Capítulo 34
Alguns Tópicos Especiais em Topologia e Análise

Conteúdo

O presente capítulo, o qual está ainda bastante incompleto, contém uma miscelânea de assuntos relacionados a espaços topológicos e suas aplicações. São aqui coletadas várias definições e resultados empregados alhures nestas Notas. Devido à natureza do capítulo, suas diferentes seções não estão necessariamente ligadas entre si e suas leituras podem ser feitas de modo independente.

34.1 Uma Coletânea de Definições

Apresentamos nesta seção algumas definições importantes empregadas em vários lugares. Exemplos ilustrativos simples são, quando possível, apresentados ao final da seção.

34.1.1 Conjuntos Densos em Espaços Topológicos

• **Conjuntos densos**

Sejam X um conjunto não-vazio, τ uma topologia em X e $S \subset X$. Um conjunto $R \subset S$ é dito ser *denso* em S (em relação à topologia τ), ou τ-denso em S, se seu fecho[1] contiver S: $\overline{R} \supset S$.

E. 34.1 *Exercício*. Seja $R \subset S$. Mostre que R é denso em S se e somente se $\overline{R} = \overline{S}$. ✣

Observe-se que se $F \subset X$ é τ-fechado e $R \subset F$ é denso em F, então $\overline{R} = F$. Evocando a Proposição 29.8, página 1417, concluímos que R é denso em F se e somente se todo τ-aberto que possuir intersecção não-vazia com F possuir também intersecção não-vazia com R. Como X é τ-fechado, concluímos também que um conjunto R é denso em X se e somente se para todo τ-aberto não-vazio $A \in \tau$ valer $A \cap R \neq \emptyset$. Vide também a Proposição 29.13, página 1421.

• **Conjuntos densos em parte alguma**

Um conjunto $S \subset X$ é dito ser *denso em parte alguma* (em relação à topologia τ) se seu fecho não contiver nenhum aberto de τ. Em outras palavras, S é denso em parte alguma se o interior de seu fecho $\left(\overline{S}\right)^0$ for vazio[2]. Em símbolos, S é dito ser *denso em parte alguma* se $\left(\overline{S}\right)^0 = \emptyset$.

Na topologia usual de $\mathbb{R}$ o conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ não é *denso em parte alguma* pois $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, que obviamente possui um interior não-vazio ($(\mathbb{R})^0 = \mathbb{R}$). O mesmo vale para os irracionais. Os inteiros $\mathbb{Z}$ formam um conjunto denso em parte alguma.

• **Conjuntos densos em si mesmo**

Um conjunto não-finito T é dito ser *denso em si mesmo* (em relação à topologia τ) se tiver a seguinte propriedade: para todo $t \in T$ vale que todo τ-aberto A que contém t contém também pontos de T distintos de t. Uma definição alternativa é dizer que T é *denso em si mesmo* se todo ponto de T for um ponto de acumulação de T.

Pode surpreender o estudante saber que há em $\mathbb{R}$ conjuntos fechados, densos em parte alguma e densos em si mesmo (na topologia usual de $\mathbb{R}$). Os exemplos mais proeminentes são os conjuntos de Cantor tratados na Seção 31.3, página 1459. Vide também adiante.

• **Conjuntos perfeitos**

Um subconjunto P de X é dito ser *perfeito* se for fechado e denso em si mesmo.

[1] Por definição, o fecho de $\overline{R}$ de um conjunto R em um espaço topológico é o menor τ-fechado que contém R. Vide Capítulo 29.
[2] Por definição, o interior de T^0 de um conjunto T em um espaço topológico é o maior aberto contido em T. Vide Capítulo 29.

• **Abertos densos**

Sejam X um conjunto não-vazio e τ uma topologia em X. De particular interesse são os conjuntos $G \subset X$ que têm a propriedade de serem abertos e densos em X.

Se τ é uma topologia métrica em X e $G \subset X$ é um aberto denso, então todo ponto de X que não pertence a G (ou seja, todo ponto de $X \setminus G$) está arbitrariamente próximo de um ponto de G (pois G é denso), mas nenhum ponto de G está arbitrariamente próximo de um ponto de $X \setminus G$ (pois G é aberto).

Exemplo 34.1 Seja $X = \mathbb{R}^2$ com a topologia métrica usual e seja L uma linha reta em $\mathbb{R}^2$. Então, $G = \mathbb{R}^2 \setminus L$ é um aberto denso. Se $L_1, \ldots, L_n$ é uma coleção finita de retas em $\mathbb{R}^2$, então $G = \mathbb{R}^2 \setminus (L_1 \cup \ldots \cup L_n)$ é um aberto denso. ⌑

Exemplo 34.2 Em $X = \mathbb{R}$, com a topologia métrica usual, nem o conjunto dos racionais nem o dos irracionais é aberto denso (ambos são densos, mas não são abertos). ⌑

A seguinte propriedade de conjuntos abertos densos pode ser facilmente estabelecida: se G_1 e G_2 são abertos densos em X, então $G_1 \cap G_2$ é um aberto denso em X. Para provar, notemos primeiramente que $G_1 \cap G_2$ é um aberto (por ser intersecção de dois abertos). Em segundo lugar, se A é um aberto não-vazio qualquer, tem-se que $A \cap (G_1 \cap G_2)$ é não-vazio. Para ver isso, notemos que esse conjunto é igual a $(A \cap G_1) \cap G_2$, mas $A \cap G_1$ é aberto e não-vazio, por hipótese (G_1 é suposto ser denso em X) e, pela mesma razão, $(A \cap G_1) \cap G_2$ é igualmente aberto e não-vazio.

Por indução, pode-se sem dificuldade provar a seguinte generalização:

Proposição 34.1 *Sejam X um conjunto não-vazio e τ uma topologia em X. Se $G_1, \ldots, G_n$ é uma coleção finita de abertos densos em X, então a intersecção $G_1 \cap \ldots \cap G_n$ é um aberto denso em X.* □

A proposição acima diz-nos intuitivamente que conjuntos abertos e densos são conjuntos topologicamente "grandes" dentro de X.

Igualmente fácil de demonstrar é a seguinte proposição:

Proposição 34.2 *Sejam X um conjunto não-vazio e τ uma topologia em X. Então, a coleção formada pelos abertos densos em X e pelo conjunto vazio forma uma topologia em X.* □

Prova. X é um aberto denso, trivialmente. Uniões arbitrárias de abertos densos são também abertos e densos, trivialmente. Por fim, pela Proposição 34.1, intersecções finitas de abertos e densos são abertos e densos. □

34.1.2 A Noção de Conjunto Conexo em Espaços Topológicos

• **Conjuntos desconexos**

Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto $D \subset X$ é dito ser um *conjunto desconexo* (em relação à topologia τ), ou τ-desconexo, se existirem dois abertos $A_1, A_2 \in \tau$, com

1. $D \cap A_1 \neq \emptyset$ e $D \cap A_2 \neq \emptyset$,
2. $(D \cap A_1) \cap (D \cap A_2) = \emptyset$,
3. $D = (D \cap A_1) \cup (D \cap A_2)$.

Se D é desconexo, dizemos que um par de abertos A_1, A_2 que satisfazem as três condições acima *desconectam* D.

A seguinte proposição pode ser entendida como uma caracterização alternativa da noção de desconexão.

Proposição 34.3 *Seja (X, τ) um espaço topológico. $D \subset X$ é τ-desconexo se e somente se existir um subconjunto próprio não-vazio de D que seja simultaneamente aberto e fechado na topologia relativa de D induzida por τ.* □

Prova. De D é τ-desconexo então existem A_1 e $A_2 \in \tau$ satisfazendo as condições da definição acima. Agora, por definição, $D \cap A_1$ e $D \cap A_2$ são elementos da topologia relativa de D induzida por τ e são não-vazios (pelo item 1 da definição acima). Como $(D \cap A_1) \cap (D \cap A_2) = \emptyset$ e $D = (D \cap A_1) \cup (D \cap A_2)$, esses conjuntos são complementares em D, provando que ambos também são fechados na topologia relativa de D induzida por τ.

Reciprocamente, seja B_1 um subconjunto próprio não-vazio de D que seja aberto na topologia relativa de D. Então, existe $A_1 \in \tau$ com $B_1 = D \cap A_1$. Se B_1 é também fechado na topologia relativa de D, então $B_2 = D \setminus B_1$ é não-vazio e aberto na topologia relativa de D e existe $A_2 \in \tau$ tal que $B_2 = D \cap A_2$. Agora, é evidente que valem

1. $D \cap A_1 = B_1 \neq \emptyset$ e $D \cap A_2 = B_2 \neq \emptyset$,
2. $(D \cap A_1) \cap (D \cap A_2) = B_1 \cap B_2 = \emptyset$,
3. $(D \cap A_1) \cup (D \cap A_2) = B_1 \cup B_2 = D$,

provando que D é τ-desconexo. ■

• **Conjuntos conexos**

Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto $C \subset X$ é dito ser um *conjunto conexo* (em relação à topologia τ), ou τ-conexo, se não for desconexo (em relação a τ). A seguinte proposição pode ser entendida como uma caracterização alternativa da noção de conexão.

Proposição 34.4 *Seja (X, τ) um espaço topológico. $C \subset X$ é τ-conexo se e somente se não existir nenhum subconjunto próprio não-vazio de C que seja simultaneamente aberto e fechado na topologia relativa de C induzida por τ.* □

Prova. Evidente pela Proposição 34.3. ■

O seguinte teorema é relevante nesse contexto.

Teorema 34.1 *Seja X um conjunto e τ uma topologia em X. Sejam K_a e K_b dois conjuntos conexos de X segundo τ e tais que $K_a \cap K_b \neq \emptyset$. Então, $K_c := K_a \cup K_b$ é também conexo segundo τ.* □

Prova. A prova é feita por contradição. Vamos assumir que K_c não seja conexo e sejam dois abertos A_1, A_2 satisfazendo

(a) $(K_c \cap A_1) \neq \emptyset$ e $(K_c \cap A_2) \neq \emptyset$,

(b) $(K_c \cap A_1) \cap (K_c \cap A_2) = \emptyset$,

(c) $K_c = (K_c \cap A_1) \cup (K_c \cap A_2)$.

Assim[3],

$$
\begin{aligned}
K_c &\overset{(c)}{=} [(K_a \cup K_b) \cap A_1] \cup [(K_a \cup K_b) \cap A_2] \\
&= (K_a \cap A_1) \cup (K_b \cap A_1) \cup (K_a \cap A_2) \cup (K_b \cap A_2) \\
&= \Big(K_a \cap (A_1 \cup A_2)\Big) \cup \Big(K_b \cap (A_1 \cup A_2)\Big) . \qquad (34.1)
\end{aligned}
$$

[3] Advertência ao estudante: as próximas passagens e o restante da demonstração usam abundantemente as propriedades distributivas de uniões e intersecções de conjuntos. Vide Proposição 1.1, página 36.

Ao mesmo tempo,

$$
\begin{aligned}
\emptyset &\stackrel{(b)}{=} (K_c\cap A_1)\cap(K_c\cap A_2) = \Big[(K_a\cup K_b)\cap A_1\Big]\cap\Big[(K_a\cup K_b)\cap A_2\Big]\\
&= \Big[(K_a\cap A_1)\cup(K_b\cap A_1)\Big]\cap\Big[(K_a\cap A_2)\cup(K_b\cap A_2)\Big]\\
&= \Big[(K_a\cap A_1)\cap\Big[(K_a\cap A_2)\cup(K_b\cap A_2)\Big]\Big]\bigcup\Big[(K_b\cap A_1)\cap\Big[(K_a\cap A_2)\cup(K_b\cap A_2)\Big]\Big]\\
&= \Big[\Big[(K_a\cap A_1)\cap(K_a\cap A_2)\Big]\cup\Big[(K_a\cap A_1)\cap(K_b\cap A_2)\Big]\Big]\\
&\qquad\bigcup\Big[\Big[(K_b\cap A_1)\cap(K_a\cap A_2)\Big]\cup\Big[(K_b\cap A_1)\cap(K_b\cap A_2)\Big]\Big] \qquad (34.2)
\end{aligned}
$$

Notemos que se uma união $B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4$ é vazia, então cada B_j é vazio. De (34.2) concluímos, então, que

$$\emptyset = (K_a\cap A_1)\cap(K_a\cap A_2) \qquad (34.3)$$

$$\emptyset = (K_a\cap A_1)\cap(K_b\cap A_2) \qquad (34.4)$$

$$\emptyset = (K_b\cap A_1)\cap(K_a\cap A_2) \qquad (34.5)$$

$$\emptyset = (K_b\cap A_1)\cap(K_b\cap A_2) \qquad (34.6)$$

Dessas relações, usaremos mais abaixo (34.3) e (34.6).

Voltemos agora a (34.1). Temos que

$$
\begin{aligned}
K_a &= K_a\cap K_c \stackrel{(34.1)}{=} K_a\bigcap\Big[\Big(K_a\cap(A_1\cup A_2)\Big)\cup\Big(K_b\cap(A_1\cup A_2)\Big)\Big]\\
&= \Big(K_a\cap(A_1\cup A_2)\Big)\bigcup\Big((K_a\cap K_b)\cap(A_1\cup A_2)\Big)\,. \qquad (34.7)
\end{aligned}
$$

Como $K_a\cap K_b\subset K_a$, temos que $(K_a\cap K_b)\cap(A_1\cup A_2)\subset K_a\cap(A_1\cup A_2)$ e, assim, (34.7) se simplifica para $K_a = K_a\cap(A_1\cup A_2)$. Disso concluímos que

$$K_a = (K_a\cap A_1)\cup(K_a\cap A_2)\,. \qquad (34.8)$$

De maneira totalmente análoga prova-se que

$$K_b = (K_b\cap A_1)\cup(K_b\cap A_2)\,. \qquad (34.9)$$

Analisemos agora as conclusões (34.3) e (34.8). Se ambos os conjuntos $K_a\cap A_1$ e $K_a\cap A_2$ forem não-vazios, teríamos que K_a é desconexo (basta lembrar a definição de conjunto desconexo, acima). Logo, como K_a foi suposto ser conexo, pelo menos um dos dois deve ser vazio. Digamos, sem perda de generalidade, que $K_a\cap A_2=\emptyset$. Analogamente, por (34.6) e (34.9) concluí-se que pelo menos um dos conjuntos $K_b\cap A_1$ e $K_b\cap A_2$ deve ser vazio. Se também tivéssemos $K_b\cap A_2=\emptyset$, então $(K_a\cup K_b)\cap A_2=\emptyset$, ou seja $K_c\cap A_2=\emptyset$, contrariando (a). Logo,

$$K_a\cap A_2=\emptyset \quad\text{e}\quad K_b\cap A_1=\emptyset\,.$$

De (34.8) segue que $K_a = K_a\cap A_1$, o que significa que $K_a\subset A_1$. Sabemos, por hipótese, que $K_a\cap K_b$ é não-vazio. Seja $x\in K_a\cap K_b$. Como $x\in K_a$ segue que $x\in A_1$. Mas isso contradiz $K_b\cap A_1=\emptyset$, pois $x\in K_b$. Chegamos assim a uma contradição que nos leva a concluir que $K_a\cup K_b$ é conexo se $K_a\cap K_b\neq\emptyset$. ■

• Componentes conexas

Seja como antes X um conjunto não-vazio com uma topologia τ. É trivial constatar que cada conjunto $\{x\}$ com $x\in X$, composto por um único elemento, é conexo.

Se $K\subset X$ podemos estabelecer uma relação de equivalência entre seus elementos da seguinte forma: k, k' são equivalentes, $k\sim k'$, se existir um subconjunto conexo de K que contém ambos. K se quebra, assim, em uma união disjunta de classes de equivalência pela relação acima. Cada classe é dita ser uma *componente conexa* de K.

Mostremos que o definido acima é, de fato, uma relação de equivalência em K. Que $k\sim k$ é evidente. Que $k\sim k'$ implica $k'\sim k$ também é. Se $k_1\sim k_2$ e $k_2\sim k_3$, sejam $K_a\subset K$ e $K_b\subset K$ conexos tais que $k_1,\ k_2\in K_a$ e $k_2,\ k_3\in K_b$. Então, $K_c = K_a\cup K_b\subset K$ contém k_1 e k_3 (e também k_2) e é conexo, pelo Teorema 34.1, página 1556.

• Conjuntos totalmente desconexos

Um conjunto $T\subset X$ é dito ser um *conjunto totalmente desconexo* se todas as suas componentes conexas tiverem apenas um ponto.

• Conjuntos de Cantor

Um conjunto que em uma topologia métrica seja 1) totalmente desconexo, 2) compacto[4] e 3) perfeito é dito ser um *conjunto de Cantor*.

Exemplos de conjuntos de Cantor encontram-se na Seção 31.3, página 1459.

• Uns poucos exemplos

Mencionemos alguns exemplos ilustrativos. Seja $X=\mathbb{R}$ e $\tau=\tau_{\mathbb{R}}$, a topologia usual de $\mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{Q}_1=[0,\ 1]\cap\mathbb{Q}$, formado por todos é racionais do intervalo $[0,\ 1]$, é denso em $[0,\ 1]$. $\mathbb{Q}_1$ é também denso em si mesmo, mas não é perfeito (pois não é fechado). O conjunto dos irracionais em $[0,\ 1]$ é também denso em $[0,\ 1]$, denso em si mesmo, mas não é perfeito por não ser fechado. O conjunto $\{1/n,\ n\in\mathbb{N}\}$ é denso em parte alguma em $[0,\ 1]$ e não é denso em si mesmo.

E. 34.2 *Exercício*. Justifique as afirmações acima. ✠

Seja $\mathbb{R}$ com a topologia $\tau_{\mathbb{R}}$. O conjunto $A=(a,\ b)\cap(c,\ d)$ com $a<b\leq c<d$ é desconexo, mas não totalmente desconexo. Suas componentes conexas são $(a,\ b)$ e $(c,\ d)$. Todo subconjunto finito de $\mathbb{R}$ é totalmente desconexo.

E. 34.3 *Exercício*. Justifique as afirmações acima. ✠

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais é desconexo como subconjunto de $\mathbb{R}$ com a topologia $\tau_{\mathbb{R}}$, pois com os abertos $A_1=(-\infty,\ \sqrt{2})$ e $A_2=(\sqrt{2},\ \infty)$ teremos $\mathbb{Q}=(\mathbb{Q}\cap A_1)\cup(\mathbb{Q}\cap A_2)$, sendo ambos $\mathbb{Q}\cap A_1$ e $\mathbb{Q}\cap A_2$ não-vazios e $(\mathbb{Q}\cap A_1)\cap(\mathbb{Q}\cap A_2)=\emptyset$. Em verdade, podemos tomar A_1 e A_2 na forma $A_1=(-\infty,\ x)$ e $A_2=(x,\ \infty)$ para qualquer irracional x que o mesmo será válido.

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais é totalmente desconexo como subconjunto de $\mathbb{R}$ com a topologia $\tau_{\mathbb{R}}$, pois suas componentes conexas são do tipo $\{r\}$ com r racional.

E. 34.4 *Exercício*. Justifique as afirmações acima. ✠

E. 34.5 *Exercício*. O conjunto dos irracionais é desconexo como subconjunto de $\mathbb{R}$ com a topologia $\tau_{\mathbb{R}}$? É totalmente desconexo? ✠

E. 34.6 *Exercício*. O conjunto $\mathbb{A}_0$ dos números algébricos é desconexo como subconjunto de $\mathbb{R}$ com a topologia $\tau_{\mathbb{R}}$? É totalmente desconexo? ✠

E. 34.7 *Exercício*. O conjunto dos números transcendentes é desconexo como subconjunto de $\mathbb{R}$ com a topologia $\tau_{\mathbb{R}}$? É totalmente desconexo? ✠

A reta real $\mathbb{R}$ é totalmente desconexa na topologia de Sorgenfrey $\tau[\mathbb{S}]$ (vide Seção 29.2.1.1, página 1406). De fato, para todo $a\in\mathbb{R}$ tem-se $\mathbb{R}=(-\infty,\ a)\cup[a,\ \infty)$, ambos os conjuntos sendo $\tau[\mathbb{S}]$-abertos e disjuntos.

[4] Para a definição da noção de compacidade e suas propriedades, vide Seção 34.3, página 1577.

34.2 Axiomas de Separabilidade

Há diversas formas de classificar espaços topológicos e uma das mais relevantes refere-se às chamadas *propriedades de separação*, também denominadas *axiomas de separação* ou *axiomas de separabilidade*[5]. Essa classificação foi iniciada por Alexandrov[6] e Hopf[7] em cerca de 1935. Como de costume nos referiremos ao par (X, τ) como um espaço topológico, onde X é um conjunto não-vazio e τ uma topologia em X. A coleção de conjuntos fechados segundo τ será denotada, como anteriormente, por $\mathcal{F}(\tau)$.

Para motivar as definições que introduziremos e analisaremos na Seção 34.2.2, vamos apresentar algumas propriedades especiais de espaços métricos.

34.2.1 Algumas Propriedades de Separação em Espaços Métricos

Se M é um conjunto não-vazio dotado de uma métrica d, demonstramos na Proposição 32.1, página 1477, que todo espaço métrico possui a chamada *propriedade de Hausdorff*, a saber, que para quaisquer pontos distintos $x, y \in M$ existem dois d-abertos A_x e A_y em tais que $x \in A_x$, $y \in A_y$ mas $A_x \cap A_y = \emptyset$. Essa propriedade diz, em um sentido figurado, que pontos distintos de um espaço métrico pode ser "separados" por abertos disjuntos. A importância dessa propriedade na discussão de questões ligadas à noção de convergência foi discutida na Seção 32.2, página 1477. Espaços métricos têm diversas outras propriedades semelhantes e para preparar essa discussão necessitamos a definição e os resultados expressos na proposição que segue.

Proposição 34.5 *Seja M um conjunto não-vazio dotado de uma métrica d. Para $A \subset M$ não-vazio, defina-se a função $d_A : M \to [0, \infty)$ definida por $d_A(x) := \inf\{d(x, a), a \in A\}$. Então d_A é contínua em M. Fora isso, tem-se que um ponto $x_0 \in M$ satisfaz $d_A(x_0) = 0$ se e somente se $x_0 \in \overline{A}$, o fecho de A.* □

Prova. Para todo $a \in A$ vale, pela desigualdade triangular, $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Para todo $a \in A$ vale também $d_A(x) \leq d(x, a)$, por definição. Assim, $d_A(x) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Como essa desigualdade vale para todo $a \in A$, obtemos $d_A(x) \leq d(x, y) + d_A(y)$. Com isso, provamos que $d_A(x) - d_A(y) \leq d(x, y)$ e, trocando os papéis de x e y, obtemos igualmente $d_A(y) - d_A(x) \leq d(x, y)$. Essas duas desigualdades implicam $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ e isso diz-nos que d_A é contínua, pois se $d(x, y) \to 0$, então $d_A(x) \to d_A(y)$.

Se $x_0 \in \overline{A}$, então (pela Proposição 29.11, página 1420) existe uma sequência a_n em A que converge a x_0, ou seja, tal que $\lim_{n\to\infty} d(a_n, x_0) = 0$, o que implica $d_A(x_0) = 0$. Reciprocamente, se $\inf\{d(x_0, a), a \in A\} = 0$ então, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in A$ tal que $d(x_0, a_n) < 1/n$, o que prova que x_0 é um ponto-limite de A e, portanto, é um elemento de $\overline{A}$ (também pela Proposição 29.11). ■

Antes de prosseguirmos, façamos um comentário que pode ser elucidativo.

Observação. Seja M um conjunto não-vazio dotado de uma métrica d. Para $A, B \subset M$, não-vazios, defina-se a distância entre A e B por $d(A, B) := \inf\{d(a, b), a \in A, b \in B\} = \inf\{d_B(a), a \in A\} = \inf\{d_A(b), b \in B\}$. Como vimos acima, se F é d-fechado, então $d_F(x_0) = 0$ implica que $x_0 \in F$. Isso induz a pensar que se $F, G \subset M$ são dois conjuntos d-fechados, então se $d(F, G) = 0$ teríamos $F \cap G \neq \emptyset$. Porém, essa inferência é falsa em geral, como mostra o seguinte exemplo. Tome-se $M = \mathbb{R}^2$ com a métrica Euclidiana usual e sejam $F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y \geq \frac{1}{x}\}$ e $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y \leq -\frac{1}{x}\}$. Então F e G são fechados, $F \cap G = \emptyset$, mas $d(F, G) = 0$. Justifique! ♣

A Proposição 34.5 conduz a outras propriedades de separação de espaços métricos que generalizam e estendem a propriedade de Hausdorff.

Proposição 34.6 (Regularidade de Espaços Métricos) *Seja M um conjunto não-vazio dotado de uma métrica d. Sejam $F \subset M$, um conjunto fechado, e $y \notin F$. Então, existem abertos disjuntos A_F e A_y tais que $F \subset A_F$ e $y \in A_y$.* □

Prova. Como $y \notin F$, concluímos da Proposição 34.5 que $D \equiv d_F(y) > 0$. Sejam os abertos $A_F := \bigcup_{f \in F} B_d(D/3, f)$ e $A_y := B_d(D/3, y)$, onde $B_d(r, z)$ é a bola d-aberta de raio $r > 0$ centrada em $z \in M$. Afirmamos que $A_F \cap A_y = \emptyset$. Se

[5]Apesar de ser corrente, essa denominação é inapropriada, pois não se trata de axiomas no sentido próprio dessa palavra.
[6]Pavel Sergeyevich Alexandrov (ou Alexandroff) (1896–1982).
[7]Heinz Hopf (1894–1971).

assim não fosse, haveria $z_0 \in M$ tal que $d(z_0, y) < D/3$ e $d(z_0, f) < D/3$ para algum $f \in D$. Mas, pela desigualdade triangular, teríamos $d(y, f) \leq d(y, z_0) + d(z_0, f) < 2D/3$, contrariando $\inf\{d(y, f), f \in F\} = D$. ■

Um espaço topológico com a propriedade descrita na Proposição 34.6, a saber, que dados F fechado e $y \notin F$ existem abertos disjuntos A_F e A_y tais que $F \subset A_F$ e $y \in A_y$, é dito ser um *espaço topológico regular*. Sobre tais espaços falaremos mais adiante. Passemos a mais uma importante propriedade de separação de espaços métricos.

Se F e G são dois conjuntos d-fechados disjuntos em M então $d_F(x) + d_G(x) > 0$ para todo $x \in M$. De fato, se $x_0 \in M$ é tal que $d_F(x_0) + d_G(x_0) = 0$, então $d_F(x_0) = 0$ e $d_G(x_0) = 0$, implicando $x_0 \in \overline{F} = F$ e $x_0 \in \overline{G} = G$, uma contradição, já que $F \cap G = \emptyset$. Esse fato e a Proposição 34.5 implicam que se F e G são dois conjuntos d-fechados disjuntos em M então a função $f : M \to [0, 1]$ definida por

$$f(x) := \frac{d_F(x)}{d_F(x) + d_G(x)} \tag{34.10}$$

é contínua e satisfaz $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in G$. Isso tem uma consequência importante, expressa na proposição que segue.

Proposição 34.7 (Normalidade de Espaços Métricos) *Seja M um conjunto não-vazio dotado de uma métrica d. Se F e G forem dois conjuntos d-fechados disjuntos, então existem dois d-abertos disjuntos A_F e A_G tais que $F \subset A_F$ e $G \subset A_G$.* □

Prova. A função $f : M \to [0, 1]$ definida em (34.10) é contínua. Portanto, $A_F := f^{-1}([0, 1/2))$ e $A_G := f^{-1}((1/2, 1])$ são abertos e disjuntos. Como comentamos acima, $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in G$. Logo $F \subset A_F$ e $G \subset A_G$. ■

A propriedade descrita na Proposição 34.7 revelou-se tão importante no estudo de propriedades de espaços topológicos que adquiriu uma denominação própria. Um espaço topológico no qual para cada par de conjuntos fechados disjuntos F e G existirem dois abertos disjuntos A_F e A_G tais que $F \subset A_F$ e $G \subset A_G$ é dito ser um *espaço topológico normal*. De grande importância também é o fato, revelado na demonstração da Proposição 34.7, de que dados dois d-fechados disjuntos F e G existe uma função $f : M \to [0, 1]$ contínua com $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in G$. Conforme veremos na Seção 34.2.3, página 1568, um célebre resultado, conhecido como Lema de Urysohn, garante que todo espaço topológico normal tem essa propriedade, fato de consequências profundas e não-triviais.

Proposição 34.8 (Normalidade Perfeita de Espaços Métricos) *Seja M um conjunto não-vazio dotado de uma métrica d. Se F e G forem dois conjuntos d-fechados disjuntos, então existe uma função contínua $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(\{0\}) = F$ e $f^{-1}(\{1\}) = G$.* □

Prova. $f : M \to [0, 1]$ definida em (34.10) satisfaz as propriedades requeridas, pois $\frac{d_F(x)}{d_F(x)+d_G(x)} = 0 \iff d_F(x) = 0 \overset{\text{Prop. 34.5}}{\iff} x \in \overline{F} = F$ e $\frac{d_F(x)}{d_F(x)+d_G(x)} = 1 \iff d_G(x) = 0 \overset{\text{Prop. 34.5}}{\iff} x \in \overline{G} = G$. ■

Como veremos adiante, um espaço topológico satisfazendo as propriedades mencionadas na Proposição 34.8 é dito ser um *espaço topológico perfeitamente normal*.

34.2.2 Postulados de Separabilidade em Espaços Topológicos

Vamos agora estender nossa discussão a espaços topológicos gerais, tratando também com mais detalhe as ideias introduzidas acima no contexto de espaços métricos.

• **Distinguibilidade e separabilidade topológicas**

Vamos a algumas definições preliminares. Seja $x \in X$. Um conjunto $V \subset X$ é dito ser uma *vizinhança* de x (segundo τ) se V contém x e se contiver um aberto que também contém x, ou seja, se existir $A \in \tau$ tal que $x \in A \subset V$. Um aberto $A \in \tau$ que contenha x é dito ser uma *vizinhança aberta* de x.

Dois pontos $x, y \in X$ são ditos ser *pontos topologicamente indistinguíveis* se possuirem exatamente as mesmas vizinhanças, ou seja, se todo aberto que contém x também contiver y e vice-versa. Dois pontos $x, y \in X$ são ditos ser *pontos topologicamente distinguíveis* se um deles possuir uma vizinhança aberta que não é vizinhança aberta do outro.

Dois pontos distintos $x, y \in X$ são ditos ser *pontos separados*, ou *pontos topologicamente separados*, se cada um possuir uma vizinhança que não é vizinhança do outro, ou seja, se existirem abertos A_x e A_y com $x \in A_x$ e $y \in A_y$, mas tais que $y \notin A_x$ e $x \notin A_y$.

Claro está que, num dado espaço topológico, se dois pontos distintos forem separados, então eles são topologicamente distintos. Analogamente, se dois pontos distintos não forem topologicamente distintos, então eles não são topologicamente separados.

Dois conjuntos $A, B \subset X$ são ditos ser *conjuntos separados*, ou *conjuntos topologicamente separados*, se $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e $A \cap \overline{B} = \emptyset$, onde, para $C \subset X$, denotamos por $\overline{C}$ o fecho de C (para a definição de fecho, vide página 1413).

E. 34.8 *Exercício*. Seguindo as definições acima, mostre que dois pontos distintos $x, y \in X$ são topologicamente separados se e somente se os conjuntos $\{x\}$ e $\{y\}$ (cada um composto de um único elemento) são conjuntos topologicamente separados. Sugestão: se A_x é uma vizinhança aberta de x e A_y é uma vizinhança aberta de y com $y \notin A_x$ e $x \notin A_y$, então os fechados $(A_x)^c$ e $(A_y)^c$ são vizinhanças fechadas de y e x, respectivamente e, portanto, contém o fecho de $\{y\}$ e de $\{x\}$, respectivamente. ✠

Dois conjuntos $A, B \subset X$ são ditos ser *conjuntos separados por uma função* se existir uma função $f : X \to \mathbb{R}$, contínua, tal que $f^{-1}(\{0\}) \supset A$ e $f^{-1}(\{1\}) \supset B$.

Dois conjuntos $A, B \subset X$ são ditos ser *conjuntos precisamente separados por uma função* se existir uma função $f : X \to \mathbb{R}$, contínua, tal que $f^{-1}(\{0\}) = A$ e $f^{-1}(\{1\}) = B$.

Dizemos que uma topologia τ em um conjunto não-vazio X *distingue pontos* se todos os pontos distintos de X forem topologicamente distintos. Como veremos logo adiante, uma topologia que distingue pontos é dita ser do tipo T_0, ou do tipo de Kolmogorov.

Dizemos que uma topologia τ em um conjunto não-vazio X *separa pontos* se todos os pontos distintos de X forem topologicamente separados. Como veremos logo adiante, uma topologia que distingue pontos é dita ser do tipo T_1, ou do tipo de Fréchet.

Claro está que se uma topologia separa pontos, então ela distingue pontos. Analogamente, se ela não distingue pontos ela não os separa.

E. 34.9 *Exercício*. Verifique que a topologia usual $\tau_{\mathbb{R}}$ em $\mathbb{R}$ distigue e separa pontos. ✠

E. 34.10 *Exercício*. Seja $X = (0, \infty)$, o conjunto dos números reais positivos. Considere a topologia τ em X composta por $\emptyset$, por X e por todos os conjunto da forma $(0, a)$, com $a > 0$. Mostre que essa topologia distingue pontos. Mostre que essa topologia não separa pontos. ✠

• Postulados de separabilidade

Espaços topológicos podem ser classificados de acordo com propriedades de separação. No que segue listaremos as espécies mais relevantes nessa taxonomia. Os que mais nos interessarão serão os espaços de Hausdorff (T_2) e os normais. Classificações mais detalhadas podem ser encontradas em textos mais especializados. Chamamos a atenção do leitor para o fato que as definições que seguem não são, lamentavelmente, universalmente adotadas na literatura. Por razões históricas diversas, textos mais antigos ou pertencentes a escolas específicas podem usar definições ligeiramente distintas das de abaixo e, por isso, é preciso muito cuidado ao se compararem resultados de origens diversas.

1. **Espaços de Kolmogorov, ou T_0.**

   Um espaço topológico (X, τ) é dito ser de tipo T_0, ou um *espaço de Kolmogorov*[8], se para cada par de pontos distintos $x, y \in X$ existir um aberto $A \in \tau$ satisfazendo $x \in A$ e $y \notin A$ ou satisfazendo $y \in A$ e $x \notin A$.

   Em outras palavras, um espaço topológico é de tipo T_0, ou de Kolmogorov, se todos os seus pontos distintos forem topologicamente distinguíveis.

[8] Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987).

2. **Espaços simétricos, ou R_0.**

   Um espaço topológico (X, τ) é dito ser *simétrico* se todos os pontos topologicamente distinguíveis forem topologicamente separados. Espaços simétricos são também ditos serem de tipo R_0.

3. **Espaços de Fréchet, ou T_1.**

   Um espaço topológico (X, τ) é dito ser de tipo T_1, ou um *espaço de Fréchet*[9][10], se todos os seus pontos distintos forem topologicamente separados, ou seja, se for T_0 e R_0.

   Assim, um espaço topológico (X, τ) é dito ser de tipo T_1, se para cada par de pontos distintos $x, y \in X$ existirem abertos $A_x \in \tau$ e $A_y \in \tau$ tais que $x \in A_x$, $y \in A_y$, mas $x \notin A_y$ e $y \notin A_x$.

   Um espaço topológico (X, τ) é de tipo T_1 se e somente se todos os pontos de X forem conjuntos fechados segundo τ. De fato, se $\{x\}$ e $\{y\}$ são fechados segundo τ, defina-se os abertos $A_x = \{y\}^c$ e $A_y = \{x\}^c$ e veremos satisfeitas as propriedades desejadas. Reciprocamente, seja $x \in X$ tal que $\{x\}$ não é fechado. Então, existiria y distinto de x em $\overline{\{x\}}$. Seja agora A_y uma vizinhança aberta de y que não contém x. Isso implica que $x \in (A_y)^c$, que é fechado. Logo, pela definição de fecho de um conjunto, segue que $\overline{\{x\}} \subset (A_y)^c$, contradizendo $y \in \overline{\{x\}}$.

4. **Espaços de Hausdorff, ou T_2.**

   Um espaço topológico (X, τ) é dito ser de tipo T_2, ou um *espaço de Hausdorff*[11], se para cada par de pontos distintos $x, y \in X$ existirem abertos disjuntos $A_x \in \tau$ e $A_y \in \tau$ tais que $x \in A_x$, $y \in A_y$.

   Assim, um espaço topológico (X, τ) é dito ser de tipo T_2, ou Hausdorff, se dois pontos distintos quaisquer puderem ser separados por vizinhanças abertas disjuntas. É evidente por essa definição que todo espaço Hausdorff é também T_1.

   Espaços Hausdorff têm algumas de suas propriedades discutidas na Seção 32.2, página 1477.

5. **Espaços regulares.**

   Um espaço topológico (X, τ) é dito ser um *espaço regular* se para todo fechado $F \in \mathcal{F}(\tau)$ e todo ponto $x \notin F$ existirem abertos disjuntos $A_F \in \tau$ e $A_x \in \tau$ tais que $F \subset A_F$ e $x \in A_x$.

6. **Espaços regulares Hausdorff, ou T_3.**

   Um espaço topológico (X, τ) é dito ser um espaço de tipo T_3 se for regular e T_1.

   Como comentamos acima, um espaço é T_1 se e somente se seus conjuntos de um elemento forem fechados. Assim, a regularidade implica que se x e $y \in X$ são pontos distintos arbitrários, existem abertos disjuntos $A_x \in \tau$ e $A_y \in \tau$ tais que $x \in A_x$ e $y \in A_y$, que é a propriedade de Hausdorff. Como todo espaço Hausdorff é T_1 (vide comentário acima), concluímos que (X, τ) é um espaço de tipo T_3 se e somente se for regular e Hausdorff. Por essa razão, um espaço T_3 é também dito ser um *espaço regular Hausdorff*.

7. **Espaços normais.**

   Um espaço topológico (X, τ) é dito ser um *espaço normal* se para todos fechados disjuntos $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\tau)$ existirem abertos disjuntos $A_{F_1} \in \tau$ e $A_{F_2} \in \tau$ tais que $F_1 \subset A_{F_1}$ e $F_2 \subset A_{F_2}$.

   Como veremos adiante no célebre Lema de Urysohn, Lema 34.3, página 1571, um espaço topológico (X, τ) é normal se e somente se todos fechados disjuntos $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\tau)$ forem separados por uma função, ou seja, se para cada par de fechados disjuntos $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\tau)$ existir uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(\{0\}) \supset F_1$ e $f^{-1}(\{1\}) \supset F_2$.

8. **Espaços normais Hausdorff, ou T_4.**

   Um espaço topológico (X, τ) é dito ser de tipo T_4 se for normal e T_1.

   Um espaço normal é T_1 se e somente se for normal e se todo conjunto de um elemento for fechado. Mas isso implica que, se x e $y \in X$ são distintos, então os fechados $\{x\}$ e $\{y\}$ são separados por abertos, implicando que o espaço é Hausdorff. Reciprocamente, se um espaço é Hausdorff ele é automaticamente T_1.

   Assim, um espaço é do tipo T_4 se e somente se for normal e Hausdorff. Por essa razão, um espaço T_4 é também dito ser um *espaço normal Hausdorff*.

[9] Maurice René Fréchet (1878–1973).

[10] O estudante deve atentar para o fato de existir uma classe de espaços vetoriais topológicos que também são denominados “espaços de Fréchet”, mas as duas noções são totalmente distintas.

[11] Felix Hausdorff (1868–1942).

9. **Espaços completamente normais.**

   Um espaço topológico (X, τ) é dito ser um *espaço completamente normal*, e se para todos os conjuntos separados (definição, acima) $C_1, C_2 \subset X$ existirem abertos disjuntos $A_{C_1} \in \tau$ e $A_{C_2} \in \tau$ tais que $C_1 \subset A_{C_1}$ e $C_2 \subset A_{C_2}$.

   Como é fácil ver, todo espaço completamente normal é normal

10. **Espaços completamente normais Hausdorff, ou T_5.**

    Um espaço topológico (X, τ) é dito ser de tipo T_5 se for completamente normal e T_1, ou se for completamente normal e T_4, ou ainda se for completamente normal e Hausdorff. Por essa razão, um espaço do tipo T_5 é dito ser um *espaço completamente normal Hausdorff*.

11. **Espaços perfeitamente normais.**

    Um espaço topológico (X, τ) é dito ser um *espaço perfeitamente normal* se todos fechados disjuntos $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\tau)$ forem perfeitamente separados por uma função. Ou seja, se para cada par de fechados disjuntos $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\tau)$ existir uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(\{0\}) = F_1$ e $f^{-1}(\{1\}) = F_2$.

As noções mais relevantes dentre as colocadas acima são a de espaço de Hausdorff e a de espaço normal. Os diversos tipos de espaços topológicos descritos acima possuem diversas relações entre si, as mais relevantes sendo as seguintes.

1. Todo espaço completamente normal Hausdorff é um espaço normal Hausdorff;
2. Todo espaço normal Hausdorff é um espaço regular Hausdorff;
3. Todo espaço regular Hausdorff é um espaço Hausdorff;
4. Todo espaço Hausdorff é um espaço de Fréchet;
5. Todo espaço de Fréchet é de Kolmogorov (por definição);

ou seja,

$$T_5 \implies T_4 \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0 \,. \tag{34.11}$$

As demonstrações dessas afirmações são elementares – quando não evidentes – a partir das definições e são deixadas ao leitor.

• **Alguns poucos exemplos**

Vamos a alguns exemplos ilustrativos das definições de acima. Mais exemplos e contraexemplos podem ser encontrados, e.g., em [304].

- Seja X não-vazio com a topologia indiscreta, ou trivial: $\tau_I = \{\emptyset, X\}$. Esse espaço não se classifica em nenhum dos tipos listados acima, não sendo de Kolmogorov, de Fréchet etc. Seja X não-vazio com a topologia discreta: $\tau_D = \mathbb{P}(X)$. Esse espaço se classifica em todos dos tipos listados acima.
- Todo espaço métrico é de tipo Hausdorff, regular, normal e perfeitamente normal. Essas afirmações encontram-se demonstradas, respectivamente, nas Proposições 32.1 (página 1477), 34.6 (página 1559), 34.7 (página 1560) e 34.8 (página 1560).
- Todo espaço compacto e Hausdorff é regular e normal Hausdorff (vide Teorema 34.8, página 1584).
- Todo espaço paracompacto e Hausdorff é regular e normal Hausdorff (vide Teorema 34.24, página 1613).
- Considere em $\mathbb{R}$ a topologia τ composta pelo vazio e por todos os conjuntos da forma $(-\infty, a)$ com $a \in \mathbb{R}$. Esse espaço topológico é T_0 (Kolmogorov) pois, se $x < y$, então tomando $x < a < y$ e $A = (-\infty, a)$ valerá $x \in A$, mas $y \notin A$. Por outro lado, esse espaço topológico não é nem Hausdorff (T_2), pois dois τ-abertos não-vazios quaisquer têm intersecção não-vazia. Ele também não é R_0 (simétrico) pois se x e y são topológicamente dintinguíveis, então ou $x < y$ ou $y < x$. No primeiro caso, todo aberto que contém y também contém x e, no segundo caso, todo aberto que contém x também contém y. Assim, de acordo com a definição, esse espaço topológico também não é de tipo T_1 (Fréchet).

- Seja $C = \{c_1, c_2\}$, com $c_1 \neq c_2$, e seja em C a topologia $\tau = \big\{\emptyset, \{c_2\}, X\big\}$. O espaço topológico (C, τ) não é Hausdorff (pois o único τ-aberto que contém c_1 é X, o qual evidentemente interscepta todo aberto que contém c_2). Porém, (C, τ) é T_0 (Kolmogorov), pois $\{c_2\}$ é um τ-aberto que contém c_2, mas não c_1. Por fim, (C, τ) não é simétrico, já que c_1 e c_2 são topológicamente distinguiveis, mas não são topologicamente separados. Consequentemente (C, τ) não é de Fréchet (T_1).
- Seja X não-finito com a topologia co-finita (vide página 1404). Esse espaço é de tipo T_0 e T_1 mas não tem a propriedade de Hausdorff, não é regular e não é normal.
- Seja X não-contável com a topologia co-contável (vide página 1404). Esse espaço é de tipo T_0 e T_1, mas não tem a propriedade de Hausdorff, não é regular e não é normal. Para esses dois últimos exemplos, vide página 1404.
- Seja X um conjunto não-vazio, seja $B \subset X$, não-vazio, e seja $\tau_{cp}(B)$ a topologia do conjunto particular B, discutida no Exercício E. 29.3, página 1402. Nessa topologia não há abertos não-vazios disjuntos, já que todos contém B. Assim, essa topologia não pode ser Hausdorff, nem regular, nem normal.
- A topologia de Sorgenfrey[12] $\tau[\mathbb{S}]$ de $\mathbb{R}$ (vide Seção 29.2.1.1, página 1406) é de tipo T_0, T_1, de Hausdorff, regular e normal.
- O plano de Sorgenfrey $(\mathbb{R}^2, \tau[\mathbb{S}^2])$ (vide página 1407) é de tipo T_0, T_1, de Hausdorff mas não é normal. De fato, os conjuntos $D_1^r := \big\{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 \big|\, x \in \mathbb{Q}\big\}$ e $D_1^i := \big\{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 \big|\, x \notin \mathbb{Q}\big\}$ são fechados na topologia $\tau[\mathbb{S}^2]$ (vide Exercícios E. 29.32 e E. 29.33, página 1407), são disjuntos, mas não podem ser separados por abertos disjuntos de $\tau[\mathbb{S}^2]$. Para um outro argumento, vide [304].

  O exposto nos dois últimos exemplos acima ilustra o fato que o produto de dois espaços normais não é necessariamente normal.
- Adote-se em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a topologia produto $\{0, \mathbb{R}\} \times \tau_{\mathbb{R}}$, ou seja, no plano $\mathbb{R}^2$, adote-se no eixo horizontal a topologia trivial $\{0, \mathbb{R}\}$ e no eixo vertical a topologia usual $\tau_{\mathbb{R}}$. Nessa topologia os conjuntos abertos não-vazios são uniões de conjuntos do tipo $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big|\, x \in \mathbb{R},\ a < y < b\big\}$, com $a < b$. Pontos de $\mathbb{R}^2$ que tenham as mesmas coordenadas verticais não são topologicamente distinguíveis. Portanto, esse espaço não é de tipo Kolmogorov, nem do tipo de Fréchet, nem Hausdorff, mas é um espaço simétrico, regular, normal, completamente normal e perfeitamente normal.

E. 34.11 *Exercício*. Justifique todas as afirmativas feitas nos diversos exemplos mencionados acima. ✠

O espaço topológico apresentado no exercício a seguir é usado para exemplificar várias situações exóticas da Topologia Geral (como exemplo, vide Exercício E. 34.13, página 1581).

E. 34.12 *Exercício*. Seja a chamada *reta real com dupla origem* (X, τ), onde X consiste na reta real adicionada de um ponto externo a si $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$, sendo $p \notin \mathbb{R}$, no qual adotamos como topologia τ a topologia gerada pela coleção de todos os conjuntos abertos da topologia usual $\tau_{\mathbb{R}}$ e por todos os conjuntos da forma $\{p\} \cup \big(A \setminus \{0\}\big)$, com $0 \in A \subset \tau_{\mathbb{R}}$, ou seja, a topologia τ adotada em X é $\tau[\mathcal{R}_p]$, onde

$$\mathcal{R}_p \ := \ \tau_{\mathbb{R}} \cup \Big\{\{p\} \cup \big(A \setminus \{0\}\big), \text{ sendo } A \in \tau_{\mathbb{R}} \text{ com } 0 \in A\Big\} \,.$$

Em palavras, os elementos de $\mathcal{R}_p$ são os abertos usuais de $\mathbb{R}$ e os conjuntos obtidos tomando-se as vizinhanças abertas de 0 e substituindo nas mesmas o ponto 0 pelo ponto p (daí dizer-se que esse espaço topológico é a reta real com uma origem dupla, pois os pontos 0 e p têm o mesmo papel em X).

Mostre que $\{0\}$ e $\{p\}$ são τ-fechados mas não são τ-abertos (pois não podem ser escritos como união de intersecções finitas de elementos de $\mathcal{R}_p$).

Mostre que (X, τ) é um espaço de Kolmogorov (T_0) e de Fréchet (T_1), mas não é um espaço Hausdorff, pois 0 e p não podem ser separados por abertos disjuntos.

Mostre que para $a > 0$ os conjuntos $[-a, a]$ e $\{p\} \cup \big([-a, a] \setminus \{0\}\big)$ não são τ-fechados.

No Exercício E. 29.63, página 1424, já havíamos comentado que a reta com dupla origem é um espaço topológico segundo-contável (e, portanto, separável), mas não-Hausdorff. ✠

[12] Robert Henry Sorgenfrey (1915–1996).

• **Caracterizações alternativas**

Enunciemos mais algumas propriedades gerais de alguns dos espaços descritos acima.

Proposição 34.9 *As seguintes propriedades apresentam caracterizações alternativas de alguns do tipos de espaços topológicos definidos acima:*

1. *Um espaço topológico (X, τ) é de tipo T_1 se e somente se para todo $x \in X$ o conjunto $\{x\}$ for τ-fechado.*
2. *Um espaço topológico (X, τ) é de tipo T_2 (de Hausdorff) se e somente se cada ponto de X for a intersecção de todas as vizinhanças fechadas que o contém.*
3. *Um espaço topológico (X, τ) é regular se e somente se para todo o aberto $A \in \tau$ valer a seguinte afirmação: cada $x \in A$ possui uma vizinhança fechada F_x tal que $F_x \subset A$.*
4. *Um espaço topológico (X, τ) é regular se e somente se todo fechado for a intersecção de todas as suas vizinhanças fechadas.*
5. *Um espaço topológico (X, τ) é normal se e somente se para todo o aberto $A \in \tau$ valer a seguinte afirmação: para cada $F \subset A$, fechado, existe uma vizinhança fechada V_F de F tal que $V_F \subset A$.* □

Prova. O item 1 já foi provado acima. Passemos aos demais itens.

Prova de 2. Para $z \in X$ seja $\mathcal{F}_z$ a coleção de todas as vizinhanças fechadas de z e seja $G_z = \bigcap_{F\in\mathcal{F}_z} F$. É claro que G_z contém z e é fechado.

Suponhamos, por contradição, que (X, τ) seja Hausdorff mas que exista $x \in X$ tal que $G_x \setminus \{x\}$ é não-vazio. Então, existe $y \neq x$ em G_x e existem vizinhanças abertas disjuntas A_x e A_y de x e y, respectivamente. O fechado $(A_y)^c$ contém x e contém o aberto A_x, que também contém x. Logo, $(A_y)^c$ é uma vizinhança fechada de x e, portanto, $(A_y)^c \in \mathcal{F}_x$. Logo, $G_x \subset (A_y)^c$, mas como $y \in G_x$, isso é uma contradição, pois $y \notin (A_y)^c$.

Para provar a recíproca, suponhamos agora que para todo $z \in X$ valha $\{z\} = G_z = \bigcap_{F\in\mathcal{F}_z} F$. Sejam $x, y \in X$ distintos mas arbitrários. Como $y \neq x$, deve haver ao menos um $F \in \mathcal{F}_x$ tal que $y \notin F$, pois se $y \in F$ para todo $F \in \mathcal{F}_x$, então $y \in G_x = \{x\}$, contrariando a hipótese que $y \neq x$. Para tal F valem as seguintes afirmações: existe A aberto tal que $x \in A \subset F$ (pois F é uma vizinhança fechada de x) e $y \in F^c$, que é aberto (por ser complemento de um fechado). Logo, A e F^c são dois abertos disjuntos contendo x e y, respectivamente. Como x e y são distintos mas arbitrários, isso provou que (X, τ) é Hausdorff.

Prova de 3. Suponhamos que (X, τ) seja regular e sejam $B \in \tau$ e $x \in B$. Então, x não pertence ao τ-fechado $F = B^c$ e, pela regularidade de (X, τ), existem abertos disjuntos $A_x \ni x$ e $A_F \supset F$. Agora, como A_x e A_F são disjuntos, concluímos que $x \in A_x \subset A_F^c \subset F^c = B$. Como A_F^c que é fechado isso provou que x possui uma vizinhança fechada (A_F^c) inteiramente contida em B.

Suponhamos agora que (X, τ) tenha a propriedade que para cada $A \in \tau$ e cada $x \in A$ haja uma vizinhança fechada F_x tal que $F_x \subset A$. Se $z \in X$ não pertence a um τ-fechado F, então $z \in F^c$, que é τ-aberto e, portanto, existe uma vizinhança fechada F_z de z tal que $x \in F_z \subset F^c$. Como F_z é uma vizinhança de z, existe um aberto A_z tal que $z \in A_z \subset F_z$. Como $F_z \subset F^c$, concluímos que o aberto F_z^c contém F mas é disjunto de A_z, pois $A_z \subset F_z$. Resumindo, provamos que $x \in A_x$, $F \subset F_z^c$ com A_x e F_z^c sendo abertos disjuntos. Isso provou que (X, τ) é regular.

Prova de 4. Para H τ-fechado seja $\mathcal{F}_H$ a coleção de todas as vizinhanças fechadas de H e seja $G_H = \bigcap_{F\in\mathcal{F}_H} F$. É claro que G_H contém H e é fechado.

Suponhamos, por contradição, que (X, τ) seja regular mas que exista $H \in X$ tal que $G_H \setminus H \neq \emptyset$. Então, existe $y \notin H$ em G_H e existem vizinhanças abertas disjuntas A_y e A_H de x e H, respectivamente. O fechado $(A_y)^c$ contém H e contém o aberto A_H, que também contém H. Logo, $(A_y)^c$ é uma vizinhança fechada de H e, portanto, $(A_y)^c \in \mathcal{F}_H$. Logo, $G_H \subset (A_y)^c$, mas como $y \in G_H$, isso é uma contradição, pois $y \notin (A_y)^c$.

Para provar a recíproca, suponhamos agora que para todo H τ-fechado valha $H = G_H = \bigcap_{F\in\mathcal{F}_H} F$. Seja $y \in X$ e H um τ-fechado com $y \notin H$, arbitrários. Como $y \notin H$, deve haver ao menos um $F \in \mathcal{F}_H$ tal que $y \notin F$, pois se $y \in F$ para todo $F \in \mathcal{F}_H$, então $y \in G_H = H$, contrariando a hipótese que $y \notin H$. Para tal F valem as seguintes afirmações: existe A aberto tal que $H \subset A \subset F$ (pois F é uma vizinhança fechada de H) e $y \in F^c$, que é aberto (por ser complemento de um fechado). Logo, A e F^c são dois abertos disjuntos contendo H e y, respectivamente. Como H e y são arbitrários com $H \not\ni y$, isso provou que (X, τ) é regular.

Prova de 5. Seja (X, τ) normal, B um τ-aberto e seja F um τ-fechado com $F \subset B$. F e B^c são fechados disjuntos e, pela normalidade de (X, τ), existem vizinhanças abertas disjuntas A_F e A_{B^c} de F e B^c, respectivamente. Isso implica que $(A_{B^c})^c$ contém A_F e, portanto, é uma vizinhança fechada de F. Como $A_{B^c} \supset B^c$, vale também $(A_{B^c})^c \subset B$, que é o que queríamos provar;

Para provar a recíproca, suponhamos agora que para todo aberto $A \in \tau$ e todo $F \subset A$, fechado, existir uma vizinhança fechada V_F de F tal que $V_F \subset A$. Sejam G e F dois fechados disjuntos. Então G^c é um aberto que contém o fechado F e, portanto, existe uma vizinhança fechada V_F de F com $V_F \subset G^c$. Como V_F é uma vizinhança fechada de F existe um aberto A_F com $F \subset A_F \subset V_F$. Porém, $(V_F)^c$ é um aberto que contém G e que é disjunto de A_F (pois $A_F \subset V_F$). Como F e G são fechados disjuntos arbitrários, isso provou que (X, τ) é normal. ■

• **Mais caracterizações alternativas de espaços Hausdorff, regulares ou normais**

As seguintes proposições são elementares, mas apresentam caracterizações úteis de espaços regulares e de espaços normais, respectivamente. Ambas serão empregadas amiúde no que segue.

Proposição 34.10 *Seja (X, τ) um espaço topológico. Então valem as seguintes afirmativas:*

I. *O espaço (X, τ) é Hausdorff se e somente se para cada par $x, y \in X$ com $x \neq y$ for possível encontrar um τ-aberto A tal que $x \in A \subset \overline{A} \subset \{y\}^c$.*

II. *O espaço (X, τ) é regular se e somente se para cada par (x, G) com $x \in X$ e G τ-fechado com $x \notin G$ for possível encontrar um τ-aberto A tal que $x \in A \subset \overline{A} \subset G^c$.*

II. *O espaço (X, τ) é normal se e somente se para cada par de τ-fechados disjuntos F e G for possível encontrar um τ-aberto A tal que $F \subset A \subset \overline{A} \subset G^c$.* □

Prova. **Parte I.** Se (X, τ) é Hausdorff, existem τ-abertos A e B tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. Essa última propriedade afirma que $A \subset B^c$, que é um τ-fechado. Logo, $\overline{A} \subset B^c$. Como $y \in B$, vale também que $y \notin \overline{A}$. Obtemos assim, que $x \in A \subset \overline{A} \subset \{y\}^c$.

Vamos agora demonstrar a recíproca. Seja A um τ-aberto tal que $\{x\} \subset A \subset \overline{A} \subset \{y\}^c$. Como $\overline{A} \subset \{y\}^c$ temos que $y \in \left(\overline{A}\right)^c$. Agora, $B \equiv \left(\overline{A}\right)^c$ é um τ-aberto e $A \cap B = A \cap \left(\overline{A}\right)^c \subset \overline{A} \cap \left(\overline{A}\right)^c = \emptyset$. Assim, os conjuntos A e B são τ-abertos, satisfazem $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$, provando que (X, τ) é Hausdorff.

Parte II. Se (X, τ) é regular, existem τ-abertos A e B tais que $\{x\} \subset A$, $G \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$. Essa última propriedade afirma que $A \subset B^c$, que é um τ-fechado. Logo, $\overline{A} \subset B^c$. Como $G \subset B$, vale também que $B^c \subset G^c$. Obtemos, assim, que $\overline{A} \subset G^c$. Naturalmente, tem-se por definição que $A \subset \overline{A}$ e concluímos que $\{x\} \subset A \subset \overline{A} \subset G^c$.

Vamos agora demonstrar a recíproca. Seja A um τ-aberto tal que $\{x\} \subset A \subset \overline{A} \subset G^c$. Como $\overline{A} \subset G^c$ temos que $G \subset \left(\overline{A}\right)^c$. Agora, $B \equiv \left(\overline{A}\right)^c$ é um τ-aberto e $A \cap B = A \cap \left(\overline{A}\right)^c \subset \overline{A} \cap \left(\overline{A}\right)^c = \emptyset$. Assim, os conjuntos A e B são τ-abertos, satisfazem $\{x\} \subset A$, $G \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$, provando que (X, τ) é regular.

Parte III. Se (X, τ) é normal, existem τ-abertos A e B tais que $F \subset A$, $G \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$. Essa última propriedade afirma que $A \subset B^c$, que é um τ-fechado. Logo, $\overline{A} \subset B^c$. Como $G \subset B$, vale também que $B^c \subset G^c$. Obtemos, assim, que $\overline{A} \subset G^c$. Naturalmente, tem-se por definição que $A \subset \overline{A}$ e concluímos que $F \subset A \subset \overline{A} \subset G^c$.

Vamos agora demonstrar a recíproca. Seja A um τ-aberto tal que $F \subset A \subset \overline{A} \subset G^c$. Como $\overline{A} \subset G^c$ temos que $G \subset \left(\overline{A}\right)^c$. Agora, $B \equiv \left(\overline{A}\right)^c$ é um τ-aberto e $A \cap B = A \cap \left(\overline{A}\right)^c \subset \overline{A} \cap \left(\overline{A}\right)^c = \emptyset$. Assim, os conjuntos A e B são τ-abertos, satisfazem $F \subset A$, $G \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$, provando que (X, τ) é normal. ■

• **Espaços Hausdorff e a topologia produto**

A Proposição 34.11, que segue logo adiante, apresenta mais uma caracterização útil de espaços Hausdorff em termos de propriedades da topologia produto, introduzida na Seção 34.6, página 1621. Para prová-la usaremos o seguinte resultado prévio:

Lema 34.1 *Seja espaço topológico (X, τ) e seja $\Delta \subset X \times X$ o chamado* conjunto diagonal $\Delta := \{(x, x), x \in X\}$. *Suponhamos que Δ seja fechado na topologia produto $\tau \times \tau$. Afirmamos que se $(x, y) \in \Delta^c$, então existem τ-abertos A e B tais que $(x, y) \in A \times B \subset \Delta^c$.* □

Prova. A topologia produto $\tau\times\tau$ é, por definição, gerada por conjuntos da forma $A'\times B'$ com A' e B' sendo τ-abertos. Logo, se Δ^c é $\tau\times\tau$-aberto, sabemos pela Proposição 29.3, página 1409, que Δ^c é a união de conjuntos formados por intersecções finitas de conjuntos do tipo $A'\times B'$ com A' e B' sendo τ-abertos. Assim, podemos afirmar que se $(x,\ y)\in\Delta^c$, então existem τ-abertos A_k e B_k, $k=1,\ \ldots,\ n$, com $(x,\ y)\in\bigcap_{k=1}^n\big(A_k\times B_k\big)\subset\Delta^c$. Naturalmente, isso implica que $(x,\ y)\in A_k\times B_k$ para todo k e, portanto, valem $x\in\bigcap_{k=1}^n A_k$ e $y\in\bigcap_{k=1}^n B_k$. Assim, temos $(x,\ y)\in A\times B$ com $A\equiv\bigcap_{k=1}^n A_k$ e $B\equiv\bigcap_{k=1}^n B_k$, ambos evidentemente τ-abertos. Note-se, porém, que $A\cap B=\emptyset$, pois $A\cap B=\big(\bigcap_{k=1}^n A_k\big)\cap\big(\bigcap_{k=1}^n B_k\big)=\bigcap_{k=1}^n\big(A_k\cap B_k\big)$ e se existisse $z\in A\cap B$ teríamos $z\in A_k\cap B_k$ para todo k, implicando que $(z,z)\in A_k\times B_k$ para todo k, contradizendo o fato que $\bigcap_{k=1}^n\big(A_k\times B_k\big)\subset\Delta^c$. O fato que $A\cap B=\emptyset$ significa que $A\times B\subset\Delta^c$, completando a prova. ■

Proposição 34.11 *Um espaço topológico $(X,\ \tau)$ é do tipo Hausdorff se e somente se o conjunto diagonal $\Delta:=\big\{(x,\ x),\ x\in X\big\}\subset X\times X$ for fechado na topologia produto $\tau\times\tau$.* □

Prova. Vamos supor que $(X,\ \tau)$ seja do tipo Hausdorff. Sejam $x,\ y\in X$ com $x\neq y$. Evidentemente, $(x,\ y)=\Delta^c$ e, pela propriedade Hausdorff, existem abertos disjuntos A_x e A_y com $x\in A_x$ e $y\in A_y$. Como $A_x\cap A_y=\emptyset$, segue que $A_x\times A_y\subset\Delta^c$ pois, de outra forma, haveria $z\in X$ com $(z,\ z)\in A_x\times A_y$, implicando que $z\in A_x$ e $z\in A_y$, uma contradição. É evidente, portanto, que podemos escrever $\Delta^c=\bigcup_{(x,\,y)\in\Delta^c}A_x\times A_y$. Como $A_x\times A_y$ é um aberto da topologia produto $\tau\times\tau$, segue que Δ^c é aberto nessa topologia.

Provemos agora a recíproca, supondo que Δ^c é um aberto da topologia produto $\tau\times\tau$. Sejam $x,\ y\in X$ com $x\neq y$. Então $(x,\ y)\in\Delta^c$ e, pelo Lema 34.1, página 1566, existem τ-abertos A e B com $A\times B\subset\Delta^c$ e tais que $(x,\ y)\in A\times B$. Isso afirma que $x\in A$ e $y\in B$, mas observe-se que $A\cap B=\emptyset$, pois $A\times B\subset\Delta^c$ implica que A e B não podem ter elementos comuns. Isso estabeleceu que $(X,\ \tau)$ é Hausdorff. ■

• **Espaços normais e recobrimentos finitos**

Tratemos agora de um corolário da Proposição 34.10 que terá especial relevância na discussão de propriedades de espaços topológicos compactos da Seção 34.3, página 1577.

Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico. Dizemos que uma coleção finita de τ-abertos $\{A_1,\ \ldots,\ A_n\}$ é um *recobrimento finito* de X por τ-abertos se $X=A_1\cup\cdots\cup A_n$.

Proposição 34.12 *Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico normal e suponhamos que X possua um recobrimento finito por τ-abertos $\{A_1,\ \ldots,\ A_n\}$. Então X possui também um segundo recobrimento por τ-abertos $\{B_1,\ \ldots,\ B_n\}$ (com o mesmo número de elementos que o anterior) tal que $\overline{B_k}\subset A_k$ para todo $k=1,\ \ldots,\ n$.* □

Prova. Seja o conjunto τ-fechado $F_1:=\Big(A_2\cup\cdots\cup A_n\Big)^c=A_2^c\cap\cdots\cap A_n^c$. Temos que $F_1\cap A_1^c=A_1^c\cap\cdots\cap A_n^c=\Big(A_1\cup\cdots\cup A_n\Big)^c=X^c=\emptyset$, o que significa que F_1 e A_1^c são dois τ-fechados disjuntos.

Pela Proposição 34.10, página 1566, existe um τ-aberto B_1 tal que $F_1\subset B_1\subset\overline{B_1}\subset A_1$. Afirmamos que $\{B_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n\}$ é um recobrimento de X por τ-abertos. De fato, para cada $x\in X$ tem-se $x\in A_2\cup\cdots\cup A_n$ ou $x\in\Big(A_2\cup\cdots\cup A_n\Big)^c=F_1\subset B_1$, provando que $x\in B_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.

A observação do parágrafo anterior coloca-nos de volta à situação de partida e podemos agora considerar o τ-fechado $F_2=\Big(B_1\cup A_3\cup\cdots\cup A_n\Big)^c$, do que inferiremos a existência de um τ-aberto B_2 tal que $F_2\subset B_2\subset\overline{B_2}\subset A_2$ e tal que $\{B_1,\ B_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_n\}$ é um recobrimento de X por τ-abertos. Por indução finita, concluímos a existência de n τ-abertos $B_1,\ \ldots,\ B_n$ cuja união recobre X e que satisfazem $\overline{B_k}\subset A_k$ para todo $k=1,\ \ldots,\ n$. ■

• **Espaços regulares segundo-contáveis são normais**

Conforme a noção que introduzimos na Seção 29.2.3, página 1409, se τ é uma topologia, uma coleção de abertos $\mathcal{B}\subset\tau$ é dita ser uma *base* de τ se todo τ-aberto puder ser escrito como união de elementos de $\mathcal{B}$. Na Seção 29.4, página 1421, introduzimos a noção de espaço topológico segundo-contável: um espaço topológico X é dito ser um *espaço topológico segundo-contável* se possuir uma base contável.

O seguinte teorema, devido a Tikhonov, mostra que em espaços segundo-contáveis a condição de regularidade implica a de normalidade. Esse resultado é usado na nossa discussão sobre metrizabilidade de espaços topológicos da Seção 34.7, página 1627.

Teorema 34.2 *Se $(X,\ \tau)$ é um espaço topológico regular e segundo-contável, então $(X,\ \tau)$ é normal.* □

Prova. Seja $\mathcal{B}=\{B_n\in\tau,\ n\in\mathbb{N}\}$ uma base contável de $(X,\ \tau)$ e sejam $F,\ G$ dois τ-fechados disjuntos.

Pela Proposição 34.10, página 1566, existe para cada $f\in F$ um τ-aberto A_f tal que $f\in A_f\subset\overline{A_f}\subset G^c$. É claro que $F\subset\bigcup_{f\in F}A_f$. Cada A_f é τ-aberto, e portanto, pode ser escrita como união de elementos de $\mathcal{B}$. Seja $\mathcal{B}_F$ a subcoleção de elementos de $\mathcal{B}$ que estão contidos em algum A_f: $\mathcal{B}_F:=\{B_n\in\mathcal{B}|\ B_n\subset A_f$ para algum $f\in F\}$. Claro está que $\mathcal{B}_F$ é contável (por ser subconjunto de $\mathcal{B}$, que é contável) e podemos escrever $\mathcal{B}_F=\{B_n\in\mathcal{B},\ n\in N_F\}$ pra algum $N_F\subset\mathbb{N}$. É claro também que $\bigcup_{f\in F}A_f=\bigcup_{n\in N_F}B_n$. A cada $n\in N_F$ podemos associar $f_n\in F$ tal que $B_n\subset A_{f_n}$. Assim, valerá $\bigcup_{f\in F}A_f\subset\bigcup_{n\in N_F}B_n\subset\bigcup_{n\in N_F}A_{f_n}\subset\bigcup_{f\in F}A_f$, o que implica $\bigcup_{f\in F}A_f=\bigcup_{n\in N_F}A_{f_n}$. Consequentemente, $F\subset\bigcup_{n\in N_F}A_{f_n}$ (esse pequeno resultado é devido a Lindelöf).

Para simplificar a notação, vamos escrever o conjunto contável $\{A_{f_n}\in\tau,\ n\in N_F\}$ na forma $\{U_n\in\tau,\ n\in\mathbb{N}\}$.

Resumindo nossos resultados, provamos que existe uma coleção <u>contável</u> de τ-abertos $\{U_n\in\tau,\ n\in\mathbb{N}\}$ satisfazendo $F\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n$ e $\overline{U_n}\subset G^c$ para todo $n\in\mathbb{N}$. De forma totalmente análoga, trocando os papeis de F e G, concluímos que existe uma coleção <u>contável</u> de τ-abertos $\{V_n\in\tau,\ n\in\mathbb{N}\}$ satisfazendo $G\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V_n$ e $\overline{V_n}\subset F^c$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Definamos agora para cada $n\in\mathbb{N}$ os conjuntos $C_n:=U_n\cap\big(\overline{V_1}\big)^c\cap\cdots\cap\big(\overline{V_n}\big)^c$ e $D_n:=V_n\cap\big(\overline{U_1}\big)^c\cap\cdots\cap\big(\overline{U_n}\big)^c$. É claro que cada C_n e cada D_n é τ-aberto. Afirmamos que valem os seguintes fatos:

1. $F\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}C_n$,
2. $G\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}D_n$,
3. os abertos $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}C_n$ e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}D_n$ são disjuntos.

Para provar *1*, observemos que como $F\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n$, então se $f\in F$ existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $f\in U_m$. Ao mesmo tempo, como $\overline{V_n}\subset F^c$ para todo $n\in\mathbb{N}$, segue que $f\in F\subset\big(\overline{V_n}\big)^c$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Isso afirma que $f\in U_m\cap\big(\overline{V_1}\big)^c\cap\cdots\cap\big(\overline{V_m}\big)^c=C_m$, provando que $F\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}C_n$.

A prova de *2* é análoga, devido ao papel simétrico de F e G, de U_n e V_n e de C_n e D_n.

Se $x\in\bigcup_{a\in\mathbb{N}}C_a$, então existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $x\in C_m$. Analogamente, se $x\in\bigcup_{b\in\mathbb{N}}D_b$, então existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $x\in D_n$. Portanto, para provar *3* é suficiente provar que vale $C_m\cap D_n=\emptyset$ para todos $m,\ n\in\mathbb{N}$.

Devido ao papel simétrico que os conjuntos C_n e D_n possuem, é suficiente para tal provar que para cada $m\in\mathbb{N}$ vale $C_m\cap D_n=\emptyset$ para todo $n\geq m$. Agora, $C_m=U_m\cap\big(\overline{V_1}\big)^c\cap\cdots\cap\big(\overline{V_m}\big)^c$ e $D_n=V_n\cap\big(\overline{U_1}\big)^c\cap\cdots\cap\big(\overline{U_n}\big)^c$. Agora, U_m ocorre nas intersecções de C_m e $\big(\overline{U_m}\big)^c$ ocorre nas intersecções de D_n (pois $n\geq m$,). Logo, $C_m\cap D_n\subset U_m\cap\big(\overline{U_m}\big)^c\subset\overline{U_m}\cap\big(\overline{U_m}\big)^c=\emptyset$. Isso provou o item *3*. Ora, os itens *1*, *2* e *3* dizem que F e G podem ser separados por abertos disjuntos, estabelecendo que $(X,\ \tau)$ é normal. ■

Corolário 34.1 *Um espaço topológico $(X,\ \tau)$ é Hausdorff, segundo-contável e regular se e somente se for Hausdorff, segundo-contável e normal.* □

Prova. Ser Hausdorff e normal implica ser Hausdorff e regular (vide (34.11)). Pelo Teorema 34.2, ser segundo-contável e regular implica ser segundo-contável e normal. ■

34.2.3 O Lema de Urysohn

O propósito de uma classificação de espaços topológicos como a que apresentamos acima, concernente a propriedades de separação, é permitir delinear o quadro de validade de certas propriedades específicas de interesse. Isso é muito bem caracterizado no caso de espaços normais, onde uma propriedade especial pode ser demonstrada com bastante generalidade, o chamado *Lema de Urysohn*[13], que enunciaremos e demonstraremos na presente seção.

Em diversas situações somos colocados diante do problema de encontrar uma função real contínua f que assuma um valor constante, digamos 0, em um conjunto A e um outro valor constante, digamos 1, em um outro conjunto B disjunto de A. Como f é contínua os conjuntos $f^{-1}(\{0\})$ e $f^{-1}(\{1\})$ devem ser fechados, disjuntos, e conter A e B, respectivamente. Assim, se uma tal função for encontrada ela certamente será igual a 0 em todo fecho $\overline{A}$ de A e certamente será igual a 1 em todo fecho $\overline{B}$ de B, sendo que $\overline{A}$ e $\overline{B}$ devem ser disjuntos. Portanto, não há perda de generalidade em reformularmos o problema da seguinte forma: dado um espaço topológico (X, τ) e dados dois conjuntos τ-fechados disjuntos F e G contidos em X, quando e de que forma é possível encontrar uma função real contínua tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in G$? Esse problema iremos denominá-lo *problema de Urysohn*. É de se notar que se uma tal função contínua f existir os conjuntos $f^{-1}\big([0, 1/3)\big)$ e $f^{-1}\big((2/3, 1]\big)$ são τ-abertos, disjuntos e conterão F e G, respectivamente. Disso concluímos que para que o problema de Urysohn tenha solução para todos τ-fechados disjuntos F e G do espaço topológico X é necessário que F e G tenham a propriedade seguinte: existem τ-abertos tais que $A_F \supset F$ e $A_G \supset G$ e tais que $A_F \cap A_G = \emptyset$, ou seja, é necessário que o espaço topológico (X, τ) seja normal. O Lema de Urysohn, demonstrado por volta de 1924, afirma que essa condição não é apenas necessária para a existência de uma função f com as propriedades citadas para cada F e G τ-fechados disjuntos, mas é também suficiente.

O Lema de Urysohn contém o que provavelmente é uma das afirmações não-triviais mais simples da topologia geral e certamente uma das mais profundas. O Lema de Urysohn também induz a definição da noção de espaços topológicos paracompactos, a qual é de relevância, dentre outras, na teoria das variedades topológicas (vide Capítulo 35, página 1640). Na Seção 34.2.3.1, página 1573, demonstraremos uma importante generalização do Lema de Urysohn, o chamado Teorema da Extensão de Tietze e discutiremos alguns de seus corolários. Esses resultados encontram diversas aplicações em Análise e na Geometria Diferencial. Uma aplicação do Lema de Urysohn na construção de partições da unidade em espaços compactos Hausdorff, um resultado importante na teoria das variedades topológicas, será apresentada no Teorema 34.22, página 1606. Por fim, mencionamos a importância do Lema de Urysohn para os teoremas de metrizabilidade que estudaremos na Seção 34.7.1, página 1629, teoremas esses que fornecem condições para que um espaço topológico seja métrico. Vide também o uso do Lema de Urysohn feito na demonstração do teorema de mergulho de espaços Hausdorff, segundo contáveis e normais, Teorema 34.32, página 1630.

• O resultado preparatório

Para cada $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ seja J_n o conjunto $J_n := \left\{\frac{j}{2^n},\ j = 0, \ldots, 2^n\right\} = \left\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, 1\right\}$ composto por $2^n + 1$ elementos de $[0, 1]$. Seja definido $J := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} J_n \subset \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. As seguintes afirmações serão usadas no que segue:

1. $J_p \subset J_q$ para todos $p, q \in \mathbb{N}_0$ com $p \leq q$.
2. Para cada par $r, s \in J$ existe um $m \equiv m(r, s) \in \mathbb{N}_0$ tal que $r \in J_m$ e $s \in J_m$.
3. J é um conjunto enumerável e denso em $[0, 1]$.

O item 1 segue de

$$J_{n+1} = \left\{\frac{j}{2^{n+1}},\ j = 0, \ldots, 2^{n+1}\right\} \supset \left\{\frac{2k}{2^{n+1}},\ k = 0, \ldots, 2^n\right\} = \left\{\frac{k}{2^n},\ k = 0, \ldots, 2^n\right\} = J_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. O item 2 é evidente pelo item 1. A prova do item 3 fica como exercício.

O lema preparatório a seguir é de importância central para a demonstração do Lema de Urysohn.

Lema 34.2 *Seja (X, τ) um espaço topológico normal. Sejam $F, G \subset X$ dois conjuntos τ-fechados não-vazios e disjuntos. Então, existe uma família de τ-abertos $\{A(r),\ r \in J\} \subset \tau$ tal que $F \subset A(0)$, $G^c = A(1)$ e $A(r) \subset \overline{A(r)} \subset A(s)$ para todos $r, s \in J$ com $r < s$. Para uma tal família valerá $\bigcup_{\substack{t \in J \\ r \leq t \leq s}} A(t) = A(s)$ para todos $r, s \in J$ com $r \leq s$ e, consequentemente, $\bigcup_{r \in J} A(r) = A(1) = G^c$.* □

[13] Pavel Samuilovich Urysohn (1898–1924). Urysohn morreu tragicamente, afogado na costa da Bretanha.

Prova. Vamos construir uma família de τ-abertos $\{A(r),\ r \in J\} \subset \tau$ com as seguintes propriedades:

1. $F \subset A(0)$ e $G^c = A(1)$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ vale
$$\overline{A\left(\frac{j}{2^n}\right)} \subset A\left(\frac{j}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \quad \text{para todo } j = 0, \ldots, 2^n - 1 . \tag{34.12}$$
3. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ vale
$$\overline{A\left(\frac{j}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)} \subset A\left(\frac{j+1}{2^n}\right) \quad \text{para todo } j = 0, \ldots, 2^n - 1 . \tag{34.13}$$

De (34.12) e (34.13) segue que cada $n \in \mathbb{N}_0$ vale

$$\overline{A\left(\frac{j}{2^n}\right)} \subset A\left(\frac{j+1}{2^n}\right) \quad \text{para todo } j = 0, \ldots, 2^n - 1 , \tag{34.14}$$

pois

$$\overline{A\left(\frac{j}{2^n}\right)} \overset{(34.12)}{\subset} A\left(\frac{j}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \subset \overline{A\left(\frac{j}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)} \overset{(34.13)}{\subset} A\left(\frac{j+1}{2^n}\right)$$

para todo $j = 0, \ldots, 2^n - 1$. As condições (34.12)-(34.13) são suficientes para garantir que $\overline{A(r)} \subset A(s)$ para todos $r, s \in J$ com $r < s$, como desejamos. De fato, seja $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $r \in J_m$ e $s \in J_m$. Sejam $a, b \in \{0, \ldots, 2^m\}$, tais que $r = \frac{a}{2^m}$ e $s = \frac{b}{2^m}$. Como supomos também que $r < s$, teremos $a < b$. Portanto,

$$\overline{A(r)} = \overline{A\left(\frac{a}{2^m}\right)} \overset{(34.14)}{\subset} A\left(\frac{a+1}{2^m}\right) \subset \overline{A\left(\frac{a+1}{2^m}\right)} \overset{(34.14)}{\subset} A\left(\frac{a+2}{2^m}\right) \subset \cdots \subset \overline{A\left(\frac{b-1}{2^m}\right)} \overset{(34.14)}{\subset} A\left(\frac{b}{2^m}\right) = A(s) .$$

Passemos agora à construção de uma família com as propriedades listadas acima. Comecemos com os abertos $\{A(r),\ r \in J_0\}$, sendo que $J_0 = \{0, 1\}$. Como X é normal e F e G são fechados disjuntos, existem vizinhanças abertas disjuntas A_F e A_G de F e G, respectivamente. Como $A_F \cap A_G = \emptyset$, vale $A_F \subset (A_G)^c$, que é fechado. Logo, $\overline{A_F} \subset (A_G)^c \subset G^c$. Portanto, tomando $A(0) = A_F$ e $A(1) = G^c$ teremos $\overline{A(0)} \subset A(1)$. Essa relação corresponde a (34.14) para o caso $n = 0$.

Passemos agora à família $\{A(r),\ r \in J_1\}$, sendo que $J_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Como $A(0)$ e $A(1)$ já foram definidos, devemos apenas procurar $A(1/2)$ tal que (34.12) e (34.13) sejam satisfeitas. Sejam $F_1 := \overline{A(0)} \subset A(1)$ e $G_1 := (A(1))^c = G$. É claro que F_1 e G_1 são fechados e $F_1 \cap G_1 = \overline{A(0)} \cap (A(1))^c \subset A(1) \cap (A(1))^c = \emptyset$. Assim, F_1 e G_1 são fechados disjuntos e podemos novamente apelar à condição de normalidade e afirmar que existem vizinhanças abertas disjuntas A_{F_1} e A_{G_1} de F_1 e G_1, respectivamente. Como $A_{F_1} \subset (A_{G_1})^c$, um fechado, valerá $\overline{A_{F_1}} \subset (A_{G_1})^c$ e combinando esses resultados, teremos $\overline{A(0)} = F_1 \subset A_{F_1} \subset \overline{A_{F_1}} \subset (A_{G_1})^c \subset G_1^c = A(1)$. Tomando $A(1/2) := A_{F_1}$ a linha anterior provou que $\overline{A(0)} \subset A(1/2)$ e que $\overline{A(1/2)} \subset A(1)$, verificando as condições (34.12) e (34.13) para $n = 1$.

Vamos agora proceder indutivamente e supor que para algum $n \geq 1$ a família $\{A(r),\ r \in J_n\}$ satisfazendo (34.12) e (34.13) (e, portanto, (34.14)) tenha sido obtida e vamos com a mesma obter a família $\{A(r),\ r \in J_{n+1}\}$. Como $J_n \subset J_{n+1}$, necessitamos apenas dos elementos de $A(r)$ com $r \in J_{n+1} \setminus J_n$, ou seja, dos abertos $A\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)$ para $k = 0, \ldots, 2^n - 1$.

As condições (34.12) e (34.13) exigem que tenhamos

$$\overline{A\left(\frac{k}{2^n}\right)} \subset A\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \quad \text{e} \quad \overline{A\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)} \subset A\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \tag{34.15}$$

para todo $k = 0, \ldots, 2^n - 1$. Sejam $F_{k,n} := \overline{A\left(\frac{k}{2^n}\right)}$ e $G_{k,n} := A\left(\frac{k+1}{2^n}\right)^c$. É claro que $F_{k,n}$ e $G_{k,n}$ são fechados e

$$F_{k,n} \cap G_{k,n} = \overline{A\left(\frac{k}{2^n}\right)} \cap A\left(\frac{k+1}{2^n}\right)^c \overset{(34.14)}{\subset} A\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \cap A\left(\frac{k+1}{2^n}\right)^c = \emptyset .$$

Assim, $F_{k,\,n}$ e $G_{k,\,n}$ são fechados disjuntos e podemos novamente apelar à condição de normalidade e afirmar que existem vizinhanças abertas disjuntas $A_{F_{k,\,n}}$ e $A_{G_{k,\,n}}$ de $F_{k,\,n}$ e $G_{k,\,n}$, respectivamente. Como $A_{F_{k,\,n}} \subset (A_{G_{k,\,n}})^c$, um fechado, valerá $\overline{A_{F_{k,\,n}}} \subset \left(A_{G_{k,\,n}}\right)^c$ e combinando esses resultados, teremos

$$\overline{A\left(\frac{k}{2^n}\right)} = F_{k,\,n} \subset A_{F_{k,\,n}} \subset \overline{A_{F_{k,\,n}}} \subset \left(A_{G_{k,\,n}}\right)^c \subset \left(G_{k,\,n}\right)^c = A\left(\frac{k+1}{2^n}\right) .$$

Tomando $A\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) := A_{F_{k,\,n}}$ a linha anterior provou que $\overline{A\left(\frac{k}{2^n}\right)} \subset A\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)$ e que $\overline{A\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)} \subset A\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$, verificando as condições (34.15).

A última afirmação do enunciado é de demonstração elementar. Para uma família de abertos $\{A(r),\ r \in J\}$ com as propriedades acima teremos $A(t) \subset \overline{A(t)} \subset A(t')$ para todos $t,\ t' \in J$ com $t < t'$ e, portanto, $\bigcup_{\substack{t\in J\\ r\leq t\leq s}} A(t) = A(s)$ para todos $r,\ s \in J$ com $r \leq s$. Em particular, para $r = 0$ e $s = 1$, teremos $\bigcup_{t\in J} A(t) = A(1) = G^c$. ■

Passemos agora ao nosso principal objetivo na corrente seção.

• **Enunciado e demonstração do Lema de Urysohn**

Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico e suponhamos que para um certo par de fechados disjuntos $F,\ G \subset X$ exista uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ que os separa, ou seja, tal que $f^{-1}(\{0\}) \supset F$ e $f^{-1}(\{1\}) \supset G$. Então, $A_F := f^{-1}([0,\ 1/3))$ e $A_G := f^{-1}((1/3,\ 1])$ são dois abertos disjuntos tais que $F \subset A_F$ e $G \subset A_G$. Concluímos que se $(X,\ \tau)$ for um espaço topológico onde todo par de fechados disjuntos for separado por uma função, então $(X,\ \tau)$ é normal. O importante resultado que apresentamos a seguir afirma que a recíproca dessa afirmação é também verdadeira.

Lema 34.3 (Lema de Urysohn) *Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico normal. Sejam $F,\ G \subset X$ dois conjuntos τ-fechados não-vazios e disjuntos. Então, existe uma função <u>contínua</u> $f : X \to [0,\ 1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in G$.* □

Antes de passarmos à demonstração façamos algumas observações. Reunindo o enunciado do Lema de Urysohn e o comentário do parágrafo que antecede seu enunciado, reconhecemos que a existência de funções que separam fechados disjuntos é condição necessária e suficiente para um espaço ser normal. Uma função f com as propriedades descritas no Lema de Urysohn é dita ser uma *função de Urysohn*. Na Proposição 34.7, página 1560, apresentamos a forma explícita de uma possível função de Urysohn para o caso de espaços métricos, a saber, a função definida em (34.10).

Demonstração do Lema 34.3. A demonstração será feita construindo-se indutivamente uma função $f : X \to [0,\ 1]$ específica satisfazendo $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in G$, e constando-se, ao final, que trata-se de uma função contínua.

Pelo Lema 34.2, página 1569, existe uma família de τ-abertos $\{A(r),\ r \in J\} \subset \tau$ tal que $F \subset A(0)$, $G^c = A(1)$, $A(r) \subset \overline{A(r)} \subset A(s)$ para todos $r,\ s \in J$ com $r < s$, sendo que $\bigcup_{r\in J} A(r) = G^c$.

Vamos definir f de forma que $f(x) := 1$ para todo $x \in G$, como desejado. Resta-nos definir $f(x)$ para $x \in G^c$. Como comentamos, $\bigcup_{r\in J} A(r) = G^c$ e, portanto, cada $x \in G^c$ pertence a pelo menos um aberto $A(r)$, $r \in J$. Com isso, podemos definir, para $x \in G^c$,

$$f(x) := \inf\Big\{r \in J|\ x \in A(r)\Big\} .$$

Note-se que se $x \in F$ teremos $f(x) = 0$, já que $F \subset A(0)$. Tudo o que resta a fazer é demonstrar que a função $f : X \to [0,\ 1]$, definida acima, é contínua.

De acordo com a definição de continuidade **DC 4**, página 1490, é suficiente provarmos que f é contínua em cada ponto $x_0 \in X$. Há três casos a tratar:

1. *Caso* $f(x_0) = 0$.

   Como $f(x_0) = 0$, então $x_0 \in G^c$, o que significa dizer que x_0 pertence a algum dos conjuntos $A(s)$, com $s \in J$, $0 \leq r \leq 1$. Dado que $f(x_0) = \inf\{r \in J|\ A(r) \ni x_0\} = 0$ então, como $A(0) \subset A(r) \subset A(s)$ para todos $r,\ s \in J$ com $r < s$, segue que $x_0 \in G^c$ e que $x_0 \in \left(\bigcap_{\substack{r\in J\\ r>0}} A(r)\right)$. Logo, existe $r_0 \in J$, $r_0 > 0$, tal que $x_0 \in A(r)$ para todo $r \leq r_0$, $r \in J$.

   Se B é uma vizinhança aberta de $f(x_0) = 0$ então, pela definição de conjuntos abertos em espaços métricos, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que B contém todos os abertos da forma $B_\epsilon = [0,\ \epsilon)$ para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Vamos escolher ϵ_1 satisfazendo $0 < \epsilon_1 < \min\{r_0,\ \epsilon_0\}$, de forma que $B_{\epsilon_1} \subset B$. Seja $r_1 \in J$ tal que $r_1 < \epsilon_1$. Como observamos no parágrafo anterior, temos também $x_0 \in A(r_1)$, pois $r_1 < \epsilon_1 < r_0$. Claro também está que para todo $x \in A(r_1)$ teremos $f(x) \leq r_1$, ou seja, $f(A(r_1)) \subset B_{\epsilon_1}$. Logo, $f^{-1}(B) \supset f^{-1}(B_{\epsilon_1}) \supset A(r_1) \ni x_0$. Assim, concluímos que para toda vizinhança aberta B de $f(x_0)$ a pré-imagem $f^{-1}(B)$ contém uma vizinhança aberta de x_0 (a saber, $A(r_1)$). Isso provou que f é contínua em x_0.

2. *Caso* $f(x_0) = 1$.

   Para todo $r < 1$, $r \in J$, vale $A(r) \subset A(1)$ e, portanto, vale $A(r)^c \supset A(1)^c = G$. Logo, $G \subset \bigcap_{\substack{r\in J\\ r<1}} A(r)^c$.

   Como $f(x_0) = 1$ então x_0 não pode pertencer a nenhum dos conjuntos $A(r)$ com $r < 1$, $r \in J$, ou seja,

   $$x_0 \in \left(\bigcup_{\substack{r\in J\\ r<1}} A(r)\right)^c = \bigcap_{\substack{r\in J\\ r<1}} A(r)^c .$$

   Como comentamos no parágrafo anterior, isso inclui a possibilidade de x_0 pertencer a G.

   Seja $r_0 \in J$ tal que $0 < r_0 < 1$. É claro que $\bigcap_{\substack{r\in J\\ r<1}} A(r)^c \subset \bigcap_{\substack{r\in J\\ r_0<r<1}} A(r)^c$ e que $\bigcap_{\substack{r\in J\\ r_0<r<1}} A(r)^c \subset \left(\overline{A(r_0)}\right)^c$, já que $\overline{A(r_0)} \subset A(r)$ para todo $r > r_0$, $r \in J$. Concluímos disso que $x_0 \in \left(\overline{A(r_0)}\right)^c$. Portanto, provamos que $\left(\overline{A(r_0)}\right)^c$ é uma vizinhança aberta de x_0 para todo $r_0 \in J$ tal que $0 < r_0 < 1$.

   Se B é uma vizinhança aberta de $f(x_0) = 1$, então, pela definição de conjuntos abertos em espaços métricos, existe $a_0 > 0$ tal que B contém todos os abertos da forma $B_a = (a,\ 1]$ para todo $a_0 < a < 1$. Fixemos $a_1 \in \mathbb{R}$ e $r_1 \in J$ tais $a_0 < a_1 < r_1 < 1$.

   Se $x \in \left(\overline{A(r_1)}\right)^c$ então, como $A(r_1) \subset \overline{A(r_1)}$, tem-se $x \in (A(r_1))^c$. Isso implica que $f(x) \geq r_1$ e, portanto, que $f\left(\left(\overline{A(r_1)}\right)^c\right) \subset (r_1,\ 1] \subset (a_1,\ 1] = B_{a_1}$. Logo, $f^{-1}(B) \supset f^{-1}(B_{a_1}) \supset \left(\overline{A(r_1)}\right)^c \ni x_0$. Assim, concluímos que para toda vizinhança aberta B de $f(x_0)$ a pré-imagem $f^{-1}(B)$ contém uma vizinhança aberta de x_0 (a saber, $\left(\overline{A(r_1)}\right)^c$). Isso provou que f é contínua em x_0.

3. *Caso* $0 < f(x_0) < 1$.

   Seja $f(x_0) = t$, com $0 < t < 1$. Temos que x_0 não pode pertencer a nenhum dos conjuntos $A(r)$ com $r < t$, $r \in J$, mas deve pertencer a todo conjunto $A(s)$ com $s > t$, $s \in J$. Assim,

   $$x_0 \in \left(\bigcap_{\substack{s\in J\\ s>t}} A(s)\right) \setminus \left(\bigcup_{\substack{r\in J\\ r<t}} A(r)\right) = \left(\bigcap_{\substack{s\in J\\ s>t}} A(s)\right) \bigcap \left(\bigcup_{\substack{r\in J\\ r<t}} A(r)\right)^c = \left(\bigcap_{\substack{s\in J\\ s>t}} A(s)\right) \bigcap \left(\bigcap_{\substack{r\in J\\ r<t}} A(r)^c\right) . \tag{34.16}$$

   Note-se que $A(s) \subset A(1) = G^c$ para todo $s \in J$ e, portanto, o conjunto do lado direito de (34.16) exclui todo elemento de G, como deveria ser.

   Seja B uma vizinhança aberta de $f(x_0) = t$. Então, pela definição de conjuntos abertos em espaços métricos, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que B contém todos os abertos da forma $B_\epsilon = (t - \epsilon,\ t + \epsilon)$ para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$.

   Seja $0 < \epsilon_1 < \epsilon_0$ e seja A o aberto definido por

   $$A := A(r_1) \cap \left(\overline{A(r_0)}\right)^c ,$$

com $r_0,\ r_1 \in J$ escolhidos de forma que $t-\epsilon_1 < r_0 < t$ e que $t < r_1 < t+\epsilon_1$.

Note-se que para todo $r \in J$ com $r_0 < r < t$ vale $\overline{A(r_0)} \subset A(r)$. Logo, $\overline{A(r_0)} \subset \bigcup_{\substack{r\in J\\ r_0<r<t}} A(r)$. Portanto,

$$\bigcap_{\substack{r\in J\\ r<t}} A(r)^c \subset \bigcap_{\substack{r\in J\\ r_0<r<t}} A(r)^c = \left(\bigcup_{\substack{r\in J\\ r_0<r<t}} A(r)\right)^c \subset \left(\overline{A(r_0)}\right)^c . \tag{34.17}$$

Por outro lado, como $r_1 > t$, é evidente que $\bigcap_{\substack{s\in J\\ s>t}} A(s) \subset A(r_1)$, pois $A(r_1)$ é um dos conjuntos que aparecem na intersecção do lado esquerdo. Concluímos disso, de (34.16) e de (34.17) que

$$x_0 \in \left(\bigcap_{\substack{s\in J\\ s>t}} A(s)\right) \bigcap \left(\bigcap_{\substack{r\in J\\ r<t}} A(r)^c\right) \subset A(r_1) \cap \left(\overline{A(r_0)}\right)^c = A .$$

Isso provou que A é uma vizinhança aberta de x_0.

Para todo $x \in A$ tem-se $x \in A(r_1)$, o que implica $f(x) \leq r_1 < t+\epsilon_1$ e $x \in \left(\overline{A(r_0)}\right)^c \subset A(r_0)^c$, o que implica $f(x) \geq r_0 > t-\epsilon_1$. Logo, $f(x) \in (t-\epsilon_1,\ t+\epsilon_1) = B_{\epsilon_1}$ para todo $x \in A$. Assim, provamos que $f(A) \subset B_{\epsilon_1}$, o que implica $f^{-1}(B) \supset f^{-1}(B_{\epsilon_1}) \supset A \ni x_0$. Assim, concluímos que para toda vizinhança aberta B de $f(x_0)$ a pré-imagem $f^{-1}(B)$ contém uma vizinhança aberta de x_0 (a saber, $A = A(r_1) \cap \left(\overline{A(r_0)}\right)^c$). Isso provou que f é contínua em x_0.

A prova do Lema de Urysohn está, portanto, completa. ■

34.2.3.1 O Teorema de Extensão de Tietze

Vamos agora enunciar uma importante generalização do Lema de Urysohn, a saber, o chamado *Teorema de Extensão de Tietze*[14], Teorema 34.3, e uma generalização do mesmo, o Teorema 34.4. Esse teorema garante a existência de extensões contínuas de funções reais contínuas definidas em fechados de espaços normais, um resultado com diversas aplicações. A demonstração que apresentaremos do Lema 34.4 e do Teorema 34.3 é encontrada, com poucas modificações, em diversos textos, sendo que seguimos [278]. Em [251] encontra-se uma instrutiva demonstração de um caso particular do que apresentaremos. Faremos uso do seguinte lema técnico:

Lema 34.4 *Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico normal. Sejam $b > 0$, $F \subset X$ um conjunto τ-fechado e $u : F \to [-b,\ b]$ uma função contínua. Então, existe uma função contínua $v : X \to \left[-\frac{b}{3},\ \frac{b}{3}\right]$ tal que $|u(x)-v(x)| \leq \frac{2b}{3}$ para todo $x \in F$.* □

Prova. Sejam $A := \{x \in G|\ u(x) \leq -b/3\} = u^{-1}([-b,\ -b/3])$ e $B := \{x \in G|\ u(x) \geq b/3\} = u^{-1}([b/3,\ b])$, de forma que para $x \in A^c \cap B^c$ teremos $-b/3 < u(x) < b/3$. Como u é contínua, é claro que A e B são fechados disjuntos em F, mas como F é fechado em A, assim são também A e B. Pelo Lema de Urysohn, existe uma função contínua $w : X \to [0,\ 1]$ tal que $w(x) = 0$ para todo $x \in A$ e $w(x) = 1$ para todo $x \in B$. Seja, então, $v(x) := \frac{2b}{3}w(x) - \frac{b}{3}$. Valerá $v(x) = -b/3$ para todo $x \in A$, $v(x) = b/3$ para todo $x \in B$ e $-b/3 \leq v(x) \leq b/3$ para todo $x \in A^c \cap B^c$. Como é fácil verificar, teremos

$$-\tfrac{2b}{3} \leq u(x)-v(x) \leq 0 , \quad x \in A ,$$

$$0 \leq u(x)-v(x) \leq \tfrac{2b}{3} , \quad x \in B ,$$

$$-\tfrac{2b}{3} < u(x)-v(x) < \tfrac{2b}{3} , \quad x \in A^c \cap B^c .$$

[14] Heinrich Franz Friedrich Tietze (1880–1964).

Isso significa que $|u(x)-v(x)| \leq 2b/3$ para todo $x \in X$, como queríamos. ■

O lema acima afirma que u, definida em F, pode ser aproximada (com um erro menor que $2b/3$) por uma função definida em todo X. Mostraremos na prova do teorema a seguir que essa aproximação pode ser melhorada por iteração, fornecendo no limite uma extensão contínua à própria função u.

Teorema 34.3 (Teorema de Extensão de Tietze) *Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico normal. Sejam $a \leq b$ reais, $F \subset X$ um conjunto τ-fechado e $u : F \to [a,\ b]$ uma função contínua. Então, existe uma função contínua $w : X \to [a,\ b]$ que é uma extensão de u.* □

Prova. Se $a = b$ então $u(x) = b$ para todo $x \in F$ e basta tomarmos $v(x) = b$ para todo $x \in X$. No caso $a < b$ é suficiente considerarmos o caso em que $[a,\ b] = [-1,\ 1]$, pois esses intervalos são homeomorfos: a função $p : [-1,\ 1] \to [a,\ b]$ dada por $p(s) = \frac{b-a}{2}s + \frac{b+a}{2}$ mapeia bijetivamente $[-1,\ 1]$ em $[a,\ b]$, é contínua e tem inversa contínua.

Seja, portanto, $u : F \to [-1,\ 1]$, contínua. Pelo Lema 34.4 (tomando $b = 1$), existe uma função contínua $v_1 : X \to \left[-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right]$ tal que $|u(x)-v_1(x)| \leq \frac{2}{3}$ para todo $x \in F$.

Com isso a função $u_1 := u - v_1$ é definida em F e assume valores em $\left[-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right]$. Podemos aplicar novamente o Lema 34.4 (tomando $b = 2/3$) e afirmar que existe uma função $v_2 : X \to \left[-\frac{1}{3}\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\frac{2}{3}\right]$ tal que $|u_1(x)-v_2(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$ para todo $x \in F$, ou seja, $|u(x)-v_1(x)-v_2(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$ para todo $x \in F$.

Procedendo indutivamente, constrói-se destarte uma sequência de funções $v_n : X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$, $n \in \mathbb{N}$, tais que, para todo $x \in F$,

$$\Big|u(x) - \big(v_1(x) + \cdots + v_n(x)\big)\Big| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n . \tag{34.18}$$

Seja $w_n := v_1 + \cdots + v_n$. Provemos que essa é uma sequência de Cauchy na topologia da norma do supremo, definida por $\|h\|_\infty := \sup\{|h(x)|,\ x \in X\}$. Como $v_n : X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$ vale $\|v_n\|_\infty \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, para $m < n$ valerá

$$\|w_n - w_m\|_\infty = \left\|\sum_{j=m+1}^{n} v_j\right\|_\infty \leq \sum_{j=m+1}^{n} \|v_j\|_\infty \leq \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^m ,$$

provando que trata-se de uma sequência de funções contínuas e limitadas que é uma sequência de Cauchy na norma do supremo. Pelo Teorema 27.3, página 1334, w_n converge a uma função contínua e limitada w definida em X. Para essa função temos $\|w\|_\infty \leq 1$, pois

$$\|w\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|w_n\|_\infty \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \|v_j\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} = 1 .$$

Por (34.18), w_n converge uniformemente a u em F e, portanto, $w : X \to [-1,\ 1]$ é uma extensão contínua de u. ■

Exemplo 34.3 Dentre as hipóteses do Teorema de Extensão de Tietze encontra-se a suposição que o conjunto F onde a função u está definida, ser um fechado na topologia de X. Essa hipótese não pode ser enfraquecida facilmente. Tome-se $X = [0,\ 1]$ com a topologia usual, F o aberto $(0,\ 1)$ e a função $u : (0,\ 1) \to [-1,\ 1]$ dada por $u(x) = \mathrm{sen}(1/x)$. Essa função não possui extensão contínua sobre todo X. ¤

Apesar das limitações apontadas no exemplo acima, o Teorema 34.3 pode ser generalizado nas direções indicadas no que segue.

• **Estendendo o Teorema de Extensão de Tietze**

Como enuncia o teorema a seguir, o Teorema 34.3 pode ser generalizado de diversas formas e algumas dessas generalizações são de significativo interesse em áreas da Análise e nos fundamentos da chamada K-teoria.

Façamos previamente algumas observações elementares. Sejam (X, τ_X), (W, τ_W) e (Z, τ_Z) três espaços topológicos e suponhamos que (W, τ_W) e (Z, τ_Z) sejam homeomorfos, ou seja, tais que existe uma bijeção $h : W \to Z$ contínua com inversa contínua. Seja $A \subset X$, não-vazio e $f : A \to W$ uma função contínua (na topologia induzida por τ_X em A). Então, $h \circ f : A \to Z$ é também contínua, por ser a composição de duas funções contínuas. Suponhamos que $h \circ f$ possua uma extensão contínua $g : X \to Y$. Então, $\tilde{f} : X \to W$ dada por $\tilde{f} := h^{-1} \circ g$ é uma extensão contínua de f, também por ser a composição de duas funções contínuas.

Na reta real (com a topologia usual), todos os intervalos do tipo (a, b), $a < b$, são homeomorfos. Por exemplo, $h : (0, 1) \to (a, b)$ dada por $h(x) = (b - a)x + a$ é um homeomorfismo, como facilmente se verifica. A função tangente hiperbólica $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ é também um homeomorfismo e, portanto, disso concluímos que todo intervalo do tipo (a, b), $a < b$, é homeomorfo a $\mathbb{R}$. A restrição da tangente hiperbólica ao semi-eixo real positivo, $\tanh : (0, \infty) \to (0, 1)$ é também um homeomorfismo e, portanto, disso concluímos que todo intervalo do tipo (a, b), $a < b$, é homeomorfo a todo intervalo do tipo (c, ∞). De maneira totalmente análoga verifica-se que todos os intervalos do tipo $[a, b)$, $a < b$, são homeomorfos e também homeomorfos a todos os intervalos do tipo $[c, \infty)$ com $c \in \mathbb{R}$. Outrosim, todos os intervalos do tipo $[a, b]$, $a < b$, são homeomorfos. Passemos à generalização do Teorema 34.3.

Teorema 34.4 *Seja (X, τ) um espaço topológico normal, $F \subset X$ um conjunto τ-fechado e sejam $a < b$ reais.*

I. *Seja $u : F \to [a, b)$ uma função contínua. Então, existe uma função contínua $v : X \to [a, b)$ que é uma extensão de u. Observe-se que aqui não excluímos o caso em que $b = \infty$. A afirmação permanece válida se trocarmos o intervalo $[a, b)$ pelo intervalo $(a, b]$ e, nesse caso, não excluímos a situação em que $a = -\infty$.*

II. *Seja $u : F \to (a, b)$ uma função contínua. Então, existe uma função contínua $v : X \to (a, b)$ que é uma extensão de u. Aqui também não excluímos o caso em que $a = -\infty$ ou $b = \infty$, ou mesmo ambos, como indicado no próximo item.*

III. *Seja $u : F \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, existe uma função contínua $v : X \to \mathbb{R}$ que é uma extensão de u.*

IV. *Seja $u : F \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ uma função contínua. Então, existe uma função contínua $v : X \to \mathbb{R}^n$ que é uma extensão de u.*

V. *Seja $u : F \to \mathcal{R}$ uma função contínua, onde $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ é um conjunto da forma $\mathcal{R} = I_1 \times \cdots \times I_n$, sendo que cada I_k é $\mathbb{R}$ ou um intervalo do tipo $[a_k, b_k]$, $[a_k, b_k)$, $(a_k, b_k]$ ou (a_k, b_k) com $a_k < b_k$ (esses intervalos podendo eventualmente ser semi-infinitos). Então, existe uma função contínua $v : X \to \mathcal{R}$ que é uma extensão de u.*

VI. *Seja $u : F \to \mathcal{D}$ uma função contínua, onde $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ é homeomorfo a algum dos conjuntos $\mathcal{R}$ mencionados no item anterior (por exemplo, $\mathcal{D}$ é a esfera fechada de raio $r > 0$ centrada na origem em $\mathbb{R}^n$). Então, existe uma função contínua $v : X \to \mathcal{D}$ que é uma extensão de u.* □

A afirmação do item **IV**, acima, é por vezes denominada *Teorema de Extensão de Urysohn-Tietze* e desempenha um papel em diversos problemas de Análise, por exemplo, no tratamento do Princípio de Dirichlet. Vide e.g. [299].

Prova do Teorema 34.4. Parte **I.** Trataremos apenas o caso do intervalo $[a, b)$, pois o caso do intervalo $(a, b]$ é análogo. É suficiente considerarmos a situação em que $[a, b) = [0, 1)$, pois esses intervalos são homeomorfos, como já observamos. Pelo Teorema 34.3, a função $u : F \to [0, 1)$ possui uma extensão $w : F \to [0, 1]$. Seja $G = w^{-1}(\{1\})$, o conjunto de todos os pontos de X onde w assume o valor 1. G é um conjunto τ-fechado, pois w é contínua. Se $G = \emptyset$ então $w : F \to [0, 1)$ e não resta nada a demonstrar, pois podemos adotar $v = w$. Se $G \neq \emptyset$ então G e F são disjuntos (pois u e, portanto, w, não assume o valor 1 em F). Pelo Lema de Urysohn, Lema 34.3, existe uma função contínua $\kappa : X \to [0, 1]$ tal que $\kappa(x) = 0$ para todo $x \in G$ e $\kappa(x) = 1$ para todo $x \in F$. Seja v definida para todo $x \in X$ por $v(x) = \kappa(x)w(x)$. É evidente que v é contínua, que v anula-se quando $w(x) = 1$ e que sua imagem encontra-se em $[0, 1)$. Fora isso, para todo $x \in F$ vale $v(x) = \kappa(x)w(x) = w(x) = u(x)$, provando que v estende u e tem as demais propriedades desejadas.

Parte **II.** É suficiente considerarmos o caso em que $(a, b) = (-1, 1)$, pois esses intervalos são homeomorfos, como já observamos. Pelo Teorema 34.3, a função $u : F \to (-1, 1)$ possui uma extensão $w : F \to [-1, 1]$. Seja $G = w^{-1}(\{-1\}) \cup w^{-1}(\{1\})$, o conjunto de todos os pontos de X onde w assume os valores ± 1. G é um conjunto τ-fechado, pois w é contínua e por ser a união de dois fechados. Se $G = \emptyset$ então $w : F \to (-1, 1)$ e não resta nada a demonstrar, pois podemos adotar $v = w$. Se $G \neq \emptyset$ então G e F são disjuntos (pois u e, portanto, w, não assume os valores -1 ou 1 em F). Pelo Lema de Urysohn, Lema 34.3, existe uma função contínua $\kappa : X \to [0, 1]$ tal que $\kappa(x) = 0$ para todo $x \in G$ e $\kappa(x) = 1$ para todo $x \in F$. Seja v definida para todo $x \in X$ por $v(x) = \kappa(x)w(x)$. É evidente que v é contínua, que v anula-se quando $w(x) = \pm 1$ e que sua imagem encontra-se em $(-1, 1)$. Fora isso, para todo $x \in F$ vale $v(x) = \kappa(x)w(x) = w(x) = u(x)$, provando que v estende u e tem as demais propriedades desejadas.

Parte **III.** Como $\mathbb{R}$ é homeomorfo a todo intervalo do tipo (a, b) com $a < b$, então a afirmação segue da parte **II**.

Parte **IV.** Se $u : F \to \mathcal{R}$, podemos encará-la como um vetor de n componentes: $u = (u_1, \ldots, u_n)$ com $u_k : F \to \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$. Se $u : F \to \mathbb{R}^n$ é contínua, então cada componente $u_k : F \to \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, é contínua e a afirmação segue da parte **III**.

Parte **V.** Se $u : F \to \mathcal{R}$, podemos encará-la como um vetor de n componentes: $u = (u_1, \ldots, u_n)$ com $u_k : F \to I_k$, $k = 1, \ldots, n$. Assim, se $u : F \to \mathbb{R}^n$ é contínua, cada componente $u_k : F \to I_k$, $k = 1, \ldots, n$, é contínua e a afirmação segue, dependendo do caso, do Teorema 34.3, ou dos item **I**, **II** ou **III**.

Parte **VI.** Elementar pelas considerações anteriores. ■

34.2.4 A Propriedade de Hausdorff como Propriedade Herdada

A propriedade de ser Hausdorff é uma das propriedades definidoras na noção de variedade topológica (vide Capítulo 35, página 1640). Vamos aqui mostrar que essa propriedade é preservada pela tomada de topologias induzidas e pelo produto (finito!) de espaços topológicos, dois fatos simples mas relevantes na construção de variedades topológicas.

• **Espaços Hausdorff e a topologia induzida**

Proposição 34.13 *Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $Y \subset X$. Vamos supor Y não-vazio e vamos considerar em Y a topologia τ_I induzida pela topologia τ. Então, se (X, τ) for Hausdorff o espaço topológico (Y, τ_I) também será Hausdorff.* □

Prova. Sejam $y_1, y_2 \in Y$, distintos, Como X é Hausdorff, existem $A_1, A_2 \in \tau$ tais que $y_1 \in A_1$, $y_2 \in A_2$ e com $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Agora, $B_1 := A_1 \cap Y$ e $B_2 := A_2 \cap Y$ são (por definição) τ_I-abertos e satisfazem $y_1 \in B_1$, $y_2 \in B_2$ e com $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, provando que (Y, τ_I) é Hausdorff. ■

Devido a esse resultado, costuma-se dizer que a propriedade de Hausdorff é *herdada* por uma topologia relativa.

• **Espaços Hausdorff e o produto finito de espaços topológicos**

Proposição 34.14 *Para algum $m \in \mathbb{N}$, sejam (X_a, τ_a), $a = 1, \ldots, m$, espaços topológicos Hausdorff. Então, o espaço produto*[15] *$\big(X_1 \times \cdots \times X_m,\ \tau_1 \times \cdots \times \tau_m\big)$ é também Hausdorff.* □

Prova. Sejam $x = (x_1, \ldots, x_m)$ e $y = (y_1, \ldots, y_m)$ elementos distintos de $X_1 \times \cdots \times X_m$. Então, existe ao menos um $a \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $x_a \neq y_a$. Como (X_a, τ_a) é Hausdorff, existem A_a, $B_a \in \tau_a$ tais que $x_a \in A_a$, $y_a \in B_a$ e $A_a \cap B_a = \emptyset$. Para todos os demais $k \neq a$, tomemos abertos A_k e B_k em τ_k com $x_k \in A_k$ e $y_k \in B_k$. Teremos que $x \in A_1 \times \cdots \times A_m$ e $y \in B_1 \times \cdots \times B_m$ mas $\big(A_1 \times \cdots \times A_m\big) \cap \big(B_1 \times \cdots \times B_m\big) = \emptyset$, pois $A_a \cap B_a = \emptyset$. Isso estabelece que $\big(X_1 \times \cdots \times X_m,\ \tau_1 \times \cdots \times \tau_m\big)$ também possui a propriedade de Hausdorff. ■

A afirmação da Proposição 34.14 pode ser facilmente estendida para produtos arbitrários (não necessariamente finitos) de espaços topológicos. Deixamos essa generalização como exercício ao estudante.

Devido aos fatos acima expostos, costuma-se dizer que a propriedade de Hausdorff é *herdada* por produtos de espaços topológicos.

[15] Para a definição, vide Seção 29.2.5, página 1413 ou Seção 34.6, página 1621.

34.3 Compacidade, Compacidade Local e Paracompacidade

A noção geral de compacidade de conjuntos em espaços topológicos foi introduzida por Fréchet[16] em 1906, abstraindo e generalizando diversas observações anteriores a respeito de subconjuntos fechados e limitados da reta real. Desde sua introdução essa noção tornou-se um importante instrumento de análise e nesta seção apresentamos os resultados mais importantes que dela decorrem.

Começaremos apresentando definições gerais e propriedades válidas em espaços topológicos gerais e, gradualmente, nos especializaremos em espaços topológicos específicos, como os espaços Hausdorff, os espaços métricos e, dentre esses, os espaços $\mathbb{R}^n$ com a métrica Euclidiana usual.

No que segue, se X é um conjunto não-vazio e τ uma topologia em X, dizemos que o par (X, τ) é um espaço topológico. Por abuso de linguagem, o próprio conjunto X é dito ser um espaço topológico em relação à topologia τ.

Para um texto dedicado à história da Topologia, vide [164].

34.3.1 Algumas Definições Gerais

• **Recobrimentos**

Seja X um conjunto não-vazio seja $A \subset X$. Uma coleção $\mathcal{R} \subset \mathbb{P}(X)$, formada por subconjuntos de X, é dita ser um *recobrimento* de A se a união de todos os seus elementos contiver A, ou seja, se $A \subset \bigcup_{R\in\mathcal{R}} R$.

Se $\mathcal{R}$ é um recobrimento de A, dizemos que $\mathcal{R}$ *cobre* A, ou que $\mathcal{R}$ *recobre* A.

Se τ é uma topologia em X e $\mathcal{R}$ é um recobrimento de $A \subset X$ tal que todo elemento de $\mathcal{R}$ é um elemento de τ, dizemos que $\mathcal{R}$ é um *recobrimento de A por τ-abertos* , ou simplesmente um *recobrimento de A por abertos.*

Se $\mathcal{R}$ é um recobrimento de A por τ-abertos, então a cada $R \in \mathcal{R}$ vem associado um conjunto $R \cap A$ que é elemento da topologia relativa τ_A induzida por τ em A (vide Seção 29.2.4, página 1411). Claramente, a coleção de todos esses conjuntos $R \cap A$ com $R \in \mathcal{R}$ também cobre A. Assim, a cada recobrimento $\mathcal{R}$ de A por τ-abertos vem associado um recobrimento $\mathcal{R}_I$ de A por τ_A-abertos, a saber, $\mathcal{R}_I := \{R \cap A,\ R \in \mathcal{R}\} \subset \tau_A$. O recobrimento $\mathcal{R}_I$ é denominado de *recobrimento induzido* em A pelo recobrimento $\mathcal{R}$.

Se τ é uma topologia em X, então τ é um recobrimento de X por τ-abertos (pois $X \in \tau$). Logo, X possui ao menos um recobrimento por τ-abertos para qualquer topologia τ definida em X, na pior das hipóteses aquela formada pela própria topologia τ.

Se $\mathcal{R}$ é um recobrimento de A, dizemos que $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ é um *sub-recobrimento* de A por $\mathcal{R}$ se $\mathcal{S}$ também for um recobrimento de A. É claro que um sub-recobrimento de um recobrimento por abertos é também um recobrimento por abertos.

Um recobrimento é dito ser finito se possuir um número finito de elementos.

Vamos a alguns exemplos ilustrativos dessas definições.

- $\mathcal{R}_1 = \{(r,\ s)\,,\ r,\ s \in \mathbb{Q} \text{ com } r < s\}$ é um recobrimento de $\mathbb{R}$ por $\tau_{\mathbb{R}}$-abertos.
- $\mathcal{R}_2 = \left\{\left(\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}+1\right)\,,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ é um recobrimento de $\mathbb{R}$ por $\tau_{\mathbb{R}}$-abertos. Trata-se de um sub-recobrimento de $\mathcal{R}_1$, acima.
- $\mathcal{R}_3 = \{(-x,\ x)\,,\ x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ é um recobrimento de $\mathbb{R}$ por $\tau_{\mathbb{R}}$-abertos.
- $\mathcal{R}_4 = \{(-\infty,\ 1),\ (-1,\ \infty)\}$ é um recobrimento finito de $\mathbb{R}$ por $\tau_{\mathbb{R}}$-abertos.
- $\mathcal{R}_5 = \{[n,\ n+1],\ n \in \mathbb{Z}\}$ é um recobrimento de $\mathbb{R}$ por $\tau_{\mathbb{R}}$-fechados.

• **Refinamentos**

Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico e sejam $\mathcal{B} = \left\{B_\mu \subset X,\ \mu \in \Omega\right\}$ e $\mathcal{C} = \left\{C_{\mu'} \subset X,\ \mu' \in \Omega'\right\}$ dois recobrimentos de X. Dizemos que $\mathcal{B}$ é mais fina que $\mathcal{C}$ se para todo $B_\mu \in \mathcal{B}$ existir ao menos um $C_{\mu'} \in \mathcal{C}$ tal que $B_\mu \subset C_{\mu'}$. Se um recobrimento $\mathcal{B}$ é mais fino que $\mathcal{C}$ dizemos que $\mathcal{B}$ é um *refinamento* de $\mathcal{C}$.

[16] Maurice René Fréchet (1878–1973).

É de se notar que se $\mathcal{B} = \left\{B_\mu \in X,\ \mu \in \Omega\right\}$ e $\mathcal{C} = \left\{C_{\mu'} \in X,\ \mu' \in \Omega'\right\}$ são dois recobrimentos de X então $\left\{B_\mu \cap C_{\mu'} \in X,\ \mu \in \Omega,\ \mu' \in \Omega'\right\}$ é também um recobrimento de X e é um refinamento de $\mathcal{B}$ e de $\mathcal{C}$.

• **Sistema localmente finito de conjuntos**

Uma coleção de conjuntos $\mathcal{C} = \{C_\mu \subset X,\ \mu \in \Omega\}$ é dita ser um *sistema localmente finito de conjuntos* se todo $x \in X$ possui uma vizinhança V_x tal que $V_x \cap C_\mu$ for não-vazio apenas para uma coleção finita de μ's.

• **Funções contínuas e recobrimentos por abertos**

A proposição que segue será útil mais adiante e mostra que para uma função ser contínua basta ser contínua em cada elemento de um recobrimento por abertos do seu domínio.

Proposição 34.15 *Sejam $(X,\ \tau_X)$ e $(Y,\ \tau_Y)$ dois espaços topológicos e seja $\mathcal{A} = \{A_\nu \in \tau_X,\ \nu \in N\}$ um recobrimento de X por τ-abertos. Denotemos por $\tau_X(A_\nu)$ a topologia induzida em A_ν pela topologia τ_X. Então, uma função $f : X \to Y$ é contínua (em relação às topologias τ_X e τ_Y) se e somente para todo $\nu \in N$ a restrição de f a A_ν, for contínua (em relação às topologias $\tau_X(A_\nu)$ e τ_Y).* □

A noção de topologia induzida foi introduzida na Seção 29.2.4, página 1411. Observe-se que, como cada A_ν é τ_X-aberto, os elementos de $\tau_X(A_\nu)$ são também elementos de τ_X. Denotaremos por $f_\nu : A_\nu \to Y$ a restrição de f a A_ν: $f_\nu := f\restriction_{A_\nu}$.

Prova da Proposição 34.15. Vamos supor que $f : X \to Y$ seja contínua em relação às topologias τ_X e τ_Y. Se $B \in \tau_Y$ então $f^{-1}(B) \in \tau_X$. Logo, vale também $f^{-1}(B) \cap A_\nu \in \tau_X$ e, portanto, $f_\nu^{-1}(B) \in \tau_X(A_\nu)$, provando que f_ν é contínua em relação às topologias $\tau_X(A_\nu)$ e τ_Y.

Reciprocamente, vamos supor que para todo $\nu \in N$ a função f_ν seja contínua em relação às topologias $\tau_X(A_\nu)$ e τ_Y. Então, se $B \in \tau_Y$ valerá que $f_\lambda^{-1}(B) \in \tau_X(A_\nu)$. Assim, $f^{-1}(B) \cap A_\nu \in \tau_X(A_\nu)$, e como $\tau_X(A_\nu) \subset \tau_X$, segue que $f^{-1}(B) \cap A_\nu \in \tau_X$ para todo $\nu \in N$. Tomando a união sobre todo $\nu \in N$ de $f^{-1}(B) \cap A_\nu$, usando (1.20) e lembrando que $\bigcup_{\nu\in N} A_\nu = X$, concluímos que $f^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap X \in \tau_X$, o que prova que f é contínua. ■

• **Homeomorfismos e mergulhos topológicos**

Recordemos duas definições que empregaremos no que segue.

Sejam $(X,\ \tau_X)$ e $(Y,\ \tau_Y)$ dois espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é dita ser um *homeomorfismo* entre $(X,\ \tau_X)$ e $(Y,\ \tau_Y)$ se for contínua, bijetora e sua inversa também for contínua.

Uma função $f : X \to Y$ é dita ser um *mergulho topológico*, ou simplesmente um *mergulho*, de $(X,\ \tau_X)$ em $(Y,\ \tau_Y)$ se f for um homeomorfismo entre X e sua imagem $f(X)$ (adotando neste conjunto a topologia relativa de τ_Y).

• **Espaços topológicos compactos, Lindelöf, localmente compactos e paracompactos**

Da mesma forma com que podemos classificar espaços topológicos de acordo com propriedades de separação (vide Seção 34.2, página 1559), podemos classificá-los de acordo com propriedades de seus recobrimentos. Nessa taxonomia as espécies mais relevantes são as seguintes:

- **Espaços compactos.** Um espaço topológico $(X,\ \tau)$ é dito ser um *espaço topológico compacto* se todo recobrimento de X por τ-abertos possuir um sub-recobrimento finito.
- **Espaços Lindelöf.** Um espaço topológico $(X,\ \tau)$ é dito ser um *espaço de Lindelöf*[17] se todo recobrimento de X por τ-abertos possuir um sub-recobrimento contável.
- **Espaços σ-compactos.** Um espaço topológico $(X,\ \tau)$ é dito ser um *espaço topológico σ-compacto* se possuir um recobrimento contável por τ-compactos.
- **Espaços contavelmente compactos.** Um espaço topológico $(X,\ \tau)$ é dito ser um *espaço topológico contavelmente compacto* se todo recobrimento contável de X por τ-abertos possuir um sub-recobrimento finito.

[17] Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946).

- **Espaços localmente compactos.** Um espaço topológico $(X,\ \tau)$ é dito ser um *espaço topológico localmente compacto* se todo $x \in X$ possuir uma vizinhança compacta, ou seja, se para cada $x \in X$ existirem um conjunto τ-aberto A e um conjunto τ-compacto C tais que $x \in A \subset C$.
- **Espaços paracompactos.** Um espaço topológico $(X,\ \tau)$ é dito ser um *espaço topológico paracompacto* se todo recobrimento por τ-abertos de X possuir um refinamento por τ-abertos que é localmente finito.

Das noções acima as mais importantes são as de compacidade, compacidade local e paracompacidade. A noção de compacidade permeia praticamente todas as áreas da Matemática. A noção de compacidade local é particularmente relevante no estudo de variedades topológicas e (vide Capítulo 35, página 1640) diferenciais e na teoria dos grupos topológicos. A noção de σ-compacidade é importante na Teoria da Medida (especialmente no estudos de medidas topológicas). Na Proposição 34.33, página 1611, demonstraremos que todo espaço topológico Hausdorff localmente compacto e segundo-contável é σ-compacto. A noção de paracompacidade é particularemente importante na teoria das variedades topológicas e diferenciais. A noção de paracompacidade foi introduzida por Dieudonné[18], o qual demonstrou um teorema de importância central no contexto, a saber, que todo espaço paracompacto Hausdorff é normal. Vide Teorema 34.24, página 1613, adiante.

Iremos nos concentrar primeiramente no estudo de espaços compactos. Antes façamos um

Comentário sobre a nomenclatura. A definição de compacidade que apresentamos acima é praticamente universal hoje em dia, mas há algumas exceções dignas de nota. Na escola Bourbaki[19] espaços compactos segundo a definição acima são denominados "*quase-compactos*", sendo a palavra compacto reservada a espaços Hausdorff compactos (segundo nossa definição). Na escola russa, emprega-se a palavra "*bicompacto*" para designar espaços Hausdorff compactos (segundo nossa definição), sendo a palavra "compacto" reservada para espaços sequencialmente compactos (para a definição, vide adiante). O estudante deve, portanto, ter um muito cuidado ao comparar resultados de textos diferentes.

34.3.2 Espaços de Lindelöf. Um Mínimo

Neste texto não discutiremos em detalhe a teoria dos espaços de Lindelöf, mas provaremos que espaços segundo-contáveis (ou seja, que possuem uma base contável, vide Seção 29.4, página 1421) são Lindelöf e provaremos que espaços métricos são de Lindelöf se e somente se forem separáveis (ou se e somente se forem segundo-contáveis).

Cabe notar que todo espaço topológico compacto é Lindelöf. A recíproca, porém não é necessariamente verdadeira (para tal é necessário que o espaço seja também contavelmente compacto).

• Espaços segundo-contáveis são Lindelöf

A afirmação que espaços segundo-contáveis são Lindelöf segue do lema técnico a seguir, o qual também será empregado mais adiante, por exemplo, em nossas discussões sobre espaços localmente compactos e sobre espaços paracompactos. O enunciado e demonstração abaixo provém de [62].

Lema 34.5 *Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico segundo-contável e seja $\mathcal{A} = \{A_\mu \in \tau,\ \mu \in M\}$ uma coleção arbitrária de τ-abertos indexada por um conjunto M. Então M possui um subconjunto contável M_1 tal que* $\bigcup_{\mu \in M} A_\mu = \bigcup_{\mu \in M_1} A_\mu$. □

Prova. Seja $\mathcal{B} = \{B_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ uma base contável de $(X,\ \tau)$. Como todo τ-aberto, cada $A_\mu \in \mathcal{A}$ pode ser escrito como união (contável) de elementos de $\mathcal{B}$ e, portanto, cada $A_\mu \in \mathcal{A}$ contém elementos de $\mathcal{B}$. Seja $\mathcal{B}_1$ o subconjunto de $\mathcal{B}$ composto por todos os elementos de $\mathcal{B}$ contidos em algum elemento de $\mathcal{A}$: $\mathcal{B}_1 := \big\{B \in \mathcal{B}|\ \exists\, \mu \in M \text{ tal que } B \subset A_\mu \in \mathcal{A}\big\}$. É claro que $\mathcal{B}_1$ é contável. Naturalmente, para cada $B \in \mathcal{B}_1$ haverá diversos índices $\mu \in M$ tais que $B \subset A_\mu$, mas sempre há ao menos um deles. Fazendo uso do Axioma da Escolha (vide página 39), podemos a cada $B \in \mathcal{B}_1$ associar um $\mu(B) \in M$ tal que $B \subset A_{\mu(B)}$. Obtemos assim uma função $\mathcal{B}_1 \ni B \mapsto \mu(B) \in M$ a qual não é necessariamente injetora. Seja $M_1 \subset M$ a imagem dessa função. Como $\mathcal{B}_1$ é contável, M_1 também o será.

[18] Jean-Alexandre-Eugène Dieudonné (1906–1992). A referência é J. Dieudonné, "Une généralization des espaces compacts", J. Math. Pures Appl. **23**, 65–76 (1944).

[19] *Nicolas Bourbaki.* Nome coletivo adotado por um grupo de importantes matemáticos franceses, nascido por volta de 1935, que teve grande, mas declinante, influência na estruturação e sistematização da Matemática ao longo do século XX. O grupo Bourbaki sofreu diversas críticas pelo seu abstracionismo, considerado em certos círculos como excessivo e mesmo estéril.

Afirmamos agora que $\bigcup_{\mu \in M} A_\mu = \bigcup_{\mu \in M_1} A_\mu$. Para provar isso, considere-se $x \in \bigcup_{\mu \in M} A_\mu$. Existe, portanto, $\mu_x \in M$ tal que $x \in A_{\mu_x}$. Como A_{μ_x} pode ser escrito como união de elementos da base $\mathcal{B}$, existe ao menos um $B \in \mathcal{B}_1$ tal que $x \in B$. Logo, $x \in B \subset A_{\mu(B)}$, provando que $x \in \bigcup_{\mu \in M_1} A_\mu$. Isso estabeleceu que $\bigcup_{\mu \in M} A_\mu \subset \bigcup_{\mu \in M_1} A_\mu$. Agora, como $M_1 \subset M$ é também evidente que $\bigcup_{\mu \in M_1} A_\mu \subset \bigcup_{\mu \in M} A_\mu$, estebelecendo a igualdade desejada. ■

A afirmação do Lema 34.5 é não-trivial no caso de M não ser enumerável, pois se M é contável podemos, naturalmente, tomar $M_1 = M$. Note-se que também que M_1 pode eventualmente ser finito. Note-se também que $\mathcal{A}$ não precisa ser um recobrimento de X. O lema afirma, porém, que em um espaço topológico segundo-contável $(X,\ \tau)$ todo recobrimento de um conjunto $B \subset X$ por τ-abertos tem um subrecobrimento contável. Em particular, todo recobrimento de X por τ-abertos tem um sub-recobrimento contável. Portanto, concluímos ser válida a seguinte afirmação:

Corolário 34.2 *Todo espaço topológico segundo-contável é Lindelöf.* □

Uma recíproca dessa afirmação é válida em espaços métricos:

Proposição 34.16 *Seja $(M,\ d)$ um espaço métrico. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *$(M,\ d)$ é um espaço topológico separável.*
2. *$(M,\ d)$ é um espaço topológico segundo-contável.*
3. *$(M,\ d)$ é um espaço topológico de Lindelöf.* □

Prova. A equivalência dos items 1 e 2 é o conteúdo da Proposição 29.15, página 1422. Que o item 2 implica o item 3 é o conteúdo do Corolário 34.2. Resta apenas provar que todo espaço métrico de Lindelöf é separável.

Seja $B_d(r,\ x)$ a bola aberta de raio $r > 0$ centrada em d. Para cada $n \in \mathbb{N}$ a coleção $\mathcal{B}_n := \Big\{B_d\big(1/n,\ x\big),\ x \in M\Big\}$, formada por bolas de raio $1/n$ centradas en cada ponto $x \in M$, é evidentemente um recobrimento de M por τ_d-abertos. Como, por hipótese, $(M,\ d)$ é Lindelöf, cada $\mathcal{B}_n$ possui um sub-recobrimento contável $\mathcal{B}_n^\sigma := \Big\{B_d\big(1/n,\ x_{n,\,m}\big),\ x_{n,\,m} \in M,\ m \in \mathbb{N}\Big\}$, onde as bolas de raio $1/n$ são centradas em uma coleção contável $\{x_{n,\,m} \in M,\ m \in \mathbb{N}\}$. Seja $\mathcal{D}$ o conjunto contável formado por todos esses pontos $x_{n,\,m}$, ou seja, $\mathcal{D} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_{n,\,m} \in M,\ m \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que $\mathcal{D}$ é denso em M. Isso é fácil de provar. Seja $x \in M$ e tomemos $\epsilon > 0$. Para $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $1/n < \epsilon$ a coleção de bolas $\mathcal{B}_n^\sigma$ recobre M, o que significa dizer que existe $x_{n,\,m} \in \mathcal{D}$ tal que $x \in B_d\big(1/n,\ x_{n,\,m}\big) \subset B_d\big(\epsilon,\ x_{n,\,m}\big)$. Isso implica que cada ponto de M está no fecho de $\mathcal{D}$, como queríamos provar. ■

Das considerações da Seção 29.4, página 1421, concluímos que os espaços $\mathbb{R}^n$ com a topologia métrica usual são Lindelöf. Espaços de Hilbert separáveis também são Lindelöf.

A Proposição 34.16, página 1580, tem o seguinte corolário imediato:

Corolário 34.3 *Seja $(M,\ d)$ um espaço métrico compacto. Então, $(M,\ d)$ é um espaço topológico separável e segundo-contável.* □

34.3.3 Compacidade. Definições e Propriedades em Espaços Topológicos Gerais

• Conjuntos compactos e espaços topológicos compactos

Seja X um conjunto não-vazio e τ uma topologia em X. Um conjunto $A \subset X$ é dito ser um *conjunto τ-compacto*, ou *conjunto compacto* em relação à topologia τ, se todo recobrimento de A por τ-abertos possui um sub-recobrimento finito.

Fica claro que dizer que (X, τ) é um espaço topológico compacto equivale a dizer que X é um conjunto τ-compacto. Note também que dizer que $A \subset X$ é τ-compacto equivale a dizer que (A, τ_A) é um espaço topológico compacto, onde τ_A é a topologia relativa induzida por τ em A (vide Seção 29.2.4, página 1411).

• Exemplos

Tratemos de alguns exemplos de espaços compactos.

- Seja X um conjunto não-vazio qualquer e τ uma topologia em X. Se $A \subset X$ é finito então A é compacto em relação a τ. De fato, a topologia induzida por τ em A contém um número finito de elementos, por ser um subconjunto de $\mathbb{P}(A)$, que possui 2^n elementos, n sendo a cardinalidade de A. Portanto, todo recobrimento de A é finito.

  Esse exemplo não é fortuito. Sob certos aspectos, conjuntos compactos são muito semelhantes a conjuntos finitos e muitas demonstrações de proposições válidas para conjuntos finitos podem ser facilmente transformadas em demonstrações de proposições válidas para conjuntos compactos.

- Se X é finito, o espaço topológico (X, τ) é compacto para qualquer topologia τ de X.

- $\mathbb{R}$ não é compacto na topologia usual $\tau_{\mathbb{R}}$, pois nenhum dos recobrimentos $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, acima, possui um sub-recobrimento de $\mathbb{R}$ que seja finito. Justifique isso para cada caso!

- Seja $\mathbb{R}$ com a topologia usual $\tau_{\mathbb{R}}$. Então, todo intervalo fechado $[a, b]$ com $-\infty < a \leq b < \infty$ é compacto. Com mais generalidade, todo subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}$ é compacto. Essas afirmações provem do importante Teorema de Heine-Borel, Teorema 34.14, página 1594, que veremos adiante.

- Seja X não-vazio. Todo $A \subset X$ é compacto em relação à topologia co-finita em X, que denotamos por $\tau_{cf}(X)$. De fato, seja $\mathcal{R}$ um recobrimento de A composto por conjuntos cujo complementar é finito e seja $D_0 \in \mathcal{R}$. O conjunto $X \setminus D_0$ é finito e, portanto, assim o é o conjunto $A \setminus D_0$, contendo esse, digamos, m elementos. Já que $\mathcal{R}$ cobre A, deve necessariamente existir para cada elemento $x \in A \setminus D_0$ pelo menos um elemento de $\mathcal{R}$ que contém x. Assim, existe uma coleção finita $D_1, \ldots, D_n$, com $n \leq m$, de elementos de $\mathcal{R}$, tal que $D_1 \cup \cdots \cup D_n$ contém $A \setminus D_0$. Logo, $\{D_0, D_1, \ldots, D_n\}$ é um sub-recobrimento finito do conjunto a A por elementos de $\mathcal{R}$.

• Conjuntos relativamente compactos

Seja (X, τ) um espaço topológico. $A \subset X$ é dito ser um *conjunto relativamente compacto* se $\overline{A}$, o fecho de A segundo τ, for compacto.

• Uniões finitas de compactos

Um primeiro resultado bastante elementar sobre conjuntos compactos é o seguinte:

Proposição 34.17 *Seja (X, τ) um espaço topológico e $C_1, \ldots, C_n$ é uma coleção finita de τ-compactos, então $C_1 \cup \ldots \cup C_n$ é τ-compacto.* □

Prova. Se $\mathcal{A}$ é um recobrimento de $C_1 \cup \ldots \cup C_n$ por τ-abertos então cada C_k tem um recobrimento por uma coleção finita $\mathcal{A}_k$ de $\mathcal{A}$. Logo, $\mathcal{A}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_n$ é um subconjunto finito de $\mathcal{A}$ e também recobre $C_1 \cup \ldots \cup C_n$. ■

A Proposição 34.17 não pode ser generalizada para uniões enumeráveis de τ-compactos sem a adição de hipóteses adicionais. Como exercício, encontre contraexemplos em $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$.

O leitor pode estar se perguntando se intersecções de compactos são também compactos. Na Proposição 34.20, página 1586, provaremos que em espaços Hausdorff vale a afirmação que intersecções arbitrárias de compactos são novamente conjuntos compactos. No entanto, há exemplos de expaços não-Hausdorff onde essa afirmação não procede nem mesmo para intersecções finitas! O exercício a seguir ilustra isso.

E. 34.13 *Exercício*. Considere a reta real com dupla origem, introduzida no Exercício E. 34.12, página 1564. Mostre que os conjuntos $C = [-1, 1]$ e $D = \{p\} \cup \big([-1, 1] \setminus \{0\}\big)$ são τ-compactos (porém, não são τ-fechados). Mostre que $C \cap D = [-1, 0) \cup (0, 1]$ não é τ-compacto. Para tal, construa um recobrimento desse conjunto por τ-abertos que não possui um sub-recobrimento finito. Sugestão: tente $\left\{\left(-\frac{3}{n}, -\frac{1}{n}\right) \cup \left(\frac{1}{n}, \frac{3}{n}\right), n \in \mathbb{N}\right\}$. ✠

• Funções contínuas e compacidade

O teorema que segue é de grande importância por esclarecer de que forma a noção de compacidade se relaciona com a de continuidade de funções.

Teorema 34.5 *Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dois espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua em relação às topologias τ_X e τ_Y. Então, se $C \subset X$ é τ_X-compacto, sua imagem $f(C) \subset Y$ é τ_Y-compacta.* □

Prova. Começamos com um pouco de notação. Seja $\mathcal{B} \subset \mathbb{P}(Y)$ uma coleção de subconjuntos de Y. Denotamos por $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathbb{P}(X)$ a coleção das pré-imagens por f em X dos elementos de $\mathcal{B}$: $f^{-1}(\mathcal{B}) := \big\{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\big\}$, onde $f^{-1}(B)$ é a pré-imagem de B em X por f.

Seja $\mathcal{B}$ um recobrimento de $f(C)$ por τ_Y-abertos. Então, $f^{-1}(\mathcal{B})$ é uma coleção de τ_X-abertos (pois f é contínua) que cobre C. Como C é τ_X-compacto, existe um sub-recobrimento finito de $f^{-1}(\mathcal{B})$ que cobre C: $\big\{f^{-1}(B_1), \ldots, f^{-1}(B_n)\big\}$, com $B_k \in \mathcal{B}$, $k = 1, \ldots, n$. Isso implica que $\big\{B_1, \ldots, B_n\big\} \subset \mathcal{B}$ cobre $f(C)$, provando que $f(C)$ é τ_Y-compacto. ■

• Subconjuntos fechados de conjuntos compactos

Proposição 34.18 *Seja (X, τ) um espaço topológico. Sejam $F, C \subset X$ com F sendo τ-fechado, C sendo τ-compacto e $F \subset C$. Então, F é τ-compacto.* □

Prova. Seja $\mathcal{A}$ uma coleção de τ-abertos que cobre F. Então, $\mathcal{A} \cup \{F^c\}$ é uma coleção de τ-abertos que cobre C[20]. Sendo C τ-compacto, $\mathcal{A} \cup \{F^c\}$ possui um sub-recobrimento finito $\mathcal{A}_1 = \{A_1, \ldots, A_n\}$, sendo que um desses conjuntos A_k pode ser F^c e os demais são elementos de $\mathcal{A}$. Como esse sub-recobrimento finito cobre C, deve possuir um subconjunto $\mathcal{A}_2$ (também finito, obviamente) que cobre F. Podemos excluir F^c de $\mathcal{A}_2$, pois F^c é disjunto de F. Portanto, $\mathcal{A}_2$ é composto apenas por uma coleção finita de elementos de $\mathcal{A}$. Isso provou que F é compacto. ■

• Compacidade e a propriedade de intersecção finita

Seja X não-vazio. Uma coleção $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X é dita possuir a *propriedade de intersecção finita* se qualquer subcoleção finita de $\mathcal{C}$ tiver intersecção não-vazia, ou seja, se $C_1 \cap \cdots \cap C_n \neq \emptyset$ para qualquer $n \geq 1$ e quaisquer $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$.

A relação dessa definição com a noção de compacidade é expressa no seguinte teorema:

Teorema 34.6 *Seja X não-vazio e τ uma topologia em X. Então, (X, τ) é um espaço topológico compacto se e somente se toda coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos τ-fechados de X que possua a propriedade de intersecção finita possua uma intersecção não-vazia, ou seja, satisfaça $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.* □

Prova. Vamos supor que toda coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos τ-fechados de X que possua a propriedade de intersecção finita possua uma intersecção não-vazia. Seja $\mathcal{A}$ um recobrimento de X por τ-abertos. Então, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$ e, tomando complementos, $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^c = \emptyset$. Isso diz-nos que a coleção de τ-fechados $\mathcal{F} := \{A^c, A \in \mathcal{A}\}$ não pode possuir a propriedade de intersecção finita. Logo, existe uma coleção finita $A_1^c, \ldots, A_n^c$ de elementos de $\mathcal{F}$ tal que $A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c = \emptyset$ e, tomando complementos, $A_1 \cup \cdots \cup A_n = X$. Logo, $\mathcal{A}$ tem um sub-recobrimento finito, provando que (X, τ) é um espaço topológico compacto.

Vamos agora, supor que X seja compacto e seja $\mathcal{F}$ uma coleção de subconjuntos τ-fechados de X que possua a propriedade de intersecção finita. Suponhamos que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$. Tomando complementos, segue disso que $X = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F^c$. Isso diz que a coleção $\{F^c, F \in \mathcal{F}\}$ é um recobrimento de X por τ-abertos. Logo, como X é compacto, existe uma subcoleção finita $\{F_1^c, \ldots, F_n^c\}$ com $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, que cobre X, ou seja, $F_1^c \cup \cdots \cup F_n^c = X$. Tomando novamente complementos, concluímos que $F_1 \cap \cdots \cap F_n = \emptyset$, contrariando a propriedade de intersecção finita. Logo, $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$. ■

[20] Aqui $F^c = X \setminus F$, de modo que, em verdade, $\mathcal{A} \cup \{F^c\}$ cobre todo X, fato esse, ademais, irrelevante para o que segue.

• A propriedade de Bolzano-Weierstrass em espaços topológicos gerais

Em espaços métricos, um teorema fundamental afirma que um conjunto C é compacto se e somente se toda sequência em C tem uma subsequência convergente em C. Esse teorema, em uma forma bastante completa, será apresentado e demonstrado mais adiante (Teorema 34.11, página 1589). Essa propriedade de conjuntos compactos em espaços métricos é muitas vezes denominada *propriedade de Bolzano-Weierstrass de espaços métricos*. Antes de tratarmos dela, trataremos de uma forma mais geral da mesma, válida em espaços topológicos gerais, e onde sequências devem ser substituídas por redes. As definições necessárias ao acompanhamento dessa discussão encontram-se na Seção 32.3, página 1478. Faremos também uso do Teorema 32.1, página 1479.

Teorema 34.7 (Propriedade de Bolzano-Weierstrass) *Um espaço topológico $(X,\ \tau)$ é compacto se e somente se toda rede em X tem uma sub-rede convergente.* □

Prova. Suponhamos que $(X,\ \tau)$ seja compacto e seja $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ uma rede em X. Vamos supor que $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ não tenha nenhuma sub-rede convergente. Pelo Teorema 32.1, página 1479, $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ não tem pontos de acumulação. Assim, para todo $x\in X$ existe um aberto A_x contendo x e um $\lambda_x\in I$ tais que $x_\lambda\notin A_x$ para todo $\lambda\succeq\lambda_x$. O conjunto desses abertos A_x é um recobrimento de X por abertos e, pela hipótese de compacidade, existe um recobrimento finito $\{A_{x_1},\ \ldots,\ A_{x_n}\}$ de X por tais abertos. Como I é um conjunto dirigido, existe $\lambda'\succ\lambda_{x_k}$ para todo $k=1,\ \ldots,\ n$. Logo, $x_{\lambda'}\notin A_{x_k}$ para todo $k=1,\ \ldots,\ n$, ou seja, $x_{\lambda'}\notin X$, um absurdo. Assim, devemos forçosamente concluir que $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ tem pontos de acumulação e, pelo Teorema 32.1, página 1479, tem uma sub-rede convergente.

Vamos agora supor que toda rede em X tem uma sub-rede convergente. Pelo Teorema 32.1, página 1479, isso equivale a supor que toda rede em X tem um ponto de acumulação.

Supondo por absurdo que X não seja compacto, deve existir um recobrimento por abertos $\mathcal{A}$ de X que não possui nenhum sub-recobrimento finito. Usando $\mathcal{A}$, vamos construir uma rede em X da seguinte forma: definimos o conjunto I como sendo a coleção de todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{P}(\mathcal{A})$, ou seja, $I=\big\{\{A_1,\ \ldots,\ A_n\},\ A_k\in\mathcal{A},\ k=1,\ldots,n,\quad n\in\mathbb{N}\big\}$. O conjunto I pode ser parcialmente ordenado por inclusão: $\{A_1,\ \ldots,\ A_m\}\preceq\{A'_1,\ \ldots,\ A'_n\}$ significa $\{A_1,\ \ldots,\ A_m\}\subset\{A'_1,\ \ldots,\ A'_n\}$. É fácil ver que essa relação de ordem parcial faz de I um conjunto dirigido. Definimos uma rede sobre I em X da seguinte forma: a cada $\lambda=\{A_1,\ \ldots,\ A_n\}\in I$ associamos livremente um x_λ no conjunto complementar de $A_1\cup\cdots\cup A_n$, ou seja, $x_{\{A_1,\ \ldots,\ A_n\}}\in A_1^c\cap\cdots\cap A_n^c$. Note que o complementar de $A_1\cup\cdots\cup A_n$ nunca é vazio pois, por hipótese, nenhuma subcoleção finita de $\mathcal{A}$ cobre X.

Pela hipótese $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ tem um ponto de acumulação $x\in X$. Assim, se A é um aberto que contém x, existe para todo $\{A_1,\ \ldots,\ A_m\}\in I$ um $\{A'_1,\ \ldots,\ A'_n\}\in I$ tal que $\{A'_1,\ \ldots,\ A'_n\}\supset\{A_1,\ \ldots,\ A_m\}$ e que $x_{\{A'_1,\ \ldots,\ A'_n\}}\in A$. Pela definição, $x_{\{A'_1,\ \ldots,\ A'_n\}}\in(A'_1)^c\cap\cdots\cap(A'_n)^c\subset A_1^c\cap\cdots\cap A_m^c$. Portanto, $A\cap A_1^c\cap\cdots\cap A_m^c\neq\emptyset$ para qualquer $\{A_1,\ \ldots,\ A_m\}\in I$ e qualquer aberto A que contém x. Ora, como $\mathcal{A}$ cobre X, existe um $A\in\mathcal{A}$ que contém x. Quando esse A pertence a uma coleção finita $\{A_1,\ \ldots,\ A_m\}$ a relação $A\cap A_1^c\cap\cdots\cap A_m^c\neq\emptyset$ é absurda, pois $A\cap A^c=\emptyset$. Concluímos dessa contradição que X deve ser compacto. ■

34.3.3.1 Compacidade em Espaços Hausdorff

Até o momento apresentamos uma série de resultados sobre a noção de compacidade válidos em espaços topológicos gerais. Vamos agora nos tornar mais especializados. Nesta seção apresentaremos alguns resultados sobre compacidade que são específicos de espaços do tipo Hausdorff (para a definição, vide Seção 32.2, página 1477 ou Seção 34.2, página 1559). Uma outra propriedade importante, a saber, que todo espaço topológico compacto Hausdorff é normal Hausdorff, será estabelecida no Teorema 34.8, página 1584.

• Alguns resultados sobre separabilidade em espaços Hausdorff

Os resultados que seguem possuem aplicações no estudo de propriedades de separabilidade de espaços topológicos Hausdorff. O Lema 34.6 será usado na demonstração de um importante resultado sobre compacidade em espaços Hausdorff, o Teorema 34.9, página 1585.

Lema 34.6 *Seja $(H,\ \tau)$ um espaço topológico Hausdorff. Se $C\subset H$ é um τ-compacto e $x\in C^c$, então existem τ-abertos A_1 e A_2 tais que $C\subset A_1$, $x\in A_2$ mas $A_1\cap A_2=\emptyset$.* □

Em outras palavras, esse lema afirma que em um espaço Hausdorff um compacto e um ponto no seu complemento podem ser separados por abertos disjuntos.

Prova. Como H é do tipo Hausdorff, existe para cada $c\in C$ um par de τ-abertos disjuntos D_c e E_c tais que $c\in D_c$ e $x\in E_c$. Logo, $\mathcal{D}=\{D_c,\ c\in C\}$ é um recobrimento de C por τ-abertos e, por C ser τ-compacto, $\mathcal{D}$ possui um sub-recobrimento finito: $\{D_{c_1},\ \ldots,\ D_{c_n}\}$. Correspondentes a esses n τ-abertos $D_{c_1},\ \ldots,\ D_{c_n}$ estão os τ-abertos $E_{c_1},\ \ldots,\ E_{c_n}$, respectivamente, os quais contêm x e satisfazem $D_{c_k}\cap E_{c_k}=\emptyset$ para cada $k=1,\ldots,n$. Note-se agora que $A_2:=E_{c_1}\cap\cdots\cap E_{c_n}$ é um τ-aberto que contém x e, para cada k, vale

$$D_{c_k}\cap A_2\ =\ D_{c_k}\cap\big(E_{c_1}\cap\cdots\cap E_{c_n}\big)\ =\ \emptyset\,,\tag{34.19}$$

pois $D_{c_k}\cap E_{c_k}=\emptyset$. Segue de (34.19) que o τ-aberto $A_1:=D_{c_1}\cup\cdots\cup D_{c_n}$ satisfaz $A_1\cap A_2=\emptyset$ e cobre C. Isso completa a demonstração. ■

O Lema 34.6 tem o seguinte corolário, que mencionamos aqui para futura referência no contexto do estudo de separabilidade de conjuntos em espaços Hausdorff

Corolário 34.4 *Seja $(H,\ \tau)$ um espaço topológico Hausdorff. Se $C_1,\ C_2\subset H$ são dois conjuntos τ-compactos e disjuntos, então existem τ-abertos B_1 e B_2 tais que $C_1\subset B_1$, $C_2\subset B_2$ mas $B_1\cap B_2=\emptyset$.* □

Em outras palavras, esse corolário afirma que em um espaço Hausdorff dois compactos disjuntos podem ser separados por abertos disjuntos.

Prova. A prova segue passos semelhantes dos da demonstração do Lema 34.6. Dado $c\in C_1$, existem, pelo Lema 34.6 τ-abertos disjuntos D_c e E_c tais que $c\in D_c$ e $C_2\subset E_c$. A coleção de τ-abertos $\mathcal{D}=\{D_c,\ c\in C_1\}$ cobre C_1 e, por esse ser τ-compacto, existe uma subcoleção finita $D_{c_1},\ \ldots,\ D_{c_n}$ que também cobre C_1. Associada a essa está a coleção $E_{c_1},\ \ldots,\ E_{c_n}$ de abertos que contém C_2 e satisfazem $D_{c_k}\cap E_{c_k}=\emptyset$ para cada $k=1,\ldots,n$. Definindo $B_2=E_{c_1}\cap\cdots\cap E_{c_n}$, temos que B_2 é aberto e contém C_2. Fora isso, para cada k vale

$$D_{c_k}\cap B_2\ =\ D_{c_k}\cap\big(E_{c_1}\cap\ldots\cap E_{c_n}\big)\ =\ \emptyset\,,\tag{34.20}$$

pois $D_{c_k}\cap E_{c_k}=\emptyset$. Definindo, $B_1=D_{c_1}\cup\cdots\cup D_{c_n}$, teremos que B_1 é τ-aberto, contém C_1 e, devido a (34.20), $B_1\cap B_2=\emptyset$. ■

• Um espaço compacto Hausdorff é normal

O seguinte teorema estabelece uma propriedade muito importante de espaços topológicos compactos. Suas consequências estendem-se até à teoria das variedades topológicas.

Teorema 34.8 *Com as definições acima, as seguintes afirmações são válidas:*

I. Se $(X,\ \tau)$ é um espaço topológico compacto Hausdorff, então $(X,\ \tau)$ é regular.

II. Se $(X,\ \tau)$ é um espaço topológico compacto Hausdorff, então $(X,\ \tau)$ é normal. □

O Teorema 34.8 será estendido para espaços paracompactos Hausdorff no Teorema 34.24, página 1613.

Demonstração do Teorema 34.8. **Prova de I.** Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico compacto e Hausdorff. Seja $G\subset X$ um conjunto τ-fechado e $y\in G^c$. Pela Proposição 34.18, página 1582, G é τ-compacto. Pelo Lema 34.6, página 1583, existem τ-abertos A_1 e A_1 com $G\subset A_1$ e $y\in A_2$ e $A_1\cap A_2=\emptyset$, provando que $(X,\ \tau)$ é regular.

Prova de II. Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico compacto e Hausdorff. A parte **I** garante-nos que $(X,\ \tau)$ é regular Hausdorff. Seja então $G\subset X$ fechado. A propriedade de regularidade garante que para cada $y\in G^c$ existem abertos disjuntos $A_{G,\,y}$ e B_y tais que $G\subset A_{G,\,y}$ e $y\in B_y$. É claro que o aberto $\bigcup_{y\in G^c}B_y$ é igual a G^c e, portanto, a família de abertos $\{B_y,\ y\in G^c\}$ recobre G^c. Seja agora $F\subset G^c$ um conjunto τ-fechado. Pelo exposto acima, $\{B_y,\ y\in G^c\}$ é um recobrimento de F. Pela Proposição 34.18, página 1582, F é compacto e, portanto, existe ao menos um subconjunto finito de $\{B_y,\ y\in G^c\}$ que também recobre F. Seja $\{B_{y_1},\ \ldots,B_{y_n}\}$ um tal recobrimento finito de F. Seja $B:=B_{y_1}\cup\cdots\cup B_{y_n}$

e seja $A := A_{G,\,y_1} \cap \cdots \cap A_{G,\,y_n}$. Ambos os conjuntos são abertos, sendo que $F \subset B$ e $G \subset A$. Além disso, A e B são disjuntos pois se $z \in B_{y_k}$ para algum $k = 1, \ldots, n$, então $z \notin A_{G,\,y_k}$ (pois $A_{G,\,y}$ e B_y são disjuntos para todo $y \neq x$) e, portanto, $z \notin A$, pois $A \subset A_{G,\,y_k}$. Com isso, como F e G são fechados disjuntos arbitrários, estabelecemos que (X, τ) é um espaço normal Hausdorff. ■

• Conjuntos compactos em espaços Hausdorff são fechados

Chegamos agora a um importante fato sobre espaços Hausdorff.

Teorema 34.9 *Seja (H, τ) um espaço topológico Hausdorff. Se $C \subset H$ é τ-compacto então C é τ-fechado.* □

Prova. Se $C = H$ não há o que provar, pois H é τ-fechado. Seja, portanto, C^c não-vazio. O Lema 34.6, página 1583, diz-nos que C^c possui um recobrimento $\mathcal{A}$ por τ-abertos que são disjuntos de C: $C^c \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ e $C \cap A = \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Se $B := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, vale, portanto, $B \cap C = \emptyset$, pois B é uma união de conjuntos disjuntos de C. Logo, como $H = C \cup C^c$, segue que $B = B \cap H = B \cap (C \cup C^c) = (B \cap C) \cup (B \cap C^c) = B \cap C^c = C^c$. Essa igualdade $C^c = B$ diz-nos que C^c é τ-aberto, pois B é uma união de τ-abertos. Portanto, C é τ-fechado. ■

Para uma melhor apreciação do Teorema 34.9, convém estudar o exemplo de um espaço não-Hausdorff.

Exemplo 34.4 Seja X um conjunto com pelo menos dois elementos e seja $p \in X$. Consideremos a chamada topologia particular de p, denotada por τ_p, na qual são declarados τ_p-abertos o vazio e todo conjunto que contém p. Esse topologia não é Hausdorff (pois quaisquer dois abertos têm intersecção não-vazia, já que contém p). Um conjunto é τ_p-fechado se e somente se for X ou for um subconjunto de $\{p\}^c$ (ou seja, se não contiver p). Afirmamos que conjuntos do tipo $C = \{p, x\}$ com $x \neq p$ são τ_p-compactos, mas não são τ_p-fechados. A segunda afirmação é óbvia, já que C contém p (C, na verdade, é um τ_p-aberto). Que C é τ_p-compacto deve-se à seguinte observação: se $\mathcal{A} = \{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ é uma coleção de τ_p-abertos que recobre V, então todos os elementos de $\mathcal{A}$ contém p (pois são τ_p-abertos) e pelo menos um, digamos, A_{λ_0}, deve conter x. Assim, $\{p, x\} \subset A_{\lambda_0}$, o que significa que V possui um sub-recobrimento finito por elementos de $\mathcal{A}$, a saber, $\{A_{\lambda_0}\}$, que possui apenas um elemento. Assim, na topologia em questão V é compacto mas não é fechado. É fácil generalizar essa ideia e provar que todo τ_p-aberto finito é τ_p-compacto mas não é τ_p-fechado. ⌑

Uma consequência do Teorema 34.9 é:

Proposição 34.19 *Seja (H, τ) um espaço topológico Hausdorff e seja $C \subset H$ um conjunto τ-compacto. Então, $B \subset C$ é τ-compacto se e somente se for τ-fechado.* □

Prova. A afirmação segue diretamente do Teorema da Proposição 34.18, página 1582 e do Teorema 34.9, página 1585. ■

Outra consequência elementar mas útil do Teorema 34.9 é:

Corolário 34.5 *Seja (H, τ) um espaço topológico Hausdorff. Seja $C \subset X$ um conjunto τ-compacto e seja $A \subset X$ um conjunto τ-aberto. Então $C \setminus A = C \cap A^c$ é um conjunto τ-compacto.* □

Prova. Como $C \subset H$ é τ-compacto e (H, τ) é Hausdorff, então C é τ-fechado (Teorema 34.9). Logo, $C \cap A^c$ é um τ-fechado contido em C e, pela Proposição 34.18, página 1582, é τ-compacto ■

Outro corolário útil do Teorema 34.9 é:

Corolário 34.6 *Seja (X, τ_X) um espaço topológico compacto e (Y, τ_Y) um espaço topológico Hausdorff. Se $f : X \to Y$ for contínua, então é uma função fechada, ou seja, para todo $F \subset X$ que seja τ_X-fechado sua imagem $f(F)$ é um conjunto τ_Y-fechado.* □

Prova. Como F é τ_X-fechado, então F é τ_X-compacto (Proposição 34.18, página 1582). Assim, pelo Teorema 34.5, página 1582, $f(F)$ é um τ_Y-compacto. Pelo Teorema 34.9, página 1585, o fato de Y ser Hausdorff implica que $f(F)$ é τ_Y-fechado. ■

Por fim, o seguinte lema técnico, também consequência direta do Teorema 34.9, é muito útil em certas argumentações e dele faremos uso neste texto:

Lema 34.7 *Seja (X, τ) um espaço topológico Hausdorff e seja $\mathcal{C} = \{C_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ uma família de conjuntos τ-compactos tal que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = \emptyset$. Então existe um conjunto não-vazio finito $\{C_{\lambda_1}, \ldots, C_{\lambda_n}\} \subset \mathcal{C}$ tal que $C_{\lambda_1} \cap \cdots \cap C_{\lambda_n} = \emptyset$.* □

Prova. Escolhamos algum $C_{\lambda_1} \in \mathcal{C}$ e seja $\Lambda_1 := \Lambda \setminus \{\lambda_1\}$. Então, pela hipótese, $C_{\lambda_1} \cap \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda_1} C_\lambda\right) = \emptyset$. Isso significa que $C_{\lambda_1} \subset \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda_1} C_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} (C_\lambda)^c$. Pelo Teorema 34.9, os conjuntos $(C_\lambda)^c$ são τ-abertos e, portanto, provamos que $\mathcal{A} = \{(C_\lambda)^c, \lambda \in \Lambda_1\}$ é um recobrimento de C_{λ_1} por τ-abertos. Evocando agora a compacidade de C_{λ_1}, podemos afirmar a existência de um sub-recobrimento finito $\{(C_{\lambda_2})^c, \ldots, (C_{\lambda_n})^c\} \subset \mathcal{A}$ de C_{λ_1}. Assim, $C_{\lambda_1} \subset (C_{\lambda_2})^c \cup \cdots \cup (C_{\lambda_n})^c$, o que implica $C_{\lambda_1} \cap \cdots \cap C_{\lambda_n} = \emptyset$. ■

• Intersecções de compactos em espaços Hausdorff. A topologia dos complementos compactos

A proposição que segue responde no contexto de espaços Hausdorff à questão formulada após a Proposição 34.17, página 1581, a respeito de intersecções de conjuntos compactos.

Proposição 34.20 *Seja (X, τ) um espaço topológico Hausdorff e $\{C_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ é uma família de τ-compactos, então $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ é τ-compacto.* □

Prova. Pelo Teorema 34.9, página 1585, cada C_λ é τ-fechado e, portanto, $C \equiv \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ também o é. Assim, C é um subconjunto τ-fechado de cada τ-compacto C_λ e, portanto, pelo Teorema 34.18, página 1582, C é τ-compacto. ■

Corolário 34.7 *Seja (X, τ) um espaço topológico Hausdorff e seja $\tau_{\mathcal{C}} = \{\emptyset, X\} \cup \{A \subset X \,|\, A^c \text{ é } \tau\text{-compacto}\}$. Então $\tau_{\mathcal{C}}$ é uma topologia em X, denominada* topologia dos complementos compactos *de (X, τ).* □

Prova. Imediata pela Proposição 34.17, página 1581, e pela Proposição 34.20 ■

É interessante advertir o leitor que a topologia dos complementos compactos $\tau_{\mathcal{C}}$ de um espaço Hausdorff (X, τ) pode não ser ela mesma Hausdorff.

E. 34.14 *Exercício.* Considere a reta real com a topologia usual, $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$. Mostre que a topologia dos complementos compactos de $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ não é Hausdorff. Sugestão: pelo Teorema de Heine-Borel, Teorema 34.14, página 1594, um conjunto é $\tau_{\mathbb{R}}$-compacto se e somente se for $\tau_{\mathbb{R}}$-fechado e limitado. Logo, qualquer aberto na topologia dos complementos compactos contém o intervalos do tipo $(-\infty, -a)$ e (b, ∞) para $a, b > 0$ grandes o suficiente. ✣

Para mais propriedades da topologia dos complementos compactos, vide e.g. [304].

• Homeomorfismos, espaços compactos e de Hausdorff

O teorema a seguir é de grande utilidade e é empregado amiúde, por exemplo, na demonstração que toda variedade topológica compacta Hausdorff pode ser mergulhada em algum $\mathbb{R}^m$ (vide Teorema 34.23, página 1607). O mesmo é também empregado de forma importante na demonstração de teoremas de estabilidade na teoria das equações diferenciais e integrais.

Teorema 34.10 *Seja (X, τ_X) um espaço topológico compacto e (Y, τ_Y) um espaço topológico Hausdorff. Se $f : X \to Y$ for bijetora e contínua, então f é um homeomorfismo*[21]. □

Prova. O único ponto a se provar é que a função inversa f^{-1} é contínua. Como f é bijetora, é suficiente para tal provar que se $F \subset X$ é um τ_X-fechado, então sua imagem $f(F)$ é um τ_Y-fechado. Mas, sob as hipóteses, isso foi estabelecido no Corolário 34.6, página 1585. ■

[21] Para a definição, vide página 1578.

• **Recobrimentos abertos finitos em espaços compactos Hausdorff**

A informação obtida no Teorema 34.8, página 1584, de que todo espaço topológico compacto Hausdorff é normal, unida à Proposição 34.12, página 1567, conduz à seguinte conclusão imediata que dispensa demonstração, mas que será evocada mais adiante:

Corolário 34.8 *Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico compacto Hausdorff e suponhamos que X possua um recobrimento finito por τ-abertos $\{A_1,\ \ldots,\ A_n\}$. Então X possui também um segundo recobrimento por τ-abertos $\{B_1,\ \ldots,\ B_n\}$ (com o mesmo número de elementos que o anterior) tal que $\overline{B_k} \subset A_k$ para todo $k = 1,\ \ldots,\ n$.* □

34.3.3.2 Compacidade em Espaços Métricos

Vamos continuar nossa especialização das propriedades de conjuntos compactos tratando agora do importante caso de espaços métricos. Note-se que como todo espaço métrico é Hausdorff (Proposição 32.1, página 1477), os resultados da Seção 34.3.3.1 são todos aplicáveis aqui.

Iniciaremos esta seção com uma sequência de definições relevantes, culminando com o Teorema 34.11, página 1589, do qual outras consequências serão extraídas.

Se M é um conjunto não-vazio e d é uma métrica em M, dizemos que o par $(M,\ d)$ é um espaço métrico. Por abuso de linguagem, o próprio conjunto M é dito ser um espaço métrico em relação à métrica d. Um conjunto compacto na topologia τ_d induzida pela métrica d é dito ser um *conjunto τ_d-compacto*.

• **Conjuntos limitados em espaços métricos**

Seja $(M,\ d)$ um espaço métrico. Um conjunto $A \subset M$ é dito ser um *conjunto limitado* em relação à métrica d, ou um *conjunto d-limitado*, se $\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(x,\ y),\ x,\ y \in A\} < \infty$. Por razões óbvias, $\mathrm{diam}(A)$ é dito ser o *diâmetro* de A.

Proposição 34.21 *Seja $(M,\ d)$ um espaço métrico. Um conjunto $A \subset M$ é limitado se e somente se seu fecho $\overline{A}$ o for e vale* $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$. □

Prova. Se $\overline{A}$ é limitado então A o é, pois $A \subset \overline{A}$. Se A é limitado e $x,\ y \in \overline{A}$, existem sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A convergindo a x e y, respectivamente (Proposição 29.11, página 1420). Assim, para cada $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x,\ x_n) < \epsilon$ e $d(y,\ y_n) < \epsilon$ para todos $n > N(\epsilon)$. Logo, para $n > N(\epsilon)$ e $m > N(\epsilon)$,

$$d(x,\ y) \ \leq\ d(x,\ x_n) + d(x_n,\ y_m) + d(y_m,\ y) \ <\ 2\epsilon + d(x_n,\ y_m) \ \leq\ 2\epsilon + \mathrm{diam}(A)$$

pois $d(x_n,\ y_m) \leq \mathrm{diam}(A)$, já que $x_n,\ y_m \in A$. Assim, $d(x,\ y) < 2\epsilon + \mathrm{diam}(A)$. Como isso vale para todo $\epsilon > 0$ concluímos que $d(x,\ y) \leq \mathrm{diam}(A)$ para todos $x,\ y \in \overline{A}$, provando que $\overline{A}$ é limitado e que $\mathrm{diam}(\overline{A}) \leq \mathrm{diam}(A)$. Como $A \subset \overline{A}$, vale trivialmente que $\mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(\overline{A})$. ■

• **Conjuntos sequencialmente compactos**

Seja $(M,\ d)$ um espaço métrico. Um conjunto $A \subset M$ é dito ser um *conjunto sequencialmente compacto* na métrica d se toda a sequência de elementos de A possuir uma subsequência convergente em A em relação à métrica d.

• **Conjuntos relativamente compactos**

Seja $(M,\ d)$ um espaço métrico. $A \subset M$ é dito ser um *conjunto relativamente compacto* se $\overline{A}$ for compacto.

• **Conjuntos pré-compactos, ou totalmente limitados, em espaços métricos**

Seja $(M,\ d)$ um espaço métrico. Um conjunto $A \subset M$ é dito ser um *conjunto pré-compacto*, ou um *conjunto totalmente limitado*, se para todo $r > 0$ existirem $m(r) \in \mathbb{N}$ e um conjunto finito $\{a_1,\ \ldots,\ a_{m(r)}\} \subset A$ tais que as bolas de raio r centradas nesses pontos cobrem A, ou seja, tais que $A \subset \bigcup_{k=1}^{m(r)} B_d(a_k,\ r)$.

Assim, refraseando, A é pré-compacto se e somente se existe para cada $r > 0$ um conjunto finito $\{a_1,\ \ldots,\ a_{m(r)}\} \subset A$

tal que para todo $a \in A$ vale $d\big(a,\ \{a_j\}_{j=1}^{m(r)}\big) < r$, onde

$$d\Big(a,\ \{a_j\}_{j=1}^{m(r)}\Big) \ :=\ \min\Big\{d(a,\ a_1),\ \ldots,\ d(a,\ a_{m(r)})\Big\}\ .$$

Na Proposição 34.26, página 1594, demonstraremos que todo conjunto limitado em $\mathbb{R}^n$ é pré-compacto. As proposições que seguem estabelecem alguns fatos sobre a noção de pré-compacidade e serão usadas adiante.

Proposição 34.22 *Seja $(M,\ d)$ um espaço métrico. Então, $A \subset M$ é pré-compacto se e somente se $\overline{A}$ também o for.*

Se A for pré-compacto, então para cada $r > 0$ existe $\{c_1,\ \ldots,\ c_{m(r)}\} \subset A$ tal que $d\Big(a,\ \{c_j\}_{j=1}^{m(r)}\Big) < r$ para todo $a \in \overline{A}$, ou seja, $A \subset \overline{A} \subset \bigcup_{k=1}^{m(r)} B_d(c_k,\ r)$. □

Prova. Vamos supor que A seja pré-compacto. Se $\overline{A}$ não fosse pré-compacto existiria $r_0 > 0$ tal que para cada conjunto finito $B = \{b_j\}_{j=1}^{n} \subset \overline{A}$ poderíamos encontrar um $a \in \overline{A}$ tal que $d\Big(a,\ \{b_j\}_{j=1}^{n}\Big) \geq r_0$.

Por outro lado, como A é pré-compacto, existe um conjunto finito $C = \{c_j\}_{j=1}^{m} \subset A$ tal que

$$d\Big(x,\ \{c_j\}_{j=1}^{m}\Big) \ <\ \frac{r_0}{2} \qquad \text{para todo } x \in A\ , \tag{34.21}$$

com o mesmo r_0 de acima. Assim, tomando em particular $B = C$ (lembrar que $C \subset A \subset \overline{A}$), concluímos da hipótese que $\overline{A}$ não é pré-compacto que podemos encontrar um $a \in \overline{A}$ tal que

$$d\Big(a,\ \{c_j\}_{j=1}^{m}\Big) \ \geq\ r_0\ . \tag{34.22}$$

Agora, como a pertence ao fecho de A, existe uma sequência $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset A$ que converge a a. Isso significa que para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que $d(x_k,\ a) < \epsilon$ para todo $k > N(\epsilon)$. Seja $j > N(\epsilon)$ fixo e seja c_p o elemento de C mais próximo de x_j e, portanto, tal que $d(c_p,\ x_j) < r_0/2$ (por (34.21), com $x = x_j$). Então,

$$d(a,\ c_p) \ \leq\ d(a,\ x_j) + d(x_j,\ c_p) \ <\ \epsilon + \frac{r_0}{2}\ .$$

Tomando $\epsilon < r_0/2$, obtemos $d(a,\ c_p) < r_0$, contrariando (34.22) e provando que $\overline{A}$ tem de ser pré-compacto.

Vamos agora supor que $\overline{A}$ seja pré-compacto. Se A não fosse pré-compacto existiria $r_0 > 0$ tal que para cada conjunto finito $B = \{b_j\}_{j=1}^{n} \subset A$ poderíamos encontrar um $a \in A$ tal que $d\Big(a,\ \{b_j\}_{j=1}^{n}\Big) \geq r_0$.

Como $\overline{A}$ é pré-compacto, existe um conjunto finito $\{a_j\}_{j=1}^{m} \subset \overline{A}$ tal que $d\Big(x,\ \{a_j\}_{j=1}^{m}\Big) < r_0/2$ para todo $x \in A$, pois $A \subset \overline{A}$. Como $\{a_j\}_{j=1}^{m} \subset \overline{A}$, existe para cada $\epsilon > 0$ e para cada a_j um ponto $b_j \in A$ tal que $d(a_j,\ b_j) < \epsilon$. Portanto, para esse conjunto $\{b_j\}_{j=1}^{m} \subset A$, existe $a \in A$ tal que

$$d\Big(a,\ \{b_j\}_{j=1}^{n}\Big) \ \geq\ r_0\ . \tag{34.23}$$

Seja a_k o elemento de $\{a_j\}_{j=1}^{m}$ que dista de a menos que $r_0/2$, ou seja, tal que $d(a,\ a_k) < r_0/2$. Vale

$$d(a,\ b_k) \ \leq\ d(a,\ a_k) + d(a_k,\ b_k) \ <\ \frac{r_0}{2} + \epsilon\ .$$

Escolhendo $\epsilon < r_0/2$ obtemos $d(a,\ b_k) < r_0$, contrariando (34.23) e provando que A tem de ser pré-compacto. ■

Proposição 34.23 *Seja $(M,\ d)$ um espaço métrico. Se $A \subset M$ é pré-compacto então A é d-limitado.* □

Prova. Se A é pré-compacto e $r > 0$, então existe um conjunto finito $\alpha = \{a_1,\ \ldots,\ a_m\} \subset A$ tal que as bolas $B_d(a_k,\ r)$, $k = 1,\ \ldots,\ m$, cobrem A. Sejam x e $y \in A$. Vamos supor que x pertença à bola $B_d(a_{k_1},\ r)$ e y pertença à bola $B_d(a_{k_2},\ r)$. Então,

$$d(x,\ y) \ \leq\ d(x,\ a_{k_1}) + d(a_{k_1},\ a_{k_2}) + d(a_{k_2},\ y) \ <\ 2r + d(a_{k_1},\ a_{k_2}) \ \leq\ 2r + D_\alpha\ ,$$

onde $D_\alpha := \max\{d(a_i,\ a_j),\ i,\ j = 1,\ \ldots,\ m\}$. Isso provou que $\mathrm{diam}(A) < 2r + D_\alpha$, mostrando que A é limitado. ■

A recíproca dessa proposição nem sempre é verdadeira em um espaço métrico geral. Uma exceção importante são os espaços $\mathbb{R}^n$ na topologia usual, onde todo conjunto limitado é pré-compacto. Isso é provado na Proposição 34.26, página 1594.

• Um teorema fundamental sobre compacidade em espaços métricos

O teorema que segue reúne as definições de acima, estabelecendo resultados fundamentais sobre compacidade em espaços métricos.

Teorema 34.11 *Seja $(M,\ d)$ um espaço métrico e seja τ_d a topologia induzida em M pela métrica d. Seja $A \subset M$.*

I. *São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *A é τ_d-compacto.*
2. *A é sequencialmente compacto na métrica d.*
3. *A é pré-compacto e completo na métrica d.*

II. *Se A é τ_d-compacto, então A é τ_d-fechado e d-limitado.*

III. *Se $(M,\ d)$ é um espaço métrico completo então, se A for pré-compacto, seu fecho $\overline{A}$ em τ_d é compacto, ou seja, A é relativamente compacto.*

IV. *Se $(M,\ d)$ é um espaço métrico completo então A é compacto se e somente se A for pré-compacto e τ_d-fechado.*

V. *Se $(M,\ d)$ é um espaço métrico completo e valer a propriedade que todo conjunto d-limitado é pré-compacto, então A é compacto se e somente se for τ_d-fechado e d-limitado.*

Por completeza, recordemos também aqui as afirmações do Corolário 34.3, página 1580: se $(M,\ d)$ é um espaço métrico compacto, então $(M,\ d)$ é um espaço topológico separável e segundo-contável. □

Antes de apresentarmos a demonstração desse importante teorema, façamos alguns comentários pertinentes.

a. Deve-se enfatizar o fato de os itens I e II valerem em espaços métricos gerais, mas os itens III, IV e V valerem apenas em espaços métricos completos. Vale lembrar aqui que completeza não é uma propriedade topológica, como comentado à página 1329. Para exemplos de compactos no caso de um espaço métrico não-completo (a saber, $\mathbb{Q}$), vide Exemplo 34.5, página 1591.

b. A recíproca da parte II, acima, nem sempre é verdadeira em espaços métricos, mesmo completos. Vide Exemplo 34.6, página 1591. No entanto, na condição IV indica-se condições suficientes para que uma recíproca valha: M deve ser completo e todo conjunto limitado deve ser pré-compacto. Incidentalmente, essa condição é satisfeita em $\mathbb{R}^n$ com a topologia usual. Logo, um conjunto é compacto em $\mathbb{R}^n$ na topologia usual se e somente se for fechado e limitado. Esse é o conteúdo do importante Teorema de Heine-Borel, Teorema 34.14, que apresentaremos na página 1594.

c. O Teorema 34.11 contém a afirmação que um conjunto é compacto em um espaço métrico se e somente se for pré-compacto e completo (parte I). Essa propriedade é, por vezes, denominada *propriedade de Heine-Borel de espaços métricos*, por generalizar o já mencionado Teorema de Heine-Borel de $\mathbb{R}^n$, Teorema 34.14, página 1594.

d. A propriedade definida na parte V do Teorema 34.11 é, por vezes, denominada *propriedade de Heine-Borel de espaços métricos completos*, por generalizar o já mencionado Teorema de Heine-Borel de $\mathbb{R}^n$, Teorema 34.14, página 1594.

e. O Teorema 34.11 contém a afirmação que em um espaço métrico um conjunto é compacto se e somente se for sequencialmente compacto (parte I daquele teorema). Essa afirmação é por vezes denominada *propriedade de Bolzano-Weierstrass de espaços métricos*. Associada a ela está o Teorema de Bolzano-Weierstrass dos espaços $\mathbb{R}^n$, Teorema 34.15, que veremos à página 1595.

Prova do Teorema 34.11.

Prova da parte **I**.

1 → 2. Seja A compacto e seja $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de A. Defina-se, para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n := \{a_k,\ k \geq n\} = \{a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots\} \subset A$. Seja F_n o fecho de E_n: $F_n = \overline{E_n}$.

Provemos por absurdo que $A \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) \neq \emptyset$. Se $A \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \emptyset$, então $A \subset \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^c$. Como os F_n^c são abertos, isso diz que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^c$ é um recobrimento de A por abertos. Como A, por hipótese, é compacto, existe uma coleção finita $F_{n_1}^c,\ \ldots,\ F_{n_j}^c$ que cobre A, ou seja, que satisfaz $A \subset F_{n_1}^c \cup \cdots \cup F_{n_j}^c$. Podemos supor sem perda de generalidade que $n_1 < \cdots < n_j$. Com essa convenção, vale $E_{n_1} \supset \cdots \supset E_{n_j}$. Logo, $F_{n_1} \supset \cdots \supset F_{n_j}$ (pelo item 3 da Proposição 29.4, página 1414) e, portanto, $F_{n_1}^c \subset \cdots \subset F_{n_j}^c$, o que implica $A \subset F_{n_1}^c \cup \ldots \cup F_{n_j}^c = F_{n_j}^c$. Porém, isso implica que $A \cap E_{n_j} \subset A \cap F_{n_j} = \emptyset$, o que contraria a hipótese que $E_{n_j} \subset A$.

Assim, $A \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)$ é não-vazio e podemos tomar um ponto a nesse conjunto. Por definição $a \in A$, assim como $a \in F_n$ para todo n. Como F_n é o fecho de E_n, existe (pela Proposição 29.11, página 1420) uma sequência de elementos de E_n que converge a a na métrica d. Isso provou que existe uma subsequência da sequência $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ que converge a $a \in A$, provando que A é sequencialmente compacto.

2 → 3. Seja $\{c_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy na métrica d de elementos de A. Como A é sequencialmente compacto, $\{c_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente a um elemento de A e, portanto, $\{c_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a um elemento de A, provando que A é completo. Passemos à demonstração de que A é pré-compacto, o que será feito por absurdo, supondo que A não seja pré-compacto.

Se A não fosse pré-compacto existiria $r_0 > 0$ tal que para cada conjunto finito $\{a_j\}_{j=1}^m \subset A$ poderíamos encontrar um $a \in A$ tal que $d(a,\ \{a_j\}_{j=1}^m) \geq r_0$.

Assim, tomando $b_1 \in A$, existe $b_2 \in A$ tal que $d(b_2,\ b_1) \geq r_0$. Analogamente, existe $b_3 \in A$ tal que $d(b_3,\ \{b_1,\ b_2\}) \geq r_0$, ou seja, $d(b_3,\ b_1) \geq r_0$ e $d(b_3,\ b_2) \geq r_0$. Prosseguindo indutivamente, podemos construir uma sequência $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $d(b_i,\ b_j) \geq r_0$ para todo $i \neq j$. Uma tal sequência não pode ter uma subsequência convergente, contrariando a hipótese que A é sequencialmente compacto.

3 → 1. Suponhamos, por contradição, que A não seja compacto. Então, existe um recobrimento $\mathcal{A}_0$ de A por abertos tal que $\mathcal{A}_0$ não possui nenhum sub-recobrimento finito de A. Como A é pré-compacto, existe para cada $r > 0$ um conjunto finito de pontos de A tais que as bolas de raio r centradas nesses pontos cobrem A.

Fixemos um tal $r > 0$ e sejam $B_d(a_j,\ r)$, com $a_j \in A$, $j = 1,\ \ldots,\ m$, as bolas que cobrem A. Como $\mathcal{A}_0$ cobre cada um dos conjuntos $A \cap B_d(a_j,\ r)$, $j = 1,\ \ldots,\ m$ (pois cobre A), deve haver pelo menos um conjunto $A \cap B_d(a_j,\ r)$ que não tem um sub-recobrimento finito por $\mathcal{A}_0$ pois, se tal não fosse verdade, haveria um sub-recobrimento finito para A, contrariando as hipóteses.

Seja $A \cap B_d(f_1,\ r)$ um tal conjunto para algum $f_1 \in \{a_1,\ \ldots,\ a_m\}$. Como (assim como A) o conjunto $A \cap B_d(f_1,\ r)$ não tem um sub-recobrimento finito por $\mathcal{A}_0$, podemos repetir o procedimento e obter um ponto $f_2 \in A \cap B_d(f_1,\ r)$ e uma bola de raio $r/2$ centrada em f_2, $B_d(f_2,\ r/2)$, tal que $A \cap B_d(f_1,\ r) \cap B_d(f_2,\ r/2)$ é não-vazio e não tem um sub-recobrimento finito por $\mathcal{A}_0$. Precedendo indutivamente, construímos uma sequência de pontos f_n, $n \geq 1$, com

1. $f_{n+1} \in A \cap B_d(f_1,\ r) \cap \cdots \cap B_d(f_n,\ r/2^n)$,
2. $A \cap B_d(f_1,\ r) \cap \cdots \cap B_d(f_{n+1},\ r/2^{n+1}) \neq \emptyset$,
3. $A \cap B_d(f_1,\ r) \cap \cdots \cap B_d(f_{n+1},\ r/2^{n+1})$ não tem um sub-recobrimento finito por $\mathcal{A}_0$.

Observe agora que, para $b > a$,

$$d(f_a,\ f_b) \;\leq\; \sum_{k=0}^{b-a-1} d(f_{a+k},\ f_{a+k+1}) \;<\; \sum_{k=0}^{b-a-1} \frac{r}{2^{a+k}} \;<\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r}{2^{a+k}} \;=\; \frac{r}{2^{a-1}}\,.$$

Isso estabelece que f_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy de elementos de A. Acima, na segunda desigualdade usamos o fato que $d(f_n,\ f_{n+1}) < r/2^n$, o que segue do fato que $f_{n+1} \in B_d(f_n,\ r/2^n)$.

Como A foi também suposto completo a sequência de Cauchy f_n, $n \in \mathbb{N}$, acima, converge a um ponto $f \in A$.

Como $f \in A$ e $\mathcal{A}_0$ cobre A, existe um aberto $A_f \in \mathcal{A}_0$ que contém o ponto f. Como a sequência f_n converge a f, e $f_n \in B_d(f_{n-1},\ r/2^{n-1})$, existe um p grande o suficiente tal que $B_d(f_p,\ r/2^p) \subset A_f$ (justifique!).

Isso, todavia, implica que $A \cap B_d(f_1,\ r) \cap \cdots \cap B_d(f_p,\ r/2^p) \subset B_d(f_p,\ r/2^p) \subset A_f$, contrariando o item 3 da construção indutiva das bolas $B_d(f_n,\ r/2^n)$, que previa que $A \cap B_d(f_1,\ r) \cap \cdots \cap B_d(f_p,\ r/2^p)$ não tem um recobrimento finito por elementos de $\mathcal{A}_0$. Essa contradição revela que a suposição que A não é compacto é falsa, completando a demonstração.

Prova da parte **II**. Para $x \in M$ fixo a coleção de bolas d-abertas $\mathcal{B}_x := \{B_d(x,\ r),\ r > 0\}$ é, obviamente, um recobrimento de X por d-abertos e, portanto, é também um recobrimento de A por d-abertos. Como A é compacto, $\mathcal{B}_x$ possui um subconjunto finito $\{B_d(x,\ r_1),\ \ldots,\ B_d(x,\ r_n)\}$ que também cobre A. Logo, $A \subset B_d(x,\ r_1) \cup \cdots \cup B_d(x,\ r_n) = B_d(x,\ r_*)$, onde $r_* = \max\{r_1,\ \ldots,\ r_n\}$. Isso provou que o diâmetro de A é finito e menor que $2r_*$.

Que A é também fechado segue do Teorema 34.9, página 1585, que se aplica aqui pois todo espaço métrico é Hausdorff (Proposição 32.1, página 1477).

Prova da parte **III**. Se A é pré-compacto então, pela Proposição 34.22, página 1588, $\overline{A}$ também o é. Pela Proposição 29.12, página 1421, $\overline{A}$ é também completo. Logo, pela parte I, $\overline{A}$ é compacto.

Prova da parte **IV**. Pela Proposição 29.12, página 1421, A é fechado se e somente se for completo. Assim, A será pré-compacto e completo o que, pela parte I, equivale a A ser compacto.

Prova da parte **V**. Se A é fechado e limitado então, pelas hipóteses, A é fechado e pré-compacto e, pala parte IV, isso equivale a A ser compacto. ■

Exemplo 34.5 Seja o conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ com a topologia induzida pela métrica usual: $d(r,\ s) = |r - s|$, $r,\ s \in \mathbb{Q}$. Como é bem sabido, esse espaço métrico não é completo (há sequências de racionais que não convergem a racionais). Por definição, todo d-aberto em $\mathbb{Q}$ contém intervalos do tipo $(a,\ b) \cap \mathbb{Q}$, com $a,\ b \in \mathbb{R}$. Tais intervalos contém sequências que não convergem a racionais. Assim, um conjunto só pode ser completo se tiver interior vazio nessa topologia. Logo, pela parte I-3 do Teorema 34.11, todo compacto em $\mathbb{Q}$ tem interior vazio e só pode ter como pontos de acumulação elementos de $\mathbb{Q}$. Um exemplo de compacto em $\mathbb{Q}$ é $C = \{0\} \cup \{1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Outro exemplo é $C = \{-1,\ 1\} \cup \{(-1)^n + 1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$. ⌑

Exemplo 34.6 Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita e com a topologia induzida pela norma. A bola fechada de raio 1 centrada na origem, $\overline{B_1} := \{\psi \in \mathcal{H},\ \|\psi\| \leq 1\}$, é fechada e limitada em $\mathcal{H}$. Seja $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um conjunto ortonormal em $\mathcal{H}$. Como $\|\psi_n\| = 1$, tem-se $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B_1}$. Porém, como $\|\psi_a - \psi_b\| = \sqrt{2}$ para todos $a \neq b$, conclui-se que a sequência $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não tem nenhuma subsequência convergente (em norma). Assim, $\overline{B_1}$ não é sequencialmente compacto e, portanto, não é compacto. ⌑

• Continuidade uniforme de funções em espaços métricos

Sejam M_1 e M_2 dois espaços métricos dotados de métricas d_1 e d_2, respectivamente. Uma função $f : M_1 \to M_2$ é dita ser uma *função uniformemente contínua* se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta(\epsilon) > 0$ (eventualmente dependente de ϵ) tal que $d_2(f(x),\ f(y)) < \epsilon$ sempre que $d_1(x,\ y) < \delta(\epsilon)$.

O leitor deve cuidadosamente comparar essa definição à definição de função contínua entre espaços métricos apresentada à página 1486. Toda função uniformemente contínua é contínua, mas a recíproca não é verdadeira caso δ dependa não apenas de ϵ mas também de $x \in M_1$.

Assim, uma função uniformemente contínua é uma função contínua onde a relação entre δ e ϵ pode ser escolhida da mesma forma em todo o seu domínio.

Exemplo 34.7 Seja $f : (0,\ \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$. Para cada $\epsilon > 0$ e cada $x \in (0,\ \infty)$ podemos tomar $\delta(x,\ \epsilon) = \frac{\epsilon x^2}{1+\epsilon x}$ e teremos que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ sempre que $|x - y| < \delta(x,\ \epsilon)$ (verifique!). Assim, f é contínua. Porém, f não é uniformemente contínua, pois para x indo a zero somos forçados a escolher δ cada vez menor. Traçar o gráfico de f pode ajudar a compreensão desse ponto. ⌑

De grande importância é o fato que toda função contínua entre espaços métricos definida em um espaço métrico compacto é uniformemente contínua (Teorema 34.12, abaixo). Essa afirmação, frequentemente denominada *Teorema de Heine-Cantor*, é uma das consequências mais importantes da noção de compacidade e é empregado em diversas demonstrações importantes, por exemplo, nas demonstrações da Seção 37.3.1, página 1795, nas demonstrações da Seção 37.4, página 1809. Antes de demonstrá-lo tratemos de apresentar uma caracterização equivalente da noção de continuidade uniforme.

Proposição 34.24 *Sejam M_1 e M_2 dois espaços métricos dotados de métricas d_1 e d_2, respectivamente. $f : M_1 \to$*

M_2 é uniformemente contínua se e somente se para todas as sequências x_n e y_n em M_1 para as quais tenhamos $\lim_{n\to\infty} d_1(x_n,\ y_n) = 0$ valha também $\lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n),\ f(y_n)) = 0$. □

Prova. Vamos supor que para todas as sequências x_n e y_n em M_1 para as quais tenhamos $\lim_{n\to\infty} d_1(x_n,\ y_n) = 0$ valha $\lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n),\ f(y_n)) = 0$. Se f não é uniformemente contínua, então existe $\epsilon > 0$ tal que para nenhum $\delta > 0$ a condição $d_1(x,\ y) < \delta$ implica $d_2(f(x),\ f(y)) < \epsilon$. Assim, em particular, para cada $n > 0$ podemos encontrar dois pontos x_n e y_n em M_1 tais que se $d_1(x_n,\ y_n) < 1/n$ então $d_2(f(x_n),\ f(y_n)) \geq \epsilon$. Assim, para esse par de sequências x_n e y_n em M_1 teremos $\lim_{n\to\infty} d_1(x_n,\ y_n) = 0$, mas $\lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n),\ f(y_n)) \geq \epsilon > 0$. Essa contradição mostra que f deve ser uniformemente contínua.

Vamos agora supor que f seja uniformemente contínua e sejam x_n e y_n duas sequências em M_1 tais que $\lim_{n\to\infty} d_1(x_n,\ y_n) = 0$. Como f é uniformemente contínua existe para todo $\epsilon > 0$ um $\delta(\epsilon) > 0$ tal que se x_n e y_n satisfizerem $d_1(x_n,\ y_n) < \delta(\epsilon)$ então $d_2(f(x_n),\ f(y_n)) < \epsilon$. Como $\lim_{n\to\infty} d_1(x_n,\ y_n) = 0$, existe $N(\delta(\epsilon))$ tal que $d_1(x_n,\ y_n) < \delta(\epsilon)$ sempre que $n > N(\delta(\epsilon))$. Concluímos que para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\delta(\epsilon))$ tal que para todo $n > N(\delta(\epsilon))$ vale $d_2(f(x_n),\ f(y_n)) < \epsilon$. Isso provou que $\lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n),\ f(y_n)) = 0$. ■

Exemplo 34.8 Retornando ao Exemplo 34.7, as sequências $x_n = 1/(2n)$ e $y_n = 1/n$ satisfazem $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$, mas $\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = \lim_{n\to\infty} |2n - n| = \infty$, o que mais uma vez mostra que f não é uniformemente contínua. ⌑

Chegamos ao nosso principal objetivo.

Teorema 34.12 (Teorema de Heine-Cantor) *Sejam M_1 e M_2 dois espaços métricos dotados de métricas d_1 e d_2, respectivamente. Se M_1 é d_1-compacto e $f : M_1 \to M_2$ é uma função contínua, então f é uniformemente contínua.* □

Prova. Vamos supor que f não seja uniformemente contínua. Então, pela Proposição 34.24, existe um par de sequências x_n e y_n em M_1 para as quais temos $\lim_{n\to\infty} d_1(x_n,\ y_n) = 0$ mas $\lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n),\ f(y_n)) \neq 0$. Deve, portanto, existir um $\epsilon > 0$ tal que $d_2(f(x_n),\ f(y_n)) \geq \epsilon$ para infinitos n's. Assim, existem duas subsequências a_k e b_k de x_n e y_n, respectivamente, tais que $d_2(f(a_k),\ f(b_k)) \geq \epsilon$ para todo k. Como M_1 é compacto, cada uma dessas subsequências possui uma subsequência convergente (pela item 2 da parte I do Teorema 34.11, página 1589), que denotaremos por $\overline{a}_l$ e $\overline{b}_l$, respectivamente, cujos limites são $\overline{a}$ e $\overline{b}$, respectivamente. Naturalmente, vale também

$$d_2\big(f(\overline{a}_l),\ f(\overline{b}_l)\big) \ \geq \ \epsilon \tag{34.24}$$

para todo l. Notemos, porém, que como $\lim_{n\to\infty} d_1\big(x_n,\ y_n\big) = 0$, vale também que $\lim_{l\to\infty} d_1\big(\overline{a}_l,\ \overline{b}_l\big) = 0$, pois $\overline{a}_l$ e $\overline{b}_l$ são subsequências de x_n e y_n, respectivamente. Assim, temos que

$$d_1\big(\overline{a},\ \overline{b}\big) \ \leq \ d_1\big(\overline{a},\ \overline{a}_l\big) + d_1\big(\overline{a}_l,\ \overline{b}_l\big) + d_1\big(\overline{b}_l,\ \overline{b}\big)$$

e tomando o limite $l \to \infty$ o lado direito vai a zero, pois $\overline{a} = \lim_{l\to\infty} \overline{a}_l$ e $\overline{b} = \lim_{l\to\infty} \overline{b}_l$. Isso provou que $d_1\big(\overline{a},\ \overline{b}\big) = 0$, ou seja, que $\overline{a} = \overline{b}$.

Por outro lado,

$$d_2\big(f(\overline{a}_l),\ f(\overline{b}_l)\big) \ \leq \ d_2\big(f(\overline{a}_l),\ f(\overline{a})\big) + d_2\big(f(\overline{a}),\ f(\overline{b})\big) + d_2\big(f(\overline{b}),\ f(\overline{b}_l)\big) \ \stackrel{f(\overline{a})=f(\overline{b})}{=} \ d_2\big(f(\overline{a}_l),\ f(\overline{a})\big) + d_2\big(f(\overline{b}),\ f(\overline{b}_l)\big)\ .$$

Como f é contínua, valem $\lim_{l\to\infty} d_2(f(\overline{a}_l),\ f(\overline{a})) = 0$ e $\lim_{l\to\infty} d_2(f(\overline{b}_l),\ f(\overline{b})) = 0$. Logo, concluímos pela desigualdade acima que $\lim_{l\to\infty} d_2(f(\overline{a}_l),\ f(\overline{b}_l)) = 0$, contrariando (34.24). Essa contradição estabelece que f é uniformemente contínua. ■

A noção de continuidade uniforme e a prova do Teorema 34.12 advêm de trabalhos de Heine[22] de 1870.

[22] Heinrich Eduard Heine (1821–1881).

• **Continuidade uniforme e sequências de Cauchy**

A próxima proposição pode também ser obtida da Proposição 34.24 e será útil no que segue.

Proposição 34.25 *Sejam M_1 e M_2 dois espaços métricos dotados de métricas d_1 e d_2, respectivamente e seja $f : M_1 \to M_2$ uma função uniformemente contínua. Se x_n é uma sequência de Cauchy em M_1 em relação à métrica d_1 então $f(x_n)$ é uma sequência de Cauchy em M_2 em relação à métrica d_2.* □

Prova. Pela continuidade uniforme de f, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$ sempre que $d_1(x, y) < \delta(\epsilon)$. Como x_n é uma sequência de Cauchy, existe $N(\delta(\epsilon))$ tal que $d_1(x_n, x_m) < \delta(\epsilon)$ para todos $n, m > N(\delta(\epsilon))$. Logo, para $n, m > N(\delta(\epsilon))$ vale $d_2(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon$, provando que $f(x_n)$ é uma sequência de Cauchy em M_2 em relação à métrica d_2. ■

• **Extensão de funções uniformemente contínuas**

A Proposição 34.25 tem por consequência a possibilidade de se estender funções uniformemente contínuas densamente definidas em um espaço métrico.

Teorema 34.13 *Sejam M_1 e M_2 dois espaços métricos dotados de métricas d_1 e d_2, respectivamente, sendo que M_2 é suposto ser completo em relação a d_2. Seja $D \subset M_1$ um subconjunto denso de M_1 (i.e., $\overline{D} = M_1$) e seja $f : D \to M_2$ uma função uniformemente contínua. Então, f possui uma extensão $\tilde{f} : M_1 \to M_2$ que é também uniformemente contínua e essa função $\tilde{f}$ é a única extensão contínua de f a M_1.* □

Prova. O primeiro passo é definir $\tilde{f}$. Depois provaremos que a mesma é uniformemente contínua. Como $\overline{D} = M_1$, existe para cada ponto $x \in M_1$ uma sequência x_n de elementos de D que converge a x (Proposição 29.11, página 1420). Como a sequência x_n é convergente, é também uma sequência de Cauchy. Logo, $f(x_n)$ é, pela Proposição 34.25, uma sequência de Cauchy em M_2 na métrica d_2. Como M_2 é completo na métrica d_2, $f(x_n)$ converge a um ponto $z \in M_2$. Se y_n fosse uma outra sequência em D que converge a x valeria

$$d_1(x_n, y_n) \leq d_1(x_n, x) + d_1(x, y_n)$$

de onde segue que $\lim_{n\to\infty} d_1(x_n, y_n) = 0$ pois, por hipótese, $\lim_{n\to\infty} d_1(x_n, x) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} d_1(x, y_n) = 0$. Logo, pela Proposição 34.25 segue que $\lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n), f(y_n)) = 0$. Como

$$d_2(z, f(y_n)) \leq d_2(z, f(x_n)) + d_2(f(x_n), f(y_n))$$

e $\lim_{n\to\infty} d_2(z, f(x_n)) = 0$, segue que $\lim_{n\to\infty} d_2(z, f(y_n)) = 0$.

Isso nos ensina que se x_n e y_n são duas sequências em D que convergem a $x \in M_1$ o limite das sequências $f(x_n)$ e $f(y_n)$ existe e é o mesmo.

Para cada $x \in M_2$ definimos, então, $\tilde{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ para qualquer sequência x_n em D que converge a x. É de se observar que $\tilde{f}$ é uma extensão de f, pois se $x \in D$ podemos tomar a sequência constante $x_n = x$ e teríamos $\tilde{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)$, provando que $\tilde{f}$ coincide com f em D.

Agora provaremos que $\tilde{f}(x)$ é uniformemente contínua. Como f é uniformemente contínua em D, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$ sempre que $d_1(x, y) < \delta(\epsilon)$. Fixemos $\epsilon > 0$. Se $x, y \in M_1$, existem sequências x_n e y_n em D que convergem a x e y, respectivamente. Pela desigualdade triangular, podemos escrever

$$d_2\big(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)\big) \leq d_2\big(\tilde{f}(x), f(x_n)\big) + d_2\big(f(x_n), f(y_n)\big) + d_2\big(f(y_n), \tilde{f}(y)\big) \tag{34.25}$$

Por outro lado, tem-se, também pela desigualdade triangular,

$$d_1(x_n, y_n) \leq d_1(x_n, x) + d_1(x, y) + d_1(y, y_n)$$

e se escolhermos n grande o suficiente, teremos $d_1(x_n, x) < \frac{\delta(\epsilon/3)}{3}$ e $d_1(y_n, y) < \frac{\delta(\epsilon/3)}{3}$, já que x_n e y_n são sequências em D que convergem a x e y, respectivamente. Logo, se tomarmos x e y tais que $d_1(x, y) < \frac{\delta(\epsilon/3)}{3}$, valerá $d_1(x_n, y_n) \leq \delta(\epsilon/3)$ e,

portanto, $d_2\big(f(x_n), f(y_n)\big) < \epsilon/3$. Também para n grande o suficiente valerão $d_2\big(\tilde{f}(x), f(x_n)\big) < \epsilon/3$ e $d_2\big(\tilde{f}(y), f(y_n)\big) < \epsilon/3$, pela definição de $\tilde{f}$. Logo, por (34.25), $d_2\big(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)\big) < \epsilon$. Isso demonstrou que $\tilde{f}$ é uniformemente contínua.

Resta-nos provar a unicidade. Vamos supor que exista uma outra função contínua $g : M_1 \to M_2$ que estenda f. Tomemos $x \in M_1$ e seja x_n uma sequência em D que converge a x. Pela desigualdade triangular, vale

$$d_2\big(g(x), \tilde{f}(x)\big) \leq d_2\big(g(x), f(x_n)\big) + d_2\big(f(x_n), \tilde{f}(x)\big) = d_2\big(g(x), g(x_n)\big) + d_2\big(f(x_n), \tilde{f}(x)\big) ,$$

sendo que na igualdade ao final usamos o fato que g coincide com f em D. Tomando o limite $n \to \infty$ teremos, devido à continuidade de g, que $\lim_{n\to\infty} d_2\big(g(x), g(x_n)\big) = 0$, pois x_n converge a x. Igualmente, pela definição de $\tilde{f}$, vale $\lim_{n\to\infty} d_2\big(f(x_n), \tilde{f}(x)\big) = 0$. Isso provou que $d_2\big(g(x), \tilde{f}(x)\big) = 0$ para cada $x \in M_1$, estabelecendo que $g = \tilde{f}$. ■

34.3.3.3 Compacidade em $\mathbb{R}^n$

Nesta seção reunimos alguns dos teoremas mais relevantes concernentes à propriedade de compacidade em espaços $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Estaremos usando implicitamente o fato de que cada $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico completo em relação à métrica Euclidiana usual $d_E(x, y) := \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$.

• **Pré-compacidade em $\mathbb{R}^n$**

Proposição 34.26 *Seja $\mathbb{R}^n$ com a métrica Euclidiana usual d_E. Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é limitado se e somente se for pré-compacto.* □

Prova. Pela Proposição 34.23, página 1588, basta demonstrar que todo conjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ é pré-compacto. Defina-se, para $t > 0$ o conjunto $R(t) \subset \mathbb{R}^n$ cujas componentes sejam da forma k/t com $k \in \mathbb{Z}$:

$$R(t) := \left\{ \frac{1}{t}\underline{k}, \quad \underline{k} \in \mathbb{Z}^n \right\} = \left\{ \left(\frac{k_1}{t}, \ldots, \frac{k_n}{t} \right), \; k_j \in \mathbb{Z}, \; j = 1, \ldots, n \right\} .$$

É fácil ver geometricamente que cada ponto de $\mathbb{R}^n$ dista, na métrica d_E, no máximo $t\sqrt{n}/2$ de algum ponto de $R(t)$. Assim, a coleção de todas as bolas abertas de raio $t(1 + \sqrt{n}/2)$ centradas nos pontos de $R(t)$ cobrem $\mathbb{R}^n$. Isso equivale a dizer que, para cada $r > 0$, a coleção de todas as bolas abertas de raio r centradas nos pontos de $R(t(r))$, com $t(r) = r/(1 + \sqrt{n}/2)$, cobrem $\mathbb{R}^n$.

Se A é limitado, há uma coleção finita de bolas de raio $r/2$ centradas em pontos de $R(t(r/2))$ que cobrem A. Sejam $B(x_1, r/2), \ldots, B(x_m, r/2)$, com $x_k \in R(t(r/2))$ para cada k, a menor coleção de bolas que cobrem A e tem intersecção não-vazia com A. Como cada bola $B(x_k, r/2)$ tem intersecção não-vazia com A, podemos escolher, para cada k, um ponto $a_k \in A \cap B(x_k, r/2)$. Agora, a bola de raio r centrada em a_k contém a bola $B(x_k, r/2)$, logo, a coleção de bolas $B(a_k, r)$, $k = 1, \ldots, m$, cobre A, estabelecendo a pré-compacidade de A. ■

• **O Teorema de Heine-Borel em $\mathbb{R}^n$**

Como já comentamos, a recíproca da parte II do Teorema 34.11, página 1589, nem sempre é verdadeira em espaços métricos. No entanto, no caso específico de $\mathbb{R}^n$ essa recíproca é válida devido à Proposição 34.26, página 1594. Esse é o conteúdo do importante Teorema de Heine[23]-Borel[24]:

Teorema 34.14 (Teorema de Heine-Borel em $\mathbb{R}^n$) *Um conjunto em $\mathbb{R}^n$ é compacto em relação à topologia métrica usual de $\mathbb{R}^n$ se e somente se for fechado e limitado.* □

Prova. $M = \mathbb{R}^n$ é completo na métrica d_E. Pela Proposição 34.26, página 1594, todo conjunto d_E-limitado é pré-compacto em $\mathbb{R}^n$. Logo, o Teorema 34.14 é uma consequência imediata da parte V do Teorema 34.11, página 1589. ■

[23]Heinrich Eduard Heine (1821–1881).
[24]Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956).

A seguinte proposição será usada adiante.

Proposição 34.27 *Todo subconjunto $\tau_{\mathbb{R}}$-compacto de $\mathbb{R}$ tem um máximo e um mínimo.* □

Prova. Se $C \subset \mathbb{R}$ é compacto, então é $\tau_{\mathbb{R}}$-fechado e limitado na métrica usual (Teorema 34.14). Se C é limitado, então C possui ao menos um majorante. Seja $y = \sup\{x \in C\}$ o menor dos majorantes de C. Se $y \notin C$, então $y \in C^c$, que é um conjunto $\tau_{\mathbb{R}}$-aberto (pois C é $\tau_{\mathbb{R}}$-fechado). Logo, pela definição de conjuntos abertos em espaços métricos, existe um intervalo aberto $(y - \delta,\ y + \delta)$, centrado em y, que está inteiramente contido em C^c. Portanto, todo ponto em $(y - \delta,\ y)$ não pertence a C mas majora C. Isso contradiz a hipótese que y é o menor majorante de C. Assim, deve valer que $y \in C$ e, portanto, que C tem um máximo. A prova que C tem um mínimo é análoga. ■

• O Teorema de Bolzano-Weierstrass em $\mathbb{R}^n$

O seguinte teorema, originalmente devido a Bolzano[25] e Weierstrass[26], é muito frequentemente empregado em demonstrações:

Teorema 34.15 (Teorema de Bolzano-Weierstrass em $\mathbb{R}^n$) *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente na métrica d_E.* □

Prova. Se uma sequência é limitada em $\mathbb{R}^n$, então está contida em uma bola fechada de raio suficientemente grande centrada, digamos, na origem. Essa bola, sendo fechada e limitada, é compacta, pela parte V do Teorema 34.11, página 1589. Assim, pelo item 2 da parte I do mesmo teorema, a sequência tem uma subsequência convergente. ■

• Existência de máximos e mínimos para funções reais definidas em compactos

O seguinte teorema de aparência elementar tem várias consequências não-triviais, sendo frequentemente evocado.

Teorema 34.16 *Seja $(C,\ \tau)$ um espaço topológico compacto e $f : C \to \mathbb{R}$ uma função contínua (adotando em $\mathbb{R}$ a topologia usual $\tau_{\mathbb{R}}$). Então, f assume em C um valor máximo e um valor mínimo, ou seja, existem x_{max} e $x_{min} \in C$ (não necessariamente únicos) tais que $f(x_{max}) = \max\{f(x),\ x \in C\}$ e $f(x_{min}) = \min\{f(x),\ x \in C\}$.* □

Prova. Pelo Teorema 34.5, página 1582, a imagem de f é um conjunto $\tau_{\mathbb{R}}$-compacto e, portanto, pela Proposição 34.27, página 1595, a imagem de f tem um máximo e um mínimo. ■

34.3.3.4 Compacidade na Reta de Sorgenfrey

A topologia de Sorgenfrey $\tau[\mathbb{S}]$ de $\mathbb{R}$ foi introduzida na Seção 29.2.1.1, à página 1406. Vamos aqui estabelecer o seguinte fato:

Proposição 34.28 *Se C é um conjunto compacto do espaço topológico $(\mathbb{R},\ \tau[\mathbb{S}])$ (a chamada* reta de Sorgenfrey*), então C é um conjunto $\tau[\mathbb{S}]$-fechado, limitado e contável (i.e., finito ou infinito enumerável). C é também $\tau_{\mathbb{R}}$-compacto e $\tau_{\mathbb{R}}$-fechado.*

Fora isso, C não pode possuir pontos de acumulação (na topologia usual) à esquerda[27], mas necessariamente contém seus pontos de acumulação (na topologia usual) à direita, se os houver, o que se dá se C for um conjunto infinito. □

Nota. O Exercício E. 34.15, página 1596, auxilia no esclarecimento do enunciado da Proposição 34.28. ♣

Prova da Proposição 34.28.[28] Seja C um $\tau[\mathbb{S}]$-compacto não-vazio. Como $\tau[\mathbb{S}]$ possui a propriedade de Hausdorff, o

[25] Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848).

[26] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897).

[27] Na topologia usual de $\mathbb{R}$, um ponto $x \in \mathbb{R}$ é dito ser um ponto de acumulação à esquerda (à direita) de $C \subset \mathbb{R}$ se houver em C uma sequência crescente (decrescente) c_n, $n \in \mathbb{N}$, tal que $x = \lim_{n\to\infty} c_n$. Naturalmente, pode haver pontos que são simultaneamente de acumulação à direita e à esquerda.

[28] Agradecemos a Ricardo Correa da Silva por elucidações sobre o enunciado da Proposição 34.28.

Teorema 34.9, página 1585, garante que C é $\tau[\mathbb{S}]$-fechado. Como $\tau_{\mathbb{R}} \subset \tau[\mathbb{S}]$, todo recobrimento de C por $\tau_{\mathbb{R}}$-abertos possui, por hipótese, um sub-recobrimento finito, também por $\tau_{\mathbb{R}}$-abertos. Isso mostra que C é igualmente $\tau_{\mathbb{R}}$-compacto e, portanto, $\tau_{\mathbb{R}}$-fechado e limitado (pelo Teorema de Heine-Borel, Teorema 34.14, página 1594).

Para provar que C é contável, tomemos $c \in C$ e consideremos o seguinte recobrimento de C por $\tau[\mathbb{S}]$-abertos:

$$\left\{\left(-\infty,\ c - \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \{[c,\ \infty)\} .$$

Como C é suposto compacto, o recobrimento acima possui um subconjunto finito que igualmente recobre C, ou seja, existe $\{n_1,\ \ldots,\ n_k\} \subset \mathbb{N}$ para algum $k \in \mathbb{N}$, e com $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, tal que

$$C \ \subset \ \left(-\infty,\ c - \frac{1}{n_1}\right) \cup \cdots \cup \left(-\infty,\ c - \frac{1}{n_k}\right) \cup [c,\ \infty) .$$

Pelas nossas escolhas, o conjunto à direita é igual a $\left(-\infty,\ c - \frac{1}{n_k}\right) \cup [c,\ \infty)$ e concluímos que

$$C \ \subset \ \left(-\infty,\ c - \frac{1}{n_k}\right) \cup [c,\ \infty) .$$

Disso é fácil chegar à seguinte conclusão: existe $g(c) \in \mathbb{Q}$ com $g(c) < c$ tal que o intervalo semiaberto $\big(g(c),\ c\big]$ satisfaz $\big(g(c),\ c\big] \cap C = \{c\}$. De fato, basta escolher $g(c) \in \left[c - \frac{1}{n_k},\ c\right) \cap \mathbb{Q}$, um conjunto seguramente não-vazio.

Note-se agora que se c' é um elemento de C distinto de c, teremos $\big(g(c),\ c\big] \cap \big(g(c'),\ c'\big] = \emptyset$ pois, caso contrário, teríamos ou $c \in \big(g(c),\ c\big] \cap \big(g(c'),\ c'\big]$ ou $c' \in \big(g(c),\ c\big] \cap \big(g(c'),\ c'\big]$, o que é proibido pelo fato já estabelecido que afirma que o único elemento que $\big(g(c),\ c\big]$ e C têm em comum é c e, analogamente, o único elemento que $\big(g(c'),\ c'\big]$ e C têm em comum é c'.

Essa observação traz como implicação que a aplicação $C \ni c \mapsto g(c) \in \mathbb{Q}$ é injetora. De fato, se assim não fosse, haveria c e c' distintos em C tais que $g(c) = g(c')$, o que implicaria que $\big(g(c),\ c\big] \cap \big(g(c'),\ c'\big] = \big(g(c),\ c\big] \cap \big(g(c),\ c'\big]$, que não é vazio, uma contradição com o que foi provado acima.

O fato de a aplicação $C \ni c \mapsto g(c) \in \mathbb{Q}$ ser injetora estabelece que C é contável (pois $\mathbb{Q}$ é enumerável).

Como C é $\tau_{\mathbb{R}}$-fechado, ele contém seus pontos de acumulação (na topologia usual, $\tau_{\mathbb{R}}$), se os houver. Porém, do exposto acima aprende-se também que esses pontos de acumulação de C não podem ser pontos de acumulação à esquerda (na topologia usual). De fato, se um tal ponto x pertencesse a C haveria uma contradição com a existência de um intervalo semiaberto $(g(x),\ x]$ com $(g(x),\ x] \cap C = \{x\}$. ■

Nota adicional. Pelo Corolário 29.1, página 1418, o fato de C ser $\tau[\mathbb{S}]$-fechado implica que C possui seus próprios pontos de acumulação na topologia $\tau[\mathbb{S}]$. É fácil provar (faça-o!) que os pontos de acumulação em $\tau[\mathbb{S}]$ não podem ser pontos de acumulação à esquerda, mas somente à direita (na topologia usual). Isso ajuda a esclarecer a parcela do enunciado referente aos pontos de acumulação. ♣

Por serem contáveis, os conjuntos $\tau[\mathbb{S}]$-compactos têm interior vazio. Portanto, uma consequência da Proposição 34.28 é a seguinte afirmação relevante:

Proposição 34.29 *A reta de Sorgenfrey $(\mathbb{R},\ \tau[\mathbb{S}])$ **não** é um espaço topológico localmente compacto.* □

Prova. Se $x \in \mathbb{R}$ e A é um aberto contendo x, não existe nenhum conjunto $\tau[\mathbb{S}]$-compacto contendo A, pois A não é enumerável (todo conjunto $\tau[\mathbb{S}]$-aberto contém um intervalo do tipo $[a,\ b)$ no seu interior). ■

Mais desenvolvimentos sobre espaços localmente compactos são apresentados na Seção 34.3.6, página 1609.

. . ..

E. 34.15 *Exercício*. Para tornar mais claro o enunciado da Proposição 34.28, observe-se que ela afirma, por exemplo, que

- $G_1 := \{1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$ **não é** $\tau[\mathbb{S}]$-compacto.
- $G_2 := \{0\} \cup \{1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$ **é** $\tau[\mathbb{S}]$-compacto.

- $G_3 := \{1 - 1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$ **não é** $\tau[\mathcal{S}]$-compacto.
- $G_4 := \{1 - 1/n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$ **não é** $\tau[\mathcal{S}]$-compacto.

Note que

- G_1 e G_2 possuem um ponto de acumulação à direita, a saber, 0, sendo que $0 \notin G_1$ e $0 \in G_2$.
- G_3 e G_4 possuem um ponto de acumulação à esquerda, a saber, 1, sendo que $1 \notin G_3$ e $1 \in G_4$.

Mostre que

- $\big\{[1/(m+1),\ 1/m),\ m \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{[1,\ \infty)\big\}$ é um recobrimento de G_1 por $\tau[\mathcal{S}]$-abertos que não possui nenhum sub-recobrimento finito.
- Qualquer recobrimento de G_2 por $\tau[\mathcal{S}]$-abertos possui um sub-recobrimento finito, pois um tal recobrimento necessariamente conterá um aberto do tipo $[a,\ b)$ com $a \leq 0$ e $b > 0$ (e que contém 0) e esse aberto por si só contém todos os elementos de G_2, exceto eventualmente um subconjunto finito deles.
- $\big\{[1 - 1/m,\ 1 - 1/(m+1)),\ m \in \mathbb{N}\big\}$ é um recobrimento de G_3 por $\tau[\mathcal{S}]$-abertos que não possui nenhum sub-recobrimento finito.
- $\big\{[1-1/m,\ 1-1/(m+1)),\ m \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{[1,\ 2)\big\}$ é um recobrimento de G_4 por $\tau[\mathcal{S}]$-abertos que não possui nenhum sub-recobrimento finito.

Constate a consistência as afirmações de acima com o enunciado da Proposição 34.28. ✣

34.3.4 Os Teoremas de Ascoli e de Arzelà

Em meio a esta discussão sobre compacidade vamos inserir um resultado fundamental de Análise que é evocado em outros momentos nestas Notas, por exemplo, na demonstração do Teorema de Peano sobre existência de soluções de certas equações diferenciais ordinárias ou na discussão sobre operadores compactos em espaços de Banach. O resultado a que nos referimos é o Teorema 34.18, página 1599, conhecido na literatura como Teorema de Ascoli (ou de Ascoli-Arzelá). A relevância desse teorema está em fornecer condições suficientes para que uma sequência de funções de um compacto em um espaço métrico completo tenha uma subsequência uniformemente convergente. Um resultado relacionado, devido a Arzelá (Teorema 34.17, página 1599), discute a necessidade dessas condições.

Para apresentarmos esses resultados temos que introduzir alguns conceitos relevantes, como o que equicontinuidade de famílias de funções.

34.3.4.1 Equilimitação e Equicontinuidade de Famílias de Funções

• Equilimitação de uma família de funções sobre um espaço métrico

Seja X um conjunto não-vazio e seja $(M,\ d)$ um espaço métrico. Segundo definição que introduzimos na Seção 27.4, página 1332, uma função $f : X \to M$ é dita ser *função d-limitada* (ou simplesmente uma *função limitada* quando a métrica d estiver implícita) se existir um ponto de referência $y \in M$ e uma constante $K \geq 0$ tais que $d\big(f(x),\ y\big) \leq K$ para todo $x \in X$. Conforme discutimos naquela seção, a definição de função limitada dada acima independe do ponto de referência $y \in M$ tomado, podendo este ser substituído por qualquer outro, eventualmente mudando a constante K adotada. Podemos, portanto dizer que $f : X \to M$ é d-limitada se para algum $y \in M$ valer $\sup\Big\{d\big(f(x),\ y\big),\ x \in X\Big\} < \infty$.

Como na Seção 27.4, denotamos o conjunto das funções d-limitadas de X em M por $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$. Lá vimos também que $\mathcal{B}(X,\ M,\ d)$ é um espaço métrico com a métrica d_∞ definida em (27.19), página 1333: $d_\infty(f,\ g) := \sup\Big\{d\big(f(x),\ g(x)\big),\ x \in X\Big\}$ com $f,\ g \in \mathcal{B}(X,\ M,\ d)$.

Vamos agora apresentar algumas definições relevantes referentes a famílias de funções de X em M:

- Uma família $\mathcal{F}$ de funções de X em M é dita ser uma *família pontualmente equilimitada de funções* se para algum $y \in M$ valer $\sup\big\{d\big(f(x),\ y\big),\ f \in \mathcal{F}\big\} < \infty$ e para todo $x \in X$.

  Assim, uma família $\mathcal{F}$ de funções de X em $\mathbb{C}$ é uma família pontualmente equilimitada se para algum $y \in M$ existir para cada $x \in X$ um número $\mathcal{M}_x \geq 0$ (eventualmente dependente de x) tal que $d\big(f(x),\ y\big) \leq \mathcal{M}_x$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

- Uma família $\mathcal{F}$ de funções de X em $\mathbb{C}$ é dita ser uma *família equilimitada de funções* (ou *globalmente equilimitada*) se todos os seus elementos forem funções limitadas e se para alguma função limitada $g : X \to M$ valer $\sup\big\{d_\infty\big(f,\ g\big),\ f \in \mathcal{F}\big\} < \infty$.

  Assim, uma família $\mathcal{F}$ de funções de X em $\mathbb{C}$ é uma família equilimitada se para alguma função limitada $g : X \to M$ existir $\mathcal{M} \geq 0$ tal que $d\big(f(x),\ g(x)\big) \leq \mathcal{M}$ para todo $x \in X$ e toda $f \in \mathcal{F}$.

É evidente que toda família equilimitada de funções é uma família pontualmente equilimitada de funções (tome-se uma função $g(x) = y$, constante).

• Equilimitação de uma família de funções sobre $\mathbb{C}$

Para tornar as definições de acima mais claras, vamos mostrar como as mesmas ficam quando lidamos com funções sobre o espaço métrico $\mathbb{C}$ dos números complexos (ou funções sobre espaços vetoriais normados, como $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ etc.).

Seja X um conjunto não-vazio. Uma função $f : X \to \mathbb{C}$ é dita ser uma *função limitada* se existir $\mathcal{M} \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq \mathcal{M}$ para todo $x \in X$. Para $f : X \to \mathbb{C}$ limitada, definimos $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|,\ x \in X\}$.

Para famílias de funçoes de X em $\mathbb{C}$ temos as seguintes definições relevantes:

- Uma família $\mathcal{F}$ de funções de X em $\mathbb{C}$ é dita ser uma *família pontualmente equilimitada de funções* se para cada $x \in X$ valer $\sup\big\{|f(x)|,\ f \in \mathcal{F}\big\} < \infty$.

  Assim, uma família $\mathcal{F}$ de funções de X em $\mathbb{C}$ é uma família pontualmente equilimitada se para cada $x \in X$ existir $\mathcal{M}_x \geq 0$ (eventualmente dependente de x) tal que vale $|f(x)| \leq \mathcal{M}_x$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

- Uma família $\mathcal{F}$ de funções de X em $\mathbb{C}$ é dita ser uma *família equilimitada de funções* (ou *globalmente equilimitada*) se todos os seus elementos forem funções limitadas e se valer $\sup\big\{\|f\|_\infty,\ f \in \mathcal{F}\big\} < \infty$.

  Assim, uma família $\mathcal{F}$ de funções de X em $\mathbb{C}$ é uma família equilimitada se existir $\mathcal{M} \geq 0$ tal que vale $|f(x)| \leq \mathcal{M}$ para todo $x \in X$ e toda $f \in \mathcal{F}$.

É evidente que toda família equilimitada de funções é uma família pontualmente equilimitada de funções.

• Equicontinuidade de uma família de funções sobre um espaço métrico

Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico e seja $(M,\ d)$ um espaço métrico. Uma família $\mathcal{F}$ de funções de X em M é dita ser uma *família equicontínua de funções* se para todo $\epsilon > 0$ e para cada $x \in X$ existir um τ-aberto $V(\epsilon,\ x) \ni x$ (eventualmente dependente de ϵ e de x) tal que para toda $f \in \mathcal{F}$ valha $d\big(f(x),\ f(y)\big) < \epsilon$ sempre que $y \in V(\epsilon,\ x)$.

O ponto central da definição é que, para cada $\epsilon > 0$ e cada $x \in X$, a vizinhança aberta $V(\epsilon,\ x)$ de x mencionada acima pode ser escolhida a mesma para toda $f \in \mathcal{F}$, dai a razão de se denominar uma tal família como *equi*-contínua.

É evidente que todos os elementos de uma família equicontínua de funções são funções contínuas de X em M (em relação à topologia τ de X e à topologia usual de τ_d de M induzida pela métrica d) e, portanto, limitadas, pois X é compacto (vide Corolário 27.2, página 1335).

• Equicontinuidade de uma família de funções sobre $\mathbb{C}$

Para tornar as definições de acima mais claras, vamos mostrar como as mesmas ficam quando ligamos com funções sobre o espaço métrico $\mathbb{C}$ dos números complexos (ou funções sobre espaços vetoriais normados, como $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ etc.).

Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico. Uma família $\mathcal{F}$ de funções de X em $\mathbb{C}$ é dita ser uma *família equicontínua de funções* se para todo $\epsilon > 0$ e para cada $x \in X$ existir um τ-aberto $V(\epsilon,\ x) \ni x$ (eventualmente dependente de ϵ e de x) tal que para toda $f \in \mathcal{F}$ valha $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ sempre que $y \in V(\epsilon,\ x)$.

É evidente que todos os elementos de uma família equicontínua de funções são funções contínuas de X em $\mathbb{C}$ (em relação à topologia τ de X e à topologia usual de $\mathbb{C}$).

O ponto central da definição é que, para cada $\epsilon > 0$ e cada $x \in X$, a vizinhança aberta $V(\epsilon,\ x)$ de x mencionada acima pode ser escolhida a mesma para toda $f \in \mathcal{F}$, dai a razão de se denominar uma tal família como *equi*-contínua.

34.3.4.2 Os Teoremas de Ascoli e de Arzelà para Famílias de Funções de um Compacto sobre um Espaço Métrico

Seja (X, τ) um espaço topológico com X sendo τ-compacto, seja (M, d) um espaço métrico. Denotemos por $C(X, M)$ o conjunto das funções contínuas de X em M. $C(X, M)$ é um espaço métrico com a métrica d_∞ definida em (27.19), página 1333. Se (M, d) for um espaço métrico completo, o Corolário 27.2, página 1335, garante que $C(X, M)$ é completo na métrica d_∞.

• O Teorema de Arzelà para funções de um compacto em um espaço métrico

Em sua forma original, o teorema que segue é devido a Arzelà[29]. O mesmo possui uma recíproca de grande importância que apresentaremos logo adiante, o Teorema de Ascoli, Teorema 34.18.

Teorema 34.17 (Teorema de Arzelà) *Seja (X, τ) um espaço topológico com X sendo τ-compacto, seja (M, d) um espaço métrico e seja $\mathcal{F} \subset C(X, M)$ uma família não-vazia de funções contínuas de X em M que seja um conjunto pré-compacto no espaço métrico $\big(C(X, M), d_\infty\big)$. Então, $\overline{\mathcal{F}}$, o fecho de $\mathcal{F}$ no espaço topológico $\big(C(X, M), \tau_{d_\infty}\big)$, é uma família equilimitada e equicontínua.* □

Prova. Tomemos $\epsilon > 0$, arbitrário. Como $\mathcal{F} \subset C(X, M)$ é pré-compacto então, pela Proposição 34.22, página 1588, existe um conjunto finito $h_1, \ldots, h_m \in \mathcal{F}$ tal que as bolas abertas de raio ϵ na métrica d_∞ centradas nas funções h_k recobrem $\overline{\mathcal{F}}$, ou seja, para cada $f \in \overline{\mathcal{F}}$ existe $k_f \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $d_\infty(f, h_{k_f}) < \epsilon$.

Cada função h_j é contínua. Logo, para cada $x_0 \in X$ existe um τ-aberto $V_j(\epsilon, x_0) \ni x_0$ tal que $d\big(h_j(x), h_j(x_0)\big) < \epsilon$ sempre que $x \in V_j(\epsilon, x_0)$. Se $x \in V(\epsilon, x_0) \equiv V_1(\epsilon, x_0) \cap \cdots \cap V_m(\epsilon, x_0)$, valerá $d\big(h_j(x), h_j(x_0)\big) < \epsilon$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Para $f \in \overline{\mathcal{F}}$ temos, pela desigualdade triangular,

$$d\big(f(x), f(x_0)\big) \leq \underbrace{d\big(f(x), h_{k_f}(x)\big)}_{<\epsilon} + \underbrace{d\big(h_k(x), h_{k_f}(x_0)\big)}_{<\epsilon} + \underbrace{d\big(h_{k_f}(x_0), f(x_0)\big)}_{<\epsilon} < 3\epsilon$$

sempre que $x \in V(\epsilon, x_0)$. Isso estabelece que $\overline{\mathcal{F}}$ é equicontínua, pois $V(\epsilon, x_0)$ independe de f.

Como $\overline{\mathcal{F}}$ é equicontínua, cada $f \in \overline{\mathcal{F}}$ é contínua e, portanto, limitada, pois X é compacto (pelo Corolário 27.2, página 1335). É fácil agora ver que $\overline{\mathcal{F}}$ é equilimitada pois, pela desigualdade triangular, temos para toda $g \in \mathcal{B}(X, M, d)$,

$$d_\infty(f, g) \leq d_\infty(f, h_{k_f}) + d_\infty(g, h_{k_f}) < \epsilon + d_\infty(g, h_{k_f}) \leq \epsilon + \max\big\{d_\infty(g, h_1), \ldots, d_\infty(g, h_m)\big\} .$$

sendo que $\epsilon + \max\big\{d_\infty(g, h_1), \ldots, d_\infty(g, h_m)\big\}$ independe de f. ■

• O Teorema de Ascoli para funções de um compacto em um espaço métrico

Em sua forma original, um tanto menos geral que a que apresentamos aqui, o importante teorema que segue é devido a Ascoli[30]. Esse teorema é importante por fonecer condições suficientes para que uma sequência de funções de um compacto em um espaço métrico completo possua subsequências uniformemente convergentes.

Teorema 34.18 (Teorema de Ascoli) *Seja (X, τ) um espaço topológico com X sendo τ-compacto, seja (M, d) um espaço métrico e seja $\mathcal{F} \subset C(X, M)$ uma família não-vazia de funções contínuas de X em M que seja equicontínua e tal que para cada $x \in X$ o conjunto $F(x) := \{f(x), f \in \mathcal{F}\} \subset M$ seja relativamente compacto no espaço topológico (M, τ_d). Então, $\mathcal{F}$ é um conjunto pré-compacto no espaço métrico $\big(C(X, M), d_\infty\big)$ e $\overline{\mathcal{F}}$ é uma família equilimitada.*

Se adicionalmente (M, d) for um espaço métrico completo, $\big(C(X, M), d_\infty\big)$ também o será e o fecho $\overline{\mathcal{F}} \subset C(X, M)$ de $\mathcal{F}$ no espaço topológico $\big(C(X, M), \tau_{d_\infty}\big)$ será τ_{d_∞}-compacto e, portanto, sequencialmente compacto na métrica d_∞.

[29] Cesare Arzelà (1847–1912). Os trabalhos originais são Cesare Arzelà, *"Un' osservazione intorno alle serie di funzioni"*. Rend. dell' Accad. R. delle Sci. dell'Istituto di Bologna, 142–159 (1882–1883). Cesare Arzelà, *"Sulle funzioni di linee"*. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Sci. Fis. Mat. **5**, 55–74 (1895).

[30] Giulio Ascoli (1843–1896). A referência original é Giulio Ascoli, *"Le curve limiti di una varietà data di curve"*. Atti della R. Accad. dei Lincei Memorie della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **18** 521–586 (1883–1884).

Com isso, vale a afirmação que toda sequência de $\mathcal{F}$ tem uma subsequência convergente em $C(X, M)$ na métrica d_∞, ou seja, toda sequência de $\mathcal{F}$ tem uma subsequência uniformemente convergente em $C(X, M)$. □

Prova. Tomemos $\epsilon > 0$, arbitrário. Como $\mathcal{F}$ é equicontínua, existe para cada $x \in X$ um τ-aberto $V(\epsilon, x)$ que contém x tal que $d\big(f(y), f(x)\big) < \epsilon$ para todo $y \in V(\epsilon, x)$ e para todo $f \in \mathcal{F}$. Naturalmente, a coleção de τ-abertos $\{V(\epsilon, x), x \in X\}$ recobre X.

Como X é τ-compacto, esse recobrimento possui um sub-recobrimento finito e, portanto, para algum $n \in \mathbb{N}$ existem n pontos $x_1, \ldots, x_n \in X$ tais que $X = V(\epsilon, x_1) \cup \cdots \cup V(\epsilon, x_n)$. Além disso, tem-se para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ que $d\big(f(y), f(x_k)\big) < \epsilon$ para todo $y \in V(\epsilon, x_k)$ e para toda $f \in \mathcal{F}$. Assim, podemos afirmar que para cada $y \in X$ existe algum $x_k \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $d\big(f(y), f(x_k)\big) < \epsilon$.

Como cada conjunto $F(x_j)$, $j = 1, \ldots, n$, é, por hipótese, relativamente compacto no espaço topológico (M, τ_d), a união $F := F(x_1) \cup \cdots \cup F(x_n)$ é também relativamente compacta no mesmo espaço, pois $\overline{F} = \overline{F(x_1)} \cup \cdots \cup \overline{F(x_n)}$ (item 4 da Proposição 29.4, página 1414) é compacto por ser união finita de compactos (Proposição 34.17, página 1581). O produto Cartesiano $\overline{F}^n := \underbrace{\overline{F} \times \cdots \times \overline{F}}_{n \text{ vezes}}$. O conjunto $\overline{F}^n$ é também compacto em M^n, sendo que em M^n adotamos a métrica

$$d_n\big((y_1, \ldots, y_n), (y_1', \ldots, y_n')\big) := \Big(d(y_1, y_1')^2 + \cdots + d(y_n, y_n')^2\Big)^{1/2} .$$

para todos $(y_1, \ldots, y_n), (y_1', \ldots, y_n') \in M^n$.

É evidente que $\big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big) \in \overline{F}^n$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Como $\overline{F}^n$ é um conjunto compacto e pode ser recoberto por um conjunto finito de bolas abertas de raio ϵ em M^n. Logo, existe uma coleção finita $B_1, \ldots, B_m$ de tais bolas tais que cada n-upla $\big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big)$, $f \in \mathcal{F}$, está contida em $B_1 \cup \cdots \cup B_m$ e tais que cada B_j, $j = 1, \ldots, m$, contém ao menos uma n-upla $\big(h_j(x_1), \ldots, h_j(x_n)\big)$ com $h_j \in \mathcal{F}$.

Podemos dessa forma afirmar que existe uma coleção finita $h_1, \ldots, h_m$ de elementos de $\mathcal{F}$ com a seguinte propriedade: para cada $f \in \mathcal{F}$ existe $k_f \in \{1, \ldots, m\}$, tal que $d_n\Big(\big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big), \big(h_{k_f}(x_1), \ldots, h_{k_f}(x_n)\big)\Big) < 2\epsilon$ e, portanto, tal que $d\big(f(x_j), h_{k_f}(x_j)\big) < 2\epsilon$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Acontece, porém, que $X = V(\epsilon, x_1) \cup \cdots \cup V(\epsilon, x_n)$. Logo, se $x \in X$, existe $l \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in V(\epsilon, x_l)$ e, com isso, teremos pela equicontinuidade que $d\big(f(x), f(x_l)\big) < \epsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Portanto, pela desigualdade triangular, temos

$$d\big(f(x), h_{k_f}(x)\big) \leq \underbrace{d\big(f(x), f(x_l)\big)}_{<\epsilon} + \underbrace{d\big(f(x_l), h_{k_f}(x_l)\big)}_{<2\epsilon} + \underbrace{d\big(h_{k_f}(x_l), h_{k_f}(x)\big)}_{<\epsilon} < 4\epsilon .$$

Como x é arbitrário e k_f independe de x, isso estabeleceu que $d_\infty\big(f, h_{k_f}\big) < 4\epsilon$.

Resumindo, estabelecemos que existe uma coleção finita $h_1, \ldots, h_m \in \mathcal{F}$ tal que para cada $f \in \mathcal{F}$ existe h_{k_f} nessa coleção com $d_\infty\big(f, h_{k_f}\big) < 4\epsilon$. Logo, a coleção de bolas abertas de raio 4ϵ na métrica d_∞ centradas nas funções $h_1, \ldots, h_m \in \mathcal{F}$ recobrem todo $\mathcal{F}$ e isso significa dizer que $\mathcal{F}$ é pré-compacto no espaço topológico $\big(C(X, M), \tau_{d_\infty}\big)$.

Pelo Teorema de Arzelà, Teorema 34.17, página 1599, o fato de $\mathcal{F}$ ser pré-compacto implica que $\overline{\mathcal{F}}$ é uma família equilimitada.

Se agora (M, d) for um espaço métrico completo, o Corolário 27.2, página 1335, garante-nos que o conjunto $C(X, M)$ das funções contínuas de X em M é completo na métrica d_∞ definida em (27.19), página 1333. Logo, pela parte III do Teorema 34.11, página 1589, o fecho $\overline{\mathcal{F}} \subset C(X, M)$ de $\mathcal{F}$ no espaço topológico $\big(C(X, M), \tau_{d_\infty}\big)$ é τ_{d_∞}-compacto e, portanto, pela parte I do Teorema 34.11, $\overline{\mathcal{F}}$ é sequencialmente compacto na métrica d_∞. Logo, toda sequência de $\mathcal{F}$ tem uma subsequência convergente na métrica d_∞, ou seja, toda sequência de $\mathcal{F}$ tem uma subsequência uniformemente convergente. ■

O Teorema de Ascoli e o Teorema de Arzelà, Teoremas 34.18 e 34.17, respectivamente, são por vezes apresentados em conjunto como um único resultado denominado Teorema de Ascoli-Arzelà. Alguns autores denominam o Teorema de Ascoli como Teorema de Ascoli-Arzelà, sem referência à recíproca (o que é parcialmente incorreto, historicamente). Em verdade, há diversas versões desses teoremas na literatura, com pressupostos mais ou menos fortes ou gerais[31]. As versões

[31] O autor destas Notas consultou muitos textos diferentes de Topologia e Análise e não encontrou dois que apresentem os mesmos enunciados

que apresentamos acima são gerais o suficiente para os usos que faremos das mesmas nestas Notas. Para generalizações, vide, e.g., [177] ou [62].

• **O Teorema de Ascoli para funções sobre $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$**

Uma das hipóteses do Teorema de Ascoli, Teorema 34.18, página 1599, é que a família $\mathcal{F}$ seja tal que para cada $x \in X$ o conjunto $F(x) := \{f(x), \ f \in \mathcal{F}\} \subset M$ seja relativamente compacto no espaço topológico $(M, \ \tau_d)$. Se $(M, \ d)$ for um espaço métrico completo, sabemos do item III do Teorema 34.11, página 1589, que uma condição suficiente para tal é que $F(x)$ seja pré-compacto para cada $x \in X$.

Ocorre que existem espaços métricos completos com a propriedade de que todo conjunto d-limitado é pré-compacto e, nos mesmos, é, portanto, suficiente supormos que $F(x)$ seja d-limitado para cada $x \in X$. Pela Proposição 34.26, página 1594, tal é o caso dos espaços $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ com a métrica usual. Dessas considerações, obtemos imediatamente a seguinte versão do Teorema de Ascoli para famílias de funções de um compacto X com valores em $\mathbb{R}^n$ ou em $\mathbb{C}^n$:

Teorema 34.19 (Teorema de Ascoli para funções sobre $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$) *Seja $\mathbb{F}^n \equiv \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{F}^n \equiv \mathbb{C}^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Seja $(X, \ \tau)$ um espaço topológico com X sendo τ-compacto e seja $\mathcal{F} \subset C(X, \ \mathbb{F}^n)$ uma família não-vazia de funções contínuas de X em $\mathbb{F}^n$ que seja pontualmente equilimitada e equicontínua. Então, valem as seguintes afirmações:*

1. *$\mathcal{F}$ é equilimitada e, mais importante,*
2. *$\mathcal{F}$ é um conjunto pré-compacto no espaço métrico completo $\big(C(X, \ \mathbb{F}^n), \ d_\infty\big)$.*

Como consequência da parte III do Teorema 34.11, página 1589, o fecho $\overline{\mathcal{F}} \subset C(X, \ \mathbb{F}^n)$ de $\mathcal{F}$ no espaço topológico $\big(C(X, \ \mathbb{F}^n), \ \tau_{d_\infty}\big)$ é τ_{d_∞}-compacto e, portanto, pela parte I do Teorema 34.11, $\overline{\mathcal{F}}$ é sequencialmente compacto na métrica d_∞. Logo, toda sequência de $\mathcal{F}$ tem uma subsequência convergente na métrica d_∞, ou seja, toda sequência de $\mathcal{F}$ tem uma subsequência uniformemente convergente. □

Essa versão do Teorema de Ascoli é talvez a mais relevante em aplicações às equações diferenciais e integrais.

34.3.4.3 O Teorema de Peano

Uma das consequências do Teorema de Ascoli é um importante teorema de existência (não de unicidade!) de soluções de problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias, chamado Teorema de Peano[32]. Vamos primeiramente apresentar uma versão do mesmo para problemas de valor inicial de equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach e, em seguida, tratar do caso, talvez mais relevante em aplicações, de equações diferenciais ordinárias em $\mathbb{R}^m$ (ou $\mathbb{C}^m$). A relevância do Teorema de Peano foi discutida no Capítulo 11, página 495. Após os enunciados e demonstrações faremos alguns comentários apropriados.

Teorema 34.20 *Seja $\mathcal{B}$ um espaço de Banach e seja $y_0 \in \mathcal{B}$. Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ e, para $a > 0$ e $b > 0$, considere-se $\mathcal{R} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{B}$ dada por*

$$\mathcal{R} \ := \ \Big\{(t, \ y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B} \Big| \ |t - t_0| \le a, \quad \|y - y_0\| \le b\Big\} .$$

Considere-se uma função não-nula $F : \mathcal{R} \to \mathcal{B}$ que seja uniformemente contínua e limitada em $\mathcal{R}$, ou seja, com

$$M \ := \ \sup\big\{\|F(t, \ y)\|, \ (t, \ y) \in \mathcal{R}\big\} \ < \ \infty .$$

Defina-se ainda

$$\beta \ := \ \min\left\{a, \ \frac{b}{M}\right\} . \tag{34.26}$$

para o Teorema de Ascoli, ou Ascoli-Arzelà. A grande maioria dos textos assume que X é compacto e Hausdorff, ou compacto e métrico. A demonstração de [263] do Teorema de Ascoli, por exemplo, deixa claro que essa hipótese é supérflua. [263], porém, apresenta o Teorema de Ascoli apenas para funções sobre os complexos e não menciona Teorema de Arzelà.

[32]Giuseppe Peano (1858–1932). O Teorema de Peano data de 1886.

Então, existe ao menos uma função $y : [t_0 - \beta, \ t_0 + \beta] \to \mathcal{B}$ que satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= F\big(t, \ y(t)\big) , \\ y(t_0) &= y_0 , \end{aligned} \tag{34.27}$$

no intervalo $[t_0 - \beta, \ t_0 + \beta]$. □

Prova. (De [126], com adaptações, esclarecimentos e correções). A estratégia da demonstração consiste em se construir uma sequência de funções y_n, $n \in \mathbb{N}$, que satisfaça as condições do Teorema de Ascoli e aproxime uma solução do problema de valor inicial considerado. O Teorema de Ascoli garantirá a existência de uma subsequência convergente a uma função y e, em seguida, mostra-se que essa y satisfaz a equação diferencial e a condição inicial desejadas.

Seja $\beta \in (0, \ a]$, por enquanto arbitrário. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere-se a função $y_n : [t_0, \ t_0 + \beta] \to \mathcal{B}$ definida da seguinte forma:

$$y_n(t) \ := \ \begin{cases} y_0 , & t \in \Big[t_0, \ t_0 + \frac{\beta}{n}\Big] , \\[2ex] y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t-\beta/n} F\big(\tau, \ y_n(\tau)\big) \, d\tau , & t \in \Big(t_0 + \frac{\beta}{n}, \ t_0 + \beta\Big] . \end{cases} \tag{34.28}$$

Antes de prosseguirmos precisamos fazer dois comentários importantes sobre (34.28)

1. Como o domínio de F é $\mathcal{R}$, devemos, por consistência, garantir que $y_n(t)$ satisfaça $\|y_n(t) - y_0\| \le b$ para todo $t \in [t_0, \ t_0 + \beta]$. Como

$$\left\|\int_{t_0}^{t-\beta/n} F\big(\tau, \ y_n(\tau)\big) \, d\tau\right\| \ \le \ \int_{t_0}^{t-\beta/n} \big\|F\big(\tau, \ y_n(\tau)\big)\big\| \, d\tau \ \le \ M\left|t - \frac{\beta}{n} - t_0\right| \ \le \ M\left|\beta - \frac{\beta}{n}\right| \ \le \ M\beta ,$$

teremos $\|y_n(t) - y_0\| \le b$ se impusermos $M\beta \le b$, ou seja, se impusermos que $\beta \le b/M$. Portanto, tomando-se β como em (34.26), o que faremos doravante, a condição de consistência $\|y_n(t) - y_0\| \le b$ será satisfeita para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t \in [t_0, \ t_0 + \beta] \subset [t_0, \ t_0 + a]$.

2. É muito importante comentar que apesar de a função y_n comparecer em ambos os lados da expressão (34.28), a definição contida em (34.28) **não** é tautológica. Essa afirmação segue da seguinte discussão. O intervalo de definição $\big[t_0, \ t_0 + \beta\big]$ pode ser dividido em n intervalos de definição disjuntos: $\big[t_0, \ t_0 + \beta\big] = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_n$, onde

$$T_1 \ := \ \left[t_0, \quad t_0 + \frac{\beta}{n}\right] \quad \text{e} \quad T_k \ := \ \left(t_0 + (k-1)\frac{\beta}{n}, \quad t_0 + k\frac{\beta}{n}\right] , \quad k \ge 2 .$$

Para $t \in T_1 = \Big[t_0, \ t_0 + \frac{\beta}{n}\Big]$, a função y_n definida em (34.28) vale y_0. Para $t \in \Big(t_0 + \frac{\beta}{n}, \ t_0 + \beta\Big] = T_2 \cup \cdots \cup T_n$, a integração em τ do lado direito de (34.28) é realizada no intervalo $\tau \in \Big[t_0, \ t - \frac{\beta}{n}\Big]$. Agora, para $t \in T_k$, $k \ge 2$, temos

$$\left[t_0, \quad t - \frac{\beta}{n}\right] \ \subset \ \left[t_0, \quad t_0 + (k-1)\frac{\beta}{n}\right] \ \subset \ T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_{k-1} .$$

Vemos, portanto, que se $k \ge 2$ e $t \in T_k$, o argumento τ da função $y_n(\tau)$ que ocorre na integral do lado direito em (34.28) encontra-se em $T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_{k-1}$, ou seja, nos intervalos anteriores a T_k. Assim, percebemos que a função y_n em (34.28) vai sendo definida recursivamente em cada intervalo T_k, $k \ge 2$, em termos dos seus valores nos intervalos anteriores a T_k, partindo-se do primeiro intervalo T_1, onde y_n vale y_0. A definição (34.28) não é, portanto, tautológica, mas sim recursiva nos intervalos de definição T_k.

Por exemplo, para $t \in T_2 = \Big(t_0 + \frac{\beta}{n}, \quad t_0 + 2\frac{\beta}{n}\Big]$ temos

$$y_n(t) \ = \ y_0 + \int_{t_0}^{t-\beta/n} F\big(\tau, \ y_0\big) \, d\tau , \tag{34.29}$$

pois $y_n(t)$ é igual à constante y_0 no intervalo T_1, dentro do qual a integração acima se dá. Para $t \in T_3$ teremos

$$y_n(t) \; = \; y_0 + \int_{t_0}^{t_0+\beta/n} F\big(\tau,\; y_0\big)\, d\tau + \int_{t_0+\beta/n}^{t-\beta/n} F\big(\tau,\; y_n^\dagger(\tau)\big)\, d\tau \;,$$

onde $y_n^\dagger$ é o lado direito de (34.29).

Vamos agora provar que a família de funções $\{y_n : [t_0,\; t_0+\beta] \to \mathcal{B},\; n \in \mathbb{N}\}$ definida por (34.28) satisfaz as condições do Teorema de Ascoli, Teorema 34.18, página 1599. É trivial constatar que cada função $y_n : [t_0,\; t_0+\beta] \to \mathcal{B}$ definida em (34.28) é contínua. Além disso, temos, para $t_1 \le t_2$,

$$\big\|y_n(t_2) - y_n(t_1)\big\| \; \le \; \begin{cases} 0\,, & \text{se } \; t_1,\; t_2 \in \Big[t_0,\; t_0 + \frac{\beta}{n}\Big]\;, \\[2ex] \displaystyle\int_{t_0}^{t_2-\beta/n} \big\|F\big(\tau,\; y_n(\tau)\big)\big\|\, d\tau\,, & \text{se } \; t_1 \in \Big[t_0,\; t_0+\frac{\beta}{n}\Big] \; \text{e} \; t_2 \in \Big(t_0+\frac{\beta}{n},\; t_0+\beta\Big]\;, \\[2ex] \displaystyle\int_{t_1-\beta/n}^{t_2-\beta/n} \big\|F\big(\tau,\; y_n(\tau)\big)\big\|\, d\tau\,, & \text{se } \; t_1,\; t_2 \in \Big(t_0+\frac{\beta}{n},\; t_0+\beta\Big]\;. \end{cases}$$

Agora, para $t_1 \in [t_0,\; t_0+\beta/n]$ e $t_2 \in (t_0+\beta/n,\; t_0+\beta]$ vale

$$\int_{t_0}^{t_2-\beta/n} \big\|F\big(\tau,\; y_n(\tau)\big)\big\|\, d\tau \;\le\; M\left|t_2 - \frac{\beta}{n} - t_0\right| \;\le\; M|t_2 - t_1|$$

e para $t_1,\; t_2 \in (t_0+\beta/n,\; t_0+\beta]$ vale

$$\int_{t_1-\beta/n}^{t_2-\beta/n} \big\|F\big(\tau,\; y_n(\tau)\big)\big\|\, d\tau \;\le\; M|t_2 - t_1|\;.$$

Logo, $\big\|y_n(t_2) - y_n(t_1)\big\| \le M|t_2 - t_1|$ para todos $t_1,\; t_2 \in [t_0,\; t_0+\beta]$. Isso prova que $\{y_n,\; n \in \mathbb{N}\}$ é equicontínua. Além disso, temos

$$\begin{aligned} \|y_n(t)\| \;&\le\; \begin{cases} \|y_0\|\,, & t \in \Big[t_0,\;\; t_0+\frac{\beta}{n}\Big] \\[2ex] \|y_0\| + \displaystyle\int_{t_0}^{t-\beta/n} \Big\|F\big(\tau,\; y_n(\tau)\big)\Big\|\, d\tau\,, & t \in \Big(t_0+\frac{\beta}{n},\;\; t_0+\beta\Big] \end{cases} \\ &\le\; \|y_0\| + M\left|t - \frac{\beta}{n} - t_0\right| \;\le\; \|y_0\| + M\beta \end{aligned}$$

para todo $t \in [t_0,\; t_0+\beta]$. Isso mostra que $\{y_n,\; n \in \mathbb{N}\}$ é equilimitada. A família de funções $\{y_n : [t_0,\; t_0+\beta] \to \mathcal{B},\; n \in \mathbb{N}\}$ satisfaz, portanto, as hipóteses do Teorema de Ascoli, Teorema 34.18, página 1599, e concluímos que existe uma subsequência $\{y_{n_k} : [t_0,\; t_0+\beta] \to \mathcal{B},\; k \in \mathbb{N}\}$ que converge uniformemente a uma função $y[t_0,\; t_0+\beta] \to \mathcal{B}$ (ou seja, tal que $\lim_{k\to\infty} \sup\big\{\|y_{n_k}(t) - y(t)\|,\; t \in [t_0,\; t_0+\beta]\big\} = 0$). Vamos demonstrar que y satisfaz o problema de valor inicial (34.27) no intervalo $[t_0,\; t_0+\beta]$. Em primeiro lugar, note-se que $y_{n_k}(t_0) = y_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, portanto, $y(t_0) = y_0$, igualmente. Para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t \in \big(t_0 + \frac{\beta}{n_k},\; t_0+\beta\big]$ temos, por (34.28),

$$y_{n_k}(t) \; = \; y_0 + \int_{t_0}^{t-\beta/n_k} F\big(\tau,\; y_{n_k}(\tau)\big)\, d\tau \; = \; y_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(\tau,\; y_{n_k}(\tau)\big)\, d\tau - \int_{t-\beta/n_k}^{t} F\big(\tau,\; y_{n_k}(\tau)\big)\, d\tau\;.$$

Para o último termo, temos

$$\left\|\int_{t-\beta/n_k}^{t} F\big(\tau,\; y_{n_k}(\tau)\big)\, d\tau\right\| \;\le\; \int_{t-\beta/n_k}^{t} \big\|F\big(\tau,\; y_{n_k}(\tau)\big)\big\|\, d\tau \;\le\; M\frac{\beta}{n_k}\;,$$

e concluímos que o mesmo vai a zero quando $k \to \infty$. Ao mesmo tempo, a continuidade uniforme de F e a finitude do intervalo $[t_0,\; t]$ implicam que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} F\big(\tau,\; y_{n_k}(\tau)\big)\, d\tau \; = \; \int_{t_0}^{t} F\big(\tau,\; y(\tau)\big)\, d\tau\;.$$

Portanto, segue que

$$y(t) \; = \; y_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(\tau,\; y(\tau)\big)\, d\tau \tag{34.30}$$

para $t \in (t_0,\; t_0+\beta\big]$. Decorre de (34.30) que (34.27) é satisfeita por y no intervalo $[t_0,\; t_0+\beta]$. Concluímos que existe ao menos uma solução para o problema de valor inicial (34.27) no intervalo $[t_0,\; t_0+\beta]$. Seguindo os mesmos passos, chegamos à mesma conclusão de existência de solução para o intervalo $[t_0-\beta,\; t_0]$. ■

Podemos agora enunciar e provar um importante teorema sobre equações diferenciais ordinárias com valores em $\mathbb{R}^m$ (ou $\mathbb{C}^m$) cuja relevência fora discutida no Capítulo 11, página 495.

Teorema 34.21 (Teorema de Peano) *Seja $m \in \mathbb{N}$ e seja $\|\cdot\|$ a norma Euclidiana usual de $\mathbb{R}^m$. Sejam $y_0 \in \mathbb{R}^m$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ e, para $a > 0$ e $b > 0$, considere-se o conjunto fechado $\mathcal{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dado por*

$$\mathcal{R} \;:=\; \Big\{(t,\; y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m \Big|\; |t - t_0| \le a, \quad \|y - y_0\| \le b\Big\}\;.$$

Considere-se uma função contínua e não-nula $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^m$. Por ser fechado e limitado, $\mathcal{R}$ é compacto (pelo Teorema de Heine-Borel, Teorema 34.14, página 1594). Como F é contínua, F é limitada (pelo Teorema 34.16, página 1595), isto é,

$$M \;:=\; \sup\big\{\|F(t,\; y)\|,\; (t,\; y) \in \mathcal{R}\big\} \;<\; \infty\;.$$

Defina-se ainda

$$\beta \;:=\; \min\left\{a,\;\; \frac{b}{M}\right\}\;. \tag{34.31}$$

Então, existe ao menos uma função $y : [t_0-\beta,\; t_0+\beta] \to \mathbb{R}^m$ que satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) \;\; &= \;\; F\big(t,\; y(t)\big)\;, \\ y(t_0) \;\; &= \;\; y_0\;, \end{aligned} \tag{34.32}$$

no intervalo $[t_0-\beta,\; t_0+\beta]$. □

<u>*Comentário*</u>. Deve ser claro ao leitor que o Teorema de Peano acima permanece válido se substituirmos $\mathbb{R}^m$ por $\mathbb{C}^m$. ♣

Prova do Teorema 34.21. Como $\mathcal{R}$ é compacto e F é contínua, F é também uniformemente contínua (pelo Teorema de Heine-Cantor, Teorema 34.12, página 1592). Estamos, portanto, sob as hipóteses do Teorema 34.20, página 1601, o que completa a demonstração. ■

• Comentários

Existem diversas demonstrações do Teorema de Peano, com grau maior ou menor de generalidade. Nossa demonstração acima segue a de [126], a qual é suficientemente geral para adaptar-se a EDOs em espaços de Banach (sob as hipóteses assumidas no Teorema 34.20! Vide comentários abaixo.). O leitor encontrará em [184] uma demonstração do Teorema de Peano para o caso de EDOs em $\mathbb{R}$ usando as chamadas *linhas de Euler*. Uma outra estratégia possível para EDOs em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ consiste no seguinte. Primeiramente, aproxima-se uniformemente a função F no retângulo compacto $\mathcal{R}$ por polinômios P_n, $n \in \mathbb{N}$, (evocando-se para tal o Teorema de Weierstrass em várias variáveis, Teorema 37.5, página 1800), em seguida, evoca-se o Teorema de Picard-Lindelöf, Teorema 28.4, página 1386, para garantir-se a existência de soluções y_n das equações $\dot{y} = P_n\big(t,\; y(t)\big)$, obtidas com F substituida por P_n (polinômios são, evidentemente, funções contínuas e diferenciáveis, daí podermos evocar o Teorema de Picard-Lindelöf). Em seguida, mostra-se que a família de soluções y_n, $n \in \mathbb{N}$, é equilimitada e equicontínua, possuindo, portanto, uma subsequência uniformemente convergente a uma função y, a qual é também solução da equação original (o que se demonstra usando-se a uniformidade da aproximação polinomial).

E. 34.16 *Exercício*. Obtenha uma demonstração do Teorema de Peano para EDOs em $\mathbb{R}^n$ ou em $\mathbb{C}^n$ seguindo os passos delineados acima. ✤

Um outro comentário importante diz respeito à questão de ser ou não possível enfraquecer as condições do Teorema 34.20, página 1601, de modo a exigir-se de F apenas que a mesma seja contínua no domínio fechado e limitado $\mathcal{R}$. Foi o que fizemos no Teorema de Peano, Teorema 34.21, página 1604, pois lá pudemos usar o fato de $\mathcal{R}$ ser agora compacto (o que não seria verdadeiro se o espaço de Banach $\mathcal{B}$ fosse de dimensão infinita). Dieudonné[33], em 1950[34], encontrou um exemplo de um espaço de Banach de dimensão infinita (o das sequências que convergem a zero) no qual o do problema de valor inicial (34.27) não exibe soluções para uma certa F que satisfaz apenas a hipótese de continuidade. Em uma série de trabalhos, A. N. Godunov generalizou esse resultado e provou, em 1975[35], que o Teorema de Peano, Teorema 34.21, é falso em espaços de Banach de dimensão infinita, ou seja, em tais espaços é sempre possível encontrar uma função contínua em $\mathcal{R}$ para a qual o problema de valor inicial (34.27) não exibe soluções. O Teorema de Peano é também falso para espaços de Fréchet de dimensão infinita[36].

34.3.5 Espaços Compactos Hausdorff e Partições da Unidade

Nesta seção vamos aprofundar o estudo de propriedades de espaços topológicos compactos Hausdorff estudando sua relação com as chamadas partições da unidade. Essa discussão serve como motivação para uma importante generalização da noção de compacidade, a chamada paracompacidade.

Antes de apresentarmos nossos primeiros resultados permitamos que se nos (re)apresentem uma série de definições relevantes.

• **Sistema localmente finito de conjuntos**

Uma coleção de conjuntos $\mathcal{C} = \{C_\mu \subset X,\ \mu \in \Omega\}$ é dita ser um *sistema localmente finito de conjuntos* se todo $x \in X$ possui uma vizinhança V_x tal que $V_x \cap C_\mu$ é não-vazio apenas para uma coleção finita de μ's.

É de se observar que como todo recobrimento por abertos de um espaço compacto possui um sub-recobrimento finito, esse sub-recobrimento finito é um sistema localmente finito de conjuntos (por abertos).

• **Suporte de uma função**

Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico e seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real definida em X. Define-se o *suporte* de f (ou τ-suporte de f), denotado por $\operatorname{supp}(f)$, como sendo o fecho do conjunto de todos os pontos onde f não se anula:

$$\operatorname{supp}(f) \;:=\; \overline{\big\{x \in X \big|\ f(x) \neq 0\big\}}\ .$$

Assim, $\operatorname{supp}(f)^c$, o conjunto complementar ao suporte de f, é o maior aberto onde f se anula.

• **Partições da unidade**

Vamos agora a uma importante definição. Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico. Uma família de funções contínuas $\mathcal{F} = \big\{f_\lambda : X \to [0,\ 1],\ \lambda \in \Lambda\big\}$ é dita ser uma *partição da unidade* se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. O conjunto de suportes $\big\{\operatorname{supp}(f_\lambda),\ \lambda \in \Lambda\big\}$ é um sistema localmente finito de conjuntos (fechados).
2. Para cada $x \in X$ tem-se $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) = 1$.

Vale observar que a soma no segundo item é finita, mesmo para Λ não-finito. Isso se deve ao primeiro item, que garante que cada x pode pertencer a no máximo um conjunto finito de $\operatorname{supp}(f_\lambda)$'s, digamos, a $\operatorname{supp}(f_{\lambda_k})$, $k = 1,\ \ldots,\ n$. Assim,

[33] Jean-Alexandre-Eugène Dieudonné (1906–1992).
[34] J. Dieudonne, "Deux examples singuliers d'equations differentielles", Acta Sci. Math. (Szeged) **12B**, 38–40 (1950).
[35] A. N. Godunov, "On Peano's Theorem in Banach spaces", Funct. Anal. Appl. (Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya) **9**, 53–55 (1975). Vide também A. N. Godunov, "A counterexample to Peano's Theorem in an infinite dimensional Hilbert space", Vestnik Mosk. Gos. Univ., Ser. Mat. Mek. **5**, 31–34 (1972) e A. N. Godunov, "Peano's Theorem in an infinite dimensional Hilbert space is false even in a weakened form", Math. Notes **15**, 273–279 (1974).
[36] S. A. Shkarin, "Peano's theorem fails for infinite-dimensional Fréchet spaces". Funct. Anal. Appl. **27**, Number 2, 149–151 (1993).

a soma no segundo item deve ser entendida, para cada $x \in X$, como sendo limitada ao conjunto finito $\{\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n\}$ de λ's tais que $x \in \operatorname{supp}(f_{\lambda_k})$, $k = 1,\ \ldots,\ n$.

É evidente pela definição que se uma coleção de funções contínuas $\mathcal{F} = \big\{f_\lambda : X \to [0,\ 1],\ \lambda \in \Lambda\big\}$ é uma partição da unidade, então para cada $x \in X$ vale a afirmação que $f_\lambda(x) \neq 0$ para pelo menos um e para no máximo uma coleção finita de λ's.

• **Partições da unidade subordinadas a recobrimentos**

Uma partição da unidade $\mathcal{F} = \big\{f_\lambda : X \to [0,\ 1],\ \lambda \in \Lambda\big\}$ é dita ser *subordinada* a um recobrimento $\mathcal{B} = \big\{B_\mu \subset X,\ \mu \in \Omega\big\}$ de X se para todo $\lambda \in \Lambda$ existir ao menos um $\mu \in \Omega$ tal que $\operatorname{supp}(f_\lambda) \subset B_\mu$.

• **Espaços compactos e partições da unidade**

O teorema a seguir é de relevância fundamental para a discussão que se seguirá, pois serve como motivação para uma importante generalização da noção de compacidade. Como também veremos, esse teorema tem consequências diretas na teoria das variedades topológicas. O mesmo permite perceber como construir partições da unidade em espaços Hausdorff compactos.

Teorema 34.22 *Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico compacto Hausdorff. Então, cada recobrimento de X por τ-abertos possui uma partição da unidade subordinada.* □

Prova. Seja $\mathcal{A} = \big\{A_\mu,\ \mu \in \Omega\big\}$ um recobrimento de X por τ-abertos. Como $(X,\ \tau)$ é um espaço topológico compacto, $\mathcal{A}$ possui um sub-recobrimento finito por τ-abertos, que denotaremos por $\{A_1,\ \ldots,\ A_n\} \subset \mathcal{A}$. Pelo Corolário 34.8, página 1587, X tem um segundo recobrimento finito por τ-abertos $\{B_1,\ \ldots,\ B_n\}$ de forma que $B_k \subset \overline{B_k} \subset A_k$ para todo $k = 1,\ \ldots,\ n$.

Aplicando novamente o Corolário 34.8 (mas agora para o recobrimento $\{B_1,\ \ldots,\ B_n\}$) concluímos que X possui um terceiro recobrimento finito por τ-abertos $\{C_1,\ \ldots,\ C_n\}$ de forma que $C_k \subset \overline{C_k} \subset B_k \subset \overline{B_k} \subset A_k$ para todo $k = 1,\ \ldots,\ n$.

Como $\overline{C_k} \subset B_k$, vale $\overline{C_k} \cap B_k^c = \emptyset$. Assim, para cada $k = 1,\ \ldots,\ n$ os fechados $\overline{C_k}$ e B_k^c são disjuntos. Como $(X,\ \tau)$ é compacto Hausdorff, é também normal (Teorema 34.8, página 1584), podemos aplicar o Lema de Urysohn, Lema 34.3, página 1571, e concluir que existe para cada $k = 1,\ \ldots,\ n$ uma função contínua $f_k : X \to [0,\ 1]$ tal que $f_k(x) = 0$ para todo $x \in B_k^c$ e $f_k(x) = 1$ para todo $x \in \overline{C_k}$.

É claro pela definição que para cada $k = 1,\ \ldots,\ n$ tem-se $\operatorname{supp}(f_k) \subset B_k \subset A_k$.

Como $\overline{C_k} \supset C_k$ e os C_k's recobrem X, conclui-se que $\big\{\overline{C_1},\ \ldots,\ \overline{C_n}\big\}$ também recobre X. Disso concluímos que $\sum_{k=1}^n f_k(x) \geq 1$ para todo $x \in X$, já que ao menos uma dos $f_k(x)$ somados vale 1. Isso permite definir as funções

$$g_j(x) \;:=\; \frac{f_j(x)}{\displaystyle\sum_{k=1}^n f_k(x)}\ , \qquad x \in X\ ,$$

para cada $j = 1,\ \ldots,\ n$, e concluir que cada uma dessas funções é contínua, sendo sua imagem contida em $[0,\ 1]$ e satisfazendo $\sum_{j=1}^n g_j(x) = 1$ para todo $x \in X$. Como a coleção $\big\{\operatorname{supp}(g_j),\ j = 1,\ \ldots,\ n\big\}$ é finita, ela compõe um sistema localmente finito de conjuntos e concluímos que $\{g_1,\ \ldots,\ g_n\}$ é uma partição da unidade.

É claro também que para todo $j = 1,\ \ldots,\ n$ tem-se $\operatorname{supp}(g_j) = \operatorname{supp}(f_j) \subset A_j$, como comentamos acima, e isso está dizendo-nos que $\{g_1,\ \ldots,\ g_n\}$ é uma partição da unidade subordinada ao recobrimento $\{A_1,\ \ldots,\ A_n\}$ e, portanto, ao recobrimento $\mathcal{A}$, como queríamos provar. ■

34.3.5.1 Uma Excursão pelas Variedades Topológicas Compactas Hausdorff

Aproveitemos a oportunidade oferecida pelo Teorema 34.22, acima, para apresentar um resultado geométrico que motiva boa parte dos desenvolvimentos de acima, particularmente aqueles decorrentes de aplicações do Lema de Urysohn e da noção de partição da unidade.

No que segue, designaremos por $D_n(r,\ x) \subset \mathbb{R}^n$ a bola aberta de raio $r > 0$ centrada em $x \in \mathbb{R}^n$: $D_n(r,\ x) := \big\{y \in \mathbb{R}^n |\ \|y - x\| < r\big\}$, onde $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana usual.

Um espaço topológico $(X,\ \tau)$ é dito ser um *espaço localmente Euclidiano de dimensão* n (com $n \in \mathbb{N}$) se todo $x \in X$ possuir uma vizinhança aberta V_x homeomorfa[37] a $D_n(r,\ 0)$ para algum $r > 0$.

Um espaço topológico compacto $(X,\ \tau)$ é dito ser uma *variedade topológica compacta de dimensão* n se for Hausdorff e se for um espaço localmente Euclidiano de dimensão n.

Mais adiante, na Seção 35.1, página 1641, introduziremos a noção geral de variedade topológica de dimensão n, não restrita a espaços compactos, à qual adiciona-se hipóteses como a propriedade de ser segundo-contável ou a paracompacidade. Por ora nos restringiremos a espaços compactos, para os quais a definição do parágrafo anterior é suficiente pois, como veremos na Proposição 34.30, página 1608, toda variedade topológica compacta (no sentido da definição acima) é sempre segundo-contável e paracompacta.

Exemplos elementares bem-conhecidos de variedade topológicas compactas (as quais serão introduzidas no Capítulo 35, página 1640) são a superfície $\mathbb{S}^n$ da esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$, o toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, a garrafa de Klein[38], a tira de Möbius[39] fechada etc. A Estrela de Koch[40] (vide Figura 30.1, página 1437, Seção 31.2, página 1455 e Seção 31.3, página 1459) é um exemplo de variedade topológica compacta (não diferenciável!) de dimensão 1.

A importância do teorema a seguir reside em mostrar que toda variedade topológica de dimensão n pode ser, em um certo sentido, encarada como um subconjunto compacto de um espaço $\mathbb{R}^m$, para algum m grande o suficiente. Sua demonstração ilustra também um uso elegante das partições da identidade, introduzidas acima. Após o enunciado e demonstração do teorema faremos alguns comentários pertinentes.

Teorema 34.23 (Teorema de Mergulho de Variedades Topológicas Compactas) *Toda variedade topológica compacta de dimensão n é homeomorfa a um compacto em um espaço $\mathbb{R}^m$ para um m grande o suficiente. Em outras palavras, toda variedade topológica compacta de dimensão n pode ser mergulhada[41] em um $\mathbb{R}^m$ para um m grande o suficiente.* □

A demonstração que segue deriva parcialmente da encontrada na referência [62]. Antes de apresentá-la, façamos um

Comentário. O Teorema 34.23 é provavelmente o mais simples dos chamados Teoremas de Mergulho, que garantem condições sob as quais variedades de certos tipos poder ser mergulhadas (por exemplo, como superfícies) em um $\mathbb{R}^m$ com m suficientemente grande. Importantes generalizações são o Teorema de Whitney[42], que afirma que toda variedade diferenciável de dimensão n pode ser mergulhada em $\mathbb{R}^{2n}$ (para uma versão mais fraca dessa afirmação, vide e.g. [24]) e o Teorema de Nash[43], que afirma que toda variedade Riemanniana pode ser mergulhada isometricamente em um $\mathbb{R}^m$ com m suficientemente grande. Uma extensão do Teorema de Nash para variedades Lorentzianas foi obtida por C. J. S. Clarke[44]. As demonstrações desses teoremas de mergulho têm em comum o fato de fazerem uso de teoremas de função implícita em certos espaços vetoriais topológicos. Uma versão do Teorema da Função Implícita para espaços de Banach pode ser encontrado na Seção 28.3, página 1392 (vide Teorema 28.8, página 1393). ♣

Provado Teorema 34.23. Seja $(X,\ \tau)$ uma variedade topológica compacta de dimensão n. Para cada $y \in X$ seja $A_y \subset X$ uma vizinhança aberta de y homeomorfa a um conjunto $D_n(r_y,\ 0)$ para algum $r_y > 0$ eventualmente dependente de y. Denotemos por $h_y : A_y \to D_n(r_y,\ 0)$ o referido homeomorfismo. Como cada $D_n(r_y,\ 0)$ é um aberto em $\mathbb{R}^n$, cada A_y é um τ-aberto. Assim, a coleção $\{A_y,\ y \in X\}$ é um recobrimento de X por τ-abertos. Como X é τ-compacto, esse recobrimento possui um sub-recobrimento finito $\{A_{y_1},\ \ldots,\ A_{y_k}\}$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e para certos pontos distintos $y_1,\ \ldots,\ y_k \in X$.

Seja $\{g_j,\ j = 1,\ \ldots,\ k\}$ uma partição da unidade subordinada ao recobrimento $\{A_{y_1},\ \ldots,\ A_{y_k}\}$, cuja existência foi provada no Teorema 34.22, página 1606, com $\operatorname{supp}(g_j) \subset A_{y_j}$ para cada $j = 1,\ \ldots,\ k$. Para cada $j = 1,\ \ldots,\ k$

[37] Para a definição de homeomorfismo, vide página 1578.
[38] Felix Christian Klein (1849–1925).
[39] August Ferdinand Möbius (1790–1868).
[40] Niels Fabian Helge von Koch (1870–1924). A Estrela de Koch nasceu em 1904.
[41] Para a definição de "mergulho", vide página 1578.
[42] Hassler Whitney (1907–1989).
[43] John Forbes Nash, Jr. (1928–). A referência original é: J. Nash, "The embedding problem for Riemannian manifolds", Ann. of Math. (2) **63**, 20–63 (1956).
[44] A referência original é: C. J. S. Clarke, "On the global isometric imbedding of pseudo-Riemannian manifolds", Proc. Roy. Soc. London, ser. A, **314**, 417–428 (1970).

definam-se as funções $l_j : X \to \mathbb{R}^n$ por

$$l_j(x) \ := \ \begin{cases} g_j(x)h_{y_j}(x)\ , & \text{se } x \in \operatorname{supp}(g_j)\ , \\[6pt] 0\ , & \text{se } x \notin \operatorname{supp}(g_j)\ . \end{cases}$$

É fácil constatar que cada função l_j é contínua (sendo uma extensão contínua da função $g_j(x)h_{y_j}(x)$, $x \in \operatorname{supp}(g_j)$). É também claro que a imagem de l_j está contida em $D_n(r_{y_j},\ 0)$ (pois $0 \leq g_j(x) \leq 1$).

Para cada $j = 1,\ \ldots,\ k$ definam-se agora as funções $c_j : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$c_j(x) \ := \ \big(l_j(x),\ \ g_j(x)\big)\ . \tag{34.33}$$

Assim, para cada $x \in X$, $c_j(x)$ é um vetor com $n+1$ componentes reais, as n primeiras componentes são $l_j(x)$ e estão claramente contidas em $D_n(r_{y_j},\ 0)$ e a coordenada "vertical" (ou seja, na direção $n+1$) é $g_j(x)$. É bastante claro que cada função c_j é contínua, já que as funções l_j e g_j o são. Seja agora $H : X \to \mathbb{R}^{k(n+1)}$ definida por

$$H(x) \ := \ \Big(c_1(x),\ \ldots,\ c_k(x)\Big)\ .$$

Afirmamos que H é contínua e injetora. A continuidade é evidente, pelo fato supramencionado de as funções c_j o serem. A injetividade pode ser provada com os seguintes argumentos. Sejam x_0 e x_1 dois pontos de X tais que $H(x_0) = H(x_1)$. Isso significa que $c_j(x_0) = c_j(x_1)$ para todo $j = 1,\ \ldots,\ k$, o que por sua vez implica que

$$l_j(x_0) \ = \ l_j(x_1) \qquad \text{e} \qquad g_j(x_0) \ = \ g_j(x_1)\ ,$$

também para todo $j = 1,\ \ldots,\ k$. Como as funções g_j, $j = 1,\ \ldots,\ k$, formam uma partição da unidade, tem-se $\sum_{j=1}^k g_j(x_0) = 1$. Logo, existe pelo menos um $j_0 \in \{1,\ \ldots,\ k\}$ tal que $g_{j_0}(x_0) > 0$ e, portanto, $x_0 \in \operatorname{supp}(g_{j_0})$. Assim, pela igualdade $g_{j_0}(x_0) = g_{j_0}(x_1)$ teremos também que $x_1 \in \operatorname{supp}(g_{j_0})$.

Concluímos disso que $l_{j_0}(x_0) = g_{j_0}(x_0)h_{y_{j_0}}(x_0)$ e $l_{j_0}(x_1) = g_{j_0}(x_1)h_{y_{j_0}}(x_1)$. Portanto, a igualdade $l_{j_0}(x_0) = l_{j_0}(x_1)$ significa $g_{j_0}(x_0)h_{y_{j_0}}(x_0) = g_{j_0}(x_1)h_{y_{j_0}}(x_1)$. Como $g_{j_0}(x_0) = g_{j_0}(x_1) > 0$, obtemos disso que $h_{y_{j_0}}(x_0) = h_{y_{j_0}}(x_1)$. Assim, como $h_{y_{j_0}}$ é bijetora, concluímos que $x_0 = x_1$, provando a injetividade de H.

Denotemos por $H(X) \subset \mathbb{R}^{k(n+1)}$ a imagem de H. Provamos acima que $H : X \to H(X)$ é uma função contínua e bijetora. Como X é compacto, a imagem $H(X)$ é um compacto de $\mathbb{R}^{k(n+1)}$ (Teorema 34.5, página 1582). Como $\mathbb{R}^{k(n+1)}$ é Hausdorff, $H(X)$ também o é e podemos evocar o Teorema 34.10, página 1586, para afirmar que $H : X \to H(X)$ é um homeomorfismo, completando a demonstração. ■

Façamos alguns comentários sobre o Teorema 34.23 e sua demonstração.

Um pouco de meditação geométrica permite perceber que a imagem de $c_j(x)$, definida em (34.33), está contida no cone de $\mathbb{R}^{n+1}$ com vértice na origem e base $D_n(r_{y_j},\ 0)$ situada no plano "horizontal" definido pelos pontos de coordenada "vertical" igual a 1: $\Big\{(y_1,\ \ldots,\ y_n,\ 1)\ ,\ \text{com}\ \ (y_1,\ \ldots,\ y_n) \in \mathbb{R}^n\Big\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. A imagem $H(M)$ está, portanto, contida no produto Cartesiano desses k cones $n+1$ dimensionais.

Na demonstração do Teorema 34.23 obtemos m da forma $m = k(n+1)$ para um certo $k \in \mathbb{N}$. Em verdade, usando técnicas mais eleboradas é possível obter um valor melhor para m, a saber $2n+1$, um valor que em certos casos não pode ser melhorado.

Mencionamos também que o Teorema 34.23 tem por corolário imediato que toda variedade topológica compacta de dimensão n é metrizável, por poder ser mergulhada em um espaço métrico, a saber, em um $\mathbb{R}^m$. Vide Seção 34.7, página 1627.

• Variedades topológicas compactas e separabilidade

Proposição 34.30 *Toda variedade topológica compacta é separável, segundo-contável e paracompacta.* □

Prova. Como mencionamos na prova do Teorema 34.23, se (X, τ) é uma variedade topológica compacta de dimensão n, então X possui um recobrimento finito $\{A_{y_1}, \ldots, A_{y_k}\}$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e para certos pontos distintos $y_1, \ldots, y_k \in X$, sendo A_{y_j} uma vizinhança aberta de y_j e sendo cada A_{y_j} homeomorfo a um $D_n(r_{y_j}, 0)$, por um homeomorfismo $h_j : A_{y_j} \to D_n(r_{y_j}, 0)$. Sabemos que $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico separável e, portanto, existe um conjunto contável $\mathcal{D}_j \subset D_n(r_{y_j}, 0)$ cujo fecho (na topologia relativa de $D_n(r_{y_j}, 0)$) é igual a $D_n(r_{y_j}, 0)$, ou seja, $\overline{\mathcal{D}_j} = D_n(r_{y_j}, 0)$. Como $h_j^{-1} : D_n(r_{y_j}, 0) \to A_{y_j}$ é contínua, concluímos que $\overline{h_j^{-1}(\mathcal{D}_j)} \subset h_j^{-1}\big(\overline{\mathcal{D}_j}\big) = h_j^{-1}\big(D_n(r_{y_j}, 0)\big) = A_{y_j}$, o que significa que $h_j^{-1}(\mathcal{D}_j)$ é denso em A_{y_j}. Logo, $h_1^{-1}(\mathcal{D}_1) \cup \cdots \cup h_k^{-1}(\mathcal{D}_k)$ é um conjunto contável e denso em todo X, o que provou que (X, τ) é separável. Como (X, τ) é metrizável, concluímos da Proposição 29.15, página 1422, que (X, τ) é também segundo-contável. Por fim, todo espaço topológico compacto é trivialmente localmente compacto. Logo, por ser localmente compaca, Hausdorff e segundo contável, toda variedade topológica é paracompacta, de acordo com o Teorema 34.26, página 1615. ■

* *** *

A afirmação do Teorema 34.23 de que toda variedade topológica compacta pode ser, em um certo sentido, encarada como um conjunto compacto de algum $\mathbb{R}^m$ coloca a questão de por que é, afinal, relevante definir a noção de variedade topológica compacta de modo *intrínseco*, como fizemos, em termos de propriedades de seus abertos, e não de modo *extrínseco*, como conjuntos homeomorfos aos familiares compactos de $\mathbb{R}^m$. Pondo de lado o caráter ontológico dessa questão, a verdade é que a abordagem intrínseca apresenta vantagens diversas, enquanto que a abordagem extrínseca raramente é capaz de oferecer um "insight" mais profundo sobre a natureza das variedades e suas propriedades.

34.3.6 Compacidade Local

• **Compacidade local**

A compacidade de um espaço topológico é importante por permitir a inferência indutiva de certas propriedades "globais" a partir de propriedades "locais". A propriedade de compacidade, ela mesma, é, no entanto, uma propriedade global do espaço. Seria interessante permitir realizar as virtudes da compacidade em um nível local e para tal presta-se a noção de espaços localmente compactos.

Um espaço topológico (X, τ) é dito ser um *espaço localmente compacto* se todo $x \in X$ possui uma vizinhança compacta, ou seja, se para cada $x \in X$ existirem um conjunto τ-aberto A e um conjunto τ-compacto C tais que $x \in A \subset C$.

Naturalmente, todo espaço compacto é localmente compacto. Os espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, com suas métricas usuais, não são compactos, mas são espaços topológicos localmente compactos (na topologia usual). De fato, cada $x \in \mathbb{R}^n$ pertence a uma bola fechada de raio $r > 0$ centrada em x na métrica Euclidiana usual: $x \in \overline{B(r, x)} = \big\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leq r\big\}$. Pelo Teorema de Heine-Borel em $\mathbb{R}^n$, Teorema 34.14, página 1594, $\overline{B(r, x)}$ é compacto por ser fechado e limitado, provando que $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, é localmente compacto. Em $\mathbb{C}^n$ o argumento é o mesmo.

O Exemplo 34.5, página 1591, ensina-nos que no espaço métrico formado pelos racionais $\mathbb{Q}$ com a métrica usual todo compacto tem interior vazio e, portanto, nenhum compacto pode ser uma vizinhança. Trata-se, portanto, de um (importante) exemplo de um espaço topológico que não é localmente compacto.

Um espaço localmente compacto não é necessariamente Hausdorff e vice-versa. Vejamos exemplos.

Exemplo 34.9 Seja X não-vazio e $p \in X$. Seja τ_p a topologia particular de $\{p\}$, na qual são declarados abertos o vazio e todo conjunto que contém p (vide Exercício E. 29.3, página 1402). O espaço topológico (X, τ_p) não é Hausdorff (pois todo τ_p-aberto não-vazio contém p) mas é localmente compacto. De fato, se $x \in X$, então $V_x = \{p, x\}$ é τ_p-compacto, pois todo recobrimento $\mathcal{A}$ de V_x por τ_p-abertos contém pelo menos um elemento $A \in \mathcal{A}$ que contém x e p, e, portanto $\{A\} \subset \mathcal{A}$ é um recobrimento de V_x composto por um único elemento de $\mathcal{A}$. Porém, V_x é τ_p-aberto e, portanto é uma vizinhança compacta de x. ⌑

Exemplo 34.10 Um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensão infinita é Hausdorff na topologia induzida pela norma (por ser uma topologia métrica), mas não é localmente compacto nessa topologia, pois se $x \in \mathcal{H}$, qualquer vizinhança aberta que contém x contém alguma bola aberta $B(r, x)$ centrada em x com para algum $r > 0$. Mas nenhum compacto pode conter essa bola, pois há

nelas sequências que não têm subsequências convergentes (vide Teorema 34.11, página 1589). Por exemplo, se $\psi_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, é um conjunto de vetores ortonormais, então $x_n = \frac{r}{2}\psi_n$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de vetores de $B(r, x)$ para a qual vale $\|x_n - x_m\| = \frac{r}{\sqrt{2}}$ e, portanto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não tem uma subsequência convergente em norma. ⌑

Exemplo 34.11 A reta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \tau[\mathcal{S}])$, intoduzida na Seção 29.2.1.1, página 1406, é um espaço topológico Hausdorff que não é localmente compacto. Vide Proposição 34.29, página 1596. ⌑

34.3.6.1 Espaços Localmente Compactos Hausdorff

O estudo de espaços localmente compactos e que sejam Hausdorff possui um leque abrangente de aplicações. Apresentaremos no que segue alguns resultados que usaremos alhures neste texto.

A proposição que segue apresenta uma caracterização alternativa do que são espaços localmente compactos dentre os espaços de Hausdorff.

Proposição 34.31 *Um espaço topológico Hausdorff (X, τ) é localmente compacto se e somente se todo $x \in X$ possui uma vizinhança aberta relativamente compacta, ou seja, se e somente se para cada $x \in X$ existir um τ-aberto A com $\overline{A}$ τ-compacto tal que $x \in A$.* □

Prova. Se para cada $x \in X$ existir um τ-aberto A com $\overline{A}$ τ-compacto, então (X, τ) é localmente compacto, pela definição geral de compacidade local.

Pela definição geral de compacidade local, se (X, τ) é localmente compacto então para todo $x \in X$ existe um τ-aberto A e um τ-compacto C tais que $x \in A \subset C$. Agora, pelo Teorema 34.9, página 1585, C é um τ-fechado e, portanto, $\overline{A} \subset C$. Mas como $\overline{A}$ é um subconjunto τ-fechado de um τ-compacto, segue da Proposição 34.18, página 1582, que $\overline{A}$ é τ-compacto. ■

• **Propriedades de separação em espaços localmente compactos Hausdorff**

Proposição 34.32 *Todo espaço topológico Hausdorff localmente compacto é regular.*

Prova. Seja (X, τ) um espaço topológico localmente compacto Hausdorff. Sejam $F \subset X$ e $x \in X$, com F sendo um conjunto τ-fechado e $x \notin F$. Como (X, τ) é localmente compacto, x possui uma vizinhança aberta relativamente compacta A (Proposição 34.31, página 1610). Como (X, τ) é Hausdorff, $\overline{A}$ é τ-fechado (Teorema 34.9, página 1585).

Pela propriedade de Hausdorff e pela Proposição 34.10, página 1566, podemos para $f \in F$ encontrar um τ-aberto A_f tal que $x \in A_f \subset \overline{A_f}$ e $f \notin \overline{A_f}$. Seja a coleção $\mathcal{F} := \big\{F \cap \overline{A} \cap \overline{A_f},\ f \in F\big\}$. Pela Proposição 34.18, página 1582, cada $F \cap \overline{A} \cap \overline{A_f}$ é τ-compacto, por ser um subconjunto τ-fechado do τ-compacto $\overline{A}$. Afirmamos que $\bigcap_{f\in F}\left(F \cap \overline{A} \cap \overline{A_f}\right) = \emptyset$. De fato, não é possivel ter-se simultaneamente $f_0 \in F$ e $f_0 \in \overline{A_f}$ para todo $f \in F$, pois $f_0 \notin \overline{A_{f_0}}$. Pelo Lema 34.7, página 1586, existe assim uma coleção não-vazia finita $\left\{F \cap \overline{A} \cap \overline{A_{f_1}}, \ldots, F \cap \overline{A} \cap \overline{A_{f_n}}\right\}$ satisfazendo $\bigcap_{k=1}^{n}\left(F \cap \overline{A} \cap \overline{A_{f_k}}\right) = \emptyset$, ou seja, satisfazendo $F \cap \overline{A} \cap \left(\overline{A_{f_1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{f_n}}\right) = \emptyset$.

Definindo $B := A \cap A_{f_1} \cap \cdots \cap A_{f_n}$, teremos $\overline{B} \subset \overline{A} \cap \left(\overline{A_{f_n}} \cap \cdots \cap \overline{A_{f_n}}\right)$ (vide Proposição 29.4, página 1414) e disso segue que $F \cap \overline{B} \subset F \cap \overline{A} \cap \left(\overline{A_{f_1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{f_n}}\right) = \emptyset$, o que significa que $\overline{B} \subset F^c$. Agora, B é um τ-aberto (pois A e os A_{f_k}'s o são) e contém x (pois A e os A_{f_k}'s o fazem).

Assim, provamos que para todo $x \in X$ e todo τ-fechado F com $x \notin F$ é possível encontrar um τ-aberto B tal que $x \in B \subset \overline{B} \subset F^c$. Pela Proposição 34.10, página 1566, isso significa que (X, τ) é regular. ■

Corolário 34.9 *Seja (X, τ) um espaço topológico localmente compacto Hausdorff. Sejam $C, F \subset X$ com C τ-compacto, F τ-fechado e $C \cap F = \emptyset$. Então existem τ-abertos A_C e A_F com $C \subset A_C$, $F \subset A_F$ e $A_C \cap A_F = \emptyset$.* □

Prova. Seja $c \in C$. Pela Proposição 34.32, página 1610, existe um aberto A_c tal que $c \in A_c \subset \overline{A_c} \subset F^c$. Portanto, a coleção $\mathcal{A} = \{A_c,\ c \in C\}$ recobre C. Como C é compacto, existe uma subcoleção finita $\{A_{c_1},\ \ldots,\ A_{c_n}\} \subset \mathcal{A}$ que também recobre C, ou seja, $C \subset A_{c_1} \cup \cdots \cup A_{c_n}$. Claro está que $A_C := A_{c_1} \cup \cdots \cup A_{c_n}$ é um τ-aberto e que $\overline{A_C} = \overline{A_{c_1}} \cup \cdots \cup \overline{A_{c_n}} \subset F^c$. Tomando $A_F = \left(\overline{A_C}\right)^c$ a demonstração está completa. ■

A Proposição 34.32 tem também o seguinte corolário.

Corolário 34.10 *Todo espaço topológico Hausdorff, segundo-contável e localmente compacto é normal.* □

Prova. Evidente pela Proposição 34.32, página 1610, e pelo Teorema 34.2, página 1568. ■

No Teorema 34.26, página 1615, será apresentado um refinamento do Corolário 34.10.

• **Recobrimentos por abertos em espaços localmente compactos Hausdorff**

A proposição que segue é usada em diversas demonstrações, como teremos oportunidade de observar em nossa discussão sobre a relação entre compacidade local e paracompacidade.

Proposição 34.33 *Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico Hausdorff e localmente compacto. Então valem as seguintes afirmações:*

I. *X possui um recobrimento por τ-abertos relativamente compactos.*

II. *Se adicionalmente $(X,\ \tau)$ for segundo-contável, então X possui:*

1. *Um recobrimento contável por τ-abertos relativamente compactos $\mathcal{A} = \{A_m \in \tau,\ m \in \mathbb{N}\}$.*
2. *Um recobrimento contável por τ-abertos relativamente compactos $\mathcal{B} = \{B_m \in \tau,\ m \in \mathbb{N}\}$ satisfazendo*

$$A_m \subset \overline{A_m} \subset B_m \subset \overline{B_m} \subset B_{m+1}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. (Os conjuntos A_m são aqueles do item 1).

O primeiro item da parte II, acima, garante que $\mathcal{A}_c = \{\overline{A_m},\ m \in \mathbb{N}\}$ é um recobrimento contável de X por τ-compactos, estabelecendo que todo espaço topológico Hausdorff localmente compacto e segundo-contável é σ-compacto. □

Prova (De [62], com diversas modificações). **Parte I.** A prova da parte I é evidente pela definição, pois se $x \in X$ então existem $A_x \in \tau$ e C_x τ-compacto tais que $x \in A_x \subset C_x$. Obviamente $\{A_x,\ x \in X\}$ é um recobrimento de X por τ-abertos. Como C_x é fechado (Proposição 34.9, página 1585), então $\overline{A_x} \subset C_x$. Pela Proposição 34.18, página 1582, isso implica que $\overline{A_x}$ é compacto, estabelecendo que cada A_x, $x \in X$, é relativamente compacto.

Parte II. Pela Parte I, $(X,\ \tau)$ possui, por ser Hausdorff e localmente compacto, um recobrimento por τ-abertos relativamente compactos. Como $(X,\ \tau)$ é segundo-contável, o Lema 34.5, página 1579 garante-nos que podemos considerar esse recobrimenro como sendo contável. Vamos denotá-lo por $\mathcal{A} = \{A_m \in \tau,\ m \in \mathbb{N}\}$. Como $\mathcal{A}$ recobre X, a coleção de τ-compactos $\mathcal{A}_c = \{\overline{A_m},\ m \in \mathbb{N}\}$ também recobre X. Isso demonstrou o item 1.

Como $\mathcal{A}$ recobre X, todo $\overline{A_m}$, $m \in \mathbb{N}$, é recoberto por elementos de $\mathcal{A}$. Como $\overline{A_1}$ é τ-compacto, esse recobrimento por elementos de $\mathcal{A}$ possui um sub-recobrimento finito, que denotaremos por $\{A_{1,\,1},\ \ldots,\ A_{n_1,\,1}\} \subset \mathcal{A}$, com $n_1 \in \mathbb{N}$. Seja $B_1 := \bigcup_{k=1}^{n_1} A_{k,\,1}$ Por construção $\overline{A_1} \subset B_1$ para cada $m \in \mathbb{N}$. É claro também que $\overline{B_1} = \bigcup_{k=1}^{n_1} \overline{A_{k,\,1}}$ é τ-compacto (por ser uma união finita de τ-compactos, vide Proposição 34.17, página 1581).

Para o item 2 procederemos agora por indução. O conjunto $\overline{B_1} \cup \overline{A_2}$ é também τ-compacto (novamente por ser união de dois τ-compactos) e igualmente possui um recobrimento finito por elementos de $\mathcal{A}$: $\{A_{1,\,2},\ \ldots,\ A_{n_2,\,2}\} \subset \mathcal{A}$. Novamente, definimos $B_2 := \bigcup_{k=1}^{n_2} A_{k,\,2}$ e novamente teremos que $\overline{A_2} \subset B_2$ e que $\overline{B_2} = \bigcup_{k=1}^{n_2} \overline{A_{k,\,2}}$ é τ-compacto. Observe-se que, pela definição, valerá também $\overline{B_1} \subset B_2$. Procedendo indutivamente, obtemos para cada $m \in \mathbb{N}$ conjuntos $\overline{B_m} \cup \overline{A_{m+1}}$ tendo

um recobrimento finito $\{A_{1,\,m},\ \ldots,\ A_{n_m,\,m}\} \subset \mathcal{A}$ com o qual definimos $B_{m+1} := \bigcup_{k=1}^{n_{m+1}} A_{k,\,m+1}$ e novamente teremos que $\overline{A_{m+1}} \subset B_{m+1}$ e que $\overline{B_{m+1}} = \bigcup_{k=1}^{n_{m+1}} \overline{A_{k,\,m+1}}$ é τ-compacto. Observe-se que, pela definição, valerá também $\overline{B_m} \subset B_{m+1}$.

A coleção $\mathcal{B} = \{B_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ assim obtida recobre X (pois $\overline{A_m} \subset B_m$ para todo m e $\mathcal{A}_c$ recobre X), é composta por conjuntos pré-compactos (pois cada $\overline{B_m}$ é τ-compacto) e satisfazem $\overline{B_m} \subset B_{m+1}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. ■

34.3.7 Paracompacidade

A noção de paracompacidade foi introduzida à página 1579 e suas propriedades mais relevantes serão coletadas na presente seção. Uma observação elementar é que todo espaço topológico compacto é paracompacto, pois todo recobrimento de um espaço compacto por abertos tem um sub-recobrimento finito e, portanto, localmente finito. Dessa forma, a noção de paracompacidade representa uma flexibilização da noção de compacidade. Mas há uma outra razão, bem menos evidente, que motiva aquela definição. As aplicações das partições da unidade, bem ilustradas no Teorema 34.23, página 1607, são tão importantes que levaram à procura de caracterizações dos espaços topológicos que as permitam. Contemplando o Teorema 34.22, página 1606, percebemos que o que se procura é uma noção mais ampla que a de espaço Hausdorff compacto. Provaremos mais adiante que os espaços Hausdorff paracompactos têm as propriedades que se deseja, pois provaremos que um espaço Hausdorff $(X,\ \tau)$ é paracompacto se e somente se todo recobrimentro de X por τ-abertos admitir uma partição da unidade subordinada. Essa é a principal motivação da noção de paracompacidade.

• **Subconjuntos fechados e espaços paracompactos**

A proposição que provamos a seguir é o análogo para espaços paracompactos da Proposição 34.18, página 1582, para espaços compactos.

Proposição 34.34 *Se $(X,\ \tau)$ é um espaço topológico paracompacto e $F \subset X$ um conjunto τ-fechado. Então F é paracompacto (na topologia relativa de τ em F).* □

Prova. Na topologia relativa τ_F de τ em F os abertos são da forma $A \cap F$ com $A \in \tau$. Seja $\{A_\lambda \cap F,\ A_\lambda \in \tau,\ \lambda \in \Lambda\}$ um recobrimento de F por τ_F-abertos. A coleção de conjuntos $\mathcal{A} = \{F^c\} \cup \{A_\lambda,\ A_\lambda \in \tau,\ \lambda \in \Lambda\}$ é um recobrimento de X por τ-abertos. Como $(X,\ \tau)$ é paracompacto, $\mathcal{A}$ possui um refinamento por τ-abertos localmente finito $\mathcal{B}$. Essa coleção $\mathcal{B}$ é a união de dois subconjuntos: $\mathcal{B}_0$, composto por τ-abertos contidos em F^c, e $\mathcal{B}_1$, composto por τ-abertos contidos nos conjuntos A_λ, $\lambda \in \Lambda$. Como $\mathcal{B}$ deve recobrir X é evidente que $\mathcal{B}_1$ deve recobrir F (os elementos de $\mathcal{B}_0$ não intersectam F pois são subconjuntos de F^c).

Vamos denotar a coleção $\mathcal{B}_1$ por $\{B_\mu \in \tau,\ \mu \in M\}$, sendo que cada B_μ é subconjunto de algum A_λ com $\lambda \in \Lambda$. É claro que $\{B_\mu \cap F,\ \mu \in M\}$ é um refinamento de $\{A_\lambda \cap F,\ A_\lambda \in \tau,\ \lambda \in \Lambda\}$ por τ_F-abertos e é claro também que $\{B_\mu \cap F,\ \mu \in M\}$ recobre F, já que $\{B_\mu,\ \mu \in M\}$ o faz.

Seja $f \in F$. Como $f \in X$, e $(X,\ \tau)$ é paracompacto, existe uma vizinhança τ-aberta V_f de f que intersecta apenas uma coleção finita de elementos de $\mathcal{B}$ e, portanto, de $\mathcal{B}_1$. Logo, $V_f \cap F$ é uma vizinhança τ_F-aberta de f que intersecta apenas uma coleção finita de elementos de $\{B_\mu \cap F,\ \mu \in M\}$. Isso prova que $\{B_\mu \cap F,\ \mu \in M\}$ é um refinamento por τ_F-abertos localmente finito de $\{A_\lambda \cap F,\ A_\lambda \in \tau,\ \lambda \in \Lambda\}$, estabelecendo que F é τ_F-paracompacto. ■

34.3.7.1 Espaços Paracompactos Hausdorff

No que segue iremos nos especializar em espaços paracompactos que sejam Hausdorff, pois esses possuem propriedades de maior interesse, em analogia, outra vez, com o que ocorre nos espaços compactos.

• **Regularidade e normalidade de espaços paracompactos Hausdorff**

O importante teorema que provamos a seguir, devido em sua origem a Dieudonné, é o análogo para espaços paracompactos Hausdorff do Teorema 34.8, página 1584, para espaços compactos Hausdorff.

Teorema 34.24 *Com as definições de acima, as seguintes afirmações são válidas:*

I. Se (X, τ) é um espaço topológico paracompacto Hausdorff, então (X, τ) é regular.

II. Se (X, τ) é um espaço topológico paracompacto Hausdorff, então (X, τ) é normal. □

O afirmação mais importante é a da parte **II**, que mostra que em espaços paracompactos Hausdorff é válido o Lema de Urysohn, Lema 34.3, página 1571. Isso nos conduzirá à conclusão que a existência de partições da unidade é condição necessária e suficiente para um espaço topológico ser paracompacto e Hausdorff, o resultado mais importante da teoria dos espaços paracompactos e que motiva sua própria definição. Como veremos, a parte **I** é usada na demonstração da parte **II**.

Demonstração do Teorema 34.24. **Prova de I.** Seja $G \subset X$ um conjunto τ-fechado e seja $f \in G^c$. Como X é Hausdorff, existem para cada $g \in G$ dois τ-abertos $A(g)$ e $B(g)$ tais que $f \in A(g)$, $g \in B(g)$ e $A(g) \cap B(g) = \emptyset$.

A coleção $\{B(g),\ g \in G\}$ é um recobrimento de G por τ-abertos. Logo, $\{G^c\} \cup \{B(g),\ g \in G\}$ é um recobrimento de X por τ-abertos. Como X é paracompacto, esse recobrimento possui ao menos um refinamento por τ-abertos localmente finito. Seja $\mathcal{B}$ um desses refinamentos. $\mathcal{B}$ é a união de dois subconjuntos: $\mathcal{B}_0$, composto por τ-abertos contidos em G^c, e $\mathcal{B}_1$, composto por τ-abertos contidos nos conjuntos $B(g)$, $g \in G$. Como $\mathcal{B}$ deve recobrir X é evidente que $\mathcal{B}_1$ deve recobrir G (os elementos de $\mathcal{B}_0$ não intersectam G pois são subconjuntos de G^c).

Seja C_f a união de todos os elementos de $\mathcal{B}_1$. Naturalmente, C_f é um τ-aberto e $C_f \supset G$.

Como $\mathcal{B}$ é também localmente finito, existe uma vizinhança τ-aberta V_f de f que possui intersecção não-vazia com apenas uma coleção finita de elementos de $\mathcal{B}$. Em particular, V_f possui intersecção não-vazia com apenas uma coleção finita de elementos de $\mathcal{B}_1$. Há duas possibilidades: *a.* V_f não intersecta nenhum elemento de $\mathcal{B}_1$ ou *b.* V_f intersecta $r > 0$, $r \in \mathbb{N}$, elementos de $\mathcal{B}_1$.

No caso *a*, vemos que V_f é uma vizinhança de $f \in G^c$ que não intersecta C_f. Para o caso *b*, sejam $B_1, \ldots, B_r$ os elementos de $\mathcal{B}_1$ que intersectam V_f. Cada B_k está contido em um τ-aberto $B(g_k)$ e, portanto, V_f intersecta o τ-aberto $B(g_1)\cup\cdots\cup B(g_r)$. Segue disso que $V_f \cap A(g_1)\cap\cdots\cap A(g_r)$ é um τ-aberto que também contém f e também não intersecta C_f. Essa afirmação se prova por absurdo da seguinte forma. Seja $h \in C_f$ tal que $h \in V_f \cap A(g_1) \cap \cdots \cap A(g_r)$. Como $h \in C_f$, h deve evidentemente pertencer a pelo menos um dos elementos de $\mathcal{B}_1$. Por outro lado, como $h \in V_f$, então $h \in B_1 \cup \cdots \cup B_r$, já que apenas os conjuntos $B_1, \ldots, B_r$ de $\mathcal{B}_1$ intersectam V_f. Seja $k_0 \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $h \in B_{k_0}$. Isso implica que $h \in B(g_{k_0})$, o que é um absurdo, pois se $h \in V_f \cap A(g_1) \cap \cdots \cap A(g_r)$ então $h \in A(g_{k_0})$ que é disjunto de $B(g_{k_0})$, por construção.

Provamos, portanto, cada $f \in G^c$ possui uma vizinhança τ-aberta V_f que não intersecta o τ-aberto $C_f \subset G$. Isso estabeleceu que (X, τ) é regular.

Prova de II. Sejam F, $G \subset X$ dois conjuntos τ-fechados disjuntos. Pela Parte **I**, (X, τ) é regular Hausdorff. Portanto, para cada $f \in F$ existem τ-abertos V_f e C_f tais que $f \in V_f$, $G \subset C_f$ e $V_f \cap C_f = \emptyset$. Assim, $\{F^c\}\cup\{V_f,\ f \in F\}$ forma um recobrimento de X por τ-abertos. Pela paracompacidade de X, esse recobrimento possui um refinamento por τ-abertos localmente finito $\mathcal{A}$. A coleção $\mathcal{A}$ é a união de dois subconjuntos: $\mathcal{A}_0$, composto por τ-abertos contidos em F^c, e $\mathcal{A}_1$, composto por τ-abertos contidos nos conjuntos V_f, $f \in F$. Como $\mathcal{A}$ deve recobrir X, é evidente que $\mathcal{A}_1$ deve recobrir F (os elementos de $\mathcal{A}_0$ não intersectam F pois são subconjuntos de F^c).

Seja D_F a união de todos os elementos de $\mathcal{A}_1$. Naturalmente, D_F é um τ-aberto e $D_F \supset F$.

Como $\mathcal{A}$ é localmente finito, cada $g \in G$ possui uma vizinhança aberta U_g que intersecta apenas uma coleção finita de elementos de $\mathcal{A}$. Há, portanto, duas possibilidades: *a.* U_g não intersecta nenhum elemento de $\mathcal{A}_1$ e *b.* U_g intersecta $r > 0$, $r \in \mathbb{N}$, elementos de $\mathcal{A}_1$.

No caso *a.* U_g não intersecta D_F. Para o caso *b.*, sejam $A_1, \ldots, A_r$ os elementos de $\mathcal{A}_1$ intersectados por U_g. Cada A_k está contido em algum V_{f_k} com $f_k \in F$, $k = 1, \ldots, r$. Claramente U_g intersecta $A_1\cup\ldots\cup A_r$ e, portanto, U_g intersecta $V_{f_1} \cup \cdots \cup V_{f_r}$. Segue disso que $U_g \cap C_{f_1} \cap \cdots \cap C_{f_r}$ é um τ-aberto que também contém g e também não intersecta D_F. Essa afirmação se prova por absurdo da seguinte forma. Seja $h \in D_F$ tal que $h \in U_g \cap C_{f_1} \cap \cdots \cap C_{f_r}$. Como $h \in D_F$, então h deve pertencer a pelo menos um dos elementos de $\mathcal{A}_1$. Por outro lado, como $h \in U_g$, $h \in A_1 \cup \ldots \cup A_r$, já que apenas os conjuntos $A_1, \ldots, A_r$ de $\mathcal{A}_1$ intersectam U_g. Seja $k_0 \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $h \in A_{k_0}$. Isso implica que $h \in V_{f_{k_0}}$, o que é um absurdo, pois se $h \in U_g \cap C_{f_1} \cap \cdots \cap C_{f_r}$, então $h \in C_{f_{k_0}}$ que é disjunto de $V_{f_{k_0}}$, por contrução.

Concluímos que cada $g \in G$ possui uma vizinhança τ-aberta, que denominamos E_g, que não intersecta D_F. Logo, $\bigcup_{g\in G} E_g$ é uma vizinhança τ-aberta de G que não intersecta D_F. Como D_F é uma vizinhança τ-aberta de F, concluímos que (X, τ) é normal. ■

Tratemos agora de apresentar uma proposição técnica que generaliza para espaços paracompactos Hausdorff as afirmações da Proposição 34.12, página 1567, e do Corolário 34.8, página 1587.

Proposição 34.35 *Seja (X, τ) um espaço paracompacto Hausdorff e seja $\mathcal{A} = \{A_\lambda \in \tau,\ \lambda \in \Lambda\}$ um recobrimento localmente finito de X por τ-abertos. Então $\mathcal{A}$ possui um refinamento por τ-abertos $\mathcal{B} = \{B_\lambda \in \tau,\ \lambda \in \Lambda\}$ (com o mesmo conjunto de índices Λ) tal que $\overline{B_\lambda} \subset A_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$.* □

Para não desviar a atenção do leitor, apresentamos a delicada demonstração da Proposição 34.35 no Apêndice 34.A, página 1636. Chegamos agora ao coroamento de nossos esforços na presente seção, estabelecendo a íntima relação entre espaços paracompactos Hausdorff e partições da unidade.

Teorema 34.25 *Um espaço topológico Hausdorff (X, τ) é paracompacto se e somente se todo recobrimento de X por τ-abertos possuir uma partição da unidade subordinada a si.* □

No Teorema 35.2, página 1652, estenderemos esse teorema para o caso de variedades diferenciáveis, situação na qual poderemos provar a existência de partições da unidade compostas por funções infinitamente diferenciáveis. No curso da demonstração do Teorema 34.25 provaremos a seguinte asserção, de interesse por si só.

Proposição 34.36 *Se o espaço topológico Hausdorff (X, τ) é paracompacto e $\mathcal{A} = \{A_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ é um recobrimento de X por τ abertos, então existe uma partição da unidade $\{p_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ (com o mesmo conjunto Λ de índices!) subordinada a $\mathcal{A}$ com $\operatorname{supp} p_\lambda \subset A_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$.* □

Demonstração do Teorema 34.25 e da Proposição 34.36. Vamos primeiramente provar que se todo recobrimento de X por τ-abertos possui uma partição da unidade subordinada então (X, τ) é paracompacto.

Seja $\mathcal{A} = \{A_\lambda \in \tau,\ \lambda \in \Lambda\}$ um recobrimento de X por τ-abertos. Seja também $\mathcal{F} = \{f_\mu : X \to [0,\ 1],\ \mu \in M\}$ uma partição da unidade em X subordinada a $\mathcal{A}$. Como as funções f_μ são contínuas, cada $f_\mu^{-1}\big((0,\ 1]\big)$ é um τ-aberto. Pela definição de partição da unidade vale para cada $x \in X$ que $\sum_{\mu\in M} f_\mu(x) = 1$, implicando que $x \in f_\mu^{-1}\big((0,\ 1]\big)$ para algum $\mu \in M$. Isso prova que $\{f_\mu^{-1}\big((0,\ 1]\big),\ \mu \in M\}$ é um recobrimento de X. Como $\mathcal{F}$ é subordinada a $\mathcal{A}$ existe para todo $\mu \in M$ um $\lambda \in \Lambda$ tal que $\operatorname{supp}(f_\mu) \subset A_\lambda$. Logo, $f_\mu^{-1}\big((0,\ 1]\big) \subset \operatorname{supp}(f_\mu) \subset A_\lambda$. Os fatos acima provaram que $\{f_\mu^{-1}\big((0,\ 1]\big),\ \mu \in M\}$ é um refinamento de $\mathcal{A}$ por τ-abertos. Também pela definição de partição da unidade o conjunto $\{\operatorname{supp}(f_\mu),\ \mu \in M\}$, é um sistema localmente finito de conjuntos (fechados). Isso implica que cada $x \in X$ possui uma vizinhança V_x que intersecta apenas uma coleção finita de elementos de $\{\operatorname{supp}(f_\mu),\ \mu \in M\}$ e, portanto, intersecta apenas uma coleção finita de elementos de $\{f_\mu^{-1}\big((0,\ 1]\big),\ \mu \in M\}$, já que para todo $\mu \in M$ tem-se $f_\mu^{-1}\big((0,\ 1]\big) \subset \operatorname{supp}(f_\mu)$.

Isso provou que (X, τ) é paracompacto. Vamos agora provar a recíproca, ou seja, que se (X, τ) é paracompacto e Hausdorff, então todo recobrimento de X por τ-abertos possui uma partição da unidade subordinada.

Seja $\mathcal{A} = \{A_\lambda \in \tau,\ \lambda \in \Lambda\}$ um recobrimento de X por τ-abertos que podemos, sem perda de generalidade, supor ser localmente finito (pois (X, τ) é suposto ser paracompacto). Pela Proposição 34.35, página 1614, $\mathcal{A}$ possui um refinamento por τ-abertos $\mathcal{B} = \{B_\lambda \in \tau,\ \lambda \in \Lambda\}$ (com o mesmo conjunto Λ de índices!) tal que $\overline{B_\lambda} \subset A_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Assim, para cada $\lambda \in \Lambda$ os τ-fechados $\overline{B_\lambda}$ e $\big(A_\lambda\big)^c$ são disjuntos. Como (X, τ) é paracompacto e Hausdorff, (X, τ) é normal (Teorema 34.24, página 1613) e pela Proposição 34.10, página 1566, concluímos que para cada $\lambda \in \Lambda$ existe um τ-aberto C_λ tal que $\overline{B_\lambda} \subset C_\lambda \subset \overline{C_\lambda} \subset A_\lambda$.

Como os τ-fechados $\overline{B_\lambda}$ e $\big(C_\lambda\big)^c$ são disjuntos e (X, τ) é normal, podemos evocar o Lema de Urysohn, Lema 34.3, página 1571, e obter para cada $\lambda \in \Lambda$ uma função contínua $f_\lambda : X \to [0,\ 1]$ tal que $f_\lambda(x) = 1$ para todo $x \in \overline{B_\lambda}$ e $f_\lambda(x) = 0$ para todo $x \in \big(C_\lambda\big)^c$. Logo, $\{x \in X|\ f_\lambda(x) \neq 0\} \subset C_\lambda$, o que implica $\operatorname{supp}(f_\lambda) \subset \overline{C_\lambda} \subset A_\lambda$.

Temos também que $B_\lambda \subset \overline{B_\lambda} \subset \operatorname{supp}(f_\lambda)$ e como $\mathcal{B}$ recobre X, concluímos que $\{\overline{B_\lambda},\ \lambda \in \Lambda\}$ e $\{\operatorname{supp}(f_\lambda),\ \lambda \in \Lambda\}$ também recobrem X.

Passemos agora à construção da desejada partição da unidade. Como $\mathcal{A}$ é localmente finito, existe para cada $x \in X$ uma vizinhança τ-aberta V_x que intersecta apenas uma coleção finita de elementos de $\mathcal{A}$ e, portanto, apenas uma coleção finita de elementos de $\{\operatorname{supp}(f_\lambda),\ \lambda \in \Lambda\}$. Consequentemente, para cada $x \in X$ há apenas uma coleção finita de índices $\lambda \in \Lambda$ tais que $x \in \operatorname{supp}(f_\lambda)$. Vamos denotar essa coleção de índices por $\Lambda_x := \{\lambda_{1,\,x},\ \ldots,\ \lambda_{n_x,\,x}\}$. Como $\{\overline{B_\lambda},\ \lambda \in \Lambda\}$ recobre X, sempre existe ao menos um $\lambda \in \Lambda$ tal que $f_\lambda(x) = 1$ e, portanto, para cada $x \in X$ tem-se $\Lambda_x \neq \emptyset$.

Dessa forma, para cada $x \in X$ podemos considerar a soma finita $\sum_{\lambda\in\Lambda_x} f_\lambda(x)$ e, portanto, $X \ni x \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda_x} f_\lambda(x) \in [0,\ \infty)$ define uma função $f : X \to [0,\ \infty)$. Notemos para uso posterior que para todo $x \in X$ vale $f(x) \geq 1$ pois, como comentamos acima, sempre existe ao menos um $\lambda \in \Lambda_x$ tal que $f_\lambda(x) = 1$.

Para $y \in X$ seja V_y uma vizinhança τ-aberta, mencionada acima, que intersecta apenas uma coleção finita de elementos de $\{\operatorname{supp}(f_\lambda),\ \lambda \in \Lambda\}$. Consequentemente, há apenas uma coleção finita de índices $\lambda \in \Lambda$ tais que $\operatorname{supp}(f_\lambda) \cap V_y \neq \emptyset$. Vamos denotar essa coleção de índices por $\Lambda_{V_y} := \{\lambda_{1,\,V_y},\ \ldots,\ \lambda_{n_{V_y},\,V_y}\}$. É evidente que $\Lambda_x \subset \Lambda_{V_y}$ para todo $x \in V_y$. Podemos considerar a função $F_{V_y} : V_y \to [0,\ \infty)$ definida pela soma finita $F_{V_y} := \sum_{\lambda\in\Lambda_{V_y}} f_\lambda$. Por ser uma soma finita de funções contínuas, F_{V_y} é também contínua. Afirmamos que F_{V_y} é a restrição de f ao conjunto V_y. De fato, se $x \in V_y$, segue do fato que $\Lambda_x \subset \Lambda_{V_y}$ que $F_{V_y}(x) - f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda_{V_y}\setminus\Lambda_x} f_\lambda(x)$. Entretanto, se $\lambda \notin \Lambda_x$ então $x \notin \operatorname{supp}(f_\lambda)$, o que implica $f_\lambda(x) = 0$, provando que $F_{V_y}(x) = f(x)$ para todo $x \in V_y$.

Das considerações de acima concluímos que a restrição de f a cada conjunto τ-aberto V_y é contínua. Como a coleção $\{V_y,\ y \in X\}$ é um recobrimento de X por τ-abertos, concluímos pela Proposição 34.15, página 1578, que f é contínua. Unindo isso ao fato já observado que $f(x) \geq 1$ para todo x, concluímos que as funções $p_\lambda : X \to [0,\ 1]$ definidas para cada $x \in X$ por

$$p_\lambda(x) \ := \ \frac{f_\lambda(x)}{f(x)}$$

são contínuas para todo $\lambda \in \Lambda$. Como $\operatorname{supp}(p_\lambda) = \operatorname{supp}(f_\lambda)$ para todo $\lambda \in \Lambda$, vemos que $\{\operatorname{supp}(p_\lambda),\ \lambda \in \Lambda\}$, é um sistema localmente finito de conjuntos (fechados). É também evidente pelas mesmas considerações de acima que para cada $x \in X$ tem-se $\sum_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda(x) = 1$, a soma sendo entendida sobre o conjunto finito Λ_x. Isso provou que $\{p_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ é uma partição da unidade, mas como $\operatorname{supp}(p_\lambda) = \operatorname{supp}(f_\lambda) \subset A_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, vê-se que se trata de uma partição da unidade subordinada à coleção $\mathcal{A}$. Isso completa a demonstração ■

• Paracompacidade de espaços localmente compactos e segundo-contáveis

Na Seção 29.4, página 1421 introduzimos a noção de espaço topológico segundo-contável: um espaço topológico $(X,\ \tau)$ é dito ser um *espaço topológico segundo-contável* ("second countable") se possuir uma base contável. No que segue provaremos que todo espaço topológico Hausdorff localmente compacto e segundo-contável é paracompacto. Esse resultado é de importância na teoria dos espaços paracompactos e uma de suas consequências é o fato de os espaços $\mathbb{R}^n$ serem paracompactos, como veremos. Outras consequências para o estudo de variedades topológicas serão discutidas em seguida ao enunciado e demonstrações dos resultados principais.

Teorema 34.26 *Se $(X,\ \tau)$ é um espaço topológico Hausdorff localmente compacto e segundo-contável, então $(X,\ \tau)$ é paracompacto. Vale também a afirmação que cada recobrimento $\mathcal{U}$ de X por τ-abertos possui um refinamento contável e localmente finito $\mathcal{V}$ por conjuntos τ-abertos relativamente compactos. Vale também a afirmação que para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset \overline{V} \subset U$.* □

Prova. (Extraida com diversas modificações de [62]). Seja $\mathcal{U} = \{U_\lambda \in \tau,\ \lambda \in \Lambda\}$ um recobrimento de X por τ-abertos. Desejamos provar que $\mathcal{U}$ possui um refinamento por τ-abertos localmente finito, estabelecendo a paracompacidade de $(X,\ \tau)$.

Pela Proposição 34.33, página 1611, X possui um recobrimento contável por τ-abertos relativamente compactos $\mathcal{B} = \{B_m \in \tau,\ m \in \mathbb{N}\}$ satisfazendo $\overline{B_m} \subset B_{m+1}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Isso naturalmente implica $B_a \subset \overline{B_a} \subset B_{a+1} \subset \overline{B_{a+1}}$ etc., implicando, em particular, que $B_a \subset B_b$ e que $B_a \subset \overline{B_b}$ sempre que $b \geq a$.

Podemos, consequentemente, escrever

$$B_j \ = \ \left(\bigcup_{l=2}^{j} (B_l \setminus B_{l-1})\right) \cup B_1 \ \subset \ \left(\bigcup_{l=2}^{j} (\overline{B_l} \setminus B_{l-1})\right) \cup \overline{B_1} \ = \ \left(\bigcup_{l=2}^{j} \left(\overline{B_l} \cap (B_{l-1})^c\right)\right) \cup \overline{B_1}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$. Definindo

$$K_m \ := \ \begin{cases} \overline{B_1}\,, & m = 1\,, \\ \overline{B_m} \cap (B_{m-1})^c\,, & m \geq 2\,, \end{cases}$$

vemos que $B_j \subset \bigcup_{l=1}^{j} K_l$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m$, temos também $X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m$, o que prova que $\{K_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ recobre X. Pelo Corolário 34.5, página 1585, cada K_m, $m \in \mathbb{N}$, é τ-compacto.

Como $\overline{B_m} \subset B_{m+1}$ para todo $m \geq 1$ e $(B_{m-1})^c \subset \left(\overline{B_{m-2}}\right)^c$ para todo $m \geq 3$, é fácil ver que $K_m \subset O_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, onde

$$O_m \ := \ \begin{cases} B_2\,, & m = 1\,, \\ B_3\,, & m = 2\,, \\ B_{m+1} \cap \left(\overline{B_{m-2}}\right)^c\,, & m \geq 3\,. \end{cases}$$

Note-se que B_2, B_3 e $B_{m+1} \cap \left(\overline{B_{m-2}}\right)^c$, $m \geq 3$, são τ-abertos e, portanto $O_m \in \tau$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

A seguinte observação será importante abaixo. Seja $m \in \mathbb{N}$ e seja $p \geq m+3$. Como $O_m \subset B_{m+1}$, teremos $O_m \cap O_p \subset B_{m+1} \cap O_p = B_{m+1} \cap B_{p+1} \cap \left(\overline{B_{p-2}}\right)^c$. Agora, $B_{m+1} \cap \left(\overline{B_{p-2}}\right)^c = \emptyset$, pois $B_a \subset \overline{B_b}$ sempre que $b \geq a$. Assim, provamos que

$$O_m \cap O_p \ = \ \emptyset \quad \text{sempre que} \quad |m - p| \geq 3\,, \tag{34.34}$$

sendo que vale também

$$X \ = \ \bigcup_{m\in\mathbb{N}} O_m\,, \tag{34.35}$$

uma decorrência do fato que $K_m \subset O_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e do fato que $\{K_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ recobre X.

Cada K_m é recoberto por elementos de $\mathcal{U}$ e, devido à compacidade, existe uma coleção finita $\{U_{\lambda_{1,\,m}},\ \ldots,\ U_{\lambda_{l_m,\,m}}\} \subset \mathcal{U}$, que recobre K_m, i.e., $K_m \subset U_{\lambda_{1,\,m}} \cup \cdots \cup U_{\lambda_{l_m,\,m}}$. Afirmamos que a coleção

$$\mathcal{V} \ := \ \left\{U_{\lambda_{k,\,m}} \cap O_m,\ 1 \leq k \leq l_m,\ m \in \mathbb{N}\right\}$$

é um refinamento de $\mathcal{U}$ localmente finito por τ-abertos relativamente compactos. Em primeiro lugar, $U_{\lambda_{k,\,m}} \cap O_m$ é um τ-aberto por ser uma intersecção de dois τ-abertos. Em segundo lugar,

$$\overline{U_{\lambda_{k,\,m}} \cap O_m} \ \subset \ \overline{U_{\lambda_{k,\,m}}} \cap \overline{O_m} \ \subset \ \overline{O_m} \ \subset \ \overline{B_{m+1}}\,,$$

e como $\overline{B_{m+1}}$ é τ-compacto (os B_m's são, por hipótese, relativamente compactos), concluímos que $\overline{U_{\lambda_{k,\,m}} \cap O_m}$ é um subconjunto τ-fechado de um τ-compacto e, portanto (Proposição 34.18, página 1582), é também τ-compacto, estabelecendo que os conjuntos $U_{\lambda_{k,\,m}} \cap O_m \in \mathcal{V}$ são relativamente compactos. Em terceiro lugar, para todo $U_{\lambda_{k,\,m}} \cap O_m \in \mathcal{V}$ tem-se, evidentemente, $U_{\lambda_{k,\,m}} \cap O_m \subset U_{\lambda_{k,\,m}} \in \mathcal{U}$. Em quarto lugar,

$$K_m \ = \ K_m \cap O_m \ \subset \ \left(\bigcup_{k=1}^{l_m} U_{\lambda_{k,\,m}}\right) \cap O_m \ = \ \bigcup_{k=1}^{l_m} \left(U_{\lambda_{k,\,m}} \cap O_m\right)\,,$$

e como $\{K_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ recobre X, concluímos que $\mathcal{V}$ recobre X e, portanto, que $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$.

A coleção $\mathcal{V}$ é evidentemente contável e, portanto, resta apenas provar que $\mathcal{V}$ é um sistema localmente finito. Seja $x \in X$. Por (34.35), os conjuntos O_m recobrem X e, portanto, existe ao menos um $m_x \in \mathbb{N}$ tal que $x \in O_{m_x}$. Por (34.34), O_{m_x} só pode ter uma intersecção não-vazia com os conjuntos O_m com $|m - m_x| \leq 2$. Logo, os únicos elementos de $\mathcal{V}$ com os quais O_{m_x} pode ter uma intersecção não-vazia pertencem à coleção $\left\{U_{\lambda_{k,\,m}} \cap O_m,\ 1 \leq k \leq l_m,\ m_x - 2 \leq m \leq m_x + 2\right\}$, que é uma subcoleção finita de $\mathcal{V}$. Assim, cada $x \in X$ tem uma vizinhança, a saber, O_{m_x}, que intersecta apenas uma coleção finita de elementos de $\mathcal{V}$, provando que $\mathcal{V}$ é localmente finita. Isso completou a demonstração. ■

O Teorema 34.26 permite-nos identificar uma importante classe de espaços paracompactos e um de seus corolários é o seguinte:

Corolário 34.11 *Com a topologia usual os espaços $\mathbb{R}^n$ são paracompactos.* □

Prova. A topologia usual dos espaços $\mathbb{R}^n$ é métrica e, portanto, Hausdorff. Compacidade local já fora estabelecida na Seção 34.3.6, página 1609, e a propriedade de ser segundo-contável segue da Proposição 29.15, página 1422, já que $\mathbb{R}^n$ é separável (os racionais são um conjunto contável denso). ■

• **Paracompacidade de espaços métricos**

Um importante teorema, devido a A. H. Stone[45], afirma o seguinte:

Teorema 34.27 (Teorema de A. H. Stone) *Todo espaço métrico é paracompacto.* □

A demonstração será omitida da presente versão desse texto e remetemos o estudante à literatura pertinente. A referência ao trabalho original é A. H. Stone, Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 977–982 (1948). Uma demonstração "simples" (uma página!), devida a M. E. Rudin[46], é encontrada em M. E. Rudin, *"A new proof that metric spaces are paracompact"*, Proc. Amer. Math. Soc. **20**, 603–603 (1969). Uma outra demonstração relativamente simples pode ser encontrada em [278].

34.4 As Noções de Topologia Inicial e de Topologia Final

Um papel muito importante em Análise Funcional e Álgebra de Operadores é desempenhado pelas topologias denominadas topologias iniciais e pelas topologias finais. No que segue descreveremos essas topologias em um contexto geral.

34.4.1 A Topologia Inicial de uma Coleção de Funções

Dada uma função $f: X \to Y$, onde X e Y são conjuntos dotados de topologias τ_X e τ_Y, respectivamente, sabemos, informalmente falando, que quanto maior (mais fina) a topologia τ_X mais "chances" f terá de ser contínua. Por exemplo, no caso extremo em que $\tau_X = \mathbb{P}(X)$ toda função $f: X \to Y$ será contínua. Fixada a topologia τ_Y é uma questão importante saber qual a menor topologia τ_X que faz de f uma função contínua.

Esta questão pode ser, entretanto, estudada de forma muito mais geral se, ao invés de considerarmos uma única função, considerarmos uma coleção de funções de X em diversos espaços topológicos Y_a e nos perguntarmos qual a menor topologia em X que faz *todas* as funções da coleção serem contínuas. O caso anterior de uma única função é claramente um caso particular desse e, em verdade, esse caso mais geral é também mais relevante em aplicações.

Vamos às definições. Seja X um conjunto e Y_a, $a \in \Lambda$, uma coleção de espaços topológicos com topologias τ_{Y_a}, respectivamente, onde Λ é um conjunto arbitrário de índices. Seja também $\mathcal{F}$ uma coleção de funções de X em algum Y_a: $\mathcal{F} = \{f_a : X \to Y_a, \ a \in \Lambda\}$. Denotamos por $\omega(X, \mathcal{F})$ a menor topologia em X tal que toda função de $\mathcal{F}$ é contínua. Mais formalmente definimos $\omega(X, \mathcal{F})$ simplesmente como a intersecção da coleção de todas as topologias para as quais todas as funções de $\mathcal{F}$ são contínuas. Que tal coleção de topologias é não-vazia mostra o fato que na topologia $\mathbb{P}(X)$ toda função de $\mathcal{F}$ sempre é contínua e, portanto, na pior das hipóteses tem-se que $\omega(X, \mathcal{F}) = \mathbb{P}(X)$.

A topologia $\omega(X, \mathcal{F})$ é denominada *topologia inicial*, *topologia fraca*, ou ou ainda *topologia projetiva*, da família de funções $\mathcal{F}$ (a segunda denominação é a mais frequentemente empregada em espaços vetoriais topológicos).

[45] Arthur Harold Stone (1916–2000).
[46] Mary Ellen Rudin (nasc. Estill) (1924–).

Vamos aqui demonstrar alguns resultados básicos sobre a topologia $\omega(X, \mathcal{F})$. Tomaremos sempre as topologias τ_{Y_a} como fixadas (mas é, por vezes, bom recordar que $\omega(X, \mathcal{F})$ depende na verdade das τ_{Y_a}).

Proposição 34.37 *Seja $\mathcal{D}$ a coleção de todos os conjuntos de X que sejam a imagem inversa de algum aberto de algum Y_a pela função f_a da coleção $\mathcal{F}$:*

$$\mathcal{D} := \left\{A \subset X, \ \textit{tal que } A = f_a^{-1}(U_a), \ \textit{para algum aberto } U_a \textit{ de algum } Y_a \textit{ e } f_a \textit{ de } \mathcal{F}\right\}.$$

Então, $\omega(X, \mathcal{F}) = \tau[\mathcal{D}]$. □

Prova. Em primeiro lugar é claro que toda função de $\mathcal{F}$ é contínua na topologia $\tau[\mathcal{D}]$ pois a imagem inversa de qualquer aberto por uma função de $\mathcal{F}$ está (por definição) em $\mathcal{D}$ e, portanto, em $\tau[\mathcal{D}]$. Assim, estabelecemos que $\omega(X, \mathcal{F}) \subset \tau[\mathcal{D}]$, posto ser $\omega(X, \mathcal{F})$ a intersecção de todas as topologias onde todas as funções de $\mathcal{F}$ são contínuas. Vamos mostrar que $\mathcal{D} \subset \omega(X, \mathcal{F})$, o que implica que $\tau[\mathcal{D}] \subset \omega(X, \mathcal{F})$, estabelecendo a igualdade $\omega(X, \mathcal{F}) = \tau[\mathcal{D}]$. A prova que $\mathcal{D} \subset \omega(X, \mathcal{F})$ é feita por absurdo. Vamos supor que exista um conjunto A na coleção $\mathcal{D}$ que não seja elemento da topologia inicial $\omega(X, \mathcal{F})$. Sejam porém U_a aberto de Y_a e f_a função de $\mathcal{F}$ tais que $A = f_a^{-1}(U_a)$. Como $A \notin \omega(X, \mathcal{F})$, a função f_a não é contínua na topologia inicial pois a imagem inversa do aberto U_a de Y_a por f_a não é um aberto nessa topologia. Isso contradiz a definição da topologia inicial e, portanto, $\mathcal{D} \subset \omega(X, \mathcal{F})$. ■

É útil também lembrar um resultado que provamos quando definimos o conceito de base de uma topologia (Proposição 29.3, página 1409): a coleção $\mathcal{D}_I$ formada por intersecções finitas de elementos de $\mathcal{D}$, X e $\emptyset$ é uma base de $\tau[\mathcal{D}]$ e, portanto, da topologia inicial.

• **Exemplos de topologias iniciais**

Vamos a dois exemplos muito importantes de topologias iniciais.

Exemplo 34.12 A topologia operatorial fraca. Para o leitor familiarizado com o conceito de operador limitado em um espaço de Hilbert, considere-se o seguinte exemplo. Seja $X = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a coleção de todos os operadores limitados em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Como sabemos X é um espaço de Banach com a norma operatorial $\|A\| = \sup_{\psi \in \mathcal{H}, \ \psi \neq 0} \frac{\|A\psi\|}{\|\psi\|}$. Essa norma define em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma topologia que é chamada de topologia uniforme (ou usual) de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Seja $Y = \mathbb{C}$ e seja a seguinte família de funções $\mathcal{W} = \{f_{x,\,y} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}, \ f_{x,\,y}(A) = \langle x, \ Ay\rangle, \text{ com } x, \ y \in \mathcal{H}\}$. Ou seja, $\mathcal{W}$ é a coleção de todas as funções que associam a cada operador limitado A o número complexo $\langle x, \ Ay\rangle$ com vetores $x, y \in \mathcal{H}$. Cada função é assim indexada por um par de vetores x e $y \in \mathcal{H}$. Define-se a *topologia operatorial fraca* em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ como sendo a menor topologia para a qual toda função de $\mathcal{W}$ é contínua: $\omega(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{W})$. Essa topologia é gerada pelos conjuntos

$$\mathcal{D} := \left\{\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}) \middle| \text{ para todos } A, \ A' \in \mathcal{A} \text{ tem-se } \left|\langle x, \ Ay\rangle - \langle x, \ A'y\rangle\right| < r \text{ para algum } r > 0 \text{ e algum par } x, \ y \in \mathcal{H}\right\}.$$

E. 34.17 *Exercício.* Convença-se disso. ✣

Uma base na topologia operatorial fraca é composta por intersecções finitas de elementos de $\mathcal{D}$, ou seja, por conjuntos $\mathcal{A} \subset B$ com a propriedade que existem $N \in \mathbb{N}$, $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, N$ e x_j, $y_j \in \mathcal{H}$, $j = 1, \ldots, N$, tais que para todos A, $A' \in \mathcal{A}$ valha $\left|\langle x_j, \ Ay_j\rangle - \langle x_j, \ A'y_j\rangle\right| < r_j$ para todos $j = 1, \ldots, N$.

E. 34.18 *Exercício.* Convença-se disso. ✣

Se Λ é um conjunto dirigido, uma rede $\Lambda : \lambda \mapsto A_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é convergente na topologia operatorial fraca (ou *fracamente convergente*) a um elemento $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se $\lim_\lambda \langle x, \ A_\lambda y\rangle = \langle x, \ Ay\rangle$ para todos $x, \ y \in \mathcal{H}$.

A topologia operatorial fraca é mais fraca que a topologia uniforme em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: se $\lim_\lambda \|A_\lambda - A\| = 0$, então é claro que $\lim_\lambda \langle x, \ A_\lambda y\rangle = \langle x, \ Ay\rangle$ para todos $x, \ y \in \mathcal{H}$.

Um conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é dito ser fracamente fechado se for fechado na topologia operatorial fraca, ou seja, se toda rede fracamente convergente de elementos de $\mathcal{F}$ convergir fracamente um elemento de $\mathcal{F}$. ⌑

Exemplo 34.13 A topologia operatorial forte. Seja $X = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a coleção de todos os operadores limitados em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, e seja $Y = \mathcal{H}$. Seja a seguinte família de funções $\mathcal{S} = \{f_x : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{H}, \ f_x(A) = Ax, \text{ com } x \in \mathcal{H}\}$. Ou seja, $\mathcal{S}$ é a coleção de todas as funções que associam a cada operador limitado A aos vetores Ax com $x \in \mathcal{H}$. Cada função é assim indexada por um vetor $x \in \mathcal{H}$. Define-se a *topologia operatorial forte*[47] em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ como sendo a menor topologia para a qual toda função de $\mathcal{S}$ é contínua: $\omega(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{S})$. Essa topologia é gerada pelos conjuntos

$$\mathcal{D} := \left\{ \mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}) \middle| \text{ para todos } A, \ A' \in \mathcal{A} \text{ tem-se } \left\| Ax - A'x \right\| < r \text{ para algum } r > 0 \text{ e algum } x \in \mathcal{H} \right\}.$$

E. 34.19 *Exercício*. Convença-se disso. ✠

Uma base na topologia operatorial forte é composta por intersecções finitas de elementos de $\mathcal{D}$, ou seja, por conjuntos $\mathcal{A} \subset B$ com a propriedade que existem $N \in \mathbb{N}$, $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, N$ e $x_j \in \mathcal{H}$, $j = 1, \ldots, N$, tais que para todos $A, \ A' \in \mathcal{A}$ valha $\left\| Ax_j - A'x_j \right\| < r_j$ para todos $j = 1, \ldots, N$.

E. 34.20 *Exercício*. Convença-se disso. ✠

Se Λ é um conjunto dirigido, uma rede $\Lambda : \lambda \mapsto A_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é convergente na topologia operatorial forte (ou *fortemente convergente*) a um elemento $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se $\lim_\lambda A_\lambda x = Ax$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

A topologia operatorial forte é mais fraca que a topologia uniforme em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: se $\lim_\lambda \|A_\lambda - A\| = 0$, então é claro que $\lim_\lambda A_\lambda x = Ax$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Mas a topologia operatorial forte é mais forte que a topologia operatorial fraca em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: se $\lim_\lambda \|A_\lambda x - Ax\| = 0$, para todo $x \in \mathcal{H}$, então é claro que $\lim_\lambda \langle y, \ A_\lambda x \rangle = \langle y, \ Ax \rangle$ para todos $x, \ y \in \mathcal{H}$.

Um conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é dito ser fortemente fechado se for fechado na topologia operatorial forte, ou seja, se toda rede fortemente convergente de elementos de $\mathcal{F}$ convergir a fortemente um elemento de $\mathcal{F}$.

Ainda sobre a relação entre as topologias operatoriais forte e fraca a seguinte observação é importante. Seja $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ um conjunto fracamente fechado e seja uma rede $\Lambda : \lambda \mapsto A_\lambda \in \mathcal{F}$ uma rede de elementos de $\mathcal{F}$ que seja fortemente convergente em $\mathcal{H}$ a um elemento $A \in \mathcal{H}$. Como essa rede é também fracamente convergente a A, e $\mathcal{F}$ é fracamente fechado, concluímos que $A \in \mathcal{F}$. Isso implica que $\mathcal{F}$ é também fortemente fechado.

Assim, para um subconjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, ser fracamente fechado implica ser fortemente fechado e, portanto, ser fracamente aberto implica ser fortemente aberto, e temos $\omega(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{W}) \subset \omega(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{S})$. Assim, a topologia operatorial forte é mais fina que a topologia operatorial fraca. ⌑

34.4.2 A Topologia Final de uma Coleção de Funções

Há um análogo à noção de topologia inicial para o caso de ter-se uma família de funções, todas com imagem em um conjunto comum. Trata-se da *topologia final* (ou *forte*, ou *indutiva*), da qual falaremos brevemente aqui. Assim como a topologia inicial, a topologia final desempenha um papel na Análise Funcional e nas Álgebras de Operadores.

Seja X_a, $a \in \Lambda$, uma coleção de espaços topológicos com topologias τ_{X_a}, respectivamente, onde Λ é um conjunto arbitrário de índices. Seja também um conjunto não-vazio Y e $\mathcal{F}$ uma coleção de funções de algum X_a em Y: $\mathcal{F} = \{f_a : X_a \to Y, \ a \in \Lambda\}$. Seja agora $T_\mathcal{F}$ a coleção de todas as topologias em Y em relação às quais todas as funções de $\mathcal{F}$ são contínuas. $T_\mathcal{F}$ não é vazio, pois contém ao menos a topologia trivial $\{\emptyset, \ Y\}$. Defina-se $\sigma(\mathcal{F}, \ Y) := \bigcup_{\tau \in T_\mathcal{F}} \tau$. Afirmamos que $\sigma(\mathcal{F}, \ Y)$ é uma topologia em Y.

Para ver isso, notemos primeiramente que é evidente que $\emptyset$ e Y são elementos de $\sigma(\mathcal{F}, \ Y)$. Em segundo lugar, se A e B são elementos de $\sigma(\mathcal{F}, \ Y)$, então existem $\tau_A, \ \tau_B \in T_\mathcal{F}$ tais que $A \in \tau_A$ e $B \in \tau_B$. Assim, $f_a^{-1}(A) \in \tau_{X_a}$ e $f_a^{-1}(B) \in \tau_{X_a}$ para todo $a \in \Lambda$. Logo, para cada $a \in \Lambda$ vale que $f_a^{-1}\big(A \cap B\big) \stackrel{(1.26)}{=} f_a^{-1}(A) \cap f_a^{-1}(B) \in \tau_a$, provando que na topologia $\tau_{A \cap B} := \{\emptyset, \ A \cap B, \ Y\}$ todas as funções f_a, com $a \in \Lambda$, são contínuas. Portanto, $\tau_{A \cap B} \in T_\mathcal{F}$ e, consequentemente, $A \cap B \in \sigma(\mathcal{F}, \ Y)$. Por fim, seja $\{A_\omega, \ \omega \in \Omega\}$ uma coleção arbitrária de elementos de $\sigma(\mathcal{F}, \ Y)$. Para cada $\omega \in \Omega$ tem-se $A_\omega \in \tau_{A_\omega}$ para alguma topologia $\tau_{A_\omega} \in T_\mathcal{F}$. Assim, para cada $a \in \Lambda$ vale que $f_a^{-1}\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} A_\omega\right) \stackrel{(1.25)}{=} \bigcup_{\omega \in \Omega} f_a^{-1}(A_\omega) \in \tau_a$, pois $f_a^{-1}(A_\omega) \in \tau_a$ para cada ω. Assim, todas as funções f_a são contínuas na topologia $\{\emptyset, \ \bigcup_{\omega \in \Omega} A_\omega, \ Y\}$ e, portanto, essa topologia é um elemento de $T_\mathcal{F}$, provando que $\bigcup_{\omega \in \Omega} A_\omega \in \sigma(\mathcal{F}, \ Y)$.

Isso demonstrou que $\sigma(\mathcal{F}, \ Y)$ é uma topologia em Y. Por ser a união de todas as topologias para as quais todos as funções de $\mathcal{F}$ são contínuas podemos afirmar que $\sigma(\mathcal{F}, \ Y)$ é a *maior* topologia em Y na qual toda função de $\mathcal{F}$ é contínua.

[47] O nome não deve confundir o estudante: trata-se de uma topologia inicial, ou fraca, no sentido geral que definimos mais acima.

Notemos que, em geral, uma união de topologias nem sempre é uma topologia, uma exceção sendo o caso acima.

A topologia $\sigma(\mathcal{F}, \ Y)$, assim definida, é denominada *topologia final*, *topologia forte*, ou ou ainda *topologia indutiva*, da família de funções $\mathcal{F}$. Como no caso da topologia inicial, a topologia $\sigma(\mathcal{F}, \ Y)$ depende não apenas da família $\mathcal{F}$, mas também das topologias τ_{X_a}, $a \in \Lambda$.

A proposição que segue apresenta mais uma caracterização da topologia final, sendo o análogo para essa topologia da Proposição 34.37.

Proposição 34.38 *Seja*

$$\mathcal{E} := \left\{ B \subset Y, \ \text{ tal que } f_a^{-1}(B) \in \tau_{X_a}, \ \text{ para todo } a \in \Lambda \right\}.$$

Então, $\mathcal{E}$ é uma topologia e $\sigma(\mathcal{F}, \ Y) = \mathcal{E}$. □

Prova. É claro que $\mathcal{E} = \bigcap_{a \in \Lambda} \mathcal{B}_a$, onde $\mathcal{B}_a := \left\{ B \subset Y, \ \text{ tal que } f_a^{-1}(B) \in \tau_{X_a} \right\}$. Afirmamos que para cada $a \in \Lambda$ a coleção $\mathcal{B}_a$ é uma topologia em Y. De fato, $\emptyset$ e Y são elementos de $\mathcal{B}_a$. Se B_1 e B_2 são elementos de $\mathcal{B}_a$ então $f_a^{-1}(B_1 \cap B_2) \stackrel{(1.26)}{=} f_a^{-1}(B_1) \cap f_a^{-1}(B_2) \in \tau_{X_a}$, pois cada $f_a^{-1}(B_k)$, $k = 1, \ 2$, é elemento da topologia τ_{X_a}. Por fim, se $B_\mu \in \mathcal{B}_a$ para todo $\mu \in M$, uma coleção arbitrária de índices M, então $f_a^{-1}\left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) \stackrel{(1.25)}{=} \bigcup_{\mu \in M} f_a^{-1}(B_\mu) \in \tau_{X_a}$, pois cada $f_a^{-1}(B_\mu)$, $\mu \in M$, é elemento da topologia τ_{X_a}. Fora isso, é evidente que cada f_a é contínua na topologia $\mathcal{B}_a$. Como a intersecção de topologias é uma topologia, concluímos que $\mathcal{E}$ é uma topologia onde toda $f_a \in \mathcal{F}$ é contínua. Assim, provamos que $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{F}, \ Y)$.

Para provarmos que $\sigma(\mathcal{F}, \ Y) \subset \mathcal{E}$ vamos supor, por absurdo, que exista $B \in \sigma(\mathcal{F}, \ Y)$ tal que $B \notin \mathcal{E}$. Se $B \notin \mathcal{E}$, então existe $a_0 \in \Lambda$ tal que $B \notin \mathcal{B}_{a_0}$, o que significa que $f_{a_0}^{-1}(B) \notin \tau_{X_{a_0}}$. Como $B \in \sigma(\mathcal{F}, \ Y)$, isso está dizendo que f_{a_0} não é contínua segundo $\sigma(\mathcal{F}, \ Y)$, uma contradição quanto à definição de $\sigma(\mathcal{F}, \ Y)$. ■

No caso em que $\mathcal{F}$ é uma família de funções de um conjunto X em si mesmo podemos comparar a topologia inicial à final. Temos nesse caso que que $\omega(X, \ \mathcal{F}) = \bigcap_{\tau \in T_\mathcal{F}} \tau$ e $\sigma(\mathcal{F}, \ Y) = \bigcup_{\tau \in T_\mathcal{F}} \tau$. Portanto, $\omega(X, \ \mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{F}, \ Y)$. Em tal caso percebe-se que convergência de redes (ou de sequências, eventualmente) na topologia final implica convergência na topologia inicial. Essa é a razão dessas topologias também serem denominadas "fraca" e "forte", respetivamente (nomenclatura essa que tentamos evitar nestas notas).

34.4.3 A Topologia Quociente

Nesta seção utilizaremos noções e notações introduzidas na Seção 1.1.1.3, página 41.

Seja X um conjunto não-vazio e $\sim$ uma relação de equivalência em X. Seja $X/\sim$ o espaço quociente de X por $\sim$ (a coleção de classes de equivalência de $\sim$ em X) e seja $\pi : X \to X/\sim$ a aplicação quociente: $X \ni x \mapsto \pi(x) := [x] \in X/\sim$, onde $[x]$ denota a classe de equivalência de $x \in X$ por $\sim$.

Se X for dotado de uma topologia τ, podemos introduzir em $X/\sim$ uma topologia, denominada *topologia quociente* e denotada por $\tau/\sim$, definida como sendo a maior topologia em $X/\sim$ para a qual a aplicação quociente π é contínua. Trata-se, portanto, da topologia final (ou forte, ou indutiva) definida por π. Naturalmente, temos que

$$\tau/\sim = \left\{ U \subset X/\sim \middle| \ \pi^{-1}(U) \in \tau \right\}. \tag{34.36}$$

O espaço topológico $(X/\sim, \ \tau/\sim)$ assim constituido é denominada *espaço topológico quociente*. Espaços topológicos quocientes são de grande importância na Topologia Diferencial, na Geometria Diferencial, na Topologia Algébrica, na Teoria de Grupos e em outras áreas e, nesses diversos contextos, é importante discutirmos sob quais circunstâncias propriedades do espaço topológico $(X, \ \tau)$ são transferidas ao espaço $(X/\sim, \ \tau/\sim)$ e vice-versa.

Nas Proposições 29.16, página 1424, 29.17, página 1424, 34.13, página 1576 e 34.14, página 1576, mostramos que as propriedades de ser segundo-contável e de ser Hausdorff são herdadas por topologias relativas e por topologias produto.

Isso, porém, não é geralmente válido para o caso da topologia quociente, como atesta o exemplo a seguir para o caso da propriedade de Hausdorff.

Exemplo 34.14 Seja $X = \mathbb{R}$, com a topologia usual, e seja $\sim$ uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$ definida da seguinte forma: $x \sim y$ se ambos x e y pertencem a $(-\infty, 0]$ ou se ambos x e y pertencem a $(0, \infty)$. É fácil verificar que se trata de uma relação de equivalência e que ela particiona $\mathbb{R}$ em duas classes de equivalência: $c_1 = (-\infty, 0]$ e $c_2 = (0, \infty)$. Assim, $X/\sim = \{c_1, c_2\}$. Portanto, $\mathbb{P}(X/\sim) = \{\emptyset, \{c_1\}, \{c_2\}, X/\sim\}$ e as pré-imagens por π dos subconjuntos de $X/\sim$ são $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $\pi^{-1}(\{c_1\}) = (-\infty, 0]$, $\pi^{-1}(\{c_2\}) = (0, \infty)$ e $\pi^{-1}(X/\sim) = X$. Com isso e com (34.36), podemos identificar explicitamente os elementos da topologia quociente: $\tau/\sim = \{\emptyset, \{c_2\}, X/\sim\}$, pois somente esses três subconjuntos de $X/\sim$ têm pré-imagens por π que são abertos em $\mathbb{R}$.

É fácil agora constatar que $(X/\sim, \tau/\sim)$ não é Hausdorff: o único $(\tau/\sim)$-aberto que contém c_1 é $X/\sim$, o qual, evidentemente, tem intersecção não-vazia com quaisquer $(\tau/\sim)$-abertos que contenham c_2 (os quais são somente $\{c_2\}$ e $X/\sim$). Note-se, porém, que $(X/\sim, \tau/\sim)$ é um espaço de Kolmogorov, ou T_0 (vide definição à página 1561), pois $\{c_2\}$ é um aberto em $\tau/\sim$ que contém c_2, mas não c_1. O espaço $(X/\sim, \tau/\sim)$, porém, também não é um espaço de Fréchet (ou T_1), já que c_1 e c_2 são topologicamente distinguíveis, mas não topologicamente separáveis em $(X/\sim, \tau/\sim)$. ⌑

Algumas condições que garantam que o espaço quociente de um espaço Hausdorff e segundo contável seja também Hausdorff e segundo-contável serão discutidas no tratamento de variedades topológicas, no Capítulo 35, página 1640, onde essa questão é relevante. Vide Lema 35.2, página 1647, e Corolário 35.3, página 1648.

E. 34.21 *Exercício*. Seja $X = \mathbb{R}$ com a topologia usual e seja a relação de equivalência: $x \sim y$ se e somente se $x - y \in \mathbb{Q}$. Descreva $\tau/\sim$. ✣

34.5 Somas de Espaços Topológicos

Seja $\{(X_\lambda, \tau_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$ (com Λ não-vazio) uma família de espaços topológicos. Por simplicidade, suporemos que os conjuntos X_λ são não-vazios e disjuntos dois-a-dois. Seja $X := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ (se os conjuntos X_λ não forem disjuntos dois-a-dois, podemos proceder como o que segue, mas considerando-se a união disjunta $X := \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, tal como definida à página 38).

Podemos definir em X uma topologia da seguinte forma: os conjuntos abertos são $\emptyset$, X e todos os conjuntos da forma $\bigcup_{\omega\in\Omega} A_\omega$ para algum $\Omega \subset \Lambda$, $\Omega \neq \emptyset$, sendo $A_\omega \in \tau_\omega$, $A_\omega \neq \emptyset$, para todo $\omega \in \Omega$. Essa topologia é denominada *topologia soma* das topologias τ_λ e é muitas vezes denotada por $\sum \tau_\lambda$.

Por analogia, X é também por vezes denotado por $X = \sum X_\lambda$ e o espaço topológico assim constituido é denotado por $\left(\sum X_\lambda, \sum \tau_\lambda\right)$ e é denominado *espaço topológico soma* dos espaços topológicos $(X_\lambda, \tau_\lambda)$, ou *soma dos espaços topologicos* $(X_\lambda, \tau_\lambda)$.

A topologia $\sum \tau_\lambda$ também pode ser caracterizada como a coleção de todos os conjuntos $A \subset X$ tais que $A \cap X_\lambda \in \tau_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

Demonstrar que $\sum \tau_\lambda$ definida acima é, de fato, uma topologia, é relativamente simples, pois se $A \equiv \bigcup_{\omega\in\Omega} A_\omega$ e $B \equiv \bigcup_{\omega\in\Omega'} B_\omega$ são elementos de $\sum \tau_\lambda$, então é evidente que $A \cap B = \bigcup_{\omega\in\Omega\cap\Omega'} A_\omega \cap B_\omega$ que é um elemento de $\sum \tau_\lambda$, pois $A_\omega \cap B_\omega \in \tau_\omega$. Analogamente, se $A_\theta \equiv \bigcup_{\omega\in\Omega^\theta} A^\theta_\omega$, $\theta \in \Theta \subset \Lambda$, com $A^\theta_\omega \in \tau_\omega$, é uma família de elementos de $\sum \tau_\lambda$, então $\bigcup_{\theta\in\Theta} A_\theta = \bigcup_{\omega\in\bigcup_{\theta\in\Theta}\Omega^\theta} \left(\bigcup_{\theta\in\Theta} A^\theta_\omega\right) \in \sum \tau_\lambda$, pois $\bigcup_{\theta\in\Theta} A^\theta_\omega \in \tau_\omega$ para cada $\omega \in \bigcup_{\theta\in\Theta} \Omega^\theta$ dado que $A^\theta_\omega \in \tau_\omega$. Isso estabeleceu que $\sum \tau_\lambda$ é, de fato, uma topologia em $\sum X_\lambda$.

É interessante notar que, como os conjuntos X_λ são não-vazios e disjuntos dois-a-dois, $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ é uma partição de $X = \sum X_\lambda$ (para a definição de partição, vide página 37). Naturalmente, a construção de acima fornece uma topologia em um conjunto qualquer dotado de uma partição, desde que uma topologia em cada componente da partição seja dada.

34.6 A Topologia Produto de Espaços Topológicos

Seja $\{X_1, \ldots, X_n\}$ uma coleção finita de conjuntos e seja, para cada $a \in \{1, \ldots, n\}$, uma topologia τ_a em X_a. Seja $\mathcal{X} = \prod_{a=1}^n X_a$ o produto Cartesiano de todos os X_a, $a \in I_n$ e seja $\mathcal{B}$ a coleção de todos os subconjuntos de $\mathcal{X}$ que sejam da forma $\prod_{a\in I_n} A_a$ onde $A_a \in \tau_a$, ou seja, cada A_a é um aberto em X_a segundo a topologia τ_a. Então, a topologia gerada por $\mathcal{B}$, $\tau[\mathcal{B}]$ é chamada de *topologia produto* dos espaços topológicos X_a, τ_a e é denotada por $\tau_1 \times \cdots \times \tau_n$.

No caso de produtos Cartesianos arbitrários $\prod_{\beta\in\Lambda} X_\beta$ (com Λ sendo um conjunto não-vazio de índices, não necessáriamente finito) a ideia acima de tomar-se produtos de abertos como geradores da topologia do espaço produto pode ser repetida, mas conduz a uma topologia (denominada em inglês "box product topology") com poucas propriedades importantes. Muito mais útil e importante é seguir uma sugestão de Tikhonov[48] e considerar no espaço produto uma topologia, dita *topologia produto de Tikhonov*, ou simplesmente *topologia produto*, e denotada por τ_P, definida da seguinte forma. Sejam as projeções $\pi_\alpha : \prod_{\beta\in\Lambda} X_\beta \to X_\alpha$ definidas por

$$\pi_\alpha\left(\prod_{\beta\in\Lambda} x_\beta\right) = x_\alpha,$$

ou, alternativamente, interpretando $x \in \prod_{\beta\in\Lambda} X_\beta$ como uma função de Λ em $\bigcup_{\beta\in\Lambda} X_\beta$ tal que $x(\alpha) \in X_\alpha$, então

$$\pi_\alpha(x) = x(\alpha).$$

Então, a *topologia produto de Tikhonov* τ_P é definida como sendo a menor topologia para a qual todas as projeções π_α, $\alpha \in \Lambda$, são contínuas, ou seja, é a topologia inicial gerada pela família de funções $\{\pi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$. Essa topologia será por vezes denotada por $\prod_{\alpha\in\Lambda} \tau_\alpha$.

Para a topologia produto de Tikhonov vale entre outros o célebre e importantíssimo teorema de Tikhonov: produtos Cartesianos arbitrários de espaços topológicos compactos são compactos.

Façamos mais clara a distinção entre a "box product topology" e a topologia produto de Tikhonov τ_P. Seja $\{X_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ uma coleção de conjuntos e seja, para cada $\alpha \in \Lambda$, uma topologia τ_α em X_α. Seja $\mathcal{X} = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ o produto Cartesiano de todos os X_α, $\alpha \in \Lambda$. Seja $\mathcal{B}$ a coleção de todos os subconjuntos de $\mathcal{X}$ que sejam da forma $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ onde $A_\alpha \in \tau_\alpha$, ou seja, cada A_α é um aberto em X_α segundo a topologia τ_α. Seja $\mathcal{B}_\infty \subset \mathcal{B}$ coleção de todos os subconjuntos de $\mathcal{X}$ que sejam da forma $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ onde $A_\alpha \in \tau_\alpha$, e onde apenas para um número finito de fatores tenhamos $A_\alpha \neq X_\alpha$. Então, a topologia gerada por $\mathcal{B}$, $\tau[\mathcal{B}]$, é a chamada *"box product topology"* dos espaços topológicos X_α, τ_α, enquanto que a topologia gerada por $\mathcal{B}_\infty$, $\tau[\mathcal{B}_\infty]$, é idêntica à topologia produto de Tikhonov τ_P (argumento para tal será apresentado logo adiante). É claro pelas definições que $\tau_P = \tau[\mathcal{B}_\infty] \subset \tau[\mathcal{B}]$.

Mostremos que a topologia produto de Tikhonov τ_P é de fato $\tau[\mathcal{B}_\infty]$. Se $A_\alpha \in \tau_\alpha$,

$$\pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) = \prod_{\gamma\in\Lambda} S^\gamma_\alpha, \qquad \text{onde} \qquad S^\gamma_\alpha = \begin{cases} A_\alpha, & \text{se } \gamma = \alpha, \\ X_\gamma, & \text{se } \gamma \neq \alpha. \end{cases} \tag{34.37}$$

Observe-se que $S^\gamma_\alpha \in \tau_\gamma$ para todo α. Seja $\mathcal{D}$ a coleção

$$\mathcal{D} = \{\pi_\alpha^{-1}(A_\alpha), \ A_\alpha \in \tau_\alpha, \ \alpha \in \Lambda\}.$$

Conforme observamos na Seção 34.4, página 1617 (vide Proposição 34.37, página 1618), a topologia gerada por $\mathcal{D}$ é a menor topologia na qual todas as funções π_α são contínuas. Assim, a topologia produto de Tikhonov τ_P é idêntica a $\tau[\mathcal{D}]$. Sabemos também de considerações gerais (vide página 1409) que o conjunto $\mathcal{D}_I$ formado por intersecções finitas de elementos de $\mathcal{D}$ é uma base em $\tau[\mathcal{D}]$ e que $\tau[\mathcal{D}] = \tau[\mathcal{D}_I]$ (vide discussão à página 1409). Ora, os elementos de $\mathcal{D}_I$ são produtos de abertos $\prod_{\gamma\in\Lambda} A_\gamma$ onde apenas uma coleção finita de A_γ's difere de X_γ (por que?), ou seja, $\mathcal{D}_I = \mathcal{B}_\infty$, provando que $\tau_P = \tau[\mathcal{D}] = \tau[\mathcal{D}_I] = \tau[\mathcal{B}_\infty]$.

Para referência futura, coloquemos em destaque a afirmação da proposição que segue:

Proposição 34.39 *No caso de produtos Cartesianos finitos a "box product topology" e a topologia produto de Tikhonov coincidem.* □

Prova. Como vimos acima, temos em geral $\tau_P = \tau[\mathcal{B}_\infty] \subset \tau[\mathcal{B}]$. No caso de produtos Cartesianos finitos $\mathcal{B}_\infty = \mathcal{B}$ e, portanto, a "box product topology" e a topologia produto de Tikhonov τ_P coincidem. ■

Muito útil também é a afirmação contida na proposição que segue.

[48] Andrei Nikolaevich Tikhonov (1906–1993). O sobrenome russo "Tikhonov" é por vezes transliterado como "Tykhonov", "Tichonov" ou ainda "Tychonoff".

Proposição 34.40 *Para cada $\lambda \in \Lambda$ as projeções $\pi_\lambda : \prod_{\beta\in\Lambda} X_\beta \to X_\lambda$ são aplicações abertas para a topologia produto de Tikhonov τ_P, ou seja, levam abertos de τ_P em abertos de τ_λ.* □

Em geral as projeções π_λ não são aplicações fechadas, ou seja, que levam τ_P-fechados em π_λ-fechados. Por exemplo, o gráfico da função $(0, \infty) \ni x \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^2$, mas sua projeção em qualquer dos eixos é $(0, \infty)$, um aberto em $\mathbb{R}$. Uma relevante exceção será tratada na Proposição 34.42, página 1623.

Prova da Proposição 34.40. Seja $A \subset \prod_{\beta\in\Lambda} X_\beta$ com $A \in \tau_P$. Pelas considerações de acima, A pode ser escrito como união de intersecções finitas de elementos de $\mathcal{D}$, ou seja, na forma

$$A = \bigcup_{\mu\in\Omega} \bigcap_{\alpha\in F_\mu} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) \overset{(34.37)}{=} \bigcup_{\mu\in\Omega} \bigcap_{\alpha\in F_\mu} \prod_{\gamma\in\Lambda} S_\alpha^\gamma = \bigcup_{\mu\in\Omega} \prod_{\gamma\in\Lambda} \bigcap_{\alpha\in F_\mu} S_\alpha^\gamma ,$$

com $A_\alpha \in \tau_\alpha$, com Ω sendo um conjunto de índices e com $F_\mu \subset \Lambda$ sendo, para cada $\mu \in \Omega$, um conjunto finito. Assim,

$$\pi_\lambda(A) = \pi_\lambda\left(\bigcup_{\mu\in\Omega} \prod_{\gamma\in\Lambda} \bigcap_{\alpha\in F_\mu} S_\alpha^\gamma\right) \overset{(1.23)}{=} \bigcup_{\mu\in\Omega} \pi_\lambda\left(\prod_{\gamma\in\Lambda} \bigcap_{\alpha\in F_\mu} S_\alpha^\gamma\right) = \bigcup_{\mu\in\Omega} \bigcap_{\alpha\in F_\mu} S_\alpha^\lambda .$$

Agora, vê-se da definição (34.37) que S_α^λ é um elemento de τ_λ para todo α. Como F_μ é finito, a intersecção $\bigcap_{\alpha\in F_\mu} S_\alpha^\lambda$ é também um elemento de τ_λ e, portanto, $\bigcup_{\mu\in\Omega}\left(\bigcap_{\alpha\in F_\mu} S_\alpha^\lambda\right) \in \tau_\lambda$. ■

- **A topologia produto de espaços Hausdorff**

O seguinte resultado elementar é digno de nota:

Proposição 34.41 *Seja $\{(X_\lambda, \tau_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$ (com Λ não-vazio) uma família de espaços topológicos Hausdorff. Então, a topologia produto de Tikhonov em $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ é também Hausdorff.* □

Comentário. A recíproca da Proposição 34.41 é igualmente válida: se a topologia produto de Tikhonov em $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ for Hausdorff, então cada espaço topológico $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ é Hausdorff. Não demonstraremos essa afirmação aqui. ♣

Prova da Proposição 34.41. Sejam x e y pontos distintos de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Como esses pontos são distintos deve haver $\alpha \in \Lambda$ tal que $\pi_\alpha(x) \neq \pi_\alpha(y)$. Como X_α é Hausdorff, existem em X_α vizinhanças τ_α-abertas disjuntas, A_x e A_y, de $\pi_\alpha(x)$ e $\pi_\alpha(y)$, respectivamente. Assim, $\pi_\alpha^{-1}(A_x)$ e $\pi_\alpha^{-1}(A_y)$ são dois abertos disjuntos da topologia produto de Tikhonov em $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ que contém x e y, respectivamente, provando que a produto de Tikhonov em $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ é Hausdorff. ■

34.6.1 Alguns Resultados Envolvendo Compacidade e Topologia Produto

Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dois espaços topológicos e seja $X \times Y$ munido da topologia produto de Tikhonov, definida acima, que denotaremos por $\tau_X \times \tau_Y$. Essa é a menor topologia na qual as projeções $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$, definidas por $\pi_X\big((x, y)\big) = x$ e $\pi_X\big((x, y)\big) = y$, respectivamente, são contínuas.

Estabeleceremos agora alguns resultados técnicos úteis, que serão explorados alhures, envolvendo as noções de compacidade e topologia produto. O Corolário 34.12, por exemplo, é usado na Seção 25.4, página 1260. Esses resultados, formulados nas Proposições 34.42 e 34.43 e no Corolário 34.12, originam-se, com correções[49], esclarecimentos e adaptações da referência [238].

Proposição 34.42 *Seja (Y, τ_Y) um espaço topológico compacto. Se $F \subset X \times Y$ for um conjunto fechado na topologia produto de Tikhonov $\tau_X \times \tau_Y$, então sua projeção $\pi_X(F)$ em X é um conjunto τ_X-fechado, ou seja, π_X é uma aplicação fechada.* □

[49] Acreditamos que o enunciado da Proposição 34.43 e do Corolário 34.12 estejam incorretos em [238]. O uso que é feito dos mesmos na Seção 25.4 corresponde à versão que apresentamos aqui.

Demonstração. Se $F = \emptyset$ a afirmação é trivial. Consideremos, portanto, F não-vazio.

Seja $x_0 \in \overline{\pi_X(F)}$ (a barra indica aqui o fecho na topologia τ_X). Se A_{x_0} é uma vizinhança τ_X-aberta de x_0, então sabemos que $A_{x_0} \cap \pi_X(F) \neq \emptyset$. Para cada tal vizinhança A_{x_0}, associemos o subconjunto $V_{A_{x_0}}$ de Y definido por

$$V_{A_{x_0}} := \Big\{ y \in Y \big| \ (x, y) \in F \text{ e } x \in A_{x_0} \Big\} .$$

Esses conjuntos $V_{A_{x_0}}$ são não-vazios, pois o fato de $A_{x_0} \cap \pi_X(F)$ ser não-vazio significa que existe ao menos um par $(x, y) \in F$ tal que $x \in A_{x_0}$ e, portanto, que existe ao menos um $y \in Y$ tal que $(x, y) \in F$ e $x \in A_{x_0}$.

Afirmamos que qualquer intersecção finita de tais conjuntos, $V_{A^1_{x_0}} \cap \cdots \cap V_{A^n_{x_0}}$, é não-vazia. De fato, é fácil verificar que

$$V_{A^1_{x_0}} \cap \cdots \cap V_{A^n_{x_0}} = \Big\{ y \in Y \big| \ (x, y) \in F \text{ e } x \in A^1_{x_0} \cap \cdots \cap A^n_{x_0} \Big\} = V_{A^1_{x_0} \cap \cdots \cap A^n_{x_0}} ,$$

que é sempre não-vazio, como argumentamos logo acima, pois $A^1_{x_0} \cap \cdots \cap A^n_{x_0}$ é uma vizinhança aberta não-vazia de x_0.

Assim,

$$\overline{V_{A^1_{x_0}}} \cap \cdots \cap \overline{V_{A^n_{x_0}}} \overset{\text{Prop. 29.4}}{\supset} \overline{V_{A^1_{x_0}} \cap \cdots \cap V_{A^n_{x_0}}} = \overline{V_{A^1_{x_0} \cap \cdots \cap A^n_{x_0}}} \neq \emptyset$$

(com os fechos agora tomados na topologia τ_Y). Portanto, a família de τ_Y-fechados

$$\mathcal{V} := \Big\{ \overline{V_{A_{x_0}}}, \ A_{x_0} \text{ é uma vizinhança } \tau_X\text{-aberta de } x_0 \Big\}$$

possui a propriedade de intersecção finita (qualquer intersecção finita de seus elementos é não-vazia). Como (Y, τ_Y) um espaço topológico compacto vale, pelo Teorema 34.6, página 1582, a intersecção de <u>todos</u> os elementos de $\mathcal{V}$ é não-vazia.

Vemos assim que todos os conjuntos $\overline{V_{A_{x_0}}} \subset Y$ (com A_{x_0} sendo uma vizinhança τ_X-aberta de $x_o \in \overline{\pi_X(F)}$) possuem ao menos um elemento comum.

Seja $y_0 \in Y$ um tal elemento. Se B_{y_0} é uma vizinhança τ_Y-aberta de y_0 em Y, então, pela propriedade definidora de y_0 vale $B_{y_0} \cap V_{A_{x_0}} \neq \emptyset$ para toda vizinhança τ_X-aberta A_{x_0} de x_0 em X. Assim, existe um elemento y_1 em B_{y_0} com a propriedade que $(x, y_1) \in F$ para todo $x \in A_{x_0}$. Em particular, vale $(x_0, y_1) \in F$.

Seja $\mathcal{A}_{(x_0, y_0)}$ uma vizinhança aberta de (x_0, y_0) na topologia produto. Os conjuntos $\pi_X\big(\mathcal{A}_{(x_0, y_0)}\big)$ e $\pi_Y\big(\mathcal{A}_{(x_0, y_0)}\big)$ contém x_0 e y_0, respectivamente, e pela Proposição 34.40, página 1623, são abertos de τ_X e τ_Y, respectivamente. Podemos, portanto, tomar $A_{x_0} = \pi_X\big(\mathcal{A}_{(x_0, y_0)}\big)$ e $B_{y_0} = \pi_Y\big(\mathcal{A}_{(x_0, y_0)}\big)$ e, com essa escolha, a conclusão de acima afirma que existe um elemento y_1 em $\pi_Y\big(\mathcal{A}_{(x_0, y_0)}\big)$ para o qual vale $(x_0, y_1) \in F$. Assim, $(x_0, y_1) \in \mathcal{A}_{(x_0, y_0)}$ (pois $x_0 \in \pi_X\big(\mathcal{A}_{(x_0, y_0)}\big)$ e $y_0 = \pi_Y\big(\mathcal{A}_{(x_0, y_0)}\big)$) e tem-se $(x_0, y_1) \in F$. Isso mostra que $\mathcal{A}_{(x_0, y_0)} \cap F \neq \emptyset$ e, como $\mathcal{A}_{(x_0, y_0)}$ é uma vizinhança aberta arbitrária de (x_0, y_0), estabelecemos que $(x_0, y_0) \in \overline{F}$. Por hipótese, porém, F é fechado e, portanto, provamos que $(x_0, y_0) \in F$.

Vimos, portanto, que se $x_0 \in \overline{\pi_X(F)}$, então $x_0 \in \pi_X(F)$. Como x_0 é um elemento arbitário de $\overline{\pi_X(F)}$ a conclusão é que $\overline{\pi_X(F)} = \pi_X(F)$, completando a demonstração. ■

Proposição 34.43 *Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos compactos e Hausdorff. Seja $K \subset X$ um conjunto τ_X-compacto. Então, valem as seguintes afirmações:*

1. *Se $A \subset X \times Y$ é aberto na topologia produto de Tikhonov $\tau_X \times \tau_Y$, então o conjunto*

$$\bigcap_{x\in K} \big\{ y \in Y \big| \ (x, y) \in A \big\}$$

é τ_Y-aberto.

2. *Se $F \subset X \times Y$ é fechado na topologia produto de Tikhonov $\tau_X \times \tau_Y$, então o conjunto*

$$\bigcup_{x\in K} \big\{ y \in Y \big| \ (x, y) \in F \big\}$$

é τ_Y-fechado. □

Demonstração. A primeira afirmação decorre da segunda pela tomada de complementos (e vice-versa). Assim, é suficiente demonstrar a segunda. É fácil constatar que

$$\bigcup_{x\in K}\{y\in Y|\ (x,\ y)\in F\}\ =\ \pi_Y\Big((K\times Y)\cap F\Big)\ .$$

$K\times Y$ é compacto, pelo Teorema de Tikhonov, por ser o produto de dois compactos, Como $X\times Y$ é compacto (pelo Teorema de Tikhonov) e Hausdorff (pela Proposição 34.41, página 1623), segue que $K\times Y$ é fechado (Teorema 34.9, página 1585). Logo, $\big(K\times Y\big)\cap F$ também o é. Pela Proposição 34.42, 1623, (trocando-se os papéis de X e Y naquela proposição) segue que $\pi_Y\Big(\big(K\times Y\big)\cap F\Big)$ é τ_Y-fechado. ∎

Corolário 34.12 *Sejam $(X,\ \tau_X)$ e $(Y,\ \tau_Y)$ espaços topológicos compactos e Hausdorff. Seja também $(Z,\ \tau_Z)$ um espaço topológico. Considere-se uma função $f: X\times Y\to Z$ que seja contínua (relativamente às topologias τ_Z, na imagem da função, e $\tau_X\times\tau_Y$, a topologia produto de Tikhonov no domínio $X\times Y$ da função). Sejam $K\subset X$, um conjunto τ_X-compacto, e $\mathcal{O}\subset Z$, um conjunto τ_Z-aberto. Então, o conjunto*

$$W\ :=\ \Big\{y\in Y\Big|\ f(x,\ y)\in\mathcal{O}\ \text{para todo}\ x\in K\Big\}$$

é τ_Y-aberto. □

Demonstração. É evidente que

$$W\ =\ \bigcap_{x\in K}\Big\{y\in Y\Big|\ (x,\ y)\in f^{-1}(\mathcal{O})\Big\}\ .$$

Como $f^{-1}(\mathcal{O})$ é um aberto na topologia produto de Tikhonov em $X\times Y$ (pois $\mathcal{O}$ é τ_Z-aberto e f contínua), a afirmação segue do item 1 da Proposição 34.43, página 1624. ∎

34.6.2 O Cubo de Hilbert

Uma classe importante de espaços topológicos produto é composta pelos chamados "Cubos de Hilbert". Esses espaços desempenham um papel especial, entre outros, nos teoremas de metrização que discutiremos na Seção 34.7, página 1627.

Seja I um conjunto não-vazio e seja $\mathfrak{C}_I:=[0,\ 1]^I$, a coleção de todas as funções de I em $[0,\ 1]$. Se dotarmos $[0,\ 1]$ da topologia métrica usual, podemos munir $\mathfrak{C}_I$ da topologia produto de Tikhonov, que denotaremos por τ_P, supradefinida, a qual consiste na menor topologia na qual todas as projeções $\pi_\alpha:[0,\ 1]^I\to[0,\ 1]$ definidas por

$$\pi_\alpha\left(\prod_{\beta\in I}x_\beta\right)\ =\ x_\alpha,$$

são contínuas. O espaço topológico $(\mathfrak{C}_I,\ \tau_P)$ assim definido é denominado *Cubo de Hilbert*[50] sobre I. Naturalmente, o caso de maior interesse é aquele no qual I não é um conjunto finito.

Como os conjuntos $[0,\ 1]$ são compactos na topologia métrica usual, segue do célebre Teorema de Tikhonov que o Cubo de Hilbert $(\mathfrak{C}_I,\ \tau_P)$ é um espaço topológico compacto. Mais adiante apresentaremos uma prova alternativa dessa importante afirmação no caso especial em que $I=\mathbb{N}$.

• O Cubo de Hilbert $\mathfrak{C}_\mathbb{N}$

Tendo em mente a discussão sobre metrizabilidade de espaços topológicos da Seção 34.7, página 1627, vamos nos concentrar no caso especial no qual $I=\mathbb{N}$. O conjunto $\mathfrak{C}_\mathbb{N}:=[0,\ 1]^\mathbb{N}$ é a coleção de todas as sequências $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $a_n\in[0,\ 1]$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Vamos denotar os elementos de $\mathfrak{C}_\mathbb{N}$ por $\underline{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots)$. A topologia produto de

[50] David Hilbert (1862–1943).

Tikhonov é a menor topologia em $\mathfrak{C}_\mathbb{N}$ na qual todas as projeções $\pi_n:\mathfrak{C}_\mathbb{N}\to[0,\ 1]$, $n\in\mathbb{N}$, definidas por $\pi_n(\underline{x})=x_n$ são contínuas.

Como veremos no Teorema 34.32, página 1630, a relevância do Cubo de Hilbert $(\mathfrak{C}_\mathbb{N},\ \tau_P)$ reside no fato de o mesmo ser uma espécie de receptáculo universal no qual qualquer espaço topológico Hausdorff, normal e segundo-contável pode ser mergulhado. Esse fato tem profundas consequências sobre tais espaços topológicos, como por exemplo sua metrizabilidade, como discutiremos na Seção 34.7.

• O Cubo de Hilbert $(\mathfrak{C}_\mathbb{N},\ \tau_P)$ como espaço métrico

Um fato especial muito importante é que é possível introduzir métricas em $\mathfrak{C}_\mathbb{N}$ cujas topologias coincidem com a topologia produto de Tikhonov.

Seja $\gamma\equiv\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais satisfazendo $\gamma_n>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^\infty\gamma_n<\infty$. Denotemos por Γ a soma $\Gamma:=\sum_{n=1}^\infty\gamma_n$. Com a sequência $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podemos definir $D_\gamma:\mathfrak{C}_\mathbb{N}\times\mathfrak{C}_\mathbb{N}\to[0,\ \infty)$ por

$$D_\gamma(\underline{a},\ \underline{b})\ :=\ \sum_{n=1}^\infty\gamma_n\,|a_n-b_n|\ .$$

Observe-se que para $\underline{a},\ \underline{b}\in\mathfrak{C}_\mathbb{N}$ tem-se naturalmente $|a_n-b_n|\leq1$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e, portanto, a série do lado direito converge, pois a sequência $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é somável.

Afirmamos que D_γ é uma métrica em $\mathfrak{C}_\mathbb{N}$. A positividade é evidente, assim como a simetria. Como $\gamma_n>0$ para todo n, $d(\underline{a},\ \underline{b})=0$ se e somente se $|a_n-b_n|=0$ para todo n, ou seja, se e somente se $\underline{a}=\underline{b}$. Como $|a_n-b_n|\leq|a_n-c_n|+|c_n-b_n|$ para todo n e todos $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}\in\mathfrak{C}_\mathbb{N}$, a desigualdade triangular segue facilmente da convergência das séries $\sum_{n=1}^\infty\gamma_n\,|a_n-c_n|$ e $\sum_{n=1}^\infty\gamma_n\,|c_n-b_n|$.

Dessa forma, $(\mathfrak{C}_\mathbb{N},\ D_\gamma)$ é um espaço métrico. Como afirmamos, a topologia induzida em $\mathfrak{C}_\mathbb{N}$ por D_γ coincide com a topologia produto de Tikhonov de $[0,\ 1]^\mathbb{N}$ (com cada fator $[0,\ 1]$ tendo a topologia métrica usual) e, portanto, não depende da sequência somável $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ escolhida. Provemos, portanto, que a topologia τ_{D_γ} induzida por D_γ coincide com a topologia produto de Tikhonov τ_P em $\mathfrak{C}_\mathbb{N}$.

Seja $\prod_{n\in\mathbb{N}}A_n\subset\mathfrak{C}_\mathbb{N}$ constituido de forma que cada fator A_n é um aberto em $[0,\ 1]$, mas apenas um conjunto finito de fatores A_n difere de $[0,\ 1]$. Conforme nossa discussão geral de acima sobre a topologia produto, a coleção $\mathcal{D}_I$ por todos os τ_P-abertos desse tipo é uma base em τ_P.

Seja então $A=\prod_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathcal{D}_I$ e seja $A_{n_1},\ \ldots,\ A_{n_m}$ a coleção finita de fatores que difere de $[0,\ 1]$. Tomemos $\underline{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots)\in A$, naturalmente com $x_n\in A_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Por serem abertos em um espaço métrico, cada A_{n_k} contém uma certa bola aberta $B(r_{n_k},\ x_{n_k})\subset[0,\ 1]$ de raio $r_{n_k}>0$ centrada x_{n_k}. Assim, $\prod_{n\in\mathbb{N}}C_n\subset A$, onde $C_n=B(r_{n_k},\ x_{n_k})$ se $n=n_k$ e $C_n=[0,\ 1]$ de outra forma. Se $\underline{y}\in B_{D_\gamma}(r,\ \underline{x})$ vale $\sum_{n=1}^\infty\gamma_n|y_n-x_n|<r$, o que implica que $\gamma_n|y_n-x_n|<r$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e portanto, que $y_n\in B(r/\gamma_n,\ x_n)$. Escolhendo $r<\min\{\gamma_{n_1}r_{n_1},\ \ldots,\ \gamma_{n_m}r_{n_m}\}$ concluímos que $y_{n_k}\in B(r_{n_k},\ x_n)$ para todo $k=1,\ \ldots,\ m$, e, portanto, que $\underline{y}\in\prod_{n\in\mathbb{N}}C_n$. Isso provou que $B_{D_\gamma}(r,\ \underline{x})\subset\prod_{n\in\mathbb{N}}C_n\subset A$, estabelecendo que todo $A\in\mathcal{D}_I$ é um D_γ-aberto e, portanto, que $\tau_P\subset\tau_{D_\gamma}$.

Provemos agora a recíproca. Seja $\underline{x}\in\mathfrak{C}_\mathbb{N}$ e considere-se $\underline{y}\in B_{D_\gamma}(r,\ \underline{x})$. Escolhamos uma coleção finita $\{r_1,\ \ldots,\ r_m\}\subset(0,\ \infty)$. Consideremos o elemento $F_{\underline{y}}$ de $\mathcal{D}_I$ definido por $F_{\underline{y}}:=\prod_{n\in\mathbb{N}}E_n$, onde $E_k=B(r_k,\ y_k)$ para todo $1\leq k\leq m$ e $E_k=[0,\ 1]$ para todo $k>m$.

Se $\underline{z}\in F_{\underline{y}}$ teremos

$$D_\gamma(\underline{z},\ \underline{y})\ =\ \sum_{n=1}^\infty\gamma_n|z_n-y_n|\ <\ \sum_{k=1}^m\gamma_kr_k+\sum_{k>m}\gamma_k\ .$$

Agora, como $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é somável, existe para cada $\epsilon>0$ um $N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>N(\epsilon)}\gamma_n<\epsilon$. Logo, se tomarmos $m=N(\epsilon/2)$ valerá

$$D_\gamma(\underline{z},\ \underline{y})\ <\ \sum_{k=1}^m\gamma_kr_k+\frac{\epsilon}{2}\ .$$

Escolhendo os $r_k<\frac{\epsilon}{2\Gamma}$ para todo $1\leq k\leq m$, onde $\Gamma:=\sum_{n=1}^\infty\gamma_n$, teremos $D_\gamma(\underline{z},\ \underline{y})<\epsilon$. Logo,

$$D_\gamma(\underline{z},\ \underline{x})\ \leq\ D_\gamma(\underline{y},\ \underline{x})+D_\gamma(\underline{z},\ \underline{y})\ <\ D_\gamma(\underline{y},\ \underline{x})+\epsilon\ .$$

Tomando $0 < \epsilon < r - D_\gamma(\underline{y},\ \underline{x})$ concluímos que $D_\gamma(\underline{z},\ \underline{x}) < r$ para todo $\underline{z} \in F_{\underline{y}}$ e, portanto, que $F_{\underline{y}} \subset B_{D_\gamma}(r,\ \underline{x})$. Assim, todo ponto de $B_{D_\gamma}(r,\ \underline{x})$ possui uma vizinhança τ_P-aberta inteiramente contida em $B_{D_\gamma}(r,\ \underline{x})$. Logo, $B_{D_\gamma}(r,\ \underline{x}) \subset \tau_P$, o que prova que $\tau_{D_\gamma} \subset \tau_P$, estabelecendo, finalmente, que $\tau_{D_\gamma} = \tau_P$.

Para futura referência, capturemos os resultados de acima na forma de uma proposição.

Proposição 34.44 *Seja $\gamma \equiv \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais com $\gamma_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$. Então $D_\gamma : \mathfrak{C}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{C}_{\mathbb{N}} \to [0,\ \infty)$ dada por $D_\gamma(\underline{a},\ \underline{b}) := \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n |a_n - b_n|$ define uma métrica em $\mathfrak{C}_{\mathbb{N}}$. A topologia τ_{D_γ} induzida por essa métrica coincide com a topologia produto de Tikhonov τ_P.* □

A afirmação sobre compacidade contida da proposição a seguir é uma consequência do célebre Teorema de Tikhonov, mas apresentaremos uma demonstração alternativa explorando o fato de τ_P ser idêntica a uma topologia métrica (pela Proposição 34.44) e usando uma ideia conhecida como *truque diagonal de Cantor*[51].

Proposição 34.45 *O Cubo de Hilbert $(\mathfrak{C}_{\mathbb{N}},\ \tau_P)$ é um espaço topológico compacto. O conjunto $\mathfrak{C}_{\mathbb{N}}$ é completo nas métricas D_γ da Proposição 34.44.* □

Prova. Sejam $\gamma \equiv \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e a métrica D_γ como no enunciado da Proposição 34.44. Como $(\mathfrak{C}_{\mathbb{N}},\ \tau_{D_\gamma})$ é um espaço métrico, é suficiente pelo Teorema 34.11, página 1589, provarmos que $(\mathfrak{C}_{\mathbb{N}},\ \tau_{D_\gamma})$ é sequencialmente compacto, ou seja, que toda sequência em $\mathfrak{C}_{\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente (na métrica D_γ).

Seja $\{\underline{x}^a,\ a \in \mathbb{N}\}$, uma sequência em $\mathfrak{C}_{\mathbb{N}}$. Como $[0,\ 1]$ é compacto na topologia métrica usual, a sequência $\{x_1^a,\ a \in \mathbb{N}\}$ tem uma subsequência $\{x_1^a,\ a \in N_1\}$ convergente a $x_1 \in [0,\ 1]$. Aqui N_1 é um subconjunto enumerável de $\mathbb{N}$. Pela mesma argumentação, a sequência $\{x_2^a,\ a \in N_1\}$ tem uma subsequência $\{x_2^a,\ a \in N_2\}$ convergente a $x_2 \in [0,\ 1]$. Aqui N_2 é um subconjunto enumerável de N_1. Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$ cocluímos que a sequência $\{x_k^a,\ a \in N_{k-1}\}$ tem uma subsequência $\{x_k^a,\ a \in N_k\}$ convergente a $x_k \in [0,\ 1]$, onde N_k é um subconjunto enumerável de N_{k-1}. Assim, $\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_k \supset \cdots$, sendo cada N_j enumerável.

Consideremos a subsequência de $\{\underline{x}^a,\ a \in \mathbb{N}\}$ dada por $\{\underline{x}^{a(k)},\ k \in \mathbb{N}\}$, onde $a(k)$ o k-ésimo elemento de N_k (esse é o “truque diagonal de Cantor”). Afirmamos que $\{\underline{x}^{a(k)},\ k \in \mathbb{N}\}$ converge a $\underline{x} \equiv (x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots)$. Como $a(k) \in N_n$ para todo $k \geq n$, concluímos que para cada $n \in \mathbb{N}$ a sequência $\{x_n^{a(k)},\ k \in \mathbb{N}\}$ torna-se uma subsequência de $\{x_n^a,\ a \in N_n\}$ a partir de $k \geq n$ e, portanto, converge a x_n.

Repetindo um argumento já usado na prova da Proposição 34.44, como γ_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência somável, existe para cada $\epsilon > 0$ um $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n > N(\epsilon)} \gamma_n < \epsilon$. Logo,

$$D_\gamma\big(\underline{x}^{a(k)},\ \underline{x}\big) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \big|x_n^{a(k)} - x_n\big| \ < \ \sum_{n=1}^{N(\epsilon)} \gamma_n \big|x_n^{a(k)} - x_n\big| + \epsilon \ .$$

Como $\lim_{k\to\infty} \big|x_n^{a(k)} - x_n\big|$ para cada $1 \leq n \leq N(\epsilon)$, obtem-se $\lim_{k\to\infty} D_\gamma\big(\underline{x}^{a(k)},\ \underline{x}\big) < \epsilon$. Como essa desigualdade é válida para todo $\epsilon > 0$, concluímos que $\lim_{k\to\infty} D_\gamma\big(\underline{x}^{a(k)},\ \underline{x}\big) = 0$, provando que $\{\underline{x}^a,\ a \in \mathbb{N}\}$ tem uma subsequência convergente em $\mathfrak{C}_{\mathbb{N}}$. ■

34.7 Teoremas de Metrizabilidade

Dada a particular relevância de espaços métricos é uma questão muito importante saber quando um espaço topológico geral tem seus abertos definidos por uma métrica. Nesta seção apresentamos algumas respostas a essa questão. Mais notadamente, discutiremos um teorema devido a Urysohn e Tikhonov o qual será por nós evocado alhures. Trata-se de mais uma apicação profunda do Lema de Ursohn, Lema 34.3, página 1571.

[51] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918).

• **Espaços metrizáveis**

Um espaço topológico é dito ser um *espaço metrizável* se for homeomorfo a um espaço métrico. É bastante evidente que todo espaço metrizável é Hausdorff e o supracitado Teorema de A. H. Stone (Teorema 34.27, página 1617) afirma também que todo espaço metrizável é paracompacto. Uma observação relevante é que se um espaço topológico $(X,\ \tau)$ é metrizável, então pode ser constituida uma métrica no mesmo cuja topologia coincide com a de τ.

Proposição 34.46 *Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico, seja $(M,\ d)$ um espaço métrico e seja $h : X \to M$ um homeomorfismo. Defina-se $\rho : X \times X \to [0,\ \infty)$ por*

$$\rho(x,\ y) \ := \ d\big(h(x),\ h(y)\big) \ .$$

Então ρ é uma métrica em X e $\tau = \tau_\rho$ (sendo τ_ρ a topologia induzida em X pela métrica ρ). □

Prova. Afirmamos que ρ é uma métrica. A positividade, a simetria e a desigualdade triangular são evidentes. Vale ainda que $\rho(x,\ y) = 0$ se e somente se $h(x) = h(y)$ (pois d é uma métrica) e, portanto, se e somente se $x = y$, pois h é bijetora. Isso provou que ρ é uma métrica (note-se que a continuidade de h e de h^{-1} não foram evocadas até aqui, mas serão usadas na prova que $\tau = \tau_\rho$).

Afirmamos também que $\tau = \tau_\rho$, a topologia métrica de ρ. Para tal, observe-se primeiramente que

$$B_\rho(r,\ x) \ = \ \big\{y \in X|\ \rho(x,\ y) < r\big\} \ = \ \big\{y \in X|\ d\big(h(x),\ h(y)\big) < r\big\}$$

$$= \ \big\{h^{-1}(a) \in Y|\ d\big(h(x),\ a\big) < r\big\} \ = \ h^{-1}\Big(B_d\big(r,\ h(x)\big)\Big) \ .$$

Seja $A \in \tau$ e $x \in A$. Como h^{-1} é contínua, $h(A)$ é um τ_d-aberto (sendo τ_d a topologia induzida em M pela métrica d). Logo, existe $r_x > 0$ tal que $B_d(r_x,\ h(x)) \subset h(A)$. Agora, $B_\rho(r_x,\ x) = h^{-1}\big(B_d(r_x,\ h(x))\big)$, implicando que $x \in B_\rho(r_x,\ x) \subset A$. Isso estabeleceu que A é um τ_ρ-aberto e que $\tau \subset \tau_\rho$. Seja agora $B \in \tau_\rho$. Então para cada $b \in B$ existe $r_b > 0$ tal que $B_\rho(r_b,\ b) \subset B$. Logo,

$$B \ = \ \bigcup_{b\in B} B_\rho(r_b,\ b) \ = \ \bigcup_{b\in B} h^{-1}\Big(B_d\big(r_b,\ h(b)\big)\Big) \ \stackrel{(1.25)}{=} \ h^{-1}\left(\bigcup_{b\in B} B_d\big(r_b,\ h(b)\big)\right) \ \in \ \tau \ ,$$

pois $B_d(r_b,\ h(b)) \in \tau_d$ e h é contínua. Assim, provamos também que $\tau_\rho \subset \tau$, estabelecendo a igualdade desejada. ■

• **Metrizabilidade local**

Um espaço topológico $(X,\ \tau)$ é dito ser localmente metrizável se todo $x \in X$ possuir uma vizinhança metrizável.

• **Metrizabilidade. Principais resultados**

Os principais resultados sobre metrizabilidade de espaços topológicos são o Teoremas de Tikhonov e Urysohn, o Teorema de Smirnov e o Teorema de Nagata–Smirnov.

Teorema 34.28 (Teorema de Metrização de Urysohn e Tikhonov (1925–1926)) *Um espaço topológico $(X,\ \tau)$ separável é metrizável se e somente se for segundo-contável, Hausdorff e normal e, pelo Corolário 34.1, página 1568, se e somente se for segundo-contável, Hausdorff e regular.* □

Vimos no Teorema 34.23, página 1607, que todo espaço topológico Hausdorff, compacto e localmente Euclidiano pode ser mergulhado em algum $\mathbb{R}^m$, que é um espaço métrico. Com as definições acima, é imediato que

Proposição 34.47 *Todo espaço topologico Hausdorff, compacto e localmente Euclidiano é metrizável.* □

É claro que todo espaço localmente Euclidiano é localmente metrizável (pois cada bola $D_n(r,\ 0) \subset \mathbb{R}^n$ é um espaço métrico com a métrica Euclidiana usual) e essa última proposição sugere uma extensão a espaços localmente metrizáveis paracompactos. De fato, vale o importante

Teorema 34.29 (Teorema de Metrização de Smirnov) *Um espaço topológico é metrizável se e somente se for Hausdorff, localmente metrizável e paracompacto.* □

Uma base em um espaço topológico é dita ser σ-localmente finita (ou contavelmente localmente finita) se for uma base formada pela união contável de coleções localmente finitas de abertos. O teorema a seguir dispensa a condição de separabilidade[52].

Teorema 34.30 (Teorema de Metrização de Nagata–Smirnov (1950–1951)) *Um espaço topológico é metrizável se e somente se for Hausdorff, regular e tiver uma base σ-localmente finita.* □

Mais adiante, na Seção 34.7.1, página 1629, apresentaremos uma demonstração do Teorema 34.28. Não apresentaremos uma prova dos Teoremas 34.29 e 34.30 na presente versão deste texto e remetemos o estudante interessado à literatura pertinente.

34.7.1 O Teorema de Metrização de Urysohn e Tikhonov

A presente seção é dedicada à demonstração do Teorema de Metrização de Urysohn e Tikhonov, Teorema 34.28, página 1628. Nosso tratamento segue ingredientes de [210] e de [278], os quais também seguem outras referências básicas da literatura (e.g.. [43]).

O resultado técnico fundamental é o Teorema 34.32, a seguir, que nos permite entender a relevância do Cubo de Hilbert $(\mathfrak{C}_{\mathbb{N}},\ \tau_P)$ (introduzido na Seção 34.6.2, página 1625): o mesmo é uma espécie de receptáculo universal no qual qualquer espaço topológico Hausdorff, normal e segundo-contável pode ser mergulhado. Esse fato tem profundas consequências sobre esses espaços, as quais discutiremos mais adiante. Para a prova do Teorema 34.32 faremos uso do seguinte lema (de [210]):

Lema 34.8 *Seja $(X,\ \tau)$ um espaço topológico Hausdorff e normal e seja $\mathcal{B}\subset\tau$ uma base de τ. Para cada $B\in\mathcal{B}$ e cada $x\in B$, existe $B'\in\mathcal{B}$ tal que $x\in B'\subset\overline{B'}\subset B$.* □

Prova. Como $(X,\ \tau)$ é Hausdorff, $(X,\ \tau)$ é um espaço de Fréchet e, portanto, todo conjunto de um ponto $\{y\}$, $y\in X$, é τ-fechado (vide discussão à página 1562). Sejam $B\in\mathcal{B}$ e $x\in B$, como no enunciado. Como $\{x\}$ e B^c são τ-fechados disjuntos, a condição de normalidade implica, pela Proposição 34.10, página 1566, que existe um τ-aberto A tal que $\{x\}\subset A\subset\overline{A}\subset B$. Como $\mathcal{B}$ é uma base, A é união de elementos de $\mathcal{B}$ e, portanto, existe ao menos um $B'\in\mathcal{B}$ com $x\in B'\subset A$. Mas $B'\subset A$ implica $\overline{B'}\subset\overline{A}$. Tem-se, portanto, $x\in B'\subset\overline{B'}\subset B$. ■

• **Mergulhando no Cubo de Hilbert**

No que segue faremos uso das definições e resultados da Proposição 34.44, página 1627. Seja $\gamma\equiv\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais com $\gamma_n>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e $\Gamma\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n<\infty$. Então $D_\gamma:\mathfrak{C}_{\mathbb{N}}\times\mathfrak{C}_{\mathbb{N}}\to[0,\ \infty)$ dada por $D_\gamma(\underline{a},\ \underline{b}):=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\,|a_n-b_n|$ define uma métrica em $\mathfrak{C}_{\mathbb{N}}$ e a topologia produto de Tikhonov τ_P em $\mathfrak{C}_{\mathbb{N}}$ conincide com a topologia métrica induzida por D_γ.

Teorema 34.31 *Se $(X,\ \tau)$ é um espaço topológico Hausdorff, regular e segundo-contável, então $(X,\ \tau)$ pode ser mergulhado no Cubo de Hilbert $(\mathfrak{C}_{\mathbb{N}},\ \tau_P)$, ou seja, existe uma função contínua $F:X\to\mathfrak{C}_{\mathbb{N}}$ que é um homeomorfismo de X na sua imagem $F(X)$.*

Como o Cubo de Hilbert $(\mathfrak{C}_{\mathbb{N}},\ \tau_P)$ é um espaço métrico, concluímos que todo espaço topológico Hausdorff, regular e segundo-contável é metrizável. □

[52]As referências originais aão J. I. Nagata, *On a Necessary and Sufficient Condition of Metrizability*, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser A Math **1**, 93–100 (1950) e J. M. Smirnov, *A Necessary and Sufficient Condition of Metrizability of a Topological Space*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **7**, 197–200 (1951). Agradecemos a Cláudio Mayrink Verdun por nos passá-las.

Pelo Teorema 34.2, página 1568, todo espaço topológico Hausdorff, regular e segundo-contável é normal. Logo, o Teorema 34.31 é uma consequência imediata do seguinte teorema sobre espaços topológicos Hausdorff, normais e segundo-contáveis:

Teorema 34.32 *Se $(X,\ \tau)$ é um espaço topológico Hausdorff, normal e segundo-contável, então $(X,\ \tau)$ pode ser mergulhado no Cubo de Hilbert $(\mathfrak{C}_{\mathbb{N}},\ \tau_P)$, ou seja, existe uma função contínua $F:X\to\mathfrak{C}_{\mathbb{N}}$ que é um homeomorfismo de X na sua imagem $F(X)$.*

Como o Cubo de Hilbert $(\mathfrak{C}_{\mathbb{N}},\ \tau_P)$ é um espaço métrico, concluímos que todo espaço topológico Hausdorff, normal e segundo-contável é metrizável. □

Prova do Teorema 34.32. (De [210] e [278], com modificações). Seja $\mathcal{B}$ uma base contável de $(X,\ \tau)$. O Lema 34.8 afirma que para todo $B\in\mathcal{B}$ existe ao menos um $B'\in\mathcal{B}$ tal que $\overline{B'}\subset B$. Vamos escrever concretamente $\mathcal{B}$ na forma $\mathcal{B}=\{B_n\in\tau,\ n\in\mathbb{N}\}$ e seja $\mathcal{P}$ a coleção de todos os pares $(B_a,\ B_b)\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ tais que $\overline{B_a}\subset B_b$. É evidente que $\mathcal{P}$ é não-vazio (pelo Lema 34.8) e enumerável (pois é um subconjunto de $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$, que é enumerável). Vamos escrever concretamente $\mathcal{P}$ na forma $\mathcal{P}=\{P_n,\ n\in\mathbb{N}\}$.

Cada $P_n\in\mathcal{P}$ é um par da forma $(B_{a_n},\ B_{b_n})\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ com $\overline{B_{a_n}}\subset B_{b_n}$. Como $\overline{B_{a_n}}$ e $\big(B_{b_n}\big)^c$ são τ-fechados disjuntos, podemos evocar o Lema de Urysohn, Lema 34.3, página 1571, e associar a cada P_n uma função contínua $f_n:X\to[0,\ 1]$ tal que $f_n(x)=1$ para todo $x\in\overline{B_{a_n}}$ e $f_n(x)=0$ para todo $x\in\big(B_{b_n}\big)^c$. Vale, portanto, $\operatorname{supp}(f_n)\subset B_{b_n}$.

Com uso das funções f_n introduzidas acima, defina-se a função $F:X\to\mathfrak{C}_{\mathbb{N}}$ por

$$F(x)\;=\;\big(f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots\big)\ .$$

Afirmamos que F é contínua (adotando-se em $\mathfrak{C}_{\mathbb{N}}$ a topologia métrica induzida pela métrica D_γ). Seja $\epsilon>0$. Como $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é somável, existe $N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N(\epsilon)+1}^{\infty}\gamma_n<\epsilon/2$. Como cada f_n é contínua, existe para cada $x\in X$ e $n\in\mathbb{N}$ uma vizinhança τ-aberta $V_{x,\,n}$ de x tal que $|f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\epsilon}{2\Gamma}$ para todo $y\in V_{x,\,n}$. Assim, para $y\in V_x:=V_{x,\,1}\cap\cdots\cap V_{x,\,N(\epsilon)}$ (que é um τ-aberto) valerá $\sum_{n=1}^{N(\epsilon)}\gamma_n|f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\epsilon}{2\Gamma}\sum_{n=1}^{N(\epsilon)}\gamma_n<\frac{\epsilon}{2}$. Com isso, concluímos que para todo $y\in V_x\in\tau$ vale

$$D_\gamma\big(F(x),\ F(y)\big)\;=\;\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n|f_n(x)-f_n(y)|\;=\;\sum_{n=1}^{N(\epsilon)}\gamma_n|f_n(x)-f_n(y)|+\sum_{n=N(\epsilon)+1}^{\infty}\gamma_n|f_n(x)-f_n(y)|$$

$$\leq\;\sum_{n=1}^{N(\epsilon)}\gamma_n|f_n(x)-f_n(y)|+\sum_{n=N(\epsilon)+1}^{\infty}\gamma_n\;\leq\;\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}\;=\;\epsilon\ ,$$

provando que F é contínua em x e, portanto, em toda parte.

Afirmamos que F é injetora. De fato, se $F(x)=F(y)$, então $f_n(x)=f_n(y)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Vamos supor que $x\neq y$. Como $(X,\ \tau)$ é Hausdorff existe um τ-aberto A tal que $x\in A$ e $y\in A^c$. Como A é obtido como união de elementos de $\mathcal{B}$, existe $B_n\in\mathcal{B}$ tal que $x\in B_n\subset A$. Pelo Lema 34.8 , existe $B_m\in\mathcal{B}$ tal que $x\in B_m\subset\overline{B_m}\subset B_n\subset A$. Assim, o par $(B_m,\ B_n)$ pertence a $\mathcal{P}$, ou seja, $(B_m,\ B_n)=P_k$ para algum $k\in\mathbb{N}$. Como $x\in B_m\subset\overline{B_m}$, vale $f_k(x)=1$. Como $y\in A^c\subset\big(B_n\big)^c$, vale $f_k(y)=0$. Assim, $f_k(x)\neq f_k(y)$, uma contradição, implicando que devemos ter $x=y$. Isso provou que F é injetora.

Provamos que a função inversa $F^{-1}:F(X)\to X$ existe. Afirmamos agora que F^{-1} é também contínua, o que significa que F é um homeomorfismo de X em $F(X)$, adotando nesse último a topologia relativa de $(\mathfrak{C}_{\mathbb{N}},\ D_\gamma)$. Para tal é suficiente provar-se que a imagem por F de todo aberto em X é um aberto em $F(X)\subset\mathfrak{C}_{\mathbb{N}}$ na topologia relativa de $(\mathfrak{C}_{\mathbb{N}},\ D_\gamma)$.

Começamos observando que cada conjunto $A_j\subset\mathfrak{C}_{\mathbb{N}}$, $j\in\mathbb{N}$, definido por

$$A_j\;:=\;\Big\{\big(y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\big)\in\mathfrak{C}_{\mathbb{N}}\Big|\ y_j>0\Big\}$$

é aberto na topologia métrica de D_γ. De fato, a bola de raio $r > 0$ centrada em $\underline{y} \in A_j$ é dada por

$$B_{D_\gamma}(r,\ \underline{y}) \ = \ \left\{(z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots) \in \mathfrak{C}_{\mathbb{N}} \ \middle| \ \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k |z_k - y_k| \ < \ r\right\} .$$

Assim, se $\underline{z} \in B_{D_\gamma}(r,\ \underline{y})$ tem-se $\gamma_k|z_k - y_k| < r$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Particularmente, vale $|z_j - y_j| < r/\gamma_j$ e tomando-se $r < y_j\gamma_j$ teremos $z_j > 0$, implicando que para tal valor de r teremos $B_{D_\gamma}(r,\ \underline{y}) \subset A_j$. Isso demonstrou que A_j é um D_γ-aberto.

Seja agora B_k um elemento arbitrário de $\mathcal{B}$. Pelo Lema 34.8 existe um subconjunto $\mathcal{P}_k$ de $\mathcal{P}$ composto por pares da forma $(B',\ B_k)$ com $\overline{B'} \subset B_k$. Como $\mathcal{P}_k \subset \mathcal{P}$, escrevemos $\mathcal{P}_k = \{P_j,\ j \in J_k\}$, sendo $J_k \subset \mathbb{N}$ e sendo cada P_j da forma $P_j = (B_{l_j},\ B_k)$ com $\overline{B_{l_j}} \subset B_k$. Considere-se, então, $C_k := \bigcup_{j\in J_k} A_j$. É claro que C_k é um D_γ-aberto (por ser união de D_γ-abertos).

Recordemos que para cada $j \in J_k$ as funções f_j satisfazem $f_j(y) = 1$ para todo $y \in \overline{B_{l_j}}$ e $f_j(y) = 0$ para todo $y \in \left(B_k\right)^c$.

Afirmamos que $F(B_k) = C_k \cap F(X)$. Para provar essa afirmação, comecemos considerando um ponto $x \in B_k$. Pelo Lema 34.8 existe algum $j \in J_k$ tal que $x \in B_{l_j} \subset \overline{B_{l_j}} \subset B_k$. Para esse j teremos, portanto, $f_j(x) = 1$, o que implica que $F(x) \in A_j$ e, portanto, $F(x) \in C_k \cap F(X)$. Como isso vale para todo $x \in B_k$, concluímos que $F(B_k) \subset C_k \cap F(X)$. Seja agora $\underline{z} \in C_k \cap F(X)$. Isso significa que $\underline{z} = F(x)$ para algum $x \in X$ e que $f_j(x) > 0$ para algum $j \in J_k$. Pela definição das funções f_j, isso significa que $x \notin \left(B_k\right)^c$, ou seja, $x \in B_k$. Assim, provamos que $C_k \cap F(X) \subset F(B_k)$, o que estabeleceu que $F(B_k) = C_k \cap F(X)$.

O fato de ter-se $F(B_k) = C_k \cap F(X)$ significa que $F(B_k)$ é um aberto em $F(X)$ na topologia relativa de D_γ (já que C_k é um D_γ-aberto). Ora, B_k é um elemento arbitrário de $\mathcal{B}$ e como todo $A \in \tau$ é união de elementos de $\mathcal{B}$, concluímos de (1.23) que $F(A)$ é igualmente aberto em $F(X)$ na topologia relativa de D_γ. Assim, provamos que $F : X \to \mathfrak{C}$ é um homeomorfismo, estabelecendo que $(X,\ \tau)$ pode ser mergulhado em $(\mathfrak{C}_{\mathbb{N}},\ D_\gamma)$. ■

• O caso de espaços Hausdorff localmente compactos e segundo-contáveis

Outro corolário de interesse do Teorema 34.31 refere-se a espaços localmente compactos.

Corolário 34.13 *Se $(X,\ \tau)$ é um espaço topologico Hausdorff localmente compacto e segundo-contável, então $(X,\ \tau)$ pode ser mergulhado no Cubo de Hilbert $(\mathfrak{C}_{\mathbb{N}},\ \tau_P)$, ou seja, existe uma função contínua $F : X \to \mathfrak{C}_{\mathbb{N}}$ que é um homeomorfismo de X na sua imagem $F(X)$.*

Como o Cubo de Hilbert $(\mathfrak{C}_{\mathbb{N}},\ \tau_P)$ é um espaço métrico, concluímos que todo espaço topológico Hausdorff localmente compacto e segundo-contável é metrizável.

Prova. Pela Proposição 34.32, página 1610, $(X,\ \tau)$ é também regular e, portanto, estamos novamente sob as condições do Teorema 34.31. ■

• O Teorema de metrização de Urysohn e Tikhonov

Chegamos agora à meta principal da corrente seção.

Teorema 34.33 (Teorema de Metrização de Urysohn e Tikhonov (1925–1926)) *Um espaço topológico $(X,\ \tau)$ separável é metrizável se e somente se for segundo-contável, Hausdorff e normal e, pelo Corolário 34.1, página 1568, se e somente se for segundo-contável, Hausdorff e regular.* □

Prova. Vimos na Proposição 34.46, página 1628, que todo espaço metrizável é um espaço métrico. Assim, se $(X,\ \tau)$ é separável e metrizável, então é Hausdorff (pela Proposição 32.1, página 1477), normal (pela Proposição 34.7, página 1560) e segundo-contável (pela Proposição 29.15, página 1422).

Reciprocamente, se $(X,\ \tau)$ for segundo-contável, vimos na Proposição 29.14, página 1421, que é separável. Se também for Hausdorff e normal, vimos no Teorema 34.32, página 1630, que $(X,\ \tau)$ e metrizável. ■

A parte referente à normalidade no Teorema 34.33 foi demonstrada por Urysohn em trabalho publicado postumanente em 1925. A generalização a espaços regulares foi obtida por Tikhonov em trabalho publicado em 1926 como consequência do Teorema 34.2, página 1568, demonstrado pelo mesmo.

34.8 O Teorema da Categoria de Baire

Seja X um conjunto e τ uma topologia em X. Um conjunto C é dito ser *denso em parte alguma* na topologia τ se seu fecho tiver interior vazio, ou seja, se $\left(\overline{C}\right)^0 = \emptyset$.

Seja X um conjunto e τ uma topologia em X. X é dito ser de *primeira categoria* se existir uma família contável N_n, $n \in \mathbb{N}$, de subconjuntos de X tais que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$ e tais que todos os N_n são densos em parte alguma.

X é dito ser de *segunda categoria* se não for de primeira categoria.

Teorema 34.34 (Teorema da Categoria de Baire para espaços métricos) *Todo espaço métrico completo é de segunda categoria, ou seja, se M é um espaço métrico completo e $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$ para alguma família contável de conjuntos $N_n \subset M$ então existe pelo menos um N_m tal que $\left(\overline{N_m}\right)^0 \neq \emptyset$.* □

Prova. Seja M um espaço métrico completo em relação a uma métrica d e seja uma alguma família contável de conjuntos $N_n \subset M$, todos densos em parte alguma e tais que $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$. A prova é feita por contradição, exibindo-se um elemento x que pertence a M mas que não pertence a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$.

Façamos em primeiro lugar algumas observações básicas que serão usadas repetidamente no que segue. Como os conjuntos N_n são densos em parte alguma, seus fechos $\overline{N_n}$ não podem ser iguais a M, pois M é aberto. Logo os abertos $\left(\overline{N_n}\right)^c = M \setminus \overline{N_n}$ são todos não-vazios. Fora isso, para qualquer bola aberta não-vazia B devemos ter também $B \cap \left(\overline{N_n}\right)^c \neq \emptyset$, pois se tivéssemos $B \cap \left(\overline{N_n}\right)^c = \emptyset$ isso implicaria $B \subset \overline{N_n}$, contrariando a hipótese que $\overline{N_n}$ interior vazio.

Como dissemos, a estratégia da prova é exibir um elemento x que pertence a M mas que não pertence a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$. Esse elemento x será construído como limite de uma sequência de Cauchy conveniente, explorando o fato de M ser completo.

Passemos à construção da sequência de Cauchy. Como $\left(\overline{N_1}\right)^c \neq \emptyset$, tomemos um elemento x_1 arbitrário de $\left(\overline{N_1}\right)^c$. Como $\left(\overline{N_1}\right)^c$ é aberto existe uma bola $B_1(x_1,\ r_1)$ centrada em x_1 e de raio r_1 suficientemente pequeno inteiramente contida em $\left(\overline{N_1}\right)^c$. É claro que $B_1(x_1,\ r_1) \cap N_1 = \emptyset$ e que $x_1 \notin N_1$.

Analogamente, como $\left(\overline{N_2}\right)^c$ é aberto e não-vazio, tem-se que $B_1(x_1,\ r_1) \cap \left(\overline{N_2}\right)^c \neq \emptyset$. Escolhemos então $x_2 \in B_1(x_1,\ r_1) \cap \left(\overline{N_2}\right)^c$ e tomemos uma bola $B_2(x_2,\ r_2)$ inteiramente contida no aberto $B_1(x_1,\ r_1) \cap \left(\overline{N_2}\right)^c$. Sem perda, podemos escolher r_2 satisfazendo $r_2 < r_1/2$ e tal que $\overline{B_2(x_2,\ r_2)} \subset B_1(x_1,\ r_1)$. Note-se também que $B_2(x_2,\ r_2) \cap N_2 = \emptyset$ e, como $B_2(x_2,\ r_2) \subset B_1(x_1,\ r_1)$, vale também que $B_2(x_2,\ r_2) \cap N_1 = \emptyset$. Em resumo, $B_2(x_2,\ r_2) \cap (N_1 \cup N_2) = \emptyset$. e $x_2 \notin N_1 \cup N_2$.

Podemos agora proceder indutivamente. Para $n > 2$, $\left(\overline{N_n}\right)^c$ é aberto e não-vazio, tem-se que $B_{n-1}(x_{n-1},\ r_{n-1}) \cap \left(\overline{N_n}\right)^c \neq \emptyset$. Escolhemos então $x_n \in B_{n-1}(x_{n-1},\ r_{n-1}) \cap \left(\overline{N_n}\right)^c$ e tomemos uma bola $B_n(x_n,\ r_n)$ inteiramente contida no aberto $B_{n-1}(x_{n-1},\ r_{n-1}) \cap \left(\overline{N_n}\right)^c$. Sem perda, podemos escolher r_n satisfazendo $r_n < r_{n-1}/2 < 2^{1-n}r_1$ e tal que $\overline{B_n(x_n,\ r_n)} \subset B_{n-1}(x_{n-1},\ r_{n-1})$. Note-se também que $B_n(x_n,\ r_n) \cap N_n = \emptyset$ e, como $B_n(x_n,\ r_n) \subset B_{n-1}(x_{n-1},\ r_{n-1})$, vale também que $B_n(x_n,\ r_n) \cap N_{n-1} = \emptyset$. Em resumo, $B_n(x_n,\ r_n) \cap (N_1 \cup \cdots \cup N_n) = \emptyset$. e $x_n \notin N_1 \cup \cdots \cup N_n$.

A sequência x_n é uma sequência de Cauchy pois (para $m < n$),

$$d(x_m,\ x_n) \ \leq \ \sum_{i=0}^{n-m-1} d(x_{m+i},\ x_{m+i+1})$$

pela desigualdade triangular (por que?) e como $x_n \in B_{n-1}(x_{n-1},\ r_{n-1})$, segue que $d(x_{m+i},\ x_{m+i+1}) \leq r_{m+i} < 2^{1-m-i}r_1$. Logo,

$$d(x_m,\ x_n) \ \leq \ \sum_{i=0}^{n-m-1} 2^{1-m-i}r_1 \ < \ 2^{1-m}r_1 \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \ = \ 2^{2-m}r_1$$

que vai a zero quando $m \to \infty$.

Como x_n é uma sequência de Cauchy e M é completo, existe $x \in M$ ao qual a sequência x_n converge.

Fixando um J temos que todo x_n com $n \geq J$ é elemento de $B_J(x_J, r_J)$. Logo, $x \in \overline{B_J(x_J, r_J)} \subset B_{J-1}(x_{J-1}, r_{J-1})$. Como $B_{J-1}(x_{J-1}, r_{J-1}) \cap N_{J-1} = \emptyset$ concluímos que $x \notin N_{J-1}$. No entanto, J é arbitrário e, portanto, x não pertence a nenhum N_n. Assim, x não pertence a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$, contrariando a hipótese que $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$. ■

34.9 A Métrica de Hausdorff

Em um espaço métrico (M, d), com M sendo um conjunto não-vazio e d uma métrica em M, além da noção de distância entre pontos, definida pela própria métrica, é possível também introduzir uma noção de distância entre certos subconjuntos de M, a saber entre os conjuntos fechados limitados de M. Essa métrica, denominada *métrica de Hausdorff*[53], possui diversas propriedades importantes que refletem propriedades do próprio espaço métrico (M, d). No que segue, seguimos parcialmente [54].

Seja (M, d) um espaço métrico e, para $r > 0$ e $x \in M$, denotemos por $B(x, r) := \{y \in M, \text{ tal que } d(x, y) < r\}$ a bola aberta de raio r centrada em x. Para $A \subset M$, não-vazio, e $r > 0$, definamos

$$N(A, r) := \bigcup_{a\in A} B(a, r) .$$

Como facilmente se percebe, $N(A, r)$ é o conjunto de todos os pontos de M de distam menos que r de algum ponto de A: $N(A, r) = \{y \in M \mid \exists a \in A \text{ satisfazendo } d(y, a) < r\}$. É evidente que $A \subset N(A, r)$ para todo $r > 0$.

A seguinte afirmação será usada no que segue.

Lema 34.9 *Seja (M, d) um espaço métrico e sejam A, B e C subconjuntos não-vazios de M. Vamos supor que existam $r > 0$ e $s > 0$ tais que $A \subset N(B, r)$ e $B \subset N(C, s)$. Então $A \subset N(C, r+s)$.* □

Prova. Seja a um elemento arbitrário de A. Como $A \subset N(B, r)$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < c$. Como $B \subset N(C, s)$, existe $c \in C$ tal que $d(c, b) < s$ para esse mesmo b. Assim, pela desigualdade triangular, $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) < r+s$. Isso mostra que $A \subset N(C, r+s)$. ■

• **A pseudométrica de Hausdorff**

Seja $\mathcal{L}_d(M)$ a coleção de todos os conjuntos não-vazios e d-limitados de M. Se A e B são elementos de $\mathcal{L}_d(M)$, afirmamos que existe um $r > 0$ tal que $B \subset N(A, r)$. De fato, seja $D := \sup\{d(b_1, b_2), \ b_1, b_2 \in M\}$ o diâmetro de B. D é finito, por hipótese. Sejam $a \in A$, $b \in B$ e seja $r > D + d(a, b)$. Para qualquer $b' \in B$ valerá $d(b', a) \leq d(b', b) + d(b, a) \leq D + d(b, a) < r$, provando que todo elemento de B dista no máximo r do elemento $a \in A$ e, portanto, $B \subset N(A, r)$.

Essa observação permite-nos introduzir a seguinte definição: $h : \mathcal{L}_d(M) \times \mathcal{L}_d(M) \to \mathbb{R}_+$ é a função que a cada par $A, B \in \mathcal{L}_d(M)$ associa

$$h(A, B) := \inf\left\{r > 0 \mid A \subset N(B, r) \text{ e } B \subset N(A, r)\right\} . \tag{34.38}$$

No que segue discutiremos diversas propriedades da função h. Notemos primeiramente que $h(A, B)$ está bem definida se A e B são não-vazios e limitados pois, como observamos acima, existe ao menos um $r_0 > 0$, finito, tal que $A \subset N(B, r_0)$ e $B \subset N(A, r_0)$ e $h(A, B)$ é o ínfimo dos r_0's com essa propriedade (daí termos definido h em $\mathcal{L}_d(M) \times \mathcal{L}_d(M)$). A função h não está necessariamente definida se A ou B forem não-limitados. Por exemplo, se $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual $d(x, y) = |x - y|$, então $h(A, B)$ não está definida se $A = (-\infty, 0)$ e $B = (1, 2)$ (justifique!).

Vamos ao primeiro resultado relevante sobre h:

Proposição 34.48 *Seja (M, d) um espaço métrico e seja $\mathcal{L}_d(M)$ a coleção de todos os conjuntos não-vazios e d-limitados de M. Então a função $h : \mathcal{L}_d(M) \times \mathcal{L}_d(M) \to \mathbb{R}_+$ definida em (34.38) é uma pseudométrica em $\mathcal{L}_d(M)$, ou seja, satisfaz*

[53] Felix Hausdorff (1868–1942).

1. $h(A, A) = 0$,
2. $h(A, B) \geq 0$,
3. $h(A, B) = h(B, A)$,
4. $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$,

para todos A, B e $C \in \mathcal{L}_d(M)$.

A pseudométrica $h : \mathcal{L}_d(M) \times \mathcal{L}_d(M) \to \mathbb{R}_+$ é denominada pseudométrica de Hausdorff. □

Antes de apresentarmos a demonstração da Proposição 34.48, observemos que h não é necessariamente uma métrica em $\mathcal{L}_d(M)$, pois se para dois conjuntos A, $B \in \mathcal{L}_d(M)$ valer $h(A, B) = 0$ não é necessariamente verdade que $A = B$. Isso é bem ilustrado no seguinte exemplo: seja $M = [0, 1]$ com a métrica usual $d(x, y) = |x-y|$. Sejam $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ e $B = A^c$, ou seja, A é composto pelos racionais em $[0, 1]$ e B pelos irracionais em $[0, 1]$. Então $h(A, B) = 0$ mas $A \neq B$. Para que h seja uma métrica é necessário restringir ainda mais o conjunto $\mathcal{L}_d(M)$, como discutiremos mais adiante.

Prova da Proposição 34.48. É claro que $A \subset N(A, r)$ para todo $r > 0$. Logo, $h(A, A) = \inf\left\{r > 0 \mid A \subset N(A, r)\right\} = 0$, provando o item 1. Os itens 2 e 3 são evidentes pela definição de h. Provemos agora o item 4.

Vamos supor que o item 4 seja falso e que existam A, B e $C \in \mathcal{L}_d(M)$ tais que $h(A, B) > h(A, C) + h(C, B)$. Então existirão dois números não-negativos s e t tais que $h(A, C) < s$, $h(C, B) < t$, mas $h(A, B) > s + t$ (justifique!). Agora, $h(A, C) < s$ implica $A \subset N(C, s)$ e $C \subset N(A, s)$, enquanto que $h(C, B) < t$ implica $C \subset N(B, t)$ e $B \subset N(C, t)$. Se valer $A \subset N(C, s)$ e $C \subset N(B, t)$ então $A \subset N(B, s+t)$ (pelo Lema 34.9) e se valer $C \subset N(A, s)$ e $B \subset N(C, t)$ então $B \subset N(A, s+t)$ (novamente pelo Lema 34.9). Logo, $A \subset N(B, s+t)$ e $B \subset N(A, s+t)$, provando que $h(A, B) = \inf\left\{r > 0 \mid A \subset N(B, r) \text{ e } B \subset N(A, r)\right\} < s + t$, uma contradição. ■

• **A métrica de Hausdorff**

Como observamos, h não é necessariamente uma métrica em $\mathcal{L}_d(M)$. No entanto, se considerarmos h restrita ao subconjunto de $\mathcal{L}_d(M)$ composto pelos conjuntos não-vazios, fechados e d-limitados de M, que denotamos por $\mathcal{F}_f(M)$, então h será uma métrica.

Proposição 34.49 *Seja (M, d) um espaço métrico e seja $\mathcal{F}_d(M)$ a coleção de todos os conjuntos não-vazios, fechados e d-limitados de M. Então a função $h : \mathcal{F}_d(M) \times \mathcal{F}_d(M) \to \mathbb{R}_+$, com h definida em (34.38), é uma métrica em $\mathcal{F}_d(M)$, demominada* métrica de Hausdorff. □

Prova. Como $\mathcal{F}_d(M) \subset \mathcal{L}_d(M)$, valem as afirmações da Proposição 34.48 e resta apenas provar que se $h(A, B) = 0$ para algum par A, $B \in \mathcal{F}_d(M)$, então $A = B$. A prova é feita mais uma vez por absurdo. Suponhamos que existam A, $B \in \mathcal{F}_d(M)$ com $h(A, B) = 0$ e que existe $a \in A$ tal que $a \notin B$. Como B é fechado, a Proposição 29.8, página 1417, garante-nos que existe $r_0 > 0$ tal que $B(a, r_0) \cap B = \emptyset$. Mas isso implica que $A \not\subset N(B, r_0)$. Logo, $h(A, B) = \inf\left\{r > 0 \mid A \subset N(B, r) \text{ e } B \subset N(A, r)\right\} \geq r_0 > 0$, uma contradição. ■

Seja (M, d) um espaço métrico e seja $\mathcal{C}_d(M)$ a coleção de todos os conjuntos τ_d-compactos não-vazios de M. Pelo item II do Teorema 34.11, página 34.11, tem-se $\mathcal{C}_d(M) \subset \mathcal{F}_d(M)$. O seguinte corolário é, portanto, evidente:

Corolário 34.14 *Seja (M, d) um espaço métrico e seja $\mathcal{C}_d(M)$ a coleção de todos os conjuntos não-vazios e τ_d-compactos de M. Então a função $h : \mathcal{C}_d(M) \times \mathcal{C}_d(M) \to \mathbb{R}_+$, com h definida em (34.38), é uma métrica em $\mathcal{F}_d(M)$, demominada* métrica de Hausdorff *sobre os compactos de M.* □

Assim, a restrição de h aos τ_d-compactos é também uma métrica. Essa métrica específica, porém, possui diversas propriedades especiais, expressas nos seguintes teoremas:

Teorema 34.35 *Se (M, d) é um espaço métrico completo, então $(\mathcal{C}_d(M), h)$ também é um espaço métrico completo.* □

Teorema 34.36 *Se $(M,\ d)$ é um espaço métrico compacto, então $(\mathcal{C}_d(M),\ h)$ também é um espaço métrico compacto.* □

A demonstração do Teorema 34.35 pode ser encontrada em [54]. A demonstração do Teorema 34.36 pode ser encontrada em [210].

Apêndices

34.A Prova da Proposição 34.35

Este apêndice é dedicado à

Demonstração da Proposição 34.35. Todo espaço Hausdorff é um espaço de Fréchet (T_1), e uma condição necessária e suficiente para um espaço ser de Fréchet é que todo conjunto de um elemento seja fechado. Vide discussão à página 1562 e seguintes.

Seja $x \in X$. Como $\mathcal{A}$ recobre X, existe um elemento $A_{\lambda_x} \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A_{\lambda_x}$. Como $(X,\ \tau)$ é Hausdorff, o conjunto $\{x\}$ é τ-fechado. Além disso, o espaço $(X,\ \tau)$ é normal (pelo Teorema 34.8, página 1584). Portanto, como $\{x\}$ e $(A_{\lambda_x})^c$ são τ-fechados disjuntos, existe (pela Proposição 34.10, página 1566) um τ-aberto C_x tal que $x \in C_x \subset \overline{C_x} \subset A_{\lambda_x}$. A coleção $\mathcal{C} = \{C_x,\ x \in X\}$ é um recobrimento de X por τ-abertos e, pela hipótese de paracompacidade, possui um refinamento por τ-abertos localmente finito $\mathcal{D} = \{D_\mu,\ \mu \in M\}$, com M sendo algum conjunto de índices.

Observe-se que, como cada D_μ pertence a algum C_z com $z \in X$, ou seja, $D_\mu \subset C_z$, segue também que $\overline{D_\mu} \subset \overline{C_z} \subset A_{\lambda_z}$. Concluímos disso que para todo $\mu \in M$ existe um $\lambda(\mu) \in \Lambda$ tal que $D_\mu \subset \overline{D_\mu} \subset A_{\lambda(\mu)}$. Essa observação será usada de forma essencial no que segue.

Para cada $\lambda \in \Lambda$ denotemos por B_λ a união de todos os elementos de $\mathcal{D}$ cujo fecho está contido em A_λ:

$$B_\lambda := \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{D} \\ \overline{D} \subset A_\lambda}} D\,. \tag{34.A.1}$$

Afirmamos que a coleção $\mathcal{B} = \{B_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ é o conjunto procurado, ou seja, é um refinamento de $\mathcal{A}$ por τ-abertos que satisfazem $\overline{B_\lambda} \subset A_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Essa afirmação será demonstrada por partes.

1. Que os elementos de $\mathcal{B}$ são τ-abertos é evidente, pois os elementos de $\mathcal{D}$ o são.
2. Que $\mathcal{B}$ é um recobrimento de X segue do seguinte argumento. $\mathcal{D}$ recobre X (pois é um refinamento de $\mathcal{C}$). Logo, se $y \in X$ existe $D_{\mu_y} \in \mathcal{D}$ com $y \in D_{\mu_y}$. Pelo anteriormente observado, existe $\lambda(\mu_y) \in \Lambda$ tal que $y \in D_{\mu_y} \subset \overline{D_{\mu_y}} \subset A_{\lambda(\mu_y)}$. Logo, $y \in B_{\lambda(\mu_y)} \in \mathcal{B}$, provando que todo $y \in X$ pertence a algum elemento de $\mathcal{B}$.
3. Que $\mathcal{B}$ é um refinamento de $\mathcal{A}$ é evidente por (34.A.1), pois aquela expressão afirma que para cada $\lambda \in \Lambda$ vale $$B_\lambda := \left(\bigcup_{\substack{D \in \mathcal{D} \\ \overline{D} \subset A_\lambda}} D\right) \subset \left(\bigcup_{\substack{D \in \mathcal{D} \\ D \subset A_\lambda}} D\right) \subset A_\lambda .$$
4. Que $\overline{B_\lambda} \subset A_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$ segue da seguinte sequência de passos.

   I. Seja $z \in \overline{B_\lambda}$. Pela Proposição 29.8, página 1417, toda vizinhança τ-aberta de z tem intersecção não-vazia com B_λ. Logo, toda vizinhança τ-aberta de z tem intersecção não-vazia com ao menos um conjunto $D \in \mathcal{D}$ satisfazendo $\overline{D} \subset A_\lambda$.

   II. Como $\mathcal{D}$ é localmente finito, existe uma vizinhança τ-aberta V_z de z que intersecta apenas uma coleção finita de elementos de $\mathcal{D}$.

   III. Como V_z é uma vizinhança τ-aberta de z, V_z tem intersecção não-vazia com ao menos um conjunto $D \in \mathcal{D}$ satisfazendo $\overline{D} \subset A_\lambda$ (pelo item *I*). Mas há apenas uma coleção finita de elementos de $\mathcal{D}$ que intersectam V_z e, portanto, há apenas uma coleção finita de elementos D de $\mathcal{D}$ que intersectam V_z <u>e</u> satisfazem $\overline{D} \subset A_\lambda$. Sejam $D_1,\ \ldots,\ D_n$ esses conjuntos.

   IV. Pelas considerações de acima, $D_1,\ \ldots,\ D_n$ são os <u>únicos</u> conjuntos de $\mathcal{D}$ com intersecção não-vazia com V_z e cujo fecho está contido em A_λ: $V_z \cap D_j \neq \emptyset$ <u>e</u> $\overline{D_j} \subset A_\lambda$ para todo $j = 1,\ \ldots,\ n$.

   V. Afirmamos agora que $z \in \overline{D_1 \cup \cdots \cup D_n}$. De fato, se assim não fosse, teríamos $z \in \left(\overline{D_1 \cup \cdots \cup D_n}\right)^c$, que é τ-aberto. Logo, $V_z \cap \left(\overline{D_1 \cup \cdots \cup D_n}\right)^c$ seria uma vizinhança τ-aberta de z. Portanto, pelo item *I*, existiria ao menos um $D \in \mathcal{D}$ satisfazendo $\overline{D} \subset A_\lambda$ tal que $\left[V_z \cap \left(\overline{D_1 \cup \cdots \cup D_n}\right)^c\right] \cap D \neq \emptyset$. Mas isso implica duas coisas:

a) $V_z \cap D \neq \emptyset$ e

b) $\left(\overline{D_1 \cup \cdots \cup D_n}\right)^c \cap D \neq \emptyset$.

O item *a)* implica (pelo item *IV*) que $D = D_k$ para algum $k \in \{1, \ldots, n\}$. Esse fato, porém, contradiz o item *b)*, pois ambos implicariam

$$\emptyset \neq \left(\overline{D_1 \cup \cdots \cup D_n}\right)^c \cap D_k \subset \left(D_1 \cup \cdots \cup D_n\right)^c \cap D_k \subset \left(D_k\right)^c \cap D_k = \emptyset ,$$

um absurdo.

VI. Assim, estabelecemos que $z \in \overline{D_1 \cup \cdots \cup D_n} = \overline{D_1} \cup \cdots \cup \overline{D_n}$ (para a última igualdade, vide item 4 da Proposição 29.4, página 1414). Como vimos no item *IV*, porém, $\overline{D_j} \subset A_\lambda$ para todo $j = 1, \ldots, n$ Logo, estabelecemos que $z \in A_\lambda$, provando que $\overline{B_\lambda} \subset A_\lambda$. ■

Parte VII

Geometria Diferencial e Topologia Diferencial