Teorema de Picard-Lindelöf que fornece condições suficientes para existência e unicidade de soluções de EDO's. Obteremos também resultados sobre a dependência de soluções com relação a condições iniciais e a parâmetros. Trataremos de equações diferenciais de uma classe bastante geral, a saber, equações diferenciais em espaços de Banach, de modo a incluir sistemas de equações diferenciais ordinárias definidas em \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n . O leitor é convidado a uma leitura prévia do Capítulo 11, página 497, que trata de tais assuntos de forma introdutória.

28.2.4.1 O Teorema de Picard-Lindelöf

Esta subseção foi escrita conjuntamente com Daniel A. Cortez

Uma das principais aplicações do Teorema de Ponto Fixo de Banach dá-se, talvez, no contexto de espaços de funções, mais precisamente, quando o mesmo é empregado na teoria das equações diferenciais ordinárias (EDOs). Como veremos, o Teorema de Ponto Fixo de Banach é crucial para a demonstração de um famoso teorema sobre existência e unicidade de soluções de problemas de valor inicial em EDOs, devido a Picard¹⁹ e Lindelöf²⁰ que agora apresentaremos. Um outro importante teorema de existência (não unicidade) de soluções de problemas de valor inicial em EDOs é o Teorema de Peano, discutido na Seção 34.3.4.3, página 1603.

Antes de entrarmos nos detalhes técnicos, gostaríamos de fazer uma pequena nota histórica: originalmente, a demonstração de existência e unicidade de soluções de problemas de valor inicial em EDOs é devida a Lindelöf. Entretanto, o método que aplicaremos aqui para a sua demonstração, fazendo uso explícito do Teorema de Ponto Fixo de Banach, é devido a Picard²¹. Esses trabalhos datam da década de 90 do Século XIX.

No que segue, procuraremos apresentar uma versão bastante geral do teorema sobre existência e unicidade de soluções de problemas de valor inicial em EDOs válido para equações definidas em espaços de Banach \mathcal{B} . Consideremos, a saber, o seguinte tipo de equação diferencial de primeira ordem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \tag{28.29}$$

onde $t \in \mathbb{R}$ e $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$ representa uma função de uma variável real assumindo valores em um espaço de Banach \mathcal{B} . Acima, $f : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ é uma função de $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathcal{B}$ sobre a qual suporemos certas hipóteses convenientes de continuidade etc.

O leitor deve ter em mente o caso em que $\mathcal{B} = \mathbb{R}$ (ou $\mathcal{B} = \mathbb{C}$), quando a equação acima representa uma equação de primeira ordem de uma função real (complexa) desconhecida $x(t)$, ou o caso em que $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$ (ou $\mathcal{B} = \mathbb{C}^n$), quando a equação acima representa um sistema de equações de primeira ordem de um vetor real (complexo) desconhecido de n componentes: $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Tais sistemas foram discutidos no Capítulo 11, página 497.

Um *problema de valor inicial* consiste numa equação diferencial ordinária, como a dada acima, mais uma *condição inicial*

$$x(t_0) = x_0, \tag{28.30}$$

onde $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{B}$ são dados. Com essa pequena definição, estamos prontos para enunciar o teorema de existência e unicidade de Picard-Lindelöf:

¹⁹Charles Émile Picard (1856–1941).

²⁰Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946).

²¹Chamado de *Método das aproximações sucessivas*.

Teorema 28.4 (Teorema de Picard-Lindelöf. Existência e unicidade de soluções) *Seja $f : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ não-identicamente nula e contínua na região fechada*

$$\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_{a,b,t_0,x_0} := \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B} : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b \right\}, \quad (28.31)$$

para certos valores $a > 0$ e $b > 0$, onde $\|\cdot\|$ representa a norma do espaço de Banach \mathcal{B} . Claro é que f é limitada em \mathcal{R} . Seja $c > 0$ definida por

$$c := \sup_{(t,x) \in \mathcal{R}} \|f(t, x)\|. \quad (28.32)$$

Suponha ainda que f seja Lipschitz-contínua em \mathcal{R} com relação ao seu segundo argumento, ou seja, existe uma constante $k \geq 0$ tal que para todos (t, x) e $(t, y) \in \mathcal{R}$ valha

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\|. \quad (28.33)$$

Então, pelo menos no intervalo fechado $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, onde

$$\beta := \min \left\{ a, \frac{b}{c} \right\}, \quad (28.34)$$

o problema de valor inicial descrito pelas relações $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ com $x(t_0) = x_0$ apresenta uma solução, a qual é única.

Uma condição suficiente para que a condição de Lipschitz acima se cumpra é que $\partial_y f(t, y)$ exista em todo \mathcal{R} e lá seja limitada, em cujo caso a constante de Lipschitz seria dada por $k := \sup_{(t,y) \in \mathcal{R}} \|\partial_y f(t, y)\|$. \square

Antes de apresentarmos a demonstração, gostaríamos de notar que existem diversos outros teoremas que garantem existência e unicidade de solução de problemas de valor inicial como os discutidos acima com condições distintas, mas eventualmente mais específicas, sobre a função f . Para uma lista mais ampla de diversos teoremas sobre existência e/ou unicidade de solução para EDOs, vide [5]. Na Seção 11.3, página 509, apresentamos exemplos de aplicação do Teorema de Picard-Lindelöf e exemplos nos quais o mesmo não se aplica, tendo por consequência a inexistência ou não-unicidade da solução.

Descrevamos agora a técnica a ser utilizada em nossa demonstração. O primeiro passo consiste em convertermos a equação diferencial (28.29) em uma equação integral, definindo-se para isso uma transformação T . Em seguida, sob as hipóteses do teorema, mostraremos que existe uma certa potência da transformação T , digamos T^m , $m \geq 1$, tal que T^m é uma contração. Feito isso, utilizando o Teorema de Ponto Fixo de Banach em sua versão generalizada (Proposição 28.1, página 1375), concluiremos a existência e a unicidade do ponto fixo para a transformação T , o qual será justamente a solução de nosso problema. Faremos uso nessa demonstração, de dois resultados prévios, que escrevemos sob a forma de dois lemas. O primeiro deles, é a Proposição 27.7, página 1323, que recordamos aqui.

Lema 28.1 *Seja $C([a, b], \mathcal{B})$ o espaço das funções contínuas definidas no compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$ assumindo valores no espaço e Banach \mathcal{B} . Então, $C([a, b], \mathcal{B})$ é um espaço de Banach em relação à métrica do supremo, definida por*

$$d_\infty(f, g) := \sup_{t \in [a, b]} \|f(t) - g(t)\|,$$

para $f, g \in C([a, b], \mathcal{B})$. \square

Isso segue do Corolário 27.2, página 1337. A demonstração é também idêntica à da Proposição 27.7, página 1323, e não precisa ser repetida aqui. O segundo lema que utilizaremos é o seguinte.

Lema 28.2 *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e para $\kappa > 0$ fixo, seja $\tilde{C} \subset C([a, b], \mathcal{B})$ o subespaço de $C([a, b], \mathcal{B})$ formado pelas funções $x : [a, b] \rightarrow \mathcal{B}$ tais que*

$$\|x(t) - x_0\| \leq \kappa, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (28.35)$$

Então, \tilde{C} é um subespaço fechado de $C([a, b], \mathcal{B})$. \square

Prova. Tudo o que precisamos fazer é mostrar que qualquer seqüência convergente (x_n) de elementos de \tilde{C} converge para um x^* que também está em \tilde{C} (se você não entendeu a razão dessa afirmação, confira a Proposição 27.9 da página 1331, ou, equivalentemente, a Proposição 29.12, página 1423). De fato, como $x_n \in \tilde{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\|x_n(t) - x_0\| \leq \kappa, \quad \forall t \in [a, b].$$

Já que essa expressão não depende de t , podemos escrever

$$d_\infty(x_n, x_0) = \sup_{t \in I} \|x_n(t) - x_0\| \leq \kappa. \quad (28.36)$$

Por outro lado, como por hipótese a seqüência (x_n) converge para x^* , então, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon > 0$ tal que para todo $n > N_\varepsilon$ vale:

$$d_\infty(x_n, x^*) \leq \varepsilon. \quad (28.37)$$

Vamos agora utilizar a desigualdade triangular:

$$d_\infty(x^*, x_0) \leq d_\infty(x^*, x_n) + d_\infty(x_n, x_0) \leq \varepsilon + \kappa, \quad (28.38)$$

onde, na última desigualdade, fizemos uso das relações (28.36) e (28.37). Uma vez que (28.38) é verdadeira para qualquer $\varepsilon > 0$, concluímos então que

$$\|x^*(t) - x_0\| \leq \sup_{t \in [a, b]} \|x^*(t) - x_0\| = d_\infty(x^*, x_0) \leq \kappa, \quad \forall t \in [a, b],$$

mostrando que x^* também pertence a \tilde{C} . \blacksquare

Prova do Teorema 28.4. Seja J o intervalo $[t_0 - \beta, t_0 + \beta] \subset \mathbb{R}$ e considere o espaço $C(J, \mathcal{B})$ das funções contínuas em J assumindo valores em \mathcal{B} , dotado com a métrica do supremo. Considere ainda o subespaço $\tilde{C} \subset C(J, \mathcal{B})$ formado pelo conjunto das funções $x(t)$ tais que

$$\|x(t) - x_0\| \leq c\beta, \quad \forall t \in J. \quad (28.39)$$

Pelo Lema 28.1, sabemos que $C(J, \mathcal{B})$ é um espaço de Banach. Por outro lado, do Lema 28.2 vemos que o subespaço \tilde{C} é fechado em $C(J, \mathcal{B})$. Logo, da Proposição 27.9 da página 1331 (ou equivalentemente, da Proposição 29.12, página 1423), concluímos imediatamente que \tilde{C} também é um espaço métrico completo. Essa é uma conclusão importante da qual faremos uso adiante.

Definamos agora uma transformação T pela seguinte relação:

$$(Tx)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (28.40)$$

Vamos mostrar que T é uma aplicação que leva \tilde{C} em \tilde{C} , ou seja, $T : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$. De fato, para $\tau \in J$ e $x(\tau) \in \tilde{C}$, como $c\beta \leq b$, concluímos de (28.31) que $(\tau, x(\tau)) \in \mathcal{R}$. Logo a curva $J \ni \tau \mapsto (\tau, x(\tau)) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B}$ é contínua e está inteiramente contida na região \mathcal{R} , onde f é contínua por hipótese. Assim, $J \ni \tau \mapsto f(\tau, x(\tau)) \in \mathcal{B}$ é contínua e a sua integral estará bem definida. Concluímos daí que T pode ser aplicada a funções de \tilde{C} . Agora vamos mostrar que Tx é novamente um elemento em \tilde{C} .

Utilizando a relação (28.32) de limitação da função f no retângulo \mathcal{R} , tem-se para $x \in \tilde{C}$,

$$\|(Tx)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(\tau, x(\tau))\| d\tau \leq c|t - t_0| \leq c\beta,$$

provando que Tx dista de x_0 menos que $c\beta$, uma das condições definidores do conjunto \tilde{C} . Resta-nos provar que Tx é contínua caso $x \in \tilde{C}$. Para tal, já vimos que para $x \in \tilde{C}$ fixo, $J \ni \tau \mapsto f(\tau, x(\tau)) \in \mathcal{B}$ é igualmente contínua e, portanto, limitada, ou seja, existe $N_x > 0$ tal que $\|f(\tau, x(\tau))\| \leq N_x$ para todo $\tau \in J$. Logo, para $t, t' \in J$, com $t' \geq t$

$$\|(Tx)(t') - (Tx)(t)\| = \left\| \int_t^{t'} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right\| \leq \int_t^{t'} \|f(\tau, x(\tau))\| d\tau \leq N_x |t' - t|.$$

Como o lado direito vai a zero para $t \rightarrow t'$ provou-se que $(Tx)(t)$ é contínua como função de $t \in J$. Assim, $Tx \in \tilde{C}$ se $x \in \tilde{C}$.

Chegamos agora ao ponto crucial de nossa demonstração. Observe que se $x(t) \in \tilde{C}$ satisfaz o nosso problema de valor inicial (relações (28.29) e (28.30)), então certamente $x(t)$ pode ser escrita como

$$x(t) = (Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (28.41)$$

Para tal, procedemos como no tratamento da equação integral de Volterra, página 1383, assumindo que a função f seja Lipschitz-contínua em relação à segunda variável, ou seja, que valha a condição descrita em (28.33). Para $t \in J$, e $h, l \in \tilde{C}$,

$$(Th)(t) - (Tl)(t) = \int_{t_0}^t (f(\tau, h(\tau)) - f(\tau, l(\tau))) d\tau,$$

donde segue que (assumimos sem perda de generalidade que $t \geq t_0$)

$$\begin{aligned} \|(Th)(t) - (Tl)(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(\tau, h(\tau)) - f(\tau, l(\tau))\| d\tau \\ &\stackrel{(28.33)}{\leq} k \int_{t_0}^t \|h(\tau) - l(\tau)\| d\tau \\ &\leq k|t - t_0| \sup_{\tau \in J} \|h(\tau) - l(\tau)\| = k|t - t_0| d_\infty(h, l). \end{aligned}$$

Vamos agora provar por indução que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\|(T^n h)(t) - (T^n l)(t)\| \leq k^n \frac{|t - t_0|^n}{n!} d_\infty(h, l), \quad \forall t \in J. \quad (28.42)$$

Como já vimos que isso é verdade para $n = 1$, assumamos que essa relação é válida para um certo n genérico. Então,

$$\begin{aligned} \|(T^{n+1}h)(t) - (T^{n+1}l)(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(\tau, (T^n h)(\tau)) - f(\tau, (T^n l)(\tau))\| d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t k \|(T^n h)(\tau) - (T^n l)(\tau)\| d\tau \\ &\leq k \left(\int_{t_0}^t k^n \frac{|\tau - t_0|^n}{n!} d\tau \right) d_\infty(h, l) \\ &= k^{n+1} \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} d_\infty(h, l), \end{aligned}$$

o que prova (28.42) para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t \in J$, por indução. Assim, temos também que

$$d_\infty(T^n h, T^n l) \leq \frac{(k\beta)^n}{n!} d_\infty(h, l), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (28.43)$$

Note-se agora que, para quaisquer k e β fixos, existe n grande o suficiente tal que $\frac{(k\beta)^n}{n!} < 1$. Assim, para um tal n , T^n será uma contração do espaço completo \tilde{C} e si mesmo. Nessas condições, podemos certamente evocar a versão generalizada do Teorema de Ponto Fixo de Banach fornecida pela Proposição 28.1, página 1375, garantindo a existência e a unicidade de $x(t) \in \tilde{C}$, satisfazendo (28.41). Mas isso implica justamente a existência e unicidade de solução em $C(J, \mathcal{B})$ do problema de valor inicial considerado, demonstrando o Teorema 28.4. ■

*

No Capítulo 11, especialmente na Seção 11.3.1, página 511 e seguintes, são discutidos exemplos de equações diferenciais ordinárias que violam as condições do Teorema de Picard-Lindelöf.

28.2.4.2 Generalizando o Teorema de Picard-Lindelöf. Soluções Globais

Nesta subseção demonstraremos um teorema que fornece condições suficientes para a existência de soluções globais de problemas de valor inicial. O primeiro teorema abaixo é um resultado preparatório que estende o Teorema de Picard-Lindelöf, Teorema 28.4, página 1388.

Em toda esta seção, \mathcal{B} denota um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e, para $a > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, denotamos por $\mathcal{F}_{a, t_0} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{B}$ a faixa de largura a centrada em t_0 definida por

$$\mathcal{F}_{a, t_0} := \left\{ (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B} : |t - t_0| \leq a, \quad y \in \mathcal{B} \text{ arbitrário} \right\}.$$

Teorema 28.5 *Suponhamos que para um certo $a > 0$ e para $t_0 \in \mathbb{R}$ tenhamos uma função $f : \mathcal{F}_{a, t_0} \rightarrow \mathcal{B}$ que seja contínua. Suponhamos também que f seja Lipschitz-contínua em relação à segunda variável, ou seja, existe uma constante k_a (denominada constante de Lipschitz) tal que para todos $(t, y), (t, v) \in \mathcal{F}_{a, t_0}$ vale $\|f(t, y) - f(t, v)\| \leq k_a \|y - v\|$. Então, para qualquer $x_0 \in \mathcal{B}$, o problema de valor inicial $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ com $x(t_0) = x_0$ apresenta uma solução única válida para todo $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$.*

Uma condição suficiente para que a condição de Lipschitz acima se cumpra é que $\partial_y f(t, y)$ exista em todo ponto de \mathcal{F}_{a, t_0} e lá seja limitada, em cujo caso a constante de Lipschitz pode ser escolhida como $k_a := \sup_{(t, y) \in \mathcal{F}_{a, t_0}} \|\partial_y f(t, y)\|$. □

O leitor deve notar que esse teorema difere do Teorema de Picard-Lindelöf primeiro na hipótese de que f seja Lipschitz-contínua em uma faixa infinita \mathcal{F}_{a, t_0} de largura $2a$ centrada no instante inicial t_0 , e não apenas em uma região compacta como o \mathcal{R} do Teorema 28.4; segundo na conclusão, que afirma que a solução existe em todo intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$ e não em um intervalo eventualmente menor.

Prova. A demonstração segue passos semelhantes aos da prova do Teorema de Picard-Lindelöf. Seja J o intervalo fechado $[t_0 - a, t_0 + a]$. Considere o espaço $C(J, \mathcal{B})$ das funções contínuas em J assumindo valores em \mathcal{B} , dotado com a métrica do supremo. Pelo Lema 28.1, sabemos que $C(J, \mathcal{B})$ é um espaço de Banach. Como na prova do Teorema de Picard-Lindelöf, definimos a transformação

$$(Tx)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (28.44)$$

Vamos mostrar que T é uma aplicação que leva $C(J, \mathcal{B})$ em $C(J, \mathcal{B})$. De fato, para $\tau \in J$ e $x \in C(J, \mathcal{B})$ tem-se obviamente que $(\tau, x(\tau)) \in \mathcal{F}_{a, t_0}$. Logo, a curva $J \ni \tau \mapsto (\tau, x(\tau)) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B}$ é contínua e está inteiramente contida na região \mathcal{F}_{a, t_0} , onde f é contínua por hipótese. Assim, $J \ni \tau \mapsto f(\tau, x(\tau)) \in \mathcal{B}$ é contínua e a sua integral estará bem definida. Concluímos daí que T pode ser aplicada a funções de $C(J, \mathcal{B})$. Agora vamos mostrar que Tx é novamente um elemento em $C(J, \mathcal{B})$ e para tal é preciso provar que Tx é contínua caso $x \in C(J, \mathcal{B})$. Para $x \in C(J, \mathcal{B})$ fixo, vimos que $J \ni \tau \mapsto f(\tau, x(\tau)) \in \mathcal{B}$ é igualmente contínua e, portanto, limitada, ou seja, existe $N_x > 0$ tal que $\|f(\tau, x(\tau))\| \leq N_x$ para todo $\tau \in J$. Logo, para $t, t' \in J$, com $t' \geq t$

$$\|(Tx)(t') - (Tx)(t)\| = \left\| \int_t^{t'} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right\| \leq \int_t^{t'} \|f(\tau, x(\tau))\| d\tau \leq N_x |t' - t|.$$

Como o lado direito vai a zero para $t \rightarrow t'$ provou-se que $(Tx)(t)$ é contínua como função de $t \in J$. Assim, $Tx \in C(J, \mathcal{B})$ se $x \in C(J, \mathcal{B})$.

Para provar que T possui um ponto fixo único em $C(J, \mathcal{B})$ segue-se os mesmos passos da demonstração do Teorema de Picard-Lindelöf que conduziram à (28.43), que no presente caso assume a forma

$$d_\infty(T^n h, T^n l) \leq \frac{(a\kappa_a)^n}{n!} d_\infty(h, l), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (28.45)$$

Note-se agora que, para quaisquer a e κ_a fixos, existe n grande o suficiente tal que $\frac{(a\kappa_a)^n}{n!} < 1$. Assim, para um tal n , T^n será uma contração do espaço completo $C(J, \mathcal{B})$ e si mesmo. Nessas condições, podemos certamente evocar a versão generalizada do Teorema de Ponto Fixo de Banach fornecida pela Proposição 28.1, página 1375, garantindo a existência e a unicidade de $x(t) \in C(J, \mathcal{B})$, satisfazendo (28.41). Mas isso implica justamente a existência e unicidade de solução em $C(J, \mathcal{B})$ do problema de valor inicial considerado, demonstrando o Teorema 28.5. ■

Chegamos finalmente ao

Teorema 28.6 (Existência e unicidade de soluções globais) *Seja $f : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ contínua em todo $\mathbb{R} \times \mathcal{B}$. Suponhamos também que para todo $a > 0$, f seja Lipschitz-contínua em relação à segunda variável na faixa \mathcal{F}_{a, t_0} , ou seja, para cada $a > 0$ existe uma constante k_a (eventualmente dependente de a e denominada constante de Lipschitz) tal que para todos $(t, y), (t, v) \in \mathcal{F}_{a, t_0}$ vale $\|f(t, y) - f(t, v)\| \leq k_a \|y - v\|$. Então, para qualquer $x_0 \in \mathcal{B}$, o problema de valor inicial $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ com $x(t_0) = x_0$ apresenta uma solução única válida para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Uma condição suficiente para que a condição de Lipschitz acima se cumpra é que $\partial_y f(t, y)$ exista em todo $\mathbb{R} \times \mathcal{B}$ e seja limitada em cada faixa \mathcal{F}_{a, t_0} , $a > 0$, em cujo caso as constantes de Lipschitz podem ser escolhidas como $k_a := \sup_{(t, y) \in \mathcal{F}_{a, t_0}} \|\partial_y f(t, y)\|$. □

Prova. A prova é imediata pelo Teorema 28.5. ■

Sugerimos aqui os exercícios da página 516 e os comentários que se lhes seguem.

28.2.4.3 Um Teorema de Comparação de Soluções de EDO's

Nesta seção estabeleceremos um resultado fundamental para a análise da dependência de soluções de EDO's para com as condições iniciais e para com os parâmetros que definem a equação, duas questões importantes em aplicações e relacionadas ao estudo da estabilidade das soluções de equações diferenciais. Esse resultado está expresso no Teorema 28.7, abaixo, que permite comparar a evolução de soluções de equações diferenciais distintas, com condições iniciais distintas. Após seu enunciado e demonstração faremos alguns comentários relevantes.

Teorema 28.7 *Seja \mathcal{B} um espaço de Banach, $f_1, f_2 : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ duas funções e sejam $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathcal{B}$ soluções dos problemas de valor inicial*

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_1,$$

$$\dot{x}(t) = f_2(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_2,$$

respectivamente, válidas em um intervalo I que contém o ponto $t_0 \in \mathbb{R}$.

Seja $\mathcal{R} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{B}$ uma região fechada da forma

$$\mathcal{R} = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B} : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b \right\}, \quad (28.46)$$

para certos $a > 0, b > 0$ e $x_0 \in \mathcal{B}$, onde $\|\cdot\|$ representa a norma do espaço de Banach \mathcal{B} . Vamos supor que \mathcal{R} que satisfaça as seguintes condições:

1. $I \subset [t_0 - a, t_0 + a]$.
2. $(t_0, x_1) \in \mathcal{R}$ e $(t_0, x_2) \in \mathcal{R}$.
3. f_1 e f_2 são contínuas em \mathcal{R} .
4. f_1 é Lipschitz-contínua em \mathcal{R} com constante $\kappa_1 > 0$, ou seja, para todos (t, u) e $(t, v) \in \mathcal{R}$ vale

$$\|f_1(t, u) - f_1(t, v)\| \leq \kappa_1 \|u - v\|. \quad (28.47)$$

5. Os gráficos de y_1 e y_2 estão ambos contidos em \mathcal{R} , ou seja,

$$\|y_1(t) - x_0\| \leq b \quad e \quad \|y_2(t) - x_0\| \leq b$$

para todo $t \in I \subset [t_0 - a, t_0 + a]$.

Então, para todo $t \in I$ vale a desigualdade

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| e^{\kappa_1 |t - t_0|} + \frac{1}{\kappa_1} \left[\sup_{(t, x) \in \mathcal{R}} \|f_1(t, x) - f_2(t, x)\| \right] \left(e^{\kappa_1 |t - t_0|} - 1 \right). \quad (28.48)$$

□

Prova. Como vimos, podemos sob as hipóteses escrever, para $t \in I$,

$$y_1(t) = x_1 + \int_{t_0}^t f_1(\tau, y_1(\tau)) d\tau \quad e \quad y_2(t) = x_2 + \int_{t_0}^t f_2(\tau, y_2(\tau)) d\tau.$$

Disso segue que

$$\begin{aligned} y_1(t) - y_2(t) &= x_1 - x_2 + \int_{t_0}^t [f_1(\tau, y_1(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau))] d\tau \\ &= x_1 - x_2 + \int_{t_0}^t [f_1(\tau, y_1(\tau)) - f_1(\tau, y_2(\tau))] d\tau + \int_{t_0}^t [f_1(\tau, y_2(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau))] d\tau. \end{aligned} \quad (28.49)$$

Na última igualdade acima fizemos uso da hipótese 5 do Teorema 28.7, de modo que $f_1(\tau, y_2(\tau))$ está bem definido para $\tau \in I$. Supondo, sem perda de generalidade, que $t \geq t_0$, temos pela condição de Lipschitz para f_1 ,

$$\left\| \int_{t_0}^t [f_1(\tau, y_1(\tau)) - f_1(\tau, y_2(\tau))] d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f_1(\tau, y_1(\tau)) - f_1(\tau, y_2(\tau))\| d\tau \leq \kappa_1 \int_{t_0}^t \|y_1(\tau) - y_2(\tau)\| d\tau.$$

Definindo-se

$$C := \sup_{(t, x) \in \mathcal{R}} \|f_1(t, x) - f_2(t, x)\|,$$

tem-se

$$\left\| \int_{t_0}^t [f_1(\tau, y_2(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau))] d\tau \right\| \leq C(t - t_0).$$

Definindo-se também $D := \|x_1 - x_2\|$, segue de (28.49) que

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leq D + \kappa_1 \int_{t_0}^t \|y_1(\tau) - y_2(\tau)\| d\tau + C(t - t_0), \quad (28.50)$$

desigualdade essa que pode ser trivialmente escrita na forma

$$\left(\|y_1(t) - y_2(t)\| + \frac{C}{\kappa_1} \right) \leq \left(D + \frac{C}{\kappa_1} \right) + \kappa_1 \int_{t_0}^t \left(\|y_1(\tau) - y_2(\tau)\| + \frac{C}{\kappa_1} \right) d\tau. \quad (28.51)$$

Nessa forma, vemos pelo Lema 28.3, página 1400, que podemos aplicar a desigualdade de Grönwall, expressão (28.A.2), obtendo

$$\left(\|y_1(t) - y_2(t)\| + \frac{C}{\kappa_1} \right) \leq \left(D + \frac{C}{\kappa_1} \right) e^{\kappa_1(t - t_0)},$$

ou seja

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leq D e^{\kappa_1(t - t_0)} + \frac{C}{\kappa_1} \left(e^{\kappa_1(t - t_0)} - 1 \right).$$

O caso $t < t_0$ é análogo. Isso completa a prova. ■

Passemos a alguns comentários sobre o Teorema 28.7.

• Comentário ao Teorema 28.7. Continuidade em relação às condições iniciais

No caso em que $f_1 = f_2$, tem-se $C = 0$ e a desigualdade (28.48) reduz-se a

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| e^{\kappa_1 |t - t_0|}. \quad (28.52)$$

Essa desigualdade informa-nos que em intervalos finitos de tempo, sob as condições do Teorema 28.7, as soluções do problema de valor inicial $\dot{x}(t) = f_1(t, x(t))$, $x(t_0) = x_1$ dependem continuamente da condição inicial x_1 . A desigualdade

acima informa-nos também que variando-se as condições iniciais as soluções da equação diferencial acima pode no máximo divergir exponencialmente para curtos intervalos de tempo.

• **O expoente de Lyapunov**

O chamado *expoente de Lyapunov*²² no ponto x_1 associado ao problema de valor inicial acima é definido por²³

$$\lambda_{x_1} := \lim_{t \rightarrow t_0} \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{1}{|t - t_0|} \ln \left(\frac{\|y_1(t) - y_2(t)\|}{\|x_1 - x_2\|} \right),$$

caso esses limites existam²⁴. De (28.52) vê-se que $0 \leq \lambda_{x_1} \leq \kappa_1$. A noção de expoente de Lyapunov tem uma certa relevância no estudo equações diferenciais com comportamento “caótico” (vide, por exemplo, [155] para uma introdução à teoria dos sistemas dinâmicos), por fornecer uma indicação qualitativa de quão rápida se dá a divergência das soluções para curtos intervalos de tempo por mudanças nas condições iniciais, pois permite-nos a aproximação

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \approx \|x_1 - x_2\| e^{\lambda_{x_1}|t-t_0|}$$

para $|t-t_0|$ pequeno e $\|x_1-x_2\|$ pequeno. Alguns autores caracterizam a presença de caos no sistema definido pela equação diferencial que tratamos através da presença de um expoente de Lyapunov positivo (não-nulo). Essa caracterização, ainda que popular em certos círculos, não é geral o suficiente e é substituída por outras caracterizações melhores, notadamente em textos matemáticos (vide, por exemplo, [155]).

• **Comentário ao Teorema 28.7. Continuidade por mudanças de parâmetros**

No caso em que $x_1 = x_2$, tem-se $D = 0$ e a desigualdade (28.48) reduz-se a

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \frac{1}{\kappa_1} \left[\sup_{(t', x) \in \mathfrak{R}} \|f_1(t', x) - f_2(t', x)\| \right] \left(e^{\kappa_1|t-t_0|} - 1 \right).$$

Essa desigualdade informa-nos que em intervalos finitos de tempo, as soluções do problema de valor inicial $\dot{x}(t) = f_1(t, x(t))$, $x(t_0) = x_1$ dependem continuamente de deformações da função f_1 (por exemplo, deformações por mudanças dos parâmetros que definem a função f_1) que respeitem as condições do Teorema 28.7. Essas deformações podem, inclusive, ser tais que f_1 seja levada a uma função não-Lipschitz-contínua f_2 (note que no enunciado do Teorema 28.7 assumimos a continuidade de Lipschitz apenas para a função f_1).

A continuidade em relação a parâmetros também pode ser inferida do seguinte argumento elegante. Seja o problema de valor inicial $\dot{x}(t) = f_1(t, x(t), p_0)$, $x(t_0) = x_1$, onde f_1 depende de um parâmetro p_0 , como indicado. Como p_0 é constante, esse problema equivale ao sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(t, x(t), p(t)), \\ \dot{p}(t) &= 0, \end{aligned}$$

com condições iniciais $x(t_0) = x_1$, $p(t_0) = p_0$. A esse sistema aplicam-se também os teoremas anteriores sobre existência, unicidade e continuidade em relação a condições iniciais, o que nos permite inferir a continuidade desejada caso, adicionalmente, $f_1(t, x, p)$ seja Lipschitz-contínua na sua dependência com o parâmetro p em uma vizinhança de p_0 .

28.3 O Teorema da Função Implícita e o Teorema da Função Inversa

O Teorema de Ponto Fixo de Banach pode ser utilizado para demonstrar dois teoremas importantes: o Teorema da Função Implícita e o Teorema da Função Inversa. Esses teoremas são bem-conhecidos da Análise em \mathbb{R}^n e iremos apresentá-los

²²Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857–1918). O nome de Lyapunov é grafado de diversas outras formas: Liapunov, Liapounov, Liapounoff etc.

²³O leitor deve ser advertido do fato de haver outras definições de expoente de Lyapunov na literatura, nem todas totalmente equivalentes a essa.

²⁴Pode ser necessário substituir os limites por \limsup 's e \liminf 's.

e demonstrá-los aqui no contexto de espaços de Banach. Nesse contexto e em outros ainda mais gerais (como no caso de espaços de Fréchet, caso sobre o qual não falaremos aqui) esses teoremas desempenham um papel relevante em áreas tais como a teoria das equações diferenciais (ordinárias e parciais), na topologia diferencial, na geometria diferencial e na teoria dos sistemas dinâmicos, como no célebre Teorema KAM²⁵. A importância do Teorema da Função Implícita reside no fato de o mesmo garantir condições suficientes para a solubilidade de uma classe bastante geral de equações funcionais.

Como veremos, a demonstração do Teorema da Função Implícita faz também uso do Teorema do Valor Médio e da noção de derivada de Fréchet, ambas discutidas na Seção 33.2.2, página 1507 (o Teorema do Valor Médio é o Teorema 33.1, página 1509). Familiaridade com aquela seção é recomendada ao leitor. Para o estudante é também interessante notar que a demonstração do Teorema da Função Implícita que apresentaremos guarda forte semelhança com as ideias por trás do método de Newton, o qual discutimos páginas acima. Isso não é por acaso, mas deixamos ao leitor como exercício de meditação entender o por quê. Para uma discussão geral, com notas históricas, sobre o Teorema da Função Implícita e suas aplicações, vide [196]²⁶.

28.3.1 O Teorema da Função Implícita

Para o enunciado e demonstração do Teorema da Função Implícita abaixo faremos uso da noção de derivada parcial de funções entre espaços de Banach introduzida à página 1510 e seguintes e da notação correspondente.

Teorema 28.8 (Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach) *Sejam X e Y espaços de Banach, $A \subset X$ e $B \subset Y$ dois abertos e seja $F : A \times B \rightarrow Y$ contínua e diferenciável com derivada contínua (ou seja, de classe C^1). Suponhamos ainda que existam $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$ tais que $F(x_0, y_0) = 0$ e que a aplicação linear $D_2F(x_0, y_0) = F'(x_0, y_0)\Lambda_Y : Y \rightarrow Y$ seja inversível. Então, existem abertos $A_0 \subset A$ e $B_0 \subset B$ contendo x_0 e y_0 , respectivamente, e uma função contínua $f : A_0 \rightarrow B_0$ satisfazendo $f(x_0) = y_0$ e $F(x, f(x)) = 0$ para todo $x \in A_0$. Para cada $x \in A_0$ o ponto $f(x) \in B_0$ é o único que satisfaz $F(x, y) = 0$. A função f é contínua e diferenciável com derivada contínua, sendo*

$$f'(x) = -\left[D_2F(x, f(x)) \right]^{-1} D_1F(x, f(x)). \tag{28.53}$$

□

Prova. Para simplificar a notação denotemos o operador linear $D_2F(x_0, y_0) : Y \rightarrow Y$ por L . A ideia da prova é usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para mostrar que para cada x suficientemente próximo de x_0 a aplicação $T_x : B \rightarrow Y$ dada por $T_x(y) \equiv T(x, y) := y - L^{-1}F(x, y)$ tem um ponto fixo único (que denotaremos por $f(x)$) em uma vizinhança suficientemente pequena de y_0 . Assim $f(x) = T_x(f(x))$, ou seja, $L^{-1}F(x, f(x)) = 0$, o que implica $F(x, f(x)) = 0$. Para provar os fatos delineados acima, provaremos que existe um aberto $B_1 \subset B$ que contém y_0 e que é levado em si mesmo por T_x , desde que x esteja próximo o suficiente de x_0 . Em seguida provaremos que T_x é uma contração quando restrito ao fecho de B_1 . O Teorema do Ponto Fixo de Banach garante, então, a existência e unicidade do ponto fixo. As demais afirmações do enunciado (continuidade e diferenciabilidade de f) seguem de certas estimativas que encontraremos no caminho.

Para x fixo em A , a derivada de $T_x(y)$ em relação a y é a derivada parcial

$$D_2T(x, y) = \mathbb{1}_Y - L^{-1}D_2F(x, y). \tag{28.54}$$

Trata-se de um operador linear e limitado de Y em Y . Analogamente,

$$D_1T(x, y) = L^{-1}D_1F(x, y). \tag{28.55}$$

Trata-se de um operador linear e limitado de X em Y .

Tomemos $0 < q < 1$ fixo. O fato que $D_2F(x_0, y_0) = L$ implica que $\mathbb{1}_Y - L^{-1}D_2F(x, y)$ anula-se no ponto (x_0, y_0) . Assim, a continuidade de $D_2F(x, y)$ como função de x e y garante que existe $\epsilon_1 > 0$ tal que se $\|x - x_0\|_X \leq \epsilon_1$ e $\|y - y_0\|_Y \leq \epsilon_1$ então

$$\|\mathbb{1}_Y - L^{-1}D_2F(x, y)\| < q. \tag{28.56}$$

²⁵Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987); Vladimir Igorevich Arnol'd (1937–2010); Jürgen Moser (1928–1999).

²⁶Agradecemos a D. A. Cortez por essa referência.

Como veremos logo abaixo, é importante sabermos estimar a norma de diferenças como $T(x, y) - T(x', y')$. Com uso do Teorema 33.1, página 1509, podemos escrever²⁷

$$T(x, y) - T(x', y') = \left(\int_0^1 T'(\tau(x, y) + (1-\tau)(x', y')) d\tau \right) \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}. \quad (28.57)$$

Usando a representação (33.18) e escrevendo

$$T'(x, y) = D_1T(x, y) \Pi_X + D_2T(x, y) \Pi_Y,$$

ficamos com

$$\begin{aligned} T(x, y) - T(x', y') &= \left(\int_0^1 D_1T(\tau(x, y) + (1-\tau)(x', y')) \Pi_X d\tau \right) \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} \\ &+ \left(\int_0^1 D_2T(\tau(x, y) + (1-\tau)(x', y')) \Pi_Y d\tau \right) \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} \\ &= \left(\int_0^1 D_1T(\tau(x, y) + (1-\tau)(x', y')) d\tau \right) (x - x') \\ &+ \left(\int_0^1 D_2T(\tau(x, y) + (1-\tau)(x', y')) d\tau \right) (y - y'). \end{aligned}$$

Assim,

$$\|T(x, y) - T(x', y')\| \leq \gamma_1 \|x - x'\|_X + \gamma_2 \|y - y'\|_Y, \quad (28.58)$$

onde

$$\gamma_j := \sup_{\tau \in [0, 1]} \|D_j T(\tau(x, y) + (1-\tau)(x', y'))\|, \quad j = 1, 2.$$

Observe-se que se tivermos $x, x' \in A_1$ e $y, y' \in \overline{B_1}$, onde

$$A_1 := \{x'' \in X \mid \|x'' - x_0\|_X < \epsilon_1\} \quad \text{e} \quad B_1 := \{y'' \in Y \mid \|y'' - y_0\|_Y < \epsilon_1\},$$

poderemos estimar

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sup_{\tau \in [0, 1]} \left\| D_1T(\tau(x, y) + (1-\tau)(x', y')) \right\| \\ &= \sup_{\tau \in [0, 1]} \left\| L^{-1}D_1F(\tau(x, y) + (1-\tau)(x', y')) \right\| \\ &\leq \sup_{x'' \in A_1, y'' \in \overline{B_1}} \left\| L^{-1}D_1F(x'', y'') \right\| =: \beta, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \sup_{\tau \in [0, 1]} \left\| D_2T(\tau(x, y) + (1-\tau)(x', y')) \right\| \\ &\leq \sup_{x'' \in A_1, y'' \in \overline{B_1}} \left\| D_2T(x'', y'') \right\| \\ &\leq \sup_{x'' \in A_1, y'' \in \overline{B_1}} \left\| \mathbb{1}_Y - L^{-1}D_2F(x'', y'') \right\| \\ &\stackrel{(28.56)}{<} q. \end{aligned} \quad (28.59)$$

²⁷Para sermos estritos quanto à notação, deveríamos escrever a combinação linear convexa que surge no argumento de T' em (28.57) na forma de vetores-coluna: $\tau \binom{x}{y} + (1-\tau) \binom{x'}{y'}$. Renunciamos a esse preciosismo, porém.

Podemos escolher um número $\epsilon_2 > 0$ satisfazendo simultaneamente $\epsilon_2 < \epsilon_1$ e $\beta\epsilon_2 < (1-q)\epsilon_1$ (se $\beta \geq 1$ a segunda condição implica a primeira) e definir

$$A_2 := \{x'' \in X \mid \|x'' - x_0\|_X < \epsilon_2\}.$$

É evidente que $A_2 \subset A_1$ e que as estimativas $\gamma_1 \leq \beta$ e $\gamma_2 < q$ permanecem válidas se tivermos $x, x' \in A_2$ e $y, y' \in \overline{B_1}$.

Isto posto, tomemos $x \in A_2, y \in \overline{B_1}$ e consideremos a diferença $T_x(y) - y_0 = T(x, y) - y_0$. Como $T(x_0, y_0) = y_0$ (pois $F(x_0, y_0) = 0$), temos que $T_x(y) - y_0 = T(x, y) - T(x_0, y_0)$. Por (28.58), teremos

$$\|T_x(y) - y_0\| = \|T(x, y) - T(x_0, y_0)\| \leq \gamma_1 \|x - x_0\|_X + \gamma_2 \|y - y_0\|_Y \leq \beta\epsilon_2 + q\epsilon_1 < \epsilon_1, \quad (28.60)$$

a última desigualdade devendo-se a $\beta\epsilon_2 < (1-q)\epsilon_1$. A expressão (28.60) ensina-nos que se $x \in A_2$ então T_x é uma aplicação de $\overline{B_1}$ em si mesmo.

Também para $x \in A_2$ e $y, y' \in \overline{B_1}$ teremos

$$\|T_x(y) - T_x(y')\| = \|T(x, y) - T(x, y')\| \stackrel{(28.58)}{\leq} \gamma_2 \|y - y'\| \stackrel{(28.59)}{<} q \|y - y'\|,$$

provando que T_x é uma contração. Como $\overline{B_1}$ é um espaço métrico completo, podemos agora evocar o Teorema de Ponto Fixo de Banach e assim estabelecer que para cada $x \in A_2$ a aplicação $T_x: \overline{B_1} \rightarrow \overline{B_1}$ tem um único ponto fixo em $\overline{B_1}$, que denotaremos por $f(x)$. A equação de ponto fixo $f(x) = T_x(f(x))$ significa $F(x, f(x)) = 0$, como comentamos no início da demonstração.

Para $x, x' \in A_2$ e pela equação de ponto fixo tem-se $f(x) - f(x') = T_x(f(x)) - T_{x'}(f(x')) = T(x, f(x)) - T(x', f(x'))$ e, novamente por (28.58) com $\gamma_1 \leq \beta, \gamma_2 < q$, segue que

$$\|f(x) - f(x')\|_Y < \beta \|x - x'\|_X + q \|f(x) - f(x')\|_Y,$$

ou seja, $\|f(x) - f(x')\|_Y < \beta(1-q)^{-1} \|x - x'\|_X$, o que implica que f é contínua em A_2 .

Pela unicidade, tem-se também que $f(x_0) = y_0$.

A diferenciabilidade de f pode ser estabelecida, sob as hipóteses dadas, escrevendo-se

$$f(x+h) - f(x) = S(x, h) + \mathcal{T}(x, h) + D_1T(x, f(x))h + D_2T(x, f(x))(f(x+h) - f(x)), \quad (28.61)$$

onde,

$$\begin{aligned} S(x, h) &:= \left[T(x+h, f(x+h)) - T(x, f(x+h)) - D_1T(x, f(x+h))h \right] \\ &+ \left[T(x, f(x+h)) - T(x, f(x)) - D_2T(x, f(x))(f(x+h) - f(x)) \right] \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{T}(x, h) := \left(D_1T(x, f(x+h)) - D_1T(x, f(x)) \right) h.$$

E. 28.22 Exercício. Verifique a validade da expressão (28.61) observando que os termos do lado direito simplesmente se cancelam, produzindo o lado esquerdo. \star

Disso obtem-se que

$$f(x+h) - f(x) = \left[\mathbb{1}_Y - D_2T(x, f(x)) \right]^{-1} \left(S(x, h) + \mathcal{T}(x, h) \right) + \left[\mathbb{1}_Y - D_2T(x, f(x)) \right]^{-1} D_1T(x, f(x))h,$$

o que, por (28.54) e (28.55), simplifica-se para

$$f(x+h) - f(x) + \left[D_2F(x, f(x)) \right]^{-1} D_1F(x, f(x))h = \left[L^{-1}D_2F(x, f(x)) \right]^{-1} \left(S(x, h) + \mathcal{T}(x, h) \right).$$

E. 28.23 *Exercício.* Verifique!

✦

Observe-se, de passagem, que da continuidade de $D_2F(x, y)$, da hipótese que $[D_2F(x, y)]^{-1}$ existe no ponto (x_0, y_0) e do fato de f ser contínuo com $f(x_0) = y_0$, segue que $D_2F(x, f(x))$ é igualmente inversível em uma vizinhança suficientemente pequena de x_0 , pois o conjunto de elementos inversíveis em uma álgebra de Banach com unidade (como a álgebra dos operadores lineares limitados de \mathcal{Y} em \mathcal{Y} , da qual $D_2F(x, f(x))$ faz parte) é aberto (Corolário 41.6, página 2099). Isso justifica a expressão acima.

Da hipótese que F (e, portanto, T) seja diferenciável em relação a seus dois argumentos segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_{\mathcal{X}}} [T(x+h, f(x+h)) - T(x, f(x+h)) - D_1T(x, f(x+h))h] = 0$$

e que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_{\mathcal{X}}} [T(x, f(x+h)) - T(x, f(x)) - D_2T(x, f(x))(f(x+h) - f(x))] = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_{\mathcal{X}}} S(x, h) = 0.$$

Da continuidade de f e da hipótese que $D_1T(x, y)$ é contínua, segue também que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_{\mathcal{X}}} \mathcal{T}(x, h) = \lim_{h \rightarrow 0} (D_1T(x, f(x+h)) - D_1T(x, f(x))) \frac{h}{\|h\|_{\mathcal{X}}} = 0.$$

Provamos, assim, que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_{\mathcal{X}}} \left(f(x+h) - f(x) + [D_2F(x, f(x))]^{-1} D_1F(x, f(x))h \right) = 0,$$

o que prova que f é diferenciável e que (28.53) é verdadeira. ■

• **Exemplos e contraexemplos**

E. 28.24 *Exercício.* Seja a função $F(x, y) = x^2 + y$ com $x, y \in \mathbb{R}$. No ponto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ a função F se anula. Verifique que as condições do Teorema da Função Implícita são satisfeitas nesse caso e que $f(x) = -x^2$ satisfaz $f(x_0) = y_0$ e $F(x, f(x)) = 0$ em todo \mathbb{R} . Cheque a validade de (28.53). ✦

Os exercícios a seguir exibem algumas situações patológicas.

E. 28.25 *Exercício-exemplo.* Esse exercício mostra uma situação na qual não existe nenhuma função f satisfazendo $f(x_0) = y_0$ e $F(x, f(x)) = 0$. Seja a função $F(x, y) = x^2 + y^2$ com $x, y \in \mathbb{R}$. No ponto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ a função F se anula, mas não existe nenhuma f tal que $f(x_0) = y_0$ e $F(x, f(x)) = 0$ em uma vizinhança de x_0 , pois $(0, 0)$ é o único zero de F . Quais hipóteses do Teorema da Função Implícita falham nesse caso? ✦

E. 28.26 *Exercício-exemplo.* Esse exercício mostra uma situação na qual existe mais de uma função f satisfazendo $f(x_0) = y_0$ e $F(x, f(x)) = 0$. Seja F definida por $F(x, y) = x^2 - y^2$ com $x, y \in \mathbb{R}$. No ponto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ a função F se anula e $f_{\pm}(x) = \pm x$ satisfazem $f_{\pm}(x_0) = y_0$ e $F(x, f_{\pm}(x)) = 0$. Quais hipóteses do Teorema da Função Implícita falham nesse caso? A relação (28.53) vale para ambas as funções f_{\pm} ? ✦

E. 28.27 *Exercício-exemplo.* Seja a função $F(x, y) = x^2 + y^3$ com $x, y \in \mathbb{R}$. No ponto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ a função F se anula e $f(x) = -x^{2/3}$ satisfaz $f(x_0) = y_0$ e $F(x, f(x)) = 0$ em \mathbb{R} . No entanto, f não é diferenciável em (x_0, y_0) . Note, porém, que D_2F não é inversível em (x_0, y_0) . Isso mostra que as condições do Teorema da Função Implícita são condições suficientes mas não necessárias para a existência de solução contínua. Cheque também a validade de (28.53). ✦

E. 28.28 *Exercício-exemplo.* Seja a função $F(x, y) = x^4 + y^3$ com $x, y \in \mathbb{R}$. No ponto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ a função F se anula e $f(x) = -x^{4/3}$ satisfaz $f(x_0) = y_0$ e $F(x, f(x)) = 0$. f é contínua com derivada contínua. D_2F , porém, não é inversível em (x_0, y_0) . Isso mostra que as condições do Teorema da Função Implícita são condições suficientes mas não necessárias para a existência de solução contínua e diferenciável. Cheque também a validade de (28.53). ✦

28.3.2 O Teorema da Função Inversa

Uma das consequências diretas do Teorema da Função Implícita é um teorema que garante condições suficientes para que uma função entre espaços de Banach seja localmente inversível. Esse é o importante Teorema da Função Inversa. Faremos uso do mesmo, por exemplo, no Capítulo 35, página 1642.

Teorema 28.9 (Teorema da Função Inversa) *Sejam \mathcal{X} e \mathcal{Y} dois espaços de Banach e $A \subset \mathcal{X}$ um aberto onde encontra-se definida uma função $g : A \rightarrow \mathcal{Y}$. Seja $x_0 \in A$ e seja $g(x_0) = y_0$. Vamos supor que g seja contínua e diferenciável com derivada contínua em A , de forma que a aplicação linear $g'(x_0) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ tenha inversa limitada. Então, existem um aberto $B \in \mathcal{Y}$ contendo y_0 e uma função $h : B \rightarrow \mathcal{X}$, contínua e diferenciável, tal que $h(y_0) = x_0$ e $g(h(y)) = y$ para todo $y \in B$. Vale também $h'(y) = [g'(h(y))]^{-1}$. □*

Prova. Defina-se $F : \mathcal{Y} \times A \rightarrow \mathcal{Y}$ por $F(y, x) = g(x) - y$. Teremos $D_1F(y, x) = -\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}$ e $D_2F(y, x) = g'(x)$. Assim, F é diferenciável com derivada contínua. Verifica-se que $F(y_0, x_0) = 0$ e, por hipótese, $D_2F(y_0, x_0) = g'(x_0)$ tem inversa limitada. Portanto, vale para F o Teorema da Função Implícita, que nos garante a existência de um aberto $B \in \mathcal{Y}$ contendo y_0 e uma função $h : B \rightarrow \mathcal{X}$ tal que $h(y_0) = x_0$ e tal que para todo $y \in B$ vale $F(y, h(y)) = 0$. Essa última expressão significa que $g(h(y)) - y = 0$, que é o que queríamos provar. h é contínua e diferenciável e, por (28.53), vale $h'(y) = [g'(h(y))]^{-1}$. ■

Apêndices

28.A O Lema de Grönwall

O Lema de Grönwall²⁸, que apresentamos abaixo, é de demonstração muito simples mas possui várias aplicações na teoria das equações diferenciais ordinárias ou parciais. Usamo-lo, por exemplo, na demonstração do Teorema 28.7, página 1392, teorema esse que, sob hipóteses, estabelece a continuidade de soluções de equações diferenciais ordinárias em relação a mudanças nas condições iniciais e a deformações de parâmetros.

Lema 28.3 (Lema de Grönwall, ou Desigualdade de Grönwall) *Seja $u : [t_0, T] \rightarrow [0, \infty)$, uma função contínua e não-negativa definida em algum intervalo $[t_0, T]$, $T > t_0$, e suponha que existam duas constantes $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ tais que valha*

$$u(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \tag{28.A.1}$$

para todo $t \in [t_0, T]$. Então,

$$u(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)} \tag{28.A.2}$$

para todo $t \in [t_0, T]$. □

A desigualdade (28.A.2) é denominada *desigualdade de Grönwall*. Note que (28.A.2) implica que u é identicamente nula, caso $\alpha = 0$. Para generalizações do Lema de Grönwall, vide [239].

Prova. No caso $\beta = 0$ as desigualdades (28.A.1) e (28.A.2) equivalem e não há o que se demonstrar. Assumamos então $\beta > 0$. A função $v(t) := \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$ é contínua e diferenciável e $\frac{d}{dt}v(t) = u(t)$. Assim, a relação (28.A.1) afirmamos que $\frac{d}{dt}v(t) - \beta v(t) \leq \alpha$. Multiplicando essa expressão por $e^{-\beta(t-t_0)}$ ficamos com $\frac{d}{dt}(e^{-\beta(t-t_0)}v(t)) \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)}$. Integrando ambos os lados dessa desigualdade entre t_0 e t (sendo $t_0 \leq t \leq T$) e usando que $v(t_0) = 0$, obtem-se $e^{-\beta(t-t_0)}v(t) \leq \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta(t-t_0)})$. Multiplicando ambos os lados por $e^{+\beta(t-t_0)}$, obtem-se

$$v(t) \leq \frac{\alpha}{\beta} \left(e^{\beta(t-t_0)} - 1 \right). \tag{28.A.3}$$

A expressão (28.A.1) afirma que $u(t) \leq \alpha + \beta v(t)$. Com a desigualdade (28.A.3), segue disso que $u(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}$, como queríamos provar. ■

²⁸Thomas Hakon Grönwall (1877–1932).