Capítulo 33
Variedades

Sumário

33.1 Variedades Topológicas . . . 1679
33.1.1 Construindo Variedades Topológicas . . . 1684
33.2 Variedades Diferenciáveis . . . 1686
33.2.1 Partições da Unidade Diferenciáveis . . . 1691
33.2.2 A Noção de Espaço Tangente . . . 1693
33.2.2.1 O Espaço Cotangente . . . 1699
33.2.3 Tensores em Variedades . . . 1701
33.2.3.1 Traços de Tensores. Contração de Índices . . . 1703
33.2.3.2 Transposição de Tensores . . . 1705
33.2.4 Aplicações Entre Variedades Diferenciáveis . . . 1706
33.2.4.1 A Diferencial de Uma Aplicação Entre Variedades. "Pullback" e "Pushforward" . . . 1706
33.2.4.2 Imersões, Mergulhos e Subvariedades . . . 1710
33.2.4.3 Imersões e Mergulhos. Exemplos e Contraexemplos Simples . . . 1712
33.3 Campos Vetoriais e Tensoriais . . . 1717
33.3.1 A Derivada de Lie . . . 1720
33.4 Exemplos de Variedades Topológicas e Diferenciáveis . . . 1725
33.4.1 Uma Variedade Topológica Paracompacta não Segundo-Contável . . . 1725
33.4.2 O Gráfico de uma Função Real em $\mathbb{R}^n$ . . . 1726
33.4.2.1 Cones. E Um Estudo de Caso . . . 1728
33.4.3 Superfícies Regulares em $\mathbb{R}^n$ . . . 1730
33.4.4 As Esferas $\mathbb{S}^n$ . . . 1732
33.4.5 Toros (e Algumas Generalizações) . . . 1735
33.4.6 Espaços Projetivos Reais . . . 1737
33.4.7 Grupos de Lie . . . 1741
33.4.8 Fibrados, Fibrados Vetoriais e Principais . . . 1741
APÊNDICES . . . 1743
33.A Derivadas de Lie. Prova das Relações (33.74) e (33.85) . . . 1743
33.B Derivadas de Lie. Prova da Relação (33.94) . . . 1744

A noção moderna de variedade diferenciável, provavelmente formalizada pela primeira vez por Hassler Whitney[1], em 1936, assumiu grande relevância na Física Teórica (particularmente na Mecânica Clássica, na Teoria de Campos e na Teoria da Relatividade Geral), sendo o objeto central de certas áreas da Matemática, como a Topologia Diferencial, a Geometria Diferencial e desempenhando um papel importante em outras, como na Teoria dos Grupos de Lie. Suas origens remontam à Geometria Analítica criada por Descartes[2], mas foi com os trabalhos de Gauss[3], Riemann[4], Poincaré[5] e muitos outros que ideias de natureza geométrica entraram o século XX acasaladas a ideias de natureza topológica. De maneira simplificada, podemos dizer que uma variedade é um espaço topológico no qual cada ponto possui uma vizinhança aberta na qual cada elemento pode ser identificado por um sistema de coordenadas não singulares contínuo (e, eventualmente, diferenciável). Essa construção é inspirada na noção de superfície em espaços $\mathbb{R}^n$. Na realidade, para que uma variedade tenha propriedades não patológicas e permita certas construções matemáticas

[1]Hassler Whitney (1907–1989).
[2]René Descartes (1596–1650).
[3]Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855).
[4]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866).
[5]Jules Henri Poincaré (1854–1912).

gentis (como, por exemplo, ser metrizável e ter partições da unidade) é necessário requerer certas condições adicionais ao espaço topológico, como a de ser Hausdorff, segundo-contável ou paracompacto.

O presente capítulo pretende introduzir as noções de variedade topológica e de variedade diferenciável. Também introduziremos aqui algumas noções correlatas, como as de espaço tangente, variedade tangente, espaço cotangente, variedade cotangente, campo vetorial e tensorial. Noções de natureza geométrica, como as de métrica Riemanniana e semirriemanniana, conexão, geodésica, curvatura etc., serão abordadas no Capítulo 34, página 1747. O Capítulo 35, página 1850, é dedicado à teoria das formas diferenciais.

Sem a pretensão de fornecer uma lista minimamente digna da extensa e variada literatura devotada aos temas aqui tratados, fornecemos algumas poucas indicações bibliográficas ao leitor que valham tanto para o presente capítulo quanto para os Capítulos 34 e 35. Para a teoria geral de variedades topológicas e diferenciáveis e para o estudo geral de Topologia Diferencial e Geometria Diferencial, vide[6] [323], [312], [313], [240], [76], [292], [352], [308], [249], [287], [33], [190], [343], [474] ou [475]. Para o estudo de Geometria Riemanniana, vide [342], [92] ou [314]. Para o estudo de Geometria semirriemanniana, vide [387]. Para aplicações à teoria dos grupos de Lie, vide [527]. Para o estudo de Geometria Diferencial de curvas e superfícies, vide [341]. Para um extenso tratamento matemático da Teoria da Relatividade Geral, vide [93]. Para temas matemáticos mais específicos da Teoria da Relatividade Geral, vide [523], [215], [483], [100] ou [370]. Para aplicações gerais da Geometria Diferencial à Física, em estilo semimatemático, vide [375]. Para um texto dedicado à História da Geometria Diferencial até o início do séc. XX, recomendamos [491].

* ** *** ** *

Quanto à organização deste capítulo, optamos por apresentar primeiramente os conceitos, definições e os desenvolvimentos teóricos básicos, deixando a apresentação e discussão de exemplos de variedades topológicas e diferenciáveis para a seção final, a Seção 33.4, página 1725. Isso tem a vantagem de não interromper os desenvolvimentos gerais e permite tratar os exemplos com mais globalidade, sem discussões limitadas a aspectos previamente apresentados. No entanto, o estudante é estimulado a procurar enfronhar-se gradualmente na Seção 33.4 desde o início de sua leitura, de modo a colher alguns exemplos relevantes sobre o material apresentado.

33.1 Variedades Topológicas

Nesta breve seção introduziremos a noção de variedade topológica, discutiremos as motivações que a ela conduzem e algumas variantes de sua definição, preparando o caminho para a definição de variedade diferenciável.

• **Bolas abertas em $\mathbb{R}^n$**

No que segue, denotaremos por $D_n(r,\ x) \subset \mathbb{R}^n$ a bola aberta de raio $r > 0$ centrada em $x \in \mathbb{R}^n$ em relação à métrica Euclidiana usual: $D_n(r,\ x) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \middle| \ \|y - x\| < r \right\}$, com $\|y - x\| = \sqrt{(y^1 - x^1)^2 + \cdots + (y^n - x^n)^2}$.

Duas bolas abertas $D_n(r,\ x)$ e $D_n(r',\ x')$ no mesmo $\mathbb{R}^n$ são sempre homeomorfas[7], com o homeomorfismo $f : D_n(r,\ x) \to D_n(r',\ x')$ dado por $f(y) = \lambda\big(y - x\big) + x'$, sendo $\lambda = r'/r$. É também fácil ver que a bola $D_n(1,\ 0)$ é homeomorfa a todo $\mathbb{R}^n$, com o homeomorfismo $g : \mathbb{R}^n \to D_n(1,\ 0)$ dado (por exemplo) por

$$g(y^1,\ \ldots,\ y^n) := \begin{cases} (0,\ \ldots,\ 0)\,, & \text{se } (y^1,\ \ldots,\ y^n) = (0,\ \ldots,\ 0)\,, \\ \dfrac{\tanh\left(\sqrt{(y^1)^2 + \cdots + (y^n)^2}\right)}{\sqrt{(y^1)^2 + \cdots + (y^n)^2}}\,\big(y^1,\ \ldots,\ y^n\big)\,, & \text{de outra forma.} \end{cases}$$

Assim, todas as bolas $D_n(r,\ x)$ são homeomorfas entre si e homeomorfas a $\mathbb{R}^n$. O mesmo $\mathbb{R}^n$ é também homeomorfo ao cubo aberto de lado 2 centrado em 0: $C := \big\{(y^1,\ \ldots,\ y^n) \in \mathbb{R}^n,\ -1 < y_k < 1,\ \forall k = 1,\ \ldots,\ n\big\}$, com o homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to C$ dado por

$$h(y^1,\ \ldots,\ y^n) \ = \ \big(\tanh(y^1),\ \ldots,\ \tanh(y^n)\big)\,.$$

[6]A ordem dos textos é aleatória e não segue nenhuma organização ou preferência.
[7]Para a definição de homeomorfismo, vide Seção 30.5.1.1, página 1518.

E. 33.1 *Exercício*. Verifique as afirmações acima, assim como verifique que todos paralelepípedos em $\mathbb{R}^n$ são homeomorfos entre si. ✠

• **Abertos Euclidianos**

Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico. Um τ-aberto é dito ser um *τ-aberto Euclidiano* de dimensão $n \in \mathbb{N}_0$ se for homeomorfo a uma bola aberta $D_n(r,\ 0) \subset \mathbb{R}^n$.

Dado um espaço topológico $(X,\ \tau)$, denotaremos por $\mathcal{E}(X,\ \tau,\ n) \subset \tau$ a coleção de todos os τ-abertos Euclidianos de dimensão n. Notar que não excluímos a possibilidade de $\mathcal{E}(X,\ \tau,\ n)$ ser vazio.

O lema técnico elementar a seguir será usado posteriormente, mas não tem nenhuma relevância para o que segue de imediato.

Lema 33.1 *Seja E um aberto Euclidiano de dimensão n em um espaço topológico $(X,\ \tau)$ e seja $h : E \to \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo. Então, E pode ser escrito como união contável da imagem por h^{-1} de bolas abertas em $\mathbb{R}^n$.*

Se $A \in \tau$ com $A \cap E \neq \emptyset$, então também $A \cap E$ pode ser escrito como união contável da imagem por h^{-1} de bolas abertas em $\mathbb{R}^n$. □

Prova. Seja $\mathcal{D}$ a coleção de todos as bolas abertas $D_n(r,\ q) \subset \mathbb{R}^n$ com $r \in \mathbb{Q}_+$ e $q \in \mathbb{Q}^n$. A coleção $\mathcal{D}$ compreende, portanto, todas as bolas de raio racional positivo centradas em algum ponto de $\mathbb{R}^n$ com coordenadas racionais. É claro que $\mathcal{D}$ é uma coleção contável. Seja $G \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e seja $\mathcal{D}_G$ o subconjunto de $\mathcal{D}$ composto por bolas inteiramente contidas em G. É claro que $\mathcal{D}_G$ é também uma coleção contável e que G pode ser escrito como a união contável dos elementos de $\mathcal{D}_G$.

Seja E um aberto Euclidiano e $h : E \to h(E) \subset \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo. Segue facilmente que E pode ser escrito como a união da coleção de τ-abertos $\mathcal{B}_E := \left\{h^{-1}\big(D_n(r,\ q)\big),\ \text{com } D_n(r,\ q) \in \mathcal{D}_{h(E)}\right\}$, que é uma coleção contável.

Seja agora $A \in \tau$ e suponhamos $A \cap E \neq \emptyset$. Afirmamos que também $A \cap E$ pode ser escrito como união de uma subcoleção de $\mathcal{B}_E$. De fato, como h é um homeomorfismo, $h(A \cap E)$ é um aberto em $\mathbb{R}^n$ contido em $h(E)$. Logo, $h(A \cap E)$ pode ser escrito como uma união contável de bolas em $\mathcal{D}_{h(A\cap E)}$. A imagem dessas bolas por h^{-1} é um subconjunto de $\mathcal{B}_E$, completando a prova. ■

• **Cartas locais**

Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico e $\mathcal{E}(X,\ \tau,\ n) \subset \tau$ a coleção de todos os τ-abertos Euclidianos de dimensão n. Um par $(V,\ h)$ com $V \in \mathcal{E}(X,\ \tau,\ n)$ e com h sendo um homeomorfismo $h : V \to D_n(r_V,\ 0)$ para algum $r_V > 0$, é dito ser uma *carta local de coordenadas* (do aberto V). Se $(V,\ h)$ é uma carta local de coordenadas, o τ-aberto Euclidiano V é dito ser uma *carta local* e o homeomorfismo h é dito ser uma *carta de coordenadas* de V.

• **Espaços localmente Euclidianos**

Um espaço topológico $(X,\ \tau)$ é dito ser um *espaço localmente Euclidiano de dimensão n* se possuir ao menos um recobrimento $\mathcal{V}$ por elementos de $\mathcal{E}(X,\ \tau,\ n)$.

Assim, um espaço topológico $(X,\ \tau)$ é localmente Euclidiano de dimensão n se para todo $x \in X$ existe um τ-aberto V, com $x \in V$, sendo V homeomorfo a $D_n(r_V,\ 0)$ para algum $r_V > 0$.

O sentido intuitivo dessa definição afirma que cada $x \in X$ possui uma vizinhança aberta V cujos pontos podem ser parametrizados por um sistema de coordenadas reais, associando bijetivamente a cada $y \in V$ um conjunto de n coordenadas reais $(y^1,\ \ldots,\ y^n) \in D_n(r_V,\ 0)$.

E. 33.2 *Exercício*. Mostre que se $(X,\ \tau)$ é um espaço localmente Euclidiano de dimensão n, então $(X,\ \tau)$ não pode ser simultaneamente um espaço localmente Euclidiano de dimensão m com $m \neq n$. ✠

• **Atlas**

Seja $(X,\ \tau)$ um espaço localmente Euclidiano de dimensão n. Uma coleção de cartas locais de coordenadas

$$\mathcal{A} = \left\{(V_\lambda,\ h_\lambda),\quad V_\lambda \in \mathcal{E}(X,\ \tau,\ n),\quad h_\lambda : V_\lambda \to D_n(r_{V_\lambda},\ 0),\ \ \lambda \in \Lambda\right\}$$

é dita ser um *n-atlas*, ou simplesmente um *atlas*, do espaço topológico $(X,\ \tau)$ se a coleção $\{V_\lambda,\quad \lambda \in \Lambda\}$ for um recobrimento de X e se cada h_λ, $\lambda \in \Lambda$, for um homeomorfismo de $V_\lambda \in \mathcal{E}(X,\ \tau,\ n)$ em alguma bola aberta $D_n(r_{V_\lambda},\ 0)$. Acima Λ é um conjunto em princípio arbitrário de índices usados para rotular os elementos do atlas.

Por definição, todo espaço localmente Euclidiano de dimensão n possui ao menos um n-atlas (e vice-versa).

Se $\mathcal{A} = \left\{(V_\lambda,\ h_\lambda),\ \lambda \in \Lambda\right\}$ for um n-atlas, cada par $(V_\lambda,\ h_\lambda) \in \mathcal{A}$ é dito ser uma *carta local de coordenadas* do atlas $\mathcal{A}$. Se $(V_\lambda,\ h_\lambda) \in \mathcal{A}$ é uma carta local de coordenadas do atlas $\mathcal{A}$, o τ-aberto V_λ é dito ser uma *carta local* do atlas $\mathcal{A}$, ou simplesmente uma *carta* de $\mathcal{A}$, e o homeomorfismo h_λ é dito ser uma *carta de coordenadas* de $\mathcal{A}$.

• **Funções de transição**

Dado um atlas $\mathcal{A}$ em um espaço localmente Euclidiano $(X,\ \tau)$, certas cartas locais U e V de $\mathcal{A}$ (com homeomorfismos $h_U : U \to D_n(r_U,\ 0)$ e $h_V : V \to D_n(r_V,\ 0)$, respectivamente) podem ter uma intersecção não vazia. Em tais casos podemos definir um homeomorfismo $H_{U,V}$ do aberto $h_U(U \cap V) \subset D_n(r_U,\ 0)$ no aberto $h_V(U \cap V) \subset D_n(r_V,\ 0)$ por

$$H_{U,V} := h_V \circ (h_U)^{-1} : \quad h_U(U \cap V) \ \to\ h_V(U \cap V)\ .$$

Os homeomorfismos $H_{U,V}$ são denominados *funções de transição*. A função de transição $H_{U,V}$ representa uma mudança de coordenadas em $U \cap V$, a saber, a mudança das coordenadas definidas por h_U nas coordenadas definidas por h_V.

Como veremos. funções de transição desempenham um papel central na introdução de outras estruturas em variedades topológicas, por exemplo, estruturas diferenciáveis.

• **Espaços localmente Euclidianos e compacidade local**

Por serem localmente homeomorfos a espaços Euclidianos, os espaços localmente Euclidianos herdam daqueles algumas propriedades locais, como a compacidade local, atestada adiante. A propriedade de ser Hausdorff, no entanto, é uma propriedade global de um espaço topológico e não é claro, portanto, que ela deva ser herdada de espaços localmente Euclidianos. Como veremos no Exemplo 33.1, isso de fato nem sempre é verdade.

Para futura referência, enunciemos a seguinte proposição:

Proposição 33.1 *Todo espaço topológico localmente Euclidiano é localmente compacto.* □

Prova. Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico localmente Euclidiano. Sejam $x \in X$ e V uma vizinhança aberta localmente Euclidiana de x homeomorfa a uma bola $D_n(r,\ 0)$ por um homeomorfismo $h : V \to D_n(r,\ 0)$. Como $h(x) \in D_n(r,\ 0)$ tem-se $\|h(x)\| < r$ (aqui $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana usual de $\mathbb{R}^n$). Assim, tomando $0 < r' < r - \|h(x)\|$ teremos que $h(x) \in \overline{D_n(r',\ h(x))} \subset D_n(r,\ 0)$. O conjunto $\overline{D_n(r',\ h(x))}$ é compacto e, portanto, $h^{-1}\left(\overline{D_n(r',\ h(x))}\right)$ é compacto (pois h^{-1} é contínua e pelo Teorema 32.5, página 1614) e contém a vizinhança aberta de x definida por $h^{-1}\big(D_n(r',\ h(x))\big)$. Assim, todo $x \in X$ possui uma vizinhança compacta, a saber, $h^{-1}\left(\overline{D_n(r',\ h(x))}\right)$ para algum $r' > 0$ pequeno o suficiente, provando que todo espaço localmente Euclidiano é localmente compacto. ■

Como consequência da Proposição 33.1, acima, e da Proposição 32.29, página 1629, podemos afirmar que

Corolário 33.1 *A reta de Sorgenfrey $(\mathbb{R},\ \tau[\mathcal{S}])$ (vide Seção 27.2.1.1, página 1426) não é um espaço topológico localmente Euclidiano.* □

Nota referente ao Corolário 33.1. Poder-se-ia pensar que a reta de Sorgenfrey $(\mathbb{R},\ \tau[\mathcal{S}])$ é localmente Euclidiana pois todo ponto de $\mathbb{R}$ é elemento de algum intervalo aberto $(a,\ b)$, e tais intervalos são abertos tanto na topologia $\tau[\mathcal{S}]$ de quanto na topologia usual $\tau_{\mathbb{R}}$. Sucede, porém, que sequer a aplicação identidade $\mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$ é um homeomorfismo entre $(\mathbb{R},\ \tau[\mathcal{S}])$ e $(\mathbb{R},\ \tau_{\mathbb{R}})$, como observado em Nota à página 1427. ♣

• **Metrizabilidade local de espaços localmente Euclidianos**

Todo espaço localmente Euclidiano é localmente metrizável, ou seja, cada ponto possui uma vizinhança homeomorfa a um espaço métrico (pois cada $D_n(r,\ 0)$ é um espaço métrico com a métrica Euclidiana usual). Para a noção de metrizabilidade e alguns resultados básicos, vide Seção 32.7, página 1661.

• **Espaços localmente Euclidianos e espaços Hausdorff**

Para a continuação da discussão é interessante observar que nem todo espaço localmente Euclidiano é Hausdorff. Vejamos um exemplo.

Exemplo 33.1 Seja a chamada *reta real com dupla origem* $(X,\ \tau)$ (com $X \equiv \mathbb{R} \cup \{p\}$) apresentada no Exercício E. 32.12, página 1597. O espaço $(X,\ \tau)$ é localmente Euclidiano de dimensão 1. De fato, se $x \in \mathbb{R}$, sua vizinhança aberta $V_{x,\ r} = (x - r,\ x + r)$ composta de um intervalo aberto de largura $2r > 0$ é evidentemente homeomorfa a $D_n(r,\ 0) = (-r,\ r)$, com o homeomorfismo $h : V_x \to D_n(r,\ 0)$ sendo $h(y) = y - x$. Para o ponto $p \in X$ tomamos a vizinhança abertas $V_{p,\ r} = (-r,\ 0) \cup \{p\} \cup (0,\ r)$, com $r > 0$, e o homeomorfismo $h : V_p \to D_n(r,\ 0)$ será dado por $h(y) = \begin{cases} y\,, & \text{se } y \neq p\,, \\ 0\,, & \text{se } y = p\,. \end{cases}$ Deixamos ao leitor a tarefa (elementar) de provar que as funções h de acima e suas inversas são contínuas.

Também deixamos leitor a tarefa (elementar) de provar que a coleção $\{V_{x,\ r},\ x \in \mathbb{R},\ r > 0\} \cup \{V_{p,\ r},\ r > 0\}$ é um recobrimento por τ-abertos de $X \equiv \mathbb{R} \cup \{p\}$. Isso mostrou que a reta real com dupla origem $(X,\ \tau)$ é um espaço localmente Euclidiano de dimensão 1.

Apesar de localmente Euclidiano, o espaço topológico $(X,\ \tau)$ não é Hausdorff, pois todo aberto que contém p intersecta todo aberto que contém 0.

No Exercício E. 27.63, página 1444, mostramos que a reta real com dupla origem é segundo-contável.

A reta real com dupla origem é, em resumo, de um espaço localmente Euclidiano, segundo-contável, mas não-Hausdorff. ♦

• **Variedades topológicas. Definições e discussão**

Chegamos agora a algumas das definições que centralizarão nosso interesse no presente capítulo.

Definição. Pré-Variedade Topológica Um espaço topológico Hausdorff e localmente Euclidiano de dimensão n é dito ser uma *pré-variedade topológica* de dimensão n. ♠

A noção de pré-variedade topológica, acima, é um tanto minimalista, pois pré-variedades topológicas podem ser espaços não metrizáveis e sem partições da unidade. Para evitar tais patologias é necessário agregar à definição alguma condição adicional, de modo a garantir a validade de propriedades topológicas gentis. Uma condição adicional costumeiramente agregada é a paracompacidade.

Definição. Variedade Topológica Paracompacta Um espaço topológico Hausdorff, paracompacto e localmente Euclidiano de dimensão n é dito ser uma *variedade topológica paracompacta* de dimensão n. ♠

Uma variedade topológica paracompacta possui partições da unidade subordinadas a recobrimentos por abertos (Teorema 32.25, página 1647) e é metrizável. Essa última afirmação decorre do Teorema 32.29, página 1662. Desse teorema e do fato de todo espaço localmente Euclidiano ser localmente metrizável segue que uma variedade topológica é metrizável se e somente se for paracompacta. Assim, é na importância da propriedade de metrizabilidade que reside a relevância de garantir-se a propriedade de paracompacidade em uma variedade.

Há outras razões para desejar-se a propriedade de paracompacidade. Como veremos, existência de partições da unidade é importante por garantir a existência de métricas Riemannianas em variedades diferenciáveis e por permitir uma definição de integração de n-formas.

Uma outra definição de interesse ainda maior e que, como veremos, é um caso particular da definição anterior, é a seguinte:

Definição. Variedade Topológica Segundo-Contável Um espaço topológico Hausdorff, segundo-contável e localmente Euclidiano de dimensão n é dito ser uma *variedade topológica segundo-contável* de dimensão n. ♠

Nota. A condição de ser Hausdorff não pode ser dispensada: os Exercícios E. 32.12, E. 27.63 e 33.1 (páginas 1597, 1444 e 1682, respectivamente) mostram que o espaço topológico denominado *reta real com dupla origem* é localmente Euclidiano, segundo-contável, mas não-Hausdorff. ♣

Uma variedade topológica segundo-contável é dotada, dentre outras, das seguintes propriedades gentis:

1. Compacidade local (por ser localmente Euclidiana, conforme a Proposição 33.1, página 1681).
2. Separabilidade (por ser segundo-contável, de acordo com a Proposição 27.14, página 1442).
3. Regularidade (por ser Hausdorff e localmente compacta, conforme a Proposição 32.32, página 1643).
4. Normalidade (por ser Hausdorff, segundo-contável e localmente compacta, de acordo com o Corolário 32.10, página 1644).
5. Paracompacidade (por ser Hausdorff, segundo-contável e localmente compacta, conforme o Teorema 32.26, página 1648).
6. Existência, para cada recobrimento por abertos, de um refinamento contável e localmente finito por conjuntos abertos relativamente compactos (também pelo Teorema 32.26, página 1648).
7. Existência de partições da unidade subordinadas a recobrimentos por abertos (por ser Hausdorff, paracompacta e pelo Teorema 32.25, página 1647).
8. Metrizabilidade (por ser, Hausdorff, regular e segundo-contável, de acordo com o Teorema 32.31, página 1663).
9. Existência de imersões e mergulhos em certos espaços $\mathbb{R}^m$. Um importante teorema estabelecido em 1936 por Whitney afirma que toda variedade topológica segundo-contável de dimensão n pode ser mergulhada em um espaço $\mathbb{R}^{2n}$. Para a formulação precisa, vide Teoremas 33.3 e 33.4, página 1712 e seguintes.

Depreende-se da lista acima que toda variedade topológica segundo-contável é uma variedade topológica paracompacta. Um teorema geral, porém, garante que uma variedade topológica paracompacta é segundo-contável se e somente se possui um número contável de componentes conexas. Não demonstraremos esse teorema aqui, mas o Exemplo 33.11, página 1725, exibe uma instância pedagógica que ilustra sua validade. Nas variedades topológicas paracompactas não segundo-contáveis o supracitado teorema de Whitney pode não ser satisfeito.

Resumindo, pré-variedades topológicas não são, geralmente, metrizáveis e não têm, geralmente, partições da unidade subordinadas a recobrimentos por abertos e variedades topológicas paracompactas que não são segundo-contáveis possuem uma coleção não enumerável de componentes conexas. Em verdade, há muito poucos resultados interessantes que podem ser obtidos em espaços localmente Euclidianos que não sejam paracompactos ou Hausdorff.

Como discutimos na Seção 32.3.5.1, página 1639, toda variedade topológica compacta é paracompacta e segundo-contável, pois todo espaço topológico Hausdorff, localmente Euclidiano e compacto é segundo-contável e paracompacto (vide, particularmente, a Proposição 32.30, página 1641).

Presentemente, a maioria dos autores prefere agregar a propriedade de ser segundo-contável à definição de variedade topológica, pois essa propriedade garante a exclusão de espaços "patológicos" sem, no entanto, impedir a validade da metrizabilidade e da existência de partições da unidade subordinadas a recobrimentos (paracompacidade), dois instrumentos sem os quais o trabalho matemático seria deveras dificultado. Além disso, a validade do teorema de Whitney sob a condição de segundo-contabilidade indica que a noção de variedade topológica segundo-contável é a que mais se aproxima da noção intuitiva de superfície, a qual subjaz à noção de variedade e motiva sua definição.

Na Seção 33.4.1, página 1725, apresentamos um exemplo ilustrativo de uma variedade topológica paracompacta mas não segundo-contável. Sua leitura permitirá uma melhor apreciação da distinção entre ambas as definições.

Daqui para a frente, salvo menção em contrário, sempre que usarmos a expressão "variedade topológica" sem mais qualificativos teremos em mente "variedade topológica segundo-contável" (e, naturalmente, Hausdorff).

* *** *

Para encerrar essa discussão, façamos um comentário sobre a imagem dos homomorfismos h que definem as cartas locais de coordenadas $(V,\ h)$, com $h : V \to D_n(r_V,\ 0)$. Até o momento, convencionamos padronizar sua imagem como sendo bolas abertas $D_n(r_V,\ 0) \subset \mathbb{R}^n$ de raio $r_V > 0$ centradas na origem. Em verdade, qualquer outro aberto de $\mathbb{R}^n$

homeomorfo a tais bolas (por exemplo, os n-cubos abertos $(-1,\ 1)^n$ ou o próprio $\mathbb{R}^n$) pode ser empregado na definição. Daqui por diante deixaremos essas possibilidade em aberto e só especificaremos a imagem de uma carta de coordenadas h se tal for útil a algum propósito especial.

• **Atlas em variedades topológicas segundo-contáveis**

A seguinte proposição assegura que toda variedade topológica segundo-contável possui ao menos um atlas contável e localmente finito composto por conjuntos τ-abertos relativamente compactos. A existência de tais atlas é um fato frequentemente empregado em demonstrações de diversos tipos de assertivas em Geometria Diferencial e, em particular, no estudo de Geometrias Lorentzianas (Relatividade Geral).

Proposição 33.2 *Toda variedade topológica segundo-contável $(W,\ \tau)$ possui um atlas contável $\{(V_m,\ h_m),\ m \in \mathbb{N}\}$ tal que $\{V_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ é um recobrimento localmente finito de W composto por conjuntos τ-abertos relativamente compactos.* □

Prova. Por ser um espaço topológico localmente Euclidiano, $(W,\ \tau)$ possui ao menos um atlas $\mathcal{U} = \{(U_\lambda,\ h_\lambda),\ \lambda \in \Lambda\}$. Por $(W,\ \tau)$ ser um espaço topológico Hausdorff localmente compacto e segundo-contável vale, pelo Teorema 32.26, página 1648, que $\{U_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ possui um refinamento contável e localmente finito $\mathcal{V} = \{V_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ por conjuntos τ-abertos relativamente compactos. Como $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\{U_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$, existe para cada $V_m \in \mathcal{V}$ um elemento $U_{\lambda_m} \in \{U_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ tal que $V_m \subset U_{\lambda_m}$ (pelo Teorema 32.26, vale até mesmo que $V_m \subset \overline{V_m} \subset U_{\lambda_m}$). Se $h_m \equiv h_{\lambda_m}$ é a carta de coordenadas associada a U_{λ_m}, então $(V_m,\ h_m)$ compõe uma carta local de coordenadas e $\{(V_m,\ h_m),\ m \in \mathbb{N}\}$ compõe um atlas contável de $(W,\ \tau)$ com $\{V_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ sendo um recobrimento localmente finito de W composto por conjuntos τ-abertos relativamente compactos. ■

Um corolário imediato da Proposição 33.2 e da Proposição 32.36, página 1647, é o seguinte:

Corolário 33.2 *Toda variedade topológica segundo-contável $(W,\ \tau)$ possui uma partição da unidade contável composta por funções de suporte compacto.* □

Prova. Pela Proposição 33.2, W possui um recobrimento localmente finito $\{V_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ composto por conjuntos τ-abertos relativamente compactos. Pela Proposição 32.36, página 1647, existe uma partição da unidade $\{p_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ subordinada a $\{V_m,\ m \in \mathbb{N}\}$, com $\operatorname{supp} p_m \subset V_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo, $\operatorname{supp} p_m$ é um subconjunto τ-fechado do τ-compacto $\overline{V_m}$ e, pela Proposição 32.18, página 1615, $\operatorname{supp} p_m$ é τ-compacto. ■

33.1.1 Construindo Variedades Topológicas

Vamos agora brevemente descrever como novas variedades topológicas podem ser obtidas de outras por meio de certas operações, como tomada de produtos, restrição a subconjuntos ou tomada de quocientes.

• **Produtos de variedades topológicas**

Se $(X_1,\ \tau_1)$ e $(X_2,\ \tau_2)$ são duas variedades topológicas de dimensões n_1 e n_2, respectivamente, definimos a *variedade topológica produto* de ambas, denotada por $(X_1 \times X_2,\ \tau_1 \times \tau_2)$, como sendo a variedade topológica $(n_1 + n_2)$-dimensional constituída pelo produto Cartesiano $X_1 \times X_2$ com a topologia produto $\tau_1 \times \tau_2$. Sabemos pelas Proposições 27.17, página 1445, e 32.14, página 1609, que as propriedades de ser segundo-contável e de ser Hausdorff são herdadas por topologias produto. Assim, a única questão revelante é saber se $(X_1 \times X_2,\ \tau_1 \times \tau_2)$ é localmente Euclidiana.

Sejam $(V_1,\ h_1)$ e $(V_1,\ h_1)$ cartas locais de coordenadas em $(X_1,\ \tau_1)$ e $(X_2,\ \tau_2)$, respectivamente. Defina-se o homeomorfismo $h_1 \times h_2 : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ de forma que sua imagem para cada $(x_1,\ x_2) \in V_1 \times V_2$ seja o produto Cartesiano $h_1(x_1) \times h_2(x_2)$ contido no produto de abertos $h_1(V_1) \times h_2(V_2) \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$.

Se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são atlas em $(X_1,\ \tau_1)$ e $(X_2,\ \tau_2)$, respectivamente, definimos $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, como o conjunto formado por todas as cartas locais de coordenadas da forma $(V_1 \times V_2,\ h_1 \times h_2)$, com $(V_k,\ h_k)$ sendo cartas locais de coordenadas de $\mathcal{A}_k$, $k = 1,\ 2$. É fácil ver que $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ é um $(n_1 + n_2)$-atlas em $(X_1 \times X_2,\ \tau_1 \times \tau_2)$.

A variedade topológica $(X_1 \times X_2,\ \tau_1 \times \tau_2)$ assim constituída é denominada *variedade topológica produto* das variedades topológicas $(X_1,\ \tau_1)$ e $(X_2,\ \tau_2)$. É claro que a construção acima pode ser estendida para quaisquer produtos finitos[8] de variedades topológicas.

• **Subvariedades topológicas**

Seja $(N,\ \tau_N)$ uma variedade topológica de dimensão n e $M \subset N$ com $M \neq \emptyset$. Podemos introduzir em M a topologia τ_I induzida por τ_N, onde os abertos são os conjuntos da forma $A \cap M$, com $A \in \tau_N$. Segundo as Proposições 27.16, página 1444, e 32.13, página 1609, o espaço topológico $(M,\ \tau_I)$ será Hausdorff e segundo-contável.

Dizemos que $(M,\ \tau_I)$ é uma *subvariedade topológica* de dimensão m de $(N,\ \tau_N)$ se for também um espaço localmente Euclidiano. É evidente que toda subvariedade topológica de uma variedade topológica é por si só uma variedade topológica (por ser localmente Euclidiana, Hausdorff e segundo-contável). Vamos agora reformular essas ideias em termos de propriedades da chamada função inclusão.

Sejam X e Y dois conjuntos não vazios com $Y \subset X$. A função $i \equiv i_{Y,\,X} : Y \to X$ definida por $i(y) := y$ para todo $y \in Y$, é denominada *inclusão* de Y em X, ou *função inclusão* de Y em X. A Proposição 30.8, página 1519, ensina-nos que podemos refrasear a definição de subvariedade topológica da forma sugerida na seguinte

Proposição 33.3 *Sejam $(X,\ \tau_X)$ e $(Y,\ \tau_Y)$ dois espaços topológicos, sendo que $Y \subset X$ (assumimos X e Y não vazios). Suponhamos que $(X,\ \tau_X)$ seja uma variedade topológica. Então $(Y,\ \tau_Y)$ será uma subvariedade topológica de $(X,\ \tau_X)$ se a função inclusão $i_{Y,\,X} : Y \to X$ for um mergulho topológico de $(Y,\ \tau_Y)$ em $(X,\ \tau_X)$ e se $(Y,\ \tau_Y)$ for localmente Euclidiano.* □

Prova. Pela hipótese de $i_{Y,\,X} : Y \to X$ ser um mergulho topológico de $(Y,\ \tau_Y)$ em $(X,\ \tau_X)$ segue pela Proposição (30.8), página 1519, que $\tau_Y = \tau_I$, a topologia induzida por τ_X em Y. Segundo as Proposições 27.16, página 1444, e 32.13, página 1609, o espaço topológico $(Y,\ \tau_I) = (Y,\ \tau_Y)$ será Hausdorff e segundo-contável e, se também for localmente Euclidiano, será uma subvariedade de $(X,\ \tau_X)$, segundo a definição prévia. ■

Ainda relevante é a seguinte reformulação das afirmações acima, que dispensa demonstração:

Proposição 33.4 *Sejam $(X,\ \tau_X)$ e $(Y,\ \tau_Y)$ duas variedades topológicas sendo que $Y \subset X$ (assumimos X e Y não vazios). Então, $(Y,\ \tau_Y)$ será uma subvariedade topológica de $(X,\ \tau_X)$ se a função inclusão $i_{Y,\,X} : Y \to X$ for um mergulho topológico de $(Y,\ \tau_Y)$ em $(X,\ \tau_X)$.* □

Essa proposição será usada mais adiante como inspiração para a definição de subvariedade diferenciável.

• **Variedades topológicas quociente**

Seja $(X,\ \tau)$ uma variedade topológica e seja "$\sim$" uma relação de equivalência em X. Como discutimos brevemente na Seção 32.4.3, página 1653, Podemos definir um espaço topológico $(X/\sim,\ \tau/\sim)$ sobre a coleção $X/\sim$ de classes de equivalência por "$\sim$" com a topologia quociente $\tau/\sim$, definida como sendo a maior topologia em $X/\sim$ para a qual a aplicação quociente $\pi : X \to X/\sim$, com $\pi(x) := [x]$, é contínua. Trata-se, portanto, da topologia final (ou forte, ou indutiva) definida por π. Assim, um conjunto $A \subset X/\sim$ é declarado aberto na topologia $\tau/\sim$ se e somente se $\pi^{-1}(A) \in \tau$. O espaço topológico $(X/\sim,\ \tau/\sim)$ é denominado *espaço topológico quociente*.

Um problema importante na construção de variedades topológicas é que as propriedades de Hausdorff e segundo-contabilidade não são sempre herdadas por uma topologia quociente. Assim, ao examinarmos um espaço quociente de uma variedade topológica, somos geralmente obrigados a verificar a validade das três propriedades topológicas definidoras de uma variedade topológica: a propriedade de Hausdorff, a segundo-contabilidade e a propriedade de ser localmente Euclidiana. O resultado a seguir (adaptado de [312]) auxilia nessa tarefa.

Lema 33.2 *Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico segundo-contável, seja "$\sim$" uma relação de equivalência em X e seja o espaço topológico quociente $(X/\sim,\ \tau/\sim)$, tal como definido acima. Se $(X/\sim,\ \tau/\sim)$ for localmente Euclidiano de dimensão n, então também será segundo-contável.* □

[8] Para produtos não finitos a propriedade de ser segundo-contável é geralmente perdida.

Prova. Como $(X/\sim,\ \tau/\sim)$ é localmente Euclidiano, $X/\sim$ pode ser recoberto por um conjunto de $(\tau/\sim)$-abertos Euclidianos $\big\{E_\lambda \in \mathcal{E}\big(X/\sim,\ \tau/\sim,\ n\big),\ \lambda \in \Lambda\big\}$, para algum conjunto de índices Λ.

É evidente que a coleção $\big\{\pi^{-1}\big(E_\lambda\big) \in \tau,\ \lambda \in \Lambda\big\}$ é um recobrimento de X por τ-abertos.

Sabemos do Corolário 32.2, página 1613, que se $(X,\ \tau)$ for segundo-contável, então é Lindelöf, ou seja, todo recobrimento de X por τ-abertos possui um subrrecobrimento contável. Logo, existe um subrrecobrimento contável $\big\{\pi^{-1}\big(E_{\lambda_k}\big) \in \tau,\ ,\ k \in \mathbb{N}\big\}$ de X. Mas isso implica que $\big\{E_{\lambda_k} \in \mathcal{E}\big(X/\sim,\ \tau/\sim,\ n\big),\ k \in \mathbb{N}\big\}$ é um recobrimento contável de $X/\sim$ por $(\tau/\sim)$-abertos Euclidianos.

Como os conjuntos E_{λ_k} são abertos Euclidianos, existem homeomorfismos $h_k : E_{\lambda_k} \to \mathbb{R}^n$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Seja $A \in \tau/\sim$. Então, podemos escrever A como a união contável de $(\tau/\sim)$-abertos da forma $A \cap E_{\lambda_k}$. Pelo Lema 33.1, página 1680, esses conjuntos $A \cap E_{\lambda_k}$, por sua vez, podem ser escritos como união contável de imagens por h_k^{-1} de uma coleção contável de bolas em $\mathbb{R}^n$. Segue imediatamente disso que a coleção de toda essas tais imagens para todos os $k \in \mathbb{N}$ é uma coleção contável que recobre todo aberto $A \in \tau/\sim$, provando que $(X/\sim,\ \tau/\sim)$ possui uma base contável e, portanto, é segundo-contável. ■

O seguinte corolário é imediato e dispensa demonstrações.

Corolário 33.3 *Seja $(X,\ \tau)$ uma variedade topológica e suponha que o espaço topológico $(X/\sim,\ \tau/\sim)$ seja localmente Euclidiano e Hausdorff. Então, $(X/\sim,\ \tau/\sim)$ é uma variedade topológica.* □

Ele afirma que para sabermos se um espaço quociente de uma variedade topológica é também uma variedade topológica basta verificar no espaço quociente a propriedade de Hausdorff e a de ser localmente Euclidiano.

33.2 Variedades Diferenciáveis

• **Difeomorfismos em $\mathbb{R}^n$**

Sejam A e B dois conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ (na topologia métrica usual), A e B sendo supostamente homeomorfos. Um homeomorfismo $f : A \to B$ é dito ser um *difeomorfismo* se f e f^{-1} forem diferenciáveis[9]. Um difeomorfismo $f : A \to B$ é dito ser de classe C^r, $r \in \mathbb{N}$, se f e f^{-1} forem r-vezes diferenciáveis. Um difeomorfismo $f : A \to B$ é dito ser de classe C^∞, ou infinitamente diferenciável, se for de classe C^r para todo $r \in \mathbb{N}$, ou seja, se f e f^{-1} forem r-vezes diferenciáveis para todo $r \in \mathbb{N}$.

• **Cartas compatíveis**

Seja $(X,\ \tau)$ uma variedade topológica segundo-contável de dimensão n. Dizemos que duas cartas locais de coordenadas $(V_1,\ h_1)$ e $(V_2,\ h_2)$ são *cartas compatíveis* se $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ou, caso $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, se a função de transição $H_{V_1,\ V_2} := h_2 \circ (h_1)^{-1}$ for um difeomorfismo infinitamente diferenciável de $h_1(V_1 \cap V_2) \subset \mathbb{R}^n$ em $h_2(V_1 \cap V_2) \subset \mathbb{R}^n$. É evidente que toda carta $(V_1,\ h_1)$ é compatível consigo mesma e que se $(V_1,\ h_1)$ é compatível com $(V_2,\ h_2)$, então $(V_2,\ h_2)$ é compatível com $(V_1,\ h_1)$. Trata-se, portanto, de uma relação de compatibilidade no sentido da definição da Seção 1.1.2.7, página 70.

Chamamos a atenção, porém, para o fato de que as relações acima definidas são de compatibilidade, mas não de equivalência. Para ver isso, consideremos três cartas locais de coordenadas $(V_1,\ h_1)$, $(V_2,\ h_2)$ e $(V_3,\ h_3)$ e suponhamos que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, que $V_2 \cap V_3 = \emptyset$, mas $V_1 \cap V_3 \neq \emptyset$. Então, $(V_1,\ h_1)$ e $(V_2,\ h_2)$ são compatíveis e $(V_2,\ h_2)$ e $(V_3,\ h_3)$ também são compatíveis, mas isso não implica necessariamente que $(V_1,\ h_1)$ e $(V_3,\ h_3)$ sejam compatíveis ou não, pois isso depende de a função de transição $H_{V_1,\ V_3} := h_3 \circ (h_1)^{-1}$ ser um difeomorfismo infinitamente diferenciável ou não, fato que não decorre nem da compatibilidade entre $(V_1,\ h_1)$ e $(V_2,\ h_2)$ nem da compatibilidade entre $(V_2,\ h_2)$ e $(V_3,\ h_3)$.

Como veremos logo adiante, porém, essa relação de compatibilidade entre cartas locais de coordenadas induz uma relação de equivalência entre certos tipos de atlas.

[9] O leitor deve ser advertido do fato que, lamentavelmente, não há uniformidade dessa definição na literatura. Alguns autores definem difeomorfismos como sendo aplicações que, junto com suas inversas, são infinitamente diferenciáveis.

• **Atlas infinitamente diferenciáveis. Relação de equivalência entre atlas diferenciáveis**

Seja $(X,\ \tau)$ uma variedade topológica segundo-contável de dimensão n. Um atlas $\mathcal{A} = \{(V_\lambda,\ h_\lambda),\ \lambda \in \Lambda\}$ em $(X,\ \tau)$ é dito ser um *atlas infinitamente diferenciável* se todas as suas cartas locais de coordenadas forem compatíveis, ou seja, se todas as funções de transição $H_{V_\lambda,\ V_{\lambda'}}$ com $V_\lambda \cap V_{\lambda'} \neq \emptyset$ forem difeomorfismos infinitamente diferenciáveis de $h_\lambda(V_\lambda \cap V_{\lambda'}) \subset \mathbb{R}^n$ em $h_{\lambda'}(V_\lambda \cap V_{\lambda'}) \subset \mathbb{R}^n$.

Dois atlas infinitamente diferenciáveis $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ em $(X,\ \tau)$ são ditos ser *atlas equivalentes* se $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ for um atlas infinitamente diferenciável, ou seja, se todas as cartas locais de coordenadas de $\mathcal{A}_1$ forem compatíveis com todas as cartas locais de coordenadas de $\mathcal{A}_2$. Denotamos a equivalência de dois atlas $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ por $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$, como usual. Essa é, de fato, uma relação de equivalência entre atlas infinitamente diferenciáveis. Para ver isso, note-se que é evidente pela definição que todo atlas infinitamente diferenciável é equivalente a si mesmo e que se um atlas infinitamente diferenciável $\mathcal{A}_1$ for equivalente a um atlas infinitamente diferenciável $\mathcal{A}_2$, então $\mathcal{A}_2$ é equivalente a $\mathcal{A}_1$. O único ponto sutil é a transitividade. Sejam três atlas $\mathcal{A}_k = \{(V_{\lambda_k},\ h_{\lambda_k}),\ \lambda_k \in \Lambda_k\}$, $k = 1, 2, 3$, com $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_2 \sim \mathcal{A}_3$. Desejamos provar que duas cartas $(V_{\lambda_1},\ h_{\lambda_2}) \in \mathcal{A}_1$ e $(V_{\lambda_3},\ h_{\lambda_3}) \in \mathcal{A}_3$ quaisquer são compatíveis no sentido da definição da acima. Caso $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_3} = \emptyset$ as cartas são compatíveis. Suponhamos, então, $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_3} \neq \emptyset$. Como $\mathcal{A}_2$ é um atlas, a família de cartas locais $\{V_{\lambda_2},\ \lambda_2 \in \Lambda_2\}$ recobre X e, portanto, $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_3}$ possui um recobrimento $\{V_{\lambda_2},\ \lambda_2 \in M_2\}$ com $M_2 \subset \Lambda_2$. A função de transição $H_{V_{\lambda_1},\ V_{\lambda_3}} = h_{\lambda_3} \circ (h_{\lambda_1})^{-1} : h_{\lambda_1}(V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_3}) \to h_{\lambda_3}(V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_3})$ quando restrita a cada aberto $h_{\lambda_1}(V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_3} \cap V_{\lambda_2})$, com $\lambda_2 \in M_2$, pode ser escrita como $H_{V_{\lambda_1},\ V_{\lambda_3}} = \big(h_{\lambda_3} \circ (h_{\lambda_2})^{-1}\big) \circ \big(h_{\lambda_2} \circ (h_{\lambda_1})^{-1}\big) = H_{V_{\lambda_3},\ V_{\lambda_2}} \circ H_{V_{\lambda_2},\ V_{\lambda_1}}$, que é um difeomorfismo infinitamente diferenciável, por ser a composição de dois difeomorfismos infinitamente diferenciáveis. Com isso provamos que $H_{V_{\lambda_1},\ V_{\lambda_3}}$ é um difeomorfismo infinitamente diferenciável em todo aberto $h_{\lambda_1}(V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_3} \cap V_{\lambda_2})$, com $\lambda_2 \in M_2$, e como os V_{λ_2} com $\lambda_2 \in M_2$ recobrem $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_3}$ e h_{λ_1} é bijetora, concluímos que $H_{V_{\lambda_1},\ V_{\lambda_3}}$ é um difeomorfismo infinitamente diferenciável em todo aberto $h_{\lambda_1}(V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_3})$. Isso, por fim, estabeleceu que as cartas $(V_{\lambda_1},\ h_{\lambda_2})$ e $(V_{\lambda_3},\ h_{\lambda_3})$ são compatíveis, provando que $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_3$.

• **Estruturas infinitamente diferenciáveis**

Uma classe de equivalências de atlas infinitamente diferenciáveis segundo a definição acima é denominada uma *estrutura infinitamente diferenciável* em $(X,\ \tau)$. Denotaremos uma estrutura infinitamente diferenciável em $(X,\ \tau)$ por $\mathcal{I} \equiv \mathcal{I}(X,\ \tau)$.

A união de todos os atlas de uma dada estrutura infinitamente diferenciável $\mathcal{I}$ é dita ser o *atlas maximal* de $\mathcal{I}$. Se $\mathcal{A}$ é um atlas em $(X,\ \tau)$, sua classe de equivalência é dita ser a *estrutura infinitamente diferenciável gerada por* $\mathcal{A}$. A união de todos os atlas pertencentes à estrutura infinitamente diferenciável gerada por $\mathcal{A}$ é dito ser o *atlas maximal gerado por* $\mathcal{A}$.

• **Variedade infinitamente diferenciável**

Uma variedade topológica segundo-contável que admite ao menos um atlas infinitamente diferenciável é dita ser uma *variedade infinitamente diferenciável*, ou uma *variedade de classe* C^∞. Mais precisamente, uma *variedade infinitamente diferenciável* é uma tripla $(X,\ \tau,\ \mathcal{I})$, onde $(X,\ \tau)$ é uma variedade topológica segundo-contável e $\mathcal{I}$ é uma estrutura infinitamente diferenciável em $(X,\ \tau)$.

Com um certo abuso de linguagem, iremos nos referir frequentemente a uma variedade infinitamente diferenciável $(X,\ \tau,\ \mathcal{I})$ simplesmente por $(X,\ \mathcal{I})$ (omitindo a topologia), ou mesmo por X (omitindo também a estrutura infinitamente diferenciável). Tais simplificações ocorrem tipicamente quando se fazem afirmações onde a topologia e a estrutura infinitamente diferenciável especificamente consideradas estão implícitas. Um outro abuso de linguagem frequentemente adotado é o de denominar "variedade infinitamente diferenciável" simplesmente por "variedade diferenciável".

• **Aplicações diferenciáveis entre variedades diferenciáveis**

A noção de diferenciabilidade de funções de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$ é bem conhecida e podemos generalizá-la para funções entre variedades diferenciáveis usando, para tal, o fato de que por meio da introdução de coordenadas locais, podemos considerar funções entre variedades como funções de abertos de algum $\mathbb{R}^m$ em algum $\mathbb{R}^n$. Sejam M_1 e M_2 duas variedades diferenciáveis de dimensão m_1 e m_2, respectivamente. Sejam $\mathcal{A}_{M_1} = \{(A^1_\alpha,\ h^1_\alpha),\ \alpha \in \Lambda_1\}$ e $\mathcal{A}_{M_2} = \{(A^2_\beta,\ h^2_\beta),\ \beta \in \Lambda_2\}$ atlas infinitamente diferenciáveis em M_1 e M_2, respectivamente. Uma função contínua $\varphi : M_1 \to M_2$ de M_1 em M_2 é dita ser *diferenciável* se para todas as cartas locais $(A^1_\alpha,\ h^1_\alpha) \in \mathcal{A}_{M_1}$ e $(A^2_\beta,\ h^2_\beta) \in \mathcal{A}_{M_2}$ para as quais valha $\varphi(A^1_\alpha) \cap A^2_\beta \neq \emptyset$ as aplicações $h^2_\beta \circ \varphi \circ (h^1_\alpha)^{-1}$ dos abertos $h^1_\alpha(A^1_\alpha) \subset \mathbb{R}^{m_1}$ nos abertos $h^2_\beta(A^2_\beta) \subset \mathbb{R}^{m_2}$ forem diferenciáveis.

É fácil constatar que se φ é diferenciável em relação aos atlas infinitamente diferenciáveis $\mathcal{A}_{M_1}$ e $\mathcal{A}_{M_2}$ ela o será em

relação a quaisquer outros atlas das mesmas respectivas estruturas infinitamente diferenciáveis.

• **Difeomorfismos entre variedades**

Uma noção de grande relevância é a de *difeomorfismo* entre variedades infinitamente diferenciáveis. Sejam M_1 e M_2 duas variedades diferenciáveis dotadas de estruturas infinitamente diferenciáveis $\mathcal{I}_{M_1}$ e $\mathcal{I}_{M_2}$, respectivamente. Uma função $f : M_1 \to M_2$ é dita ser um *difeomorfismo* entre $(M_1,\ \mathcal{I}_{M_1})$ e $(M_2,\ \mathcal{I}_{M_2})$ se for um homeomorfismo e se f e sua inversa f^{-1} forem diferenciáveis (no sentido da definição acima). Note-se que para que f seja um homeomorfismo é necessário que M_1 e M_2 tenham a mesma dimensão.

Um difeomorfismo $f : M_1 \to M_2$ é dito ser um *difeomorfismo suave*, ou um *difeomorfismo infinitamente diferenciável*, se f e sua inversa f^{-1} forem infinitamente diferenciáveis (no sentido da definição acima).

Duas variedades diferenciáveis $(M,\ \mathcal{I}_M)$ e $(N,\ \mathcal{I}_N)$ são ditas ser *variedades difeomorfas* se existir um difeomorfismo $f : M \to N$. Dada uma coleção de variedades diferenciáveis $\mathcal{M} = \{(M_\gamma,\ \mathcal{I}_{M_\gamma}),\ \gamma \in \Gamma\}$, a relação de difeomorfia estabelece uma relação de equivalência em $\mathcal{M}$, como é fácil constatar. As classes de equivalência de $\mathcal{M}$ por essa relação são ditas *classes de difeomorfia*. Muitas propriedades de variedades diferenciáveis podem ser estabelecidas dentro de classes de difeomorfia e permitem, assim, uma classificação de variedades diferenciáveis de acordo com as mesmas, daí a relevância dessa noção.

Noções análogas existem para difeomorfismos suaves: duas variedades diferenciáveis $(M,\ \mathcal{I}_M)$ e $(N,\ \mathcal{I}_N)$ são ditas ser *variedades suavemente difeomorfas* se existir um difeomorfismo suave $f : M \to N$. As correspondentes classes são denominadas *classes de difeomorfia suave*.

• **Homeotipos e difeotipos**

Há uma nomenclatura variada a respeito dessas noções com a qual o estudante deve se familiarizar, a despeito do fato de, por vezes, meramente dizer a mesma coisa com palavras distintas.

Diz-se que duas variedades topológicas M_1 e M_2 são *idênticas* módulo *homeomorfismos*, ou que possuem o mesmo *homeotipo*, se existir um homeomorfismo $f : M_1 \to M_2$, ou seja, se forem homeomorfas.

Diz-se que duas variedades diferenciáveis M_1 e M_2 são *idênticas* módulo *difeomorfismos (suaves)*, ou que possuem o mesmo *difeotipo* (suave), se existir um difeomorfismo (suave) $f : M_1 \to M_2$, ou seja, se forem (suavemente) difeomorfas.

Sejam $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ duas estruturas diferenciáveis em uma mesmo conjunto M e suponha que $(M,\ \mathcal{I}_1)$ e $(M,\ \mathcal{I}_2)$ sejam (suavemente) difeomorfas. É comum nesse caso, dizer, com um certo abuso de linguagem, que as estruturas diferenciáveis $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ são (suavemente) difeomorfas ou que são idênticas *módulo* difeomorfismos (suaves).

Claro está que duas variedades diferenciáveis com o mesmo difeotipo têm também o mesmo homeotipo.

• **Difeomorfismos locais**

Sejam M_1 e M_2 duas variedades diferenciáveis. Uma função $f : M_1 \to M_2$ é dita ser um *difeomorfismo local* em um ponto $p \in M_1$ se existirem vizinhanças V_1 de p e V_2 de $f(p)$ tais que $f : V_1 \to V_2$ é um difeomorfismo. Aqui, V_1 e V_2 devem ser entendidas como subvariedades de M_1 e M_2, respectivamente.

• **Exemplos na reta real $\mathbb{R}$**

Vamos discutir um exemplo simples e importante e que deve esclarecer certas ideias. Considere-se a reta real $\mathbb{R}$ com a topologia usual $\tau_{\mathbb{R}}$.

Considere-se o atlas $\mathcal{A}_1$ composto de uma única carta local de coordenadas $(\mathbb{R},\ h_1)$, onde $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a carta de coordenadas dada por $h_1(x) = x$ (a aplicação identidade em $\mathbb{R}$). Seja $\mathcal{I}_1$ a estrutura diferenciável à qual $\mathcal{A}_1$ pertence. Então, $M_1 = (\mathbb{R},\ \tau_{\mathbb{R}},\ \mathcal{I}_1)$ compõe uma variedade diferenciável, denominada *reta real padrão*.

Considere-se agora uma segunda construção. Tome-se a reta real $\mathbb{R}$ com a topologia usual $\tau_{\mathbb{R}}$, mas considere-se o atlas $\mathcal{A}_2$ composto de uma única carta local de coordenadas $(\mathbb{R},\ h_2)$, onde $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a carta de coordenadas dada por $h_2(x) = x^3$. Seja $\mathcal{I}_2$ a estrutura diferenciável à qual $\mathcal{A}_2$ pertence. Então, $M_2 = (\mathbb{R},\ \tau_{\mathbb{R}},\ \mathcal{I}_2)$ compõe novamente uma variedade diferenciável.

As variedades diferenciáveis M_1 e M_2, acima, são distintas, pois possuem estruturas diferenciáveis distintas. De fato, a carta local de coordenadas $(\mathbb{R},\ h_1)$ é incompatível com a carta local de coordenadas $(\mathbb{R},\ h_2)$, pois a função de transição $h_1 \circ h_2^{-1}$ é dada na carta local comum $\mathbb{R}$ por $h_1 \circ h_2^{-1}(x) = x^{1/3}$, a qual *não* é uma função diferenciável de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ (sua

derivada diverge em $x = 0$).

Vemos disso que mesmo a reta real pode admitir mais de uma estrutura diferenciável distinta. É de se notar, porém, que as duas variedades diferenciáveis acima são suavemente difeomorfas, ou seja, possuem o mesmo difeotipo.

De fato, seja $f : M_1 \to M_2$ dada por $f(x) = x^{1/3}$. É fácil ver que f é um homeomorfismo (verifique!) e temos que $h_2 \circ f \circ h_1^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sua inversa $h_1 \circ f^{-1} \circ h_2^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são dadas por $\big(h_2 \circ f \circ h_1^{-1}\big)(x) = x$ e $\big(h_1 \circ f^{-1} \circ h_2^{-1}\big)(x) = x$, respectivamente (verifique!). Ambas as funções são infinitamente diferenciáveis e, portanto, $f : M_1 \to M_2$ é um difeomorfismo suave.

E. 33.3 *Exercício*. Seja a reta real $\mathbb{R}$ com a topologia usual $\tau_{\mathbb{R}}$, mas considere-se o atlas $\mathcal{A}_{k,\,x_0}$ (com $k \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$) composto de uma única carta local de coordenadas $(\mathbb{R},\ h_{k,\,x_0})$, onde $h_{k,\,x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a carta de coordenadas dada por $h_{k,\,x_0}(x) = (x - x_0)^{2k-1}$. Novamente, seja $\mathcal{I}_{k,\,x_0}$ a estrutura diferenciável à qual $\mathcal{A}_{k,\,x_0}$ pertence e seja $M_{k,\,x_0} = (\mathbb{R},\ \tau_{\mathbb{R}},\ \mathcal{I}_{k,\,x_0})$ a correspondente variedade diferenciável. Quando duas cartas locais de coordenadas $(\mathbb{R},\ h_{k,\,x_0})$ e $(\mathbb{R},\ h_{k',\,x'_0})$ são compatíveis entre si? Mostre que as diferentes variedades $M_{k,\,x_0}$ são suavemente difeomorfas. ✠

Aprendemos do exemplo das variedades M_1 e M_2, acima, que um mesmo espaço topológico como $(\mathbb{R},\ \tau_{\mathbb{R}})$ pode admitir mais de uma estrutura diferenciável, mas que pode ocorrer que as respectivas variedades diferenciáveis sejam suavemente difeomorfas e, portanto, ainda assim equivalentes para os propósitos da Análise de Variedades Diferenciáveis.

A questão relevante que se coloca, portanto, é saber se pode haver variedades diferenciáveis que possuam o mesmo homeotipo, mas não o mesmo difeotipo. Façamos uma breve discussão sobre essa profunda questão.

• **Multiplicidade de estruturas diferenciáveis *módulo* difeomorfismos suaves**

Nem toda variedade topológica segundo-contável admite um atlas infinitamente diferenciável e, portanto, nem toda variedade topológica segundo-contável possui uma estrutura infinitamente diferenciável. É, porém, verdade (mas nada óbvio) que pode haver várias estruturas infinitamente diferenciáveis não suavemente difeomorfas em uma variedade topológica segundo-contável.

Segundo teoremas demonstrados por Radon[10] e outros (vide [358]), a multiplicidade de estruturas infinitamente diferenciáveis não suavemente difeomorfas só pode ocorrer em variedades diferenciáveis de dimensão 4 ou mais. Historicamente, o primeiro exemplo encontrado de uma variedade que admite mais de uma estrutura diferenciável *módulo* difeomorfismos suaves foi a esfera $\mathbb{S}^7$, descoberta feita por Milnor[11] em 1956. A esfera $\mathbb{S}^7$ admite 15 estruturas infinitamente diferenciáveis não difeomorfas (ou 28 se levarmos em conta homeomorfismos que alteram a orientação de $\mathbb{S}^7$). Os espaços $\mathbb{R}^n$ com $n \neq 4$, em particular, admitem uma única estrutura diferenciável *módulo* difeomorfismos suaves, mas o espaço $\mathbb{R}^4$ admite uma coleção não contável de estruturas diferenciáveis *módulo* difeomorfismos suaves, um célebre resultado obtido por Freedman[12] e Donaldson[13] entre 1982 e 1983. Mais que isso, ocorrem em 4 dimensões infinitas variedades ditas exóticas, as quais são (globalmente) homeomorfas a $\mathbb{R}^4$ mas não difeomorfas ao mesmo. É até o presente (2017) uma questão em aberto saber quantas estruturas infinitamente diferenciáveis não difeomorfas existem na esfera $\mathbb{S}^4$. Para uma discussão mais detalhada sobre estruturas infinitamente diferenciáveis, vide [240].

Em Física, particularmente no contexto da Teoria da Relatividade Geral, é uma questão em aberto saber se a existência de estruturas infinitamente diferenciáveis não difeomorfas em uma dada variedade topológica, possui relevância, mas é de se acreditar que sim, pois leis físicas são usualmente expressas em termos de equações diferenciáveis e, portanto, como tais, devem ser formuladas em estruturas infinitamente diferenciais específicas. Há, a respeito desse tema, uma pequena mas crescente literatura. Vide, e.g., [32] e veja também E. Witten, *"Global Gravitational Anomalies"*, Commun. Math. Phys. **100**, 197–229 (1985) ou Torsten Aßelmeyer and Carl H. Brans, *"Cosmological Anomalies and Exotic Smoothness Structures"*, Gen. Rel. Grav. **34**, 1767 (2002). Sabe-se hoje, por exemplo, que a existência de métricas de Einstein (soluções das equações de Einstein no vácuo) em quatro dimensões depende do difeotipo (não do homeotipo) da variedade considerada e, portanto, da classe de equivalência das estruturas diferenciáveis módulo difeomorfismos (para o caso Riemanniano, vide [54]).

[10] Johann Karl August Radon (1887–1956).

[11] John Willard Milnor (1931–). O trabalho original é John Milnor, *"On Manifolds Homeomorphic to the 7-Sphere"*. The Annals of Mathematics, **64**, No. 2, 399-405 (1956).

[12] Michael Hartley Freedman (1951–). A referência original é: M. H. Freedman, "The topology of four-dimensional manifolds", Journal of Differential Geometry **17** (3): 357–453 (1982).

[13] Sir Simon Kirwan Donaldson (1957–). A referência original é: S. K. Donaldson, *"Self-dual connections and the topology of smooth 4-manifolds"*. Bull. Amer. Math. Soc. **8** , 81–84 (1983).

• **Variedades de classe C^k**

Na definição de variedade diferenciável que apresentamos acima as funções de transição são supostas serem infinitamente diferenciáveis, daí denominarmos tais variedades como variedades de classe C^∞. De maneira análoga podemos definir variedades de classe C^k, com $k \in \mathbb{N}$, como sendo aquelas que admitem funções de transição apenas k-vezes diferenciáveis. É importante, porém, chamarmos a atenção do leitor para o seguinte resultado:

Teorema 33.1 *Seja $k \in \mathbb{N}$. Toda variedade de classe C^k é difeomorfa*[14] *a uma variedade de classe C^∞. Seja $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ com $1 \leq k < l \leq \infty$. Se duas variedades de classe C^l forem C^k-difeomorfas, então elas são também C^l-difeomorfas.* □

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [240]. Grosseiramente, o mesmo afirma que para a maioria dos propósitos estruturais o estudo de variedades de classe C^∞ engloba o de variedades de classe C^k. No presente texto consideraremos apenas variedades de classe C^∞.

• **Produtos de variedades diferenciáveis**

Se $(X_1,\ \tau_1,\ \mathcal{I}_1)$ e $(X_2,\ \tau_2,\ \mathcal{I}_2)$ são duas variedades diferenciáveis de dimensões n_1 e n_2, respectivamente, definimos a *variedade produto* de ambas, denotada por $(X_1 \times X_2,\ \tau_1 \times \tau_2,\ \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2)$, como sendo a variedade $(n_1 + n_2)$-dimensional constituída pelo produto Cartesiano $X_1 \times X_2$ com a topologia produto $\tau_1 \times \tau_2$ e com a estrutura infinitamente diferenciável denotada por $\mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$ gerada pelo atlas $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, onde $\mathcal{A}_k$ pertence à estrutura infinitamente diferenciável $\mathcal{I}_k$, $k = 1,\ 2$. O produto $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, por sua vez, é o atlas formado por todas as cartas da forma $(V_1 \times V_2,\ h_1 \times h_2)$, com $(V_k,\ h_k)$ sendo cartas locais de coordenadas de $\mathcal{A}_k$, $k = 1,\ 2$. O homeomorfismo $h_1 \times h_2$ é definido em $V_1 \times V_2$ e sua imagem para cada $(x_1,\ x_2) \in V_1 \times V_2$ é o produto Cartesiano $h_1(x_1) \times h_2(x_2)$ contido no produto de abertos $h_1(V_1) \times h_2(V_2) \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$. É um exercício simples mostrar, fazendo uso da regra de Leibniz, que as funções de transição associadas ao produto de cartas locais de coordenadas são diferenciáveis.

• **Funções diferenciáveis em variedades diferenciáveis**

Seja $(X,\ \tau,\ \mathcal{I})$ uma variedade diferenciável e seja $\mathcal{A} = \big\{(V_\lambda,\ h_\lambda),\ \lambda \in \Lambda\big\}$ um atlas de $\mathcal{I}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita ser diferenciável segundo a estrutura diferenciável $\mathcal{I}$ se para toda carta de coordenadas h_λ de $\mathcal{A}$ a função $f \circ h_\lambda^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ for diferenciável. É fácil constatar (faça-o!) que essa definição independe do particular atlas $\mathcal{A}$ tomado em $\mathcal{I}$, mas essa noção de diferenciabilidade de funções depende da estrutura diferenciável $\mathcal{I}$ adotada.

Analogamente, se $(X,\ \tau,\ \mathcal{I})$ uma variedade infinitamente diferenciável (ou de classe C^k), dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é infinitamente diferenciável (k-vezes diferenciável) segundo a estrutura diferenciável $\mathcal{I}$ se todas as funções $f \circ h_\lambda^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forem infinitamente diferenciáveis (k-vezes diferenciáveis).

• **Alguns comentários gerais**

É muito comum, e adotaremos essa prática aqui também, que uma variedade diferenciável seja especificada, não pela apresentação de uma estrutura diferenciável completa, mas apenas por um atlas, de sorte que fica subentendido que a estrutura diferenciável adotada é aquela que contém o atlas utilizado. Alguns autores optam também por assumir que o atlas utilizado para especificar uma variedade diferenciável seja um atlas maximal. Essa precaução pode ser útil ao simplificar certas coisas, mas é frequentemente dispensável.

• **Orientabilidade**

Seja uma variedade diferenciável X de dimensão m e seja $\mathcal{A}$ um atlas em X. Sejam $(V_1,\ h_1) \in \mathcal{A}$ e $(V_2,\ h_2) \in \mathcal{A}$ duas cartas locais de coordenadas com $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ e seja $H_{V_1,\,V_2} := h_{V_2} \circ (h_{V_1})^{-1}$ a correspondente função de transição, que mapeia bijetivamente um aberto de $\mathbb{R}^n$ em outro aberto de $\mathbb{R}^n$, sendo diferenciável e com inversa diferenciável.

Dizemos que a função de transição *preserva a orientação* se seu determinante Jacobiano for positivo.

Um atlas é dito ser um *atlas orientado* se todas as suas funções de transição preservarem a orientação.

Uma variedade diferenciável é dita ser uma *variedade orientada* se admitir ao menos um atlas orientado.

O exemplo mais simples de uma variedade não orientada é a *tira de Möbius*, apresentada à página 1735. Outros exemplos são a *garrafa de Klein*, apresentada à página 1736, e o espaço projetivo bidimensional, Seção 33.4.6, página 1737.

[14] A noção de difeomorfismo entre variedades encontra-se definida à página 1688.

33.2.1 Partições da Unidade Diferenciáveis

Conforme observamos à página 1683, item 7, toda variedade topológica segundo-contável possui partições da unidade subordinadas a recobrimentos por abertos. No caso particular de variedades diferenciáveis, é possível estabelecer a existência de partições da unidade subordinadas a recobrimentos por abertos que tenham adicionalmente a propriedade de serem compostas por funções *infinitamente diferenciáveis* . Esse fato é de especial relevância em diversas considerações de natureza estrutural sobre variedades diferenciáveis (como na demonstração de existência de métricas Riemannianas e na teoria de integração de n-formas) e dele trataremos na presente seção. Discussões semelhantes podem ser encontradas, e.g., em [527] e [76], as quais seguimos parcialmente. A afirmativa que desejamos fazer é:

Teorema 33.2 *Seja M uma variedade diferenciável e seja $\mathcal{U} \equiv \{U_\lambda,\ \lambda \in \Lambda_0\}$ um recobrimento de M por abertos. Então, existe uma partição da unidade contável $\{P_a : M \to [0,\ 1],\ a \in \mathbb{N}\}$ subordinada a esse recobrimento (para todo $a \in \mathbb{N}$ existe $\lambda_a \in \Lambda_0$ com $\operatorname{supp} P_a \subset U_{\lambda_a}$) tal que todas as funções P_a, $a \in \mathbb{N}$, são infinitamente diferenciáveis e possuem suporte compacto.* □

Prova. Vamos considerar um refinamento $\mathcal{B}' \equiv \{B'_\lambda,\ \lambda \in \Lambda_1\}$ de $\mathcal{U}$ obtido tomando intersecções dos abertos U_λ de $\mathcal{U}$ com os abertos A_α de um atlas infinitamente diferenciável $\mathcal{A} = \big\{\big(A_\alpha,\ h_\alpha\big),\ \alpha \in \Lambda_2\big\}$ de M. Como M é paracompacto, $\mathcal{B}'$ possui um refinamento localmente finito $\mathcal{B} \equiv \{B_\lambda,\ \lambda \in \Lambda_3\}$. Note-se que, por construção, cada $B_\lambda \in \mathcal{B}$ está no domínio de alguma carta local h_λ de $\mathcal{A}$.

Como observado à página 1683, item 6 (vide também o Teorema 32.26, página 1648), $\mathcal{B}$ possui um refinamento $\mathcal{C} \equiv \{C_m,\ m \in \mathbb{N}\}$, contável e localmente finito, por abertos relativamente compactos, de sorte que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $\lambda_m \in \Lambda_3$ tal que $C_m \subset \overline{C_m} \subset B_{\lambda_m}$.

Por construção, cada B_λ está no domínio de uma carta de coordenadas h_λ, $\lambda \in \Lambda_3$ e, sem perda de generalidade, suporemos que para cada λ a imagem de B_λ por h_λ contenha no seu interior, para algum $r_\lambda > 0$, o hipercubo fechado $K_n(2r_\lambda,\ 0)$ de $\mathbb{R}^n$ (n sendo a dimensão de M). Aqui para todo $\ell > 0$ denotamos por $K_n(2\ell,\ 0) \subset \mathbb{R}^n$ o hipercubo fechado de arestas 2ℓ centrado na origem: $K_n(2\ell,\ 0) := \big\{(y^1,\ \ldots,\ y^n) \in \mathbb{R}^n \big|\ |y_k| \leq \ell,\ \forall k \in \{1,\ \ldots,\ n\}\big\}$.

Para cada $r > 0$ a função $f_r : \mathbb{R} \to [0,\ \infty)$ dada por

$$f_r(x) \ := \begin{cases} \exp\Big(-\frac{1}{(x+r)^2} - \frac{1}{(x-r)^2}\Big)\,, & \text{se } |x| < r\,, \\ 0\,, & \text{se } |x| \geq r\,, \end{cases}$$

é contínua, infinitamente diferenciável e possui suporte compacto (a saber, o intervalo fechado $[-r,\ r]$), como facilmente se constata. O mesmo vale para a função $g_r : \mathbb{R}^n \to [0,\ \infty)$ definida por $g_r(x^1,\ \ldots,\ x^n) := f_r(x^1) \cdots f_r(x^n)$. É de se observar que o suporte de g_r é $K_n(2r, 0)$, que é compacto.

Para cada $C_m \in \mathcal{C}$ consideremos um conjunto $B_{\lambda_m} \in \mathcal{B}$ como acima contido no domínio de uma carta h_{λ_m}, como acima, com $C_m \subset \overline{C_m} \subset B_{\lambda_m}$ e seja $c \in \overline{C_m} \subset B_{\lambda_m}$. Denotemos $h_{\lambda_m}(c)$ (as coordenadas de c pela carta de coordenadas h_{λ_m}) por $h_{\lambda_m}(c) = (x_c^1,\ \ldots,\ x_c^n) \equiv x_c$. Escolhendo $r' \equiv r'(c,\ m) > 0$ pequeno o suficiente, a função $g_{r',\,c}(x) := g_{r'}(x - x_c) = f_{r'}(x^1 - x_c^1) \cdots f_{r'}(x^n - x_c^n)$ terá suporte inteiramente contido em $h_{\lambda_m}(B_{\lambda_m})$. Podemos agora considerar a função definida em cada ponto $(x^1,\ \ldots,\ x^n)$ da imagem de $h_{\lambda_m}(B_{\lambda_m})$ por $g_{r',\,c}(x^1,\ \ldots,\ x^n)$. Isso permite-nos definir uma função $G_{r',\,c,\,m} : M \to [0,\ \infty)$ por

$$G_{r',\,c,\,m}(p) \ := \begin{cases} g_{r',\,c}\Big(h_{\lambda_m}(p)\Big)\,, & \text{para } p \in B_{\lambda_m}\,, \\ 0\,, & \text{para } p \notin B_{\lambda_m}\,, \end{cases}$$

com

$$g_{r',\,c}\Big(h_{\lambda_m}(p)\Big) \ = \ g_{r',\,c}\Big(\pi_1\big(h_{\lambda_m}(p)\big),\ \ldots,\ \pi_n\big(h_{\lambda_m}(p)\big)\Big) \ = \ f_{r'}\Big(\pi_1\big(h_{\lambda_m}(p)\big) - x_c^1\Big) \cdots f_{r'}\Big(\pi_n\big(h_{\lambda_m}(p)\big) - x_c^n\Big)\,,$$

onde $\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é definida por $\pi_k(x^1, \ldots, x^n) = x^k$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ (π_k é a projeção sobre a k-ésima coordenada), ou seja, expressando diretamente em termos das coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$, $G_{r', c, m}$ é definida por

$$G_{r', c, m}(p) := \begin{cases} g_{r', c}(x) = f_{r'}(x^1 - x_c^1) \cdots f_{r'}(x^n - x_c^n)\,, \text{ com } h_{\lambda_m}(p) = (x^1, \ldots, x^n), & \text{para } p \in B_{\lambda_m}\,, \\ 0\,, & \text{para } p \notin B_{\lambda_m}\,. \end{cases}$$

Observe-se que $G_{r', c, m}(c) = f_{r'}(0)^n > 0$.

É evidente pela construção que $G_{r', c, m}$ é infinitamente diferenciável (pois as funções g_r, π_k e h_λ o são) e que o suporte de $G_{r', c, m}$ é compacto (lembrar do Teorema 32.5, página 1614, e do fato que $h_{\lambda_m}^{-1}$ é contínua) e está contido em B_{λ_m}. É também claro que o conjunto $E_c := \{p \in M | \, G_{r', c, m}(p) > 0\}$ é aberto (por ser a préimagem de $(0, \infty)$ pela função contínua $G_{r', c, m}$). Como $c \in E_c$ para cada $c \in \overline{C_m}$ (pois $G_{r', c, m}(c) > 0$ como observado acima), a coleção $\{E_c, \ c \in \overline{C_m}\}$ é um recobrimento por abertos do compacto $\overline{C_m}$. Assim, $\overline{C_m}$ possui um recobrimento por abertos finito $\{E_{c_1}, \ldots, E_{c_j}\}$ e, portanto, a função $G_m : M \to \mathbb{R}$ definida por $G_m(p) := G_{r', c_1, m}(p) + \cdots + G_{r', c_j, m}(p)$, $p \in M$, é também infinitamente diferenciável, tem suporte compacto e satisfaz $\overline{C_m} \subset \operatorname{supp}(G_m) \subset B_{\lambda_m}$.

Concluímos, então, que para cada $m \in \mathbb{N}$, é possível encontrar uma função infinitamente diferenciável de suporte compacto $G_m : M \to [0, \infty)$ com $\overline{C_m} \subset \operatorname{supp}(G_m) \subset B_{\lambda_m}$. Note-se também que, como os conjuntos C_m recobrem M, existe para cada $p \in M$ algum G_m com $G_m(p) > 0$.

Como $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são localmente finitos, cada $p \in M$ possui uma vizinhança V_p que intersecta apenas uma coleção finita de elementos de $\mathcal{B}$ e de $\mathcal{C}$ e, portanto, de elementos de $\{\operatorname{supp} G_m, \ m \in \mathbb{N}\}$. Conforme argumentado na demonstração do Teorema 32.25, página 1647, a função em M dada pela soma $\sum_{m \in \mathbb{N}} G_m$ está bem definida e é infinitamente diferenciável, pois para cada $p \in M$ comparece na soma apenas um número finito de somandos não nulos. É também claro do exposto acima que $\sum_{m \in \mathbb{N}} G_m(p) > 0$ para todo $p \in M$.

As funções $P_a : M \to [0, 1]$, $a \in \mathbb{N}$, definidas por $P_a := G_a / \sum_{m \in \mathbb{N}} G_m$ são infinitamente diferenciáveis, têm suporte compacto, satisfazem $\operatorname{supp} P_a = \operatorname{supp} G_a \subset B_{\lambda_a}$ e, portanto, $\{\operatorname{supp} P_a, \ a \in \mathbb{N}\}$ é um recobrimento localmente finito de M. Além disso, $\sum_{a \in \mathbb{N}} P_a(p) = 1$ para todo $p \in M$ e, portanto, $\{P_a, \ a \in \mathbb{N}\}$ compõe uma partição da unidade infinitamente diferenciável subordinada a $\mathcal{B}$ e, portanto, a $\mathcal{U}$. ■

O seguinte corolário imediato é obtido por uma mera junção de resultados anteriores e o mencionamos aqui para referência futura.

Corolário 33.4 *Se é M uma variedade diferenciável, então M possui um atlas infinitamente diferenciável contável $\{(V_m, \ h_m), \ m \in \mathbb{N}\}$ tal que $\{V_m, \ m \in \mathbb{N}\}$ é um recobrimento localmente finito de M composto por conjuntos abertos relativamente compactos e existe uma partição da unidade contável $\{P_a : M \to [0, \ 1], \ a \in \mathbb{N}\}$ subordinada a esse recobrimento tal que todas as funções P_a, $a \in \mathbb{N}$, são infinitamente diferenciáveis e possuem suporte compacto.* □

Prova. A existência do atlas $\{(V_m, \ h_m), \ m \in \mathbb{N}\}$ com as propriedades mencionadas foi estabelecida na Proposição 33.2, página 1684. A existência da partição da unidade $\{P_a : M \to [0, \ 1], \ a \in \mathbb{N}\}$ subordinada ao recobrimento $\{V_m, \ m \in \mathbb{N}\}$ e com as demais propriedades mencionadas decorre do Teorema 33.2. ■

• **Estendendo globalmente funções infinitamente diferenciáveis**

A existência de partições da unidade diferenciáveis expressa no Teorema 33.2, página 1691, é um fato de grande importância estrutural na teoria das variedades diferenciáveis. Uma das razões para tal importância encontra-se expressa na proposição que segue e reside no fato de que a existência de partições da unidade diferenciáveis permite estender a toda uma variedade diferenciável M funções diferenciáveis definidas apenas em cartas locais de um atlas de M.

Proposição 33.5 *Seja M uma variedade diferenciável dotada de um atlas infinitamente diferenciável $\big\{(A_\lambda, \ h_\lambda), \ \lambda \in \Lambda\big\}$ e seja para cada $\lambda \in \Lambda$ uma função $f_\lambda : A_\lambda \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciável. Seja $\big\{P_a : M \to [0, \ 1], \ a \in \mathbb{N}\big\}$ uma partição da unidade subordinada ao recobrimento $\big\{A_\lambda, \ \lambda \in \Lambda\big\}$ de M composta por funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto, cuja existência foi garantida no Teorema 33.2, de modo que a cada $a \in \mathbb{N}$ existe um $\lambda_a \in \Lambda$ com $\operatorname{supp} P_a \subset A_{\lambda_a}$. Então, $f : M \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) := \sum_{a \in \mathbb{N}} P_a(p) f_{\lambda_a}(p)$, $p \in M$, está bem definida e é uma função infinitamente diferenciável em toda M.* □

Prova. Cada função $P_a f_{\lambda_a}$ é infinitamente diferenciável e tem suporte contido em $\operatorname{supp} P_a$, anulando-se fora desse conjunto. Cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança onde apenas uma coleção finita de P_a's é não nula (pois $\{P_a, \ a \in \mathbb{N}\}$ compõe uma partição da unidade). Logo, $\sum_{a \in \mathbb{N}} P_a(p) f_{\lambda_a}(p)$ é uma soma finita nessa vizinhança sendo, portanto, uma função infinitamente diferenciável na mesma. ■

33.2.2 A Noção de Espaço Tangente

Uma das características mais importantes das variedades diferenciáveis é a possibilidade de dotar cada um de seus pontos de um espaço vetorial especial, de mesma dimensão que a variedade, denominado *espaço tangente*. *Grosso modo*, o espaço tangente a um ponto é o espaço das velocidades de todas as curvas diferenciáveis que passam por esse ponto. Sobre o espaço tangente diversas outras estruturas importantes podem ser construídas, como formas diferenciais, campos vetoriais e tensoriais, tensores métricos, conexões, tensores de curvatura etc. Trata-se, portanto, de um objeto de importância central na Geometria Diferencial e em suas aplicações em Física.

• **Espaço tangente. Uma primeira caracterização**

Seja V uma variedade diferenciável de dimensão n dotada de um atlas infinitamente diferenciável $\mathcal{A} = \{(A_\lambda, \ h_\lambda), \ \lambda \in \Lambda\}$. Uma curva contínua em V é uma função contínua $c : I \to V$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Se escolhermos I pequeno o suficiente podemos sempre supor que a curva c não se autointercepta, ou seja, que $c : I \to V$ é injetora. Seja $p \in V$ e seja $\mathscr{C}_p$ a coleção de todas as curvas contínuas injetoras $c : I \to V$ que passam por p, com I sendo algum intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Sem perda de generalidade suporemos que $0 \in I$ e $c(0) = p$ para toda curva de $\mathscr{C}_p$.

Recordemos que no caso familiar de V ser o espaço $\mathbb{R}^n$ (com a topologia usual), uma curva $c : I \to \mathbb{R}^n$ que passa por $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ é dada por $c(t) = \big(c_1(t), \ldots, c_n(t)\big)$ com $c_k : I \to \mathbb{R}$ sendo contínuas e satisfazendo $c_k(0) = p_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$. O vetor tangente a c em p é o vetor de $\mathbb{R}^n$ definido por $\dot{c}(0) = \big(\dot{c}_1(0), \ldots, \dot{c}_n(0)\big)$. Para que essa expressão faça sentido devemos, obviamente, supor que cada função c_k (e, portanto, c) seja diferenciável em $t = 0$.

Nossa intenção no que segue é considerar curvas em variedades diferenciáveis gerais e definir a noção de vetor tangente a uma curva c em um ponto p pela qual passa. Como no caso das familiares curvas em $\mathbb{R}^n$, a introdução dessa noção requer que a curva seja diferenciável em p, e precisamos definir o que isso significa. No caso de curvas em $\mathbb{R}^n$, vetores tangentes são vetores em $\mathbb{R}^n$, o espaço ambiente no qual a curva passa. Seguindo a filosofia geral da geometria diferencial, procuraremos definir a noção de vetor tangente de forma *intrínseca*, sem referência a um espaço ambiente $\mathbb{R}^m$ onde a curva esteja mergulhada. Há diversas maneiras de fazer isso, todas bastante engenhosas, e no que segue descreveremos duas delas.

O primeiro passo é definirmos a noção de curva diferenciável em uma variedade. Como a noção de diferenciabilidade está primariamente definida em espaços $\mathbb{R}^n$, a ideia é utilizarmos as cartas locais de coordenadas para transportarmos essa noção para dentro das variedades diferenciáveis. Se $c \in \mathscr{C}_p$ estiver contida em uma carta local $A_\lambda \ni p$ (o que sempre pode ser obtido, tomando-se I pequeno o suficiente), dizemos que c é diferenciável em p se a curva em $\mathbb{R}^n$ definida por $h_\lambda \circ c : I \to h_\lambda(A_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$ for diferenciável em $t = 0$. É de se notar que se houver duas cartas locais A_λ e $A_{\lambda'}$ que também contém p, a compatibilidade das cartas $(A_\lambda, \ h_\lambda)$ e $(A_{\lambda'}, \ h_{\lambda'})$ implica que $h_{\lambda'} \circ c$ é diferenciável se e somente se $h_\lambda \circ c$ o for. Nesse sentido, a noção de uma curva ser diferenciável é respeitada por todos os atlas de uma mesma estrutura infinitamente diferenciável.

Sejam $(A_\lambda, \ h_\lambda)$ e $(A_{\lambda'}, \ h_{\lambda'})$ duas cartas locais de coordenadas compatíveis. Para fixar alguma notação, denotaremos por pontos de $h_\lambda(A_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$ por $\big(x^1, \ldots, x^n\big)$ e os pontos de $h_{\lambda'}(A_{\lambda'}) \subset \mathbb{R}^n$ por $\big(y^1, \ldots, y^n\big)$. Em $A_\lambda \cap A_{\lambda'}$ essas coordenadas são relacionadas pela função de transição: $H_{A_\lambda, \, A_{\lambda'}}\big(x^1, \ldots, x^n\big) = \big(y^1, \ldots, y^n\big)$. A derivada de $H_{A_\lambda, \, A_{\lambda'}}$ será denotada por $DH_{A_\lambda, \, A_{\lambda'}}$. O estudante deve recordar-se que a derivada de uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ é uma matriz $n \times n$ composta pelas derivadas parciais de suas componentes por suas coordenadas[15]. No caso,

$$DH_{A_\lambda, \, A_{\lambda'}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}, \tag{33.1}$$

[15] Vide qualquer bom livro de Cálculo de funções de várias variáveis, e.g. [321] ou [108].

que é também conhecida como a *matriz Jacobiana* da função $H_{A_\lambda,\, A_{\lambda'}}$.

Se c for uma curva diferenciável em p no sentido acima e p pertence a uma carta local A_λ denotaremos os pontos da curva $(h_\lambda \circ c)(t)$, $t \in I$, de $\mathbb{R}^n$ por $(h_\lambda \circ c)(t) = \big(x^1(t),\ \ldots,\ x^n(t)\big)$, o vetor tangente de $h_\lambda \circ c$ em $h_\lambda(p)$ será

$$\mathbf{e}_c^\lambda(p) \ \equiv\ \frac{d}{dt}(h_\lambda \circ c)(t)\bigg|_{t=0} \ =\ \begin{pmatrix} \dot{x}^1(0) \\ \vdots \\ \dot{x}^n(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n\ . \tag{33.2}$$

(Por conveniência, denotamos aqui os vetores de $\mathbb{R}^n$ como vetores-coluna). Se p também pertence a uma outra carta local $A_{\lambda'}$ denotaremos os pontos da curva $(h_{\lambda'} \circ c)(t)$, $t \in I$, de $\mathbb{R}^n$ por $(h_{\lambda'} \circ c)(t) = \big(y^1(t),\ \ldots,\ y^n(t)\big)$, o vetor tangente de $h_{\lambda'} \circ c$ em $h_{\lambda'}(p)$ será

$$\mathbf{e}_c^{\lambda'}(p) \ \equiv\ \frac{d}{dt}(h_{\lambda'} \circ c)(t)\bigg|_{t=0} \ =\ \begin{pmatrix} \dot{y}^1(0) \\ \vdots \\ \dot{y}^n(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n\ . \tag{33.3}$$

Dado que em $A_\lambda \cap A_{\lambda'}$ tem-se $h_{\lambda'} = H_{A_\lambda,\, A_{\lambda'}} \circ h_\lambda$ podemos empregar a regra da cadeia para relacionar os vetores $\frac{d}{dt}(h_\lambda \circ c)(t)\big|_{t=0}$ e $\frac{d}{dt}(h_{\lambda'} \circ c)(t)\big|_{t=0}$:

$$\mathbf{e}_c^{\lambda'}(p) \ =\ \Big(DH_{A_\lambda,\, A_{\lambda'}}\big(h_\lambda(p)\big)\Big)\mathbf{e}_c^\lambda(p) \tag{33.4}$$

e

$$\mathbf{e}_c^\lambda(p) \ =\ \Big(DH_{A_{\lambda'},\, A_\lambda}\big(h_{\lambda'}(p)\big)\Big)\mathbf{e}_c^{\lambda'}(p) \ =\ \Big(DH_{A_\lambda,\, A_{\lambda'}}\big(h_\lambda(p)\big)\Big)^{-1}\mathbf{e}_c^{\lambda'}(p)\ . \tag{33.5}$$

Usando as representações matriciais (33.1) e (33.2)-(33.3) podemos expressar as relações acima em termos das coordenadas x e y:

$$\dot{y}^i(0) \ =\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\,\dot{x}^j(0) \quad \text{e} \quad \dot{x}^j(0) \ =\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\,\dot{y}^i(0)\ , \tag{33.6}$$

para todo $i = 1,\ \ldots,\ n$, sendo que as derivadas parciais $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$ acima, são calculadas em $h_\lambda(p) = \big(x^1(0),\ \ldots,\ x^n(0)\big)$, enquanto que as derivadas parciais $\frac{\partial x^j}{\partial y^i}$ acima, são calculadas em $h_{\lambda'}(p) = \big(y^1(0),\ \ldots,\ y^n(0)\big)$. A partir deste ponto é conveniente introduzir-se a chamada *convenção de Einstein*[16] na qual a ocorrência de índices repetidos indica implicitamente que os mesmos são somados. Com tal convenção, (33.6) fica simplesmente

$$\dot{y}^i(0) \ =\ \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\,\dot{x}^j(0) \quad \text{e} \quad \dot{x}^j(0) \ =\ \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\,\dot{y}^i(0)\ , \tag{33.7}$$

para todo $i = 1,\ \ldots,\ n$.

• **O espaço tangente a uma variedade em um ponto**

Uma vez estabelecida a noção de diferenciabilidade de curvas em uma variedade diferenciável, passamos agora à definição intrínseca de vetores tangentes. Seja $\mathscr{C}_p^d \subset \mathscr{C}_p$ a coleção das curvas de $\mathscr{C}_p$ que são diferenciáveis em alguma vizinhança aberta de p. Podemos estabelecer uma relação de equivalência em $\mathscr{C}_p^d$ dizendo que duas curvas c_1 e c_2 diferenciáveis em p são equivalentes, $c_1 \sim_p c_2$, se seus vetores tangentes em uma carta local forem iguais (e, portanto, se forem iguais em todas as cartas locais que contém p). Assim,

$$c_1 \sim_p c_2 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{e}_{c_1}^\lambda(p) \ =\ \mathbf{e}_{c_2}^\lambda(p) \tag{33.8}$$

para algum λ com $A_\lambda \ni p$.

[16] Albert Einstein (1879–1955).

Denotemos por $\mathsf{T}_p^1 V$ coleção de todas as classes de equivalência de $\mathscr{C}_p^d$ pela relação de equivalência acima e, para $c \in \mathscr{C}_p^d$, denotemos por $[c]_p$ a classe de equivalência de c. O conjunto $\mathsf{T}_p^1 V$ é denominado *espaço tangente a V em p*, ou simplesmente *espaço tangente em p*.

O fato crucial é que podemos dotar $\mathsf{T}_p^1 V$ de uma estrutura de espaço vetorial real definindo operações de soma vetorial e multiplicação por escalares (reais) de modo a satisfazerem os postulados gerais de espaços vetoriais apresentados na Seção 2.1.5, página 135.

• **Estrutura de espaço vetorial no espaço tangente em p**

Para introduzirmos uma estrutura de espaço vetorial em $\mathsf{T}_p^1 V$ precisamos de alguma notação.

Seja $I = (a,\ b)$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ que contém 0. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, denotemos por I_α o intervalo $\big(a/|\alpha|,\ b/|\alpha|\big)$ caso $\alpha \neq 0$, sendo $I_0 = \mathbb{R}$ caso $\alpha = 0$. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathscr{C}_p^d$, $c : I \to V$, denotemos por c_α a curva $c_\alpha \in \mathscr{C}_p^d$, $c_\alpha : I_\alpha \to V$ definida por $c_\alpha(t) = c(\alpha t)$ para todo $t \in I_\alpha$. Note-se que para $\alpha = 0$ teremos $c_0(t) = c(0) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, c_0 é uma curva constante, fixa no ponto p. É elementar constatar-se que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ vale

$$\mathbf{e}_{c_\alpha}^\lambda(p) \ =\ \alpha\mathbf{e}_c^\lambda(p)\ . \tag{33.9}$$

Para uma carta local de coordenadas $(A_\lambda,\ h_\lambda)$ com $p \in A_\lambda$ e dadas duas curvas $c,\ d \in \mathscr{C}_p^d$, denotamos por $\sigma_{c,\,d} : I \to V$ a curva definida por

$$\sigma_{c,\,d}^\lambda(t) \ :=\ h_\lambda^{-1}\Big(h_\lambda(p) + \big(\mathbf{e}_c^\lambda(p) + \mathbf{e}_d^\lambda(p)\big)\,t\Big)\ ,$$

com $t \in I$, sendo que I tem de ser escolhido pequeno o suficiente para que $\sigma_{c,\,d}(t)$ esteja sempre contido na carta local A_λ. Observe-se que $\sigma_{c,\,d}^\lambda(0) = p$ e, portanto, $\sigma_{c,\,d}^\lambda \in \mathscr{C}_p^d$, pois é diferenciável. Seja $(A_{\lambda'},\ h_{\lambda'})$ uma segunda carta local de coordenadas com $p \in A_{\lambda'}$ que produzirá uma segunda curva em V definida por

$$\sigma_{c,\,d}^{\lambda'}(t) \ :=\ h_{\lambda'}^{-1}\Big(h_{\lambda'}(p) + \Big(\mathbf{e}_c^{\lambda'}(p) + \mathbf{e}_d^{\lambda'}(p)\Big)t\Big)\ .$$

As curvas $\sigma_{c,\,d}^\lambda$ e $\sigma_{c,\,d}^{\lambda'} \in \mathscr{C}_p^d$ passam por p em $t = 0$, mas podem ser, eventualmente, distintas em outros valores de t. Porém, são equivalentes pela relação de equivalência acima: $\Big[\sigma_{c,\,d}^\lambda\Big]_p = \Big[\sigma_{c,\,d}^{\lambda'}\Big]_p$. Isso é facilmente demonstrável, pois $h_{\lambda'}\big(\sigma_{c,\,d}^{\lambda'}(t)\big) = h_{\lambda'}(p) + \Big(\mathbf{e}_c^{\lambda'}(p) + \mathbf{e}_d^{\lambda'}(p)\Big)\,t$, implicando que

$$\frac{d}{dt}h_{\lambda'}\big(\sigma_{c,\,d}^{\lambda'}(t)\big)\Big|_{t=0} \ =\ \mathbf{e}_c^{\lambda'}(p) + \mathbf{e}_d^{\lambda'}(p)\ . \tag{33.10}$$

Paralelamente, porém, tem-se que $h_{\lambda'}\big(\sigma_{c,\,d}^\lambda(t)\big) = H_{A_\lambda, A_{\lambda'}}\Big(h_\lambda(p) + \big(\mathbf{e}_c^\lambda(p) + \mathbf{e}_d^\lambda(p)\big)\,t\Big)$, implicando que

$$\frac{d}{dt}h_{\lambda'}\big(\sigma_{c,\,d}^\lambda(t)\big)\Big|_{t=0} \ =\ \Big(DH_{A_\lambda,\, A_{\lambda'}}\big(h_\lambda(p)\big)\Big)\Big(\mathbf{e}_c^\lambda(p) + \mathbf{e}_d^\lambda(p)\Big) \ \overset{(33.4)}{=}\ \mathbf{e}_c^{\lambda'}(p) + \mathbf{e}_d^{\lambda'}(p) \ \overset{(33.10)}{=}\ \frac{d}{dt}h_{\lambda'}\big(\sigma_{c,\,d}^{\lambda'}(t)\big)\Big|_{t=0}\ ,$$

provando que $\sigma_{c,\,d}^\lambda \sim_p \sigma_{c,\,d}^{\lambda'}$, como queríamos.

Estamos agora prontos para definir as operações de soma vetorial e produto por escalares que fazem de $\mathsf{T}_p^1 V$ um espaço vetorial. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathscr{C}_p^d$, definimos $\alpha[c]_p := [c_\alpha]_p$. Para $c,\ d \in \mathscr{C}_p^d$, definimos $[c]_p + [d]_p := \Big[\sigma_{c,\,d}^\lambda\Big]_p$ para qualquer carta local de coordenadas $(A_\lambda,\ h_\lambda)$ com $p \in A_\lambda$. É elementar demonstrar que $\mathsf{T}_p^1 V$, equipado com essas operações, é um espaço vetorial real, de acordo os postulados da Seção 2.1.5, página 135.

E. 33.4 *Exercício importante*. Justifique essa última afirmação. ✠

E. 33.5 *Exercício importante*. Sejam $c,\ d \in \mathscr{C}_p^d$ e $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Usando (33.9), mostre que

$$\alpha[c]_p + \beta[d]_p \ =\ \Big[\sigma_{c,d;\,\alpha,\beta}^\lambda\Big]_p\ , \tag{33.11}$$

onde

$$\sigma_{c,d;\,\alpha,\beta}^\lambda(t) \ :=\ h_\lambda^{-1}\Big(h_\lambda(p) + \Big(\alpha\mathbf{e}_c^\lambda(p) + \beta\mathbf{e}_d^\lambda(p)\Big)\,t\Big)\ . \tag{33.12}$$

A expressão (33.11) pode ser vista como uma definição alternativa de $\alpha[c]_p + \beta[d]_p$. ✠

• **Um isomorfismo entre T^1_pV e $\mathbb{R}^n$**

Seja o espaço tangente T^1_pV e seja uma carta local de coordenadas $(A_\lambda,\ h_\lambda)$ com $p \in A_\lambda$. Se c for uma curva diferenciável em p, denotaremos novamente os pontos da curva $I \ni t \mapsto (h_\lambda \circ c)(t) \in \mathbb{R}^n$ por $(h_\lambda \circ c)(t) = \big(x^1(t),\ \ldots,\ x^n(t)\big)$. O vetor tangente de $h_\lambda \circ c$ em p é dado em (33.2). É claro por (33.8) que a aplicação $\psi_\lambda : \mathsf{T}^1_pV \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\mathsf{T}^1_pV \ \ni\ [c]_p \ \longmapsto\ \mathbf{e}^\lambda_c(p) \overset{(33.2)}{=} \begin{pmatrix} \dot{x}^1(0) \\ \vdots \\ \dot{x}^n(0) \end{pmatrix} \ \in\ \mathbb{R}^n$$

é bijetiva. Como $\alpha[c]_p := [c_\alpha]_p$, segue de (33.9) que $\psi_\lambda(\alpha[c]_p) = \alpha\psi_\lambda([c]_p)$. Como $[c]_p + [d]_p := \Big[\sigma^\lambda_{c,d}\Big]_p$, segue de (33.10) que $\psi_\lambda([c]_p + [d]_p) = \psi_\lambda([c]_p) + \psi_\lambda([d]_p)$. Esses fatos mostram que ψ_λ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais T^1_pV e $\mathbb{R}^n$.

• **Espaço tangente. Uma segunda caracterização**

Seja V uma variedade diferenciável de dimensão n dotada de um atlas infinitamente diferenciável $\mathcal{A} = \{(A_\lambda,\ h_\lambda),\ \lambda \in \Lambda\}$. Denotemos por $\mathscr{D}_p$ a coleção de todas as funções $f : V \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em $p \in V$ (na estrutura infinitamente diferenciável definida de $\mathcal{A}$). Dada uma carta local de coordenadas $(A_\lambda,\ h_\lambda)$ com $p \in A_\lambda$ e uma curva diferenciável $c \in \mathscr{C}^d_p$, $c : I \to V$, que passa por p em $t = 0$, a função $f \circ c : I \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável de uma variável real (definida em I) assumindo valores em $\mathbb{R}$.

Para cada $c \in \mathscr{C}^d_p$ como acima, vamos denotar por $D_p(c) \equiv c'_p$ a aplicação que a cada $f \in \mathscr{D}_p$ associa a derivada de $f \circ c$ calculada em $t = 0$:

$$D_p(c)f \ \equiv\ c'_pf \ :=\ \frac{d}{dt}(f \circ c)\Big|_{t=0} . \tag{33.13}$$

Como $\mathscr{D}_p$ é um espaço vetorial real, é claro que $D_p(c)$ é um operador linear, pois para $f,\ g \in \mathscr{D}_p(c)$ e $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ teremos $\big(\alpha f + \beta g\big) \circ c = \alpha(f \circ c) + \beta(g \circ c)$ e, portanto,

$$D_p(c)\big(\alpha f + \beta g\big) \ =\ \frac{d}{dt}\big((\alpha f + \beta g) \circ c\big)\Big|_{t=0} \ =\ \alpha\frac{d}{dt}(f \circ c)\Big|_{t=0} + \beta\frac{d}{dt}(g \circ c)\Big|_{t=0} \ =\ \alpha D_p(c)f + \beta D_p(c)g\ .$$

Nosso próximo passo é a constatação que os operadores $D_p(c)$ são constantes nas classes de equivalências de curvas de $\mathscr{C}^d_p$ que apresentamos acima. De fato, seja uma carta local de coordenadas $(A_\lambda,\ h_\lambda)$ com $p \in A_\lambda$. Naturalmente, podemos escrever $f \circ c = \big(f \circ h^{-1}_\lambda\big) \circ \big(h_\lambda \circ c\big)$ sendo $f \circ h^{-1}_\lambda$ definida em $\mathbb{R}^n$ (mais precisamente, em $h_\lambda(A_\lambda)$) com valores em $\mathbb{R}$ e $h_\lambda \circ c$ definida em $I \subset \mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{R}^n$ (mais precisamente, em $h_\lambda(A_\lambda)$). Portanto, pela regra da cadeia,

$$D_p(c)(f) \ =\ \frac{d}{dt}(f \circ c)\Big|_{t=0} \ =\ \Big[D\big(f \circ h^{-1}_\lambda\big)\big(h_\lambda(p)\big)\Big]\frac{d}{dt}(h_\lambda \circ c)\Big|_{t=0} \ =\ \Big[D\big(f \circ h^{-1}_\lambda\big)\big(h_\lambda(p)\big)\Big]\,\mathbf{e}^\lambda_c(p)\ , \tag{33.14}$$

onde $D\big(f \circ h^{-1}_\lambda\big)$ é a derivada de $f \circ h^{-1}_\lambda$. A validade da expressão acima para toda $f \in \mathscr{D}_p$ torna evidente a afirmação que se $c_1,\ c_2 \in \mathscr{C}^d_p$ então $c_1 \sim_p c_2$ se e somente se $D_p(c_1) = D_p(c_2)$. Passamos, por isso, a denotar $D_p(c)$ por $D_p\big([c]_p\big)$.

Fixado $p \in V$, vamos denotar por T^2_pV a coleção de todos os operadores $D_p\big([c]_p\big)$ com $[c]_p$ variando no espaço tangente T^1_pV anteriormente definido. Como veremos, T^2_pV também possui uma estrutura de espaço vetorial real e é isomorfo ao espaço tangente T^1_pV. Fazemos notar que, pelo visto acima, a aplicação $\phi : \mathsf{T}^1_pV \ni [c]_p \mapsto D_p\big([c]_p\big) \in \mathsf{T}^2_pV$ é bijetora.

Como os elementos de T^2_pV são operadores lineares, T^2_pV é naturalmente imbuído de uma estrutura de espaço vetorial real: para $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ e $c,\ d \in \mathscr{C}^d_p$, definimos, como usual, $\alpha D_p\big([c]_p\big) + \beta D_p\big([d]_p\big)$ como o operador que a cada $f \in \mathscr{D}_p$ associa

$$\Big(\alpha D_p\big([c]_p\big) + \beta D_p\big([d]_p\big)\Big)f \ =\ \alpha D_p\big([c]_p\big)f + \beta D_p\big([d]_p\big)f\ .$$

Dadas duas curvas $c,\ d \in \mathscr{C}^d_p$, arbitrárias, e dois números reais α e β, arbitrários, teremos, para toda $f \in \mathscr{D}_p$,

$$\begin{aligned}
\Big(\alpha D_p\big([c]_p\big) + \beta D_p\big([d]_p\big)\Big)f \ &=\ \alpha D_p\big([c]_p\big)f + \beta D_p\big([d]_p\big)f \\
&=\ \frac{d}{dt}\big(\alpha(f \circ c) + \beta(f \circ d)\big)\Big|_{t=0} \\
&=\ \Big[D\big(f \circ h^{-1}_\lambda\big)\big(h_\lambda(p)\big)\Big]\,\Big(\alpha\mathbf{e}^\lambda_c(p) + \beta\mathbf{e}^\lambda_d(p)\Big) \\
&\overset{(33.12)}{=}\ \Big[D\big(f \circ h^{-1}_\lambda\big)\big(h_\lambda(p)\big)\Big]\frac{d}{dt}\big(h_\lambda \circ \sigma^\lambda_{c,d;\ \alpha,\beta}\big)\Big|_{t=0} \\
&=\ D_p\big([\sigma^\lambda_{c,d;\ \alpha,\beta}]_p\big)\,f \\
&\overset{(33.11)}{=}\ D_p\big(\alpha[c]_p + \beta[d]_p\big)\,f\ .
\end{aligned}$$

Isso estabeleceu que a aplicação $\phi : \mathsf{T}^1_pV \ni [c]_p \mapsto D_p\big([c]_p\big) \in \mathsf{T}^2_pV$ é um isomorfismo de espaços vetoriais entre T^1_pV e T^2_pV.

• **A base de coordenadas no espaço tangente**

Vamos designar $h_\lambda(p)$ na forma de uma n-upla de coordenadas reais $h_\lambda(p) = (x^1_p,\ \ldots,\ x^n_p)$ no sistema de coordenadas $(x^1,\ \ldots,\ x^n)$ definido pela carta local $(A_\lambda,\ h_\lambda)$ e, como acima, vamos designar a curva $h_\lambda \circ c$ em $h_\lambda(A_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$ pela n-upla de funções $(x^1(t),\ \ldots,\ x^n(t))$.

De acordo com (33.13), (33.14) e (33.2), podemos escrever $D_p\big([c]_p\big)f$ na forma

$$D_p\big([c]_p\big)f \ :=\ \frac{d}{dt}(f \circ c)\Big|_{t=0} \ =\ \Big[D\big(f \circ h^{-1}_\lambda\big)\big(h_\lambda(p)\big)\Big]\,\mathbf{e}^\lambda_c(p) \ =\ \sum_{j=1}^n \dot{x}^j(0)\,\frac{\partial\big(f \circ h^{-1}_\lambda\big)}{\partial x^j}(x^1_p,\ \ldots,\ x^n_p)\ . \tag{33.15}$$

A expressão acima será interpretada como uma expansão de $D_p\big([c]_p\big)$ em uma certa base de vetores de T^2_pV. Para entendermos isso, considere-se para algum $j \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, a curva que passa por $h_\lambda(p) = (x^1_p,\ \ldots,\ x^n_p)$ definida por $l_j(t) := \big(x^1_p,\ \ldots,\ x^j_p + t,\ \ldots,\ x^n_p\big)$. Naturalmente, $l_j(0) = h_\lambda(p)$ e a i-ésima coordenada de $\dot{l}_j(0)$ é $\big(\dot{l}_j(0)\big)_i = \delta_{ij}$. A expressão $h^{-1}_\lambda \circ l_j \equiv c_j$ define uma curva diferenciável em V que passa por p em $t = 0$ e para essa curva teremos, de acordo com (33.15),

$$D_p\big([c_j]_p\big)f \ =\ \frac{\partial\big(f \circ h^{-1}_\lambda\big)}{\partial x^j}(x^1_p,\ \ldots,\ x^n_p)\ .$$

Fica então claro que (33.15) pode ser reescrita como $D_p\big([c]_p\big)f = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^n \dot{x}^j(0)D_p\big([c_j]_p\big)\right)f$, ou seja,

$$D_p\big([c]_p\big) \ =\ \sum_{j=1}^n \dot{x}^j(0)\ D_p\big([c_j]_p\big)\ .$$

Como as curvas c_j são inequivalentes para j's diferentes (justifique!), essa expressão diz-nos que a coleção de vetores $\{D_p\big([c_1]_p\big),\ \ldots,\ D_p\big([c_n]_p\big)\}$ forma uma base de vetores em T^2_pV, denominada *base de coordenadas* (ou *base canônica de coordenadas*) associada à carta local de coordenadas $(A_\lambda,\ h_\lambda)$.

Inspirada em (33.15), há uma outra notação muito mais direta e universalmente empregada para os vetores de base $D_p\big([c_j]_p\big)$, a saber, a notação

$$D_p\big([c_j]_p\big) \ \equiv\ \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p\ .$$

Com ela, escrevemos $D_p\big([c]_p\big) \ =\ \displaystyle\sum_{j=1}^n \dot{x}^j(0)\ \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p$.

Estabelecemos pouco acima que os espaços vetoriais T^1_pV e T^2_pV são isomorfos (e isomorfos ao espaço vetorial $\mathbb{R}^n$). Em termos informais, isso significa que os vetores $[c]_p \in \mathsf{T}^1_pV$ e $D_p\big([c]_p\big) \in \mathsf{T}^2_pV$, ainda que representando objetos de natureza distinta (um é uma classe de equivalência de curvas, o outro um operador entre espaços vetoriais) podem ser operacionalmente identificados[17]. No que segue, iremos frequentemente ignorar a distinção entre T^1_pV e T^2_pV e sempre denotaremos o espaço tangente a V em p por T_pV. Iremos tratar $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$ como uma base em T_pV, a base de coordenadas induzida pela carta $(A_\lambda,\ h_\lambda)$. Vale notar também que $\big\{[c_1]_p,\ \ldots,\ [c_n]_p\big\}$ compõe uma base em T^1_pV.

• **Mudanças de bases coordenadas no espaço tangente**

Se considerarmos uma segunda carta local de coordenadas $(A_{\lambda'},\ h_{\lambda'})$ com $p \in A_{\lambda'}$, cujas coordenadas sejam descritas por n-úplas $(y^1,\ \ldots,\ y^n)$. A base $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\Big|_p \right\}$ pode ser linearmente relacionada à base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$ por meio da matriz de transição (33.1). Tem-se, a saber,

$$\frac{\partial}{\partial y^k}\bigg|_p \;=\; \sum_{l=1}^n \frac{\partial x^l}{\partial y^k}\bigg|_{h_{\lambda'}(p)} \frac{\partial}{\partial x^l}\bigg|_p\,, \tag{33.16}$$

para todo $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, e

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\bigg|_p \;=\; \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^l}\bigg|_{h_\lambda(p)} \frac{\partial}{\partial y^k}\bigg|_p\,, \tag{33.17}$$

para todo $l \in \{1,\ \ldots,\ n\}$.

E. 33.6 *Exercício*. Prove isso. Sugestão: (33.15) e a regra da cadeia. ✠

Temos, assim, as seguintes representações para $D_p\big([c]_p\big)$:

$$D_p\big([c]_p\big) \;=\; \sum_{j=1}^n \dot{x}^j(0)\,\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \;=\; \sum_{j=1}^n \dot{y}^j(0)\,\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p\,,$$

onde, como antes, $(h_\lambda \circ c)(t) = (x^1(t),\ \ldots,\ x^n(t))$ e $(h_{\lambda'} \circ c)(t) = (y^1(t),\ \ldots,\ y^n(t))$. Como $D_p\big([c]_p\big)$ é um objeto intrínseco, i.e. independente do sistema de coordenadas adotado em torno de p, a segunda igualdade atesta que as expressões $\sum_{j=1}^n \dot{x}^j(0)\,\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p$ e $\sum_{j=1}^n \dot{y}^j(0)\,\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p$ independem das cartas locais nas quais foram definidas.

E. 33.7 *Exercício*. Usando (33.16)-(33.17) e (33.6), prove novamente que $\displaystyle\sum_{j=1}^n \dot{x}^j(0)\,\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p = \sum_{j=1}^n \dot{y}^j(0)\,\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p$. ✠

• **O fibrado tangente**

Como vimos acima, o espaço tangente T_pV pode ser definido em cada ponto p de uma variedade diferenciável V de dimensão n. O conjunto

$$\mathsf{T}V \;:=\; \bigsqcup_{p\in V} \mathsf{T}_pV \;=\; \bigcup_{p\in V} (p,\ \mathsf{T}_pV) \;=\; \bigcup_{p\in V}\ \bigcup_{v\in \mathsf{T}_pV} (p,\ v)$$

constituído pela união disjunta[18] de todos os espaços tangentes de V é denominado *fibrado tangente* de V. O fibrado tangente $\mathsf{T}V$ de uma variedade diferenciável V é, ele mesmo, uma variedade diferenciável de dimensão $2n$. De fato, seja $\mathcal{A} = \{(U_\alpha,\ h_\alpha),\ \alpha \in \Lambda\}$ um atlas infinitamente diferenciável para V e defina-se $\mathsf{T}U_\alpha \subset \mathsf{T}V$ por

$$\mathsf{T}U_\alpha \;:=\; \bigsqcup_{p\in U_\alpha} \mathsf{T}_pV \;=\; \bigcup_{p\in U_\alpha} (p,\ \mathsf{T}_pV) \;=\; \bigcup_{p\in U_\alpha}\ \bigcup_{v\in \mathsf{T}_pV} (p,\ v)\,.$$

[17] Na literatura matemática podem ser encontradas ainda ao menos duas outras definições equivalentes da noção de espaço tangente, ambas envolvendo certos ideais de álgebras de funções definidas sobre a variedade. Essas definições alternativas são de interesse no contexto das chamadas *Geometrias Não Comutativas*, mas não trataremos de tais assuntos neste texto.

[18] Para a definição de união disjunta de uma família indexada de conjuntos, vide página 67.

Então, $\mathsf{T}\mathcal{A} := \big\{(\mathsf{T}U_\alpha,\ H_\alpha),\ \alpha \in \Lambda\big\}$ com $H_\alpha : \mathsf{T}U_\alpha \to \mathbb{R}^{2n}$ dado por

$$H_\alpha\left(p,\ \sum_{k=1}^n v^k\,\frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_p\right) \;:=\; \big(h_\alpha(p),\ v^1,\ \ldots,\ v^n\big) \;=\; \big(x^1_p,\ \ldots,\ x^n_p,\ v^1,\ \ldots,\ v^n\big) \;\in\; \mathbb{R}^{2n}\,,$$

define um atlas infinitamente diferenciável em $\mathsf{T}V$. Acima, $\big(x^1_p,\ \ldots,\ x^n_p\big) \equiv h_\alpha(p)$ são as coordenadas de p por h_α. Os vetores $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$ definem uma base em T_pV induzida pelo sistema de coordenadas local $\{x^1,\ \ldots,\ x^n\}$ de U_α definido por h_α.

E. 33.8 *Exercício*. Verifique as afirmações acima. Determine as funções de transição de $\mathsf{T}\mathcal{A}$. ✠

O fibrado tangente é um exemplo de um fibrado vetorial, noção da qual trataremos adiante. Na Física, mais especificamente, na Mecânica, uma noção similar, a de fibrado cotangente, essencialmente coincide com a noção de *espaço de fase*, por poder ser entendida como a coleção de todas as posições e momentos de um sistema mecânico com um número finito de graus de liberdade.

33.2.2.1 O Espaço Cotangente

Como já mencionamos, dada uma variedade diferenciável M de dimensão m podemos associar a cada ponto $p \in M$ um espaço vetorial real T_pM, também de dimensão m, denominado espaço tangente a M em p. Com isso, diversas outras construções associadas à noção de espaço vetorial podem ser igualmente introduzidas, tais como a de espaço dual, a de produtos tensoriais etc., construções essas que abordamos com certa generalidade nas discussões dos Capítulos 2 e 3, páginas 111 e 261, respectivamente. A agregação de tais estruturas a variedades diferenciáveis confere às mesmas maior riqueza, naturalmente, permitindo a introdução de diversas novas noções de interesse geométrico e físico, algumas das quais iremos abordar no que segue.

Se T_pM é o espaço tangente a M em $p \in M$, denotamos por T^*_pM ou por T_pM^* o seu espaço dual, que na geometria diferencial recebe o nome especial de *espaço cotangente* a M em p. O espaço cotangente T_pM é, portanto, a coleção de todos os funcionais lineares de T_pM. Os elementos de T^*_pM são denominados *vetores cotangentes*.

• **Bases duais**

Se $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_p \right\}$ é uma base em T_pM associada a uma carta local de coordenadas $(A_\alpha,\ h_\alpha)$ com $p \in A_\alpha$, a correspondente base dual canônica (para a definição, vide página 199) em T^*_pM é denotada por $\{dx^1_p,\ \ldots,\ dx^m_p\}$. Com isso, tem-se, por definição,

$$\left\langle dx^i_p,\ \ \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \right\rangle \;=\; \delta^i{}_j$$

para todos $i,\ j \in \{1,\ \ldots,\ m\}$.

A notação dx^i_p para designar o dual de vetores como $\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p$ é certamente inspirada no emprego do símbolo "dx" para designar um "elemento de integração" (ou medida) na reta real e na ideia da operação de integração como "inversa" à de diferenciação. A felicidade dessa notação ficará mais evidente quando discutirmos a teoria de integração de formas diferenciais em variedades diferenciáveis.

Para $p \in M$, seja uma base de coordenadas $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\}$ definida no espaço tangente T_pM e seja $\{dx^1,\ \ldots,\ dx^m\}$ a correspondente base dual no espaço cotangente T^*_pM, com $\langle dx^a,\ \frac{\partial}{\partial x^b}\rangle = \delta^a{}_b$.

Vamos considerar uma nova base $\{\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_m\}$ em T_pM com

$$\mathbf{e}_k \;=\; \sum_{l=1}^m E_k{}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \tag{33.18}$$

com certos coeficientes $E_k{}^l$. Para que a nova base seja composta por vetores linearmente independentes a matriz de mudança de base S, cujos elementos são dados por $S_{ij} \equiv E_i{}^j$, deve ser inversível. Vamos denotar os elementos $(S^{-1})_{ij}$ da matriz inversa S^{-1} por $E^i{}_j \equiv (S^{-1})_{ji}$. Naturalmente, $S^{-1}S = \mathbb{1}$ e $SS^{-1} = \mathbb{1}$, ou seja, $\sum_{k=1}^m (S^{-1})_{ik}S_{kj} = \delta_{ij}$ e

$\sum_{k=1}^m S_{ik}(S^{-1})_{kj} = \delta_{ij}$. Com a notação acima, essas duas relações ficam

$$\sum_{k=1}^m E^k{}_i E_k{}^j = \delta_i{}^j \,, \tag{33.19}$$

$$\sum_{k=1}^m E_i{}^k E^j{}_k = \delta_i{}^j \,. \tag{33.20}$$

Definamos agora uma nova base $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^m\}$ no espaço cotangente T_p^*M por

$$\mathbf{e}^k = \sum_{l=1}^m E^k{}_l \, dx^l \,. \tag{33.21}$$

Teremos,

$$\langle \mathbf{e}^a, \mathbf{e}_b \rangle = \sum_{c=1}^m \sum_{d=1}^m E^a{}_c E_b{}^d \left\langle dx^c, \frac{\partial}{\partial x^d} \right\rangle = \sum_{c=1}^m E^a{}_c E_b{}^c \overset{(33.20)}{=} \delta^a{}_b \,,$$

mostrando que as bases $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^m\}$ e $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ são duais. É de se lembrar (vide comentário à página 200) que a base dual de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ é única.

Exemplo 33.2 Dadas duas bases de coordenadas $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^m}\right\}$ definidas no espaço tangente T_pM com

$$\frac{\partial}{\partial y^a} = \sum_{b=1}^m \frac{\partial x^b}{\partial y^a} \frac{\partial}{\partial x^b}$$

teremos $E_a{}^b = \frac{\partial x^b}{\partial y^a}$. Com as convenções acima $E^a{}_b = \frac{\partial y^a}{\partial x^b}$, pois, de fato, valem

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y^k} = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i{}^j \,,$$

correspondendo a (33.19), e

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial y^j}{\partial x^k} = \frac{\partial y^j}{\partial y^i} = \delta_i{}^j \,,$$

correspondendo a (33.20). Assim, por (33.21), a base dual de $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^m}\right\}$ será $\{dy^1, \ldots, dy^m\}$ com

$$dy^k = \sum_{l=1}^m \frac{\partial y^k}{\partial x^l} \, dx^l \,, \tag{33.22}$$

como facilmente se verifica. De forma totalmente análoga, obtemos

$$dx^l = \sum_{k=1}^m \frac{\partial x^l}{\partial y^k} \, dy^k \,. \tag{33.23}$$

♦

• **O fibrado cotangente**

A noção de fibrado cotangente pode ser introduzida como a de fibrado tangente, como fizemos acima. Como vimos acima, o espaço cotangente T_p^*V pode ser definido em cada ponto p de uma variedade diferenciável V de dimensão m. O conjunto

$$\mathsf{T}^*V := \bigsqcup_{p\in V} \mathsf{T}_p^*V = \bigcup_{p\in V} (p, \mathsf{T}_p^*V) = \bigcup_{p\in V} \bigcup_{l\in \mathsf{T}_p^*V} (p, l)$$

constituído pela união disjunta de todos os espaços cotangentes de V é denominado *fibrado cotangente* de V. O fibrado cotangente T^*V de uma variedade diferenciável V é, ele mesmo, uma variedade diferenciável de dimensão $2m$. De fato, seja $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, h_\alpha), \alpha \in \Lambda\}$ um atlas infinitamente diferenciável para V e defina-se $\mathsf{T}^*U_\alpha \subset \mathsf{T}^*V$ por

$$\mathsf{T}^*U_\alpha := \bigsqcup_{p\in U_\alpha} \mathsf{T}_p^*V = \bigcup_{p\in U_\alpha} (p, \mathsf{T}_p^*V) = \bigcup_{p\in U_\alpha} \bigcup_{l\in \mathsf{T}_p^*V} (p, l) \,.$$

Então, $\mathsf{T}^*\mathcal{A} := \big\{(\mathsf{T}^*U_\alpha, I_\alpha), \alpha \in \Lambda\big\}$ com $I_\alpha : \mathsf{T}^*U_\alpha \to \mathbb{R}^{2m}$ dado por

$$I_\alpha\left(p, \sum_{k=1}^m l_k \, dx_p^k\right) := \big(h_\alpha(p), l_1, \ldots, l_m\big) = \big(x_p^1, \ldots, x_p^m, l_1, \ldots, l_m\big) \in \mathbb{R}^{2m} \,,$$

define um atlas infinitamente diferenciável em T^*V. Acima, $\big(x_p^1, \ldots, x_p^m\big) \equiv h_\alpha(p)$ são as coordenadas de p por h_α. Os covetores $\{dx_p^1, \ldots, dx_p^m\}$ definem uma base em T_p^*V induzida pelo sistema de coordenadas local $\{x^1, \ldots, x^m\}$ de U_α definido por h_α.

E. 33.9 *Exercício*. Verifique as afirmações acima. Determine as funções de transição de $\mathsf{T}^*\mathcal{A}$. ✠

33.2.3 Tensores em Variedades

Para o que segue, alguma familiaridade com a noção de produto tensorial de espaços vetoriais é requerida. Essa noção foi introduzida na Seção 2.3.5, página 209, fazendo uso de resultados prévios (notadamente da Seção 2.2.4.3, página 185). Vide também Seção 2.3.6, página 220.

A cada ponto p de uma variedade diferenciável V podemos, como vimos, associar o espaço tangente T_pV e o espaço cotangente T_p^*V, ambos espaços vetoriais reais de dimensão igual n, a dimensão a da variedade V. Muito importante é que podemos também considerar produtos tensoriais desses espaços.

Seja $m \in \mathbb{N}$ e sejam $W_1, \ldots W_m$ espaços vetoriais sendo que cada W_k ou é o espaço tangente T_pV ou o espaço cotangente T_p^*V. O produto tensorial $W_1 \otimes_\mathbb{R} \cdots \otimes_\mathbb{R} W_m$ é dito ser de ordem m e de tipo (a, b) se o fator T_pV comparecer a-vezes no produto tensorial e o fator T_p^*V comparecer b-vezes no produto tensorial, sendo que, naturalmente $a + b = m$.

Um exemplo protótipo de um produto tensorial de tipo (a, b) é

$$\underbrace{\mathsf{T}_pV \otimes_\mathbb{R} \cdots \otimes_\mathbb{R} \mathsf{T}_pV}_{a\,\text{vezes}} \otimes_\mathbb{R} \underbrace{\mathsf{T}_p^*V \otimes_\mathbb{R} \cdots \otimes_\mathbb{R} \mathsf{T}_p^*V}_{b\,\text{vezes}} \equiv \left(\otimes_\mathbb{R}^a \mathsf{T}_pV\right) \otimes_\mathbb{R} \left(\otimes_\mathbb{R}^b \mathsf{T}_p^*V\right) .$$

Todos os outros produtos tensoriais de tipo (a, b) são isomorfos a esse por permutação de fatores. Por exemplo, os três espaços de ordem 3 e de tipo (2, 1) são $\mathsf{T}_pV \otimes_\mathbb{R} \mathsf{T}_pV \otimes_\mathbb{R} \mathsf{T}_p^*V$, $\mathsf{T}_pV \otimes_\mathbb{R} \mathsf{T}_p^*V \otimes_\mathbb{R} \mathsf{T}_pV$ e $\mathsf{T}_p^*V \otimes_\mathbb{R} \mathsf{T}_pV \otimes_\mathbb{R} \mathsf{T}_pV$.

Um elemento de um produto tensorial de ordem m de tipo (a, b) é dito ser um tensor de ordem m tipo (a, b), ou um tensor de posto (a, b).

Em uma carta (U, h) que contenha p, o espaço $\left(\otimes_\mathbb{R}^a \mathsf{T}_pV\right) \otimes_\mathbb{R} \left(\otimes_\mathbb{R}^b \mathsf{T}_p^*V\right)$ contém uma base de coordenadas locais da forma[19]

$$\mathcal{B}(U, h, p) := \left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p \otimes_\mathbb{R} \cdots \otimes_\mathbb{R} \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\right|_p \otimes_\mathbb{R} dx_p^{i_{a+1}} \otimes_\mathbb{R} \cdots \otimes_\mathbb{R} dx_p^{i_{a+b}}, \; i_k \in \{1, \ldots, n\} \text{ para todo } k \right\} .$$

Assim, um tensor T de $\left(\otimes_\mathbb{R}^a \mathsf{T}_pV\right)\left(\otimes_\mathbb{R}^b \mathsf{T}_p^*V\right)$ se escreve na forma

$$T = T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p \otimes_\mathbb{R} \cdots \otimes_\mathbb{R} \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\right|_p \otimes_\mathbb{R} dx_p^{i_{a+1}} \otimes_\mathbb{R} \cdots \otimes_\mathbb{R} dx_p^{i_{a+b}} \,, \tag{33.24}$$

onde adotamos novamente a convenção de Einstein. Os n^m coeficientes $T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}(p)$ são denominados *componentes* do tensor T na base $\mathcal{B}(U, h, p)$.

Em textos de Física é muito comum tomar um tensor por suas componentes em alguma carta, em frases como *"seja o tensor $T^{ij}{}_k$ ..."*. Isso é por vezes denominado "notação de índices abstratos".

O estudante iniciante deve atentar para a disposição dos índices superiores e inferiores nas expressões acima. Para outros tensores de tipo (a, b) adota-se uma notação semelhante, sempre dotando as componentes de índices superiores quando elas provêm de um fator T_pV e de índices inferiores quando elas provêm de um fator T_p^*V, e sempre preservando

[19] A discussão sobre bases em produtos tensoriais de vetores gerais é feita à página 213. Vide também Seção 2.3.6, página 220.

nos índices a ordem de aparecimento desses fatores. Assim, por exemplo, se considerarmos três tensores A, B e C, de ordem 3 e de tipo $(2,\ 1)$, em $\mathsf{T}_pV \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_pV \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_p^*V$, $\mathsf{T}_pV \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_p^*V \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_pV$ e $\mathsf{T}_p^*V \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_pV \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_pV$, respectivamente, suas representações nas respectivas bases de coordenadas locais serão

$$A = A^{ij}{}_k(p)\ \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \otimes_{\mathbb{R}} dx^k_p\ , \tag{33.25}$$

$$B = B^i{}_j{}^k(p)\ \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \otimes_{\mathbb{R}} dx^j_p \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_p\ , \tag{33.26}$$

$$C = C_i{}^{jk}(p)\ dx^i_p \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_p\ . \tag{33.27}$$

Mais uma vez o estudante iniciante deve atentar para a localização e ordenamento dos índices.

Em uma outra carta $(\underline{U},\ \underline{h})$ que também contenha o ponto p, teremos em $\otimes_R^a \mathsf{T}_pV \otimes_R^b \mathsf{T}_p^*V$ uma nova base local de coordenadas

$$\mathcal{B}\big(\underline{U},\ \underline{h},\ p\big) = \left\{ \frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\bigg|_p \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial y^{j_a}}\bigg|_p \otimes_{\mathbb{R}} dy^{j_{a+1}}_p \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} dy^{j_{a+b}}_p,\ \ j_k \in \{1,\ \ldots,\ n\} \text{ para todo } k \right\}.$$

O mesmo tensor T de (33.24) poderá ser escrito na forma

$$T = \underline{T}^{j_1\cdots j_a}{}_{j_{a+1}\cdots j_{a+b}}(p)\ \frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\bigg|_p \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial y^{j_a}}\bigg|_p \otimes_{\mathbb{R}} dy^{j_{a+1}}_p \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} dy^{j_{a+b}}_p\ , \tag{33.28}$$

com novas componentes $\underline{T}^{j_1\cdots j_a}{}_{j_{a+1}\cdots j_{a+b}}(p)$. Por (33.17) e (33.23), e pela multilinearidade do produto tensorial, podemos retornar de (33.28) à base $\mathcal{B}\big(\underline{U},\ \underline{h},\ p\big)$, obtendo

$$\begin{aligned} T &= T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}(p)\ \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_p \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\bigg|_p \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+1}}_p \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+b}}_p \\ &= T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}(p) \left(\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_a}}{\partial x^{i_a}}\right) \left(\frac{\partial x^{i_{a+1}}}{\partial y^{j_{a+1}}} \cdots \frac{\partial x^{i_{a+b}}}{\partial y^{j_{a+b}}}\right) \frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\bigg|_p \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial y^{j_a}}\bigg|_p \otimes_{\mathbb{R}} dy^{j_{a+1}}_p \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} dy^{j_{a+b}}_p\ , \end{aligned}$$

com as derivadas $\frac{\partial y^k}{\partial x^l}$ e $\frac{\partial x^l}{\partial y^k}$ calculadas em $h(p)$ e $\underline{h}(p)$, respectivamente. Comparando a (33.28), obtemos a importante *regra de transformação de componentes de tensores por mudanças de cartas*:

$$\underline{T}^{j_1\cdots j_a}{}_{j_{a+1}\cdots j_{a+b}}(p) = \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_a}}{\partial x^{i_a}}\ \frac{\partial x^{i_{a+1}}}{\partial y^{j_{a+1}}} \cdots \frac{\partial x^{i_{a+b}}}{\partial y^{j_{a+b}}}\ T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}(p)\ . \tag{33.29}$$

A expressão (33.29) é empregada com muita frequência na Teoria da Relatividade Geral e na Geometria Diferencial. Um tanto incorretamente, ela é tomada por alguns autores como definição da noção de tensor.

Para outros tensores de tipo $(a,\ b)$ há expressões análogas. Por exemplo, para as componentes dos tensores A, B e C de (33.25)–(33.27), teremos as transformações:

$$\begin{aligned} \underline{A}^{ij}{}_k(p) &= \frac{\partial y^i}{\partial x^r}\frac{\partial y^j}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial y^k}\ A^{rs}{}_t(p)\ , \\ \underline{B}^i{}_j{}^k(p) &= \frac{\partial y^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial y^j}\frac{\partial y^k}{\partial x^t}\ B^r{}_s{}^t(p)\ , \\ \underline{C}_i{}^{jk}(p) &= \frac{\partial x^r}{\partial y^i}\frac{\partial y^j}{\partial x^s}\frac{\partial y^k}{\partial x^t}\ C_r{}^{st}(p)\ . \end{aligned}$$

Mais uma vez chamamos a atenção do estudante iniciante para o ordenamento e disposição dos índices.

O espaço dual de um produto tensorial como $\otimes_{\mathbb{R}}^a \mathsf{T}_pV \otimes_{\mathbb{R}}^b \mathsf{T}_p^*V$ pode ser identificado com o espaço $\otimes_{\mathbb{R}}^a \mathsf{T}_p^*V \otimes_{\mathbb{R}}^b \mathsf{T}_pV$, conforme discutimos nas supracitadas Seções 2.3.5 e 2.3.6. No Capítulo 34, página 1747, indicaremos como o uso de um tensor métrico conduz a uma aplicação natural entre ambos os espaços e de que forma isso se reflete nas componentes de tensores.

33.2.3.1 Traços de Tensores. Contração de Índices

A noção de traço, familiar na Álgebra Linear (vide Seção 10.2.3, página 523), pode ser introduzida também para operadores lineares agindo no espaço tangente ou no espaço cotangente a um ponto de uma variedade diferenciável. Descrevemos aqui como isso é feito em ambos os casos introduzindo também a notação apropriada.

• **O traço de uma aplicação entre espaços tangentes**

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e seja $V : \mathsf{T}_pM \to \mathsf{T}_pM$ uma aplicação linear de T_pM em si mesmo, de sorte que, em uma base de coordenadas $\big\{\frac{\partial}{\partial x^1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x^m}\big\}$, tenhamos $V\frac{\partial}{\partial x^a} = \sum_{b=1}^m V^b_a \frac{\partial}{\partial x^b}$. Naturalmente, V define um elemento de $\mathsf{T}_pM \otimes \mathsf{T}_p^*M$, um tensor de tipo $(1,\ 1)$, a saber, podemos identificar $V = \sum_{a=1}^m \sum_{b=1}^m V^b_a \frac{\partial}{\partial x^b} \otimes dx^a$.

Se $V_1 : \mathsf{T}_pM \to \mathsf{T}_pM$ e $V_2 : \mathsf{T}_pM \to \mathsf{T}_pM$ são duas tais aplicações lineares com componentes $(V_1)^b{}_a$ e $(V_2)^b{}_a$, respectivamente, em uma base local de coordenadas, é fácil ver que, com as convenções acima, temos

$$\big(V_1V_2\big)^c{}_a = \sum_{b=1}^m (V_1)^c{}_b\,(V_2)^b{}_a\ , \tag{33.30}$$

para as componentes de V_1V_2 na mesma base local de coordenadas. Verifique!

Se $\{\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_m\}$ é uma base em T_pM e $\{\mathbf{e}^1,\ \ldots,\ \mathbf{e}^m\}$ é a correspondente base dual no espaço cotangente T_p^*M definimos o traço de V por

$$\mathrm{Tr}(V) := \sum_{k=1}^m \langle \mathbf{e}^k,\ V\mathbf{e}_k\rangle\ . \tag{33.31}$$

A expressão do lado direito independe da particular base $\{\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_m\}$ escolhida. De fato, expressando os elementos de $\{\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_m\}$ na base de coordenadas $\big\{\frac{\partial}{\partial x^1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x^m}\big\}$ como em (33.18) e expressando os elementos da base dual $\{\mathbf{e}^1,\ \ldots,\ \mathbf{e}^m\}$ na base $\{dx^1,\ \ldots,\ dx^m\}$ como em (33.21), teremos

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(V) = \sum_{k=1}^m \langle \mathbf{e}^k,\ V\mathbf{e}_k\rangle &= \sum_{k=1}^m\sum_{c=1}^m\sum_{d=1}^m E^k{}_c E_k{}^d \left\langle dx^c,\ V\frac{\partial}{\partial x^d}\right\rangle \\ &= \sum_{c=1}^m\sum_{d=1}^m \underbrace{\left(\sum_{k=1}^m E^k{}_c E_k{}^d\right)}_{\overset{(33.19)}{=}\ \delta_c{}^d} \left\langle dx^c,\ V\frac{\partial}{\partial x^d}\right\rangle \\ &= \sum_{c=1}^m \left\langle dx^c,\ V\frac{\partial}{\partial x^c}\right\rangle\ , \end{aligned} \tag{33.32}$$

que é a expressão de $\mathrm{Tr}(V)$ na base de coordenadas $\big\{\frac{\partial}{\partial x^1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x^m}\big\}$. Assim, $\mathrm{Tr}(V)$ não depende da particular base escolhida, nem do particular sistema de coordenadas escolhido, possuindo, portanto, uma natureza escalar. Note-se que

$$\mathrm{Tr}(V) = \sum_{c=1}^m \left\langle dx^c,\ V\frac{\partial}{\partial x^c}\right\rangle = \sum_{c=1}^m\sum_{d=1}^m V^d{}_c \underbrace{\left\langle dx^c,\ \frac{\partial}{\partial x^d}\right\rangle}_{=\delta^c{}_d}$$

e, portanto,

$$\mathrm{Tr}(V) = \sum_{c=1}^m V^c{}_c\ , \tag{33.33}$$

permitindo expressar $\mathrm{Tr}(V)$ em termos dos coeficientes de V em qualquer base de coordenadas. É claro, por essas considerações sobre a invariância com relação à escolha de base, que $\mathrm{Tr}(V)$ é uma grandeza escalar, ou seja, um tensor de posto 0.

Como se vê em (33.33), em uma carta local de coordenadas, o processo de tomada do traço de V consiste em tomar-se as componentes $V^a{}_b$ com índices iguais e somar sobre os mesmos. Esse processo é denominado *contração de índices*.

Se V_1 e V_2 são aplicações lineares em T_pM, então, usando (33.30), temos

$$\mathrm{Tr}(V_1V_2) \;=\; \sum_{a=1}^{m}\big(V_1V_2\big)^a{}_a \;=\; \sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}(V_1)^a{}_b\,(V_2)^b{}_a \;=\; \sum_{b=1}^{m}\left(\sum_{a=1}^{m}(V_2)^b{}_a\,(V_1)^a{}_b\right) \;=\; \sum_{b=1}^{m}\big(V_2V_1\big)^b{}_b \;=\; \mathrm{Tr}(V_2V_1)\;,$$

o que estabelece a chamada *propriedade cíclica do traço*:

$$\mathrm{Tr}(V_1V_2) \;=\; \mathrm{Tr}(V_2V_1)\;. \tag{33.34}$$

• **O traço de uma aplicação entre espaços cotangentes**

Seja agora $W:\mathsf{T}^*_pM\to\mathsf{T}^*_pM$ uma aplicação linear de T^*_pM em si mesmo, de sorte que, em uma base de coordenadas $\big\{dx^1,\;\ldots,\;dx^m\big\}$, tenhamos $Wdx^a=\sum_{b=1}^m W_b{}^a dx^b$. Naturalmente, W define um elemento de $\mathsf{T}^*_pM\otimes\mathsf{T}_pM$, um tensor de tipo $(1,\;1)$, a saber, podemos identificar $W=\sum_{a=1}^m\sum_{b=1}^m W_b{}^a dx^b\otimes\frac{\partial}{\partial x^a}$.

Se $W_1:\mathsf{T}^*_pM\to\mathsf{T}^*_pM$ e $W_2:\mathsf{T}^*_pM\to\mathsf{T}^*_pM$ são duas tais aplicações lineares com componentes $(W_1)_b{}^a$ e $(W_1)_b{}^a$, respectivamente, em uma base dual local de coordenadas, é fácil ver que, com as convenções acima, temos

$$\big(W_1W_2\big)_c{}^a \;=\; \sum_{b=1}^{m}(W_1)_c{}^b\,(W_2)_b{}^a\;, \tag{33.35}$$

para as componentes de W_1W_2 na mesma base dual local de coordenadas. Verifique!

Como acima, se $\{\mathbf{e}_1,\;\ldots,\;\mathbf{e}_m\}$ é uma base em T_pM e $\{\mathbf{e}^1,\;\ldots,\;\mathbf{e}^m\}$ é a correspondente base dual no espaço cotangente T^*_pM definimos o traço de W por

$$\mathrm{Tr}(W) \;:=\; \sum_{k=1}^{m}\langle W\mathbf{e}^k,\;\mathbf{e}_k\rangle\;. \tag{33.36}$$

De forma totalmente análoga ao que fizemos acima, podemos provar que $\mathrm{Tr}(W)$ não depende da particular base escolhida e que, para a base de coordenadas original tem-se

$$\mathrm{Tr}(W) \;=\; \sum_{a=1}^{m}W_a{}^a\;. \tag{33.37}$$

Novamente, $\mathrm{Tr}(W)$ é uma grandeza escalar, ou seja, um tensor de posto 0. Mais uma vez vemos em (33.37) o processo de *contração de índices*.

E. 33.10 *Exercício*. Usando (33.35), estabeleça a *propriedade cíclica do traço*:

$$\mathrm{Tr}(W_1W_2) \;=\; \mathrm{Tr}(W_2W_1)\;, \tag{33.38}$$

válida para quaisquer aplicações lineares $W_1:\mathsf{T}^*_pM\to\mathsf{T}^*_pM$ e $W_2:\mathsf{T}^*_pM\to\mathsf{T}^*_pM$. ✠

• **Traços de tensores gerais**

As definições de traço acima podem ser estendidas a tensores gerais. Tomemos como exemplo um tensor de tipo $(a,\;b)$ da forma

$$T \;=\; T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}\,\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\;\otimes\;\cdots\;\otimes\;\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\otimes_{\mathbb{R}}dx^{i_{a+1}}\;\otimes\;\cdots\otimes dx^{i_{a+b}}\;\in\;\otimes^a_{\mathbb{R}}\mathsf{T}_pM\otimes^b_{\mathbb{R}}\mathsf{T}^*_pM\;,$$

(doravante abandonamos o subíndice $\mathbb{R}$ nos produtos tensoriais). Obtemos um tensor de tipo $(a-1,\;b-1)$ efetuando o processo de contração de índices, contraindo um índice superior com um inferior. Há diversas formas de fazê-lo, uma delas, a título de ilustração, é obtida contraindo-se o índice superior i_a com o índice inferior i_{a+b}, resultando em

$$\sum_{k=1}^{m}T^{i_1\cdots i_{a-1}k}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b-1}k}\,\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\;\otimes\;\cdots\;\otimes\;\frac{\partial}{\partial x^{i_{a-1}}}\otimes_{\mathbb{R}}dx^{i_{a+1}}\;\otimes\;\cdots\otimes dx^{i_{a+b-1}}\;\in\;\otimes^{a-1}_{\mathbb{R}}\mathsf{T}_pM\otimes^{b-1}_{\mathbb{R}}\mathsf{T}^*_pM\;.$$

Se escolheremos contrair outro par de índices, obteríamos um outro tensor, em princípio distinto, também de tipo $(a-1,\;b-1)$. Claro está também que esse processo de contração de pares de índices pode ser repetido, conduzindo a tensores de tipos ainda menores.

Esses tensores obtidos por contrações de índices de T são denominados *traços parciais* do tensor T. Na literatura física, notadamente na Teoria da Relatividade Geral, mas também na Teoria de Grupos e na Teoria de Spinores, essas operações de contração de índices são empregadas muito frequentemente.

33.2.3.2 Transposição de Tensores

Seja M uma variedade diferenciável e seja $V:\mathsf{T}_pM\to\mathsf{T}_pM$ uma aplicação linear de T_pM em si mesmo, de sorte que, em uma base de coordenadas $\big\{\frac{\partial}{\partial x^1},\;\ldots,\;\frac{\partial}{\partial x^m}\big\}$, tenhamos $V\frac{\partial}{\partial x^a}=\sum_{b=1}^m V^b_a\,\frac{\partial}{\partial x^b}$. Naturalmente, V define um elemento de $\mathsf{T}_pM\otimes\mathsf{T}^*_pM$, um tensor de tipo $(1,\;1)$, a saber, podemos identificar $V=\sum_{a=1}^m\sum_{b=1}^m V^b_a\,\frac{\partial}{\partial x^b}\otimes dx^a$.

Definimos $V^T:\mathsf{T}^*_pM\to\mathsf{T}^*_pM$ como a aplicação linear definida por

$$\big\langle V^T\omega,\alpha\big\rangle_p \;=\; \big\langle\omega,V\alpha\big\rangle_p \tag{33.39}$$

para todos $\alpha\in\mathsf{T}_pM$ e todos $\omega\in\mathsf{T}^*_pM$. A aplicação linear V^T é dita ser a *transporta* da aplicação linear V. Em uma base local temos $\big(V^T\big)dx^a=\big(V^T\big)_b{}^a dx^b$ e é elementar constatar da definição (33.39) que

$$\big(V^T\big)_b{}^a \;=\; V^a_b\;.$$

Seja agora $W:\mathsf{T}^*_pM\to\mathsf{T}^*_pM$ uma aplicação linear de T^*_pM em si mesmo, de sorte que, em uma base dual de coordenadas $\big\{dx^1,\;\ldots,\;dx^m\big\}$, tenhamos $Wdx^a=\sum_{b=1}^m W_b{}^a dx^b$. Naturalmente, W define um elemento de $\mathsf{T}^*_pM\otimes\mathsf{T}_pM$, um tensor de tipo $(1,\;1)$, a saber, podemos identificar $W=\sum_{a=1}^m\sum_{b=1}^m W_b{}^a dx^b\otimes\frac{\partial}{\partial x^a}$.

Definimos $W^T:\mathsf{T}_pM\to\mathsf{T}_pM$ como a aplicação linear definida por

$$\big\langle\omega,W^T\alpha\big\rangle_p \;=\; \big\langle W\omega,\alpha\big\rangle_p \tag{33.40}$$

para todos $\alpha\in\mathsf{T}_pM$ e todos $\omega\in\mathsf{T}^*_pM$. A aplicação linear W^T é dita ser a *transporta* da aplicação linear W. Em uma base dual local temos $\big(W^T\big)\frac{\partial}{\partial x^a}=\big(W^T\big)^b{}_a\,\frac{\partial}{\partial x^b}$ e é elementar constatar da definição (33.39) que

$$\big(W^T\big)^b{}_a \;=\; W_a{}^b\;.$$

Com as definições acima é trivial provar os seguintes fatos:

$$\big(V^T\big)^T \;=\; V\;,\qquad \big(W^T\big)^T \;=\; W\;,\qquad \mathrm{Tr}\big(V^T\big) \;=\; \mathrm{Tr}(V)\qquad\text{e}\qquad \mathrm{Tr}\big(W^T\big) \;=\; \mathrm{Tr}(W) \tag{33.41}$$

para quaisquer aplicações lineares $V:\mathsf{T}_pM\to\mathsf{T}_pM$ e $W:\mathsf{T}^*_pM\to\mathsf{T}^*_pM$.

E. 33.11 *Exercício*. Verifique! ✠

E. 33.12 *Exercício*. Mostre, usando as definições (33.39) e (33.40) que valem

$$\big(V_1V_2\big)^T \;=\; V_2^TV_1^T\qquad\text{e}\qquad \big(W_1W_2\big)^T \;=\; W_2^TW_1^T \tag{33.42}$$

para quaisquer aplicações lineares $V_k:\mathsf{T}_pM\to\mathsf{T}_pM$, $k=1,\;2$, e $W_k:\mathsf{T}^*_pM\to\mathsf{T}^*_pM$, $k=1,\;2$,. ✠

Note-se que as operações de transposição definidas acima mapeiam elementos de $\mathsf{T}_pM\otimes\mathsf{T}^*_pM$ em elementos de $\mathsf{T}^*_pM\otimes\mathsf{T}_pM$ e vice-versa, a saber, da seguinte forma (aqui usamos novamente a convenção de Einstein):

$$\left(V^b_a\,\frac{\partial}{\partial x^b}\otimes dx^a\right)^T \;=\; V^b_a\,dx^a\otimes\frac{\partial}{\partial x^b}\qquad\text{e}\qquad \left(W_b{}^a dx^b\otimes\frac{\partial}{\partial x^a}\right)^T \;=\; W_b{}^a\,\frac{\partial}{\partial x^a}\otimes dx^b\;.$$

E. 33.13 *Exercício*. Verifique! ✠

Em particular, valem

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\otimes dx^b\right)^T \;=\; dx^b\otimes\frac{\partial}{\partial x^a} \qquad \text{e} \qquad \left(dx^a\otimes\frac{\partial}{\partial x^b}\right)^T \;=\; \frac{\partial}{\partial x^b}\otimes dx^a\;.$$

Nesse sentido, a operação de transposição pode ser generalizada de forma óbvia para tensores de ordem superior. Não entraremos nos detalhes aqui, por serem de interesse superficial no caso geral.

Na Seção 34.1.1m página 1758, apresentaremos uma outra noção de transposição, a saber, com respeito a um tensor métrico.

33.2.4 Aplicações Entre Variedades Diferenciáveis

A noção de aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis foi introduzida à página 1687. Nesta seção vamos estender um tanto a análise desse conceito.

33.2.4.1 A Diferencial de Uma Aplicação Entre Variedades. "Pullback" e "Pushforward"

Sejam M_1 e M_2 duas variedades diferenciáveis de dimensões m_1 e m_2, respectivamente. Sejam $\mathcal{A}_{M_1}=\{(A^1_\alpha,\ h^1_\alpha),\ \alpha\in\Lambda_1\}$ e $\mathcal{A}_{M_2}=\{(A^2_\beta,\ h^2_\beta),\ \beta\in\Lambda_2\}$ atlas infinitamente diferenciáveis em M_1 e M_2, respectivamente. Toda aplicação diferenciável $\varphi: M_1\to M_2$ induz naturalmente uma aplicação entre os espaços tangentes de M_1 e M_2, denominada *aplicação diferencial* induzida por φ, ou simplesmente a *diferencial* de φ, da qual trataremos no que segue.

Seja $p\in M_1$ e seja, para algum $\epsilon>0$ conveniente, $c_1:(-\epsilon,\ \epsilon)\to M_1$ uma curva contínua e diferenciável definida em M_1 com $c(0)=p$. Por simplicidade suporemos que ϵ é pequeno o suficiente de modo que toda a imagem de c esteja contida dentro de uma carta local A^1_α que contém p. Seja $c_2:=\varphi\circ c_1:(-\epsilon,\ \epsilon)\to M_2$ a curva em M_2 obtida pela imagem de c_1 por φ. Se ϵ for pequeno o suficiente, c_2 não terá autointersecções (ou seja, será injetora na sua imagem). Naturalmente, tem-se $c_2(0)=\varphi(p)$. A chamada *aplicação diferencial* induzida por φ, denotada por $d\varphi:\mathsf{T}_pM_1\to\mathsf{T}_{\varphi(p)}M_2$, é a aplicação que, para cada curva c_1 como acima, associa o vetor tangente $\dot{c}_1(0)$ à curva c_1 em p ao vetor tangente $\dot{c}_2(0)$ à curva c_2 em $\varphi(p)$:

$$d\varphi_p\big(\dot{c}_1(0)\big)\;=\;\dot{c}_2(0)\;. \tag{33.43}$$

Como veremos no que segue, essa aplicação está bem definida e é linear, enquanto aplicação entre os espaços vetoriais T_pM_1 e $\mathsf{T}_{\varphi(p)}M_2$. Na Proposição 33.6, adiante, apresentaremos circunstâncias sob as quais a aplicação diferencial é um isomorfismo.

Seja a carta local de coordenadas $(A^1_\alpha,\ h^1_\alpha)$ com $p\in A^1_\alpha$, cujas coordenadas denotaremos por $(x^1,\ \ldots,\ x^{m_1})$. Consideremos também em M_2 a carta local de coordenadas $(A^2_\beta,\ h^2_\beta)$ com $\varphi(p)\in A^2_\beta$, cujas coordenadas denotaremos por $(y^1,\ \ldots,\ y^{m_2})$. Com essas coordenadas, o conjunto de vetores $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p,\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x^{m_1}}\Big|_p\right\}$ define uma base em T_pM_1, enquanto que o conjunto de vetores $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_{\varphi(p)},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial y^{m_2}}\Big|_{\varphi(p)}\right\}$ define uma base em $\mathsf{T}_{\varphi(p)}M_2$.

Como φ é suposta ser diferenciável, a função $h^2_\beta\circ\varphi\circ(h^1_\alpha)^{-1}$ do aberto $h^1_\alpha(A^1_\alpha)\subset\mathbb{R}^{m_1}$ no aberto $h^2_\beta(A^2_\beta)\subset\mathbb{R}^{m_2}$ é diferenciável. Coerentemente com a notação acima, vamos denotá-la por

$$\big(h^2_\beta\circ\varphi\circ(h^1_\alpha)^{-1}\big)(x^1,\ \ldots,\ x^{m_1})\;=\;\Big(y^1\big(x^1,\ \ldots,\ x^{m_1}\big),\ \ldots,\ y^{m_2}\big(x^1,\ \ldots,\ x^{m_1}\big)\Big)\;.$$

Considere-se as curvas $h^1_\alpha\circ c_1$ e $h^2_\beta\circ c_2$ definidas nos abertos $h^1_\alpha(A^1_\alpha)\subset\mathbb{R}^{m_1}$ e $h^2_\beta(A^2_\beta)\subset\mathbb{R}^{m_2}$, respectivamente. Coerentemente com a notação acima, parametrizaremos essas curvas por

$$(h^1_\alpha\circ c_1)(t)\;=\;\big(x^1(t),\ \ldots,\ x^{m_1}(t)\big) \qquad \text{e} \qquad (h^2_\beta\circ c_2)(t)\;=\;\big(y^1(t),\ \ldots,\ y^{m_2}(t)\big)\;,$$

respectivamente, com $t\in(-\epsilon,\ \epsilon)$. Como $h^2_\beta\circ c_2=h^2_\beta\circ\varphi\circ c_1=\big(h^2_\beta\circ\varphi\circ(h^1_\alpha)^{-1}\big)\circ\big(h^1_\alpha\circ c_1\big)$, podemos escrever

$$(h^2_\beta\circ c_2)(t)\;=\;\big(y^1(t),\ \ldots,\ y^{m_2}(t)\big)\;=\;\Big(y^1\big(x^1(t),\ \ldots,\ x^{m_1}(t)\big),\ \ldots,\ y^{m_2}\big(x^1(t),\ \ldots,\ x^{m_1}(t)\big)\Big)\;.$$

Pela regra da cadeia, vale

$$\left(\frac{d}{dt}h^2_\beta\circ c_2\right)\;=\;D\Big(h^2_\beta\circ\varphi\circ(h^1_\alpha)^{-1}\Big)\left(\frac{d}{dt}h^1_\alpha\circ c_1\right)\;, \tag{33.44}$$

onde (comparar com (33.1)),

$$D\Big(h^2_\beta\circ\varphi\circ(h^1_\alpha)^{-1}\Big)\;=\;\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^{m_1}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial y^{m_2}}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^{m_2}}{\partial x^{m_1}}\end{pmatrix}\;.$$

Ou seja, temos para cada $j=1,\ \ldots,\ m_2$,

$$\dot{y}_j(t)\;=\;\sum_{k=1}^{m_1}\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^k}\big(x^1(t),\ \ldots,\ x^{m_1}(t)\big)\right)\dot{x}_k(t)\;. \tag{33.45}$$

Os vetores tangentes

$$\sum_{k=1}^{m_1}\dot{x}_k(0)\,\frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_p \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{m_2}\dot{y}_k(0)\,\frac{\partial}{\partial y^k}\bigg|_{\varphi(p)}$$

associados às curvas c_1 e c_2 nos pontos p e $\varphi(p)$, respectivamente, têm suas componentes relacionadas por (33.45) (em $t=0$).

Essas observações acima permitem-nos definir a aplicação linear $d\varphi_p:\mathsf{T}_pM_1\to\mathsf{T}_{\varphi(p)}M_2$, denominada *aplicação diferencial* induzida por φ em p, ou simplesmente a *diferencial* de φ em p, por

$$d\varphi_p\;:=\;D\Big(h^2_\beta\circ\varphi\circ(h^1_\alpha)^{-1}\Big) \tag{33.46}$$

(em cartas locais), ou seja,

$$d\varphi_p\left(\sum_{a=1}^{m_1}v^a\,\frac{\partial}{\partial x^a}\bigg|_p\right)\;:=\;\sum_{k=1}^{m_2}\left[\sum_{l=1}^{m_1}\frac{\partial y^k}{\partial x^l}\,\big(h^1_\alpha(\varphi(p))\big)\;v^l\right]\frac{\partial}{\partial y^k}\bigg|_{\varphi(p)}\;. \tag{33.47}$$

Em termos das componentes $(v^1,\ \ldots,\ v^{m_1})$ de $v\equiv\sum_{a=1}^{m_1}v^a\,\frac{\partial}{\partial x^a}\big|_p$ na base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p,\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x^{m_1}}\big|_p\right\}$ de T_pM_1, podemos escrever, em notação matricial,

$$\big(d\varphi_p\big)v\;=\;\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^{m_1}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial y^{m_2}}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^{m_2}}{\partial x^{m_1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\ \vdots\\ v^{m_1}\end{pmatrix}\;, \tag{33.48}$$

o vetor coluna resultante fornecendo as coordenadas da imagem na base $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}\big|_{\varphi(p)},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial y^{m_2}}\big|_{\varphi(p)}\right\}$ de $\mathsf{T}_{\varphi(p)}M_2$. Como acima, as derivadas parciais $\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}$ são calculadas em $h^1_\alpha\big(\varphi(p)\big)$.

Como discutiremos abaixo, a aplicação diferencial $d\varphi_p:\mathsf{T}_pM_1\to\mathsf{T}_{\varphi(p)}M_2$ é também dita ser o *pushforward* associado a $\varphi:M_1\to M_2$.

E. 33.14 *Exercício importante*. Mostre que $d\varphi_p:\mathsf{T}_pM_1\to\mathsf{T}_{\varphi(p)}M_2$, definida acima, não depende das particulares cartas locais de coordenadas $(A^1_\alpha,\ h^1_\alpha)$ e $(A^2_\beta,\ h^2_\beta)$ adotadas, que satisfaçam $p\in A^1_\alpha$ e $\varphi(p)\in A^2_\beta$. Sugestão: em (33.44) use as funções de transição e a regra da cadeia. ✠

Como se compreende de (33.43) e da discussão acima, se $w\in\mathsf{T}_pM_1$, podemos determinar $d\varphi_p(w)$ da seguinte forma: toma-se uma curva $c(t)$ em M_1 com $c(0)=p$ e $\dot{c}(0)=w$ e calcula-se o vetor tangente à curva $\varphi\big(c(t)\big)$ no ponto $t=0$:

$$d\varphi_p(w)\;=\;\frac{d}{dt}\varphi\big(c(t)\big)\bigg|_{t=0}\;. \tag{33.49}$$

• **A aplicação diferencial e difeomorfismos**

A útil proposição a seguir estabelece uma relação entre difeomorfismos e aplicações diferenciais que sejam isomorfismos.

Proposição 33.6 *Sejam M_1 e M_2 duas variedades diferenciáveis de mesma dimensão m. Seja $f : M_1 \to M_2$ diferenciável e seja $df_p : \mathsf{T}_pM_1 \to \mathsf{T}_{f(p)}M_2$ a aplicação diferencial induzida por f em $p \in M_1$. Valem as seguintes afirmações:*

1. *Se f for um difeomorfismo, então a aplicação diferencial df_p é um isomorfismo para todo $p \in M_1$.*
2. *Se para algum $p \in M_1$ a aplicação diferencial df_p for um isomorfismo, então f é um difeomorfismo local em p.* □

Note-se que a afirmação do item 2, acima, é uma recíproca parcial à afirmação do item 1.

Prova da Proposição 33.6. Sejam M_1 e M_2 duas variedades diferenciáveis e seja $f : M_1 \to M_2$ diferenciável. Seja $p \in M_1$ e seja a carta local de coordenadas $(A^1_\alpha,\ h^1_\alpha)$ com $p \in A^1_\alpha$, cujas coordenadas denotaremos por $(x^1,\ \ldots,\ x^m)$. Consideremos também em M_2 a carta local de coordenadas $(A^2_\beta,\ h^2_\beta)$ com $f(p) \in A^2_\beta$, cujas coordenadas denotaremos por $(y^1,\ \ldots,\ y^m)$.

Se f for um difeomorfismo, a função $h^2_\beta \circ f \circ (h^1_\alpha)^{-1}$ do aberto $h^1_\alpha(A^1_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ no aberto $h^2_\beta(A^2_\beta) \subset \mathbb{R}^m$ é diferenciável e tem inversa diferenciável. Consequentemente[20], o determinante Jacobiano $\det\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^m}{\partial x^m} \end{pmatrix}$ é não nulo, o que implica que df_q é um isomorfismo para todo $q \in A^1_\alpha$ (por ser descrita por uma matriz $m \times m$ invertível) e, portanto, em toda M_1, já que M_1 é recoberto pelas cartas $\{A^1_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$. Isso provou o item 1.

Por outro lado, se para algum $p \in M_1$ a aplicação diferencial df_p for um isomorfismo, então a matriz $D\big(h^2_\beta \circ f \circ (h^1_\alpha)^{-1}\big)$ tem determinante não nulo em p. O Teorema da Função Inversa, Teorema 25.9, página 1398 (para um tratamento em $\mathbb{R}^n$, vide [320]-[321] ou [108]), garante que existe uma vizinhança de $h^1_\alpha(p)$ onde $h^2_\beta \circ f \circ (h^1_\alpha)^{-1}$ é inversível, sendo essa inversa diferenciável. Isso garante que existe uma vizinhança de p onde f tem inversa e essa inversa é diferenciável, ou seja, garante que f é um difeomorfismo local em p. ■

• **Pontos críticos de aplicações diferenciáveis**

Como acima, sejam M_1 e M_2 duas variedades diferenciáveis de mesma dimensão m. Seja $f : M_1 \to M_2$ diferenciável e seja $df_p : \mathsf{T}_pM_1 \to \mathsf{T}_{f(p)}M_2$ a aplicação diferencial induzida por f em $p \in M_1$. Tendo em mente a Proposição 33.6, página 1708, a seguinte definição é relevante: um ponto $p_0 \in M_1$ é dito ser um *ponto crítico* da aplicação f se df_{p_0} não for um isomorfismo entre $\mathsf{T}_{p_0}M_1$ e $\mathsf{T}_{f(p_0)}M_2$. Se p_0 é um ponto crítico de f, então f não pode ser um difeomorfismo local em p_0.

• ***Pullback* e *pushforward***

Como antes, seja $f : M_1 \to M_2$ diferenciável, mas vamos supor adicionalmente que ela seja injetora em sua imagem $f(M_1) \subset M_2$.

Para cada $p \in M_1$, seja $df_p : \mathsf{T}_pM_1 \to \mathsf{T}_{f(p)}M_2$ a aplicação diferencial induzida por f em $p \in M_1$.

A aplicação df induz, para cada $q \in f(M_1) \subset M_2$ uma aplicação dual entre os espaços duais $\mathsf{T}^*_qM_2$ e $\mathsf{T}^*_{f^{-1}(q)}M_1$, denotada por $df^*_q : \mathsf{T}^*_qM_2 \to \mathsf{T}^*_{f^{-1}(q)}M_1$, a qual é definida da seguinte forma: para cada $U \in \mathsf{T}^*_qM_2$ definimos df^*_qU como sendo o elemento de $\mathsf{T}^*_{f^{-1}(q)}M_1$ tal que

$$\big\langle df^*_qU,\ V\big\rangle_{f^{-1}(q)} \ := \ \big\langle U,\ df_{f^{-1}(q)}V\big\rangle_q\,, \tag{33.50}$$

para todo $V \in \mathsf{T}_{f^{-1}(q)}M_1$.

A aplicação $df^*_q : \mathsf{T}^*_qM_2 \to \mathsf{T}^*_{f^{-1}(q)}M_1$ assim definida é dita ser o *pullback* de f. A nomenclatura segue a seguinte ideia: $f : M_1 \to M_2$ leva pontos de M_1 em M_2. A aplicação diferencial df_p leva vetores de T_pM_1 em $\mathsf{T}_{f(p)}M_2$ enquanto que df^*_q "puxa de volta" ("*pulls back*") vetores de $\mathsf{T}^*_qM_2$ para $\mathsf{T}^*_{f^{-1}(q)}M_1$.

Seguindo a mesma ideia, a aplicação diferencial df_p é também dita ser o *pushforward* de f.

[20] Vide, *e.g.*, [108, 321].

O leitor deve ser informado que há uma notação alternativa muito difundida para *pullbacks* e *pushforwards*: df é denotada por f_* enquanto que df^* é denotada por f^*. Ocasionalmente empregaremos também essa notação.

• **Representação de *pullbacks* em cartas locais**

O exercício que segue mostra como se pode expressar um *pullbacks* concretamente, em cartas locais.

E. 33.15 *Exercício*. Obtenha, usando a definição (33.50), o análogo das expressões em coordenadas locais (33.47) e (33.48) para o *pullback* $d\varphi^*$. A saber, mostre que para $d\varphi^*_q : \mathsf{T}^*_qM_2 \to \mathsf{T}^*_{\varphi^{-1}(q)}M_1$, teremos

$$\left\langle d\varphi^*_q dy^b_q,\ \left.\frac{\partial}{\partial x^a}\right|_{\varphi^{-1}(q)}\right\rangle_{\varphi^{-1}(q)} = \left\langle dy^b_q,\ d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}\left.\frac{\partial}{\partial x^a}\right|_{\varphi^{-1}(q)}\right\rangle_q$$

$$\overset{(33.47)}{=} \left\langle dy^b_q,\ \sum_{k=1}^{m_2}\frac{\partial y^k}{\partial x^a}\Big(h^1_\alpha\big(\varphi^{-1}(q)\big)\Big)\left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_q\right\rangle_q = \frac{\partial y^b}{\partial x^a}\Big(h^1_\alpha\big(\varphi^{-1}(q)\big)\Big)\,,$$

do que segue que

$$d\varphi^*_q\left(\sum_{b=1}^{m_2}\omega_b\,dy^b|_q\right) = \sum_{b=1}^{m_2}\sum_{l=1}^{m_1}\omega_b\,\frac{\partial y^b}{\partial x^l}\Big(h^1_\alpha\big(\varphi^{-1}(q)\big)\Big)\,dx^l|_{\varphi^{-1}(q)}\,. \tag{33.51}$$

Mostre que, em termos das componentes $(\omega_1,\ \ldots,\ \omega_{m_2})$ de $\omega \equiv \sum_{b=1}^{m_2}\omega_b\,dy^b|_q$ na base $\big\{dy^1|_q,\ \ldots,\ dy^{m_2}|_q\big\}$ de $\mathsf{T}^*_qM_2$, podemos escrever, em notação matricial,

$$d\varphi^*_q\,\omega = \begin{pmatrix}\omega_1 & \cdots & \omega_{m_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^{m_1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^{m_2}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^{m_2}}{\partial x^{m_1}}\end{pmatrix}, \tag{33.52}$$

o vetor linha resultante fornecendo as coordenadas da imagem na base $\Big\{dx^1_{\varphi^{-1}(q)},\ \ldots,\ dx^{m_1}_{\varphi^{-1}(q)}\Big\}$ de $\mathsf{T}^*_{\varphi^{-1}(q)}M_1$. As derivadas parciais $\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}$ são calculadas em $h^1_\alpha\big(\varphi^{-1}(q)\big)$. ✠

• ***Pullbacks* e *pushforwards* de funções**

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e seja $g : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Como M e $\mathbb{R}$ são variedades diferenciáveis, as noções de *pushforward* e *pullback* aplicam-se a g. Seguindo as definições, vemos que o *pushforward* $dg_p : \mathsf{T}_pM \to \mathsf{T}_p\mathbb{R}$ é expresso em uma carta local $(U,\ h)$ de M como

$$dg_p(v) \ \equiv\ dg_p\,v \ = \ \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial x^k}\big(h(p)\big)\,v^k \tag{33.53}$$

com $v = (v_1,\ \ldots,\ v_m) \in \mathsf{T}_pM$. Já o *pullback* $dg^*_p : \mathsf{T}^*_p\mathbb{R} \to \mathsf{T}^*_pM$ é expresso em uma carta local como

$$dg^*_p\,u \ = \ u\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial x^l}\big(h(p)\big)\,dx^l_p\,, \tag{33.54}$$

com $u \in \mathbb{R} \equiv \mathsf{T}_p\mathbb{R}$. Verifique!

Como é fácil ver, a aplicação dg_p definida em (33.53) é um elemento do espaço cotangente T^*_pM.

• **Composição de *pullbacks* e *pushforwards***

O exercício que segue mostra como compor *pullbacks* e *pushforwards*.

E. 33.16 *Exercício*. Sejam M_1, M_2 e M_3 três variedades diferenciáveis. Seja $f : M_1 \to M_2$, bijetora e diferenciável e seja $g : M_2 \to M_3$, injetora e diferenciável. Considere a composição $g \circ f : M_1 \to M_3$, injetora e diferenciável. Mostre que $d(g \circ f)_p : \mathsf{T}_pM_1 \to \mathsf{T}_{(g\circ f)(p)}M_3$, com $p \in M_1$, e $d(g \circ f)^*_q : \mathsf{T}^*_qM_3 \to \mathsf{T}^*_{(g\circ f)^{-1}(q)}M_1$, com $q \in (g \circ f)(M_1) \subset M_3$, satisfazem:

$$d(g \circ f)_p \ = \ dg_{f(p)}\,df_p \qquad \text{e} \qquad d(g \circ f)^*_q \ = \ df^*_{g^{-1}(q)}\,dg^*_q\,, \tag{33.55}$$

para todo $p \in M_1$ e todo $q \in (g \circ f)(M_1) \subset M_3$.

Na outra notação, essas relações ficam

$$(g \circ f)_* \;=\; g_* \, f_* \qquad \text{e} \qquad (g \circ f)^* \;=\; f^* \, g^* \,. \tag{33.56}$$

sendo que aqui omitimos os pontos onde as aplicações devem ser calculadas para a preservação da elegância.

Um caso interessante é aquele em que $M_3 = M_1$ e $g = f^{-1}$. Aqui, $g \circ f = \mathbf{id}_{M_1}$, a aplicação identidade de M_1. Assim, $d\big(f^{-1} \circ f\big)_p = d\big(\mathbf{id}_{M_1}\big)_p = \mathbf{id}_{\mathsf{T}_p M_1}$, a aplicação identidade em $\mathsf{T}_p M_1$ (a última igualdade é evidente, mas pode ser vista em (33.47) ou em (33.48)). Disso segue igualmente que $d\big(f^{-1} \circ f\big)^*_p = \mathbf{id}_{\mathsf{T}^*_p M_1}$. Agora, de (33.55) obtemos com isso que

$$\big(d(f^{-1})\big)_{f(p)} \;=\; \big((df)_p\big)^{-1} \qquad \text{e} \qquad \big(d(f^{-1})\big)^*_p \;=\; \big((df)^*_{f(p)}\big)^{-1} \,, \tag{33.57}$$

para todo $p \in M_1$. ✠

• ***Pullbacks* e *pushforwards* agindo sobre tensores**

Generalizar a ação de *pullbacks* e *pushforwards* sobre tensores é imediato. Tratemos de um caso relevante.

Seja $f : M_1 \to M_2$ um difeomorfismo. Seja, por exemplo, T um tensor de tipo $(0,\ k)$ em M_2 que se expressa em coordenadas locais em um ponto $q \in M_2$ como $T_q = T_{i_1 \cdots i_k}(q) dy^{i_1}_q \otimes \cdots \otimes dy^{i_k}_q$, com $q \in M_2$. Definimos (com uso da convenção de Einstein e simplificando um tanto a notação)

$$\big(f^* T\big)_p \;:=\; T_{i_1 \cdots i_k}\big(f(p)\big)\big(f^* dy^{i_1}_q\big) \otimes \cdots \otimes \big(f^* dy^{i_k}_q\big) \;=\; \left(T_{i_1 \cdots i_k}\big(f(p)\big) \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{j_k}}\right) dx^{j_1}_p \otimes \cdots \otimes dx^{j_k}_p \,, \tag{33.58}$$

sendo $p = f^{-1}(q) \in M_1$, para $q \in M_2$. Compare-se com (33.51).

Por simplicidade, usamos em (33.58) a mesma notação f^*, empregada para *pullbacks* usuais. Mais correto seria denotá-lo por $\big(f^*\big)^{\otimes r}$, o que teria a vantagem de marcar a dependência com r, mas evitamos fazê-lo.

É um exercício elementar, remetido ao estudante, constatar que a definição de (33.58) independe das particulares cartas locais de coordenadas usadas em M_1 e M_2. A expressão (33.58) será usada oportunamente no contexto de formas diferenciais (vide, em particular, Seção 35.1.2, página 1856).

33.2.4.2 Imersões, Mergulhos e Subvariedades

Temos agora elementos para apresentar mais algumas definições úteis ao estudo de variedades e suas aplicações. Aplicações diferenciáveis entre variedades diferenciáveis podem ser classificadas em determinados tipos, como *imersões*, *submersões* e *mergulhos suaves*, os quais conduzem a outras noções, como a de *subvariedade diferenciável* etc. Nesta breve seção introduziremos essas definições. Alguns exemplos são apresentados à página 1712 e outros são discutidos com algum detalhe na Seção 33.4, página 1725.

• **Imersões**

Sejam M e N duas variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M \to N$ é dita ser uma *imersão*[21] de M em N se for diferenciável e se $d\varphi_p : \mathsf{T}_p M \to \mathsf{T}_{\varphi(p)} N$ for injetora para todo $p \in M$, ou seja, se o posto[22] de $d\varphi_p$ for sempre igual à dimensão de M (naturalmente, isso requer que $\dim M \leq \dim N$). A diferença $\dim N - \dim M$ é denominada *codimensão* da imersão φ.

Note-se que uma imersão $\varphi : M \to N$ não é necessariamente injetora.

• **Submersões**

Sejam M e N duas variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \to N$ é dita ser uma *submersão*[23] de M em N se $d\varphi_p : \mathsf{T}_p M \to \mathsf{T}_{\varphi(p)} N$ for sobrejetora para todo $p \in M$, ou seja, se o posto de $d\varphi_p$ for sempre igual à dimensão de N (naturalmente, isso requer que $\dim M \geq \dim N$).

[21] "Immersion", em Inglês.

[22] Recordar que o *posto* de uma aplicação linear entre dois espaços vetoriais de dimensão finita é, por definição, a dimensão da imagem dessa aplicação.

[23] "Submersion", em Inglês.

• **Mergulhos topológicos**

A noção de mergulho[24] no contexto de Topologia Geral já foi definida na Seção 30.5.1.1, página 1518: se $(X,\ \tau_X)$ e $(Y,\ \tau_Y)$ são espaços topológicos, uma função $\varphi : X \to Y$ é dita ser um *mergulho topológico*, ou simplesmente um *mergulho*, de $(X,\ \tau_X)$ em $(Y,\ \tau_Y)$ se φ for um homeomorfismo entre X e sua imagem $\varphi(X)$ (adotando neste último conjunto a topologia relativa induzida por τ_Y em $\varphi(X)$).

Essa noção topológica de *mergulho* aplica-se também ao caso particular em que $(X,\ \tau_X)$ e $(Y,\ \tau_Y)$ são variedades topológicas.

Um mergulho topológico $\varphi : X \to Y$ é sempre uma aplicação injetora, contínua e com inversa $\varphi^{-1} : \varphi(X) \to X$ contínua (naturalmente, a aplicação inversa φ^{-1} só pode ser definida ma imagem $\varphi(X)$ de φ).

• **Mergulhos suaves**

Um mergulho topológico entre duas variedades diferenciáveis é dito ser um *mergulho suave* se for também uma imersão.

Advertimos o leitor para o fato que, no contexto de variedades diferenciáveis, *mergulhos suaves* são por vezes denominados simplesmente *mergulhos*.

Os Exemplos 33.3 e 33.4, página 1712, apresentam exemplos didáticos de aplicações diferenciáveis que não são imersões ou não são mergulhos.

• **Subvariedades topológicas**

Essa noção já foi introduzida e discutida na Seção 33.1.1, página 1684, e colocamos aqui a seguinte definição, inspirada na Proposição 33.4, página 1685:

Sejam $(X,\ \tau_X)$ e $(Y,\ \tau_Y)$ duas variedades topológicas sendo que $Y \subset X$ (assumimos X e Y não vazios). Então, $(Y,\ \tau_Y)$ é uma *subvariedade topológica* de $(X,\ \tau_X)$ se a função inclusão $i_{Y,X} : Y \to X$ for um mergulho topológico de $(Y,\ \tau_Y)$ em $(X,\ \tau_X)$. Como já comentamos, uma subvariedade topológica é por si só uma variedade topológica.

• **Subvariedades diferenciáveis**

Seja N uma variedade diferenciável e seja $M \subset N$ com $M \neq \emptyset$, sendo M uma subvariedade topológica de N e possuindo uma estrutura diferenciável que faz de si também uma variedade diferenciável.

Dizemos que M é uma *subvariedade diferenciável* de N se a inclusão $i_{M,N}$ for um mergulho suave de M em N.

Assim, a variedade diferenciável M será uma subvariedade diferenciável da variedade diferenciável N se $M \subset N$, se M for uma subvariedade topológica de N e se a inclusão $i_{M,N}$ for uma imersão da variedade diferenciável M na variedade diferenciável N.

Notas. Na Seção 33.4.2, página 1726, mostramos um exemplo de uma subvariedade diferenciável de $\mathbb{R}^{n+1}$: o gráfico de uma função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável.

É importante frisar que o fato de uma variedade diferenciável M ser topologicamente mergulhada em outra variedade diferenciável N não faz com que M seja uma subvariedade diferenciável de N. Na Seção 33.4.2.1, página 1728, mostramos que o cone n-dimensional pode ser tomado como uma variedade diferenciável (com uma escolha conveniente de estrutura diferenciável, apesar de não ser diferenciável, enquanto superfície, em seu vértice). Mostraremos, porém, que o cone n-dimensional **não é** *ipso facto* uma subvariedade diferenciável de $\mathbb{R}^{n+1}$, onde é topologicamente mergulhado. ♣

• **Superfícies regulares em $\mathbb{R}^n$**

Um conjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ é dito ser uma *superfície regular de dimensão m* (com $m \leq n$) se for uma subvariedade de dimensão m de $\mathbb{R}^n$ (com $\mathbb{R}^n$ sendo aqui a variedade diferenciável $\mathbb{R}^n$ padrão).

Mais sobre o tema será apresentado na Seção 33.4.3, página 1730.

• **Variedades suavemente mergulháveis**

Uma variedade diferenciável M é dita ser uma *variedade suavemente mergulhável* em uma variedade diferenciável N se existir um mergulho suave $\varphi : M \to N$ tal que $\varphi(M)$ seja uma subvariedade diferenciável de N.

[24] "Embedding", ou ainda "imbedding", em Inglês. "Plongement", em Francês. "Einbettung" em Alemão.

Com isso, podemos dizer que uma uma subvariedade diferenciável M de uma variedade diferenciável N é uma variedade suavemente mergulhada em N pela inclusão $i_{M,N}$.

• **Dois teoremas de Whitney sobre imersões e mergulhos suaves**

Mencionamos aqui dois importantes teoremas, ambos devidos a Hassler Whitney[25]. Suas demonstrações estão fora do escopo destas Notas (vide referências logo abaixo).

Teorema 33.3 (Teorema de Imersão de Whitney) *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m. Então, se $m > 1$, existe uma imersão de M em $\mathbb{R}^{2m-1}$.* □

Teorema 33.4 (Teorema de Mergulho de Whitney) *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m. Então, se $m > 0$, existe um mergulho suave de M em $\mathbb{R}^{2m}$.* □

Esses teoremas foram apresentados por Whitney entre 1936 e 1944 (para os trabalhos originais, vide [137]). Em 1936 Whitney demonstrou uma versão ligeiramente mais fraca dos teoremas acima: toda variedade diferenciável de dimensão m pode ser imersa em $\mathbb{R}^{2m}$ e toda variedade diferenciável de dimensão m pode ser mergulhada em $\mathbb{R}^{2m+1}$. Uma demonstração dessa versão mais fraca pode ser encontrada em [313], em [323] ou em [33]. A versão apresentada nos Teoremas 33.3 e 33.4 data de 1944 e faz uso de métodos muito mais sofisticados que os da versão de 1936. Vide [137].

Para uma demonstração de um teorema de mergulho para o caso de variedades topológicas compactas (porém, muito mais fraco, no que concerne às dimensões do espaço ambiente onde a variedade é mergulhada), vide Teorema 32.23, página 1640 e seguintes. Vide também o Comentário à página 1640.

O Teorema 33.4 evidencia um aspecto da noção de variedade diferenciável que merece alguma discussão. Ele nos informa que toda variedade diferenciável de dimensão m é difeomorfa a alguma superfície regular[26] de dimensão m em um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{2m}$. Com algum abuso de linguagem, isso significa que toda variedade diferenciável de dimensão finita *é* uma superfície regular em algum espaço $\mathbb{R}^n$ (denominado *espaço ambiente*).

Assim, variedades diferenciáveis podem ser abordadas de forma *extrínseca*, como superfícies regulares em algum espaço ambiente $\mathbb{R}^n$, ou de forma *intrínseca*, como espaços topológicos *per se*, sem referência a um espaço ambiente onde as mesmas possam ser mergulhadas.

Duas questões, aparentadas entre si, que aqui se colocam são: *1.* Por que não estudar variedades diferenciáveis apenas extrinsecamente, ou seja, apenas como superfícies regulares em algum espaço ambiente? *2.* Não seria a própria definição de variedade diferenciável uma definição supérflua ou espúria, já que os objetos abrangidos por ela reduzem-se a superfícies regulares?

A resposta a ambas as perguntas depende um tanto da inclinação filosófica de quem a formula e do que se deseja realizar com a resposta. O fato é que a abordagem extrínseca raramente conduz a resultados e noções fundamentais e úteis no estudo de propriedades gerais ou particulares de variedades. Na Teoria da Relatividade Geral, por exemplo, onde assume-se que o espaço-tempo seja uma variedade diferenciável, a abordagem extrínseca é espúria, pois não há (acredita-se) realidade física no espaço ambiente onde o espaço-tempo pode ser mergulhado.

33.2.4.3 Imersões e Mergulhos. Exemplos e Contraexemplos Simples

Os exemplos a seguir exibem aplicações diferenciáveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ que não são imersões (Exemplo 33.3) ou são imersões, mas não mergulhos (Exemplos 33.4, 33.5, 33.9 e 33.10). Diversas figuras os ilustram. Mais exemplos são tratados na Seção 33.4, página 1725.

Todos são bons exemplos para se ter em mente, pois ilustram as dificuldades que podem ocorrer com as noções de imersão e mergulho. Os Exemplos 33.3 e 33.4 e são encontrados, por exemplo, em [342].

Exemplo 33.3 A curva $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ expressa por $\phi(t) = \big(t^5,\ t^2\big)$ (vide Figura 33.1, esquerda, página 1713) é uma aplicação diferenciável, pois ϕ é diferenciável. A aplicação diferencial $d\phi(t) : \mathsf{T}_t\mathbb{R} \to \mathsf{T}_{\phi(t)}\mathbb{R}^2$ é dada por $d\phi(t) \equiv \phi'(t) = \big(5t^4,\ 2t\big)$. Assim, para $v \in \mathsf{T}_t\mathbb{R}$ (ou seja, $v \in \mathbb{R}$), temos $d\phi(t)v = \big(5t^4 v,\ 2tv\big)$. Vemos que se $t \neq 0$, $v \in \operatorname{Ker}\big(d\phi(t)\big)$ se e somente se $v = 0$. Assim,

[25] Hassler Whitney (1907–1989).
[26] A noção de superfície regular é discutida na Seção 33.4.3, página 1730.

$d\phi(t)$ é injetiva para $t \neq 0$. Sucede, porém, que para $t = 0$ tem-se $d\phi(0) = 0$ e, portanto, nesse ponto $d\phi$ não é injetora. Resumindo, concluímos que ϕ não é uma imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$, pois a aplicação diferencial $d\phi$ anula-se em $t = 0$, não sendo injetiva, portanto, nesse ponto. ♦

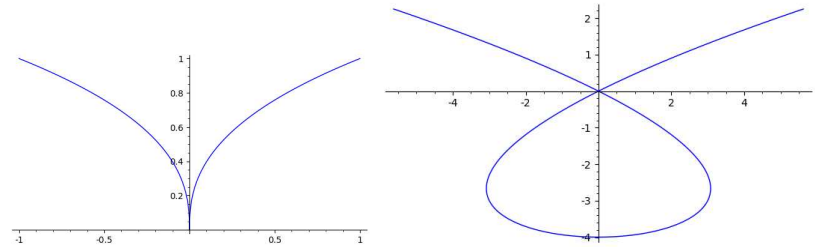

Figura 33.1: **Esquerda:** a curva $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(t) = \big(t^5,\ t^2\big)$ com $t \in \mathbb{R}$ (exibimos apenas o trecho com $t \in (-1,\ 1)$). Trata-se de uma aplicação diferenciável de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$, mas não uma imersão, pois $d\phi(t) = \big(5t^4,\ 2t\big)$ anula-se em $t = 0$.
Direita: a curva $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(t) = \big(t(t^2-4),\ t^2-4\big)$ com $t \in \mathbb{R}$ (exibimos apenas o trecho com $t \in (-5/2,\ 5/2)$). Trata-se de uma imersão, pois $d\phi(t) = \big(3t^2-4,\ 2t\big)$ não se anula. Não se trata, porém, de um mergulho, pois a curva possui uma autointerceptação. De fato, $\phi(2) = (0,\ 0) = \phi(-2)$, e, portanto, ϕ não é injetiva.

Exemplo 33.4 A curva $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ expressa por $\phi(t) = \big(t(t^2-4),\ t^2-4\big)$ é uma aplicação diferenciável. Tem-se também $d\phi(t) \equiv \phi'(t) = \big(3t^2-4,\ 2t\big)$, que não se anula para nenhum t. Assim, $d\phi$ é injetora e, portanto, ϕ é uma imersão. Não se trata, porém, de um mergulho, pois ϕ não é injetiva, ou seja, possui autointerceptações, como exibido no gráfico à direita da Figura 33.1, página 1713. De fato, é fácil constatar que $\phi(2) = (0,\ 0) = \phi(-2)$. ♦

Exemplo 33.5 Este exemplo talvez seja bastante elementar, mas vale a pena comentá-lo. Considere-se a curva $\mathbb{R} \ni t \mapsto \phi(t) \in \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(t) = \big(\cos(t),\ \operatorname{sen}(t)\big)$. Trata-se de uma imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ com $d\phi(t) = \big(-\operatorname{sen}(t),\ \cos(t)\big)$, que nunca se anula. Não se trata, porém, de um mergulho de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$, por ϕ não ser injetora: a curva ϕ percorre infinitas vezes o círculo de raio 1 centrado na origem em $\mathbb{R}^2$.

A situação é um tanto diferente se considerarmos o toro unidimensional $\mathbb{T}^1$ definido como um espaço quociente formado pelo intervalo fechado $I := [0,\ 2\pi]$ introduzindo-se uma relação de equivalência que permite identificar os pontos extremos 0 e 2π. Vide página 1735. A aplicação $\phi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(\theta) = \big(\cos(\theta),\ \operatorname{sen}(\theta)\big)$, para a qual vale $d\phi = \big(-\operatorname{sen}(\theta),\ \cos(\theta)\big)$, é agora um mergulho de $\mathbb{T}^1$ em $\mathbb{R}^2$. ♦

Exemplo 33.6 A aplicação $\phi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(\theta) = \big(\cos(2\theta),\ \operatorname{sen}(2\theta)\big)$ é apenas uma imersão de $\mathbb{T}^1$ em $\mathbb{R}^2$, por não ser injetora. ♦

Exemplo 33.7 A aplicação $\phi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\phi(\theta) := \begin{cases} \big(1-\cos(2\theta),\ \operatorname{sen}(2\theta)\big)\,, & \theta \in [0,\ \pi]\,, \\ \big(\cos(2\theta)-1,\ \operatorname{sen}(2\theta)\big)\,, & \theta \in [\pi,\ 2\pi]\,, \end{cases} \quad \text{com} \quad d\phi(\theta) = \begin{cases} 2\big(\operatorname{sen}(2\theta),\ \cos(2\theta)\big)\,, & \theta \in [0,\ \pi]\,, \\ 2\big(-\operatorname{sen}(2\theta),\ \cos(2\theta)\big)\,, & \theta \in [\pi,\ 2\pi]\,, \end{cases} \tag{33.59}$$

é uma imersão de $\mathbb{T}^1$ em $\mathbb{R}^2$ (pois $d\phi(\theta)$ não se anula), mas ϕ não é um mergulho, por não ser injetora. De fato, $\phi(0) = \phi(\pi) = \phi(2\pi) = (0,\ 0)$, como facilmente se constata. Vide Figura 33.3, página 1714. No Exemplo 33.8 discutimos uma variação da curva (33.59) que é, porém, injetiva, mas, por razões de natureza topológica, também não é um mergulho. ♦

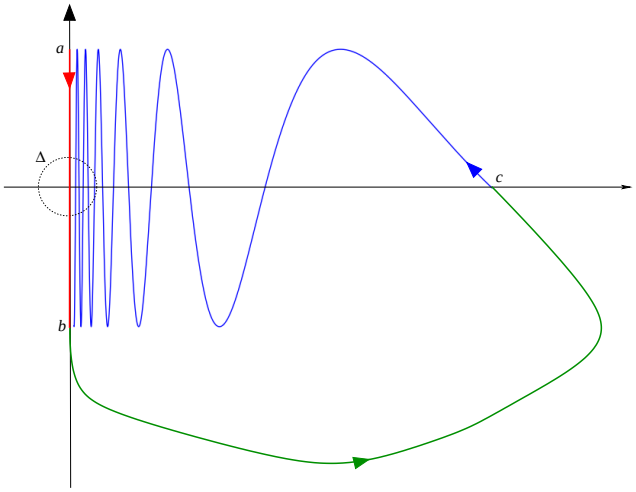

Figura 33.2: Exemplo de uma imersão ϕ do intervalo $(-3,\ 0) \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ que é injetiva, mas não é um mergulho topológico (e, portanto, não é um mergulho suave). A trecho em azul da figura é o gráfico da função $-\operatorname{sen}(1/x)$ para $x \in (0,\ 1/\pi]$. Na figura, Δ é um disco aberto em $\mathbb{R}^2$ centrado na origem. Ele intercepta o trecho em azul em infinitos segmentos. Isso ocorre com qualquer aberto de $\mathbb{R}^2$ que contenha pontos do segmento em vermelho, pois o gráfico de $-\operatorname{sen}(1/x)$ aproxima-se como uma sanfona desse segmento.

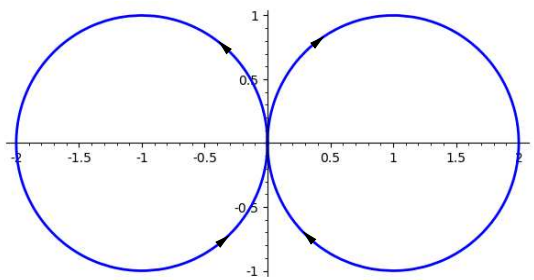

Figura 33.3: Gráfico da função $\phi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}^2$ dada em (33.59), página 1713. Trata-se de uma imersão de $\mathbb{T}^1$ em $\mathbb{R}^2$, mas não de um mergulho, por não ser injetiva. O círculo à direita é percorrido no sentido horário no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$ e o círculo à esquerda é percorrido no sentido anti-horário no intervalo $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, sendo que $\phi(0) = \phi(\pi) = \phi(2\pi) = (0,\ 0)$. Em $\theta = \pi$ a curva passa continua e diferenciavelmente do círculo à direita ao círculo à esquerda. As setas indicam o sentido do percurso quando θ varia de 0 a 2π.

Exemplo 33.8 O Exemplo 33.7 possui uma variação interessante. Considere-se a curva $\phi : (0,\ 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\phi(\theta) \ := \begin{cases} \big(1 - \cos(2\theta),\ \operatorname{sen}(2\theta)\big)\ , & \theta \in (0,\ \pi]\ , \\ \big(\cos(2\theta) - 1,\ \operatorname{sen}(2\theta)\big)\ , & \theta \in [\pi,\ 2\pi)\ , \end{cases} \tag{33.60}$$

Observe-se que é a mesma expressão de (33.59) com uma importante diferença: os pontos $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ foram excluídos. Mesmo assim, a imagem de ϕ e a mesma que a da curva ϕ dada em (33.59) e ilustrada na Figura 33.3, página 1714. Note-se, porém, que agora ϕ é injetiva! Assim, a curva ϕ dada em (33.60) é uma imersão injetora. Porém, ela também não é um mergulho, pois ϕ não é um homeomorfismo de $(0,\ 2\pi)$ em sua imagem $\phi\big((0,\ 2\pi)\big) \subset \mathbb{R}^2$ se considerarmos nesse último conjunto a topologia induzida pela de $\mathbb{R}^2$. Para ver isso, considere-se um aberto $(\pi - \alpha,\ \pi + \alpha)$ com $0 < \alpha < \pi$, que adotamos "pequeno" para facilitar a argumentação. A imagem desse conjunto por ϕ é o trecho de curva indicado em vermelho na Figura 33.4, página 1715. Esse trecho, no entanto, não é um aberto em $\phi\big((0,\ 2\pi)\big)$ na topologia induzida pela de $\mathbb{R}^2$, pois um aberto em $\phi\big((0,\ 2\pi)\big)$ que contenha o trecho em vermelho necessariamente deve conter também trechos da curva como $\phi\big((0,\ \beta)\big)$ e $\phi\big((2\pi - \gamma,\ 2\pi)\big)$ para $\beta,\ \gamma > 0$ suficientemente pequenos, trechos esses indicados em dois tons de verde na Figura 33.4. ♦

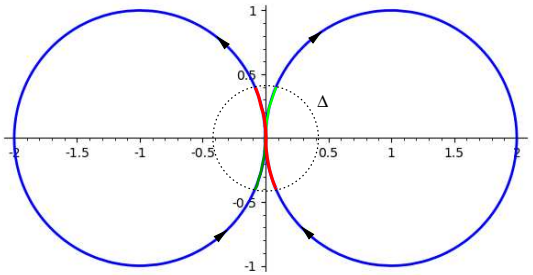

Figura 33.4: Gráfico da função $\phi : (0,\ 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ dada em (33.60), página 1714. Trata-se de uma imersão *injetora* de $(0,\ 2\pi)$ em $\mathbb{R}^2$, cuja imagem coincide com a curva $\phi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}^2$ dada em (33.59), página 1713. Não se trata, ainda assim, de um mergulho, por não ser um homeomorfismo de $(0,\ 2\pi)$ na imagem $\phi\big((0,\ 2\pi)\big)$ se adotarmos nesse último conjunto a topologia induzida pela de $\mathbb{R}^2$. Um disco aberto $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, como indicado na figura, que é centrado na origem, sempre intercepta $\phi\big((0,\ 2\pi)\big)$ em três trechos: um, indicado em vermelho, da forma $\phi\big((\pi - \alpha,\ \pi + \alpha)\big)$ para algum α positivo e dois da forma $\phi\big((0,\ \alpha)\big)$ e $\phi\big((2\pi - \alpha,\ 2\pi)\big)$, ambos indicados em dois tons de verde. Vê-se com isso que $\phi\big((\pi - \alpha,\ \pi + \alpha)\big)$, o trecho em vermelho, não é aberto na topologia induzida pela de $\mathbb{R}^2$ na imagem de ϕ e, portanto, ϕ não é um homeomorfismo.

Exemplo 33.9 Este exemplo trata de uma imersão que é injetiva, mas ainda assim, não é um mergulho topológico (e, portanto, não é um mergulho suave). Ele é melhor esclarecido com auxílio da Figura 33.2, página 1714.

Os pontos $a,\ b$ e c (Figura 33.2) são pontos de $\mathbb{R}^2$ com coordenadas $a = (0,\ 1)$, $b = (0,\ -1)$ e $c = (1/\pi,\ 0)$. A curva em vermelho é um segmento de reta orientado que conecta a a b. A curva em azul é o gráfico da função $-\operatorname{sen}(1/x)$ para x no intervalo $(0,\ 1/\pi)$, tendo início no ponto c. A curva em verde conecta o ponto b ao ponto c, sendo infinitamente diferenciável. A curva $\phi : (-3,\ 0) \to \mathbb{R}^2$ é definida da seguinte forma: no intervalo $X \equiv (-3,\ -1)$ ela segue o segmento de reta em vermelho, partindo em a e terminando em b, como $\phi(t) = \big(0,\ -(t+2)\big) \in \mathbb{R}^2$. Em seguida, ϕ segue ao longo da curva regular em verde de b a c, com o parâmetro t variando no intervalo $(-1,\ -1/\pi)$. Por fim, a curva segue ao longo do gráfico da função $-\operatorname{sen}(1/x)$, curva em azul, como $\phi(t) = \big(-t,\ -\operatorname{sen}(1/t)\big) \in \mathbb{R}^2$ para $t \in [-1/\pi,\ 0)$. Com isso, $\phi(X) \subset \mathbb{R}^2$ é a união do segmento vermelho com a curva verde e a curva azul.

A curva verde é escolhida contínua e infinitamente diferenciável também em b e c, o que faz de $\phi : (-3,\ 0) \to \mathbb{R}^2$ uma imersão da variedade $(-3,\ 0)$ em $\mathbb{R}^2$. Essa imersão é também injetiva, mas não é, porém, um mergulho topológico (e, portanto, não é um mergulho suave). A razão está relacionada a características topológicas da curva ϕ, como passamos a esclarecer.

Segundo a definição, $\phi : (-3,\ 0) \to \mathbb{R}^2$ seria um mergulho topológico se fosse um homeomorfismo[27] de $X \equiv (-3,\ 0)$ na sua imagem $\phi(X) \equiv \phi\big((-3,\ 0)\big)$, adotando-se em $\phi(X)$ a topologia relativa de $\mathbb{R}^2$. Observe-se, porém, que considerarmos em $X \equiv (-3,\ 0)$ um intervalo aberto $(\alpha,\ \beta) \subset (-3,\ -1)$, teremos $\phi\big((\alpha,\ \beta)\big)$ inteiramente contido no segmento vermelho, que conecta a e b. O intervalo $(\alpha,\ \beta)$ é um aberto em X, mas a imagem $\phi\big((\alpha,\ \beta)\big)$ não é um conjunto aberto na topologia induzida por $\mathbb{R}^2$ em $\phi(X)$. De fato, qualquer aberto aberto nessa topologia que contenha pontos de $\phi\big((\alpha,\ \beta)\big)$ conterá também infinitos segmentos pertencentes ao gráfico da função $-\operatorname{sen}(1/x)$. Tal é o caso, por exemplo, do disco pontilhado aberto centrado na origem $\Delta \subset \mathbb{R}^2$,

[27] Ver definição da Seção 30.5.1.1, página 1518.

exibido na Figura 33.2.

Se a imagem por ϕ do aberto $(\alpha,\ \beta)$ em X não é um aberto em $\phi(X)$ na topologia induzida, segue que ϕ^{-1} não é contínua. Isso mostra que ϕ não pode ser um homeomorfismo e, portanto, não é um mergulho topológico. ♦

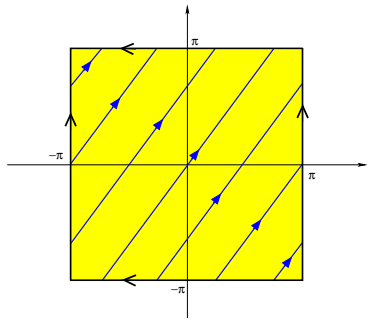

Figura 33.5: Em amarelo, o toro $\mathbb{T}^2$ composto pelo quadrado de arestas 2π, centrado na origem, com os lados paralelos identificados conforme a orientação das setas abertas, em preto. Em azul, um trecho da curva ϕ dada em (33.61). Para ela tem-se $d\phi = (a,\ b)$, constante e não nula. Cada segmento da curva tem inclinação b/a, sendo todos, portanto, paralelos. Se b/a é racional, a curva é fechada e, portanto, ϕ não é injetora. Tal é o caso da figura acima. Se b/a é irracional, a curva ϕ é densa em $\mathbb{T}^2$ (vide Figura 33.6, página 1716) e, portanto, ϕ não é um homeomorfismo de $\mathbb{R}$ em $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{T}^2$ se considerarmos em $\phi(\mathbb{R})$ a topologia induzida por $\mathbb{T}^2$. Em ambos os casos (b/a racional ou não) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ é uma imersão, mas não um mergulho suave.

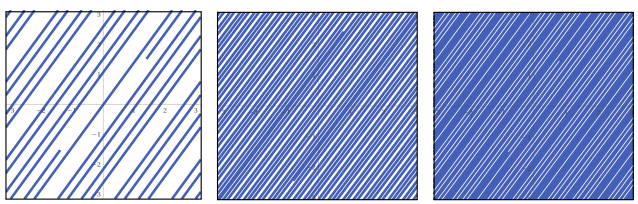

Figura 33.6: A curva ϕ dada em (33.61) para o caso $a = 1$ e $b = \sqrt{2}$ (portanto, com b/a irracional) no intervalo $t \in [-T,\ T]$. Três valores de T são apresentados. A curva adensa-se em $\mathbb{T}^2$ à medida que T cresce.

Exemplo 33.10 Considere-se o toro $\mathbb{T}^2$ definido à página 1735 como um espaço quociente em $I^2 = [-\pi,\ \pi] \times [-\pi,\ \pi] \subset \mathbb{R}^2$, munido da topologia relativa induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}^2$. Considere-se em $\mathbb{T}^2$ a curva $\mathbb{R} \ni t \mapsto \phi(t) \in \mathbb{T}^2$ dada por

$$\phi(t) \ := \ \Big(\big((at+\pi) \bmod 2\pi\big) - \pi,\ \ \big((bt+\pi) \bmod 2\pi\big) - \pi\Big)\,, \tag{33.61}$$

com $a,\ b \in \mathbb{R}$ constantes não nulas, sendo os termos em (33.61) definidos de sorte que $\phi(0) = (0,\ 0)$. Vide Figura 33.5, página 1716. A curva ϕ é uma imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{T}^2$, com $d\phi = (a,\ b)$, constante não nula.

Caso b/a seja um número <u>irracional</u>, ϕ seria injetiva, pois se $\phi(t_1) = \phi(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$, então

$$\big(a(t_2 - t_1) \bmod 2\pi,\ \ b(t_2 - t_1) \bmod 2\pi\big) \ = \ (0,\ 0)\,,$$

o que implica que $a(t_2 - t_1) = 2\pi m$ e $b(t_2 - t_1) = 2\pi n$, para $m,\ n \in \mathbb{Z}$. Segue disso, dividindo-se uma expressão pela outra, que $b/a = n/m$, contrariando a hipótese de b/a ser irracional. Neste mesmo caso, a curva ϕ não é, porém, um mergulho de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{T}^2$ pois, como b/a é irracional, a curva $\mathbb{R} \ni t \mapsto \phi(t) \in \mathbb{T}^2$ preenche densamente $\mathbb{T}^2$, como sugerido na Figura 33.6, página 1716, e encontramo-nos, do ponto de vista topológico, em uma situação similar à descrita no Exemplo 33.9, página 1715: a curva ϕ não é um homeomorfismo de $\mathbb{R}$ em $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{T}^2$ se adotarmos em $\phi(\mathbb{R})$ a topologia relativa induzida pela de $\mathbb{T}^2$. Assim, ϕ não é um mergulho topológico ou suave, ainda que seja uma imersão injetora.

No caso em que b/a é racional, com $b/a = n/m$, sendo $m,\ n \in \mathbb{Z}$, a curva é fechada (como exemplificado na Figura 33.5, página 1716), pois o argumento acima indica que $\phi(t_1) = \phi(t_2)$ para $t_2 - t_1 = 2\pi m/a = 2\pi n/b \neq 0$. Assim, ϕ não é injetiva. Concluímos novamente que ϕ é uma imersão que não é um mergulho de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{T}^2$, por não ser injetiva. ♦

33.3 Campos Vetoriais e Tensoriais

• **<u>Campos tensoriais</u>**

Se M é uma variedade diferenciável de dimensão m, define-se um *campo tensorial* (de tipo $(a,\ b)$) em M como uma aplicação que a cada $p \in M$ associa um elemento de um produto tensorial tal como $\big(\otimes^a_{\mathbb{R}}\ \mathsf{T}_pV\big) \otimes_{\mathbb{R}} \big(\otimes^b_{\mathbb{R}}\ \mathsf{T}^*_pV\big)$ (outras permutações dos fatores podem, naturalmente, ser também consideradas). Assim, um campo tensorial T é descrito por uma aplicação que a cada $p \in M$ associa um tensor T_p em $\big(\otimes^a_{\mathbb{R}}\ \mathsf{T}_pV\big) \otimes_{\mathbb{R}} \big(\otimes^b_{\mathbb{R}}\ \mathsf{T}^*_pV\big)$, expresso em coordenadas locais como

$$T_p \ = \ T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}\big(h_\alpha(p)\big)\ \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_{h_\alpha(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\bigg|_{h_\alpha(p)} \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+1}}_{h_\alpha(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+b}}_{h_\alpha(p)}\ . \tag{33.62}$$

Acima, para cada $p \in M$, $(U_\alpha,\ h_\alpha)$ compõe uma carta local de coordenadas com $p \in U_\alpha$ e $h_\alpha(p) \equiv (x^1,\ \ldots,\ x^m) \in \mathbb{R}^m$. As funções $T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}\big(h_\alpha(p)\big) \equiv T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}(x^1,\ \ldots,\ x^m)$, $k = 1,\ \ldots,\ m$, assumem valores em $\mathbb{R}$ e são ditas ser as *componentes de T na carta local de coordenadas* $(U_\alpha,\ h_\alpha)$. A equação (33.62) é dita ser a *expressão local de T na carta* $(U_\alpha,\ h_\alpha)$.

O campo tensorial T é dito ser um *campo tensorial diferenciável* em M se para todo p e para todas as cartas locais de coordenadas todas as funções $T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}} : h_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ forem diferenciáveis como função de m variáveis reais. Muito frequentemente assumiremos que as componentes de um campo tensorial são infinitamente diferenciáveis e denotaremos por $\mathscr{T}^{(a,\,b)}(M)$ a coleção de todos os campos tensoriais <u>infinitamente</u> diferenciáveis de M.

Um caso de particular interesse é o de *campos vetoriais*:

$$M \ni p \longmapsto A_p \ = \ a^k\big(h_\alpha(p)\big)\ \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{h_\alpha(p)} \ \in\ \mathsf{T}_pM\ .$$

Denotaremos por $\mathscr{X}(M) \equiv \mathscr{T}^{(1,\,0)}(M)$ a coleção de todos os campos vetoriais infinitamente diferenciáveis de M.

Outro caso de interesse é o de campos *covetoriais*, também denominados 1-*formas*:

$$M \ni p \longmapsto \omega_p \ = \ \omega_k\big(h_\alpha(p)\big)\ dx^k|_{h_\alpha(p)} \ \in\ \mathsf{T}^*_pM\ .$$

Denotaremos por $\mathscr{X}^*(M) \equiv \mathscr{T}^{(0,\,1)}(M)$ a coleção de todos os campos covetoriais, ou 1-formas, infinitamente diferenciáveis de M.

• **<u>Campos vetoriais e sua álgebra de Lie</u>**

Se $A \in \mathscr{X}(M)$ e $f : M \to \mathbb{R}$ é infinitamente diferenciável, denotamos por $A(f)$ a função de M em $\mathbb{R}$ definida por

$$M \ni p \longmapsto A(f)_p \ := \ \sum_{k=1}^m a^k\big(h_\alpha(p)\big)\ \frac{\partial f}{\partial x^k}\bigg|_p\ , \tag{33.63}$$

sendo que, $\frac{\partial f}{\partial x^k}\Big|_p$ denota a derivada parcial na variável x^k da função $f \circ h_\alpha^{-1} : h_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ calculada em $h_\alpha(p)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}\bigg|_p \ \equiv \ \left(\frac{\partial\big(f \circ h_\alpha^{-1}\big)}{\partial x^k}\right)\big(h_\alpha(p)\big)\ .$$

O estudante deve notar que $A(f)_p$ é apenas uma notação distinta para $df_p(A)$, com df_p definido em (33.53).

Se $g : M \to \mathbb{R}$ é uma função infinitamente diferenciável e $A \in \mathscr{X}(M)$, podemos definir o produto $gA \in \mathscr{X}(M)$ da forma óbvia: multiplicando cada componente de A em uma carta local por g:

$$(gA)_p \coloneqq \sum_{k=1}^{m} \Big(\big(g \circ h_\alpha^{-1}\big)\, a^k \Big)\big(h_\alpha(p)\big) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{h_\alpha(p)} .$$

Como $A(f) : M \to \mathbb{R}$, acima definida, é também uma função infinitamente diferenciável, podemos proceder à seguinte construção. Seja $B \in \mathscr{X}(M)$ um segundo campo vetorial infinitamente diferenciável, cuja expressão local na carta $(U_\alpha,\ h_\alpha)$ seja $B_p = \sum_{l=1}^{m} b^l\big(h_\alpha(p)\big) \left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_{h_\alpha(p)}$. Podemos determinar $B\big(A(f)\big)$ pela mesma expressão acima, obtendo, pela regra de Leibniz,

$$B\big(A(f)\big)_p = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} b^l\big(h_\alpha(p)\big) \left[\left(\frac{\partial a^k}{\partial x^l}\right)\big(h_\alpha(p)\big) \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_p + a^k\big(h_\alpha(p)\big) \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}\big(h_\alpha(p)\big) \right] .$$

Disso, obtemos facilmente que

$$A\big(B(f)\big)_p - B\big(A(f)\big)_p = \sum_{l=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{m} \left(a^k \left(\frac{\partial b^l}{\partial x^k}\right) - b^k \left(\frac{\partial a^l}{\partial x^k}\right) \right)\big(h_\alpha(p)\big) \right] \left.\frac{\partial f}{\partial x^l}\right|_p .$$

Com essa expressão em mente, podemos definir para todos $A,\ B \in \mathscr{X}(M)$ um campo vetorial denotado por $[A,\ B]$ cuja expressão local é

$$[A,\ B]_p \coloneqq \sum_{l=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{m} \left(a^k \left(\frac{\partial b^l}{\partial x^k}\right) - b^k \left(\frac{\partial a^l}{\partial x^k}\right) \right)\big(h_\alpha(p)\big) \right] \left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_p . \tag{33.64}$$

Naturalmente, valerão $[A,\ B] \in \mathscr{X}(M)$ e $[A,\ B](f) = A(B(f)) - B(A(f))$ para toda f infinitamente diferenciável. O símbolo $[\cdot,\ \cdot]$ denota, portanto, uma função binária em $\mathscr{X}(M)$, ou seja, uma função de $\mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M)$ em $\mathscr{X}(M)$.

A seguinte proposição é relevante no presente contexto:

Proposição 33.7 *Para quaisquer campos vetoriais $A,\ B,\ C \in \mathscr{X}(M)$ e $g : M \to \mathbb{R}$, infinitamente diferenciável, valem*

1. Bilinearidade*: Para quaisquer $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$, constantes, valem $[\alpha A + \beta B,\ C] = \alpha[A,\ C] + \beta[B,\ C]$ e $[A,\ \beta B + \gamma C] = \beta[A,\ B] + \gamma[A,\ C]$.*
2. Antissimetria*: $[A,\ B] = -[B,\ A]$.*
3. Identidade de Jacobi*:*
$$\big[A,\ [B,\ C]\big] + \big[C,\ [A,\ B]\big] + \big[B,\ [C,\ A]\big] = 0 . \tag{33.65}$$
Concluímos das propriedades 1, 2 e 3 que $\mathscr{X}(M)$ é uma álgebra de Lie real com o produto $[\cdot,\ \cdot]$.
4. Regra de Leibniz*: $A(gB) = A(g)B + gAB$ e, portanto,*
$$[A,\ gB] = A(g)B + g[A,\ B] . \tag{33.66}$$

□

A demonstração é imediata pela definição (33.64) e deixada como exercício.

• **Curva integral de um campo vetorial**

Seja A um campo vetorial diferenciável definido em M e seja $p_0 \in M$. Consideremos a questão de determinar uma curva diferenciável c em M satisfazendo o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dc}{dt}(t) = A_{c(t)} , \\ c(0) = p_0 , \end{cases} \tag{33.67}$$

para algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo 0. Uma tal curva é dita ser uma *curva integral* do campo A no ponto p_0.

Em uma carta local $(U_\alpha,\ h_\alpha)$ com $p_0 \in U_\alpha$, com a qual tenhamos $h_\alpha(c(t)) = (x^1(t),\ \ldots,\ x^m(t))$, para todo $t \in I_\alpha \subset I$, $h_\alpha(p_0) = (x_0^1,\ \ldots,\ x_0^m)$ e $A_q = \sum_{k=1}^{m} a^k\big(h_\alpha(q)\big) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_q$ para todo $q \in U_\alpha$, (33.67) equivale em U_α a

$$\begin{cases} \dfrac{dx^k}{dt}(t) = a^k\big(x^1(t),\ \ldots,\ x^m(t)\big) , \quad k = 1,\ \ldots,\ m , \\ \big(x^1(0),\ \ldots,\ x^m(0)\big) = \big(x_0^1,\ \ldots,\ x_0^m\big) , \end{cases} \tag{33.68}$$

que consiste em um sistema de m equações diferenciais ordinárias de primeira ordem sujeitas à condição inicial disposta na última linha. A suposição de A ser um campo diferenciável implica que as funções a^k são diferenciáveis e, portanto, o sistema acima satisfaz as condições do Teorema de Picard-Lindelöf (Teorema 12.2, página 693. Vide também sua generalização para espaços de Banach, Teorema 25.4, página 1387), que fornece condições suficientes para garantir existência e unicidade de soluções para t restrito a um intervalo pequeno o suficiente, intervalo esse que pode depender de p_0 e da carta U_α adotada. Temos portanto:

Proposição 33.8 *Em uma variedade diferenciável M todo campo vetorial diferenciável define, para cada $p_0 \in M$, uma curva integral $c : I \to M$ única para algum $I \subset \mathbb{R}$ aberto com $0 \in I$ e $c(0) = p_0$.* □

• **Curva integral completa e fluxo induzido por um campo vetorial**

Uma curva integral $c : I \to M$: de um campo vetorial diferenciável A é dita ser uma *curva integral completa* se puder ser definida para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, se $I = \mathbb{R}$. O conjunto de todas as curvas integrais completas de um campo diferenciável A é dito ser uma *congruência* de A.

Sejam M uma variedade diferenciável, A um campo vetorial diferenciável em M. Suponhamos que M e A têm a propriedade de que toda curva integral de A é completa. Designemos por $\mathbb{R} \ni t \mapsto c_A(p,\ t) \in M$ a curva integral de A que passa por $p \in M$ em $t = 0$, i.e., $c_A(p,\ 0) = p$. Para todos $t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$ e todo $p \in M$ vale

$$c_A\big(c_A(p,\ t_2),\ t_1\big) = c_A(p,\ t_1 + t_2) . \tag{33.69}$$

Para estabelecer isso, seja t_2 fixo. Note-se que $c_A\big(c_A(p,\ t_2),\ 0\big) = c_A(p,\ t_2)$ e, portanto, ambos os lados de (33.69) coincidem ao menos em $t_1 = 0$. Suponhamos agora que haja um valor $\overline{t_1} \in \mathbb{R}$ tal que $c_A\big(c_A(p,\ t_2),\ \overline{t_1}\big) = c_A(p,\ \overline{t_1} + t_2)$ mas $c_A\big(c_A(p,\ t_2),\ \overline{t_1} + s\big) \neq c_A(p,\ \overline{t_1} + s + t_2)$ para todo $s \in (0,\ \epsilon)$ para algum $\epsilon > 0$. Defina-se $d_a(s) \equiv c_A\big(c_A(p,\ t_2),\ \overline{t_1} + s\big)$ e $d_b(s) \equiv c_A(p,\ \overline{t_1} + s + t_2)$, $s \in [0,\ \epsilon)$. Teremos, $\frac{d}{ds} d_a(s) = A_{d_a(s)}$ e $\frac{d}{ds} d_b(s) = A_{d_b(s)}$ e também valerá $d_a(0) = c_A\big(c_A(p,\ t_2),\ \overline{t_1}\big) = c_A(p,\ \overline{t_1} + t_2) = d_b(0)$. Assim, d_a e d_b satisfazem a mesma equação diferencial e a mesma condição inicial em $s = 0$. Se escolhermos ϵ pequeno o suficiente, podemos evocar a unicidade da solução, a qual nos garantirá que $d_a(s) = d_b(s)$ para todo $s \in (0,\ \epsilon)$, uma contradição com a hipótese que $c_A\big(c_A(p,\ t_2),\ \overline{t_1} + s\big) \neq c_A(p,\ \overline{t_1} + s + t_2)$, estabelecendo, portanto, que (33.69) é válida para todos $t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$ e todo $p \in M$.

A aplicação $\phi_t^A \equiv \phi_t : M \to M$ dada para cada $t \in \mathbb{R}$ por $\phi_t(p) \coloneqq c_A(p,\ t)$ é dita ser o *fluxo* induzido por A em M. É de se notar que $\phi_{t_1+t_2} = \phi_{t_2+t_1}$, que ϕ_0 é a identidade e que $\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} = \phi_{t_1+t_2}$ para quaisquer $t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$. Essa última identidade decorre de (33.69). Essa última expressão implica que $\phi_t \circ \phi_{-t} = \mathbf{id}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, estabelecemos que ϕ_t é inversível para todo $t \in \mathbb{R}$ com $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$. Os fatos acima dizem-nos também que o fluxo induzido por A é uma ação do grupo aditivo dos reais $(\mathbb{R},\ +)$ em M (para a definição da noção de *ação* de um grupo, vide Seção 2.1.9.1, página 152). Alguns autores denotam o fluxo ϕ_t induzido por A na forma

$$\phi_t^A(p) \equiv \phi_t(p) \equiv \exp(tA)(p) ,$$

sendo essa notação exponencial naturalmente sugerida pelas propriedades $\phi_{t_1}^A \circ \phi_{t_2}^A = \phi_{t_1+t_2}^A = \phi_{t_2+t_1}^A$ e $\phi_0^A = \mathbf{id}$.

Em virtude dessa notação, o fluxo ϕ_t^A induzido por A é também denominado *mapa exponencial induzido pelo campo vetorial A*.

Observamos, por fim, que o fluxo $\phi_t : M \to M$ pode ser definido mesmo que nem toda curva integral de A seja completa. Nesse caso, $\phi_t(p)$ será definido apenas para t em um intervalo $I_p \ni 0$, eventualmente dependente de p. As propriedades $\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}(p) = \phi_{t_1+t_2}(p)$ e $\phi_0(p) = p$ continuarão válidas, as primeiras apenas para t_1 e t_2 pequenos o suficiente. Neste caso, o fluxo induzido por A é dito ser uma ação <u>local</u> do grupo aditivo dos reais $(\mathbb{R},\ +)$ (ou seja, uma ação apenas em uma vizinhança da identidade).

33.3.1 A Derivada de Lie

Esta seção é dedicada à noção de *derivada de Lie*[28] em relação a um campo vetorial diferenciável, uma noção que encontra diversos usos na Geometria Riemanniana, na Teoria da Relatividade Geral e na Mecânica Clássica, particularmente no estudo de transformações de simetria (especialmente aquelas associadas a difeomorfismos gerados por campos vetoriais).

A derivada de Lie desempenha também um papel na discussão sobre isometrias em variedades dotadas de tensores métricos e conexões de Levi-Civita. Isso é o objeto da nossa discussão sobre campos de Killing na Seção 34.5, página 1825.

Como vimos acima, se A é um campo vetorial diferenciável, então para cada t, o mapa exponencial $\phi_t^A \equiv \exp(tA)$ define uma aplicação diferenciável de M em M. Seja $\big(d\phi_t^A\big)_p : \mathsf{T}_pM \to \mathsf{T}_{\phi_t^A(p)}M$ seu *pushforward* (aplicação diferencial) e seja $\big(d\phi_t^A\big)^*_{\phi_t^A(p)} : \mathsf{T}^*_{\phi_t^A(p)}M \to \mathsf{T}^*_pM$ seu *pullback*.

Se A é um campo vetorial diferenciável, a derivada de Lie em relação a A de um campo escalar, vetorial, ou tensorial, consiste *grosso modo* na taxa de variação desse campo ao longo do fluxo $\exp(tA)(p)$, calculada no ponto inicial p desse fluxo. Em grau crescente de dificuldade, vamos mostrar como essa ideia é implementada, começando com campos escalares e chegando ao caso geral de campos tensoriais.

• **A derivada de Lie para campos escalares**

Seja $p \in M$, seja I um intervalo de valores de t em $\mathbb{R}$ onde $\phi_t^A(p)$ esteja definido e seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Para cada $p \in M$ a função $I \ni t \longmapsto f\big(\phi_t^A(p)\big) \in \mathbb{R}$ descreve a evolução de f ao longo da curva integral gerada por A e que passa por p em $t = 0$. Definimos a *derivada de Lie* de f em p como sendo a taxa de variação de $f\big(\phi_t^A(p)\big)$ em $t = 0$, ou seja,

$$\big(\mathcal{L}_A f\big)(p) \;:=\; \frac{d}{dt} f\big(\phi_t^A(p)\big)\Big|_{t=0} \,.$$

Essa derivada pode ser determinada com auxílio de uma carta local $(U,\ h)$ com $p \in U$ (restringindo, se necessário, o intervalo I, de modo que $\phi_t^A(p) \in U$ para todo $t \in I$). Escrevamos $h(p) = (x^1,\ \ldots,\ x^m)$ e seja

$$A_p \;=\; a^j(x^1,\ \ldots,\ x^m)\,\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{h(p)}$$

a expressão local de A na carta U. Seja também $h\big(\phi_t^A(p)\big) = (y_t^1,\ \ldots,\ y_t^m)$. Teremos, pela definição do fluxo ϕ_t^A,

$$\frac{dy_t^j}{dt} \;=\; a^j\big(y_t^1,\ \ldots,\ y_t^m\big),\ j \in \{1,\ \ldots,\ m\}, \qquad \text{com} \qquad \big(y_0^1,\ \ldots,\ y_0^m\big) \;=\; \big(x^1,\ \ldots,\ x^m\big)$$

(vide (33.68)). Assim, $f\big(\phi_t^A(p)\big) = f \circ h^{-1}\big(y_t^1,\ \ldots,\ y_t^m\big)$ e, portanto, pela regra da cadeia, temos para t fixo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(f \circ h^{-1}\big(y_t^1,\ \ldots,\ y_t^m\big)\Big) \;&=\; \frac{\partial\big(f \circ h^{-1}\big)}{\partial x^j}\big(y_t^1,\ \ldots,\ y_t^m\big)\frac{dy_t^j}{dt} \\ &=\; a^j\big(y_t^1,\ \ldots,\ y_t^m\big)\frac{\partial\big(f \circ h^{-1}\big)}{\partial x^j}\big(y_t^1,\ \ldots,\ y_t^m\big) \;\overset{(33.63)}{=}\; A(f)_{\phi_t^A(p)} \,.\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\big(\mathcal{L}_A f\big)(p) \;=\; A(f)_p \tag{33.70}$$

para todo $p \in M$. É imediado por essa relação que, para campos duas vezes diferenciáveis A e B, tem-se

$$\mathcal{L}_A\mathcal{L}_B f - \mathcal{L}_B\mathcal{L}_A f \;=\; \mathcal{L}_{[A,\ B]} f \,, \tag{33.71}$$

relação essa que veremos ter validade muito mais geral. Façamos, por fim, a simples porém útil observação que se f e g são funções diferenciáveis de M em $\mathbb{R}$, então vale

$$\mathcal{L}_A(fg) \;=\; f(\mathcal{L}_A g) + (\mathcal{L}_A f)g \,, \tag{33.72}$$

[28] Marius Sophus Lie (1842–1899).

como se vê facilmente com uso da regra de Leibniz.

• **A derivada de Lie para campos vetoriais**

Seja $p \in M$, seja I um intervalo de valores de t em $\mathbb{R}$ onde $\phi_t^A(p)$ esteja definido e seja B um campo vetorial diferenciável. O mapa $I \ni t \longmapsto \Big(d\phi_{-t}^A\Big)_{\phi_t^A(p)} B\Big(\phi_t^A(p)\Big) \in \mathsf{T}_pM$ define uma aplicação de I sobre o espaço tangente T_pM.

Para B, um campo vetorial diferenciável, a expressão

$$\big(\mathcal{L}_A B\big)(p) \;:=\; \frac{d}{dt}\Big[\Big(d\phi_{-t}^A\Big)_{\phi_t^A(p)} B\Big(\phi_t^A(p)\Big)\Big]\Big|_{t=0} \tag{33.73}$$

define a chamada *derivada de Lie* de B em relação ao campo A.

As ideias por trás dessa definição são as seguintes. Para t variando, a expressão $\phi_t^A(p)$ representa a evolução do ponto p ao longo de uma curva integral definida pelo campo vetorial A. Assim, para t variando, $B\big(\phi_t^A(p)\big)$ representa a evolução do campo B ao longo dessa curva integral. Gostaríamos de calcular a taxa de variação no tempo dessa evolução de B ao longo da curva integral do campo A, mais precisamente, sobre o ponto p (que corresponde a $t = 0$). Ingenuamente, poderíamos para isso tomar o limite $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(B\big(\phi_t^A(p)\big) - B\big(p\big)\Big)$. Essa expressão, porém, não faz sentido, pois $B\big(\phi_t^A(p)\big)$ e $B\big(p\big)$ vivem e espaços vetoriais diferentes: o primeiro em $\mathsf{T}_{\phi_t^A(p)}M$ e o segundo em T_pM e, portanto, a diferença $B\big(\phi_t^A(p)\big) - B\big(p\big)$ sequer definida está. Para corrigir isso, usamos o *pushforward* $\Big(d\phi_{-t}^A\Big)_{\phi_t^A(p)}$, o qual leva vetores de $\mathsf{T}_{\phi_t^A(p)}M$ em vetores de $\mathsf{T}_{\phi_{-t}^A\left(\phi_t^A\right)} = \mathsf{T}_pM$. Com isso, a expressão $\frac{1}{t}\left(\Big(d\phi_{-t}^A\Big)_{\phi_t^A(p)} B\Big(\phi_t^A(p)\Big) - B(p)\right)$ passa a fazer sentido, pois é a diferença de dois vetores de T_pM. No limite $t \to 0$ isso fornece a taxa de variação procurada e coincide com a derivada do lado direito de (33.73). Essas são as ideias expressas na definição (33.73).

Antes de generalizarmos a definição da derivada de Lie sobre campos tensoriais gerais apresentemos os seguintes resultados relevantes:

Proposição 33.9 *Para campos vetoriais diferenciáveis A e B, vale*

$$\mathcal{L}_A B \;=\; [A,\ B] \,. \tag{33.74}$$

Como consequência disso, valem também os seguintes resultados:

1. *Para campos vetoriais diferenciáveis A e B, tem-se*

$$\mathcal{L}_A B \;=\; -\mathcal{L}_B A \,. \tag{33.75}$$

2. *$\mathcal{L}_A B$ é linear em A e B:*

$$\mathcal{L}_{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2} B \;=\; \alpha_1 \mathcal{L}_{A_1} B + \alpha_2 \mathcal{L}_{A_2} B \tag{33.76}$$

e

$$\mathcal{L}_A(\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2) \;=\; \beta_1 \mathcal{L}_A B_1 + \beta_2 \mathcal{L}_A B_2 \,, \tag{33.77}$$

com $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2$ constantes e $A,\ A_1,\ A_2,\ B,\ B_1,\ B_2$ campos diferenciáveis.

3. *Para A e B campos diferenciáveis e para uma função $g : M \to \mathbb{R}$ diferenciável, tem-se*

$$\mathcal{L}_A(gB) \;=\; A(g)B + g[A,\ B] \;=\; A(g)B + g\mathcal{L}_A B \;=\; \big(\mathcal{L}_A g\big)B + g\mathcal{L}_A B \tag{33.78}$$

e

$$\mathcal{L}_{(gA)} B \;=\; -B(g)A + g[A,\ B] \;=\; -B(g)A + g\mathcal{L}_A B \;=\; -\big(\mathcal{L}_B g\big)A + g\mathcal{L}_A B \,. \tag{33.79}$$

4. *Valem*

$$\mathcal{L}_{[A,\ B]} \;=\; \mathcal{L}_A\mathcal{L}_B - \mathcal{L}_B\mathcal{L}_A \tag{33.80}$$

e

$$\mathcal{L}_A\,[B,\ C] \;=\; \big[\mathcal{L}_A B,\ C\big] + \big[B,\ \mathcal{L}_A C\big] \,, \tag{33.81}$$

para A, B e C duas vezes diferenciáveis. □

Prova. A prova da igualdade (33.74) é um pouco técnica e apresentamo-lo em separado no Apêndice 33.A, página 1743. A relação (33.75) é evidente por (33.74). As relações (33.76) e (33.77) seguem trivialmente de (33.74). As relações (33.78) e (33.79) seguem imediatamente de (33.74) e de (33.66), usando também (33.70). A eq. (33.79) também pode ser obtida de (33.78) usando (33.75). Por (33.74), valem $\mathcal{L}_{[A,\,B]}C = \big[[A,\,B],\,C\big]$, $\mathcal{L}_A\big(\mathcal{L}_B C\big) = \big[A,\,[B,\,C]\big]$ e $\mathcal{L}_B\big(\mathcal{L}_A C\big) = \big[B,\,[A,\,C]\big]$. Da identidade de Jacobi (33.65) e da antissimetria do comutador, segue $\mathcal{L}_{[A,\,B]}C = \mathcal{L}_A\big(\mathcal{L}_B C\big) - \mathcal{L}_B\big(\mathcal{L}_A C\big)$ (verifique!), que é a relação (33.80). A relação (33.81) é também imediata por (33.74) e pela identidade de Jacobi (33.65). A eq. (33.81) também segue de (33.80) com uso de (33.75). ■

As relações (33.74) e (33.64) fornecem a expressão local de $\mathcal{L}_A B$:

$$\mathcal{L}_A B_p \;=\; \left(a^k\left(\frac{\partial b^l}{\partial x^k}\right) - b^k\left(\frac{\partial a^l}{\partial x^k}\right)\right)\big(h(p)\big)\,\frac{\partial}{\partial x^l}\bigg|_{h(p)} \;. \tag{33.82}$$

Vemos, em particular, que

$$\mathcal{L}_A\,\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{h(p)} \;=\; -\left(\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right)\big(h(p)\big)\,\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{h(p)} \tag{33.83}$$

expressão essa que usaremos mais adiante.

• **A derivada de Lie para campos covetoriais**

Nosso primeiro passo é estender a definição de derivada de Lie a campos de covetores. Como antes A é um campo vetorial em A e ϕ_t^A o fluxo que o mesmo gera.

Seja $p \in M$, seja I um intervalo de valores de t em $\mathbb{R}$ onde $\phi_t^A(p)$ esteja definido e seja ω um campo covetorial diferenciável. O mapa $I \ni t \longmapsto \big(d\phi_t^A\big)^*_{\phi_t^A(p)}\omega_{\phi_t^A(p)} \in \mathsf{T}_p^*M$ define uma aplicação de I sobre o espaço cotangente T_p^*M. A expressão

$$\big(\mathcal{L}_A\omega\big)(p) \;:=\; \frac{d}{dt}\bigg[\Big(d\phi_t^A\Big)^*_{\phi_t^A(p)}\omega_{\phi_t^A(p)}\bigg]\bigg|_{t=0} \tag{33.84}$$

define a chamada *derivada de Lie* de ω em relação ao campo A. A expressão local de $\mathcal{L}_A\omega$ em uma carta local de coordenadas $h(p) = (x^1,\,\ldots,\,x^m)$ é

$$\big(\mathcal{L}_A\omega\big)_p \;=\; \left[\left(a^j\,\frac{\partial\omega_l}{\partial x^j}\right)\big(h(p)\big) + \left(\omega_j\,\frac{\partial a^j}{\partial x^l}\right)\big(h(p)\big)\right]\,dx^l|_p \;. \tag{33.85}$$

A demonstração encontra-se no Apêndice 33.A, página 1743.

Vemos, em particular, que

$$\mathcal{L}_A dx^i|_p \;=\; \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right)\big(h(p)\big)\,dx^j|_p \;, \tag{33.86}$$

expressão essa que usaremos mais adiante.

É evidente por (33.85) que $\mathcal{L}_A\omega$ é linear em A e em ω. Também segue facilmente de (33.85) (verifique!) que para uma função diferenciável $g : M \to \mathbb{R}$, tem-se

$$\mathcal{L}_A(g\omega) \;=\; A(g)\omega + g\mathcal{L}_A\omega \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}_{(gA)}\omega \;=\; g\mathcal{L}_A\omega + \big\langle\omega,\,A\big\rangle\,dg^* \;, \tag{33.87}$$

sendo $dg_p^* : \mathsf{T}_p^*\mathbb{R} \to \mathsf{T}_p^*M$ o *pullback* de $g : M \to \mathbb{R}$, expresso em uma carta local como $dg^* = \frac{\partial g}{\partial x^l}dx^l$. Vide (33.54).

E. 33.17 *Exercício*. Um exercício simples, porém útil ao estudante, é mostrar que vale

$$\mathcal{L}_A\mathcal{L}_B\omega - \mathcal{L}_B\mathcal{L}_A\omega \;=\; \mathcal{L}_{[A,\,B]}\omega \tag{33.88}$$

para campos duas vezes diferenciáveis A, B e ω. A sugestão é calcular $\mathcal{L}_A\mathcal{L}_B\omega$ e $\mathcal{L}_B\mathcal{L}_B\omega$ empregando a expressão local (33.85) e, em seguida, calcular $\mathcal{L}_{[A,\,B]}\omega$, usando também (33.85) e a expressão local (33.64) para o comutador de dois campos. Após alguns cancelamentos obtém-se (33.88). ✠

O exercício que segue mostra uma relação entre a derivada de Lie de campos vetoriais e a derivada de Lie de campos covetoriais.

E. 33.18 *Exercício*. Mostre que

$$\big\langle\omega,\,\mathcal{L}_A B\big\rangle \;=\; -\big\langle\mathcal{L}_A\omega,\,B\big\rangle + A\Big(\big\langle\omega,\,B\big\rangle\Big) \;. \tag{33.89}$$

para campos vetoriais diferenciáveis A e B e para um campo covetorial diferenciável ω. *Sugestão:* use as expressões locais para $\mathcal{L}_A B$ e $\mathcal{L}_A\omega$.

Como $A\big(\langle\omega,\,B\rangle\big) = \mathcal{L}_A\langle\omega,\,B\rangle$ (vide (33.70)), a identidade (33.89) está dizendo-nos que

$$\mathcal{L}_A\langle\omega,\,B\rangle \;=\; \langle\mathcal{L}_A\omega,\,B\rangle + \langle\omega,\,\mathcal{L}_A B\rangle \;, \tag{33.90}$$

uma espécie de regra Leibniz para a derivada de Lie.

Observação: A expressão (33.90) (e, portanto, também a expressão (33.89)) pode ser alternativamente obtida diretamente da definição de $\mathcal{L}_A\langle\omega,\,B\rangle$ como derivada de relação a t de $\langle\omega,\,B\rangle_{\phi_t^A}$, em $t = 0$, usando-se ainda a expressão local de $\langle\omega,\,B\rangle$ e a regra de Leibniz usual. ✠

• **A derivada de Lie para campos tensoriais. Um caso particular**

Para estendermos a derivação de Lie para tensores, vamos tratar de um caso particular. Seja T um campo tensorial de tipo $(0,\,2)$, de sorte que para campos vetoriais $B,\,C \in \mathfrak{X}(M)$ esteja definida a forma bilinear $T(B,\,C)$ como uma função infinitamente diferenciável na variedade.

Podemos definir a derivada de Lie de T em relação a um campo A, que denotaremos por $\mathcal{L}_A T$ impondo-se a regra de Leibniz da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_A\big(T(B,\,C)\big) \;=\; \big(\mathcal{L}_A T\big)(B,\,C) + T\big(\mathcal{L}_A B,\,C\big) + T\big(B,\,\mathcal{L}_A C\big) \;. \tag{33.91}$$

Como $T(B,\,C)$ é uma grandeza escalar, isso significa que $\mathcal{L}_A\big(T(B,\,C)\big) = A\big(T(B,\,C)\big)$. Com isso $\mathcal{L}_A T$ é definida como sendo o campo tensorial de mesmo tipo $(0,\,2)$ dado por

$$\big(\mathcal{L}_A T\big)(B,\,C) \;:=\; A\big(T(B,\,C)\big) - T\big(\mathcal{L}_A B,\,C\big) - T\big(B,\,\mathcal{L}_A C\big) \;=\; A\big(T(B,\,C)\big) - T\big([A,\,B],\,C\big) - T\big(B,\,[A,\,C]\big) \;. \tag{33.92}$$

Está claro que essa expressão define $\mathcal{L}_A T$ em termos de objetos já previamente definidos e que a ideia pode ser levada adiante, definindo-se $\mathcal{L}_A$ sobre um campo tensorial T de tipo $(a,\,b)$ como uma outro campo tensorial de mesmo tipo $(a,\,b)$ de sorte a respeitar a linearidade e a satisfazer a regra de Leibniz.

Vamos agora indicar uma maneira de fazer isso de forma sistemática.

• **A derivada de Lie para campos tensoriais. Caso geral**

Seja T um campo tensorial de tipo $(a,\,b)$, mais especificamente, com $T_p \in \big(\otimes_{\mathbb{R}}^a \mathsf{T}_pM\big) \otimes \big(\otimes_{\mathbb{R}}^b \mathsf{T}_p^*M\big)$. Seguindo as ideias que discutimos acima para definir-se a derivada de Lie em campos vetoriais e covetoriais, definimos a derivada de Lie $\mathcal{L}_A T$ por

$$(\mathcal{L}_A T)_p \;:=\; \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\big(d\phi_{-t}^A\big)_{\phi_t^A(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} \big(d\phi_{-t}^A\big)_{\phi_t^A(p)}}_{a\text{ vezes}} \otimes_{\mathbb{R}} \underbrace{\big(d\phi_t^A\big)^*_{\phi_t^A(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} \big(d\phi_t^A\big)^*_{\phi_t^A(p)}}_{b\text{ vezes}}\,T_{\phi_t^A(p)}\right)\bigg|_{t=0} \;. \tag{33.93}$$

É claro por essa definição que $(\mathcal{L}_A T)_p$ é novamente um elemento de $\big(\otimes_{\mathbb{R}}^a \mathsf{T}_pM\big) \otimes \big(\otimes_{\mathbb{R}}^b \mathsf{T}_p^*M\big)$. Para outros tensores de tipo $(a,\,b)$ a generalização da definição é óbvia: basta permutar adequadamente os fatores $\big(d\phi_{-t}^A\big)_{\phi_t^A(p)}$ e $\big(d\phi_t^A\big)^*_{\phi_t^A(p)}$.

Em uma carta $(U,\,h)$, com $p \in U$, obtemos de (33.93), pela regra de Leibniz aplicada à diferenciação em t,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_A T)_p \;=\;& \mathcal{L}_A\left(T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}\big(h(p)\big)\right)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\bigg|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+1}}_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+b}}_{h(p)} \\ &+ T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}\big(h(p)\big)\left[\sum_{k=1}^{a}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{L}_A\,\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\bigg|_{h(p)}\right) \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\bigg|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+1}}_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+b}}_{h(p)}\right. \\ &\left. + \sum_{l=a+1}^{a+b}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\bigg|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+1}}_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{L}_A dx^{i_l}_{h(p)}\right) \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+b}}_{h(p)}\right] \;.\end{aligned} \tag{33.94}$$

A demonstração de (33.94) a partir da definição (33.93) encontra-se no Apêndice 33.B, página 1744.

Com uso das fórmulas (33.83) e (33.86), a relação (33.94) fornece uma expressão explícita para o cálculo da derivada de Lie de um tensor como T. Vide (33.98), adiante.

É também claro pela própria expressão (33.94) que o termo entre colchetes $\Big[\cdots\Big]$ (as somatórias em k e l na segunda e terceira linhas) representam

$$\mathcal{L}_A\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\bigg|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}dx^{i_{a+1}}_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}dx^{i_{a+b}}_{h(p)}\right)\ .$$

Assim, (33.94) diz-nos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_A&\left(T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}\big(h(p)\big)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\bigg|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}dx^{i_{a+1}}_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}dx^{i_{a+b}}_{h(p)}\right)\\
&=\mathcal{L}_A\Big(T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}\big(h(p)\big)\Big)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\bigg|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}dx^{i_{a+1}}_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}dx^{i_{a+b}}_{h(p)}\\
&\quad+T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}\big(h(p)\big)\mathcal{L}_A\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\bigg|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}dx^{i_{a+1}}_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}dx^{i_{a+b}}_{h(p)}\right)\ .\end{aligned}\tag{33.95}$$

• **Alguns exercícios**

Com os ingredientes acima os exercícios a seguir devem ser relativamente fáceis ao leitor.

E. 33.19 *Exercício*. Justifique a regra de Leibniz (33.91) com base na definição (33.93) ou na sua forma final, (33.95). ✠

E. 33.20 *Exercício*. Sejam T_1 e T_2 dois campos tensoriais diferenciáveis, não necessariamente de mesmo tipo. Mostre que

$$\mathcal{L}_A\big(T_1\otimes_{\mathbb{R}}T_2\big)\ =\ \big(\mathcal{L}_AT_1\big)\otimes_{\mathbb{R}}T_2+T_1\otimes_{\mathbb{R}}\big(\mathcal{L}_AT_2\big)\ .\tag{33.96}$$

Sugestão: Use (33.94) e/ou (33.95), assim como (33.72). ✠

E. 33.21 *Exercício*. Mostre, generalizando resultados anteriores, que para um campo tensorial duas vezes diferenciável T tem-se

$$\mathcal{L}_A\big(\mathcal{L}_BT\big)-\mathcal{L}_B\big(\mathcal{L}_AT\big)\ =\ \mathcal{L}_{[A,\,B]}T\ ,\tag{33.97}$$

com A e B sendo campos vetoriais duas vezes diferenciáveis. *Sugestão:* Use (33.94) e (33.95) para determinar a diferença $\mathcal{L}_A\mathcal{L}_BT-\mathcal{L}_B\mathcal{L}_AT$. Após diversos cancelamentos, mostre que o que resta é a expressão (33.94), porém com $\mathcal{L}_A$ substituída por $\mathcal{L}_A\mathcal{L}_B-\mathcal{L}_B\mathcal{L}_A$, agindo nos fatores $T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}$, $\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\Big|_{h(p)}$ e $dx^{i_l}_{h(p)}$. Use então o fato já provado anteriormente que $\mathcal{L}_A\mathcal{L}_B-\mathcal{L}_B\mathcal{L}_A=\mathcal{L}_{[A,\,B]}$ quando esses operadores agem em campos escalares, vetoriais ou covetoriais (relações (33.71), (33.80) e (33.88)). ✠

E. 33.22 *Exercício*. Usando as fórmulas (33.94), (33.83) e (33.86), mostre que as componentes de $\mathcal{L}_AT$ na base

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\bigg|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}dx^{i_{a+1}}_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}dx^{i_{a+b}}_{h(p)}\right\}$$

são

$$\big(\mathcal{L}_AT\big)^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}\ =\ a^j\frac{\partial}{\partial x^j}\Big(T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}\Big)-\sum_{k=1}^{a}T^{i_1\cdots j_k\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}\frac{\partial a^{i_k}}{\partial x^{j_k}}+\sum_{l=a+1}^{a+b}T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots j_l\cdots i_{a+b}}\frac{\partial a^{j_l}}{\partial x^{i_l}}\ ,\tag{33.98}$$

onde $T^{i_1\cdots j_k\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}$ significa que o índice i_k é substituído pelo índice j_k e analogamente para $T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots j_l\cdots i_{a+b}}$. ✠

33.4 Exemplos de Variedades Topológicas e Diferenciáveis

A presente seção é dedicada à discussão de exemplos de variedades topológicas e diferenciáveis e suas construções. O estudante é estimulado a procurá-la sempre que possível ou necessário.

Os exemplos mais básicos de variedades diferenciáveis de dimensão $n\in\mathbb{N}$ são os espaços $\mathbb{R}^n$ dotados da topologia usual e das cartas locais de coordenadas definidas pela função identidade. Com essa estrutura temos a chamada *variedade* $\mathbb{R}^n$ *padrão*. Não nos deteremos com mais elaborações sobre esses exemplos, mas recordamos o leitor dos seguintes fatos já mencionados: $\mathbb{R}^4$ possui uma coleção não contável de estruturas diferenciáveis distintas da estrutura diferenciável do $\mathbb{R}^4$ padrão. Em todos os demais espaços $\mathbb{R}^n$ com $n\neq 4$ a estrutura diferenciável padrão é a única existente.

33.4.1 Uma Variedade Topológica Paracompacta não Segundo-Contável

Nesta seção apresentamos um exemplo ilustrativo de uma variedade topológica paracompacta que não é segundo-contável.

Exemplo 33.11 Seja $\mathbb{W}$ um subconjunto não contável de $\mathbb{R}$ (por exemplo, $\mathbb{W}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{W}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, o conjunto dos números irracionais). Seja $X=\mathbb{R}\times\mathbb{W}\subset\mathbb{R}^2$. Considere-se em X a topologia τ gerada por todos os conjuntos da forma $A\times\{y\}:=\big\{(x,\ y),\ \text{com } x\in A\big\}$, com $y\in\mathbb{W}$ e $A\in\tau_{\mathbb{R}}$, um aberto na topologia usual de $\mathbb{R}$. Note-se que τ não coincide com a topologia induzida em $X\subset\mathbb{R}^2$ pela topologia $\tau_{\mathbb{R}^2}$, a topologia usual de $\mathbb{R}^2$.

É fácil constatar que $(X,\ \tau)$ possui uma coleção não contável de componentes conexas, pois $X=\bigcup_{y\in\mathbb{W}}\big(\mathbb{R}\times\{y\}\big)$, uma união disjunta, sendo que cada conjunto $\mathbb{R}\times\{y\}$, com $y\in\mathbb{W}$, é um τ-aberto conexo. Vamos demonstrar as quatro afirmações seguintes: **a)** o espaço topológico $(X,\ \tau)$ é localmente Euclidiano de dimensão 1; **b)** o espaço topológico $(X,\ \tau)$ é Hausdorff; **c)** o espaço topológico $(X,\ \tau)$ não é segundo-contável e **d)** o espaço topológico $(X,\ \tau)$ é paracompacto. Isso estabelecerá que o espaço topológico $(X,\ \tau)$ é uma variedade topológica paracompacta mas não segundo-contável. Vamos às demonstrações dessas quatro afirmativas.

a. Seja $(x,\ y)\in X$, com $x\in\mathbb{R}$ e $y\in\mathbb{W}$, arbitrários. É claro que para qualquer $r>0$ tem-se $(x,\ y)\in(x-r,\ x+r)\times\{y\}\equiv V\in\tau$. É claro que V é uma vizinhança τ-aberta de $(x,\ y)\in X$ e fácil constatar (faça-o!) que a aplicação $h_V:V\to\mathbb{R}$ dada por $h_V\big((a,\ y)\big)=a$, com $x-r<a<x+r$, é um homeomorfismo de V em $(x-r,\ x+r)$, que é um aberto em $\mathbb{R}$. Isso estabelece que cada $(x,\ y)\in X$ possui ao menos uma vizinhança aberta localmente Euclidiana de dimensão 1 e, portanto, que $(X,\ \tau)$ é um espaço topológico localmente Euclidiano de dimensão 1.

b. Sejam $p_1=(x_1,\ y_1)$ e $p_2=(x_2,\ y_2)$ dois pontos distintos arbitrários de X. Tome-se $r>0$ e sejam A_1 e A_2 os conjuntos τ-abertos dados por $A_1=(x_1-r,\ x_1+r)\times\{y_1\}$ e $A_2=(x_2-r,\ x_2+r)\times\{y_2\}$. Sempre tem-se $p_1\in A_1$ e $p_2\in A_2$. Além disso, se $y_1\neq y_2$ tem-se que $A_1\cap A_2=\emptyset$. Se, porém, tivermos $y_1=y_2$ valerá também $A_1\cap A_2=\emptyset$ desde que escolhamos $r<|x_1-x_2|/2$. Esses fatos reunidos estabelecem que o espaço topológico $(X,\ \tau)$ tem a propriedade de Hausdorff.

c. Seja $\mathcal{B}$ uma base em τ. Então, por definição, todo elemento de τ pode ser escrito como união de elementos de $\mathcal{B}$. Assim, para cada $y\in\mathbb{W}$ existe uma coleção não vazia $\mathcal{B}_y$ de elementos de $\mathcal{B}$ cuja união é o τ-aberto $(0,\ 1)\times\{y\}$. É evidente que todos os elementos de $\mathcal{B}_y$ são da forma $B\times\{y\}$ com $B\in\tau_{\mathbb{R}}$ (doutra forma sua união conteria algum ponto $(x,\ y')$ com $y'\neq y$). Isso implica que as coleções $\mathcal{B}_y$ são disjuntas para y's diferentes. Assim, $\mathcal{B}$ contém a união disjunta não contável $\bigcup_{y\in\mathbb{W}}\mathcal{B}_y$ e, portanto, como nenhum $\mathcal{B}_y$ é vazio, a base $\mathcal{B}$ não pode ser contável. Isso estabelece que espaço topológico $(X,\ \tau)$ não é segundo-contável.

d. A topologia τ é a topologia gerada por todos os conjuntos $A\times\{y\}$, com $A\in\tau_{\mathbb{R}}$ e $y\in\mathbb{W}$. Pela Proposição 27.3, página 1429, é fácil ver que todo τ-aberto é a união de conjuntos da forma $A\times\{y\}$, com $A\in\tau_{\mathbb{R}}$ e $y\in\mathbb{W}$.

Seja $\mathcal{A}=\big\{B_\mu,\ \mu\in\Omega\big\}$ um recobrimento de X por τ-abertos. Como os elementos B_μ de $\mathcal{A}$ são τ-abertos, temos pelo comentário acima que cada B_μ é da forma

$$B_\mu\ =\ \bigcup_{\lambda\in\Lambda_\mu}\big(A_\lambda\times\{y_\lambda\}\big)\ ,$$

com $A_\lambda\in\tau_{\mathbb{R}}$ e $y_\lambda\in\mathbb{W}$, sendo Λ_μ um conjunto de índices (que pode depender de $\mu\in\Omega$). Assim,

$$\mathcal{A}\ =\ \left\{\bigcup_{\lambda\in\Lambda_\mu}\big(A_\lambda\times\{y_\lambda\}\big)\ ,\quad\mu\in\Omega\right\}\ .$$

Segue facilmente disso que a coleção de τ-abertos dada por

$$\mathcal{B}\ :=\ \left\{A_\lambda\times\{y_\lambda\}\ ,\quad\lambda\in\bigcup_{\mu\in\Omega}\Lambda_\mu\right\}$$

é um refinamento de $\mathcal{A}$ (justifique!). Como $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ recobrem X, para cada $y \in \mathbb{W}$ deve haver ao menos um $\lambda \in \bigcup_{\mu\in\Omega} \Lambda_\mu$ tal que $y_\lambda \in y$. Assim, podemos escrever $\mathcal{B}$ como a união disjunta

$$\mathcal{B} \;=\; \bigcup_{y\in\mathbb{W}} \mathcal{B}_y\,, \qquad \text{onde} \qquad \mathcal{B}_y \;:=\; \Big\{A_\gamma \times \{y\},\ \gamma \in \Gamma_y\Big\}\,,$$

sendo $\Gamma_y := \Big\{\lambda \in \bigcup_{\mu\in\Omega} \Lambda_\mu \big|\ y_\lambda = y\Big\}$.

Claro está que cada $\mathcal{B}_y$ deve recobrir o conjunto $\mathbb{R}\times\{y\}$ (doutra forma $\mathcal{B}$ não poderia recobrir X). Logo, para cada $y \in \mathbb{W}$ a coleção $\{A_\gamma,\ \gamma \in \Gamma_y\}$ é um recobrimento de $\mathbb{R}$ por $\tau_{\mathbb{R}}$-abertos. Como $(\mathbb{R},\ \tau_{\mathbb{R}})$ é paracompacto (pelo Corolário 32.11, página 1650), cada $\{A_\gamma,\ \gamma \in \Gamma_y\}$ possui um refinamento localmente finito $\mathcal{C}_y$. Defina-se

$$\mathcal{C} \;:=\; \bigcup_{y\in\mathbb{W}} \{C \times \{y\},\ \ C \in \mathcal{C}_y\}\,.$$

Agora, $\mathcal{C}$ é um refinamento localmente finito de $\mathcal{B}$ e de $\mathcal{A}$, pois dado $(x,\ y) \in X$, existe, pela paracompacidade de $(\mathbb{R},\ \tau_{\mathbb{R}})$, uma vizinhança aberta $V \times \{y\}$ de $(x,\ y)$, com $x \in V \in \tau_{\mathbb{R}}$, que intercepta apenas uma coleção finita de elementos de $\mathcal{C}_y \times \{y\} \subset \mathcal{C}$. Isso conclui a prova que $(X,\ \tau)$ é um espaço topológico paracompacto, mas não segundo-contável.

Esse exemplo ilustra bem o comentário acima de que toda variedade topológica que é paracompacta mas não é segundo-contável possui uma coleção não contável de componentes conexas. ♦

E. 33.23 *Exercício*. Mostre que se tomarmos $\mathbb{W}$ como um conjunto enumerável no Exemplo 33.11, então $(X,\ \tau)$ será um espaço topológico segundo-contável e, portanto, será uma variedade topológica segundo-contável.

Pelo supracitado Teorema de Whitney, X pode neste caso ser mergulhado em $\mathbb{R}^2$. Indiquemos como isso pode ser feito. Seja $\mathbb{W} = \{y_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ uma contagem de $\mathbb{W}$. Defina-se $f : X \to \mathbb{R}^2$ por

$$f\big((x,\ y_n)\big) \;:=\; \left(n + \frac{1+\tanh(x)}{2},\ \ 0\right)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. O conjunto imagem $f(X)$ de X por f é $\bigcup_{n=1}^{\infty} \big((n-1,\ n)\times\{0\}\big) \subset \mathbb{R}^2$. Mostre que f é um homeomorfismo em sua imagem e, portanto, que é um mergulho de X em $\mathbb{R}^2$. ✠

33.4.2 O Gráfico de uma Função Real em $\mathbb{R}^n$

No que segue, denotaremos por $\|\cdot\|_m$ a norma Euclidiana usual em $\mathbb{R}^m$.

Seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo (na topologia usual de $\mathbb{R}^n$) e seja $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. O conjunto de pontos $\mathcal{S} := \big\{\big(x^1,\ \ldots,\ x^n,\ F(x^1,\ \ldots,\ x^n)\big),\ \ \text{com } (x^1,\ \ldots,\ x^n) \in \mathcal{O}\big\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, que compõem o gráfico de F, define uma superfície em $\mathbb{R}^{n+1}$. A topologia usual de $\mathbb{R}^{n+1}$ induz uma topologia τ em $\mathcal{S}$ (a noção de topologia induzida foi introduzida na Seção 27.2.4, página 1431). Essa topologia é a topologia induzida pela métrica de $\mathbb{R}^{n+1}$ em $\mathcal{S}$:

$$d\Big(\big(x,\ F(x)\big),\ \big(y,\ F(y)\big)\Big) \;=\; \big\|(x,\ F(x)) - (y,\ F(y))\big\|_{n+1} \;=\; \sqrt{\|x-y\|_n^2 + \big(F(x)-F(y)\big)^2}\,.$$

Aqui, $x \equiv (x^1,\ \ldots,\ x^n)$ e $y \equiv (y^1,\ \ldots,\ y^n)$ são elementos de $\mathcal{O}$.

A topologia τ em $\mathcal{S}$ é, portanto, uma topologia métrica. Assim, o espaço topológico $(\mathcal{S},\ \tau)$ é Hausdorff. É fácil provar, usando a continuidade de F que o conjunto contável $\{(x,\ F(x)),\ x \in \mathcal{O} \cap \mathbb{Q}^n\}$ é τ-denso em $\mathcal{S}$.

E. 33.24 *Exercício*. Demonstre essa afirmação! ✠

Assim, $(\mathcal{S},\ \tau)$ é um espaço topológico separável e, pela Proposição 27.15, página 1442, é também segundo-contável.

Exemplos de abertos Euclidianos nessa topologia são os conjuntos $\mathcal{F}(x_0,\ r) := \Big\{\big(x,\ F(x)\big),\ \ \text{com } x \in \mathcal{O} \text{ tal que } \|x - x_0\|_n < r\Big\}$, sendo que $x_0 \in \mathcal{O}$ e r é pequeno o suficiente para a bola aberta de raio r centrada em x_0 esteja contida em $\mathcal{O}$.

E. 33.25 *Exercício*. Use a continuidade de F para mostrar que formalmente que $\mathcal{F}(x_0,\ r)$ é um aberto na topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}^{n+1}$ em $\mathcal{S}$. Mostre, para tal que para cada $\epsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que $\big\|\big(x,\ F(x)\big) - \big(y,\ F(y)\big)\big\|_{n+1} < \epsilon + r$ sempre que $\|x-y\|_n < r$. ✠

As cartas locais de coordenadas para tais abertos Euclidianos são pares $\big(\mathcal{F}(x_0,\ r),\ h_{x_0,\,r}\big)$, onde as cartas de coordenadas são as funções $h_{x_0,\,r} : \mathcal{F}(x_0,\ r) \to \mathcal{O}$ dadas por $h_{x_0,\,r}\big(x,\ F(x)\big) := x$. É um exercício simples demonstrar que a coleção de tais pares $\big(\mathcal{F}(x_0,\ r),\ h_{x_0,\,r}\big)$ compõe um n-atlas em $\mathcal{S}$. Note-se também que $h_{x_0,\,r}\big(\mathcal{F}(x_0,\ r)\big) = B(x_0,\ r)$, a bola aberta em $\mathbb{R}^n$ de raio r centrada em x_0.

Se $U \equiv \mathcal{F}(x_0,\ r)$ e $V \equiv \mathcal{F}(x_0',\ r')$ são duas cartas locais com $U \cap V \neq \emptyset$, é fácil ver que as correspondentes funções de transição são dadas por $H_{U,\,V}(x) = x$, com x no seu correspondente domínio aberto.

O espaço topológico $(\mathcal{S},\ \tau)$ é, portanto, localmente Euclidiano (e portanto, pela Proposição 33.1, página 1681) é localmente compacto.

Por ser Hausdorff, segundo-contável e localmente compacto, o espaço topológico $(\mathcal{S},\ \tau)$ é também paracompacto (pelo Teorema 32.26, página 1648). Esse fato já poderia ter sido anunciado quando afirmamos que $(\mathcal{S},\ \tau)$ é um espaço métrico, devido ao Teorema de A. H. Stone, Teorema 32.27, da página 1650.

Concluímos dessa discussão que $(\mathcal{S},\ \tau)$ é uma variedade topológica.

Nesse exemplo, podemos, em verdade, considerar um atlas de apenas uma carta, a saber, a carta $(\mathcal{S},\ h)$, onde $h : \mathcal{S} \to \mathcal{O}$ é dada por $h\big(x,\ F(x)\big) = x$.

E. 33.26 *Exercício*. Mostre que esse atlas é compatível com o anterior. ✠

Como vimos acima, as funções de transição são $H_{U,\,V}(x) = x$. Como essas funções são infinitamente diferenciáveis, segue que $(\mathcal{S},\ \tau)$ é também uma variedade infinitamente diferenciável. Note-se que isso independe do fato de F ser diferenciável ou não, pois apenas assumimos acima que F é contínua.

Há nisso alguns pontos sutis que queremos apontar ao leitor. A variedade $(\mathcal{S},\ \tau)$, acima descrita, é uma *subvariedade topológica* de $\mathbb{R}^{n+1}$ e é até mesmo uma *variedade diferenciável* (mesmo que F não seja diferenciável!). No entanto, se F não for diferenciável, $(\mathcal{S},\ \tau)$ não será uma *subvariedade diferenciável* de $\mathbb{R}^{n+1}$! Na Seção 33.4.2.1, página 1728 discutimos um tal exemplo, o dos chamados *cones n-dimensionais*.

Assim, o cone bidimensional com vértice na origem,

$$\mathbb{K}^2 \;:=\; \Big\{\Big(x^1,\ x^2, \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}\Big)\ ,\ \ (x^1,\ x^2) \;\in\; \mathbb{R}^2\Big\}\ ,$$

por exemplo, é uma variedade diferenciável no sentido exposto acima, para $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2$ e $F(x^1,\ x^2) = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$, mas não é uma subvariedade diferenciável de $\mathbb{R}^3$, pois F não é diferenciável em $(0,\ 0)$.

Há nisso uma ideia geral. Se uma variedade topológica $\mathcal{M}$ for homeomorfa a algum $\mathbb{R}^n$, podemos fazer dela uma variedade diferenciável usando o homeomorfismo para induzir em $\mathcal{M}$ a estrutura diferenciável de $\mathbb{R}^n$. Isso não garante, porém, que $\mathcal{M}$ seja difeomorfa a alguma subvariedade de algum $\mathbb{R}^m$, com $m > n$. Foi o que fizemos acima quando tratamos da superfície $\mathcal{S}$: usamos o homeomorfismo $h : \mathcal{S} \to \mathcal{O}$ dado por $h\big(x,\ F(x)\big) = x$ para induzir a estrutura diferenciável de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathcal{S}$ e isso pode ser feito mesmo quando F não for diferenciável, mas nesse caso não resulta uma subvariedade diferenciável de $\mathbb{R}^{n+1}$.

• **O caso em que F é diferenciável**

No caso em que F é diferenciável, podemos estabelecer que seu gráfico é uma subvariedade diferenciável da variedade $\mathbb{R}^{n+1}$. Na Seção 33.4.2.1, página 1728, mostramos em um exemplo o que pode ocorrer se F não for diferenciável em um ponto.

Proposição 33.10 *Seja $\mathcal{O}$ um aberto de $\mathbb{R}^n$ e seja $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ diferenciável. Então, o gráfico de F definido acima, $\mathcal{S} := \{(x,\ F),\ x \in \mathcal{O}\}$ é uma subvariedade diferenciável da variedade $\mathbb{R}^{n+1}$ padrão.* □

Prova. Tudo o que resta a fazer é provar que a inclusão $i \equiv i_{\mathcal{S},\,\mathbb{R}^{n+1}}$ é uma imersão.

Por simplicidade, consideremos em $\mathcal{S}$ um atlas de apenas uma carta, a saber, $(\mathcal{S},\ h)$, onde $h : \mathcal{S} \to \mathcal{O}$ é dada por $h\big(x,\ F(x)\big) = x$. Aqui $x \equiv (x^1,\ \ldots,\ x^n) \in \mathcal{O}$.

Para $\mathbb{R}^{n+1}$ consideremos também um atlas de uma única carta local de coordenadas, a saber, $(\mathbb{R}^{n+1},\ h^2)$, onde $h^2 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é a carta de coordenadas trivial em $\mathbb{R}^{n+1}$, definida de sorte que $h^2\big(y^1,\ \ldots,\ y^{n+1}\big) = \big(y^1,\ \ldots,\ y^{n+1}\big)$.

Seja $p = \big(x,\ F(x)\big) \in \mathcal{S}$, com o que temos $h(p) = x = (x^1,\ \ldots,\ x^n) \in \mathcal{O}$ e $h^2(p) = \big(x^1,\ \ldots,\ x^n,\ F(x^1,\ \ldots,\ x^n)\big)$. O

espaço tangente $\mathsf{T}_p\mathcal{S}$ será dado por

$$\mathsf{T}_p\mathcal{S} \;=\; \left\{ v^1 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{h(p)} + \cdots + v^n \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_{h(p)} ,\; v^k \in \mathbb{R},\, \forall\, k \in \{1,\, \ldots,\, n\} \right\} ,$$

que claramente é isomorfo ao espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Já para um ponto $q = (y^1,\, \ldots\, y^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ o espaço tangente será

$$\mathsf{T}_q\mathbb{R}^{n+1} \;=\; \left\{ w^1 \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_q + \cdots + w^{n+1} \left.\frac{\partial}{\partial y^{n+1}}\right|_q ,\; w^l \in \mathbb{R},\, \forall\, l \in \{1,\, \ldots,\, n+1\} \right\} .$$

A inclusão $i \equiv i_{\mathcal{S},\,\mathbb{R}^{n+1}}$ é dada por $i\big((x,\; F(x)\big) = \big(x,\; F(x)\big)$, com $x \equiv (x^1,\, \ldots,\, x^n) \in \mathcal{O}$. Por definição, i será diferenciável se $i \circ h^{-1} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^{n+1}$ o for. Mas $\big(i \circ h^{-1}\big)(x^1,\, \ldots,\, x^n)) = \big(x^1,\, \ldots,\, x^n,\; F(x^1,\, \ldots,\, x^n)\big)$. Como F é diferenciável, concluímos que a inclusão i também o é.

Temos que $h^2 \circ i \circ h^{-1} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é dada por

$$\Big(h^2 \circ i \circ h^{-1}\Big)\big(x^1,\, \ldots,\, x^n\big) \;=\; \big(x^1,\, \ldots,\, x^n,\; F(x^1,\, \ldots,\, x^n)\big) \;=:\; \Big(y^1(x^1,\, \ldots,\, x^n),\, \ldots,\, y^{n+1}(x^1,\, \ldots,\, x^n)\Big) .$$

Portanto, $(di)_p : \mathsf{T}_p\mathcal{S} \to \mathsf{T}_{i(p)}\mathbb{R}^{n+1}$ é dada por

$$(di)_p \left(\sum_{k=1}^n v^k \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{h^2(p)} \right) \overset{(33.47)}{=} \left(\sum_{l=1}^n v^l \left.\frac{\partial}{\partial y^l}\right|_{h^2(p)} \right) + \left(\sum_{k=1}^n v^k \left.\frac{\partial F}{\partial x^k}\right|_{h(p)} \right) \left.\frac{\partial}{\partial y^{n+1}}\right|_{h^2(p)} .$$

Verifique! É evidente por essa expressão que $\sum_{k=1}^n v^k \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{h(p)} \in \mathsf{T}_p\mathcal{S}$ é um elemento do núcleo de $(di)_p$ (o conjunto dos vetores levados por $(di)_p$ no vetor nulo) se e somente se todos os v^k's forem nulos. Logo, $(di)_p$ é injetora e, portanto $i \equiv i_{\mathcal{S},\,\mathbb{R}^{n+1}}$ é uma imersão, concluindo que $\mathcal{S}$ é uma subvariedade diferenciável de $\mathbb{R}^{m+1}$. ■

33.4.2.1 Cones. E Um Estudo de Caso

Para $n \in \mathbb{N}$ o chamado *n-cone*, ou *cone n-dimensional*, denotado pelo símbolo $\mathbb{K}^n$, é definido como o gráfico da função $\mathbb{R}^n \ni (x^1,\, \ldots,\, x^n) \longmapsto \sqrt{\big(x^1\big)^2 + \cdots + \big(x^n\big)^2} \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\mathbb{K}^n \;:=\; \left\{ \left(x^1,\, \ldots,\, x^n,\; \sqrt{\big(x^1\big)^2 + \cdots + \big(x^n\big)^2} \right) \right\} \;\subset\; \mathbb{R}^{n+1} .$$

Como $\mathbb{K}^n$ é o gráfico de uma função contínua, $\mathbb{K}^n$ é uma variedade topológica e, no sentido explicitado acima, é uma variedade diferenciável, e isso apesar de a função $F(x^1,\, \ldots,\, x^n) := \sqrt{\big(x^1\big)^2 + \cdots + \big(x^n\big)^2}$ não ser diferenciável na origem! Porém, $\mathbb{K}^n$ **não é** uma subvariedade diferenciável de $\mathbb{R}^n$. Para tornar isso claro, estudemos o caso mais simples do cone unidimensional $\mathbb{K}^1$.

• **Um estudo de caso. O cone unidimensional**

Para uma melhor compreensão de certas noções, é por vezes interessante estudarmos alguns casos especiais que sirvam de exemplo para certas instâncias e de contraexemplo para outras.

Considere-se $N = \mathbb{R}^2$ enquanto variedade diferenciável (com a topologia e estrutura diferenciável usuais) e seja $M \subset N$ definido por $M \equiv \mathbb{K}^1 := \Big\{ \big(x,\; |x|\big),\; x \in \mathbb{R} \Big\}$. Claramente, trata-se do cone unidimensional, o gráfico da função $F(x) = |x|$. Podemos adotar em M a topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}^2$ e, como discutimos, M será uma variedade topológica, em verdade uma subvariedade topológica de $\mathbb{R}^2$ com um atlas $\mathcal{A}\{(M,\; h)\}$ composto de uma única carta local de coordenadas com a carta local M e com a carta de coordenadas $h : M \;\to \mathbb{R}$ definida por $h\Big(\big(x,\; |x|\big)\Big) = x$. Tem-se que h é um homeomorfismo e que $h^{-1} : \mathbb{R} \to M$ é dada por $h^{-1}(x) = \big(x,\; |x|\big)$, $x \in \mathbb{R}$.

Como vimos, a função de transição dessa carta nela mesma é a identidade e concluímos que M é, com essas estruturas, uma variedade diferenciável. A questão que agora queremos colocar é: será essa variedade diferenciável M uma

subvariedade diferenciável de N? Como veremos isso não é o caso e, nisso, o fato de a função $|x|$ não ser diferenciável em $x = 0$ tem um papel decisivo. Precisamos ainda de alguma preparação.

Uma função $f : M \to \mathbb{R}$ será diferenciável, segundo nossas definições prévias, se $f \circ h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for diferenciável, ou seja, se a função $f \circ h^{-1}(x) := f\Big(\big(x,\; |x|\big)\Big)$ for diferenciável.

Seja I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e seja $I \ni t \longmapsto c(t) \equiv \big(x(t),\; |x(t)|\big)$ uma curva em M. Aqui $I \ni t \mapsto x(t)$ é alguma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Segundo nossas definições prévias, c será uma curva diferenciável se $I \to h \circ c$ for uma função diferenciável em $\mathbb{R}$. Agora, $h \circ c(t) = x(t)$. Assim, c é uma curva diferenciável se a função $x(t)$ for uma função diferenciável de I em $\mathbb{R}$.

Assim, para $p \in M$ e c uma curva diferenciável de passa por p em $t = 0$, temos

$$\frac{d(h \circ c)}{dt}(t) \;=\; \dot{x}(0) .$$

Ainda segundo nossas definições temos, para uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$ e para $p = \big(x(0),\; |x(0)|\big) \in M$,

$$D_p([c]_p)_p f \;:=\; \left.\frac{d}{dt}(f \circ c)\right|_{t=0} \;=\; \left.\frac{d}{dt}\Big(\big(f \circ h^{-1}(x)\big) \circ \big(h \circ c\big)\Big)\right|_{t=0} \;=\; \dot{x}(0)\, \left.\frac{\partial\big(f \circ h^{-1}\big)}{\partial x}(x)\right|_{x(0)} .$$

Assim, concluímos que para $p = \big(x,\; |x|\big)$ temos

$$\mathsf{T}_pM \;=\; \left\{ v \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{h(p)} ,\; v \in \mathbb{R} \right\} \;=\; \left\{ v \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{x} ,\; v \in \mathbb{R} \right\} ,$$

que, muito claramente, é um espaço vetorial isomorfo ao espaço vetorial unidimensional $\mathbb{R}$. Já o espaço tangente T_qN com $q \in N$ na forma $q = (y^1,\; y^2) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\mathsf{T}_qN \;=\; \left\{ v^1 \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_{(y^1,\, y^2)} + v^2 \left.\frac{\partial}{\partial y^2}\right|_{(y^1,\, y^2)} ,\; v^1,\; v^2 \in \mathbb{R} \right\} ,$$

que, muito claramente, é um espaço vetorial isomorfo ao espaço vetorial bidimensional $\mathbb{R}^2$.

É importante chamar a atenção do leitor para o fato que T_pM existe mesmo no ponto $p = (0, |0|) = (0,\; 0) \in M$, onde o cone M tem seu vértice. O leitor poderá achar isso estranho, pois M forma um "bico" nesse ponto e $|x|$ não é uma função diferenciável no mesmo. Porém, com as estruturas que empregamos M é uma variedade diferenciável e, portanto, possui um espaço tangente em cada um de seus pontos. O que está ocultamente ocorrendo é que estamos identificando o conjunto unidimensional M com $\mathbb{R}$, que é uma variedade diferenciável e, com essa identificação, estamos transplantando toda a estrutura que faz de $\mathbb{R}$ uma variedade diferenciável para M.

Podemos agora abordar a questão de se M, com a estrutura diferenciável acima, é uma subvariedade diferenciável de $N = \mathbb{R}^2$. Para responder a essa questão precisamos saber se a inclusão $i_{M,\,N}$ de M em N é uma imersão e, para isso, precisamos saber 1º se a inclusão $i_{M,\,N}$ é diferenciável e 2º se a aplicação diferencial $(di_{M,\,N})_p : \mathsf{T}_pM \to \mathsf{T}_{i_{M,\,N}(p)}N$ é injetora. Se as respostas a ambas as questões fossem afirmativas, então M seria uma subvariedade diferenciável de N.

Para responder à 1ª questão, lembremos que $i_{M,\,N}$ é diferenciável se $i_{M,\,N} \circ h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ o for. Agora, a inclusão $i_{M,\,N}$ é dada por $i_{M,\,N}\big((x,\; |x|)\big) = \big(x,\; |x|\big)$. Logo, $\big(i_{M,\,N} \circ h^{-1}\big)(x) = \big(x,\; |x|\big)$. Porém, essa **não é** é uma função diferenciável de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ no ponto $x = 0$ (pois, como é bem sabido, a função $|x|$ não é diferenciável nesse ponto).

Assim, M **não é** uma subvariedade diferenciável de N.

Note-se que $(di_{M,\,N})_p : \mathsf{T}_pM \to \mathsf{T}_{i_{M,\,N}(p)}N$ está definida para $p \neq (0,\; 0)$ e tem-se, para $v \in \mathbb{R}$,

$$(di_{M,\,N})_{(x,\,|x|)} \left(v \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_x \right) \;=\; \begin{cases} v \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_{(x,\,|x|)} - v \left.\frac{\partial}{\partial y^2}\right|_{(x,\,|x|)} , & \text{se } x < 0 , \\ v \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_{(x,\,|x|)} + v \left.\frac{\partial}{\partial y^2}\right|_{(x,\,|x|)} , & \text{se } x > 0 . \end{cases}$$

com $\big(y^1,\; y^2\big)$ sendo as coordenadas Cartesianas usuais em $\mathbb{R}^2$.

E. 33.27 *Exercício*. Verifique! Constate também que $(di_{M,\,N})_{(x,\,|x|)}$ é injetora para $x \neq 0$. ✣

33.4.3 Superfícies Regulares em $\mathbb{R}^n$

Uma classe importante de variedades diferenciáveis é composta pelas chamadas *superfícies regulares* em um espaço $\mathbb{R}^n$. Trata-se do exemplo-gerador, historicamente falando, da noção de variedade e muitas variedades diferenciáveis encontradas em aplicações são desse tipo.

À página 1711, apresentamos a seguinte definição: um conjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ é dito ser uma *superfície regular de dimensão* m (com $m \leq n$) se for uma subvariedade de dimensão m de $\mathbb{R}^n$ (com $\mathbb{R}^n$ sendo aqui a variedade diferenciável $\mathbb{R}^n$ padrão).

Muitas vezes uma superfície $\mathcal{S}$ é dada concretamente, por exemplo, como superfície de nível de uma função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (i.e., como o conjunto dos pontos satisfazendo $F(x^1, \ldots, x^n) = c$ para algum c constante) e, por isso, é útil termos condições concretas para determinar se $\mathcal{S}$ é uma superfície regular no sentido acima. Para isso, presta-se a definição alternativa de superfície regular que introduzimos logo adiante.

• **Superfícies regulares de dimensão m em $\mathbb{R}^n$. Definição**

No que segue seguiremos proximamente as definições e as estratégias de demonstração delineadas em [341] e [342], adicionando alguns esclarecimentos.

Definição. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \leq n$. Seja $\mathcal{S}_m \subset \mathbb{R}^n$ e consideremos em $\mathcal{S}_m$ a topologia τ_I induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}^n$. Recorde-se que, com essa topologia, $\mathcal{S}_m$ será Hausdorff e segundo-contável, pois $\mathbb{R}^n$ o é com a topologia usual. $\mathcal{S}_m$ é dito ser uma superfície regular de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ se possuir um recobrimento por τ_I-abertos $\mathcal{V}$ tal que, para cada $V \in \mathcal{V}$ podemos associar:

1. Um conjunto $U \subset \mathbb{R}^m$, aberto na topologia usual de $\mathbb{R}^m$;
2. Uma aplicação $\boldsymbol{\varphi}_V \equiv \boldsymbol{\varphi} : U \to V$ que satisfaça:
   (a) $\boldsymbol{\varphi} : U \to V$ é um homeomorfismo;
   (b) $\boldsymbol{\varphi}$ é diferenciável, i.e., para $x \equiv (x^1, \ldots, x^m) \in U$ as funções $\big(\varphi^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, \varphi^n(x^1, \ldots, x^m)\big) \equiv \boldsymbol{\varphi}(x) \in V$ são diferenciáveis;
   (c) A derivada $d\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, dada por $d\boldsymbol{\varphi}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^m}(x) \end{pmatrix}$, é injetora em todos os pontos de U.

♠

A função $\boldsymbol{\varphi} : U \to V$ é dita ser uma parametrização de V pelos pontos $x = (x^1, \ldots, x^m)$ de U.

No que segue vamos demonstrar que toda superfície regular segundo essa definição é uma subvariedade diferenciável de dimensão m de $\mathbb{R}^n$.

Antes de prosseguirmos, façamos algumas observações relevantes. Seja $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma matriz $n \times m$, com $m \leq n$ (como $d\boldsymbol{\varphi}$) que seja injetiva (como $d\boldsymbol{\varphi}$). Então, afirmamos que A possui exatamente m linhas linearmente independentes. O argumento é o seguinte: cada linha de A pode ser vista como um vetor de $\mathbb{R}^m$. A matriz A não pode possuir mais que m linhas linearmente independentes, pois em $\mathbb{R}^m$ um conjunto de vetores linearmente independentes não pode ter mais que m elementos. Se em A há p linhas linearmente independentes, elas geram um subespaço linear p-dimensional em $\mathbb{R}^m$ e, portanto, se $p < m$, poderíamos encontrar em $\mathbb{R}^m$ ao menos um vetor <u>não nulo</u> $\mathbf{b}$ ortogonal a essas p linhas. Mas pela regra de produto de matrizes, valeria então $A\mathbf{b} = 0$, contrariando o fato de A ser injetora. Portanto devemos ter $p = m$, completando o argumento.

Concluímos das hipóteses acima que em cada ponto $x \in U$ a matriz $d\boldsymbol{\varphi}_x$ possui exatamente m linhas linearmente independentes. Vamos supor, por simplicidade, que em um dado ponto $y \in U$ as m primeiras linhas sejam linearmente independentes (o caso geral será discutido mais adiante). Teremos, portanto, $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1}(y) & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^m}(y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^m}(y) \end{pmatrix} \neq 0$. Como o lado esquerdo é uma função contínua de y, concluímos que deve haver uma vizinhança aberta $U' \subset U$ de y onde esse determinante também não se anula e, portanto, onde as m primeiras linhas de $d\boldsymbol{\varphi}$ são linearmente independentes. Em verdade esse aberto U' deve coincidir com U, como mostra o seguinte argumento. Se U' for um subconjunto próprio de

U, então o determinante acima deve anular-se na parte da fronteira de U', contida em U: $\big(\partial U'\big) \cap U$. Como o número de linhas linearmente independentes de $d\boldsymbol{\varphi}$ é sempre igual a m, deve haver, para um ponto x_0 de $\big(\partial U'\big) \cap U$, um outro conjunto de m linhas de $d\boldsymbol{\varphi}$ que sejam linearmente independentes e, portanto, cujo determinante seja não nulo. Mas ai, haveria um aberto em torno desse ponto x_0 onde esse segundo determinante também é não nulo. Esse aberto tem uma intersecção não vazia com U' e nessa intersecção haveria dois conjuntos distintos de m linhas linearmente independentes, o que é um absurdo. Assim, podemos assumir que $U' = U$.

Vamos provisoriamente nos restringir ao caso em que as m primeiras linhas de $d\boldsymbol{\varphi}$ são linearmente independentes e vamos definir uma extensão de $\boldsymbol{\varphi} : U \to V \subset \mathbb{R}^n$, ao conjunto $U \times \mathbb{R}^{n-m}$, extensão essa que denotamos por $\boldsymbol{\Phi} : (U \times \mathbb{R}^{n-m}) \to \mathbb{R}^n$, da seguinte forma. Para $x \equiv (x^1, \ldots, x^m) \in U$, escrevamos, como acima, $\boldsymbol{\varphi}(x) = \big(\varphi^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, \varphi^n(x^1, \ldots, x^m)\big) \in V$. Definimos, então,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}(x^1, \ldots, x^m, x^{m+1}, \ldots, x^n) &= \Big(\Phi^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \Phi^n(x^1, \ldots, x^n)\Big) \\ &:= \Big(\varphi^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, \varphi^m(x^1, \ldots, x^m), \varphi^{m+1}(x^1, \ldots, x^m) + x^{m+1}, \ldots, \varphi^n(x^1, \ldots, x^m) + x^n\Big). \end{aligned} \tag{33.99}$$

Como se vê, as coordenadas $x^{m+1}, \ldots, x^n$ são sucessivamente adicionadas às funções $\varphi^m, \ldots, \varphi^n$.

Claro está que $\boldsymbol{\Phi}$ é uma extensão de $\boldsymbol{\varphi}$, pois $\boldsymbol{\Phi}$ coincide com $\boldsymbol{\varphi}$ quando $x^{m+1} = \cdots = x^n = 0$. É óbvio também que $\boldsymbol{\Phi}$ é diferenciável e é fácil constatar que sua derivada $d\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é

$$d\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^m} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial \varphi^{m+1}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^{m+1}}{\partial x^m} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^m} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{33.100}$$

A descrição é clara: as primeiras m colunas compõem a matriz $d\boldsymbol{\varphi}$. No canto superior à direita temos a matriz $m \times n$ composta por zeros e no canto inferior a direita temos a matriz identidade $(n-m) \times (n-m)$.

Afirmamos que $d\boldsymbol{\Phi}$ é uma matriz inversível em todo o conjunto $U \times \mathbb{R}^{n-m}$, o domínio de definição de $\boldsymbol{\Phi}$. De fato, por (33.100) e pela Proposição 10.3, página 517, temos

$$\det\big(d\boldsymbol{\Phi}\big) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^m} \end{pmatrix} \neq 0$$

sempre que $(x^1, \ldots, x^m) \in U$ e para quaisquer $x^{m+1}, \ldots, x^n$.

Antes de extrairmos as importantes consequências dessa fato, perguntamos como procederíamos se as linhas linearmente independentes de $d\boldsymbol{\varphi}$ que escolhemos não fossem as m primeiras. O que fazemos nesse caso é análogo: as coordenadas $x^{m+1}, \ldots, x^n$ são sucessivamente adicionadas às funções φ^j correspondentes a linhas linearmente dependentes de $d\boldsymbol{\varphi}$. O resultado é uma matriz $d\boldsymbol{\Phi}$ que difere da de (33.100) pelo fato que os "1"'s aparecem apenas nas linhas correspondente a linhas linearmente dependentes de $d\boldsymbol{\varphi}$. Após uma permutação de linhas a matriz $d\boldsymbol{\Phi}$ pode ser levada à forma (33.100), sendo que no bloco $m \times m$ superior à esquerda aparecerão as m linhas linearmente independentes de $d\boldsymbol{\varphi}$. Como uma permutação de linhas não altera o determinante de uma matriz concluímos que, também nesse caso, $d\boldsymbol{\Phi}$ será não singulares em todo $U \times \mathbb{R}^{n-m}$.

Seja $x \in U$ e seja $p = \boldsymbol{\varphi}(u) \in \mathcal{S}_m$. Como $d\boldsymbol{\Phi}$ é não singulares em todo $U \times \mathbb{R}^{n-m}$ existe, pelo Teorema da Função Inversa, Teorema 25.9, página 1398, uma vizinhança aberta $W_p \subset \mathbb{R}^n$ de p onde $\boldsymbol{\Phi}$ possui inversa e essa inversa é igualmente diferenciável. Denotamos essa inversa por $\boldsymbol{\Phi}^{-1} : W_p \to U \times \mathbb{R}^{n-m}$. Note-se que a restrição de $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$ a $W_p \cap \mathcal{S}_m$ coincide com a aplicação inversa de $\boldsymbol{\varphi}$, também quando restrita a $W_p \cap \mathcal{S}_m$.

Como se vê, a coleção $\mathcal{W} := \{W_p \cap \mathcal{S}_m,\ p \in \mathcal{S}_m\}$ compõe um recobrimento de $\mathcal{S}_m$. Esse recobrimento é um subrrecobrimento de $\mathcal{V}$, dado que, por construção, cada conjunto $W_p \cap \mathcal{S}_m$ está contido em algum $V \in \mathcal{V}$. Se $W \in \mathcal{W}$ e $W \subset V \in \mathcal{V}$, denotemos por $\boldsymbol{\varphi}_W$ a restrição de $\boldsymbol{\varphi}_V$ a W.

Claro está que $\mathcal{A} := \left\{(W,\ \boldsymbol{\varphi}_W^{-1}),\ W \in \mathcal{W}\right\}$ é um atlas para $\mathcal{S}_m$. Desejamos agora mostrar que, com esse atlas, $\mathcal{S}_m$ é uma variedade diferenciável.

Seja $q \in \mathcal{S}_m$ e sejam W_1 e W_2 dois elementos de $\mathcal{W}$ com intersecção $W := W_1 \cap W_2$ não vazia e que contenham q. Sejam $\boldsymbol{\varphi}_1 : U_1 \to W_1$ e $\boldsymbol{\varphi}_2 : U_2 \to W_2$ as respectivas parametrizações. Seja $U_1' := U_1 \cap \boldsymbol{\varphi}_1^{-1}(W)$ e $U_2' := U_2 \cap \boldsymbol{\varphi}_2^{-1}(W)$, dois subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^m$. Sejam $\boldsymbol{\Phi}_1 : U_1' \times \mathbb{R}^{n-m}$ e $\boldsymbol{\Phi}_2 : U_2' \times \mathbb{R}^{n-m}$, tal como definidas acima.

Considere-se a função de transição $H := \boldsymbol{\varphi}_1^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_2 : U_2' \to U_1'$ e sua inversa $H^{-1} := \boldsymbol{\varphi}_2^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_1 : U_1' \to U_2'$. Vamos demonstrar que ambas são diferenciáveis (e, portanto, que são difeomorfismos).

Para H, notamos que $H := \boldsymbol{\varphi}_1^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_2 = H := \boldsymbol{\Phi}_1^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_2$, pois $\boldsymbol{\varphi}_2(U_2') \subset W$ e, em W, $\boldsymbol{\varphi}_1^{-1}$ e $\boldsymbol{\Phi}_1^{-1}$ coincidem. Como $\boldsymbol{\Phi}_1^{-1}$ é diferenciável em W e $\boldsymbol{\varphi}_2$ é diferenciável em U_2', concluímos que $H : U_2' \to U_1'$ é diferenciável, por ser a composição de duas aplicações diferenciáveis (regra da cadeia). De forma totalmente análoga prova-se que $H^{-1} : U_1' \to U_2'$ é diferenciável.

Todos esses fatos dizem-nos que $\mathcal{S}_m$ é uma variedade diferenciável com um atlas $\left\{(W,\ \boldsymbol{\varphi}_W^{-1}),\ \ W \in \mathcal{W}\right\}$. Se supormos as aplicações $\boldsymbol{\varphi}$ como infinitamente diferenciáveis, então a variedade será infinitamente diferenciável.

Vamos agora mostrar que essa variedade diferenciável $\mathcal{S}_m$ é uma subvariedade diferenciável de $\mathbb{R}^n$. Queremos, portanto, provar que a inclusão $i_{\mathcal{S}_m,\,\mathbb{R}^n}$ é um mergulho suave da variedade diferenciável $\mathcal{S}_m$ na variedade diferenciável $\mathbb{R}^n$, ou seja, que $i_{\mathcal{S}_m,\,\mathbb{R}^n}$ é um mergulho topológico e uma imersão.

1. $i_{\mathcal{S}_m,\,\mathbb{R}^n} \equiv i : \mathcal{S}_m \to \mathbb{R}^n$ é um mergulho topológico. Isso é evidente, pois a imagem de i é $\mathcal{S}_m \subset \mathbb{R}^n$ e a topologia definida em $\mathcal{S}_m$ é justamente a topologia induzida pela topologia de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathcal{S}_m$.
2. $i_{\mathcal{S}_m,\,\mathbb{R}^n} \equiv i : \mathcal{S}_m \to \mathbb{R}^n$ é uma imersão. Seja $p \in \mathcal{S}_m$ e suponhamos que p pertença à carta local $W \in \mathcal{W}$. Seja $\boldsymbol{\varphi}^{-1} \equiv \boldsymbol{\varphi}_W^{-1}$ a correspondente carta local de coordenadas. Seja $U \equiv \boldsymbol{\varphi}^{-1}(W) \in \mathbb{R}^m$. Naturalmente, temos que $i \circ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}$ e $\mathbf{id}_{\mathbb{R}^n} \circ i = i$.

   A aplicação i é diferenciável, pois $\mathbf{id}_{\mathbb{R}^n} \circ i \circ \boldsymbol{\varphi} : U \to \mathbb{R}^n$ é idêntica a $\boldsymbol{\varphi} : U \to \mathbb{R}^n$, que é diferenciável, por hipótese. *Ipso facto*, $di_p = D(\mathbf{id}_{\mathbb{R}^n} \circ i \circ \boldsymbol{\varphi})_p = d\boldsymbol{\varphi}_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, que é injetora, por hipótese. Como isso vale para cada $p \in \mathcal{S}_m$ e $T_p\mathcal{S}_m \equiv \mathbb{R}^m$ e $T_{i(p)}\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$, isso estabeleceu que i é uma imersão.

Assim, estabelecemos que uma superfície regular de dimensão m de $\mathbb{R}^n$, segundo a definição da página 1730, é uma subvariedade diferenciável de dimensão m de $\mathbb{R}^n$. Não é difícil constatar que a recíproca é igualmente verdadeira: toda subvariedade diferenciável de dimensão m de $\mathbb{R}^n$ é uma superfície regular de dimensão m de $\mathbb{R}^n$.

Alguns dos exemplos de variedades diferenciáveis que discutiremos adiante, como o das esferas $\mathbb{S}^n$ (Seção 33.4.4, página 1732) e o dos toros $\mathbb{T}^n$ (Seção 33.4.5, página 1735), são exemplos de superfícies regulares.

E. 33.28 *Exercício*. Mostre que o gráfico de uma função $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, onde $\mathcal{O}$ é um aberto em $\mathbb{R}^n$, exemplo de variedade diferenciável discutido na Seção 33.4.2, página 33.4.2, corresponde a uma superfície regular de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+1}$ se e somente se a função F for diferenciável. ✠

* ** *

Em parte por motivos históricos, o estudo de superfícies regulares é uma área própria da Topologia Diferencial e da Geometria Diferencial. Para excelentes textos sobre o tema, vide [341] ou [19].

33.4.4 As Esferas $\mathbb{S}^n$

A esfera unitária $\mathbb{S}^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, é o lugar geométrico de todos os pontos de $\mathbb{R}^{n+1}$ situados a uma distância Euclidiana igual a 1 da origem:

$$\mathbb{S}^n := \left\{(y^1,\ \ldots,\ y^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \sqrt{(y^1)^2 + \cdots + (y^{n+1})^2} = 1\right\} .$$

Note-se que $\mathbb{S}^0 = \{-1,\ 1\} \subset \mathbb{R}$. Consideraremos em $\mathbb{S}^n$ a topologia relativa induzida pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^{n+1}$. Com isso, já sabemos pelas Proposições 27.16, página 1444, e 32.13, página 1609, que $\mathbb{S}^n$ é Hausdorff e segundo-contável (vide também a discussão sobre subvariedades topológicas à página 1685). Vamos agora mostrar que $\mathbb{S}^n$ é localmente Euclidiana.

Notemos também que pelo Teorema 32.14, página 1627, $\mathbb{S}^n$ é um espaço topológico compacto na topologia relativa induzida pela topologia métrica usual de $\mathbb{R}^{n+1}$, por ser fechado ($\mathbb{S}^n$ é o bordo da bola aberta em $\mathbb{R}^{n+1}$ de raio 1 centrada na origem) e limitado.

A esfera $\mathbb{S}^n$ possui um recobrimento formado pela coleção de hemisférios abertos

$$\begin{aligned} H_{k,\,\pm} &:= \left\{(y^1,\ \ldots,\ y^{n+1}) \in \mathbb{S}^n,\ \ \pm y^k > 0\right\} \\ &= \left\{(y^1,\ \ldots,\ y^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \text{com} \quad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n+1} (y^j)^2 < 1 \quad \text{e} \quad y^k = \pm\sqrt{1 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n+1} (y^j)^2}\right\} . \end{aligned} \tag{33.101}$$

com $k = 1,\ \ldots,\ n+1$. A união desses $2(n+1)$ conjuntos abertos é igual a $\mathbb{S}^n$. Cada $H_{k,\,\pm}$ é homeomorfo a $D_n(1,\ 0)$, o disco aberto de raio 1 centrado na origem em $\mathbb{R}^n$, com o homeomorfismo $h_{k\,\pm} : H_{k,\,\pm} \to D_n(1,\ 0)$ dado por

$$h_{k,\,\pm}(y^1,\ \ldots,\ y^{n+1}) := \left(y^1,\ \ldots,\ \widehat{y^k},\ \ldots,\ y^{n+1}\right) \in D_n(1,\ 0) , \tag{33.102}$$

onde $\widehat{y^k}$ significa que a k-ésima coordenada y^k é omitida de $(y^1,\ \ldots,\ y^{n+1})$. Claro é que

$$h_{k,\,\pm}^{-1}(x^1,\ \ldots,\ x^n) = \left(x^1,\ \ldots,\ x^{k-1},\ \pm\sqrt{1 - \sum_{j=1}^{n} (x^j)^2},\ x^k,\ \ldots,\ x^n\right) \in \mathbb{S}^n . \tag{33.103}$$

Os conjuntos $H_{k,\,\pm}$ são, portanto, localmente Euclidianos e recobrem $\mathbb{S}^n$. Juntado os fatos supracitados, concluímos que com a topologia relativa induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}^{n+1}$, a esfera $\mathbb{S}^n$ é uma variedade topológica de dimensão n e uma subvariedade topológica de dimensão n de $\mathbb{R}^{n+1}$. Vide a discussão sobre subvariedades topológicas à página 1685.

Se $l < k$ e $\pm$ e $\mp$ são sinais independentes, as funções de transição $\varphi_{k,\,\pm;\,l,\,\pm}$ associadas às cartas locais $H_{k,\,\pm}$ e $H_{l,\,\pm}$ são dadas por $\varphi_{k,\,\pm;\,l,\,\pm} = h_{l,\,\pm} \circ h_{k,\,\pm}^{-1}$, ou seja,

$$\varphi_{k,\,\pm;\,l,\,\pm}(x^1,\ \ldots,\ x^n) = \left(x^1,\ \ldots, x^{l-1},\ \widehat{x^l},\ x^{l+1},\ \ldots,\ x^{k-1},\ \pm y^k,\ x^k,\ \ldots,\ x^n\right) ,$$

com $y^k = \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{n} (x^j)^2}$, sendo suas inversas dadas por

$$\varphi_{k,\,\pm;\,l,\,\pm}^{-1}(x^1,\ \ldots,\ x^n) = \left(x^1,\ \ldots, x^{l-1},\ \mp y^l,\ x^{l+1},\ \ldots,\ x^{k-1},\ \widehat{x^k},\ x^k,\ \ldots,\ x^n\right) .$$

Para $k < l$ as expressões são análogas. É elementar constatar (faça-o!) que as funções $\varphi_{k,\,\pm;\,l,\,\pm}$ e $\varphi_{k,\,\pm;\,l,\,\pm}^{-1}$ são contínuas e infinitamente diferenciáveis em seus domínios. Isso provou que $\mathcal{A}_h = \{(H_{k,\,\pm},\ h_{k,\,\pm}),\ k = 1,\ \ldots,\ n\}$ é um atlas infinitamente diferenciável (composto de $2n$ cartas locais de coordenadas). Com essa estrutura diferenciável $\mathbb{S}^n$ é uma variedade diferenciável, denominada *n–esfera padrão*. Como já dissemos à página 1689 e comentaremos logo abaixo, para $n \geq 4$ pode haver outras estruturas diferenciáveis distintas em $\mathbb{S}^n$.

E. 33.29 *Exercício*. Usando (33.103), mostre que $\mathbb{S}^n$ é uma superfície regular no sentido da definição da página 1730. ✠

• **Projeções estereográficas da esfera $\mathbb{S}^n$**

Descreveremos agora um outro atlas infinitamente diferenciável das esferas $\mathbb{S}^n$, $n \geq 1$, obtido com uso da chamada *projeção estereográfica* (também denominada *projeção planisférica*). Sejam N e $S \in \mathbb{S}^n$ os pontos com coordenadas

$N = (0,\ \ldots,\ 0,\ 1)$ e $S = (0,\ \ldots,\ 0,\ -1)$, que denominaremos polo norte e polo sul, respectivamente. Sejam os abertos $A_1 = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ e $A_2 = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$. Esses abertos podem ser mapeados bijetivamente em $\mathbb{R}^n$ da seguinte forma. Para A_1, considera-se $p \in A_1$ e a linha reta que passa pelos pontos N e p. Essa reta intercepta o plano "horizontal" $H = \{(y^1,\ \ldots,\ y^n,\ 0),\ y^k \in \mathbb{R}\ \forall k = 1,\ \ldots,\ n\}$ em um ponto com coordenadas $(X^1,\ \ldots,\ X^n)$. Defina-se $h_1 : A_1 \to \mathbb{R}^n$ como sendo a aplicação que associa $p \in \mathbb{S}^n$ a $(X^1,\ \ldots,\ X^n)$. Se $p \in (x^1,\ \ldots,\ x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n$, é fácil constatar que

$$h_1(x^1,\ \ldots,\ x^{n+1}) \ = \ \frac{1}{1 - x^{n+1}}(x^1,\ \ldots,\ x^n) \ \equiv \ (X^1,\ \ldots,\ X^n)\,.$$

A aplicação inversa $h_1^{-1} : \mathbb{R}^n \to A_1$ é dada por

$$h_1^{-1}(X^1,\ \ldots,\ X^n) \ = \ \left(\frac{1}{(X^1)^2 + \cdots + (X^n)^2 + 1}\right)\Big(2X^1,\ \ldots,\ 2X^n,\ \big[(X^1)^2 + \cdots + (X^n)^2 - 1\big]\Big)\,.$$

Para A_2 temos uma construção semelhante: considera-se $p \in A_2$ e a linha reta que passa pelos pontos S e p. Essa reta intercepta o plano "horizontal" H em um ponto com coordenadas $(X^1,\ \ldots,\ X^n)$. Defina-se $h_2 : A_2 \to \mathbb{R}^n$ como sendo a aplicação que associa $p \in \mathbb{S}^n$ a $(X^1,\ \ldots,\ X^n)$. Se $p \in (x^1,\ \ldots,\ x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n$, é fácil constatar que

$$h_2(x^1,\ \ldots,\ x^{n+1}) \ = \ \frac{1}{1 + x^{n+1}}(x^1,\ \ldots,\ x^n) \ \equiv \ (X^1,\ \ldots,\ X^n)\,.$$

A aplicação inversa $h_2^{-1} : \mathbb{R}^n \to A_2$ é dada por

$$h_2^{-1}(X^1,\ \ldots,\ X^n) \ = \ \left(\frac{1}{(X^1)^2 + \cdots + (X^n)^2 + 1}\right)\Big(2X^1,\ \ldots,\ 2X^n,\ -\big[(X^1)^2 + \cdots + (X^n)^2 - 1\big]\Big)\,.$$

E. 33.30 *Exercício*. Prove todas as afirmações feitas acima. ✠

E. 33.31 *Exercício*. Prove que as projeções estereográficas, definidas acima, são transformações conformes, i.e., preservam ângulos entre curvas que se cruzam. ✠

É um exercício simples constatar que h_1 e h_2 são homeomorfismos. É também elementar verificar que a função de transição $h_2 \circ h_1^{-1}$ é definida em $\mathbb{R}^n \setminus \{(0,\ \ldots,\ 0)\}$ com valores em $\mathbb{R}^n \setminus \{(0,\ \ldots,\ 0)\}$ e é dada por

$$\big(h_2 \circ h_1^{-1}\big)(X^1,\ \ldots,\ X^n) \ = \ \left(\frac{1}{(X^1)^2 + \cdots + (X^n)^2}\right)(X^1,\ \ldots,\ X^n)\,,$$

sendo que sua inversa, dada por $h_1 \circ h_2^{-1}$, coincide com $h_2 \circ h_1^{-1}$. Como facilmente se constata, $h_2 \circ h_1^{-1}$ e sua inversa são infinitamente diferenciáveis em seus domínios e, portanto, são difeomorfismos classe C^∞. Assim, $\mathcal{A}_e = \Big\{(A_1,\ h_1),\ (A_2,\ h_2)\Big\}$ é um atlas infinitamente diferenciável em $\mathbb{S}^n$ (composto de 2 cartas locais de coordenadas). Isso provou novamente que $\mathbb{S}^n$, $n \geq 1$, são variedades diferenciáveis.

E. 33.32 *Exercício*. Prove todas as afirmações feitas acima. Interprete geometricamente o que $h_2 \circ h_1^{-1}$ representa. ✠

E. 33.33 *Exercício*. Mostre que os atlas $\mathcal{A}_h$ e $\mathcal{A}_e$ definidos acima são equivalentes, ou seja, que todas as cartas de um são compatíveis com todas as cartas do outro. ✠

A variedade diferenciável composta por $\mathbb{S}^n$ com a estrutura infinitamente diferenciável de $\mathcal{A}_h$ ou de $\mathcal{A}_e$ (ambas são equivalentes, pelo exercício acima) é por vezes denominada *n–esfera padrão*. As variedades compostas por $\mathbb{S}^n$ com outras estruturas infinitamente diferenciáveis que não a padrão (se as houver), são denominadas *esferas exóticas*. É sabido que as esferas $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^5$, $\mathbb{S}^6$ possuem apenas uma estrutura infinitamente diferenciável. A esfera $\mathbb{S}^7$ tem 28 estruturas infinitamente diferenciáveis, $\mathbb{S}^8$ tem 2, $\mathbb{S}^9$ tem 8, $\mathbb{S}^{10}$ tem 6, $\mathbb{S}^{11}$ tem 992, $\mathbb{S}^{12}$ tem 1, $\mathbb{S}^{13}$ tem 3 etc. É um problema ainda aberto determinar quantas estruturas infinitamente diferenciáveis há em $\mathbb{S}^4$.

33.4.5 Toros (e Algumas Generalizações)

Para $n \in \mathbb{N}$, o chamado *n-toro*, ou *toro n-dimensional*, denotado por $\mathbb{T}^n$, é definido por $\mathbb{T}^n := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ vezes}} \equiv \big(\mathbb{S}^1\big)^n$.

A topologia usualmente adotada em $\mathbb{T}^n$ é a topologia produto (n vezes) da topologia usual de $\mathbb{S}^1$. Como $\mathbb{S}^1$ é uma variedade diferenciável unidimensional, $\mathbb{T}^n$ é uma variedade topológica n–dimensional. Vide discussão sobre o produto de variedades diferenciáveis à página 1690.

Há uma outra construção dos toros $\mathbb{T}^n$ que faz uso da construção de espaços quocientes. Vamos ilustrar essa construção no caso dos toros $\mathbb{T}^1 \equiv \mathbb{S}^1$ e $\mathbb{T}^2$ e mostrar que a ideia pode ser generalizada para a construção de outras variedades especiais, como a *tira de Möbius*, a *garrafa de Klein* e o espaço projetivo bidimensional $\mathbf{P}(\mathbb{R}^3)$ (para as definições, vide Seção 33.4.6, página 1737).

• **O toro $\mathbb{T}^1 \equiv \mathbb{S}^1$ como espaço quociente**

O variedade $\mathbb{S}^1$, que coincide com o 1-toro, pode ser alternativamente construída com o seguinte procedimento. Considere-se o espaço topológico $(I,\ \tau)$ formado pelo intervalo fechado $I := [0,\ 2\pi]$ de $\mathbb{R}$ com a topologia relativa induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}$ em I, que denotamos por τ. Introduzamos uma relação de equivalência em I da seguinte forma: dizemos que $x \sim y$ se $x = y$ ou se $x = 0$ e $y = 2\pi$ (ou vice-versa). Como sempre, denotemos por $I/\!\sim$ o conjunto das classes de equivalência de I por essa relação. Claro deve estar que o que se passa nessa construção de $I/\!\sim$ é que os pontos 0 e 2π de I são identificados um com o outro (por pertencerem à mesma classe) e esses são os únicos pontos distintos de I a serem identificados, já que os demais compõem classes de equivalência de um único elemento. Adotemos em $I/\!\sim$ a topologia quociente $\tau/\!\sim$.

O conjunto das classes de equivalência é $I/\!\sim\ = \big\{[\varphi],\ \varphi \in [0,\ 2\pi)\big\}$ e é elementar constatar que a aplicação de $I/\!\sim$ sobre $\mathbb{S}^1$ dada por $I/\!\sim\ \ni [\varphi] \longmapsto \big(\cos(\varphi),\ \operatorname{sen}(\varphi)\big) \in \mathbb{S}^1$ é bijetora e que, em verdade, é um homeomorfismo. Isso permite-nos identificar $I/\!\sim$ e o 1–toro $T^1 \equiv \mathbb{S}^1$.

• **O toro $\mathbb{T}^2$ como espaço quociente**

Para $\mathbb{T}^2$ tem-se uma construção semelhante. Seja $I^2 = [-\pi,\ \pi] \times [-\pi,\ \pi] \subset \mathbb{R}^2$ munido da topologia relativa induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}^2$. Introduzamos uma relação de equivalência em I^2 da seguinte forma:

1. Todo $(x,\ y) \in I^2$ é declarado equivalente a si mesmo.
2. Para todo $x \in I$ tem-se $(x,\ -\pi) \sim (x,\ \pi)$ e $(x,\ \pi) \sim (x,\ -\pi)$.
3. Para todo $y \in I$ tem-se $(-\pi,\ y) \sim (\pi,\ y)$ e $(\pi,\ y) \sim (-\pi,\ y)$.

É elementar constatar (faça-o!) que se trata realmente de uma relação de equivalência. Com ela, são identificados pares de pontos localizados no bordo de I^2, de acordo com um esquema representado na Figura 33.7, página 1737.

Considere-se o conjunto quociente $I^2/\!\sim$ com a topologia quociente. É fácil ver que $I^2/\!\sim\ = \Big\{\big[(\varphi_1,\ \varphi_2)\big],\ \varphi_1,\ \varphi_2 \in (-\pi,\ \pi]\Big\}$ e que a aplicação de $I^2/\!\sim$ sobre $\mathbb{T}^2$ dada por $I^2/\!\sim\ \ni \big[(\varphi_1,\ \varphi_2)\big] \longmapsto \big(\cos(\varphi_1),\ \operatorname{sen}(\varphi_1)\big) \times \big(\cos(\varphi_2),\ \operatorname{sen}(\varphi_2)\big) \in \mathbb{T}^2$ é bijetora e que, em verdade, é um homeomorfismo. Isso permite-nos identificar $I^2/\!\sim$ e o 2–toro $\mathbb{T}^2$. A generalização para o caso do n–toro é imediata e dispensa maiores comentários.

A Figura 33.7, página 1737, ilustra o esquema de identificações nas arestas do quadrado de lado 2π implicado pela relação de equivalência acima. Também ilustrados estão os esquemas de identificações para a tira de Möbius, para a garrafa de Klein e para o espaço projetivo bidimensional $\mathbf{P}(\mathbb{R}^3)$, generalizações das quais trataremos no que segue.

• **Generalizações: a tira de Möbius**

A chamada *tira de Möbius*[29] é uma variedade bidimensional construída por um procedimento semelhante ao usado para construir $\mathbb{T}^2$ como um espaço quociente. A diferença, basicamente, é a forma como definimos as relações de equivalência.

[29] August Ferdinand Möbius (1790–1868). A "tira de Möbius" foi descoberta (ou inventada) simultaneamente em 1858 por Möbius e por Johann Benedict Listing (1808–1882). Foi Listing que cunhou a palavra "Topologia".

Seja M o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$M := \big((-\pi,\ \pi)\times(-\pi,\ \pi)\big)\cup\big\{(-\pi,\ y),\ -\pi<y<\pi\big\}\cup\big\{(\pi,\ y),\ -\pi<y<\pi\big\}\ .$$

Consideremos M munido da topologia relativa induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}^2$.

Definamos em M uma relação de equivalência da seguinte forma:

1. Todo $(x,\ y)\in M$ é declarado equivalente a si mesmo.
2. Para todo $y\in(-\pi,\ \pi)$ valem $(-\pi,\ y)\sim(\pi,\ -y)$ e $(\pi,\ -y)\sim(-\pi,\ y)$.

É elementar constatar que se trata realmente de uma relação de equivalência. Para um melhor entendimento das identificações implicadas por essa relação de equivalência, vide Figura 33.7, página 1737.

A chamada *tira de Möbius* é definida como o conjunto das classes $M/\!\sim$ munida da topologia quociente.

• **Generalizações: a garrafa de Klein**

A *garrafa de Klein*[30] é uma variedade bidimensional construída da seguinte forma. Seja $I^2=[-\pi,\ \pi]\times[-\pi,\ \pi]$ no qual, como antes, adotamos a topologia relativa induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}^2$. Seja definida em I^2 a seguinte relação de equivalência:

1. Todo $(x,\ y)\in I^2$ é declarado equivalente a si mesmo.
2. Para todo $y\in[-\pi,\ \pi]$ valem $(-\pi,\ y)\sim(\pi,\ y)$ e $(\pi,\ y)\sim(-\pi,\ y)$.
3. Para todo $x\in[-\pi,\ \pi]$ valem $(x,\ -\pi)\sim(-x,\ \pi)$ e $(-x,\ \pi)\sim(x,\ -\pi)$.

É elementar constatar que se trata realmente de uma relação de equivalência. Para um melhor entendimento das identificações implicadas por essa relação de equivalência, vide Figura 33.7, página 1737.

A chamada *garrafa de Klein* é definida como o conjunto das classes $I^2/\!\sim$ munida da topologia quociente.

• **Generalizações: o espaço projetivo $\mathbf{P}(\mathbb{R}^3)$**

O *espaço projetivo bidimensional* $\mathbf{P}(\mathbb{R}^3)$, o qual será introduzido na Seção 33.4.6, página 1737, pode ser construído de forma semelhante à que empregamos acima.

Seja $I^2=[-\pi,\ \pi]\times[-\pi,\ \pi]$ no qual, como antes, adotamos a topologia relativa induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}^2$. Seja definida em I^2 a seguinte relação de equivalência:

1. Todo $(x,\ y)\in I^2$ é declarado equivalente a si mesmo.
2. Para todo $x\in[-\pi,\ \pi]$ valem $(x,\ -\pi)\sim(-x,\ \pi)$ e $(-x,\ \pi)\sim(x,\ -\pi)$.
3. Para todo $y\in[-\pi,\ \pi]$ valem $(-\pi,\ y)\sim(\pi,\ -y)$ e $(\pi,\ -y)\sim(-\pi,\ y)$.

É elementar constatar que se trata realmente de uma relação de equivalência. Para um melhor entendimento das identificações implicadas por essa relação de equivalência, vide Figura 33.7, página 1737.

Deixamos ao leitor a tarefa de constatar que $I^2/\!\sim$, munido da topologia quociente, é um espaço topológico homeomorfo ao espaço projetivo bidimensional $\mathbf{P}(\mathbb{R}^3)$ a ser introduzido na Seção 33.4.6. Como ajuda, façamos os seguintes comentários. Na Seção 33.4.6 mencionamos que $\mathbf{P}(\mathbb{R}^3)$ pode ser entendido como a esfera bidimensional unitária $\mathbb{S}^2$ na qual identificamos os pontos antípodas. Assim, podemos conceber $\mathbf{P}(\mathbb{R}^3)$ como o conjunto composto pelo hemisfério superior de $\mathbb{S}^2$ unido ao equador, sendo que neste último os pontos antípodas são identificados. Com essas informações, a Figura 33.7, página 1737, pode, então, ser útil no sentido de auxiliar na identificação de $I^2/\!\sim$ com $\mathbf{P}(\mathbb{R}^3)$.

Como auxílio visual à compreensão é interessante mencionar que as superfícies bidimensionais supra-construídas possuem mergulhos ou ao menos imersões em $\mathbb{R}^3$. Vide Figuras 33.8 e 33.9, páginas 1737 e 1738, respectivamente. O

[30] Felix Christian Klein (1849–1925). Klein descreveu essa superfície em 1882. Uma curiosidade: o nome "garrafa de Klein", hoje universalmente adotado, parece provir de uma confusão na tradução das palavras alemãs "Fläche" (superfície) e "Flasche" (garrafa).

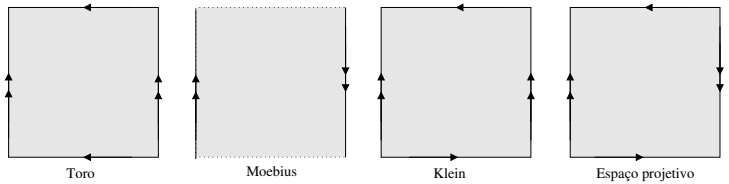

Figura 33.7: Os esquemas de identificações das arestas dos quadrados de lado 2π que conduzem ao toro $\mathbb{T}^2$, à tira de Möbius, à garrafa de Klein e ao espaço projetivo bidimensional $\mathbf{P}(\mathbb{R}^3)$, respectivamente. As arestas verticais são coladas umas nas outras respeitando a orientação indicada pelas flechas. Idem para as arestas horizontais. No caso da tira de Möbius apenas as arestas verticais são coladas. As Figuras 33.8 e 33.8, páginas 1737 e 1738, respectivamente, mostram o resultado na forma de superfícies mergulhadas ou imersas em $\mathbb{R}^3$.

Toro $\mathbb{T}^2$ e a tira de Möbius podem ser mergulhadas em $\mathbb{R}^3$. Já a garrafa de Klein e o espaço projetivo bidimensional $\mathbf{P}(\mathbb{R}^3)$ podem apenas ser imersas em $\mathbb{R}^3$. A imersão de $\mathbf{P}(\mathbb{R}^3)$ exibida na Figura 33.9 é denominada *superfície de Boy*[31]. Boy encontrou-a em 1902 após seu orientador, D. Hilbert[32], ter-lhe sugerido provar que $\mathbf{P}(\mathbb{R}^3)$ não possuia imersões em $\mathbb{R}^3$. Boy, porém, constatou que uma tal imersão era, sim, possível, encontrando o exemplo de superfície que leva seu nome.

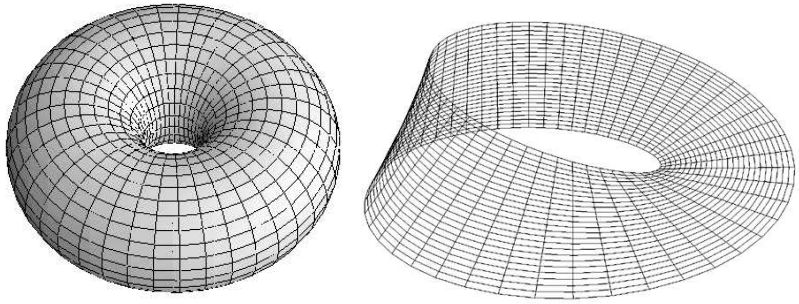

Figura 33.8: Mergulhos em $\mathbb{R}^3$ do 2-toro (esq.) e da tira de Möbius (dir.).

33.4.6 Espaços Projetivos Reais

O *espaço projetivo* real n-dimensional ($n\in\mathbb{N}$), denotado por $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, é a coleção de todos os subespaços unidimensionais de $\mathbb{R}^{n+1}$. Uma forma alternativa de caracterizar $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ é a seguinte. Introduzimos em $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ uma relação de equivalência dizendo que $x\sim y$ (para $x,\ y\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$) se e somente se existir $\alpha\in\mathbb{R}$ não nulo tal que $x=\alpha y$. Com isso, $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ é definido como a coleção das classes de equivalência por essa relação. A prova da identidade das duas definições é deixada como exercício ao leitor.

Se V é um espaço vetorial real, o espaço projetivo $\mathbf{P}(V)$ é definido de maneira completamente análoga.

[31] Werner Boy (1879–1914). A referência ao trabalho original é: W. Boy, *"Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen"*, Math. Ann. **57**, 151–184 (1903).
[32] David Hilbert (1862–1943).

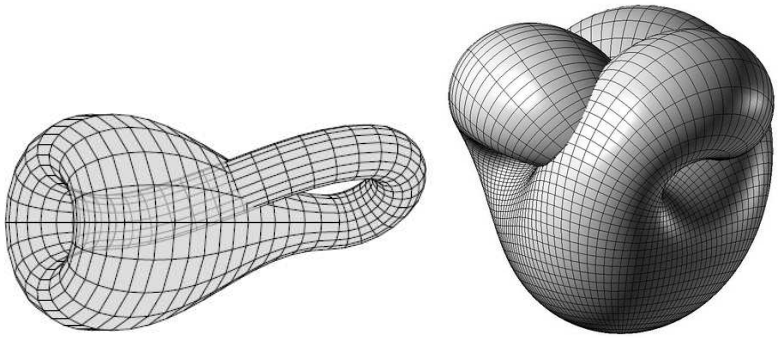

Figura 33.9: Imersões em $\mathbb{R}^3$ da garrafa de Klein (esq.) e do plano projetivo bidimensional $\mathbf{P}(\mathbb{R}^3)$, a chamada superfície de Boy (dir.). É claro que se trata de imersões, não de mergulhos, pois ambas as superfícies exibem autointersecções.

Na literatura matemática, $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ é também denotado pelos símbolos $\mathbf{P}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{P}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ ou ainda por $\mathbb{RP}^n$. As duas últimas notações são inadequadas, pois o símbolo $\mathbb{P}^n$ ou $\mathbf{P}^n$ sugere incorretamente tratar-se de um produto Cartesiano.

Vamos denotar por $[x]$ a classe de equivalência de $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Seja também $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ a aplicação quociente, dada por $\pi(x) = [x]$.

Uma notação frequentemente empregada é a seguinte: se $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ tem coordenadas $\big(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^{n+1}\big)$ em alguma base, então denota-se a classe $[x] \in \mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ por $\big[x^1 :\ x^2 :\ \ldots :\ x^{n+1}\big]$, símbolo que representa as chamadas *coordenadas projetivas* do ponto $[x] \in \mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$. Os símbolos ":"substituem as vírgulas para distinguir coordenadas projetivas das coordenadas usuais.

Assim,

$$\big[x^1 :\ x^2 :\ \ldots :\ x^{n+1}\big] \ \equiv\ \Big[\big(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^{n+1}\big)\Big] .$$

Observe-se também que

$$\big[x^1 :\ x^2 :\ \ldots :\ x^{n+1}\big] \ =\ \big[\lambda x^1 :\ \lambda x^2 :\ \ldots :\ \lambda x^{n+1}\big] \tag{33.104}$$

pois ambos os lados denotam o mesmo elemento de $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. De forma redundante, lembramos ainda que, enquanto subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\big[x^1 :\ x^2 :\ \ldots :\ x^{n+1}\big]$ representa $\Big\{\big(\lambda x^1,\ \lambda x^2,\ \ldots,\ \lambda x^{n+1}\big),\ \lambda \in \mathbb{R}\Big\}$, o subespaço unidimensional que passa por $\big(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^{n+1}\big) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Naturalmente, $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1}) = \big\{[x],\ x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\big\}$. O conjunto $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ é feito um espaço topológico de forma natural adotando-se em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ a topologia usual e em $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ a topologia quociente definida pela relação de equivalência acima (para a definição de topologia quociente definida por uma relação de equivalência, vide Seção 32.4.3, página 1653). Trata-se da maior topologia em $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ para a qual a aplicação quociente π é contínua.

Cada elemento x de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ é da forma $x = \lambda y$ com $y \in \mathbb{S}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, $\pi\big(\mathbb{S}^n\big) = \mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$. Como π é contínua e $\mathbb{S}^n$ é compacto, concluímos que $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ é compacto com a topologia quociente. A restrição de π a $\mathbb{S}^n$ é sobrejetora em $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, mas é fácil ver que se $x,\ y \in \mathbb{S}^n$, então $\pi(x) = \pi(y)$ se e somente se $x = \pm y$. Dessa forma, podemos tomar $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ como o conjunto obtido identificando-se os pontos antípodas de $\mathbb{S}^n$. Isso pode ser obtido formalmente introduzindo-se em $\mathbb{S}^n$ uma relação de equivalência: $x \sim y$ se e somente se $x = \pm y$.

Com a topologia quociente mencionada acima, $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ é um espaço topológico Hausdorff. Uma demonstração desse fato é indicada no exercício que segue.

E. 33.34 *Exercício–dirigido*. Para $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, seja $\pi(x) = [x]$ o correspondente elemento de $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ e seja $\{\underset{\sim}{x},\ -\underset{\sim}{x}\} = \pi^{-1}\big([x]\big) \cap \mathbb{S}^n$ o conjunto composto pelos dois pontos da esfera unitária obtidos pela intersecção da linha reta que passa por $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

É claro que $[x] = \big\{\lambda\, \underset{\sim}{x},\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big\}$.

Para $[x] \in \mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ e $\alpha \in (0,\ \pi/2)$, defina-se $A\big([x],\ \alpha\big) \subset \mathbb{S}^n$ por

$$A\big([x],\ \alpha\big) \ =\ \Big\{\underset{\sim}{y} \in \mathbb{S}^n \text{ tais que } \big|\langle \underset{\sim}{x},\ \underset{\sim}{y}\rangle_{\mathbb{R}}\big| \ >\ \cos\alpha\Big\} .$$

Constate que $A\big([x],\ \alpha\big)$ é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{S}^n$ que formam um ângulo menor que α com $\underset{\sim}{x}$ ou com $-\underset{\sim}{x}$. Em particular, $\{\underset{\sim}{x},\ -\underset{\sim}{x}\} \subset A\big([x],\ \alpha\big)$. Defina-se também $B\big([x],\ \alpha\big) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ por

$$B\big([x],\ \alpha\big) \ =\ \Big\{\lambda\, \underset{\sim}{y},\ \text{ com } \underset{\sim}{y} \in A\big([x],\ \alpha\big) \text{ e } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\Big\} .$$

Constate que $B\big([x],\ \alpha\big)$ é o cone duplo de ângulo de abertura 2α com vértice na origem. Observe que se $y \in B\big([x],\ \alpha\big)$, então $-y \in B\big([x],\ \alpha\big)$, mas que $0 \notin B\big([x],\ \alpha\big)$. Mais importante, mostre que $B\big([x],\ \alpha\big)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Defina-se, por fim, $C\big([x],\ \alpha\big) \subset \mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ por $C\big([x],\ \alpha\big) := \pi^{-1}\Big(B\big([x],\ \alpha\big)\Big)$. Trata-se de um aberto em $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, pois $B\big([x],\ \alpha\big)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Claro está também que $C\big([x],\ \alpha\big)$ é uma vizinhança aberta de $[x]$.

Vamos agora considerar $[x_1]$ e $[x_2]$, dois elementos <u>distintos</u> de $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$. Afirmamos que para α pequeno o suficiente os abertos $C\big([x_1],\ \alpha\big)$ e $C\big([x_2],\ \alpha\big)$ são disjuntos. Para ver isso, suponha que exista $[z] \in C\big([x_1],\ \alpha\big) \cap C\big([x_2],\ \alpha\big)$. Então, $\big|\langle \underset{\sim}{x_1},\ \underset{\sim}{z}\rangle_{\mathbb{R}}\big| > \cos\alpha$ e $\big|\langle \underset{\sim}{x_2},\ \underset{\sim}{z}\rangle_{\mathbb{R}}\big| > \cos\alpha$, onde $\pm\underset{\sim}{x_k}$ são os dois elementos de $[x_k]$ em $\mathbb{S}^n$, $k = 1,\ 2$. Como supomos que $[x_1] \neq [x_2]$, temos que $\big\|\underset{\sim}{x_1} \pm \underset{\sim}{x_2}\big\| \neq 0$ para ambos os sinais.

Trocando eventualmente o sinal de $\underset{\sim}{x_1}$ e/ou de $\underset{\sim}{x_2}$, podemos garantir que ambos os produtos escalares $\langle \underset{\sim}{x_1},\ \underset{\sim}{z}\rangle_{\mathbb{R}}$ e $\langle \underset{\sim}{x_2},\ \underset{\sim}{z}\rangle_{\mathbb{R}}$ sejam não negativos. Com essa escolha, teremos, portanto,

$$\langle \underset{\sim}{x_1},\ \underset{\sim}{z}\rangle_{\mathbb{R}} \ >\cos(\alpha) \qquad \text{e} \qquad \langle \underset{\sim}{x_2},\ \underset{\sim}{z}\rangle_{\mathbb{R}} \ >\cos(\alpha) . \tag{33.105}$$

Agora, como $\underset{\sim}{x_1}$, $\underset{\sim}{x_2}$ e $\underset{\sim}{z}$ são vetores de norma 1, tem-se que

$$\big\|\underset{\sim}{x_k} - \underset{\sim}{z}\big\|^2 \ =\ \langle \underset{\sim}{x_k} - \underset{\sim}{z},\ \underset{\sim}{x_k} - \underset{\sim}{z}\rangle_{\mathbb{R}} \ =\ 2 - 2\langle \underset{\sim}{x_k},\ \underset{\sim}{z}\rangle_{\mathbb{R}} \ \overset{(33.105)}{<}\ 2\big(1 - \cos(\alpha)\big) \ =\ 4\big(\operatorname{sen}(\alpha/2)\big)^2 \tag{33.106}$$

para ambos $k = 1,\ 2$. Logo, $\big\|\underset{\sim}{x_k} - \underset{\sim}{z}\big\| < 2\operatorname{sen}(\alpha/2)$ para ambos $k = 1,\ 2$ e, portanto,

$$\big\|\underset{\sim}{x_1} - \underset{\sim}{x_2}\big\| \ \le\ \big\|\underset{\sim}{x_1} - \underset{\sim}{z}\big\| + \big\|\underset{\sim}{z} - \underset{\sim}{x_2}\big\| \ <\ 4\operatorname{sen}(\alpha/2) .$$

Porém, como $\big\|\underset{\sim}{x_1} - \underset{\sim}{x_2}\big\| > 0$, essa desigualdade é impossível se $\alpha \in (0,\ \pi/2)$ for escolhido pequeno o suficiente. Isso prova que para tais valores de α devemos, em verdade, ter $C\big([x_1],\ \alpha\big) \cap C\big([x_2],\ \alpha\big) = \emptyset$, estabelecendo que o espaço projetivo real $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ tem a propriedade de Hausdorff. ✠

Segundo o Corolário 33.3, página 1686, para demonstrar que o $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ é uma variedade topológica com a topologia quociente basta agora provar que ele é localmente Euclidiano. É o que faremos no que segue.

Para cada $i = 1,\ \ldots,\ n+1$, defina-se $A^i \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ como sendo o conjunto de todos os elementos de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ cuja i-ésima coordenada é não nula: $A^i := \big\{(x^1,\ \ldots,\ x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\},\ x^i \neq 0\big\}$. É evidente que A^i é um aberto em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Seja $A^i_{\sim}$ o correspondente aberto em $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, ou seja, $A^i_{\sim} \equiv \pi(A^i)$. É evidente que $\big\{A^1_{\sim},\ \ldots,\ A^{n+1}_{\sim}\big\}$ compõe um recobrimento de $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ por abertos pois, se $[x] \in \mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, então ao menos uma das coordenadas de x é não nula, ou seja $x \in A^j$ para algum j, implicando que $[x] \in A^j_{\sim}$.

Para cada $i = 1,\ \ldots,\ n+1$, defina-se $\varphi_i : A^i_{\sim} \to \mathbb{R}^n$ por

$$\varphi_i\Big(\big[(x^1,\ \ldots,\ x^{n+1})\big]\Big) \ :=\ \left(\frac{x^1}{x^i},\ \ldots,\ \frac{x^{i-1}}{x^i},\ \frac{x^{i+1}}{x^i},\ \ldots,\ \frac{x^{n+1}}{x^i}\right) ,$$

$(x^1,\ \ldots,\ x^{n+1}) \in A^i$. Note-se que a aplicação φ_i está bem definida, pois se $x \sim y$ com $x \in A^i$, então $y \in A^i$ e vale $\left(\frac{x^1}{x^i},\ \ldots,\ \frac{x^{i-1}}{x^i},\ \frac{x^{i+1}}{x^i},\ldots,\ \frac{x^{n+1}}{x^i}\right) = \left(\frac{y^1}{y^i},\ \ldots,\ \frac{y^{i-1}}{y^i},\ \frac{y^{i+1}}{y^i},\ldots,\ \frac{y^{n+1}}{y^i}\right)$ (justifique!). A aplicação φ_i é um homeomorfismo, com $\varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \to A^i_{\sim}$ dada por

$$\varphi_i^{-1}\big(s^1,\ \ldots,\ s^n\big) \ =\ \big[s^1,\ \ldots,\ s^{i-1},\ 1,\ s^{i+1},\ \ldots,\ s^n\big] .$$

E. 33.35 *Exercício*. Verifique que φ_i e sua inversa são de fato contínuas. ✠

Com isso, estabelecemos que $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, com a topologia quociente, é uma variedade topológica segundo-contável. Mostremos que se trata também de uma variedade diferenciável. Os pares $(A^i_{\sim},\ \varphi_i)$ compõem cartas locais de coordenadas em $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ e sua união compõe um atlas. As funções de transição de $\varphi_i(A^i \cap A^j)$ em $\varphi_j(A^i \cap A^j)$ (aqui tomamos $i > j$, por conveniência) são dadas por $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$, sendo que

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\big(s^1,\ \ldots,\ s^n\big) \ = \ \left(\frac{s^1}{s^j},\ \ldots,\ \frac{s^{j-1}}{s^j},\ \frac{s^{j+1}}{s^j},\ \ldots,\ \frac{s^{i-1}}{s^j},\ \frac{1}{s^j},\ \frac{s^i}{s^j},\ \ldots,\ \frac{s^n}{s^j}\right)\ ,$$

com $\big(s^1,\ \ldots,\ s^n\big) \in \varphi_i(A^i \cap A^j)$. Por essa expressão é fácil constatar que $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ são difeomorfismos infinitamente diferenciáveis de $\varphi_i(A^i \cap A^j)$ em $\varphi_j(A^i \cap A^j)$.

E. 33.36 *Exercício instrutivo*. Prove todas as afirmações feitas acima. ✠

Reunindo os resultados, vemos que $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ é uma variedade infinitamente diferenciável de dimensão n.

• **$\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ e a bola fechada em $\mathbb{R}^n$ com a identificação dos antípodas de sua superfície**

Apresentemos agora uma caracterização alternativa útil da variedade n dimensional $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Como antes, seja $D_n(1,\ 0)$ a bola aberta de $\mathbb{R}^n$ de raio 1 e centrada na origem e seja $\overline{D_n(1,\ 0)}$ a bola fechada de $\mathbb{R}^n$ de raio 1 e centrada na origem:

$$D_n(1,\ 0)\ =\ \left\{(y^1,\ \ldots,\ y^n) \in \mathbb{R}^n,\ \ \sum_{j=1}^n (y^j)^2\ <\ 1\right\} \qquad \text{e} \qquad \overline{D_n(1,\ 0)}\ =\ \left\{(y^1,\ \ldots,\ y^n) \in \mathbb{R}^n,\ \ \sum_{j=1}^n (y^j)^2\ \leq\ 1\right\}.$$

É claro que $\overline{D_n(1,\ 0)} = D_n(1,\ 0) \cup \mathbb{S}^{n-1}$, uma união disjunta, sendo que $D_n(1,\ 0)$ é o interior da bola fechada $\overline{D_n(1,\ 0)}$ enquanto que $\mathbb{S}^{n-1}$ é a superfície (ou bordo) de $\overline{D_n(1,\ 0)}$. Podemos definir uma relação de equivalência "$\sim$" em $\overline{D_n(1,\ 0)}$ da seguinte forma:

1. Todo $y \in D_n(1,\ 0)$ é declarado equivalente a si mesmo.
2. Dois pontos y_1 e y_2 em $\mathbb{S}^{n-1}$ são equivalentes se e somente se $y_1 = \pm y_2$.

Seja $\mathbb{F}^n := \overline{D_n(1,\ 0)}/\sim$, a coleção das classes de equivalência de $\overline{D_n(1,\ 0)}$ por essa relação. Deve ser claro que o que fazemos ao passar de $\overline{D_n(1,\ 0)}$ para $\mathbb{F}^n$ é manter os pontos do interior $D_n(1,\ 0)$ e identificar os pontos antípodas da superfície $\mathbb{S}^{n-1}$.

Em $\overline{D_n(1,\ 0)}$ adotamos a topologia relativa induzida pela topologia de $\mathbb{R}^n$ e em $\mathbb{F}^n$ a correspondente topologia quociente. O que pretendemos fazer em seguida é mostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o espaço $\mathbb{F}^n$, em verdade, pode ser identificado com o espaço projetivo real n-dimensional, $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$. Mais precisamente, afirmamos que $\mathbb{F}^n$ e $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ são variedades diferenciáveis difeomorfas.

Antes de prosseguirmos, comentemos que encontramos esse objeto em nossa discussão sobre o grupo SO(3) na Seção 21.4.2, página 1129. Lá discute-se que esse grupo pode ser entendido com o conjunto obtido tomando-se a bola fechada de raio π em $\mathbb{R}^3$ e identificando-se os pontos antípodas da superfície. Assim, como mostraremos, SO(3) pode ser entendido como o espaço projetivo real tridimensional $\mathbf{P}(\mathbb{R}^4)$.

Passemos agora à discussão de como $\mathbb{F}^n$ pode ser identificado com $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$. Sejam $H_\pm \equiv H_{n+1,\,+} \subset \mathbb{S}^n$ dois hemisférios abertos de $\mathbb{S}^n$ definidos em (33.101). Temos,

$$H_\pm\ =\ \left\{\left(x^1,\ \ldots,\ x^n,\ \pm\sqrt{1-\sum_{j=1}^n (x^j)^2}\right) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \text{ com }\ (x^1,\ \ldots,\ x^n)\ \in\ D_n(1,\ 0)\right\}.$$

É fácil ver disso que $H_\pm$ e $D_n(1,\ 0)$ são espaços topológicos homeomorfos (e, portanto, podem ser identificados), sendo o homeomorfismo dado por $D_n(1,\ 0) \ni (x^1,\ \ldots,\ x^n) \longmapsto \left(x^1,\ \ldots,\ x^n,\ \pm\sqrt{1-\sum_{j=1}^n (x^j)^2}\right) \in H_\pm$. Vide (33.102)–(33.103).

Vamos agora introduzir em $\mathbb{S}^n$ uma relação de equivalência "$\dot{\sim}$" da seguinte forma: $\underset{\sim}{x} \dot{\sim} \underset{\sim}{y}$ se e somente se $\underset{\sim}{x} = \pm \underset{\sim}{y}$. Definamos $\mathbb{M}^n := \mathbb{S}^n/\dot{\sim}$. Como fizemos anteriormente, podemos afirmar que $\mathbb{M}^n$ é obtida de $\mathbb{S}^n$ identificando-se os

pontos antípodas. O conjunto $\mathbb{S}^n$ pode ser escrito como a união de H_+, H_- e do seu equador, que podemos identificar com $\mathbb{S}^{n-1}$. Os pontos de H_- são exatamente os antípodas dos pontos de H_+. É claro dessa discussão que $\mathbb{M}^n$ pode ser identificado com o conjunto H_+ em união com o equador de $\mathbb{S}^n$ sendo que nesse equador identificamos os pontos antípodas. O equador de $\mathbb{S}^n$ é $\mathbb{S}^{n-1}$ e, portanto, o que dissemos é que podemos identificar $\mathbb{M}^n$ com $H_+ \cup \mathbb{M}^{n-1}$. Mas isso significa, pelo que vimos mais acima, que $\mathbb{M}^n$ pode ser identificado com $D_n(1,\ 0) \cup \mathbb{M}^{n-1}$. É claro que esse último conjunto consiste na bola unitária fechada em $\mathbb{R}^n$ com os antípodas da superfície identificados, ou seja, trata-se do conjunto que denominamos $\mathbb{F}^n$ anteriormente.

Por outro lado, já observamos (à página 1738) que o espaço projetivo real $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ pode ser identificado com $\mathbb{M}^n$. Concluímos disso que $\mathbb{F}^n$ e $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ podem ser identificados, ou seja, o espaço projetivo real n-dimensional pode ser entendido também como o conjunto obtido tomando-se a bola fechada de raio 1 e centrada na origem em $\mathbb{R}^n$ e identificando-se os pontos antípodas de sua superfície. O que podemos dizer sobre a relação entre $\mathbb{F}^n$ e $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ enquanto variedades? Isso fica para o leitor:

E. 33.37 *Exercício*. Mostre, usando as definições e construções acima, que $\mathbb{F}^n$ e $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ são duas variedades diferenciáveis difeomorfas. ✠

E. 33.38 *Exercício*. Mostre que $\mathbb{M}^1$ é difeomorfo ao círculo $\mathbb{S}^1$ e, portanto, que $\mathbf{P}(\mathbb{R}^2)$ e $\mathbb{S}^1$ são duas variedades diferenciáveis difeomorfas. ✠

• **Variedades de Grassmann**

Já dissemos no início desta seção que o conjunto $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ pode ser identificado com a coleção de todos os subespaços vetoriais unidimensionais de $\mathbb{R}^{n+1}$. Nesse sentido, o espaço projetivo real pode ser generalizado na noção de *variedade de Grassmann*[33], ou *Grassmanniana*. Para $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$, a variedade de Grassmann $\mathbb{G}_{n,\,k}$ é definida como a coleção de todos os subespaços vetoriais k–dimensionais de $\mathbb{R}^n$. Trata-se de uma variedade diferenciável de dimensão $(n-k)k$. Claro está que $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ coincide com $\mathbb{G}_{n+1,\,1}$. Para mais detalhes sobre Grassmannianas, vide e.g., [313].

33.4.7 Grupos de Lie

Uma classe importante de variedades diferenciáveis é composta pelos chamados Grupos de Lie. A eles dedicamos o Capítulo 22, página 1239. Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável que seja também um grupo para o qual a operação de multiplicação e de inversão sejam contínuas. Vide Capítulo 22 e outras referências lá citadas.

33.4.8 Fibrados, Fibrados Vetoriais e Principais

Um tipo de variedade diferenciável de particular importância é composto pelos chamados *espaços fibrados*, ou simplesmente *fibrados*. Grosseiramente, podemos dizer que um fibrado é uma variedade diferenciável que localmente (mas não necessariamente globalmente) é o produto de duas variedades diferenciáveis, sendo que as funções de transição respeitam a ação de um grupo (de Lie) sobre uma das variedades.

O estudo de espaços fibrados é bastante vasto e nesta breve seção limitamo-nos a apresentar definições básicas para futura referência. Para um texto clássico, vide [493]. Vide também [251].

• **Fibrados coordenados. Fibrados**

Comecemos definindo a noção de fibrado coordenado. Um *fibrado coordenado* $\mathcal{F}$ é uma variedade diferenciável formada pelos seguintes ingredientes:

1. Uma variedade diferenciável $\mathcal{B}$, denominada espaço base.
2. Uma variedade diferenciável F, denominada fibra.
3. Uma função sobrejetora $\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{B}$ denominada projeção, sendo que a préimagem $\pi^{-1}(b)$ de qualquer $b \in \mathcal{B}$ é homeomorfa a F.

[33] Hermann Günther Grassmann (1809–1877).

4. Um grupo de Lie G, denominado *grupo de estrutura*, dotado de uma ação à esquerda[34] contínua $\alpha : G \times F \to F$ sobre F. Denotaremos a ação de $g \in G$ por α sobre $f \in F$ por $\alpha_g(f)$ ou por $\alpha(g,\ f)$.

5. Um recobrimento $\{B_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ de $\mathcal{B}$ por abertos (em sua topologia), sendo que para cada $\lambda \in \Lambda$ existe um difeomorfismo $\varphi_\lambda : B_\lambda \times F \to \pi^{-1}(B_\lambda)$.

   Cada φ_λ é dito ser uma *trivialização local*, pois φ_λ^{-1} mapeia $\pi^{-1}(B_\lambda)$ sobrejetoramente no produto Cartesiano $\mathcal{B}_\lambda \times F$.

Fora isso, os seguintes requerimentos estruturais são necessários:

1. Para cada $\lambda \in \Lambda$ o difeomorfismo φ_λ satisfaz $\pi\big(\varphi_\lambda(b,\ f)\big) = b$ para todo $(b,\ f) \in B_\lambda \times F$.

2. Para cada $\lambda \in \Lambda$ e cada $b \in B_\lambda$, a aplicação $F \ni f \mapsto \varphi_\lambda(b,\ f) \in \pi^{-1}(b)$ é um difeomorfismo, que denotaremos por $\varphi_{\lambda,\ b}$.

3. Seja $B_{\lambda_1} \cap B_{\lambda_2} \neq \emptyset$ e seja a chamada *função de transição* $T_{\lambda_1,\ \lambda_2,\ b} : F \to F$, definida por $T_{\lambda_1,\ \lambda_2,\ b} := (\varphi_{\lambda_1,\ b})^{-1} \circ \varphi_{\lambda_2,\ b}$. Então existe uma função contínua $t_{\lambda_1,\ \lambda_2} : B_{\lambda_1} \cap B_{\lambda_2} \to G$ tal que $T_{\lambda_1,\ \lambda_2,\ b}(f) = \alpha\big(t_{\lambda_1,\ \lambda_2}(b),\ f\big)$ para todo $b \in B_{\lambda_1} \cap B_{\lambda_2}$ e todo $f \in F$. Com isso, podemos escrever

$$\varphi_{\lambda_2}(b,\ f) \ = \ \varphi_{\lambda_1}\Big(b,\ \alpha\big(t_{\lambda_1,\ \lambda_2}(b),\ f\big)\Big)$$

   para todos $(b,\ f) \in \big(B_{\lambda_1} \cap B_{\lambda_2}\big) \times F$.

O último ponto descrito acima significa que duas trivializações diferem em uma região comum apenas pela ação (contínua) de elementos de G sobre cada fibra. Note-se que os elementos de G podem mudar de um ponto a outro. A semelhança com as *transformações de calibre*, bem conhecidas no Eletromagnetismo e na Física Quântica, não é casual.

Na definição acima, um fibrado coordenado $\mathcal{F}$ depende do particular recobrimento $\{B_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ da variedade base $\mathcal{B}$ e da particular coleção de difeomorfismos $\{\varphi_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ adotados. Seja um segundo fibrado coordenado $\mathcal{F}'$, o qual difere de $\mathcal{F}$ por ter um recobrimento $\{B'_\lambda,\ \lambda \in \Lambda'\}$ e uma coleção de difeomorfismos $\{\varphi'_\lambda,\ \lambda \in \Lambda'\}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são equivalentes se o fibrado coordenado obtido com o recobrimento $\{B_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\} \cup \{B'_\lambda,\ \lambda \in \Lambda'\}$ e com a coleção de difeomorfismos $\{\varphi_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\} \cup \{\varphi'_\lambda,\ \lambda \in \Lambda'\}$ for também um fibrado coordenado. (Que se trata de uma relação de equivalência demonstra-se usando os mesmos argumentos usados na relação de equivalência entre atlas infinitamente diferenciáveis).

Definição. Um *fibrado* é uma classe de equivalência de fibrados coordenados pela relação de equivalência acima. ♠

No caso de variedades topológicas não diferenciáveis há uma noção correspondente de fibrado onde, ao invés de difeomorfismos, adotamos homeomorfismos e onde o grupo G pode ser um grupo topológico geral, não necessariamente um grupo de Lie.

• **Fibrados vetoriais**

Um *fibrado vetorial* é um fibrado no qual fibra F é um espaço vetorial topológico V e a ação de G se dá por uma representação (contínua) de G em V.

• **Fibrados principais**

Um *fibrado principal* é um fibrado no qual fibra F é o próprio grupo de estrutura G e a ação de G se dá por multiplicação (do grupo) à esquerda.

[34] Para a definição da noção de *ação* de um grupo, vide Seção 2.1.9.1, página 152.

Apêndices

33.A Derivadas de Lie. Prova das Relações (33.74) e (33.85)

• **Prova de (33.74)**

A prova da igualdade (33.74) é mais facilmente realizada em coordenadas locais. Seja $(U,\ h)$ uma carta contendo p e escolhamos um intervalo de valores de t pequeno o suficiente para que $\phi_t^A(p)$ esteja sempre em U. Adotamos também como antes a convenção que $\phi_0^A(q) = q$ para todo $q \in U$.

Definamos $h(q) = (x^1,\ \ldots,\ x^m)$, $q \in U$. Seja

$$h_t(q) \ \equiv \ h\big(\phi_t^A(q)\big) \ = \ \Big(y_t^1(x^1,\ \ldots,\ x^m),\ \ldots,\ y_t^m(x^1,\ \ldots,\ x^m)\Big)\ .$$

Por definição temos $y_0^k(x^1,\ \ldots,\ x^m) = x^k$ e $\frac{d}{dt} y_y^k(x^1,\ \ldots,\ x^m) = a^k(h_t(q)) = a^k\Big(y_t^1(x^1,\ \ldots,\ x^m),\ \ldots,\ y^m(x^1,\ \ldots,\ x^m)\Big)$.

Podemos usar $h_t(q)$ como uma carta local de coordenadas, com coordenadas $y_t^k \equiv y_t^k(x^1,\ \ldots,\ x^m)$, lembrando que, como $h_0(q) = h\big(\phi_0^A(q)\big) = h(q)$, tem-se $y_0^k = x^k$.

Sejam

$$A_p \ = \ a^k\big(h(p)\big)\ \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{h(p)} \qquad \text{e} \qquad B_{\phi_t^A(p)} \ = \ b^k\big(h_t(p)\big)\ \frac{\partial}{\partial y_t^k}\bigg|_{h_t(p)}$$

as expressões locais de A e B, nas cartas de coordenadas h e h_t respectivamente. Note-se que, em $t = 0$ a expressão local de B, acima, fica

$$B_p \ = \ b^k\big(h(p)\big)\ \frac{\partial}{\partial y_0^k}\bigg|_{h(p)} \ = \ b^k\big(h(p)\big)\ \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{h(p)}\ .$$

Por (33.47), temos

$$\Big(d\phi_{-t}^A\Big)_{\phi_t^A(p)} \frac{\partial}{\partial y_t^k}\bigg|_{h_t(p)} \ = \ \frac{\partial x^l}{\partial y_t^k}\bigg|_{h_t(p)} \frac{\partial}{\partial x^l}\bigg|_{h(p)}\ .$$

Assim,

$$\Big(d\phi_{-t}^A\Big)_{\phi_t^A(p)} B\Big(\phi_t^A(p)\Big) \ = \ \frac{\partial x^l}{\partial y_t^k}\bigg|_{h_t(p)} b^k\big(h\big(\phi_t^A(p)\big)\big)\ \frac{\partial}{\partial x^l}\bigg|_{h(p)}\ .$$

Desejamos calcular $\frac{d}{dt}\Big(d\phi_{-t}^A\Big)_{\phi_t^A(p)} B\Big(\phi_t^A(p)\Big)$, a qual é, pela última expressão, dada por

$$\frac{d}{dt}\ \frac{\partial x^l}{\partial y_t^k}\bigg|_{h_t(p)} b^k\big(h\big(\phi_t^A(p)\big)\big)\ \frac{\partial}{\partial x^l}\bigg|_{h(p)} + \frac{\partial x^l}{\partial y_t^k}\bigg|_{h_t(p)} \frac{d}{dt} b^k\big(h\big(\phi_t^A(p)\big)\big)\ \frac{\partial}{\partial x^l}\bigg|_{h(p)}\ .$$

O cálculo de $\frac{d}{dt}\ \frac{\partial x^l}{\partial y_t^k}\Big|_{h_t(p)}$ pode ser feito da seguinte forma. Se A é uma matriz inversível que depende de t, então vale $\frac{d}{dt} A^{-1} = -A^{-1}\big(\frac{d}{dt} A\big) A^{-1}$, o que facilmente se demonstra do fato que $A^{-1}A = \mathbb{1}$. Assim, temos

$$\frac{d}{dt}\ \frac{\partial x^l}{\partial y_t^k}\bigg|_{h_t(p)} \ = \ -\ \frac{\partial x^l}{\partial y_t^b}\bigg|_{h_t(p)} \frac{d}{dt}\ \frac{\partial y_t^b}{\partial x^c}\bigg|_{h_t(p)} \frac{\partial x^c}{\partial y_t^k}\bigg|_{h_t(p)} \ = \ -\ \frac{\partial x^l}{\partial y_t^b}\bigg|_{h_t(p)} \frac{\partial}{\partial x^c} \frac{d}{dt} y_t^b\bigg|_{h_t(p)} \frac{\partial x^c}{\partial y_t^k}\bigg|_{h_t(p)}$$

$$= \ -\ \frac{\partial x^l}{\partial y_t^b}\bigg|_{h_t(p)} \frac{\partial a^b}{\partial x^c}\big(h_t(p)\big)\ \frac{\partial x^c}{\partial y_t^k}\bigg|_{h_t(p)}\ .$$

Para $\frac{d}{dt} b^k\big(h\big(\phi_t^A(p)\big)\big)$ temos:

$$\frac{d}{dt} b^k\big(h\big(\phi_t^A(p)\big)\big) \ = \ \frac{\partial b^k}{\partial y_t^b}\big(h\big(\phi_t^A(p)\big)\big) \frac{d}{dt} y_t^b\big(h\big(\phi_t^A(p)\big)\big) \ = \ \frac{\partial b^k}{\partial y_t^b}\big(h\big(\phi_t^A(p)\big)\big)\ a^b(h_t(p))\ .$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\Big(d\phi^A_{-t}\Big)_{\phi^A_t(p)} B\Big(\phi^A_t(p)\Big) = -\frac{\partial x^l}{\partial y^b_t}\bigg|_{h_t(p)} \frac{\partial a^b}{\partial x^c}\big(h_t(p)\big)\,\frac{\partial x^c}{\partial y^k_t}\bigg|_{h_t(p)} b^k\big(h(\phi^A_t(p))\big)\,\frac{\partial}{\partial x^l}\bigg|_{h(p)}$$
$$+\frac{\partial x^l}{\partial y^k_t}\bigg|_{h_t(p)} \frac{\partial b^k}{y^b_t}\big(h(\phi^A_t(p))\big)a^b(h_t(p))\,\frac{\partial}{\partial x^l}\bigg|_{h(p)} .$$

Pela definição (33.73), $\mathcal{L}_A B$ é a última expressão calculada em $t=0$. Lembrando que $y^a_0 = x^a$, ficamos com

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_A B)(p) &:= \frac{d}{dt}\Big(d\phi^A_{-t}\Big)_{\phi^A_t(p)} B\Big(\phi^A_t(p)\Big)\bigg|_{t=0}\\ &= \left(\frac{\partial x^l}{\partial x^k}\,\frac{\partial b^k}{\partial x^b}\big(h(p)\big)\,a^b(h(p)) - \frac{\partial x^l}{\partial x^b}\frac{\partial a^b}{\partial x^c}\big(h(p)\big)\frac{\partial x^c}{\partial x^k}\,b^k\big(h(p)\big)\right)\frac{\partial}{\partial x^l}\bigg|_{h(p)}\\ &= \left(a^k(h(p))\,\frac{\partial b^l}{\partial x^k}\big(h(p)\big) - b^k\big(h(p)\big)\frac{\partial a^l}{\partial x^k}\big(h(p)\big)\right)\frac{\partial}{\partial x^l}\big(h(p)\big)\\ &\overset{(33.64)}{=} [A,\ B]_p ,\end{aligned}$$

demonstrando (33.74).

• **Prova de (33.85)**

Passamos agora à demonstração de (33.85), a qual segue passos semelhantes. Usaremos a mesma notação e definições da prova de (33.74), acima. Vamos escrever

$$A_p = a^k\big(h(p)\big)\,\frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{h(p)} \qquad \text{e} \qquad \omega_{\phi^A_t(p)} = \omega_k\big(h_t(p)\big)\big(dy^k_t\big)_{h_t(p)}$$

como expressões locais de A e ω, nas cartas de coordenadas h e h_t respectivamente. Por (33.51), temos (verifique!)

$$\Big(d\phi^A_t\Big)^*_{\phi^A_t(p)}\omega_{\phi^A_t(p)} = \omega_b\big(\phi^A_t(p)\big)\frac{\partial y^b_t}{\partial x^l}\big(h(p)\big)\,dx^l|_p .$$

Podemos agora calcular a derivada em t usando a regra de Leibniz. Temos, usando a regra da cadeia

$$\frac{d}{dt}\omega_b\big(h_t(p)\big) = \frac{\partial \omega_b}{\partial y^j_t}\big(h_t(p)\big)a^j\big(h_t(p)\big) \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial y^b_t}{\partial x^l}\big(h(p)\big) = \frac{\partial a^b}{\partial x^l}\big(h(p)\big) .$$

Assim, tomando $t=0$ e recordando que $y^j_0 = x_j$ (o que faz com que $\frac{\partial y^b_t}{\partial x^l} = \delta^b{}_l$ para $t=0$), temos

$$\big(\mathcal{L}_A\omega\big)_p = \left(a^j\big(h(p)\big)\frac{\partial \omega_l}{\partial x^j}\big(h(p)\big) + \omega_b\big(h(p)\big)\frac{\partial a^b}{\partial x^l}\big(h(p)\big)\right)dx^l|_p ,$$

provando (33.85).

33.B Derivadas de Lie. Prova da Relação (33.94)

Em uma carta $(U,\ h)$, com $p\in U$, podemos escrever (vide (33.62))

$$T_{\phi^A_t(p)} = T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}(y_t)\,\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_{y_t}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\bigg|_{y_t}\otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+1}}_{y_t}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+b}}_{y_t} ,$$

onde usamos a abreviação $y_t \equiv h\big(\phi^A_t(p)\big)$, sendo que, naturalmente $y_0 = h(p)$

Observemos agora que

$$\big(d\phi^A_{-t}\big)_{\phi^A_t(p)}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{y_t} = K_i{}^j(t)\,\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{h(p)}$$

para alguma matriz $K_i{}^j(t)$, dado que $\big(d\phi^A_{-t}\big)_{\phi^A_t(p)}\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{y_t}$ é um elemento de T_pM. Analogamente, escrevemos,

$$\big(d\phi^A_t\big)^*_{\phi^A_t(p)}dx^i_{y_t} = L^i{}_j(t)dx^j_{h(p)} .$$

Note-se que, por razões óbvias, $K_i{}^j(0) = \delta_i^j$ e $L^i{}_j(0) = \delta^i{}_j$

Pela definição de derivada de Lie para campos vetoriais e covetoriais, temos

$$\mathcal{L}_A\,\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{h(p)} = M_i{}^j\,\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{h(p)} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}_A dx^i_{h(p)} = N^i{}_j\,dx^j_{h(p)} ,$$

onde

$$M_i{}^j := \frac{dK_i{}^j}{dt}(0) \qquad \text{e} \qquad N^i{}_j := \frac{dL^i{}_j}{dt}(0) .$$

As matrizes $M_i{}^j$ e $N_i{}^j$ foram obtidas explicitamente em (33.83) e (33.86), respectivamente:

$$M_i{}^j = -\left(\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right)\big(h(p)\big) \qquad \text{e} \qquad N^i{}_j = \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right)\big(h(p)\big) .$$

Com isso, podemos escrever

$$\underbrace{\big(d\phi^A_{-t}\big)_{\phi^A_t(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}\big(d\phi^A_{-t}\big)_{\phi^A_t(p)}}_{a}\otimes_{\mathbb{R}}\underbrace{\big(d\phi^A_t\big)^*_{\phi^A_t(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}\big(d\phi^A_t\big)^*_{\phi^A_t(p)}}_{b}T_{\phi^A_t(p)}$$
$$= T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}(y_t)K_{i_1}{}^{j_1}(t)\cdots K_{i_a}{}^{j_1}(t)L^{i_{a+1}}{}_{j_{a+1}}(t)\cdots L^{i_{a+b}}{}_{j_{a+b}}(t)$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\bigg|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x^{j_a}}\bigg|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}} dx^{j_{a+1}}_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}} dx^{j_{a+b}}_{h(p)}\right) .$$

O ponto de termos procurado escrever tudo dessa forma, é que agora toda a dependência em t aparece no produto de $a+b+1$ fatores da segunda linha, acima. Assim, ao calcularmos a derivada em relação a t da expressão acima em $t=0$, obteremos, pela regra de Leibniz, uma soma de $a+b+1$ termos, cada um correspondente à derivada daqueles $a+b+1$ da segunda linha. O termo primeiro será envolverá a derivada de $T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}(y_t)$, e será

$$\left(\frac{d}{dt}T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}(y_t)\right)\bigg|_{t=0}\delta_{i_1}{}^{j_1}\cdots\delta_{i_a}{}^{j_1}\delta^{i_{a+1}}{}_{j_{a+1}}\cdots\delta^{i_{a+b}}{}_{j_{a+b}} .$$

Os a termos seguintes envolvem as derivadas de cada um dos fatores $K_{i_k}{}^{j_k}(t)$ e serão da forma

$$T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}\big(h(p)\big)\delta_{i_1}{}^{j_1}\cdots M_{i_k}{}^{j_k}\cdots\delta_{i_a}{}^{j_1}\delta^{i_{a+1}}{}_{j_{a+1}}\cdots\delta^{i_{a+b}}{}_{j_{a+b}} ,$$

com o fator $M_{i_k}{}^{j_k}$ substituindo um fator $\delta_{i_k}{}^{j_k}$ na k-ésima posição, com $k=1,\ \ldots,\ a$. Os b termos seguintes envolvem as derivadas de cada um dos fatores $L^{i_l}{}_{j_l}(t)$ e serão da forma

$$T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}\big(h(p)\big)\delta_{i_1}{}^{j_1}\cdots\delta_{i_a}{}^{j_1}\delta^{i_{a+1}}{}_{j_{a+1}}\cdots N^{i_l}{}_{j_l}\cdots\delta^{i_{a+b}}{}_{j_{a+b}} ,$$

com o fator $N_{i_l}{}^{j_l}$ substituindo um fator $\delta_{i_l}{}^{j_l}$ na l-ésima posição, com $l=a+1,\ \ldots,\ a+b$.

Agora, temos que

$$\left(\frac{d}{dt}T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}(y_t)\right)\bigg|_{t=0} = \left(\mathcal{L}_A T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}\right)_{h(p)} = A\left(T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}\right)_{h(p)} ,$$

que

$$M_{i_k}{}^{j_k}\left.\frac{\partial}{\partial x^{j_l}}\right|_{h(p)} = \mathcal{L}_A\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_l}}\right|_{h(p)} \qquad \text{e que} \qquad N^{i_l}{}_{j_l}\,dx^{j_l}_{h(p)} = \mathcal{L}_A dx^{i_l}_{h(p)} .$$

Concluímos que

$$(\mathcal{L}_A T)_p = \mathcal{L}_A\left(T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}\right)_{h(p)}\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\right|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+1}}_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+b}}_{h(p)}$$

$$+ T^{i_1\cdots i_a}{}_{i_{a+1}\cdots i_{a+b}}(h(p))\left[\sum_{k=1}^{a}\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{L}_A\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right|_{h(p)}\right)\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\right|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+1}}_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+b}}_{h(p)}\right.$$

$$\left. + \sum_{l=a+1}^{a+b}\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\right|_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+1}}_{h(p)}\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{L}_A dx^{i_l}_{h(p)}\right)\otimes_{\mathbb{R}}\cdots\otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+b}}_{h(p)}\right] ,$$

que é a relação (33.94), como desejávamos provar.