


Capítulo 36

Noções Geométricas em Variedades

Conteúdo

36.1	Métricas Riemannianas e Semi-Riemannianas	1703
36.1.1	Transposição em Relação a Tensores Métricos	1713
36.2	Conexões Afins	1717
36.2.1	Conexões Afins em Campos Vetoriais	1717
36.2.1.1	Conexões Afins em Campos Tensoriais	1722
36.2.2	O Tensor de Torção	1725
36.2.3	Tipos Especiais de Conexões Afins	1726
36.2.3.1	Conexões Simétricas (ou Livres de Torção)	1726
36.2.3.2	Conexões Métricas (ou Riemannianas)	1728
36.2.3.3	Conexões de Levi-Civita	1734
36.2.4	Gradiente, Divergente e Laplaciano	1735
36.3	O Tensor de Curvatura	1738
36.3.1	A Curvatura Seccional	1744
36.3.2	O Tensor de Ricci e a Curvatura Escalar	1747
36.4	Geodésicas	1749
36.4.1	O Lema de Gauss	1753
36.4.2	Pontos Conjugados e a Equação de Jacobi	1757
36.4.2.1	A Equação de Jacobi	1757
36.4.2.2	Pontos Conjugados	1759
36.5	A Estrutura Causal de Variedades Lorentzianas	1761
36.5.1	A Identidade de Raychaudhuri	1763
	APÊNDICES	1773
36.A	Demonstração de Algumas Propriedades do Tensor de Curvatura	1773
36.A.1	Prova da Proposição 36.6	1773
36.A.2	Prova da Primeira Identidade de Bianchi, Proposição 36.8	1774
36.A.3	Prova da Segunda Identidade de Bianchi, Proposição 36.9	1775
36.A.4	Prova da Proposição 36.10	1777
36.A.5	Prova da Proposição 36.11	1778

 ESTE capítulo daremos continuidade ao Capítulo 35, página 1640, introduzindo agora noções de natureza geométrica no estudo de variedades diferenciáveis, noções tais como a de tensor métrico, a de tensor métrico Riemanniano, a de tensor métrico semi-Riemanniano, a de tensor métrico Lorentziano, a de conexão afim, a de tensor de torção, a de derivação covariante, a de transporte paralelo, a de curva geodésica, a de conexão de Levi-Civita, a de tensor de curvatura etc. Todos esses temas fazem parte da área da Matemática denominada *Geometria Diferencial* e encontram aplicações importantes em Física na *Teoria da Relatividade Geral*. Uma lista de referências bibliográficas para os assuntos aqui discutidos encontra-se na introdução ao Capítulo 35, página 1640.

36.1 Métricas Riemannianas e Semi-Riemannianas

Em tudo o que segue denotaremos por $C^\infty(M)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis com valores em \mathbb{R} definidas em uma variedade diferenciável M e por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais reais infinitamente diferenciáveis também definidos em M .

• Métricas semi-Riemannianas

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m . Seja g um campo tensorial de tipo $(0, 2)$, ou seja, uma aplicação $g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $p \in M$ a aplicação $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \ni (A, B) \mapsto g(A, B)_p$ seja bilinear, ou seja, valha

$$g(A, B + C)_p = g(A, B)_p + g(A, C)_p,$$

$$g(A + B, C)_p = g(A, C)_p + g(B, C)_p,$$

$$g(aA, B)_p = a_p g(A, B)_p,$$

$$g(A, bB)_p = b_p g(A, B)_p,$$

para todo $p \in M$, para todos $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$ e todos $a, b \in C^\infty(M)$. Um campo tensorial g de tipo $(2, 0)$ é dito ser uma *métrica semi-Riemanniana*¹, ou uma *pseudométrica Riemanniana* se for simétrico e não-degenerado, ou seja, se

$$g(A, B)_p = g(B, A)_p$$

para todo $p \in M$ e para todos $A, B \in \mathcal{X}(M)$ (simetria) e se valer para todo $p \in M$ que a condição $g(A, B)_p = 0$ é válida para todo $A \in \mathcal{X}(M)$ se e somente se B for identicamente nulo em p (não-degenerescência). Suporemos também que para cada $(A, B) \in \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ a aplicação $p \mapsto g(A, B)_p$ seja suficientemente diferenciável, eventualmente, infinitamente diferenciável.

• Métricas Riemannianas

Uma métrica semi-Riemanniana g é dita ser uma *métrica Riemanniana* se for não-negativa:

$$g(A, A)_p \geq 0,$$

para todo $p \in M$ e para todo $A \in \mathcal{X}(M)$. Métricas Riemannianas ocorrem naturalmente na Geometria de Superfícies, daí sua relevância.

Para nós, métricas Riemannianas são um caso especial de métricas semi-Riemannianas, de modo que ao fazermos afirmações gerais sobre as segundas, estas valerão também para as primeiras como caso particular.

Afirmamos que se g é uma métrica Riemanniana, então vale

$$(g(A, B)_p)^2 \leq g(A, A)_p g(B, B)_p \tag{36.1}$$

para todo $p \in M$ e para todos $A, B \in \mathcal{X}(M)$, propriedade essa conhecida como *desigualdade de Cauchy-Schwarz*. De fato, se g é uma métrica Riemanniana, então para todos $A, B \in \mathcal{X}(M)$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$ vale

$$0 \leq g(A + \lambda B, A + \lambda B)_p = \lambda^2 g(B, B)_p + 2\lambda g(A, B)_p + g(A, A)_p. \tag{36.2}$$

Caso $g(B, B)_p = 0$ a expressão (36.2) só pode ser verdadeira para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se $g(A, B)_p = 0$, em cujo caso (36.1) é trivialmente satisfeita (ambos os lados se anulam). Caso $g(B, B)_p > 0$ a expressão (36.2) fica

$$0 \leq g(B, B)_p \left(\lambda + \frac{g(A, B)_p}{g(B, B)_p} \right)^2 + \left(g(A, A)_p - \frac{(g(A, B)_p)^2}{g(B, B)_p} \right),$$

o que só pode ser verdadeiro para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se $g(A, A)_p - \frac{(g(A, B)_p)^2}{g(B, B)_p} \geq 0$, provando (36.1).

Um corolário evidente de (36.1) é que g é uma métrica Riemanniana se e somente se valerem as seguintes condições para todo $p \in M$:

1. g é simétrica: $g(A, B)_p = g(B, A)_p, \forall A, B \in \mathcal{X}(M)$,
2. g é não-negativa: $g(A, A)_p \geq 0, \forall A \in \mathcal{X}(M)$,

¹Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

3. $g(A, A)_p = 0$ se e somente se $A_p = 0$.

De fato, se g é Riemanniana 1 e 2 são satisfeitos e se $g(A, A)_p = 0$, teremos por (36.1) que $g(A, B)_p = 0$ para todo B_p , o que implica $A_p = 0$ pela não-degenerescência de g . Por outro lado, se valerem as condições 1, 2 e 3 e $g(A, B)_p = 0$ para todo B_p , tem-se, em particular, que $g(A, A)_p = 0$, o que implica $A_p = 0$ pela condição 3, acima.

• **Métricas semi-Riemannianas e formas bilineares**

Se g é uma métrica semi-Riemanniana então para cada $p \in M$ temos definida uma forma bilinear simétrica e não-degenerada em T_pM por $T_pM \times T_pM \ni (A, B) \mapsto g(A, B)_p \in \mathbb{R}$ Reciprocamente, uma forma bilinear simétrica e não-degenerada definida em cada T_pM (e que seja também diferenciável) define uma métrica semi-Riemanniana.

No caso de g ser uma métrica Riemanniana a forma bilinear simétrica e não-degenerada $g(A, B)_p$ é também positiva e, portanto, define um produto escalar (ou produto interno) em T_pM . Uma métrica Riemanniana em M , portanto, coincide com um produto escalar definido em cada espaço tangente T_pM (e que seja também diferenciável).

• **Representação em coordenadas locais**

Em uma carta local de coordenadas (que denotamos por (x^1, \dots, x^m)) podemos escrever um vetor $A \in T_pM$ como (omitiremos a dependência com o ponto p para não sobrecarregar a notação) $A_p = A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Assim, se g é uma métrica semi-Riemanniana, teremos

$$g(A, B) = g\left(A^i \frac{\partial}{\partial x^i}, B^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) A^i B^j = g_{ij} A^i B^j,$$

onde

$$g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

são as componentes (covariantes) da métrica semi-Riemanniana g na base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$ de T_pM definida pelas coordenadas locais em questão. A condição de simetria implica que $g_{ij} = g_{ji}$ para todos os índices $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Assim, a métrica semi-Riemanniana g possui $m(m+1)/2$ componentes independentes.

Alternativamente, podemos escrever

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

com o que teremos também o *pareamento*²

$$\begin{aligned} \langle g, A \otimes B \rangle &= \left\langle g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \left(A^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \otimes \left(B^l \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \right\rangle = g_{ij} A^k B^l \left\langle dx^i \otimes dx^j, \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle \\ &= g_{ij} A^k B^l \underbrace{\left\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle}_{=\delta_k^i} \underbrace{\left\langle dx^j, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle}_{=\delta_l^j} = g_{ij} A^i B^j = g(A, B), \end{aligned}$$

como esperado.

• **Transformação das componentes de uma métrica por mudanças de sistemas de coordenadas**

Em um sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^m) , para o qual teremos a base no espaço tangente T_pM dada por $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$ com $\frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial x^b}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x^b}$ (vide (35.16)), as componentes de g serão

$$g'_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x'^i}, \frac{\partial}{\partial x'^j}\right) = g\left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl}.$$

Assim,

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g'_{ij} dx'^i \otimes dx'^j,$$

²Sobre a nomenclatura. Seja V um espaço vetorial e seja V' seu dual. Seja $v' \in V'$. A função $V \ni v \mapsto v'(v)$ é muitas vezes denotada por $\langle v', v \rangle$. Para $v \in V$ e $v' \in V'$ a expressão $\langle v', v \rangle$ é denominada *pareamento* e v' e v , em uma tradução do inglês *pairing*.

com

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl}. \tag{36.3}$$

A expressão (36.3) mostra como obter as componentes de g no sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^m) a partir das componentes de g no sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^m) .

• **Métricas Riemannianas. O exemplo de superfícies regulares**

Vamos discutir um exemplo importante (também historicamente) de métricas Riemannianas, a saber, aquelas definidas sobre superfícies regulares de \mathbb{R}^n . Por conveniência, absteremo-nos na discussão deste exemplo de usar a convenção de soma de Einstein.

Seja S uma superfície regular de dimensão m em \mathbb{R}^n (com $m \leq n$) e seja $p \in S$. Na vizinhança de p a superfície S é descrita por n funções diferenciáveis $y^1(x^1, \dots, x^m), \dots, y^n(x^1, \dots, x^m)$ definidas em algum aberto \mathcal{O} de \mathbb{R}^m . Denotaremos por (x_p^1, \dots, x_p^m) as coordenadas em \mathcal{O} correspondentes ao ponto p . A aplicação diferencial

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \tag{36.4}$$

é injetora em todo \mathcal{O} . Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em uma vizinhança suficientemente pequena de p , sua restrição a S pode ser expressa como uma função das coordenadas $x^1, \dots, x^m: f(y^1(x^1, \dots, x^m), \dots, y^n(x^1, \dots, x^m))$. Se considerarmos uma curva diferenciável $x^i(t), \dots, x^m(t)$ em \mathcal{O} que passe por p em $t = 0$ teremos para a função f a expressão $F(t) \equiv f(y^1(x^1(t), \dots, x^m(t)), \dots, y^n(x^1(t), \dots, x^m(t)))$ quando restrita à imagem dessa curva em S . Assim, pela regra da cadeia,

$$\frac{dF}{dt}(0) = \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^m \frac{\partial f}{\partial y^a} \frac{\partial y^a}{\partial x^b} \dot{x}^b(0),$$

sendo as derivadas parciais calculadas em p . Considerando-se curvas como $(x_p^1, \dots, x_p^j + t, \dots, x_p^n)$ vemos que

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p = \sum_{a=1}^n \frac{\partial y^a}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^a}.$$

Os vetores $\frac{\partial}{\partial y^a}, a = 1, \dots, n$ compõem uma base de coordenadas Cartesianas do *espaço ambiente* \mathbb{R}^n . Assim, a última expressão mostra-nos como os vetores $\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p, j = 1, \dots, m$, do espaço tangente são expressos em termos dos vetores da base Cartesiana de \mathbb{R}^n . Lá vemos que as componentes de $\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p$ nessa base são dadas por $\frac{\partial y^a}{\partial x^j}, a = 1, \dots, n$.

No espaço ambiente existe um produto escalar natural definido entre os vetores: o produto escalar Euclidiano usual, dado por

$$\left\langle \sum_{a=1}^n A^a \frac{\partial}{\partial y^a}, \sum_{b=1}^n B^b \frac{\partial}{\partial y^b} \right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{a=1}^n A^a B^a.$$

Segundo esse produto escalar, temos

$$\left\langle \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{a=1}^n \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial y^a}{\partial x^j},$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Trata-se de um produto escalar restrito ao espaço tangente T_pS , o plano tangente a S em p . Portanto, esse produto escalar define um tensor métrico Riemanniano com componentes

$$g_{ij} \equiv g\left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p\right) := \left\langle \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right\rangle_{\mathbb{R}^n},$$

sendo $i, j \in \{1, \dots, m\}$, ou seja,

$$g_{ij} = \sum_{a=1}^n \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial y^a}{\partial x^j}.$$

Que g define um produto escalar (forma bilinear, simétrica, positiva e não-degenerada) em $T_p S$, segue das propriedades correspondentes do produto escalar do Euclidiano no espaço ambiente e da injetividade de (36.4).

Esse tensor métrico é denominado *tensor métrico natural* definido na superfície regular S . Trata-se do tensor métrico induzido em S pelo produto escalar Euclidiano usual do espaço ambiente \mathbb{R}^n onde S está mergulhada.

• **Signatura de métricas semi-Riemannianas**

Retornemos agora à discussão geral.

Considerando as matrizes G e G' , com elementos de matriz $(G)_{ij} = g_{ij}$ e $(G')_{ij} = g'_{ij}$, respectivamente, (36.3) indica-nos que, por transformações de coordenadas, G e G' relacionam-se por

$$G' = P^T G P, \tag{36.5}$$

onde P é a matriz com elementos de matriz $P_{ab} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^b}$. Assim, G é levada em G' por um transformação de congruência (para a definição, vide página 403).

A condição de simetria sobre uma métricas semi-Riemanniana g garante também que a matriz G possui autovalores reais e garante a possibilidade de diagonalizá-la em um ponto $q \in M$, ou seja, para $q \in M$ existe uma base em $T_q M$ tal que a matriz G_q assume uma forma diagonal³. Como g é não-degenerada, G não pode conter 0 como autovalor (justifique!).

Pela Lei da Inércia de Sylvester, Teorema 9.17, página 404, transformações de congruência, ainda que possam alterar os autovalores de G , preservam o número de autovalores positivos, o número de autovalores negativos e o número de autovalores nulos (sempre contando a degenerescência dos autovalores). Assim, como não ocorre o autovalor nulo, o número de autovalores positivos e o número de autovalores negativos são uma característica de g , ou seja, não são alterados por mudanças de coordenadas.

O par (p, n) , onde p é o número de autovalores positivos de g e n é o número de autovalores negativos de g (sempre contando a degenerescência dos autovalores) é denominado *signatura* da métrica g e é, portanto, um invariante por mudanças de sistemas de coordenadas.

Da imposição que g é não-degenerada em toda a variedade M obtém-se também que a signatura de g é constante em toda M pois, se assim não fosse, um dos autovalores teria de trocar de sinal, anulando-se, portanto, em algum ponto, devido à continuidade de g , o que violaria a condição de não-degenerescência.

O estudante há de perceber também que se trocarmos uma métrica semi-Riemanniana g por $-g$ a signatura muda de (p, n) para (n, p) .

Muitas vezes a signatura (p, n) de uma métrica semi-Riemanniana g é denotada por uma m -upla de p sinais “+” e n sinais “-”: $(\underbrace{+, \dots, +}_p, \underbrace{-, \dots, -}_n)$.

• **Forma diagonal canônica**

Seja g uma métrica semi-Riemanniana com signatura (p, n) . Em um ponto específico q é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas no qual a matriz G_q assume a forma diagonal $(\underbrace{+, \dots, +}_p, \underbrace{-, \dots, -}_n)$. De fato, como com-

entamos, podemos escolher uma base na qual G_q assume a forma diagonal $g_p = \text{diag}(d_1, \dots, d_p, -d_{p+1}, \dots, -d_{p+n})$, com $d_k > 0$ para todo k . Reescalocando-se as coordenadas x^k na forma $x^k \rightarrow \sqrt{d_k} x^k$, G_q assume a forma desejada, que denominamos *forma diagonal canônica* do tensor métrico semi-Riemanniano no ponto q . Como antes lembramos que em geral só é possível reduzir um tensor métrico à sua forma canônica em um ponto isolado, nem sempre sendo possível igualmente fazê-lo em uma vizinhança desse ponto.

• **Métricas Lorentzianas**

É muito fácil perceber que uma métrica é Riemanniana se e somente se possuir signatura $(+, \dots, +)$.

³Note-se que pode não ser possível diagonalizar cada G_q simultaneamente para todo $q \in M$ de modo contínuo.

Além de métricas com tal signatura, importantes nas Geometrias Riemannianas, há também um interesse especial por métricas com signatura $(+, -, \dots, -)$ (ou $(-, +, \dots, +)$, dependendo da convenção), pois são tais métricas que ocorrem na descrição do espaço-tempo na Teoria da Relatividade Geral. Métricas com signatura $(+, -, \dots, -)$ (ou $(-, +, \dots, +)$), são denominadas *métricas Lorentzianas*⁴.

Nestas notas adotaremos a convenção (dita “da maioria”) de considerar métricas Lorentzianas sempre com signatura $(+, -, \dots, -)$. O leitor seja, porém, advertido de que tal convenção não é universal em textos de Física, onde por vezes adota-se a convenção $(-, +, \dots, +)$. A convenção $(+, -, \dots, -)$ é mais comum na Física das Partículas Elementares e na Teoria Quântica de Campos, enquanto que a convenção $(-, +, \dots, +)$ é mais comum na Teoria da Relatividade Geral.

• **Variedades semi-Riemannianas, Riemannianas e Lorentzianas**

Uma variedade diferenciável M dotada de uma métrica semi-Riemanniana (Riemanniana, Lorentziana) g é dita ser uma *variedade semi-Riemanniana* (Riemanniana, Lorentziana, respectivamente).

Variedades semi-Riemannianas (tais como variedades Riemannianas ou Lorentzianas) serão frequentemente denotadas por um par (M, g) , com M sendo a variedade e g sendo a métrica semi-Riemanniana considerada em M .

Uma questão matematicamente importante é saber se uma variedade diferenciável M dada admite alguma métrica semi-Riemanniana com uma dada signatura. Como veremos logo abaixo, toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana, mas para métricas Lorentzianas a situação é mais restritiva: para que uma variedade diferenciável M admita uma métrica Lorentziana é necessária e suficiente ou que M seja não-compacta ou que M seja compacta, mas tenha característica de Euler nula (a esfera S^2 , por exemplo, não admite nenhuma métrica Lorentziana, por ter característica de Euler igual a 2). Como veremos, toda variedade Lorentziana compacta possui curvas tipo-tempo fechadas. Como essa é uma característica indesejada de modelos físicos do espaço-tempo (por ser o princípio de causalidade violado), variedades compactas são frequentemente desconsideradas.

• **Existência de métricas Riemannianas**

Proposição 36.1 *Toda variedade diferenciável M admite ao menos uma métrica Riemanniana.* □

Prova. Seja m a dimensão de M e $\mathcal{A} = \{(A_\lambda, h_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$ um atlas infinitamente diferenciável em M . Sejam $(x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^m)$ as coordenadas com que são descritos os pontos do aberto $A_\lambda \subset M$, de modo que para cada $p \in A_\lambda$ tenhamos em $T_p M$ uma base $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_\lambda^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_\lambda^m} \right|_p \right\}$. Para $A = A^i \frac{\partial}{\partial x_\lambda^i} \Big|_p$ e $B = B^j \frac{\partial}{\partial x_\lambda^j} \Big|_p$ definamos nessa base $g_p^\lambda(A, B) := \delta_{ij} A^i B^j$, ou seja, $(g_p^\lambda)_{ij} = \delta_{ij}$. É bastante claro que g^λ é infinitamente diferenciável e define uma métrica Riemanniana em A_λ . Com isso, temos uma métrica Riemanniana definida em cada carta local A_λ do atlas \mathcal{A} e, com isso, podemos evocar a Proposição 35.5, página 1654, e definir uma métrica g em toda M por

$$g(A, B)_p = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} P_\alpha(p) g_p^{\lambda_\alpha}(A, B), \tag{36.6}$$

onde as funções P_α compõem uma partição da unidade infinitamente diferenciável em M subordinada ao recobrimento \mathcal{A} . É elementar constatar que g é também uma métrica Riemanniana, por ser diferenciável e por valer $g(A, A) \geq 0$, sendo $g(A, A) = 0$ se e somente se $A = 0$. ■

• **Condições para a existência de métricas Lorentzianas**

A Proposição 36.1 não pode ser estendida de modo a incluir métricas semi-Riemannianas ou Lorentzianas. Ainda que seja sempre possível definir métricas Lorentzianas em cartas locais (adotando-se, por exemplo, $(g_p^\eta)_{ij} = \eta_{ij}$, com η sendo a métrica de Minkowski), a extensão (36.6) não fornece necessariamente uma métrica Lorentziana (não é garantido que se obtenha uma forma não-degenerada nem que se obtenha a signatura desejada). A proposição que segue fornece uma condição necessária e suficiente para que uma variedade admita uma métrica Lorentziana.

Proposição 36.2 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma condição necessária e suficiente para que M admita uma métrica Lorentziana é que exista um campo vetorial $V \in \mathcal{X}(M)$ com a propriedade de nunca se anular em M , ou seja, $V_p \neq 0$ para todo $p \in M$.*

⁴Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928).

Assim, uma condição necessária e suficiente para que M admita uma métrica Lorentziana é que ou M seja não-compacta ou seja compacta mas possua característica de Euler nula. \square

Prova. Seja g alguma métrica Riemanniana em M (que ao menos uma exista é garantido pela Proposição 36.1). Vamos supor que exista um campo vetorial $V \in \mathcal{X}(M)$ que nunca se anula em M . Pela hipótese $g(V, V)_p \neq 0$ para todo $p \in M$. Defina-se

$$h(A, B) := \frac{2g(A, V)g(B, V) - g(A, B)g(V, V)}{(g(V, V))^2}. \quad (36.7)$$

Vamos provar que h é uma métrica Lorentziana em M . Em primeiro lugar, h é evidentemente simétrica. Em segundo lugar, g é diferenciável, pois $g(V, V)_p \neq 0$ para todo $p \in M$ e pois todos os demais ingredientes em (36.7) o são. Em terceiro lugar, h é não-degenerada, o que se prova pelo seguinte raciocínio: se A for tal que $h(A, B) = 0$ para todo B , teremos para $B = V$ que $g(A, V) = 2g(A, V)$, o que implica $g(A, V) = 0$. Assim, $h(A, B) = -g(A, B)/g(V, V)$ para todo B e, portanto, se $h(A, B) = 0$ para todo B , teremos $g(A, B) = 0$ para todo B . Como a métrica Riemanniana g é não-degenerada, isso implica que $A = 0$, provando que h é não-degenerada.

É fácil constatar agora que $h(V, V) = 1$. Ao mesmo tempo, se W é tal que $g(W, V)_p = 0$ com $g(W, W)_p > 0$, teremos $h(W, V)_p = 0$ e $h(W, W)_p = -g(W, W)_p/g(V, V)_p < 0$. Disso conclui-se facilmente (exercício!) que h tem a signatura de uma métrica Lorentziana.

A demonstração da recíproca é mais complexa e pode ser encontrada em e.g. [245].

Vimos que uma condição necessária e suficiente para que M admita uma métrica Lorentziana é que M admita um campo vetorial que não se anule em parte alguma em M . Por teoremas bem-conhecidos da Topologia Algébrica, isso ocorrerá se e somente se M for não-compacta ou se for compacta, mas possuir característica de Euler nula. \blacksquare

• **Alguns comentários sobre notação e nomenclatura**

Façamos alguns comentários e advertências gerais antes de prosseguirmos. Em primeiro lugar, o estudante principiante não deve confundir a noção de tensor métrico, introduzida acima com a de métrica no sentido usado em Topologia (uma noção de distância entre elementos de um conjunto, vide Capítulo 27, página 1311). Com um tensor métrico Riemanniano é possível definir-se uma noção de comprimento de curvas e, com isso, uma métrica no sentido topológico, mas as duas noções não podem ser confundidas.

Comentamos também que alguns textos usam uma notação do tipo produto escalar $\langle A, B \rangle^g$ para designar $g(A, B)$. Observe-se o sup-índice g em $\langle A, B \rangle^g$. Não empregaremos essa notação para evitar confusões com o pareamento $\langle V', V \rangle$, onde V é um elemento de um espaço vetorial e V' de seu dual.

Alertamos o estudante principiante também para o seguinte ponto de nomenclatura. Métricas Lorentzianas foram no passado frequentemente denominadas *métricas pseudo-Riemannianas* (especialmente em livros de Relatividade Geral). Hoje em dia, em textos matemáticos, a expressão “métrica pseudo-Riemanniana” é sinônimo de “métrica semi-Riemanniana” no sentido que usamos à página 1704. Em verdade, a expressão “métrica pseudo-Riemanniana”, em qualquer sentido, tende lentamente ao desuso (talvez devido a um efeito psicológico nocivo no prefixo “pseudo”). As expressões “métrica Riemanniana” e “métrica Lorentziana”, como não é raro de acontecer nas Ciências, não fazem justiça aos seus verdadeiros introdutores: Gauss⁵ e Minkowski⁶, respectivamente.

• **Métricas semi-Riemannianas e medida de integração invariante em variedades**

Vamos aproveitar o ensejo para introduzir uma medida de integração invariante (por difeomorfismos que preservam orientação) em variedades. Essa breve exposição é um tanto informal e pode ser apresentada de forma muito mais geral e elegante quando discutirmos propriedades de formas diferenciais.

Seja g uma métrica Riemanniana e sejam G e G' (com $(G)_{ij} = g_{ij}$ e $(G')_{ij} = g'_{ij}$) as representações matriciais de suas componentes dois sistemas local de coordenadas (x^1, \dots, x^m) e (x'^1, \dots, x'^m) , respectivamente. Como já comentamos em (36.3) indica-nos que G e G' relacionam-se por $G' = P^T G P$, onde P é a matriz com elementos de matriz $P_{ab} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^b}$. Se denotarmos por \mathbf{g} e \mathbf{g}' os determinantes de G e G' , respectivamente, segue disso que

$$\mathbf{g}' = J^2 \mathbf{g}, \quad (36.8)$$

⁵Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855).

⁶Hermann Minkowski (1864–1909).

onde $J := \det(P)$ é o Jacobiano da matriz de mudança de coordenadas P .

Assim, se a mudança de coordenadas (x^1, \dots, x^m) e (x'^1, \dots, x'^m) possui Jacobiano positivo, segue que

$$\sqrt{|\mathbf{g}'|} dx'^1 \dots dx'^m = \sqrt{|\mathbf{g}|} dx^1 \dots dx^m,$$

pois $dx^1 \dots dx^m = J dx'^1 \dots dx'^m$. Vemos com isso que

$$\sqrt{|\mathbf{g}|} dx^1 \dots dx^m \quad (36.9)$$

provê uma medida de integração invariante por mudanças locais de coordenadas em uma variedade semi-Riemanniana orientável.

• **A “inversa” do tensor métrico**

A condição de não-degenerescência do tensor métrico implica que, em uma carta local de coordenadas (x^1, \dots, x^m) , a matriz G introduzida à página 1707, com elementos g_{ij} , possui uma inversa. Os elementos de matriz dessa inversa G^{-1} são denotados por g^{ij} , com índices superiores. Como veremos, essa distinção notacional de índices superiores e inferiores, ainda que não possua nenhum significado profundo em si, é muito conveniente. Observe-se que como G é uma matriz simétrica, G^{-1} também o é e vale a relação simetria $g^{ij} = g^{ji}$ para todos os índices i, j .

Naturalmente, $G^{-1}G = \mathbf{1}$ e $GG^{-1} = \mathbf{1}$, o que se escreve na forma

$$g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i \quad \text{e} \quad g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k. \quad (36.10)$$

Por uma mudança de sistema de coordenadas G transforma-se segundo (36.5). Logo, G^{-1} transforma-se como $G'^{-1} = P^{-1}G^{-1}(P^{-1})^T$. Os elementos de matriz de P são $P_{ab} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^b}$ e os elementos de matriz de P^{-1} são $(P^{-1})_{ab} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b}$ (verifique!). Logo, a transformação dos elementos g^{ij} é

$$g'^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} g^{kl}. \quad (36.11)$$

E. 36.1 Exercício. Verifique isso e constate que essa expressão respeita as relações (36.10), como esperado. \star

Com os elementos g^{ij} é possível definir um tensor $g^\sharp : \mathcal{X}^*(M) \times \mathcal{X}^*(M) \rightarrow \mathbb{R}$, de tipo (0, 2), definido em uma carta local por

$$g^\sharp(A_i dx^i, B_j dx^j) = g^{ij} A_i B_j, \quad (36.12)$$

ou seja,

$$g^\sharp = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (36.13)$$

Observe-se que

$$g^\sharp(dx^i, dx^j) = g^{ij}. \quad (36.14)$$

É importante notar que as expressões (36.12) e (36.13) são invariantes por mudanças de sistemas de coordenadas. É suficiente provar essa afirmação para (36.13). De fato,

$$\begin{aligned} g'^\sharp &= g'^{ij} \frac{\partial}{\partial x'^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x'^j} \stackrel{(36.11)}{=} \stackrel{(35.16)}{=} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} g^{kl} \left(\frac{\partial x^a}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^a} \right) \otimes \left(\frac{\partial x^b}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^b} \right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^a}{\partial x'^i}}_{=\delta_k^a} \underbrace{\frac{\partial x^j}{\partial x'^l} \frac{\partial x^b}{\partial x'^j}}_{=\delta_l^b} g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^a} \otimes \frac{\partial}{\partial x^b} = g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^l} = g^\sharp, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. Isso prova que g^\sharp tem uma existência intrínseca, independente do sistema de coordenadas adotado.

Agora, um pouco da nomenclatura adotada em textos de Física. As componentes de g^\sharp em uma carta local de coordenadas são (por definição) g^{ij} e são denominadas *componentes contravariantes do tensor métrico*. As componentes g_{ij} do tensor métrico são também denominadas *componentes covariantes do tensor métrico*. O tensor g é também denominado *tensor métrico covariante* e o tensor g^\sharp é também denominado *tensor métrico contravariante*.

• Elevando e abaixando índices

Por uma questão de simetria, vamos aqui denotar o tensor métrico g por g_\sharp . Temos, portanto, em uma carta local,

$$g_\sharp = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad \text{e} \quad g^\sharp = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

O tensor g_\sharp permite definir uma aplicação linear de $\mathcal{X}(M)$ em $\mathcal{X}^*(M)$ que denotamos por g_\sharp . Definimos essa aplicação linear $g_\sharp : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}^*(M)$ como sendo a aplicação linear que a cada $A \in \mathcal{X}(M)$ associa um elemento $A_\sharp \equiv g_\sharp(A) \in \mathcal{X}^*(M)$ de forma que

$$\langle A_\sharp, B \rangle = g_\sharp(A, B) \quad (36.15)$$

seja válida para todo $B \in \mathcal{X}(M)$. Em componentes de uma carta local, escrevendo $A = A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $B = B^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ e $A_\sharp = (A_\sharp)_k dx^k$, (36.15) fica $(A_\sharp)_j B^j = g_{ij} A^i B^j$, mostrando que $(A_\sharp)_j = g_{ij} A^i$.

Em resumo,

$$g_\sharp \left(A^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = g_{ij} A^i dx^j.$$

É também interessante observar que, seguindo as definições acima,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_\sharp = g^\sharp \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = g_{ij} dx^j. \quad (36.16)$$

Verifique!

Há uma construção análoga envolvendo o tensor g^\sharp . O tensor g^\sharp permite definir uma aplicação linear $g^\sharp : \mathcal{X}^*(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ como sendo a aplicação linear que a cada $B \in \mathcal{X}^*(M)$ associa um elemento $B^\sharp \equiv g^\sharp(B) \in \mathcal{X}(M)$ de forma que

$$\langle A, B^\sharp \rangle = g^\sharp(A, B) \quad (36.17)$$

seja válida para todo $A \in \mathcal{X}^*(M)$. Em componentes de uma carta local, escrevendo $A = A_i dx^i$, $B = B_j dx^j$ e $B^\sharp = (B^\sharp)^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, (36.17) fica $A_i (B^\sharp)^i = g^{ij} A_i B_j$, mostrando que $(B^\sharp)^i = g^{ij} B_j$.

Em resumo,

$$g^\sharp(B_i dx^i) = g^{ij} B_i \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

É também interessante observar que, seguindo as definições acima,

$$(dx^i)^\sharp = g^\sharp(dx^i) = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (36.18)$$

Verifique!

Como é de se esperar, as aplicações g^\sharp e g_\sharp são a inversa uma da outra. Isso é mais facilmente constatado em uma base de coordenadas. De fato, para todo i tem-se

$$g_\sharp \left(g^\sharp(dx^i) \right) \stackrel{(36.18)}{=} g^{ij} g_\sharp \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \stackrel{(36.16)}{=} \underbrace{g^{ij} g_{jk}}_{=\delta_k^i} dx^k = dx^i,$$

o que, devido à linearidade de g^\sharp e g_\sharp , implica $g_\sharp \circ g^\sharp = \text{id}_{\mathcal{X}^*(M)}$. De maneira totalmente análoga demonstra-se que $g^\sharp \circ g_\sharp = \text{id}_{\mathcal{X}(M)}$. Em função disso, (36.15) e (36.17) implicam também

$$\langle A, B \rangle = g_\sharp(A^\sharp, B) = g^\sharp(A, B_\sharp), \quad (36.19)$$

para todos $A \in \mathcal{X}^*(M)$ e $B \in \mathcal{X}(M)$.

Como vimos acima, a aplicação que leva um vetor A ao covetor A_\sharp corresponde, no que concerne às suas componentes em uma base de coordenadas, a transformar as componentes A^i nas componentes $(A_\sharp)_j = g_{ij} A^i$. Analogamente, a aplicação que leva um covetor B ao vetor B^\sharp corresponde, no que concerne às suas componentes em uma base de coordenadas, a transformar as componentes B_j nas componentes $(B^\sharp)^i = g^{ij} B_j$. Uma notação muito mais prática, encontrada amiúde em livros sobre a Teoria da Relatividade Geral, omite o símbolo \sharp das componentes dos vetores e dos covetores e permite escrever as componentes de A_\sharp e B^\sharp como $A_j = g_{ij} A^i$ e $B^i = g^{ij} B_j$, respectivamente. Assim, de um ponto de vista notacional, no que concerne às componentes, a passagem de A a A_\sharp e de B a B^\sharp consiste em abaixar e, respectivamente, elevar seus índices, transformações essas definidas pelas contrações $A_j = g_{ij} A^i$ e $B^i = g^{ij} B_j$, respectivamente, com as componentes dos tensores g_\sharp e g^\sharp , respectivamente. Essas operações são inversas uma da outra, como já comentamos. Componentes de vetores, com índices em cima, são frequentemente denominadas *componentes contravariantes* e componentes de covetores, com índices em baixo, são frequentemente denominadas *componentes covariantes*.

Como tensores são elementos de produtos tensoriais dos espaços $\mathcal{X}(M)$ e $\mathcal{X}^*(M)$, as aplicações g_\sharp e g^\sharp estendem-se também a tensores de maneira óbvia, permitindo, analogamente, definir as operações de elevar e abaixar índices tensoriais.

• Bases em $T_p M$ e bases duais em $T_p^* M$

Tomemos $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$, uma base de vetores em $T_p M$, e $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^m\}$, sua base dual de covetores em $T_p^* M$, de sorte que para o pareamento de \mathbf{e}^i e \mathbf{e}_j , valha $\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle_p = \delta_j^i$. Como em (35.18) e (35.21), escrevemos

$$\mathbf{e}_k = E_k^l \frac{\partial}{\partial x^l} \Big|_p \quad \text{e} \quad \mathbf{e}^k = E^k_l dx^l \Big|_p. \quad (36.20)$$

Sejam também o conjunto de vetores $\{\mathbf{e}^{\sharp 1}, \dots, \mathbf{e}^{\sharp m}\}$ em $T_p M$ e o conjunto de covetores $\{\mathbf{e}_{\sharp 1}, \dots, \mathbf{e}_{\sharp m}\}$ em $T_p^* M$ definidos por

$$\mathbf{e}^{k\sharp} := g^\sharp(\mathbf{e}^k) \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_{\sharp k} := g_\sharp(\mathbf{e}_k), \quad (36.21)$$

$k = 1, \dots, m$. É fácil constatar, pela invertibilidade de g_\sharp e g^\sharp que $\{\mathbf{e}^{\sharp 1}, \dots, \mathbf{e}^{\sharp m}\}$ compõe uma base em $T_p M$ e que $\{\mathbf{e}_{\sharp 1}, \dots, \mathbf{e}_{\sharp m}\}$ compõe uma base em $T_p^* M$. Por definição, teremos

$$g(\mathbf{e}^{i\sharp}, \mathbf{e}_j)_p = \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle_p = \delta_j^i \quad \text{e} \quad g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{\sharp j})_p = \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle_p = \delta_j^i. \quad (36.22)$$

Verifique! Teremos também $\langle \mathbf{e}_{\sharp j}, \mathbf{e}^{i\sharp} \rangle_p \stackrel{(36.15)}{=} g_\sharp(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}^{i\sharp})_p = g(\mathbf{e}^{i\sharp}, \mathbf{e}_j)_p \stackrel{(36.22)}{=} \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle_p = \delta_j^i$ e, portanto,

$$\langle \mathbf{e}_{\sharp j}, \mathbf{e}^{i\sharp} \rangle_p = \delta_j^i. \quad (36.23)$$

Isso estabeleceu que a base $\{\mathbf{e}_{\sharp 1}, \dots, \mathbf{e}_{\sharp m}\}$ é a base dual da base $\{\mathbf{e}^{\sharp 1}, \dots, \mathbf{e}^{\sharp m}\}$. Para uso futuro, resumindo as expressões de acima em uma linha, tem-se

$$\delta_j^i = \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle_p = g(\mathbf{e}^{i\sharp}, \mathbf{e}_j)_p = g(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_{\sharp j})_p = \langle \mathbf{e}_{\sharp j}, \mathbf{e}^{i\sharp} \rangle_p. \quad (36.24)$$

Por (36.20) e (36.21) e por (36.16) e (36.18) tem-se,

$$\mathbf{e}^{k\sharp} = \left(E^k_l g^{lm} \right) \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_p =: E^{kl} \frac{\partial}{\partial x^l} \Big|_p \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_{\sharp k} = \left(E_k^l g_{lm} \right) dx^m \Big|_p =: E_{kl} dx^l \Big|_p.$$

Em particular, valem em um ponto p ,

$$dx^{k\sharp} = g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^l} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_\sharp = g_{kl} dx^l. \quad (36.25)$$

• O tensor métrico Riemanniano usual e \mathbb{R}^n

Considere-se a variedade \mathbb{R}^n usual, com o atlas $\{(\mathbb{R}^n, \text{id})\}$, composto por uma única carta com um sistema de coordenadas Cartesianas. Dados dois campos vetoriais expressos nessa carta como $A = A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $B = B^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ a expressão

$$g(A, B) := \sum_{i=1}^n A^i B^j$$

define um tensor métrico Riemanniano em \mathbb{R}^n , como facilmente se verifica. Note-se que $g(A, B)$ é o produto escalar usual de vetores em \mathbb{R}^n , daí denominar-se esse tensor g como o *tensor métrico Riemanniano usual em \mathbb{R}^n* .

Claro está que para as componentes do tensor métrico Riemanniano usual tem-se $g_{ij} = \delta_{ij}$ e para o tensor métrico contravariante $g^{ij} = \delta^{ij} \equiv \delta_{ij}$.

No caso desse tensor métrico Riemanniano usual em \mathbb{R}^n as operações de subir e abaixar índices são triviais: $A^i = A_i$.

Se adotarmos uma nova carta de coordenadas em \mathbb{R}^n , essas componentes tornam-se, segundo (36.3) e (36.11),

$$g'_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \quad \text{e} \quad g'^{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^k}. \quad (36.26)$$

Por conveniência, evitamos aqui adotar a convenção de Einstein. As expressões (36.26) são úteis, por exemplo, quando expressamos certos operadores diferenciais, como o gradiente, o divergente e o Laplaciano, em sistemas de coordenadas que não as Cartesianas em \mathbb{R}^n . Vide Seção 36.2.4, página 1735.

E. 36.2 Exercício. Seja J a matriz $n \times n$ dada por

$$J := \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x'^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x'^n} \end{pmatrix} \quad (36.27)$$

e seja G a matriz $n \times n$ cujos elementos de matriz são $G_{ij} = g'_{ij}$, dados em (36.26). Constate por (36.26) que $G = J^T J$. Se denotarmos por g o determinante de G , teremos, portanto, $g = (\det(J))^2$. *

36.1.1 Transposição em Relação a Tensores Métricos

Seja M uma variedade diferenciável e seja $V : \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_p M$ uma aplicação linear de $\mathbb{T}_p M$ em si mesmo, de sorte que, em uma base de coordenadas $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$, tenhamos $V \frac{\partial}{\partial x^a} = V^b_a \frac{\partial}{\partial x^b}$. Naturalmente, V define um elemento de $\mathbb{T}_p M \otimes \mathbb{T}_p^* M$, um tensor de tipo $(1, 1)$, a saber, podemos identificar $V = V^b_a \frac{\partial}{\partial x^a} \otimes dx^b$.

Na Seção 35.2.3.2, página 1666, introduzimos a aplicação linear transposta $V^T : \mathbb{T}_p^* M \rightarrow \mathbb{T}_p^* M$ como a aplicação linear definida por (35.39). Vamos aqui tratar de uma noção similar de transposição associada a uma tensor métrico.

Dada uma aplicação linear $V : \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_p M$, como acima, definimos $V^\dagger : \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_p M$ como sendo a aplicação linear tal que

$$g(V^\dagger A, B)_p = g(A, VB)_p \quad (36.28)$$

para todos $A, B \in \mathbb{T}_p M$. A aplicação linear $V^\dagger : \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_p M$ é dita ser a *g-transposta*, ou *g-dual*, de $V : \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_p M$.

E. 36.3 Exercício. De (36.28) e da definição de tensor transposto em (35.39), mostre que

$$(V^\dagger A)_2 = V^T(A_2)$$

para todo $A \in \mathbb{T}_p M$, ou seja, mostre que vale $g_\sharp \circ V^\dagger = V^T \circ g_\sharp$, o que implica que

$$V^\dagger = g^\sharp \circ V^T \circ g_\sharp, \quad (36.29)$$

sendo que V^T foi definido em (35.39). *

Da definição (36.28) e da simetria de g , segue facilmente que

$$(V^\dagger)^\dagger = V. \quad (36.30)$$

Verifique!

Em coordenadas locais, escrevendo-se $A = A^a \frac{\partial}{\partial x^a}$, $B = B^b \frac{\partial}{\partial x^b}$ e $V^\dagger \frac{\partial}{\partial x^a} = (V^\dagger)^b_a \frac{\partial}{\partial x^b}$, a definição (36.28) implica que

$$(V^\dagger)^d_a = g_{ab} V^b_c g^{cd}, \quad \text{ou seja,} \quad (V^\dagger)^d_a = V^d_a. \quad (36.31)$$

E. 36.4 Exercício. Verifique! Alternativamente, use (36.29) para reobter (36.31). *

E. 36.5 Exercício. Mostre que $\text{Tr}(V^\dagger) = \text{Tr}(V)$. (36.32)

Use a primeira igualdade em (36.31). *

E. 36.6 Exercício. Mostre, usando a definição (36.28), que vale $(V_1 V_2)^\dagger = V_2^\dagger V_1^\dagger$ (36.33)

para quaisquer aplicações lineares $V_1 : \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_p M$ e $V_2 : \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_p M$. Essa identidade segue também de (36.29) usando-se (35.42). Verifique! *

• g-transposição no espaço cotangente

O que foi desenvolvido acima deixa-se facilmente generalizar para o caso de aplicações lineares agindo no espaço cotangente.

Seja $W : \mathbb{T}_p^* M \rightarrow \mathbb{T}_p^* M$ uma aplicação linear de $\mathbb{T}_p^* M$ em si mesmo, de sorte que, em uma base dual de coordenadas $\{dx^1, \dots, dx^m\}$, tenhamos $W dx^a = W^b_a dx^b$. Naturalmente, W define um elemento de $\mathbb{T}_p^* M \otimes \mathbb{T}_p M$, um tensor de tipo $(1, 1)$, a saber, podemos identificar $W = W^b_a dx^b \otimes \frac{\partial}{\partial x^a}$.

Dada uma aplicação linear $W : \mathbb{T}_p^* M \rightarrow \mathbb{T}_p^* M$, como acima, definimos $W^\dagger : \mathbb{T}_p^* M \rightarrow \mathbb{T}_p^* M$ por

$$g^\sharp(W^\dagger A, B)_p = g^\sharp(A, WB)_p \quad (36.34)$$

para todos $A, B \in \mathbb{T}_p^* M$. A aplicação linear $W^\dagger : \mathbb{T}_p^* M \rightarrow \mathbb{T}_p^* M$ é dita ser a *g-transposta*, ou a aplicação *g-dual*, de $W : \mathbb{T}_p^* M \rightarrow \mathbb{T}_p^* M$.

E. 36.7 Exercício. De (36.34) e da definição de tensor transposto em (35.40), mostre que

$$(W^\dagger A)^\sharp = W^T(A^\sharp)$$

para todo $A \in \mathbb{T}_p^* M$, ou seja, mostre que vale $g^\sharp \circ W^\dagger = W^T \circ g^\sharp$, o que implica que

$$W^\dagger = g_\sharp \circ W^T \circ g^\sharp, \quad (36.35)$$

sendo que W^T foi definido em (35.40). *

Da definição (36.28) e da simetria de g , segue facilmente que

$$(W^\dagger)^\dagger = W. \quad (36.36)$$

Verifique!

Em coordenadas locais, escrevendo-se $A = A_a dx^a$, $B = B_b dx^b$ e $W^\dagger dx^a = (W^\dagger)^b_a dx^b$, a definição (36.34) implica que

$$(W^\dagger)^a_d = g^{ab} W^c_b g_{cd}, \quad \text{ou seja,} \quad (W^\dagger)^a_d = W^a_d. \quad (36.37)$$

E. 36.8 Exercício. Verifique! Alternativamente, use (36.35) para reobter (36.37). *

E. 36.9 Exercício. Mostre que $\text{Tr}(W^\dagger) = \text{Tr}(W)$. (36.38)

Use a primeira igualdade em (36.37). *

E. 36.10 *Exercício.* Mostre, usando a definição (36.34), que vale

$$(W_1 W_2)^\dagger = W_2^\dagger W_1^\dagger \quad (36.39)$$

para quaisquer aplicações lineares $W_1 : \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_p M$ e $W_2 : \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_p M$. Essa identidade segue também de (36.35) usando-se (35.42). Verifique! \star

• **Operadores g -simétricos**

Um operador linear $V : \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_p M$ é dito ser g -simétrico se

$$g(VA, B)_p = g(A, VB)_p \quad (36.40)$$

para todos $A, B \in \mathbb{T}_p M$. Naturalmente, V é g -simétrico se e somente se $V^\dagger = V$, ou seja, se e somente suas componentes em coordenadas locais satisfizerem

$$V_a^b = V_a^b \quad \text{em cujo caso, valem também,} \quad V_{ab} = V_{ba} \quad \text{e} \quad V^{ab} = V^{ba}.$$

Um operador linear $W : \mathbb{T}_p^* M \rightarrow \mathbb{T}_p^* M$ é dito ser g -simétrico se

$$g^\sharp(WA, B)_p = g^\sharp(A, WB)_p \quad (36.41)$$

para todos $A, B \in \mathbb{T}_p^* M$. Naturalmente, W é g -simétrico se e somente se $W^\dagger = W$, ou seja, se e somente suas componentes em coordenadas locais satisfizerem

$$W_b^a = W_b^a \quad \text{em cujo caso, valem também,} \quad W_{ab} = W_{ba} \quad \text{e} \quad W^{ab} = W^{ba}.$$

• **g -transposição e uma propriedade de positividade do traço**

Vamos agora estabelecer uma consequência não-trivial das definições de acima, a qual é válida no caso de métricas Riemannianas e possui várias utilidades. Ela será empregada na discussão sobre a identidade de Raychaudhuri na Seção 36.5.1, página 1763.

Proposição 36.3 *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e seja g um tensor métrico Riemanniano em M . Então, vale*

$$\text{Tr}(V^\dagger V) \geq 0 \quad (36.42)$$

para toda aplicação linear $V : \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_p M$, sendo que $\text{Tr}(V^\dagger V) = 0$ se e somente se $V = 0$. Em termos das componentes de V em um sistema de coordenadas locais essa desigualdade diz-nos que

$$V^{ab} V_{ab} = V_a^b V_b^a \geq 0. \quad (36.43)$$

Enfatizamos que essa desigualdade não é necessariamente válida caso g não seja Riemanniano. \square

Prova. Sabemos por (35.30) que $(V^\dagger V)_a^b = (V^\dagger)_c^b V_a^c$ e, portanto, $\text{Tr}(V^\dagger V) = (V^\dagger)_c^b V_b^c$. Usando (36.31) isso se escreve como

$$\text{Tr}(V^\dagger V) = g_{cc} V_f^e g^{fb} V_b^c. \quad (36.44)$$

Para prosseguirmos, é conveniente escrever essa expressão fazendo uso da notação usual de matrizes. Para tal, definamos três matrizes $m \times m$, que denotamos por G, H e A , como sendo as matrizes cujos elementos de matriz são dados por

$$G_{ab} := g_{ab}, \quad H_{ab} := g^{ab} \quad \text{e} \quad A_{ab} := V_b^a.$$

Como se vê, abdicamos de distinguir índices em cima e em baixo. Com isso, podemos escrever (36.44) como

$$\text{Tr}(V^\dagger V) = G_{cc} A_{ef} H_{fb} A_{cb}.$$

Usando as regras usuais de operação com matrizes, o lado direito se escreve como

$$G_{cc} A_{ef} H_{fb} A_{cb} = \text{Tr}(GAHA^T) \quad (36.45)$$

onde Tr agora descreve o traço usual de matrizes $m \times m$ e A^T descreve a transposta usual da matriz A (ou seja, A^T é a matriz cujos elementos satisfazem $(A^T)_{ab} = A_{ba}$).

Observemos agora que $H = G^{-1}$ (assim foi definido o tensor métrico contravariante de componentes g^{ab} , com índices em cima). Fora isso, tanto G quanto H são matrizes simétricas, ou seja, vale que $G^T = G$ e $H^T = H$ (pois o tensor métrico é simétrico). Por fim – e este é um ponto crucial – G e H são matrizes positivas (i.e., simétricas com autovalores positivos), pois g é suposta ser uma métrica Riemanniana. Portanto, ambas possuem raízes quadradas⁷, ou seja, existem matrizes positivas e simétricas $G^{1/2}$ e $H^{1/2}$ tais que $(G^{1/2})^2 = G$ e $(H^{1/2})^2 = H$. Com isso, podemos escrever o lado direito de (36.45) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(GAHA^T) &= \text{Tr}(G^{1/2} G^{1/2} A H^{1/2} H^{1/2} A^T) = \text{Tr}\left(\left(H^{1/2} A^T G^{1/2}\right) G^{1/2} A H^{1/2}\right) \\ &= \text{Tr}\left(\left(G^{1/2} A H^{1/2}\right)^T \left(G^{1/2} A H^{1/2}\right)\right) \geq 0, \end{aligned}$$

sendo que acima usamos a propriedade cíclica do traço na segunda igualdade e o fato bem-conhecido que $\text{Tr}(M^T M) \geq 0$ para qualquer matriz $m \times m$ real M .

Isso estabeleceu que $\text{Tr}(V^\dagger V) \geq 0$. Se $\text{Tr}(V^\dagger V) = 0$, então devemos ter $G^{1/2} A H^{1/2} = 0$, o que (já que $G^{1/2}$ e $H^{1/2}$ são inversíveis) implica $A = 0$ e, portanto, $V = 0$. A relação (36.43) segue diretamente de (36.42) escrevendo-se explicitamente $\text{Tr}(V^\dagger V)$ em termos das componentes de V . \blacksquare

A Proposição 36.3 permite-nos introduzir um produto escalar (real) no espaço dos operadores lineares definidos em $\mathbb{T}_p M$, a saber:

$$\langle U, V \rangle \equiv \langle U, V \rangle_p := \text{Tr}(U^\dagger V).$$

E. 36.11 *Exercício.* Mostre que $\langle U, V \rangle$, acima, define de fato um produto escalar (real). Para provar diretamente a propriedade de simetria $\langle U, V \rangle = \langle V, U \rangle$, use (36.32) e as propriedades (36.30) e (36.33). (Lembre-se, porém, que a simetria segue da positividade e da bi-linearidade. Vide Teorema 3.1, página 201). \star

Em coordenadas locais, escreve-se

$$\langle U, V \rangle = U^{ab} V_{ab}.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (vide página 201) para esse produto escalar, tem-se que

$$\left(\text{Tr}(U^\dagger V)\right)^2 \leq \text{Tr}(U^\dagger U) \text{Tr}(V^\dagger V). \quad (36.46)$$

Em coordenadas locais, isso fica

$$\left(U^{ab} V_{ab}\right)^2 \leq \left(U^{cd} U_{cd}\right) \left(V^{ef} V_{ef}\right), \quad (36.47)$$

desigualdade essa válida, como já dissemos, no caso de métricas Riemannianas.

Tomando-se $V = \mathbb{1}$ (ou seja, $V_b^a = \delta_b^a$) em (36.46), obtém-se

$$\left(\text{Tr}(U)\right)^2 \leq m \text{Tr}(U^\dagger U), \quad \text{ou seja,} \quad \left(U_a^a\right)^2 \leq m \left(U_c^c U_c^c\right), \quad (36.48)$$

e se U for g -simétrico, isso fica

$$\left(\text{Tr}(U)\right)^2 \leq m \text{Tr}(U^2), \quad \text{ou seja,} \quad \left(U_a^a\right)^2 \leq m \left(U_c^c U_c^c\right). \quad (36.49)$$

Uma ligeira variante dessa desigualdade será obtida para um tensor U específico na discussão sobre a identidade de Raychaudhuri na Seção 36.5.1, página 1763.

⁷Vide Seção 9.5.1, página 400. Para um tratamento ainda mais geral, vide Lema 40.30, página 2113.

36.2 Conexões Afins

A noção de conexão afim tem suas origens no estudo da Geometria de Superfícies, mas foi somente com os trabalhos de Élie Cartan⁸ na década de 1920 que essa noção foi sistematizada e suas propriedades gerais estabelecidas. Essa noção é fundamental por permitir introduzir uma noção de paralelismo entre vetores de espaços tangentes distintos e por permitir formalizar a noção de curvatura no contexto de variedades diferenciáveis.

Vamos apresentar a definição formal da noção de conexão afim e algumas de suas propriedades para posteriormente discutir sua motivação à luz da noção de transporte paralelo em superfícies regulares. Preferimos essa ordem de apresentação, pois a mesma enfatiza os aspectos operacionais mais relevantes.

36.2.1 Conexões Afins em Campos Vetoriais

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e seja $\mathcal{X}(M)$ o conjunto de todos os campos vetoriais infinitamente diferenciáveis em M .

Para o que segue, recordemos também a seguinte definição. Seja $A \in \mathcal{X}(M)$ e seja $f \in C^\infty(M)$. Em (35.59), página 1674, definimos $A(f) \in C^\infty(M)$ por

$$A(f) := A^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (36.50)$$

em uma carta local de coordenadas. Essa definição é, porém, válida, em todas as cartas locais de coordenadas, dado que o lado direito é invariante por mudanças de cartas locais. Aqui A^i são as componentes de A na base definida pelas coordenadas locais: $A = A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

• Definindo a noção de conexão afim

Uma aplicação $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$, que a cada par $(A, B) \in \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ de campos vetoriais infinitamente diferenciáveis definidos em M associa um campo vetorial infinitamente diferenciável denotado por $\nabla_A B \in \mathcal{X}(M)$ é dita ser uma *conexão afim*⁹ se possuir as seguintes propriedades: para todos $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$ e todas as funções $f, g \in C^\infty(M)$ valem

$$\nabla_{fA+gB} C = f\nabla_A C + g\nabla_B C, \quad (36.51)$$

$$\nabla_A(fB) = f\nabla_A B + A(f)B \quad \text{e} \quad \nabla_A(B+C) = \nabla_A B + \nabla_A C. \quad (36.52)$$

A propriedade (36.51) afirma, em particular, que uma conexão afim $(A, B) \mapsto \nabla_A B$ é linear em sua dependência com o primeiro campo vetorial (aquele indicado como subíndice)¹⁰. A propriedade (36.52) refere-se à dependência de ∇ com o segundo campo vetorial e reúne aditividade ($\nabla_A(B+C) = \nabla_A B + \nabla_A C$) e a regra de Leibniz ($\nabla_A(fB) = f\nabla_A B + A(f)B$). Assim, a propriedade (36.52) aponta-nos para o fato de que uma conexão afim age de forma semelhante a um operador diferencial. Mais sobre isso adiante.

Muitas vezes nos referiremos a uma tripla (M, g, ∇) como composta por uma variedade diferenciável M dotada de uma métrica semi-Riemanniana g e de uma conexão afim ∇ .

• A diferença de duas conexões afins

Um ponto importante a se notar sobre as propriedades definidoras acima é que se $\nabla^{(1)}$ e $\nabla^{(2)}$ são duas conexões afins, então sua diferença $D := \nabla^{(1)} - \nabla^{(2)}$, definida como a aplicação $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \ni (A, B) \mapsto D(A, B) \in \mathcal{X}(M)$ dada por

$$D(A, B) \equiv (\nabla^{(1)} - \nabla^{(2)})_A B := \nabla_A^{(1)} B - \nabla_A^{(2)} B, \quad (36.53)$$

satisfaz,

$$D(fA + gB, C) = fD(A, C) + gD(B, C) \quad \text{e} \quad D(A, fB + gC) = fD(A, B) + gD(A, C),$$

⁸Élie Joseph Cartan (1869–1951).

⁹A razão dessa adjetivação “afim” é esclarecida na discussão que segue a eq. (36.58), página 1720.

¹⁰Em verdade, trata-se de algo além de simples linearidade, pois f e g são funções, não sendo necessariamente constantes, portanto.

para quaisquer $A, B \in \mathcal{X}(M)$ e quaisquer $f, g \in C^\infty(M)$, ou seja,

$$(\nabla^{(1)} - \nabla^{(2)})_{fA+gB} C = f(\nabla^{(1)} - \nabla^{(2)})_A C + g(\nabla^{(1)} - \nabla^{(2)})_B C,$$

$$(\nabla^{(1)} - \nabla^{(2)})_A(fB + gC) = f(\nabla^{(1)} - \nabla^{(2)})_A B + g(\nabla^{(1)} - \nabla^{(2)})_A C.$$

Verifique! Assim, D é linear na sua dependência nos dois campos vetoriais, definindo, portanto, um tensor de ordem $(1, 2)$. As componentes desse tensor serão estudadas no Exercício E. 36.12, página 1720.

• Os coeficientes de uma conexão afim

Ainda que a definição de conexão afim, apresentada acima, tenha sido introduzida de forma intrínseca, é muito importante que saibamos expressá-la em coordenadas locais. Seja $p \in M$ e seja uma carta de coordenadas locais que permita expressar os pontos de uma vizinhança de p em termos de coordenadas (x^1, \dots, x^n) . Dentro dessa carta local temos definidos os campos vetoriais diferenciáveis $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \dots, n$ que em cada ponto da carta compõe uma base no correspondente espaço tangente. Naturalmente, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$ define um campo vetorial diferenciável o qual pode também ser expresso em cada ponto em termos da base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \dots, n\}$:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (36.54)$$

Os coeficientes Γ^k_{ij} são denominados *coeficientes da conexão afim* ∇ , ou como *símbolos da conexão afim* ∇ . Alguns textos também se referem aos coeficientes Γ^k_{ij} como *símbolos de Christoffel*¹¹, mas preferimos reservar essa nomenclatura para o caso particular dos coeficientes de conexões de Levi-Civita¹² (que introduziremos adiante).

É de se notar que, por definição, os coeficientes Γ^k_{ij} são funções infinitamente diferenciáveis em M , ou seja, em cada ponto p , e em uma carta local, os coeficientes Γ^k_{ij} dependem de forma infinitamente diferenciável das coordenadas (x^1, \dots, x^n) de p . Além disso, é de se notar que, sem outras hipóteses sobre a conexão afim ∇ , esta possui n^3 coeficientes independentes.

Para melhor revelarmos o uso dos coeficientes de uma conexão afim ∇ , façamos as seguintes considerações. Sejam $A, B \in \mathcal{X}(M)$ expressos em termos dessas coordenadas locais como $A = A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $B = B^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Usando as propriedades definidoras (36.51) e (36.52) da definição de conexão afim, teremos

$$\begin{aligned} \nabla_A B &= \nabla_{A^i \frac{\partial}{\partial x^i}} B \stackrel{(36.51)}{=} A^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} B = A^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(B^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \stackrel{(36.52)}{=} A^i B^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} + A^i \frac{\partial B^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= A^i B^j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} + A^i \frac{\partial B^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned}$$

e, assim,

$$\nabla_A B = \left[A^i \frac{\partial B^k}{\partial x^i} + A^i B^j \Gamma^k_{ij} \right] \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (36.55)$$

A equação (36.55) é muito útil por permitir uma expressão concreta de uma conexão afim em uma carta local de coordenadas e é empregada amiúde na Teoria da Relatividade Geral.

A expressão (36.55) torna claro que, em cada ponto p e em uma carta local, $\nabla_A B$ depende das componentes de A e B nessa carta calculadas em p e das derivadas parciais das componentes de B em relação às coordenadas dessa carta, também calculadas em p , ou mais precisamente, da derivada direcional das componentes de B na direção de A .

Por fim, comentemos que, pela definição (36.54), podemos escrever em cada ponto p

$$\Gamma^k_{ij}(p) = \left\langle dx^k, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p, \quad (36.56)$$

¹¹Elwin Bruno Christoffel (1829–1900).

¹²Tullio Levi-Civita (1873–1941).

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ denota o pareamento entre elementos do espaço cotangente T_p^*M e do espaço tangente T_pM . É útil observar também que

$$g \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p = \Gamma^l{}_{ij}(p) g \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right)_p = g_{kl}(p) \Gamma^l{}_{ij}(p). \quad (36.57)$$

• **Alguns comentários importantes sobre a notação e a nomenclatura**

É importante que o estudante familiarize-se com outras notações frequentemente empregadas na literatura, especialmente na literatura de Física, para denotar algumas das expressões e noções que introduzimos acima.

Os elementos $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \dots, n$, de uma base local de coordenadas são frequentemente denotados por ∂_i , sendo a referência às coordenadas (x^1, \dots, x^n) apenas implícita.

A expressão $\frac{\partial B^k}{\partial x^i}$, que ocorre, por exemplo, em (36.55), e que representa a derivada parcial da k -ésima componente de um campo B em relação à i -ésima coordenada de uma carta local, é frequentemente denotada de forma simplificada por $\partial_i B^k$ ou por $B^k{}_{,i}$ (estando novamente implícito com qual sistema de coordenadas se está lidando):

$$\frac{\partial B^k}{\partial x^i} \equiv \partial_i B^k \equiv B^k{}_{,i}.$$

Se escrevermos (na carta local em questão) $\nabla_A B = (\nabla_A B)^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, vemos que

$$(\nabla_A B)^k = A^i \frac{\partial B^k}{\partial x^i} + A^i B^j \Gamma^k{}_{ij} = A^i B^k{}_{,i} + A^i B^j \Gamma^k{}_{ij},$$

que são as componentes de $\nabla_A B$ na base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \dots, n \right\}$.

Devido à propriedade (36.51) da definição de conexão afim, a expressão $\nabla_A B$ podem ser escrita como a combinação linear $A^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} B$. Muitas vezes o símbolo $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$ é simplificado para

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \equiv \nabla_i.$$

Dessa forma, escreve-se

$$\nabla_A B = A^i \nabla_i B.$$

Assim também, os coeficientes $(\nabla_i B)^k$ de $\nabla_i B$ são $(\nabla_i B)^k = \frac{\partial B^k}{\partial x^i} + B^j \Gamma^k{}_{ij}$. Na literatura, especialmente na literatura de Física, os coeficientes $(\nabla_i B)^k$ são frequentemente denotados por $B^k{}_{,i}$. Assim,

$$B^k{}_{,i} = \frac{\partial B^k}{\partial x^i} + B^j \Gamma^k{}_{ij} = \partial_i B^k + B^j \Gamma^k{}_{ij} = B^k{}_{,i} + B^j \Gamma^k{}_{ij}.$$

A componente $(\nabla_i B)^k$ é também denotada por $\nabla_i B^k$, ou seja, $\nabla_i B^k \equiv B^k{}_{,i}$.

Resumindo,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} B = \nabla_i B = (\nabla_i B)^k \frac{\partial}{\partial x^k} = (\nabla_i B^k) \frac{\partial}{\partial x^k} = B^k{}_{,i} \frac{\partial}{\partial x^k},$$

ou

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} B = \nabla_i B = (\nabla_i B)^k \partial_k = (\nabla_i B^k) \partial_k = B^k{}_{,i} \partial_k,$$

com

$$(\nabla_i B)^k = \nabla_i B^k = B^k{}_{,i} = \frac{\partial B^k}{\partial x^i} + B^j \Gamma^k{}_{ij} = \partial_i B^k + B^j \Gamma^k{}_{ij} = B^k{}_{,i} + B^j \Gamma^k{}_{ij}.$$

O símbolo ∇_i é denominado *operador de derivação covariante* em relação à i -ésima coordenada. O símbolo ∇_A é denominado *operador de derivação covariante* ao longo do campo A . A expressão $\nabla_i B$ é denominada a *derivada covariante* do campo B em relação à i -ésima coordenada. A expressão $\nabla_i B^k$ ou $B^k{}_{,i}$ é denominada a *derivada covariante* da k -ésima coordenada do campo B em relação à i -ésima coordenada. Com um certo abuso de linguagem, $\nabla_i B^k$ e $B^k{}_{,i}$ são também ditas serem a *derivada covariante* do campo B , o que é natural, já que $\nabla_i \left(B^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = (\nabla_i B^k) \frac{\partial}{\partial x^k} = B^k{}_{,i} \frac{\partial}{\partial x^k}$.

• **A transformação dos coeficientes de uma conexão afim por mudanças de cartas de coordenadas**

Vamos agora discutir como os coeficientes de uma conexão afim transformam-se quando de uma mudança de sistema de coordenadas. Em dois sistemas de coordenadas (x^1, \dots, x^n) e (x'^1, \dots, x'^n) os coeficientes de uma conexão afim ∇ são dados por

$$\Gamma^k{}_{ij}(p) = \left\langle dx^k, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p \quad \text{e} \quad \Gamma'^k{}_{ij}(p) = \left\langle dx'^k, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x'^i}} \frac{\partial}{\partial x'^j} \right\rangle_p,$$

respectivamente. Vide (36.56). Vale, portanto,

$$\begin{aligned} \Gamma'^k{}_{ij}(p) &= \left\langle dx'^k, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x'^i}} \frac{\partial}{\partial x'^j} \right\rangle_p = \left\langle \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} dx^a, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x'^i}} \left(\frac{\partial x^b}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^b} \right) \right\rangle_p \\ &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \left\langle dx^a, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x'^i}} \left(\frac{\partial x^b}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^b} \right) \right\rangle_p \\ (36.52) \quad &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \left\langle dx^a, \left(\frac{\partial^2 x^b}{\partial x'^i \partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^b} + \frac{\partial x^b}{\partial x'^i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x'^i}} \frac{\partial}{\partial x^b} \right) \right\rangle_p \\ &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^b}{\partial x'^i \partial x'^j} \underbrace{\left\langle dx^a, \frac{\partial}{\partial x^b} \right\rangle_p}_{=\delta_a^b} + \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x'^j} \left\langle dx^a, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x'^i}} \frac{\partial}{\partial x^b} \right\rangle_p \\ &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial x'^i \partial x'^j} + \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x'^j} \left\langle dx^a, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x'^i}} \frac{\partial}{\partial x^b} \right\rangle_p \\ (36.51) \quad &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial x'^i \partial x'^j} + \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x'^j} \frac{\partial x^c}{\partial x'^i} \left\langle dx^a, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^c}} \frac{\partial}{\partial x^b} \right\rangle_p \\ &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial x'^i \partial x'^j} + \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x'^j} \frac{\partial x^c}{\partial x'^i} \Gamma^a{}_{cb}(p). \end{aligned}$$

Assim, reescrevendo um pouco a última expressão, a transformação entre os coeficientes da conexão afim ∇ é dada por

$$\Gamma'^k{}_{ij} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x'^i} \frac{\partial x^c}{\partial x'^j} \Gamma^a{}_{bc} + \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial x'^i \partial x'^j}. \quad (36.58)$$

O primeiro termo, $\frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x'^i} \frac{\partial x^c}{\partial x'^j} \Gamma^a{}_{bc}$, corresponde à fórmula usual de transformação de tensores do tipo (2, 1), mas há um segundo termo $\frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial x'^i \partial x'^j}$, independente dos coeficientes Γ , que mostra que os coeficientes de uma conexão afim não se transformam como um tensor, mas sofrem uma transformação afim¹³, daí ∇ ser chamada de *conexão afim*.

E. 36.12 Exercício. Sejam $\nabla^{(1)}$ e $\nabla^{(2)}$ duas conexões afins cujos coeficientes em uma carta local sejam $(\Gamma^{(1)})^k{}_{ij}$ e $(\Gamma^{(2)})^k{}_{ij}$, respectivamente. Seja $D = \nabla^{(1)} - \nabla^{(2)}$ o tensor definido em (36.53), dado pela diferença das duas conexões. Escrevamos $D(A, B)$ em coordenadas locais como $D(A, B) = A^i B^j D^k{}_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$, com $D^k{}_{ij}$ sendo as componentes de D nessas coordenadas. Mostre que $D^k{}_{ij} = (\Gamma^{(1)})^k{}_{ij} - (\Gamma^{(2)})^k{}_{ij}$ e conclua, usando (36.58), que a expressão para a transformação das componentes do tensor D por mudança de coordenadas é

$$D'^k{}_{ij} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x'^i} \frac{\partial x^c}{\partial x'^j} D^a{}_{bc}.$$

✱

• **O caráter local de uma conexão afim**

A expressão (36.55), que representa a expressão local da conexão afim ∇ em uma carta local de coordenadas, permite discutir um aspecto muito relevante da noção de conexão afim, a saber, o seu caráter local. Se h for uma carta de

¹³Uma transformação afim em \mathbb{R}^3 , por exemplo, é uma transformação que leva um vetor \vec{x} em $R\vec{x} + \vec{y}$, onde R é uma matriz de rotação. Assim, trata-se de uma transformação envolvendo uma rotação e uma translação. Compare-se com (36.58).

coordenadas para uma vizinhança aberta de um ponto $p \in M$, podemos escrever (36.55) em p de uma forma um tanto mais precisa (e talvez pedante) como

$$\nabla_A B(p) = \left[A^i(h(p)) \frac{\partial B^k}{\partial x^i}(h(p)) + A^i(h(p)) B^j(h(p)) \Gamma^k_{ij}(h(p)) \right] \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(p)}.$$

com $h(p) = (x^1, \dots, x^m)$, as coordenadas de p na carta local. Da contemplação dos termos dessa expressão, ficam bastante claras os seguintes fatos concernentes à dependência de $\nabla_A B(p)$ em A e B : $1^\circ \nabla_A B(p)$ depende dos valores das componentes de A no ponto p (mais precisamente, dos valores de suas componentes em sua representação local em $h(p)$); $2^\circ \nabla_A B(p)$ depende dos valores das componentes de B no ponto p (dos valores de suas componentes em sua representação local em $h(p)$) e dos valores da derivada direcional de B na direção A , tal como expresso no termo $A^i \frac{\partial B^k}{\partial x^i}$, sempre no ponto $h(p)$.

Essas considerações nos mostram que se $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{h(p)}$ é um vetor em $T_p M$ (definido, portanto, em apenas um ponto) a expressão $\nabla_v B(p)$ está bem definida enquanto

$$\nabla_v B(p) := \left[v^i \frac{\partial B^k}{\partial x^i}(h(p)) + v^i B^j(h(p)) \Gamma^k_{ij}(h(p)) \right] \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(p)}. \quad (36.59)$$

No sentido expresso em (36.59), uma conexão afim ∇ pode, portanto, ser também considerada para cada $p \in M$ enquanto uma aplicação $\nabla : T_p M \times \mathcal{X}(M) \rightarrow T_p M$.

Como antes, a dependência de $\nabla_v B(p)$ em B se dá nas componentes de B em $h(p)$ na carta local e na derivada direcional de B na direção de v , também em $h(p)$ e na carta local.

Para futura referência, observemos que (36.59) implica

$$\left(\nabla_v \frac{\partial}{\partial x^a} \right) (p) = v^i \Gamma^k_{ia}(h(p)) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(p)}. \quad (36.60)$$

• **A noção de derivação covariante ao longo de curvas diferenciáveis**

Seja $c : I \ni t \mapsto c(t) \in M$ uma curva diferenciável em M , onde I é algum intervalo de \mathbb{R} . Seja V um campo vetorial definido ao longo da imagem de c e seja $V \circ c(t) = V(c(t)) \in T_{c(t)} M$, $t \in I$. Se $t \mapsto V \circ c(t)$ for k -vezes diferenciável, dizemos que V é um campo vetorial k -vezes diferenciável definido ao longo de c . No que segue vamos frequentemente identificar V e $V \circ c$ escrevendo, para evitar tornar a notação desnecessariamente complicada, $V(t)$ em lugar de $V(c(t))$. Denotemos por $\mathcal{V}^k(c)$ a coleção dos campos vetoriais k -vezes diferenciáveis definido ao longo de c .

Uma *derivação covariante* ao longo da curva diferenciável c é uma aplicação que a cada campo vetorial em $V \in \mathcal{V}^1(c)$ associa um campo vetorial ao longo de c , denotado por $\frac{D}{dt} V$, de forma que valha

$$\frac{D}{dt}(fV)(t) = \frac{df}{dt}(t)V(t) + f(t)\frac{D}{dt}V(t) \quad \text{e} \quad \frac{D}{dt}(V+W)(t) = \frac{D}{dt}V(t) + \frac{D}{dt}W(t) \quad (36.61)$$

para qualquer função diferenciável $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e quaisquer $V, W \in \mathcal{V}^1(c)$.

De fundamental relevância são campos vetoriais sobre a curva c formados por restrições de campos vetoriais sobre M à curva c . Seja $Y \in \mathcal{X}(M)$ um campo vetorial que a cada $p \in M$ associa $Y(p) \in T_p M$. Então, $I \ni t \mapsto Y(c(t)) \in T_{c(t)} M$ define um elemento de $\mathcal{V}^1(c)$.

Uma derivação covariante é dita ser uma *derivação covariante associada a uma conexão afim* ∇ se valer

$$\frac{D}{dt} Y(c(t)) = (\nabla_{\dot{c}(t)} Y)(c(t)) \quad (36.62)$$

para todo $Y \in \mathcal{X}(M)$. Aqui, a conexão afim ∇ é considerada enquanto uma aplicação $\nabla : T_p M \times \mathcal{X}(M) \rightarrow T_p M$ com $p \in M$, tal como expresso em (36.59). É um exercício elementar, deixado ao estudante, constatar que a expressão (36.62), para a derivação covariante, satisfaz as condições (36.61).

Uma derivação covariante associada a uma conexão afim ao longo de uma curva diferenciável c depende da curva c e da conexão ∇ , de modo que, um tanto pedantemente, dever-se-ia denotá-la, por exemplo, por $\frac{D}{dt}{}^c \nabla$, o que não fazermos para evitar sobrecarregar ainda mais a já pesada notação.

Em Geometria Riemanniana e na Teoria da Relatividade, praticamente só há interesse em derivações covariantes que sejam associadas a uma conexão afim ∇ e, em acordo com isso, só consideraremos doravante derivações covariantes desse tipo e que, portanto, satisfaçam (36.61) e (36.62). Afirmando que, dada uma conexão afim ∇ , uma tal derivação covariante é fixada univocamente pelas condições (36.61) e (36.62). Consideremos uma carta local onde escrevemos as coordenadas da curva c como $h(c(t)) = (c^1(t), \dots, c^m(t))$ e $\dot{c}(t) = \dot{c}^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))}$. Nessa carta escrevemos também $V(c(t)) = V^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))}$. Teremos,

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} V(t) &= \frac{D}{dt} \left(V^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))} \right) \stackrel{(36.61)}{=} \frac{dV^k}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))} + V^k(t) \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))} \\ &\stackrel{(36.62)}{=} \frac{dV^k}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))} + V^k(t) \left(\nabla_{\dot{c}(t)} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) (c(t)) \\ &\stackrel{(36.60)}{=} \frac{dV^k}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))} + V^j(t) \dot{c}^i(t) \Gamma^k_{ij}(h(c(t))) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{D}{dt} V(t) = \left[\frac{dV^k}{dt}(t) + \dot{c}^i(t) V^j(t) \Gamma^k_{ij}(h(c(t))) \right] \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))} \quad (36.63)$$

é a expressão local para a derivação covariante dada em (36.62).

• **Transportar paralelamente ao longo de uma curva segundo uma conexão afim**

Seja ∇ uma conexão afim, seja $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável na variedade M e seja $V : I \ni t \mapsto V(t) \in T_{c(t)} M$ um campo diferenciável sobre a curva c . Seja $\frac{D}{dt} V$ a derivação covariante associada a ∇ ao longo de c . Dizemos que V é *transportado paralelamente ao longo de c segundo a conexão afim* ∇ se $\frac{D}{dt} V(t) = 0$ para todo $t \in I$.

Seja p um ponto da curva c e suponhamos que a parametrização dessa curva é tal que $p = c(0)$. Se V é transportado paralelamente segundo ∇ , então se tomarmos uma carta local de coordenadas em torno de p , teremos

$$\frac{dV^k}{dt}(t) + \dot{c}^i(t) V^j(t) \Gamma^k_{ij}(h(c(t))) = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

para todo t em um intervalo $(-a, a)$, com $a > 0$. Trata-se de um sistema de m equações diferenciais ordinárias lineares (m é a dimensão de M). Para uma condição inicial $V(0) = V_0 \in T_p M$, com $V_0 = V_0^k \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p$, a teoria das equações diferenciais ordinárias garante-nos¹⁴ a existência e a unicidade de soluções desse sistema dentro de algum intervalo $(-a_0, a_0)$, $0 < a_0 \leq a$, sendo que a_0 pode também depender da condição inicial V_0 .

A solução $V(t)$ do sistema acima com a condição inicial $V_0 \in T_p M$ é dita ser o *transporte paralelo* do vetor $V_0 \in T_p M$ ao longo da curva c . Os teoremas de existência de soluções mencionados acima garantem-nos que sempre é possível transportar paralelamente qualquer vetor ao longo de um trecho (eventualmente “pequeno”, mas não-vazio) de qualquer curva diferenciável.

36.2.1.1 Conexões Afins em Campos Tensoriais

Até o momento apresentamos a definição de conexão afim enquanto operador agindo em campos vetoriais. Nosso propósito agora é estender a definição a campos tensoriais gerais. Começamos definindo a noção de conexão agindo em campos escalares, passando a campos covetoriais para, ao final, estendermos a definição a campos tensoriais gerais. As duas ideias condutoras das generalizações e extensões são a associação com a noção de derivação covariante ao longo de curvas e a ideia de que operadores de derivação devem satisfazer a regra de Leibniz.

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável ($f \in C^1(M)$) definida em M assumindo valores em \mathbb{R} e seja $A \in \mathcal{X}(M)$. Definimos $\nabla_A f$ por

$$\nabla_A f := A(f) \quad (36.64)$$

¹⁴Vide Teorema de Picard-Lindelöf, Teorema 11.2, página 513. Vide também a generalização expressa no Teorema 28.4, página 1386.

cuja expressão local é

$$\nabla_A f = A^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

É claro que, com essa definição, ∇ é uma aplicação do tipo $\nabla : \mathcal{X}(M) \times C^1(M) \rightarrow C^1(M)$. Apesar da natureza distinta das conexões afins anteriormente definidas como aplicações $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ continuaremos a denotá-las pelo símbolo ∇ . Claro é também que ∇ satisfaz

$$\nabla_{g_1 A_1 + g_2 A_2} f = g_1 \nabla_{A_1} f + g_2 \nabla_{A_2} f, \quad (36.65)$$

$$\nabla_A(fg) = f \nabla_A g + g \nabla_A f \quad \text{e} \quad \nabla_A(f+g) = \nabla_A f + \nabla_A g \quad (36.66)$$

para quaisquer $A, A_1, A_2 \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g, g_1, g_2 \in C^1(M)$.

Vamos agora estender a definição a campos covetoriais. Sejam $A, B \in \mathcal{X}(M)$ campos vetoriais e $\omega \in \mathcal{X}^*(M)$ um campo covetorial. Definimos $\nabla_A \omega$ de sorte que valha a seguinte relação:

$$\nabla_A(\langle \omega, B \rangle) = \langle \nabla_A \omega, B \rangle + \langle \omega, \nabla_A B \rangle. \quad (36.67)$$

Observe-se que a imposição dessa regra corresponde à imposição da regra de Leibniz para o emparelhamento $\langle \omega, B \rangle$. Além disso, observe-se que $\langle \omega, B \rangle$ é uma função escalar diferenciável e, portanto, $\nabla_A(\langle \omega, B \rangle) = A(\langle \omega, B \rangle)$, de acordo com a definição de acima. Fora isso, $\nabla_A B$ já foi definido previamente quando definimos conexões sobre campos vetoriais. Logo, (36.67) corresponde a definir-se $\nabla_A \omega$ de sorte que

$$\langle \nabla_A \omega, B \rangle = A(\langle \omega, B \rangle) - \langle \omega, \nabla_A B \rangle$$

seja válida para todo $B \in \mathcal{X}(M)$. Em coordenadas locais o lado direito é

$$A^i \frac{\partial(\omega_k B^k)}{\partial x^i} - \omega_k A^i \frac{\partial B^k}{\partial x^i} - \omega_k A^i B^j \Gamma^k_{ij} = B^k A^i \frac{\partial \omega_k}{\partial x^i} - \omega_k A^i B^j \Gamma^k_{ij}.$$

Logo, a expressão local de $\nabla_A \omega$ é

$$\nabla_A \omega = \left[A^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \omega_k A^i \Gamma^k_{ij} \right] dx^j. \quad (36.68)$$

Segue disso que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^k = -\Gamma^k_{ij} dx^j \quad \text{e, portanto,} \quad \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^k, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = -\Gamma^k_{ij}.$$

Comparando a (36.56), vemos que

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^k, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = - \left\langle dx^k, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle. \quad (36.69)$$

Com isso, definiu-se ∇ enquanto aplicação do tipo $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}^*(M) \rightarrow \mathcal{X}^*(M)$. Suas propriedades básicas são:

$$\nabla_{g_1 A_1 + g_2 A_2} \omega = g_1 \nabla_{A_1} \omega + g_2 \nabla_{A_2} \omega, \quad (36.70)$$

$$\nabla_A(f\omega) = f \nabla_A \omega + A(f)\omega \quad \text{e} \quad \nabla_A(\omega_1 + \omega_2) = \nabla_A \omega_1 + \nabla_A \omega_2 \quad (36.71)$$

para quaisquer $A, A_1, A_2 \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g_1, g_2 \in C^1(M)$ e $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{X}^*(M)$.

Com os ingredientes acima podemos agora apresentar a definição de ∇ agindo sobre campos tensoriais. O guia para a definição é a regra de Leibniz, que impomos da seguinte forma: se T_1 e T_2 são campos tensoriais, então assumimos ser válido que

$$\nabla_A(T_1 \otimes T_2) := (\nabla_A T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_A T_2).$$

Isso permite-nos definir recorrentemente ∇_A aplicado a qualquer campo tensorial de qualquer ordem. Seja T um campo tensorial de tipo (a, b) , mais especificamente, com $T_p \in (\otimes^a_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_p M)(\otimes^b_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_p^* M)$. Em uma carta (U, h) , com $p \in U$,

escrevemos

$$\begin{aligned} (\nabla_A T)_p &= \nabla_A \left(T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}} \right)_{h(p)} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^{i_a}} \Big|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+1}} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+b}} \\ &+ T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}}(h(p)) \left[\sum_{k=1}^a \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \Big|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \left(\nabla_A \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \Big|_{h(p)} \right) \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^{i_a}} \Big|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+1}} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+b}} \right. \\ &\left. + \sum_{l=a+1}^{a+b} \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \Big|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^{i_a}} \Big|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+1}} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \left(\nabla_A dx^{i_l}_{h(p)} \right) \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+b}} \right]. \quad (36.72) \end{aligned}$$

Agora,

$$\nabla_A \left(T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}} \right)_{h(p)} = A^i(h(p)) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}} \right)_{h(p)},$$

$$\nabla_A \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \Big|_{h(p)} = A^i(h(p)) \Gamma^j_{i_k} (h(p)) \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \Big|_{h(p)},$$

$$\nabla_A dx^i_{h(p)} = -A^i(h(p)) \Gamma^i_{i_l} (h(p)) dx^j_{h(p)}$$

e, com isso, omitindo-se por simplicidade o ponto $h(p)$ da expressão, temos

$$\begin{aligned} (\nabla_A T)_p &= A^i \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}} \right) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^{i_a}} \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+1}} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+b}} \right. \\ &+ T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}} \left[\sum_{k=1}^a \Gamma^j_{i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^{i_a}} \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+1}} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+b}} \right. \\ &\left. \left. - \sum_{l=a+1}^{a+b} \Gamma^i_{i_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^{i_a}} \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+1}} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_l} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+b}} \right] \right\}. \quad (36.73) \end{aligned}$$

Lê-se disso que as componentes de $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} T \equiv \nabla_i T$ na base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^{i_a}} \Big|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+1}}_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} dx^{i_{a+b}}_{h(p)} \right\}$ são dadas por

$$\left(T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}} \right)_{;i} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}} \right) + \sum_{k=1}^a T^{i_1 \dots j_k \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}} \Gamma^i_{j_k} - \sum_{l=a+1}^{a+b} T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots j_l \dots i_{a+b}} \Gamma^j_{i_l}, \quad (36.74)$$

onde $T^{i_1 \dots j_k \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}}$ significa que o índice i_k é substituído pelo índice j_k e analogamente para $T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots j_l \dots i_{a+b}}$.

E. 36.13 Exercício. Verifique cuidadosamente a validade das expressões acima. ✦

• O caso do tensor métrico

De particular relevância é o cálculo de uma conexão afim sobre o tensor métrico. De acordo com (36.74), temos para as componentes covariantes e contravariantes em uma carta local

$$(g_{kl})_{;i} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - g_{jl} \Gamma^j_{ik} - g_{kj} \Gamma^j_{il}, \quad (36.75)$$

$$(g^{kl})_{;i} = \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i} + g^{jl} \Gamma^k_{ij} + g^{kj} \Gamma^l_{ij}. \quad (36.76)$$

Se $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$, temos, com uso repetido da regra de Leibniz para as conexões,

$$\nabla_A(g(B, C)) = \nabla_A\langle g, B \otimes C \rangle = \langle \nabla_A g, B \otimes C \rangle + \langle g, (\nabla_A B) \otimes C \rangle + \langle g, B \otimes (\nabla_A C) \rangle.$$

Agora, $g(B, C)$ é uma grandeza escalar e, portanto, $\nabla_A(g(B, C)) = A(g(B, C))$, do que segue que

$$\langle \nabla_A g, B \otimes C \rangle = A(g(B, C)) - \langle g, (\nabla_A B) \otimes C \rangle - \langle g, B \otimes (\nabla_A C) \rangle. \quad (36.77)$$

Faremos uso dessa relação adiante quando tratarmos das chamadas conexões métricas.

36.2.2 O Tensor de Torção

• A conexão dual a uma conexão

Seja $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ uma conexão afim em M . Afirmamos que a expressão

$$\tilde{\nabla}_A B := \nabla_B A + [A, B]$$

também define uma nova conexão afim $\tilde{\nabla} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ em M , que denominamos *conexão dual* à conexão afim ∇ . De fato, para $f, g \in C^\infty(M)$ e $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$, tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{fA+gB} C &= \nabla_C(fA+gB) + [fA+gB, C] \\ &\stackrel{(36.52)}{=} f\nabla_C A + g\nabla_C B + C(f)A + C(g)B + [fA+gB, C] \\ &\stackrel{(35.62)}{=} f\nabla_C A + g\nabla_C B + C(f)A + C(g)B - C(f)A - C(g)B + f[A, C] + g[B, C] \\ &= f\nabla_C A + f[A, C] + g\nabla_C B + g[B, C] \\ &= f\tilde{\nabla}_A C + g\tilde{\nabla}_B C, \end{aligned}$$

provando que a propriedade (36.51) é satisfeita por $\tilde{\nabla}$ e

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_A(fB+gC) &= \nabla_{fB+gC} A + [A, fB+gC] \\ &\stackrel{(36.51)}{=} f\nabla_B A + g\nabla_C A + [A, fB+gC] \\ &\stackrel{(35.62)}{=} f\nabla_B A + g\nabla_C A + A(f)B + A(g)C + f[A, B] + g[A, C] \\ &= f\tilde{\nabla}_A B + g\tilde{\nabla}_A C + A(f)B + A(g)C, \end{aligned}$$

provando que a propriedade (36.52) é satisfeita por $\tilde{\nabla}$.

E. 36.14 *Exercício (fácil).* Mostre que $\tilde{\tilde{\nabla}} = \nabla$, ou seja, a conexão dual à conexão dual a ∇ é a própria conexão ∇ . ✦

• O tensor de torção

A diferença

$$T := \nabla - \tilde{\nabla} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M) \quad (36.78)$$

é um tensor, de acordo com os comentários da página 1717 sobre a diferença entre duas conexões afins. Esse tensor é denominado *tensor de torção* associado à conexão afim ∇ . Assim, para $A, B \in \mathcal{X}(M)$, temos

$$T(A, B) := \nabla_A B - \tilde{\nabla}_A B = \nabla_A B - \nabla_B A - [A, B]. \quad (36.79)$$

Essa expressão permite uma interpretação ligeira do significado do tensor de torção, ao mostrar que $T(A, B)$ “mede” o quanto a diferença $\nabla_A B - \nabla_B A$ difere do comutador $[A, B]$. Da expressão (36.79) é evidente que T é antissimétrico:

$$T(A, B) = -T(B, A).$$

Dada uma carta de coordenadas locais onde a conexão ∇ tenha coeficientes Γ^k_{ij} , teremos (vide (36.55)) $\nabla_A B = \left[A^i \frac{\partial B^k}{\partial x^i} + A^i B^j \Gamma^k_{ij} \right] \frac{\partial}{\partial x^k}$. Para a conexão $\tilde{\nabla}$ teremos na mesma carta de coordenadas

$$\tilde{\nabla}_A B := \left[A^i \frac{\partial B^k}{\partial x^i} + A^i B^j \Gamma^k_{ji} \right] \frac{\partial}{\partial x^k},$$

expressão que difere de (36.55) pela troca $\Gamma^k_{ij} \rightarrow \Gamma^k_{ji}$. Assim, concluímos que os coeficientes da conexão afim $\tilde{\nabla}$ são $\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

E. 36.15 *Exercício importante.* Prove as afirmações de acima. ✦

Como consequência, valerá em coordenadas locais,

$$T(A, B) = \nabla_A B - \tilde{\nabla}_A B = A^i B^j \left(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Assim, as componentes de T na carta local considerada serão $T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$ (vide Exercício E. 36.12, página 1720) e teremos $T(A, B) = A^i B^j T^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$. É evidente que $T^k_{ij} = -T^k_{ji}$, o que expressa a antissimetria do tensor de torção. Disso segue que o tensor de torção tem $\frac{n(n-1)}{2}$ componentes independentes.

Tal como no Exercício E. 36.12, página 1720, usando (36.58) podemos obter a expressão para a transformação das componentes do tensor de torção por mudança de coordenadas:

$$T'^k_{ij} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x'^i} \frac{\partial x^c}{\partial x'^j} T^a_{bc}. \quad (36.80)$$

36.2.3 Tipos Especiais de Conexões Afins

Vamos agora descrever os tipos de conexões afins de maior interesse, as conexões simétricas (ou livres de torção), as conexões métricas (ou Riemannianas) e, talvez de maior relevância, as conexões de Levi-Civita (que são simultaneamente métricas e simétricas). Propriedades básicas desses tipos de conexões serão também apresentadas.

36.2.3.1 Conexões Simétricas (ou Livres de Torção)

É útil observar que, por (36.79), podemos escrever, para uma conexão afim geral,

$$\nabla_A B - \nabla_B A = [A, B] + T(A, B). \quad (36.81)$$

Uma conexão afim ∇ é dita ser uma *conexão simétrica*, ou *livre de torção*, se o tensor de torção associado a si for identicamente nulo, ou seja, se para todos $A, B \in \mathcal{X}(M)$ valer

$$\nabla_A B - \nabla_B A = [A, B]. \quad (36.82)$$

Impor que o tensor de torção seja nulo significa evidentemente impor que suas componentes são nulas em um sistema de coordenadas (e, portanto, em todos). Assim, uma conexão afim ∇ é dita ser simétrica se e somente se seus coeficientes satisfizerem em todos os pontos da variedade

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$$

para todos os índices i, j, k , em um sistema de coordenadas (e, portanto, em todos). Uma conexão simétrica possui $\frac{n^2(n+1)}{2}$ coeficientes independentes (justifique!).

• **O Lema de Simetria**

Se M é uma variedade diferenciável de dimensão n , podemos representar uma superfície bidimensional conexa em M através de uma função bijetora $S : \mathcal{O} \rightarrow M$, onde \mathcal{O} é um aberto conexo de \mathbb{R}^2 . Para cada $(u, v) \in \mathcal{O}$ o ponto associado por S é $S(u, v) \in M$. A superfície assim definida será também denotada por S . Se p é um ponto de S e (A, h) é uma carta local de coordenadas em M com $p \in A$, a aplicação $h \circ S : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\mathcal{O} \ni (u, v) \mapsto h(S(u, v)) = (x^1(u, v), \dots, x^n(u, v))$ descreve uma superfície bidimensional em $A \subset \mathbb{R}^n$. Para cada v fixo, $u \mapsto S(u, v)$ descreve uma curva em M cujo vetor tangente denotamos por $\frac{\partial S}{\partial u} \in \mathbb{T}_p M$ com $p = S(u, v)$. Analogamente, para cada u fixo, $v \mapsto S(u, v)$ descreve uma curva em M cujo vetor tangente denotamos por $\frac{\partial S}{\partial v} \in \mathbb{T}_p M$. Esses vetores são dados na representação definida pela carta local (A, h) (com $p \in A$) por

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \sum_{a=1}^n \frac{\partial x^a}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^a} \Big|_p \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial v} = \sum_{b=1}^n \frac{\partial x^b}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x^b} \Big|_p,$$

com as funções $x^a(u, v)$ definidas acima. Ao longo das curvas de u constante e de v constante podemos também definir as derivadas covariantes

$$\frac{D}{\partial u} = \nabla_{\frac{\partial S}{\partial u}} = \nabla_{\sum_{a=1}^n \frac{\partial x^a}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^a}} = \sum_{a=1}^n \frac{\partial x^a}{\partial u} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}}$$

e

$$\frac{D}{\partial v} = \nabla_{\frac{\partial S}{\partial v}} = \nabla_{\sum_{b=1}^n \frac{\partial x^b}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x^b}} = \sum_{b=1}^n \frac{\partial x^b}{\partial v} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^b}}.$$

O lema técnico a seguir será empregado em diversas manipulações algébricas.

Lema 36.1 (Lema de Simetria) *Se ∇ é uma conexão simétrica então, com as definições dadas acima, vale*

$$\frac{D}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial v} = \frac{D}{\partial v} \frac{\partial S}{\partial u} \tag{36.83}$$

em todo ponto de S . □

Prova. Devido à condição de a conexão ∇ ser simétrica, tem-se para todos a e b $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^b} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^b}} \frac{\partial}{\partial x^a} = [\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b}] = 0$ e, portanto,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^b} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^b}} \frac{\partial}{\partial x^a} = 0. \tag{36.84}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial v} &= \frac{D}{\partial u} \left(\sum_{b=1}^n \frac{\partial x^b}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x^b} \right) \\ &= \sum_{b=1}^n \frac{\partial^2 x^b}{\partial u \partial v} \frac{\partial}{\partial x^b} + \sum_{b=1}^n \frac{\partial x^b}{\partial v} \frac{D}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^b} \\ &= \sum_{b=1}^n \frac{\partial^2 x^b}{\partial u \partial v} \frac{\partial}{\partial x^b} + \sum_{b=1}^n \frac{\partial x^b}{\partial v} \sum_{a=1}^n \frac{\partial x^a}{\partial u} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^b} \\ &\stackrel{(36.84)}{=} \sum_{b=1}^n \frac{\partial^2 x^b}{\partial u \partial v} \frac{\partial}{\partial x^b} + \sum_{b=1}^n \frac{\partial x^b}{\partial v} \sum_{a=1}^n \frac{\partial x^a}{\partial u} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{a=1}^n \frac{\partial^2 x^a}{\partial u \partial v} \frac{\partial}{\partial x^a} + \sum_{a=1}^n \frac{\partial x^a}{\partial u} \sum_{b=1}^n \frac{\partial x^b}{\partial v} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^b} \\ &= \sum_{a=1}^n \frac{\partial^2 x^a}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x^a} + \sum_{a=1}^n \frac{\partial x^a}{\partial u} \frac{D}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x^a} \\ &= \frac{D}{\partial v} \sum_{a=1}^n \frac{\partial x^a}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{D}{\partial v} \frac{\partial S}{\partial u}, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ■

O estudante deve aperceber-se que (36.84) é a versão em coordenadas locais da expressão (36.83).

36.2.3.2 Conexões Métricas (ou Riemannianas)

Ao introduzirmos a noção de conexão afim, acima, não fizemos menção à presença de uma métrica Riemanniana ou Lorentziana na variedade. Vamos agora tratar da situação na qual uma ou outra estão presentes.

• **Conexões métricas, ou Riemannianas**

Uma conexão afim ∇ é dita ser uma *conexão compatível com uma métrica* semi-Riemanniana g se valer

$$\nabla_A(g) = 0 \tag{36.85}$$

para todo $A \in \mathcal{X}(M)$. De acordo com (36.77), isso equivale a

$$A(g(B, C)) = g(\nabla_A B, C) + g(B, \nabla_A C) \tag{36.86}$$

para todos $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$. Uma conexão que seja compatível com uma métrica é também dita ser uma *conexão métrica*, ou uma *conexão Riemanniana*. A identidade expressa em (36.86) é por vezes denominada *identidade de Ricci*¹⁵.

De acordo com (36.75), a expressão local de (36.85) é

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = g_{jl} \Gamma^j_{ik} + g_{kj} \Gamma^j_{il}. \tag{36.87}$$

Para entender o significado da propriedade especificada em (36.86), observe-se que se $\nabla_A B = \nabla_A C = 0$, então $g(B, B)$, $g(C, C)$ e $g(B, C)$ não variam ao longo de A , ou seja, se B e C são paralelamente transportados ao longo de A segundo ∇ , então seu módulos e o “ângulo” que formam entre si não variam ao longo e A , em coerência com a intuição por trás da noção de transporte paralelo.

Para reforçar as considerações das últimas linhas, apresentaremos algumas caracterizações equivalentes da definição de conexão métrica (novamente seguimos [223], mas com uma organização distinta). Observe-se que o item 2 da proposição que segue vem precisamente ao encontro do comentário do parágrafo precedente, ao afirmar que pares de vetores transportados paralelamente ao longo de curvas diferenciáveis preservam seu produto escalar.

Proposição 36.4 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana ou Lorentziana e seja ∇ uma conexão afim em M . Denotemos por $\frac{D}{dt}$ a derivação covariante associada à conexão ∇ ao longo de uma curva especificada. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. A conexão ∇ é compatível com a métrica, ou seja, $A(g(B, C)) = g(\nabla_A B, C) + g(B, \nabla_A C)$ para todos $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$.
2. Para toda curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ (I sendo algum intervalo aberto de \mathbb{R} .) vale que se $V^{(1)} : I \ni t \mapsto V^{(1)}(t) \in \mathbb{T}_{c(t)}M$ e $V^{(2)} : I \ni t \mapsto V^{(2)}(t) \in \mathbb{T}_{c(t)}M$ são pares de campos vetoriais definidos sobre c que são transportados

¹⁵Gregorio Ricci Curbastro (1853–1925).

paralelamente ao longo de c (ou seja, tais que $\frac{D}{dt}V^{(1)} = \frac{D}{dt}V^{(2)} = 0$ para todo $t \in I$), então $g(V^{(1)}, V^{(2)})$ é constante ao longo de c , ou seja,

$$\frac{d}{dt}g\left(V^{(1)}(t), V^{(2)}(t)\right)_{c(t)} = 0 \quad (36.88)$$

para todo $t \in I$.

3. Para toda curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ vale que se $V : I \ni t \mapsto V(t) \in T_{c(t)}M$ e $W : I \ni t \mapsto W(t) \in T_{c(t)}M$ são pares de campos vetoriais definidos sobre c , então

$$\frac{d}{dt}g\left(V(t), W(t)\right)_{c(t)} = g\left(\frac{D}{dt}V(t), W(t)\right)_{c(t)} + g\left(V(t), \frac{D}{dt}W(t)\right)_{c(t)}. \quad (36.89)$$

□

Prova. 1 \rightarrow 2. Vamos escolher A, B e C de modo que, em alguma (eventualmente “pequena”) vizinhança sobre c de um ponto $c(t_0)$, o campo A coincida com $\dot{c}(t)$, B com $V^{(1)}(t)$ e C com $V^{(2)}(t)$. Teremos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g\left(V^{(1)}(t), V^{(2)}(t)\right)_{c(t)} \Big|_{t=t_0} &= A\left(g(B, C)\right)_{c(t_0)} \\ &\stackrel{\text{1}}{=} g(\nabla_A B, C)_{c(t_0)} + g(B, \nabla_A C)_{c(t_0)} = g(\nabla_{\dot{c}(t_0)} B, C)_{c(t_0)} + g(B, \nabla_{\dot{c}(t_0)} C)_{c(t_0)} \\ &\stackrel{(36.62)}{=} g\left(\frac{D}{dt}V^{(1)}(t_0), V^{(2)}(t_0)\right)_{c(t_0)} + g\left(V^{(1)}(t_0), \frac{D}{dt}V^{(2)}(t_0)\right)_{c(t_0)} = 0. \end{aligned}$$

2 \rightarrow 3. Sob a hipótese 2 vale o seguinte:

Lema 36.2 *Seja (g, M) uma variedade Riemanniana ou Lorentziana, com g sendo, portanto, não-degenerada. Vamos supor que valha a hipótese 2, acima. Seja $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável e seja $p = c(t_0)$ um ponto da curva c . Seja $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ uma base em $T_p M$ e seja, para cada $k = 1, \dots, n$, $\mathbf{b}_k(t)$ o vetor obtido transportando \mathbf{b}_k paralelamente ao longo de c em alguma vizinhança suficientemente pequena de p (que supomos ser a mesma para todos os k 's). Então $\{\mathbf{b}_1(t), \dots, \mathbf{b}_n(t)\}$ é uma base em $T_{c(t)}M$.* □

Prova do Lema 36.2. Fixemos t e suponhamos que existam escalares α_k tais que $\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{b}_k(t) = 0$. Então, para todo j vale

$$0 = g\left(\mathbf{b}_j(t), \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{b}_k(t)\right)_{c(t)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k g(\mathbf{b}_j(t), \mathbf{b}_k(t))_{c(t)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k g(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k)_p = g\left(\mathbf{b}_j, \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{b}_k\right)_p.$$

Como os \mathbf{b}_j formam uma base em $T_p M$ e a métrica é não-degenerada, isso implica que $\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{b}_k = 0$ e, portanto, que todos os α_k 's são nulos. ■

Seguindo esse resultado, podemos escrever $V(t) = \sum_{i=1}^n v^i(t) \mathbf{b}_i(t)$ e $W(t) = \sum_{j=1}^n w^j(t) \mathbf{b}_j(t)$ para todo t em uma vizinhança de t_0 . Assim, pela hipótese 2,

$$g(V(t), W(t))_{c(t)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i(t) w^j(t) g(\mathbf{b}_i(t), \mathbf{b}_j(t))_{c(t)} \stackrel{2}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i(t) w^j(t) g(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_p.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}g(V(t), W(t))_{c(t)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left[v^i(t) w^j(t) \right] g(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_p. \quad (36.90)$$

Por outro lado, como $\frac{D}{dt} \mathbf{b}_j(t) = 0$ para todo j , vale por (36.61)

$$\frac{D}{dt}V(t) = \frac{D}{dt} \sum_{i=1}^n v^i(t) \mathbf{b}_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (v^i(t)) \mathbf{b}_i(t)$$

e, portanto,

$$g\left(\frac{D}{dt}V(t), W(t)\right)_{c(t)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} (v^i(t)) w^j(t) g(\mathbf{b}_i(t), \mathbf{b}_j(t))_{c(t)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} (v^i(t)) w^j(t) g(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_p.$$

Analogamente, obtém-se

$$g\left(V(t), \frac{D}{dt}W(t)\right)_{c(t)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i(t) \frac{d}{dt} (w^j(t)) g(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_p.$$

Logo,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{D}{dt}V(t), W(t)\right)_{c(t)} + g\left(V(t), \frac{D}{dt}W(t)\right)_{c(t)} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} (v^i(t)) w^j(t) + v^i(t) \frac{d}{dt} (w^j(t)) \right] g(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_p \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} [v^i(t) w^j(t)] g(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_p \stackrel{(36.90)}{=} \frac{d}{dt} g(V(t), W(t))_{c(t)}. \end{aligned}$$

3 \rightarrow 2. Trivial.

3 \rightarrow 1. Para um dado campo A e $p \in M$, seja $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável passando por p em t_0 e tal que $\dot{c}(t_0) = A(p) \in T_p M$. Teremos $A(p)(g, C)_p = \frac{d}{dt}g(B, C)_{c(t)} \Big|_{t=t_0}$. Pela hipótese 3, o lado direito dessa igualdade pode ser escrito como

$$\begin{aligned} g\left(\frac{D}{dt}B(c(t_0)), C(c(t_0))\right)_{c(t_0)} + g\left(B(c(t_0)), \frac{D}{dt}C(c(t_0))\right)_{c(t_0)} \\ \stackrel{(36.62)}{=} g\left(\nabla_{\dot{c}(t_0)} B, C\right)_{c(t_0)} + g\left(B, \nabla_{\dot{c}(t_0)} C\right)_{c(t_0)} = g\left(\nabla_A B, C\right)_p + g\left(B, \nabla_A C\right)_p, \end{aligned}$$

que é o que se desejava provar. ■

• A fórmula de Koszul. Determinando uma conexão métrica em termos da métrica e da torção

No que segue provaremos que uma conexão métrica é determinada univocamente pela métrica e pelo tensor de torção.

Seja g um tensor métrico semi-Riemanniano e ∇ uma conexão afim compatível com essa métrica. Fazendo permutações cíclicas de A, B e C em (36.86), temos

$$A(g(B, C)) = g(\nabla_A B, C) + g(B, \nabla_A C), \quad (36.91)$$

$$B(g(C, A)) = g(\nabla_B C, A) + g(C, \nabla_B A), \quad (36.92)$$

$$C(g(A, B)) = g(\nabla_C A, B) + g(A, \nabla_C B). \quad (36.93)$$

Disso segue que

$$\begin{aligned} A(g(B, C)) + B(g(C, A)) - C(g(A, B)) &= g(\nabla_A B, C) + g(B, \nabla_A C) + g(\nabla_B C, A) + g(C, \nabla_B A) \\ &\quad - g(\nabla_C A, B) - g(A, \nabla_C B) + (g(C, \nabla_B A) - g(C, \nabla_B A)) \\ &= g((\nabla_A B - \nabla_B A), C) + g((\nabla_A C - \nabla_C A), B) + g((\nabla_B C - \nabla_C B), A) \\ &\quad + 2g(C, \nabla_B A) \\ &\stackrel{(36.81)}{=} g([A, B], C) + g([A, C], B) + g([B, C], A) \\ &\quad + g(T(A, B), C) + g(T(A, C), B) + g(T(B, C), A) \\ &\quad + 2g(C, \nabla_B A). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(C, \nabla_B A) &= \frac{1}{2} [A(g(B, C)) + B(g(C, A)) - C(g(A, B))] - \frac{1}{2} [g([A, B], C) + g([A, C], B) + g([B, C], A)] \\ &\quad - \frac{1}{2} [g(T(A, B), C) + g(T(A, C), B) + g(T(B, C), A)]. \end{aligned} \quad (36.94)$$

A expressão acima, denominada *fórmula de Koszul*¹⁶ por alguns autores, mostra que uma conexão métrica ∇ é univocamente determinada pela métrica g e pela torção T . Isso talvez fique mais claro se, para uma carta local, tomarmos $A = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $B = \frac{\partial}{\partial x^j}$ e $C = \frac{\partial}{\partial x^k}$. Usando (36.57) e o fato que $[\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b}] = 0$ para quaisquer a, b , obtemos

$$g_{kl} \Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right] - \frac{1}{2} [T^l_{ji} g_{lk} + T^l_{jk} g_{li} + T^l_{ik} g_{lj}]$$

e, conseqüentemente,

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right] - \frac{1}{2} [T^k_{ji} + T_{ij}^k + T_{ji}^k], \quad (36.95)$$

ou, alternativamente, usando a antissimetria das componentes do tensor de torção,

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right] + \frac{1}{2} [T^k_{ij} + T_i^k{}_j + T_j^k{}_i]. \quad (36.96)$$

E. 36.16 *Exercício importante.* Reproduza todos os cálculos que conduzem às expressões de acima. *

• O tensor de contorção

A expressão (36.94) aponta a necessidade de introduzir-se a seguinte definição: o tensor $K : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}$, portanto de tipo $(0, 3)$, definido por

$$K(C, B, A) := -\frac{1}{2} [g(T(A, B), C) + g(T(A, C), B) + g(T(B, C), A)], \quad (36.97)$$

com $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$, é denominado (um tanto jocosamente) *tensor de contorção*. Em componentes de uma carta

¹⁶Jean-Louis Koszul (1921-).

local de coordenadas isso se escreve como

$$\begin{aligned} K_{kji} C^k B^j A^i &= -\frac{1}{2} (T^l_{ij} g_{kl} + T^l_{ik} g_{lj} + T^l_{jk} g_{li}) A^i B^j C^k = -\frac{1}{2} (T_{kij} + T_{jik} + T_{ijk}) A^i B^j C^k \\ &= \frac{1}{2} (T^l_{ji} g_{kl} + T^l_{ki} g_{lj} + T^l_{kj} g_{li}) A^i B^j C^k \\ &= \frac{1}{2} (T_{kji} + T_{jki} + T_{ikj}) A^i B^j C^k, \end{aligned}$$

sendo que na segunda linha usamos a antissimetria das componentes do tensor de torção. Portanto, as componentes do tensor de contorção são dadas por

$$K_{kji} = -\frac{1}{2} (T_{kij} + T_{jik} + T_{ijk}) = \frac{1}{2} (T_{kji} + T_{jki} + T_{ikj}), \quad (36.98)$$

Com o tensor de contorção, a fórmula de Koszul (36.94) escreve-se como

$$\begin{aligned} g(C, \nabla_B A) &= \frac{1}{2} [A(g(B, C)) + B(g(C, A)) - C(g(A, B))] - \frac{1}{2} [g([A, B], C) + g([A, C], B) + g([B, C], A)] \\ &\quad + K(C, B, A). \end{aligned} \quad (36.99)$$

Usando (36.98), a expressão (36.95) ou (36.96), por sua vez, fica

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right] + K^k_{ij}. \quad (36.100)$$

Verifique!

E. 36.17 *Exercício.* Usando (36.97), mostre que

$$K(C, B, A) - K(C, A, B) = -g(T(A, B), C) \quad (36.101)$$

e que

$$K(C, B, A) = -K(A, B, C), \quad (36.102)$$

o que, em termos de componentes, significa que

$$K_{kji} - K_{kij} = -T_{kij} = T_{kji} \quad \text{e} \quad K_{kji} = -K_{ijk}, \quad (36.103)$$

respectivamente. Segue de (36.101), ou da primeira igualdade em (36.103), que se o tensor de contorção for nulo, então o tensor de torção também o é. Concluímos dessa observação e da definição (36.97) ou (36.98) que o tensor de contorção é nulo se e somente se o tensor de torção o for. *

E. 36.18 *Exercício.* Mostre que as componentes do tensor de contorção transformam-se por mudanças de coordenadas como

$$K'^{ik}{}_{ij} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x'^i} \frac{\partial x^c}{\partial x'^j} K^a{}_{bc} \quad \text{ou} \quad K'^k{}_{kij} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^k} \frac{\partial x^b}{\partial x'^i} \frac{\partial x^c}{\partial x'^j} K_{abc}. \quad (36.104)$$

*

• Símbolos de Christoffel

Os termos de (36.96) e (36.100) que envolvem as derivadas parciais das componentes da métrica (e não envolvem a torção) são de particular interesse e para eles alguns autores reservam uma notação e uma denominação particular: define-se os chamados *símbolos de Christoffel*¹⁷ por

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\} := \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right]. \quad (36.105)$$

¹⁷Elwin Bruno Christoffel (1829-1900).

É importante observar que os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos índices inferiores:

$$\begin{Bmatrix} k \\ i j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ j i \end{Bmatrix} \quad (36.106)$$

para todos i, j, k . Isso se constata diretamente de (36.105). Com uso dessa notação, (36.100) fica

$$\Gamma^k_{ij} = \begin{Bmatrix} k \\ i j \end{Bmatrix} + K^k_{ij}, \quad (36.107)$$

onde K^k_{ij} são as componentes do tensor de contorção.

E. 36.19 *Exercício.* Usando (36.58), conclua que os símbolos de Christoffel transformam-se por mudanças de coordenadas como

$$\begin{Bmatrix} k \\ i j \end{Bmatrix}' = \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x'^i} \frac{\partial x^c}{\partial x'^j} \begin{Bmatrix} a \\ b c \end{Bmatrix} + \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial x'^i \partial x'^j}. \quad (36.108)$$

✦

• **Os símbolos de Christoffel e o determinante das componentes do tensor métrico**

Vamos agora apresentar algumas identidades envolvendo os símbolos de Christoffel que serão usadas na Seção 36.2.4, página 1735 e alhures. Denotemos por \mathbf{g} o determinante da matriz dos g_{ij} . Como a matriz dos g^{ij} é a inversa da matriz dos g_{ij} , segue imediatamente da expressão (9.36), página 370, que, em uma carta local de coordenadas,

$$\frac{1}{\mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x^i} = g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i}. \quad (36.109)$$

Pela definição (36.105) dos símbolos de Christoffel, temos

$$\begin{Bmatrix} k \\ i k \end{Bmatrix} := \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right] = \frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i},$$

onde, de acordo com a convenção de Einstein, $\begin{Bmatrix} k \\ i k \end{Bmatrix}$ significa $\sum_{k=1}^n \begin{Bmatrix} k \\ i k \end{Bmatrix}$. Assim, provamos que

$$\begin{Bmatrix} k \\ i k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x^i} = \frac{\partial \ln \sqrt{|\mathbf{g}|}}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \frac{\partial \sqrt{|\mathbf{g}|}}{\partial x^i}. \quad (36.110)$$

Tem-se também

$$g^{ij} \begin{Bmatrix} k \\ i j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{kl} \left[g^{ij} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + g^{ij} \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right] = g^{kl} g^{ij} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} g^{kl} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \\ \stackrel{(36.109)}{=} g^{ij} g^{kl} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - g^{kl} \frac{1}{2\mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x^l} = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \underbrace{(g^{kl} g_{il})}_{=\delta_i^k} - \underbrace{g^{ij} g_{il}}_{=\delta_i^j} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^j} - g^{kl} \frac{1}{2\mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x^l} = -\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^l} - g^{kl} \frac{1}{2\mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x^l}.$$

Logo, usando (36.110), estabelecemos que

$$g^{ij} \begin{Bmatrix} k \\ i j \end{Bmatrix} = -\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^l} - g^{kl} \begin{Bmatrix} j \\ l j \end{Bmatrix} \quad (36.111)$$

e também que

$$g^{ij} \begin{Bmatrix} k \\ i j \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2\mathbf{g}} \frac{\partial}{\partial x^l} (g^{kl} \mathbf{g}) = -\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \frac{\partial}{\partial x^l} (g^{kl} \sqrt{|\mathbf{g}|}). \quad (36.112)$$

As propriedades (36.110), (36.111) e (36.112) são úteis e serão empregadas no que segue.

36.2.3.3 Conexões de Levi-Civita

Chegamos agora à mais importante classe de conexões afins. Uma conexão afim que seja métrica e simétrica é dita ser uma *conexão de Levi-Civita*¹⁸.

Recordemos que pelas observações do Exercício E. 36.17, página 1732, o tensor de torção associado a uma conexão métrica é nulo se e somente se o tensor de contorção o for.

Por ser simétrica, uma conexão de Levi-Civita possui torção nula (e, portanto, contorção nula) e, assim, por (36.94) ou (36.99), a fórmula de Koszul assume a forma

$$g(C, \nabla_B A) = \frac{1}{2} [A(g(B, C)) + B(g(C, A)) - C(g(A, B))] - \frac{1}{2} [g([A, B], C) + g([A, C], B) + g([B, C], A)]. \quad (36.113)$$

Por (36.96) ou (36.100), valerá para os coeficientes de uma conexão de Levi-Civita

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right] = \begin{Bmatrix} k \\ i j \end{Bmatrix}. \quad (36.114)$$

Assim, os coeficientes de uma conexão de Levi-Civita coincidem com os símbolos de Christoffel. Da condição de simetria vale, naturalmente, $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ para todos i, j, k . Mais importante é notar que, segundo (36.114), os coeficientes de uma conexão de Levi-Civita são univocamente determinados pela métrica apenas. Esse fato é muitas vezes denominado *Teorema Fundamental da Geometria Riemanniana*.

É importante também observar que, como toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana infinitamente diferenciável (Proposição 36.1, página 1708), segue que toda variedade diferenciável possui também uma conexão de Levi-Civita para essa métrica Riemanniana.

• **Conexões de Riemann-Cartan e de Einstein-Cartan**

Se (M, g) é uma variedade Riemanniana (Lorentziana), uma conexão ∇ compatível com g e dotada de torção não-nula é por vezes dita ser uma *conexão de Riemann-Cartan* (*conexão de Einstein-Cartan*). A variedade (M, g, ∇) assim constituída é dita ser uma *variedade de Riemann-Cartan* (*variedade de Einstein-Cartan*). O estudo de variedades de Riemann-Cartan (de Einstein-Cartan) é denominado *Geometria de Riemann-Cartan* (*Geometria de Einstein-Cartan*).

A formulação Einsteiniana da Teoria da Relatividade Geral pressupõe uma conexão de Levi-Civita, compatível com uma métrica Lorentziana e, portanto, com torção nula. Há uma formulação alternativa, denominada *Teoria de Einstein-Cartan* na qual considera-se uma conexão de Einstein-Cartan, i.e., compatível com uma métrica Lorentziana, mas com torção não-nula. A Teoria de Einstein-Cartan introduz efeitos gravitacionais devidos ao spin. Os efeitos físicos mensuráveis da presença de torção, porém, são muito pequenos para serem observáveis dentro dos padrões atuais de experimentação. Um artigo de revisão sobre a torção na Teoria da Relatividade Geral é F. W. Hehl, P. Heyde, G. D. Kerlick and J. M. Nester, “*General Relativity with Spin and Torsion: Foundations and Prospects*”. Rev. Mod. Phys., **3**, p. 393, (1976). Vide também F. W. Hehl, “*Spin and Torsion in General Relativity. I: Foundations*”. Gen. Rel. Grav., **4**, p. 333, (1973). e F. W. Hehl. “*On the Kinematics of the Torsion Space-Time*”. Found. Phys., **15**, p. 451. (1985).

• **Conexões de Weyl**

As conexões de Levi-Civita possuem uma generalização de alguma relevância. Apresentaremos apenas sua definição aqui.

Uma conexão afim ∇ que seja simétrica (ou seja, com torção nula) é dita ser uma *conexão de Weyl*¹⁹ se existir um campo de covetores $\sigma \in \mathcal{X}^*(M)$ tal que

$$\nabla_A(g) = \langle \sigma, A \rangle g$$

para todo $A \in \mathcal{X}(M)$, com g sendo o tensor métrico. Cada conexão de Weyl é, portanto, caracterizada por um campo $\sigma \in \mathcal{X}^*(M)$. Por vezes, emprega-se a notação ∇^σ para caracterizar essa dependência. Como se vê, conexões de Levi-Civita correspondem ao caso particular onde σ é identicamente nulo.

Conexões de Weyl foram introduzidas por esse autor em cerca de 1918 em uma proposta de unificação geométrica do Eletromagnetismo com a Teoria da Relatividade Geral, um sonho teórico perseguido por vários autores (Einstein inclusive), seguindo diversas ideias distintas. O texto clássico a respeito da contribuição de Weyl é [328].

¹⁸Tullio Levi-Civita (1873–1941).

¹⁹Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955).

36.2.4 Gradiente, Divergente e Laplaciano

Vamos agora introduzir as noções muito úteis de *gradiente*, *divergente* e *Laplaciano* (ou *operador de Laplace-Beltrami*) no contexto de variedades Riemannianas ou Lorentzianas dotadas de uma conexão afim. Fazemos notar que essas noções podem ser introduzidas com mais elegância e generalidade utilizando formas diferenciais e o chamado produto $*$ de Hodge²⁰.

O estudante deve notar que as definições de gradiente, divergente e Laplaciano que apresentaremos adiante são definições intrínsecas, isto é, independentes de cartas locais de coordenadas, ainda que nosso principal objetivo seja obter expressões para esses operadores em cartas locais de coordenadas.

• Gradiente

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana ou Lorentziana e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em M assumindo valores nos reais. Recordando, a diferencial de f , denotada por df é o elemento de $\mathcal{X}^*(M)$ definido por

$$\langle df, A \rangle = A(f),$$

para todo $A \in \mathcal{X}(M)$, onde $A(f)$ foi definido em (36.50), página 1717. Assim, df é um campo de covetores tais que para todo $A \in \mathcal{X}(M)$ vale $\langle df, A \rangle \equiv df(A) = A^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ em uma carta local (e, portanto, em todas, devido à invariância do lado direito), sendo $A = A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Definimos o *gradiente* de f , denotado por $\text{grad}(f) \in \mathcal{X}(M)$, por

$$\text{grad}(f) := \mathbf{g}^\sharp(df),$$

ou seja, $\text{grad}(f)$ é definido como o campo vetorial definido em M tal que para todo $p \in M$ e todo $v \in \mathbb{T}_p M$ valha

$$g(\text{grad}(f), v)_p = (df)_p(v). \quad (36.115)$$

Em um sistema de coordenadas x^1, \dots, x^n definido por uma carta local em p em que $v = v^k \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p$ (usando a convenção de soma de Einstein) e $\text{grad}(f)_p = (\text{grad}(f)_p)^k \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p$, teremos $(df)_p(v) = \frac{\partial f}{\partial x^k}(p)v^k$ e $g(\text{grad}(f), v)_p = (\text{grad}(f)_p)^i v^j g_{ij}(p)$. Assim, (36.115) se escreve na forma

$$g(\text{grad}(f), v)_p = (\text{grad}(f)_p)^i v^j g_{ij}(p) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)v^j, \quad (36.116)$$

implicando que $(\text{grad}(f)_p)^i g_{ij}(p) = \frac{\partial f}{\partial x^j} \Big|_p$ para todo j e, portanto, que

$$(\text{grad}(f)_p)^i = g^{ij}(p) \frac{\partial f}{\partial x^j} \Big|_p \quad (36.117)$$

para todo i . Assim,

$$\text{grad}(f)_p = \left(g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)_p \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p. \quad (36.118)$$

Observe-se que, para um campo vetorial $A \in \mathcal{X}(M)$, (36.116) afirma que

$$g(\text{grad}(f), A) = A(f). \quad (36.119)$$

Por razões facilmente compreensíveis, o gradiente de f é frequentemente denotado por $\nabla^i f$ ou por $\partial^i f$.

• Divergente

Seja ∇ uma conexão afim e $A \in \mathcal{X}(M)$ e considere-se o tensor $\mathcal{K}^A : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ definido por

$$\mathcal{K}^A(B) := \nabla_B A, \quad (36.120)$$

²⁰William Vallance Douglas Hodge (1903–1975).

para $B \in \mathcal{X}(M)$. Definimos o *divergente* de A (segundo ∇) como sendo o traço da aplicação definida por \mathcal{K}^A :

$$\text{div}(A) := \text{Tr}(\mathcal{K}^A). \quad (36.121)$$

(A noção de traço encontra-se definida à página 1664). Pela considerações que fizemos quando da definição da noção de traço, concluímos que $\text{div}(A)$ é invariante por mudança de coordenadas.

É interessante e útil expressarmos \mathcal{K}^A e $\text{div}(A)$ em coordenadas locais. Escrevendo

$$\mathcal{K}^A \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = (\mathcal{K}^A)^k{}_i \frac{\partial}{\partial x^k}$$

teremos,

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}^A)^b{}_i \frac{\partial}{\partial x^b} &= \mathcal{K}^A \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A = \left(\frac{\partial A^k}{\partial x^i} + \Gamma^k{}_{ij} A^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ (\mathcal{K}^A)^k{}_i &= \frac{\partial A^k}{\partial x^i} + \Gamma^k{}_{ij} A^j \end{aligned}$$

e, por (35.33), teremos $\text{div}(A) = \text{Tr}(\mathcal{K}^A) \stackrel{(35.33)}{=} (\mathcal{K}^A)^i{}_i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i{}_{ij} A^j = A^i{}_{;i} = (\nabla_i A)^i$. Em particular, em coordenadas locais e para uma conexão afim geral, vemos que

$$\text{div}(A) = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i{}_{ij} A^j. \quad (36.122)$$

O estudante facilmente apercebe-se que no caso da variedade \mathbb{R}^n com a conexão plana usual tem-se para coordenadas Cartesianas $\text{div}(A) = \frac{\partial A^i}{\partial x^i}$, que é a definição usual de divergente de um campo vetorial.

Por razões facilmente compreensíveis, o divergente de A é frequentemente denotado por $\nabla_j A^j$ ou por $A^j{}_{;j}$.

Se ∇ for uma conexão métrica e simétrica (ou seja, uma conexão de Levi-Civita), então podemos usar (36.110) e escrever

$$\text{div}(A) = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i{}_{ij} A^j = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \left(\frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^j} \right) A^j$$

e, portanto,

$$\text{div}(A) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(A^j \sqrt{|g|} \right). \quad (36.123)$$

• Laplaciano

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em M assumindo valores nos reais. Definimos o *Laplaciano* de f , denotado por $\Delta(f)$, por

$$\Delta(f) := \text{div}(\text{grad}(f)).$$

O Laplaciano mapeia funções infinitamente diferenciáveis de M em funções infinitamente diferenciáveis de M e, por isso, podemos falar de um *operador Laplaciano*. No contexto de Geometrias Riemannianas ou Lorentzianas e na Geometria de superfícies, o operador Laplaciano é frequentemente denominado *operador de Laplace²¹-Beltrami²²*.

Em coordenadas locais e para uma conexão afim geral, teremos por (36.122) e (36.117),

$$\Delta(f) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) + \Gamma^i{}_{ij} g^{jk} \frac{\partial f}{\partial x^k}. \quad (36.124)$$

O estudante facilmente apercebe-se que no caso da variedade \mathbb{R}^n com a métrica Riemanniana usual e a conexão plana usual tem-se para coordenadas Cartesianas $\Delta(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i2}}$, que é a definição usual de Laplaciano de uma função escalar.

Por razões facilmente compreensíveis, o Laplaciano de f é frequentemente denotado por $\nabla_i \nabla^i f$.

²¹Pierre-Simon Laplace (1749–1827).

²²Eugenio Beltrami (1835–1899).

Se ∇ for uma conexão métrica e simétrica (ou seja, uma conexão de Levi-Civita), então podemos usar (36.123), e escrever

$$\Delta(f) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{|\mathbf{g}|} g^{ji} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right). \quad (36.125)$$

Essa relação pode ser usada mesmo no caso plano de \mathbb{R}^n para expressar o Laplaciano em coordenadas gerais. Vide Seção 4.3, página 238.

E. 36.20 *Exercício.* Usando (36.111), mostre que, no caso de uma conexão de Levi-Civita, (36.124) pode ser reescrita como

$$\Delta(f) = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right). \quad (36.126)$$

✱

E. 36.21 *Exercício.* Mostre que para uma conexão métrica geral tem-se

$$\operatorname{div}(A) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(A^j \sqrt{|\mathbf{g}|} \right) + K^i{}_{ij} A^j, \quad (36.127)$$

K sendo o tensor de contorção, e

$$\Delta(f) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{|\mathbf{g}|} g^{ji} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) + K^i{}_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^k} \quad (36.128)$$

$$= g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) + K^i{}_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^k}. \quad (36.129)$$

Sugestão: Basta usar (36.107) e os resultados (36.123) e (36.125).

✱

* * * * *

As relações (36.117), (36.123) e (36.125) são muito úteis, podendo mesmo ser usadas nas variedades planas \mathbb{R}^n , com a métrica Riemanniana usual, para expressar o gradiente, o divergente e o Laplaciano em coordenadas outras que não as Cartesianas, tal como fizemos em diversos problemas do Capítulo 21, página 901, e alhures. Para tal, emprega-se as expressões de (36.26), que apresentam as componentes do tensor métrico Riemanniano (covariante e contravariante) em sistemas de coordenadas gerais em \mathbb{R}^n . Nesse caso, como comentamos no Exercício E. 36.2, página 1713, podemos usar o fato que $\mathbf{g} = (\det(J))^2$, onde J é a matriz dada em (36.27). Vide também a Seção 4.3, página 238, para a forma explícita do operador Laplaciano em alguns sistemas de coordenadas de interesse em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

Em certos livros-texto de Física-Matemática, como [231] e [13], o estudante pode encontrar tais expressões para os operadores gradiente, divergente e Laplaciano em diversos sistemas de coordenadas de interesse físico em \mathbb{R}^2 e em \mathbb{R}^3 . Essas referências [231] e [13] obtêm (36.117), (36.123) e (36.125) por meios mais pedestres e com menos generalidade. Como já dissemos acima, as diversas expressões que encontramos podem ser obtidas com mais elegância e generalidade através do uso de formas diferenciais.

• **A conexão de Levi-Civita, o gradiente e um operador simétrico**

A proposição a seguir é relevante em diversos contextos. Iremos usá-la na análise da identidade de Raychaudhuri, na Seção 36.5.1, página 1763.

Proposição 36.5 *Seja ∇ uma conexão de Levi-Civita e seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ao menos duas vezes diferenciável. Seja $\mathcal{L}^f : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ o tensor de tipo (1, 1) definido por*

$$\mathcal{L}^f(B) := \mathfrak{K}^{\operatorname{grad} f}(B) = \nabla_B \operatorname{grad}(f),$$

com $B \in \mathcal{X}(M)$. Então, \mathcal{L}^f é um tensor g -simétrico (vide definição à página 1715), ou seja, $(\mathcal{L}^f)^\dagger = \mathcal{L}^f$ e, pois vale

$$g(B, \mathcal{L}^f(C)) = g(\mathcal{L}^f(B), C) \quad (36.130)$$

para todos $B, C \in \mathcal{X}(M)$, ou seja,

$$g(B, \nabla_C \operatorname{grad}(f)) = g(C, \nabla_B \operatorname{grad}(f)).$$

As componentes de \mathcal{L}^f em um sistema local de coordenadas, são dadas por

$$(\mathcal{L}^f)_i{}^l = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{la} \frac{\partial f}{\partial x^a} \right) + \Gamma^l{}_{ij} g^{ja} \frac{\partial f}{\partial x^a}. \quad (36.131)$$

e (36.130) significa que $(\mathcal{L}^f)^i{}_j = (\mathcal{L}^f)_j{}^i$, ou ainda que $(\mathcal{L}^f)_{ij} = (\mathcal{L}^f)_{ji}$. □

Prova. De (36.113) segue facilmente que

$$g(C, \nabla_B A) - g(B, \nabla_C A) = B(g(C, A)) - C(g(B, A)) - g([B, C], A)$$

para todos $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$ (verifique!). Tomando $A = \operatorname{grad}(f)$, teremos por (36.119)

$$g(C, \nabla_B \operatorname{grad}(f)) - g(B, \nabla_C \operatorname{grad}(f)) = B(g(C, \operatorname{grad}(f))) - C(g(B, \operatorname{grad}(f))) - g([B, C], \operatorname{grad}(f)) \\ \stackrel{(36.119)}{=} B(C(f)) - C(B(f)) - [B, C](f) = 0.$$

Isso provou (36.130). Em um sistema local de coordenadas, escrevemos

$$\mathcal{L}^f(B) = (\mathcal{L}^f)_i{}^l (B)^l \frac{\partial}{\partial x^i} = (\mathcal{L}^f)_i{}^l B^i \frac{\partial}{\partial x^l} = B^i \nabla_i \operatorname{grad}(f) = B^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \operatorname{grad}(f)^l + \Gamma^l{}_{ij} \operatorname{grad}(f)^j \right) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

de modo que

$$(\mathcal{L}^f)_i{}^l = \frac{\partial}{\partial x^i} \operatorname{grad}(f)^l + \Gamma^l{}_{ij} \operatorname{grad}(f)^j = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{la} \frac{\partial f}{\partial x^a} \right) + \Gamma^l{}_{ij} g^{ja} \frac{\partial f}{\partial x^a}.$$

A relação de simetria (36.130) significa $g_{ik} B^i (\mathcal{L}^f)^k{}_j C^j = g_{ij} (\mathcal{L}^f)^l{}_i B^i C^j$, ou seja, $g_{ik} (\mathcal{L}^f)^k{}_j = g_{ij} (\mathcal{L}^f)^l{}_i$, que significa $(\mathcal{L}^f)_{ij} = (\mathcal{L}^f)_{ji}$, ou ainda, $(\mathcal{L}^f)^i{}_j = (\mathcal{L}^f)_j{}^i$. ■

Observe-se que $\operatorname{Tr}(\mathcal{L}^f) = (\mathcal{L}^f)_i{}^i = (\mathcal{L}^f)^i{}_i \stackrel{(36.124)}{=} \Delta(f)$.

36.3 O Tensor de Curvatura

A noção de curvatura tem uma longa história na Geometria Diferencial, especialmente no estudo da geometria de curvas e superfícies, existindo em diversas variantes relacionadas entre si de maneiras diversas. Nesta seção iremos nos concentrar no estudo do chamado tensor de curvatura, de importância central nas Geometrias Riemanniana e Lorentziana, em particular, na Teoria da Relatividade Geral.

• **O tensor de curvatura**

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e dotada de uma conexão afim ∇ . Para $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$ definamos

$$R(A, B) := \nabla_A \nabla_B - \nabla_B \nabla_A - \nabla_{[A, B]}, \quad (36.132)$$

como sendo a aplicação que a cada $C \in \mathcal{X}(M)$ associa o elemento de $\mathcal{X}(M)$ dado por

$$R(A, B)C := \nabla_A(\nabla_B C) - \nabla_B(\nabla_A C) - \nabla_{[A, B]} C. \quad (36.133)$$

Como veremos na Proposição 36.6, logo adiante, a aplicação $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por

$$\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \ni (A, B, C) \longmapsto R(A, B)C \in \mathcal{X}(M)$$

é linear nos três argumentos, definindo, portanto, um tensor de tipo (3, 1), denominado *tensor de curvatura associado à conexão afim ∇* .

Notas. Antes de justificarmos a definição e explorarmos as propriedades do objeto acima definido (antes, por exemplo, de mostrarmos que se trata realmente de um tensor), fazemos notar que a definição adotada em (36.132) segue a convenção mais frequentemente encontrada em textos sobre Variedades Lorentzianas e sobre Relatividade Geral, enquanto que textos sobre Geometria Riemanniana (como [223]) adotam um sinal “-” global no lado direito, tomando $R(A, B) := \nabla_B \nabla_A - \nabla_A \nabla_B - \nabla_{[B, A]}$. Essa diferença de convenções se deve ao fato que, na Geometria Riemanniana, convencionou-se dizer que a esfera é uma superfície de curvatura positiva, enquanto que, na Teoria da Relatividade Geral, convencionou-se dizer que o espaço-tempo de de Sitter é de curvatura positiva. É relevante notar também que, como veremos em (36.157) (com uso de (36.105)), para conexões de Levi-Civita, o tensor de curvatura é par no tensor métrico (ou seja, é invariante pela troca $g \rightarrow -g$) e, portanto, no caso Lorentziano ele não se altera se passarmos da assinatura “+ - - -” para “- + + +”. \clubsuit

A seguinte proposição lista as propriedades formais básicas de R :

Proposição 36.6 *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n dotada de uma conexão afim ∇ e seja o tensor de curvatura R associado à conexão ∇ , definido em (36.132). De acordo com as definições de acima, valem as propriedades*

$$1. \text{ Antissimetria:} \quad R(A, B) = -R(B, A), \quad (36.134)$$

$$2. \text{ Linearidade:} \quad R(f_1 A_1 + f_2 A_2, B) = f_1 R(A_1, B) + f_2 R(A_2, B), \quad (36.135)$$

$$R(A, g_1 B_1 + g_2 B_2) = g_1 R(A, B_1) + g_2 R(A, B_2), \quad (36.136)$$

$$R(A, B)(h_1 C_1 + h_2 C_2) = h_1 R(A, B)C_1 + h_2 R(A, B)C_2, \quad (36.137)$$

para todos $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2 \in \mathcal{X}(M)$ e todos $f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2 \in C^\infty(M)$. \square

As propriedades (36.135)–(36.137) evidenciam o caráter tensorial de R . A demonstração da Proposição 36.6 é obtida por uma aplicação quase que mecânica das propriedades (36.51) e (36.52) da conexão afim ∇ e iremos apresentá-la no Apêndice 36.A.1, página 1773.

• A interpretação geométrica do tensor de curvatura

Se tivermos uma carta local de coordenadas e considerarmos os campos $A = \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $B = \frac{\partial}{\partial x^j}$ definidos nessa carta, teremos, naturalmente, $[A, B] = 0$ e, portanto,

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}. \quad (36.138)$$

Essa expressão permite-nos entender R informalmente, como sendo uma “medida” da não-comutatividade da derivação covariante em direções coordenadas diferentes. A Proposição 36.7, que segue, torna essa ideia um tanto mais precisa. Sua interpretação será feita após sua demonstração. Note-se também que é claro por (36.138) que R anula-se no caso da variedade Euclidiana \mathbb{R}^n (pois lá $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i}$). Assim, R indica informalmente o quanto uma variedade diferenciável de dimensão n desvia-se em cada ponto da variedade Euclidiana \mathbb{R}^n .

Proposição 36.7 *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e seja ∇ uma conexão afim em M . Seja $\mathcal{O} \ni (u, v) \mapsto S(u, v) \in M$ uma superfície bidimensional ao menos duas vezes diferenciável mergulhada em M , onde \mathcal{O} é um aberto de \mathbb{R}^2 . Seja V um campo vetorial diferenciável sobre a superfície S (de sorte que $V(u, v) \in \mathbb{T}_{S(u, v)}M$ para cada $(u, v) \in \mathcal{O}$). Então, vale*

$$\left(\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} - \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u}\right) V(u, v) = R\left(\frac{\partial S}{\partial u}, \frac{\partial S}{\partial v}\right) V \Big|_{S(u, v)} \quad (36.139)$$

para todo $(u, v) \in \mathcal{O}$. \square

Prova. (De [223]). Em uma carta local, cada ponto $S(u, v)$ é descrito por coordenadas $(x^1(u, v), \dots, x^n(u, v)) \in \mathbb{R}^n$, sendo cada função $x^i(u, v)$ ao menos duas vezes diferenciável. Para os vetores tangentes $\frac{\partial S}{\partial u}$ e $\frac{\partial S}{\partial v}$ à superfície teremos a representação em coordenadas locais $\frac{\partial S}{\partial u} = \frac{\partial x^k}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{S(u, v)}$ e $\frac{\partial S}{\partial v} = \frac{\partial x^k}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{S(u, v)}$.

Seja $X_i(u, v) := \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{S(u, v)} \in \mathbb{T}_{S(u, v)}M$. Calculemos $\frac{D}{\partial u} X_i(u, v)$, $\frac{D}{\partial v} X_i(u, v)$ e as derivações covariantes segundas $\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_i(u, v)$ e $\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_i(u, v)$. Por definição, temos

$$\frac{D}{\partial u} X_i(u, v) = \nabla_{\frac{\partial x^j}{\partial u}} X_j(u, v) X_i(u, v) = \frac{\partial x^j}{\partial u} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \Big|_{S(u, v)}.$$

Analogamente,

$$\frac{D}{\partial v} X_i(u, v) = \frac{\partial x^j}{\partial v} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \Big|_{S(u, v)}.$$

Assim,

$$\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_i(u, v) = \frac{\partial^2 x^j}{\partial v \partial u} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial x^j}{\partial u} \frac{\partial x^k}{\partial v} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) \Big|_{S(u, v)}$$

e, analogamente,

$$\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_i(u, v) = \frac{\partial^2 x^j}{\partial u \partial v} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial x^j}{\partial v} \frac{\partial x^k}{\partial u} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) \Big|_{S(u, v)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} - \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} \right) X_i(u, v) &= \frac{\partial x^j}{\partial v} \frac{\partial x^k}{\partial u} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) \Big|_{S(u, v)} \\ &\stackrel{(36.138)}{=} \frac{\partial x^k}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} R \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{S(u, v)}. \end{aligned} \quad (36.140)$$

Calculemos agora $\frac{D}{\partial u} V(u, v)$, $\frac{D}{\partial v} V(u, v)$ e as derivações covariantes segundas $\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} V(u, v)$ e $\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} V(u, v)$. Naturalmente, podemos escrever $V(u, v) = v^i(u, v) X_i(u, v)$. Teremos,

$$\frac{D}{\partial u} V(u, v) = \frac{D}{\partial u} \left(v^i(u, v) X_i(u, v) \right) = \frac{\partial v^i}{\partial u} X_i(u, v) + v^i \frac{D}{\partial u} X_i(u, v)$$

e

$$\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} V(u, v) = \frac{\partial^2 v^i}{\partial v \partial u} X_i(u, v) + \frac{\partial v^i}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_i(u, v) + \frac{\partial v^i}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_i(u, v) + v^i \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_i(u, v).$$

Analogamente,

$$\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} V(u, v) = \frac{\partial^2 v^i}{\partial u \partial v} X_i(u, v) + \frac{\partial v^i}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_i(u, v) + \frac{\partial v^i}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_i(u, v) + v^i \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_i(u, v).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} - \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} \right) V(u, v) &= v^i \left(\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} - \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} \right) X_i(u, v) \stackrel{(36.140)}{=} v^i \frac{\partial x^k}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} R \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{S(u, v)} \\ &= R \left(\frac{\partial x^k}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial x^j}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \Big|_{S(u, v)} = R \left(\frac{\partial S}{\partial u}, \frac{\partial S}{\partial v} \right) V \Big|_{S(u, v)}, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar, sendo que na penúltima igualdade usamos a linearidade de R . \blacksquare

A Proposição 36.7 diz-nos o seguinte. Escolhamos $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ pequenos o suficiente e tomemos o vetor $V(u, v)$ em um ponto $S(u, v)$. Transportemo-lo paralelamente ao ponto $S(u, v + \epsilon_2)$ ao longo da curva $v \mapsto S(u, v)$ e, em seguida, transportemos o vetor resultante ao ponto $S(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)$ ao longo da curva $u \mapsto S(u, v + \epsilon_2)$. Resulta desses dois transportes um vetor V^1 definido em $\mathbb{T}_{S(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)}M$, o qual não é necessariamente igual ao vetor $V(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)$,

definido no mesmo ponto. A diferença entre esses dois vetores dividida por $\epsilon_1 \epsilon_2$ é $\frac{V^1 - V(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)}{\epsilon_1 \epsilon_2}$ e converge, no limite $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$, a $\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} V(u, v)$.

Façamos agora o oposto: transportemos o vetor $V(u, v)$ paralelamente ao ponto $S(u + \epsilon_1, v)$ ao longo da curva $u \mapsto S(u, v)$ e, em seguida, transportemos o vetor resultante ao ponto $S(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)$ ao longo da curva $v \mapsto S(u + \epsilon_1, v)$. Resulta um vetor V^2 definido em $T_{S(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)}M$, o qual também não é necessariamente igual ao vetor $V(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)$, definido no mesmo ponto. A diferença entre esses dois vetores dividida por $\epsilon_1 \epsilon_2$ é $\frac{V^2 - V(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)}{\epsilon_1 \epsilon_2}$ e converge, no limite $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ a $\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} V(u, v)$.

Concluimos que para a diferença $V^1 - V^2$ dos dois vetores de $T_{S(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)}M$ obtidos transportando $V(u, v)$ paralelamente ao longo dos dois trajetos descritos acima que conectam $S(u, v)$ a $S(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)$ vale

$$\frac{V^1 - V^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} = \left(\frac{V^1 - V(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)}{\epsilon_1 \epsilon_2} \right) - \left(\frac{V^2 - V(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)}{\epsilon_1 \epsilon_2} \right) \\ \xrightarrow{\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0} \left(\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} V - \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} V \right) (u, v) \stackrel{(36.139)}{=} R \left(\frac{\partial S}{\partial u}, \frac{\partial S}{\partial u} \right) V \Big|_{S(u, v)} .$$

Podemos, portanto, afirmar que se $A, B, V \in T_pM$ são três vetores do espaço tangente T_pM , então $R(A, B)V$ determina a variação do vetor V quando de um transporte paralelo executado em uma curva fechada “infinitesimal” no retângulo definido pelos vetores tangentes A e B . Nesse sentido, $R(A, B)$ é uma medida da “curvatura” local da variedade M ao redor do ponto p . Uma noção associada, a de curvatura seccional, será introduzida e discutida mais adiante.

• A primeira identidade de Bianchi

Passemos agora a uma propriedade muito importante, devida a Ricci²³ e a Bianchi²⁴, do tensor de curvatura, denominada *primeira identidade de Bianchi* ou *identidade de Bianchi algébrica*.

Proposição 36.8 (Primeira Identidade de Bianchi) *Seja ∇ uma conexão afim em uma variedade diferenciável M . Para todos $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$ vale*

$$R(A, B)C + R(C, A)B + R(B, C)A = S(A, B, C) , \quad (36.141)$$

onde

$$S(A, B, C) := \nabla_A(T(B, C)) + \nabla_B(T(C, A)) + \nabla_C(T(A, B)) + T(A, [B, C]) + T(B, [C, A]) + T(C, [A, B]) , \quad (36.142)$$

sendo T o tensor de torção, dado em (36.79). Em particular, se ∇ for uma conexão simétrica, vale

$$R(A, B)C + R(C, A)B + R(B, C)A = 0 . \quad (36.143)$$

□

As expressões (36.141) e (36.143) são ambas denominadas *identidade de Bianchi*. A expressão (36.143), válida no contexto de conexões simétricas, é particularmente relevante.

A prova da Proposição 36.8 encontra-se no Apêndice 36.A.2, página 1774.

E. 36.22 Exercício. A expressão $S(A, B, C)$, dada em (36.142), define um tensor. Que se trata de um tensor não é óbvio por (36.142), mas por (36.141). Mostre que o tensor $S(A, B, C)$ pode ser reescrito como

$$S(A, B, C) = (\nabla_A T)(B, C) + (\nabla_B T)(C, A) + (\nabla_C T)(A, B) + T(T(A, B), C) + T(T(B, C), A) + T(T(C, A), B) . \quad (36.144)$$

Sugestão: em (36.142), use as expressões para a derivação covariante de tensores e a definição do tensor de torção. ✦

²³Gregorio Ricci Curbastro (1853–1925).

²⁴Luigi Bianchi (1856–1928).

Observe-se também que $S(A, B, C)$ é invariante por permutações cíclicas:

$$S(A, B, C) = S(C, A, B) = S(B, C, A) . \quad (36.145)$$

• A segunda identidade de Bianchi

A seguinte proposição contém uma asserção importante sobre o tensor de curvatura, a chamada *segunda identidade de Bianchi* ou *identidade de Bianchi diferencial*, e que, em particular, tem consequências sobre o chamado tensor de Einstein, de relevância na Teoria da Relatividade Geral.

Proposição 36.9 (Segunda Identidade de Bianchi) *Seja M uma variedade diferenciável dotada de uma conexão afim ∇ . Então, vale*

$$\nabla_A(R(B, C)D) + \nabla_B(R(C, A)D) + \nabla_C(R(A, B)D) \\ = R(A, B)\nabla_C D + R(C, A)\nabla_B D + R(B, C)\nabla_A D + R([A, B], C)D + R([C, A], B)D + R([B, C], A)D . \quad (36.146)$$

o que implica

$$\nabla_A(R)(B, C) + \nabla_B(R)(C, A) + \nabla_C(R)(A, B) \\ = -R(T(A, B), C) - R(T(C, A), B) - R(T(B, C), A) . \quad (36.147)$$

Caso ∇ seja uma conexão simétrica, (36.147) ensina-nos que

$$\nabla_A(R)(B, C) + \nabla_B(R)(C, A) + \nabla_C(R)(A, B) = 0 . \quad (36.148)$$

Acima, A, B, C, D são elementos arbitrários de $\mathcal{X}(M)$. □

As expressões (36.146) e (36.147), e mesmo o caso particular (36.148), são denominadas *segunda identidade de Bianchi* ou *identidade de Bianchi diferencial*. A demonstração da Proposição 36.9 encontra-se no Apêndice 36.A.3, página 1775.

• Outras propriedades do tensor de curvatura

Na proposição que segue são listadas mais algumas propriedades úteis do tensor de curvatura, válidas no caso de conexões de Levi-Civita.

Proposição 36.10 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana ou Lorentziana e seja ∇ uma conexão afim em M . Sejam $A, B, C, D \in \mathcal{X}(M)$.*

$$\text{Se } \nabla \text{ é compatível com } g, \text{ vale} \quad g(R(A, B)C, D) = -g(R(A, B)D, C) , \quad (36.149)$$

$$\text{Se } \nabla \text{ é compatível com } g \text{ e simétrica (ou seja, se } \nabla \text{ for uma conexão de Levi-Civita), vale} \\ g(R(A, B)C, D) = g(R(C, D)A, B) \quad (36.150)$$

$$\text{e, por (36.134) e (36.149), tem-se também} \\ g(R(A, B)C, D) = g(R(D, C)B, A) . \quad (36.151)$$

$$\text{No caso de } \nabla \text{ ser compatível com } g, \text{ mas não simétrica, em lugar de (36.150) tem-se} \\ g(R(A, B)C, D) = g(R(C, D)A, B) + S(A, B, C, D) , \quad (36.152)$$

onde

$$S(A, B, C, D) := \frac{1}{2} \left[g(S(B, C, A), D) + g(S(B, C, D), A) + g(S(B, A, D), C) + g(S(C, A, D), B) \right] ,$$

o tensor S tendo sido definido em (36.142). □

A demonstração da Proposição 36.10 encontra-se no Apêndice 36.A.4, página 1777.

• **O tensor de curvatura em coordenadas locais**

É importante, especialmente em aplicações como a Teoria da Relatividade Geral, expressar algumas das propriedades do tensor de curvatura que encontramos acima em termos de suas componentes em uma carta local de coordenadas.

Em uma carta local de coordenadas (x^1, \dots, x^n) , escrevamos

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = R^l{}_{kij} \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Os termos $R^l{}_{kij}$ são denominados *componentes do tensor de curvatura* ou *coeficientes do tensor de curvatura*. Naturalmente,

$$R^l{}_{kij} = \left\langle dx^l, R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \quad (36.153)$$

e, caso a variedade em questão seja dotada de uma métrica Riemanniana ou Lorentziana g , teremos também

$$R^l{}_{kij} = g^{lm} g\left(\frac{\partial}{\partial x^m}, R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k}\right).$$

E. 36.23 Exercício. Usando (36.153), mostre que as componentes do tensor de curvatura transformam-se por mudanças de coordenadas como

$$R^l{}_{kij} = \frac{\partial x^l}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^k} \frac{\partial x^c}{\partial x^i} \frac{\partial x^d}{\partial x^j} R^a{}_{bcd}. \quad \star$$

Usando a expressão geral (36.153) podemos obter uma importante relação que expressa os coeficientes de R em termos dos coeficientes de uma conexão afim geral. Tem-se

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} &\stackrel{(36.138)}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \\ &\stackrel{(36.54)}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\Gamma^a{}_{jk} \frac{\partial}{\partial x^a}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\Gamma^a{}_{ik} \frac{\partial}{\partial x^a}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^a{}_{jk}\right) \frac{\partial}{\partial x^a} + \Gamma^a{}_{jk} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^a} - \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^a{}_{ik}\right) \frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma^a{}_{ik} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^a} \\ &\stackrel{(36.54)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^a{}_{jk}\right) \frac{\partial}{\partial x^a} + \Gamma^a{}_{jk} \Gamma^b{}_{ia} \frac{\partial}{\partial x^b} - \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^a{}_{ik}\right) \frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma^a{}_{ik} \Gamma^b{}_{ja} \frac{\partial}{\partial x^b} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^a{}_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^a{}_{ik}\right) \frac{\partial}{\partial x^a} + \left(\Gamma^a{}_{jk} \Gamma^b{}_{ia} - \Gamma^a{}_{ik} \Gamma^b{}_{ja}\right) \frac{\partial}{\partial x^b} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$R^l{}_{kij} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^l{}_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^l{}_{ik} + \Gamma^a{}_{jk} \Gamma^l{}_{ia} - \Gamma^a{}_{ik} \Gamma^l{}_{ja} \quad (36.155)$$

$$= (\Gamma^l{}_{jk})_{,i} - (\Gamma^l{}_{ik})_{,j} + \Gamma^a{}_{jk} \Gamma^l{}_{ia} - \Gamma^a{}_{ik} \Gamma^l{}_{ja}. \quad (36.156)$$

Essa expressão é deveras interessante, por exemplo, por tornar explícito o fato de as componentes do tensor de curvatura associado a uma conexão afim dependerem exclusivamente dos coeficientes da conexão afim. Usando (36.107) é possível expressar $R^l{}_{kij}$ em termos dos símbolos de Christoffel e das componentes do tensor de contorção (e, portanto, das componentes do tensor de torção).

No caso especial de conexões de Levi-Civita, (36.114) permite expressar $R^l{}_{kij}$ em termos dos coeficientes g_{ij} e g^{ij} da métrica, de suas derivadas primeiras e segundas. O exercício a seguir explicita isso:

E. 36.24 Exercício. Usando (36.114), mostre que no caso de conexões de Levi-Civita vale

$$R^l{}_{kij} = \frac{1}{2} g^{la} \left(\frac{\partial^2 g_{aj}}{\partial x^i \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^a \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{ai}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^a \partial x^i} \right) + g^{la} g_{np} \left(\left\{ \begin{matrix} n \\ ki \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p \\ aj \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} n \\ kj \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p \\ ai \end{matrix} \right\} \right), \quad (36.157)$$

com os símbolos de Christoffel dados em (36.105). O estudante deve notar de (36.157) e (36.105) que, para conexões de Levi-Civita, o tensor de curvatura é par no tensor métrico (ou seja, é invariante pela troca $g \rightarrow -g$) e, portanto, no caso Lorentziano ele não se altera se passarmos da assinatura “+ - - -” para “- + + +”. \star

E. 36.25 Exercício. No caso de uma conexão afim geral, expresse $R^l{}_{kij}$ em termos dos coeficientes da métrica e das componentes do tensor de torção. \star

Como mencionamos, podemos expressar algumas das propriedades do tensor métrico obtidas acima em termos de seus coeficientes.

1. Para uma conexão afim geral, a propriedade de antissimetria (36.134) implica

$$R^l{}_{kij} = -R^l{}_{kji}. \quad (36.158)$$

2. Para conexões simétricas, a primeira identidade de Bianchi (36.143) implica

$$R^l{}_{kij} + R^l{}_{jki} + R^l{}_{ijk} = 0. \quad (36.159)$$

3. Para conexões simétricas, a segunda identidade de Bianchi (36.148) implica

$$R^l{}_{kij;m} + R^l{}_{kmi;j} + R^l{}_{kjm;i} = 0. \quad (36.160)$$

4. Para conexões compatíveis com a métrica g , (36.149) implica

$$R_{lkij} = -R_{klji}, \quad (36.161)$$

o que equivale a

$$R^l{}_{kij} = -R^l{}_{kji}. \quad (36.162)$$

5. Para conexões compatíveis com a métrica g e simétricas (ou seja, para conexões de Levi-Civita), (36.151) implica

$$R_{lkij} = R_{ijlk}, \quad (36.163)$$

o que equivale a

$$R^l{}_{kij} = R^l{}_{ij k}. \quad (36.164)$$

E. 36.26 Exercício. Verifique todas as afirmações de acima. \star

Naturalmente, no importante caso de conexões de Levi-Civita todas as relações (36.158)–(36.164) são válidas.

36.3.1 A Curvatura Seccional

A noção de curvatura seccional é intimamente ligada à de tensor de curvatura. Essa noção foi introduzida por Gauss e estendida por Riemann e é muitas vezes denominada *curvatura de Gauss*, ou *curvatura Gaussiana*, especialmente no estudo de superfícies em \mathbb{R}^n . No nosso contexto de variedades diferenciáveis vamos introduzi-la a partir do tensor de curvatura, mas no caso de superfícies seria mais natural fazê-lo de modo mais geométrico, tal como na sequência histórica na qual nasceu. Para essa última abordagem, vide, por exemplo, [222]. Para a conexão entre as duas abordagens, vide [223], especialmente o Capítulo VI dessa referência.

• **Algumas propriedades de certas formas quárticas**

Para nossa discussão sobre a curvatura seccional precisamos de algumas propriedade de certas formas quárticas em espaços vetoriais.

Seja \mathcal{V} um espaço vetorial real e seja $F : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação que seja linear em cada um de seus argumentos (uma forma quártica) e que satisfaça

$$F(A, B, C, D) = -F(B, A, C, D), \quad (36.165)$$

$$F(A, B, C, D) = -F(A, B, D, C) \quad \text{e} \quad (36.166)$$

$$F(A, B, C, D) = F(C, D, A, B), \quad (36.167)$$

para todos $A, B, C, D \in \mathcal{V}$. O leitor há de perceber que as propriedades listadas em (36.165)–(36.167) são inspiradas em propriedades idênticas (vide (36.134), (36.149) e (36.150)) válidas para a forma quártica $g(R(A, B)C, D)$ no caso de variedades semi-Riemannianas dotadas de uma conexão de Levi-Civita, o que será explorado mais adiante.

Defina-se agora $H_F : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$H_F(A, B) := F(A, B, A, B).$$

As afirmações contidas no lema que segue serão úteis adiante.

Lema 36.3 *Seja \mathcal{V} um espaço vetorial real e seja F uma função de \mathcal{V}^4 em \mathbb{R} , linear em todos os argumentos, satisfazendo (36.165)–(36.167) e defina $H_F(A, B) := F(A, B, A, B)$, com $A, B \in \mathcal{V}$. Mostre que*

$$H_F(A, B) = H_F(B, A), \quad (36.168)$$

$$H_F(A, A) = 0, \quad (36.169)$$

$$H_F(A, A+B) = H_F(A, B), \quad (36.170)$$

$$H_F(\alpha A, \beta B) = \alpha^2 \beta^2 H_F(A, B), \quad (36.171)$$

$$H_F(\alpha_1 A + \beta_1 B, \alpha_2 A + \beta_2 B) = (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^2 H_F(A, B), \quad (36.172)$$

para todos $A, B \in \mathcal{V}$ e todos $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. □

Prova. Exercício! ■

Na verdade, (36.172) implica as relações anteriores, mas preferimos listá-las todas para ressaltar sua relevância individual. A seguinte proposição importante é válida:

Proposição 36.11 *Seja \mathcal{V} um espaço vetorial real e sejam F_1 e F_2 duas funções de \mathcal{V}^4 em \mathbb{R} , lineares em todos os argumentos, satisfazendo (36.165)–(36.167), satisfazendo*

$$F_1(A, B, C, D) + F_1(C, A, B, D) + F_1(B, C, A, D) = F_2(A, B, C, D) + F_2(C, A, B, D) + F_2(B, C, A, D) \quad (36.173)$$

para todos $A, B, C, D \in \mathcal{V}$ e tais que $H_{F_1}(A, B) = H_{F_2}(A, B)$ para todos $A, B \in \mathcal{V}$, ou seja,

$$F_1(A, B, A, B) = F_2(A, B, A, B) \quad (36.174)$$

Então, $F_1 = F_2$, ou seja,

$$F_1(A, B, C, D) = F_2(A, B, C, D)$$

para todos $A, B, C, D \in \mathcal{V}$. □

A demonstração (extraída de [223]) da Proposição 36.11 é apresentada no Apêndice 36.A.5, página 1778. Da Proposição 36.11, acima, pode-se obter a seguinte consequência não-trivial:

Proposição 36.12 *Seja \mathcal{V} um espaço vetorial real e seja F uma função de \mathcal{V}^4 em \mathbb{R} , linear em todos os argumentos, satisfazendo (36.165)–(36.167) e satisfazendo*

$$F(A, B, C, D) + F(C, A, B, D) + F(B, C, A, D) = 0 \quad (36.175)$$

para todos $A, B, C, D \in \mathcal{V}$. Seja $H_F(A, B) := F(A, B, A, B)$. Então,

$$F(A, B, C, D) := \frac{1}{6} \left\{ \left[H_F(A+C, B+D) - H_F(A+D, B+C) \right] + \left[H_F(A, B+C) + H_F(B, A+D) + H_F(C, A+D) + H_F(D, B+C) - H_F(A, B+D) - H_F(B, A+C) - H_F(C, B+D) - H_F(D, A+C) \right] + \left[H_F(A, D) + H_F(B, C) - H_F(B, D) - H_F(A, C) \right] \right\}. \quad (36.176)$$

para todos $A, B, C, D \in \mathcal{V}$. □

Prova. A relação (36.176) pode ser demonstrada por verificação de duas maneiras distintas. A primeira, bastante pesada, consiste em expandir-se o lado direito e constatar que equivale ao esquerdo. A segunda demonstração é um pouco menos pesada e faz uso da Proposição 36.11. Vamos a ela.

Seja $F_1(A, B, C, D) := F(A, B, C, D)$ e seja $F_2(A, B, C, D)$ definida pela expressão do lado direito da igualdade em (36.176). Afirmamos que F_2 também satisfaz (36.165)–(36.167) e que vale

$$F_2(A, B, C, D) + F_2(C, A, B, D) + F_2(B, C, A, D) = 0 \quad (36.177)$$

para todos $A, B, C, D \in \mathcal{V}$, o que, junto com (36.175), mostra que (36.173) é satisfeita. Além disso, vale (36.174). Todas essas afirmações podem ser verificadas diretamente da definição de F_2 no lado direito de (36.176), tarefa que deixamos ao paciente e diligente leitor (use (36.168)–(36.172)!). A validade de (36.177), por exemplo, pode ser mais facilmente constatada verificando-se que essa identidade é separadamente satisfeita por cada um dos três termos entre colchetes [...] no lado direito de (36.176). Com isso, a Proposição 36.11 garante-nos a igualdade $F(A, B, C, D) = F_2(A, B, C, D)$ para todos $A, B, C, D \in \mathcal{V}$. ■

• A curvatura seccional

No que segue, M é uma variedade diferenciável dotada de uma métrica g (Riemanniana ou Lorentziana) e de uma conexão de Levi-Civita ∇ (simétrica e compatível com g) e p é um ponto arbitrário de M .

A aplicação

$$R(A, B, C, D) := g(R(A, B)C, D),$$

definida em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ com valores em \mathbb{R} é linear em cada um dos argumentos e satisfaz (36.165)–(36.167) (devido a (36.134), (36.149) e (36.150)). O mesmo vale para a aplicação de $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ em \mathbb{R} definida por

$$G(A, B, C, D) := g(A, C)g(B, D) - g(A, D)g(B, C),$$

como é fácil constatar (faça-o!). Assim, para $p \in M$, definindo²⁵

$$H_{p,R}(A, B) := R_p(A, B, A, B) = g(R(A, B)A, B)_p, \quad (36.178)$$

$$H_{p,G}(A, B) := G_p(A, B, A, B) = g(A, A)_p g(B, B)_p - (g(A, B)_p)^2, \quad (36.179)$$

²⁵Observe-se que, no caso Riemanniano, $H_{p,G}(A, B) \geq 0$, devido à desigualdade de Cauchy-Schwarz (3.11), página 201. No caso da variedade Euclidiana \mathbb{R}^3 , observe-se também que $H_{p,G}(A, B)$ é idêntico a $\|A \wedge B\|^2$, o quadrado do módulo do produto vetorial de A e B . Para ver isso, lembre-se que no caso Euclidiano $|g(A, B)| = \|A\| \|B\| \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre A e B e, portanto, $H_{p,G}(A, B) = \|A\|^2 \|B\|^2 (\sin \theta)^2 = \|A \wedge B\|^2$.

teremos, por (36.172),

$$\begin{aligned} H_{p,R}(\alpha_1 A + \beta_1 B, \alpha_2 A + \beta_2 B) &= (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^2 H_{p,R}(A, B), \\ H_{p,G}(\alpha_1 A + \beta_1 B, \alpha_2 A + \beta_2 B) &= (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^2 H_{p,G}(A, B), \end{aligned}$$

para todos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Logo, se A e $B \in T_p M$ são linearmente independentes, a aplicação $K : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$K_p(A, B) := \frac{H_{p,R}(A, B)}{H_{p,G}(A, B)} = \frac{g(R(A, B)A, B)_p}{g(A, A)_p g(B, B)_p - (g(A, B)_p)^2}$$

satisfaz

$$K_p(\alpha_1 A + \beta_1 B, \alpha_2 A + \beta_2 B) = K_p(A, B),$$

para todos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ (naturalmente, tais que $\alpha_1 A + \beta_1 B$ e $\alpha_2 A + \beta_2 B$ sejam linearmente independentes). Portanto, em $K_p(A, B)$ podemos substituir A e B pois quaisquer outros dois vetores linearmente independentes do subespaço gerado por A_p e B_p . Isso significa que $K_p(A, B)$ depende apenas do subespaço gerado por A_p e B_p em $T_p M$. Assim, dado um subespaço bidimensional σ de $T_p M$, definimos

$$K_p(\sigma) := K_p(A, B),$$

onde A, B são dois vetores linearmente independentes quaisquer de σ . A expressão $K_p(\sigma)$ é denominada *curvatura seccional* de M em p em relação ao plano σ e coincide com a noção de curvatura Gaussiana da Geometria de Superfícies. Um fato importante é que o tensor de curvatura é determinado em p por curvaturas seccionais em p . Essa afirmação é o conteúdo do seguinte corolário da Proposição 36.12:

Corolário 36.1 *Seja M uma variedade diferenciável dotada de uma métrica g (Riemanniana ou Lorentziana) e de uma conexão de Levi-Civita ∇ (simétrica e compatível com g). Então, em cada ponto $p \in M$, o tensor de curvatura R associado a ∇ é determinado por curvaturas seccionais em p . Mais especificamente, vale a seguinte expressão formidável:*

$$\begin{aligned} g(R(A, B)C, D)_p &= \frac{1}{6} \left\{ H_{p,R}(A+C, B+D) - H_{p,R}(A+D, B+C) \right. \\ &\quad + H_{p,R}(A, B+C) + H_{p,R}(B, A+D) + H_{p,R}(C, A+D) + H_{p,R}(D, B+C) \\ &\quad - H_{p,R}(A, B+D) - H_{p,R}(B, A+C) - H_{p,R}(C, B+D) - H_{p,R}(D, A+C) \\ &\quad \left. + H_{p,R}(A, D) + H_{p,R}(B, C) - H_{p,R}(B, D) - H_{p,R}(A, C) \right\}, \end{aligned} \quad (36.180)$$

com $H_{p,R}$ definido em (36.178). Como $H_{p,R}(A, B) = H_{p,G}(A, B)K_p(A, B)$, com $H_{p,G}$ definido em (36.179) e K_p sendo a curvatura seccional, vemos que $g(R(A, B)C, D)_p$ pode ser expresso como uma combinação linear de curvaturas seccionais em p com coeficientes proporcionais às $H_{p,G}$'s. \square

Prova. Adotando $\mathbb{V} = T_p M$ e $F(A, B, C, D) = R_p(A, B, C, D) = g(R(A, B)C, D)_p$, as condições da Proposição 36.12 são satisfeitas ((36.175), por exemplo, segue da primeira identidade de Bianchi (36.143)). Assim, (36.176) conduz a (36.180) e daí às demais afirmações. \blacksquare

36.3.2 O Tensor de Ricci e a Curvatura Escalar

Seja M uma variedade diferenciável dotada de uma métrica g (Riemanniana ou Lorentziana) e de uma conexão afim ∇ e seja R o correspondente tensor de curvatura. Seja p um ponto arbitrário de M .

Como discutido à página 1712, tomemos $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, uma base de vetores em $T_p M$, e $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$, sua base dual de covetores em $T_p^* M$, de sorte que para o pareamento de \mathbf{e}^i e \mathbf{e}_j , valha $\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle_p = \delta_j^i$. Sejam também as bases de vetores $\{\mathbf{e}^{1\sharp}, \dots, \mathbf{e}^{n\sharp}\}$ em $T_p M$ e de covetores duais $\{\mathbf{e}_{1\sharp}, \dots, \mathbf{e}_{n\sharp}\}$, definidos em (36.21), de sorte que tenhamos (36.24).

Fixados $B, C \in \mathcal{X}(M)$ a aplicação $\mathcal{X}(M) \ni A \mapsto R(A, B)C$ define uma aplicação linear de $\mathcal{X}(M)$ em si mesmo, a qual denotamos por $\mathcal{R}_{C, B}A$. Definimos

$$\text{Ric}(C, B) := \text{Tr}(\mathcal{R}_{C, B}). \quad (36.181)$$

É claro que Ric define um tensor de tipo $(0, 2)$, denominado *tensor de Ricci*²⁶. Observe-se que vale a igualdade

$$\text{Ric}(C, B) := \text{Tr}(\mathcal{R}_{C, B}) = \langle \mathbf{e}^l, \mathcal{R}_{C, B} \mathbf{e}_l \rangle_p = \langle \mathbf{e}^l, R(\mathbf{e}_l, B)C \rangle_p.$$

• Simetria do tensor de Ricci

No caso de ∇ ser uma conexão de Levi-Civita para a métrica g , o tensor de Ricci possui uma propriedade de simetria:

$$\text{Ric}(C, B) = \text{Ric}(B, C) \quad (36.182)$$

para todos $B, C \in \mathcal{X}(M)$ pois, pela definição de traço (vide (35.31)),

$$\begin{aligned} \text{Ric}(C, B) &:= \text{Tr}(\mathcal{R}_{C, B}) = \langle \mathbf{e}^l, \mathcal{R}_{C, B} \mathbf{e}_l \rangle_p \stackrel{(36.19)}{=} g(\mathbf{e}^{l\sharp}, \mathcal{R}_{C, B} \mathbf{e}_l)_p = g(\mathcal{R}_{C, B} \mathbf{e}_l, \mathbf{e}^{l\sharp})_p \\ &= g(R(\mathbf{e}_l, B)C, \mathbf{e}^{l\sharp})_p \stackrel{(36.151)}{=} g(R(\mathbf{e}^{l\sharp}, C)B, \mathbf{e}_l)_p = g(\mathcal{R}_{B, C} \mathbf{e}^{l\sharp}, \mathbf{e}_l)_p = g(\mathbf{e}_l, \mathcal{R}_{B, C} \mathbf{e}^{l\sharp})_p \\ &\stackrel{(36.15)}{=} \langle \mathbf{e}_{l\sharp}, \mathcal{R}_{B, C} \mathbf{e}^{l\sharp} \rangle_p = \text{Tr}(\mathcal{R}_{B, C}) = \text{Ric}(B, C). \end{aligned}$$

• O tensor de Ricci em coordenadas locais

O caráter tensorial de Ric talvez fique mais evidente se expressarmos-lo em uma carta local de coordenadas. Escrevendo $\mathcal{R}_{C, B}A = (\mathcal{R}_{C, B}A)^l \frac{\partial}{\partial x^l} = (\mathcal{R}_{C, B})^l_i A^i \frac{\partial}{\partial x^l}$, teremos

$$(\mathcal{R}_{C, B})^l_i A^i \frac{\partial}{\partial x^l} = R^l_{kij} A^i B^j C^k \frac{\partial}{\partial x^l}$$

e, portanto,

$$(\mathcal{R}_{C, B})^l_i = R^l_{kij} B^j C^k.$$

Logo, pela definição de traço,

$$\text{Ric}(C, B) = (\mathcal{R}_{C, B})^l_l = R^l_{kij} B^j C^k.$$

As componentes do tensor de Ricci são comumente denotadas por R_{ij} . Assim, escrevendo

$$\text{Ric}(C, B) = R_{ij} C^i B^j,$$

ou seja, com

$$\text{Ric} = R_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

teremos $R_{ij} C^i B^j = R^l_{ij} B^j C^i$ e, portanto

$$R_{ij} = R^l_{ij}, \quad (36.183)$$

o que expressa as componentes de Ric em termos das componentes do tensor de curvatura. De (36.183) e de (36.154) é fácil mostrar (faça-o!) que as componentes do tensor de Ricci transformam-se por mudanças de coordenadas de acordo com a seguinte expressão:

$$R'_{ij} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^i} \frac{\partial x^b}{\partial x'^j} R_{ab}. \quad (36.184)$$

²⁶Gregorio Ricci Curbastro (1853–1925).

Se ∇ for uma conexão de Levi-Civita para a métrica g , então (36.164) implica que

$$R^l_{klj} = R^l_{lj k} = R^l_{jlk},$$

ou seja, vale para as componentes do tensor de Ricci a propriedade de simetria

$$R_{ij} = R_{ji},$$

refletindo (36.182).

• **A curvatura de Ricci**

No caso Riemanniano, se C é um vetor não-nulo em T_pM , a expressão

$$\mathcal{R}ic(C)_p := \frac{1}{m-1} \frac{\mathcal{R}ic(C, C)_p}{g(C, C)_p} = \frac{1}{m-1} \frac{\langle \mathbf{e}^l, R(\mathbf{e}_l, C)C \rangle_p}{g(C, C)_p}$$

é por vezes denominada *curvatura de Ricci* na direção C . A escolha do fator $m-1$ (m sendo a dimensão de M) deve-se ao fato que $R(\mathbf{e}_l, C)C$ será nula caso o vetor \mathbf{e}_l seja escolhido na direção de C (pela antissimetria do tensor de curvatura R). Assim, na expressão $\langle \mathbf{e}^l, R(\mathbf{e}_l, C)C \rangle_p$ são efetivamente somados $m-1$ termos. Com isso, $\mathcal{R}ic(C)$ representa uma espécie de curvatura média na direção definida por C .

Devido à simetria do tensor de Ricci, podemos sempre escrever, para todos $A, B \in \mathcal{X}(M)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}ic(A, B) &= \frac{1}{4} \left[\mathcal{R}ic(A+B, A+B) - \mathcal{R}ic(A-B, A-B) \right] \\ &= \frac{m-1}{4} \left[\mathcal{R}ic(A+B)g(A+B, A+B) - \mathcal{R}ic(A-B)g(A-B, A-B) \right], \end{aligned}$$

o que mostra que o tensor de Ricci pode ser determinado a partir da curvatura de Ricci. Por ser obtido a partir do tensor de curvatura, o tensor de Ricci é também determinado pela curvatura seccional.

• **A curvatura escalar**

Com o tensor de Ricci podemos definir um tensor $\mathcal{R}ic^\sharp : \mathcal{X}^*(M) \times \mathcal{X}(M)$ por $\mathcal{R}ic^\sharp(A, B) := \mathcal{R}ic(A^\sharp, B)$, com $A \in \mathcal{X}^*(M)$ e $B \in \mathcal{X}(M)$. Se em uma carta local escrevermos $A = A_i dx^i$ e $B = B^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, teremos $\mathcal{R}ic^\sharp(A, B) = R_{ij} g^{ik} A_k B^j = R^k_j A_k B^j$, como facilmente se constata.

Considere-se aplicação $\mathcal{R} : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ que a cada $B \in \mathcal{X}(M)$ associa $\mathcal{R}(B) \in \mathcal{X}(M)$ de sorte que para todo $A \in \mathcal{X}^*(M)$ valha $\langle A, \mathcal{R}(B) \rangle = \mathcal{R}ic^\sharp(A, B)$. Pelo exposto acima, vale em uma carta local $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(B)^i \frac{\partial}{\partial x^i} = R^i_j B^j \frac{\partial}{\partial x^i}$. Verifique! O traço de \mathcal{R} , que denotaremos por \mathcal{R} , será invariante por mudanças locais de coordenadas e dado por

$$\mathcal{R} := \text{Tr}(\mathcal{R}) = \langle \mathbf{e}^i, \mathcal{R}(\mathbf{e}_i) \rangle = \left\langle dx^i, \mathcal{R} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right\rangle = R^i_i,$$

sendo que acima usamos (35.32) e (35.33). A grandeza \mathcal{R} é denominada *curvatura escalar*, ou *escalar de curvatura*, associada ao tensor de Ricci (e ao tensor de curvatura). Note-se que podemos escrever \mathcal{R} diretamente em termos das componentes do tensor de curvatura pois, por (36.183),

$$\mathcal{R} = R^i_i = R^j_j.$$

A curvatura escalar desempenha um papel na Teoria da Relatividade Geral.

36.4 Geodésicas

A noção de curva geodésica é uma das noções fundamentais da Geometria Diferencial, particularmente, das Geometrias Riemanniana e semi-Riemanniana, e desempenha um papel importante na Teoria da Relatividade Geral, onde, no caso de geodésicas tipo-tempo, descreve o movimento em “queda livre” (i.e., sob ausência de forças externas) de um observador

idealmente pontual. No caso da Geometria Riemanniana, uma curva geodésica entre dois pontos é, num sentido que precisaremos, uma curva que minimiza a distância entre esses pontos. Nesse sentido, curvas geodésicas em superfícies têm sido estudadas desde o Século XVII.

• **Geodésicas. Definição**

Seja I um intervalo aberto e conexo da reta real e seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em uma variedade diferenciável m -dimensional onde tenhamos definido uma conexão afim ∇ . Seja $I \ni t \mapsto \dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$, a aplicação que associa a cada $t \in I$ o vetor tangente $\dot{\gamma}$ (“velocidade”) da curva γ no ponto $\gamma(t) \in M$.

A curva γ é dita ser uma *geodésica em relação à conexão afim* ∇ se

$$\frac{D}{dt} \dot{\gamma} = 0 \tag{36.185}$$

em todo I , onde $\frac{D}{dt}$ é a derivação covariante associada a ∇ , dada em (36.62). Como se vê, uma curva geodésica é uma curva cujo vetor tangente é transportado paralelamente ao longo da mesma, de acordo com uma dada conexão afim. Sobre a existência de curvas geodésicas comentaremos mais adiante (Proposição 36.13, página 1752).

Seja (V, h) uma carta local de coordenadas em M e vamos supor que I seja pequeno suficiente de sorte que a curva γ esteja inteiramente contida em V . Usando a carta de coordenadas h , a curva γ será descrita em \mathbb{R}^m por funções $h(\gamma(t)) \equiv (x^1(t), \dots, x^m(t))$, $t \in I$. A representação local de (36.185) é, segundo (36.63), dada por

$$\ddot{x}^k(t) + \Gamma^k_{ij}(x^1(t), \dots, x^m(t)) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{36.186}$$

que é um sistema de m equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, não-lineares, para as funções $x^1(t), \dots, x^m(t)$.

Usando um truque bem conhecido da teoria das equações diferenciais ordinárias, o sistema de m equações de segunda ordem acima pode ser transformado no seguinte sistema de $2m$ equações de primeira ordem

$$\dot{x}^k(t) = y^k(t), \quad k = 1, \dots, m, \tag{36.187}$$

$$\dot{y}^k(t) = -\Gamma^k_{ij}(x^1(t), \dots, x^m(t)) y^i(t) y^j(t), \quad k = 1, \dots, m, \tag{36.188}$$

para as $2m$ funções $(x^1(t), \dots, x^m(t), y^1(t), \dots, y^m(t))$, $t \in I$. Claro está que esse sistema equivale ao anterior e corresponde a uma expressão local de uma equação para $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ no fibrado tangente.

Façamos um comentário final no intento de evitar um certo mal-entendido. No caso de conexões métricas temos $\Gamma^k_{ij} = \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\} + K^k_{ij}$, onde $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\}$ são os símbolos de Christoffel e K^k_{ij} são as componentes do tensor de contorção. Os símbolos de Christoffel são simétricos $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ji \end{smallmatrix} \right\}$ (vide (36.105) e (36.106)), mas as componentes do tensor de contorção **não** são, em geral, antissimétricas, $K^k_{ij} \neq -K^k_{ji}$, ao contrário do que ocorre com as componentes do tensor de torção, que são antissimétricas: $T^k_{ij} = -T^k_{ji}$. Assim, a contribuição das componentes da conexão a equação (36.186) é $\Gamma^k_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\} \dot{x}^i \dot{x}^j + K^k_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \stackrel{(36.98)}{=} \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\} \dot{x}^i \dot{x}^j + T^k_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$. A contribuição dos tensores de contorção ou de torção ao lado direito é, em geral, não-nula, mesmo que o produto $\dot{x}^i \dot{x}^j$ seja simétrico na troca de índices $i \leftrightarrow j$ pois, em geral, $T^k_{ij} \neq -T^k_{ji}$.

• **Geodésicas em relação a conexões métricas**

O resultado que segue, de demonstração elementar, é frequentemente usado:

Lema 36.4 *Seja ∇ uma conexão métrica em relação a um tensor métrico g definido em M e seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva geodésica em M . Então, $g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))_{\gamma(t)}$ é constante para todo I .* □

Prova. Seja ∇ uma conexão métrica, ou seja, satisfazendo (36.86). Temos, por (36.89), página 1729,

$$\frac{d}{dt} g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))_{\gamma(t)} = 2g \left(\frac{D}{dt} \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \right)_{\gamma(t)} \stackrel{(36.185)}{=} 0.$$

Isso estabeleceu que $g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))_{\gamma(t)}$ é constante, como desejávamos provar. ■

• **Curvas tipo espaço, tempo e luz**

No caso de tensores métricos Lorentzianos, uma curva $c : I \rightarrow M$ (I sendo um intervalo aberto de \mathbb{R}) é dita ser uma *curva tipo espaço* se $g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))_{c(t)} < 0$ para todo $t \in I$. Ela é dita ser uma *curva tipo tempo* se $g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))_{c(t)} > 0$ para todo $t \in I$ e é dita ser uma *curva tipo espaço* se $g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))_{c(t)} = 0$ para todo $t \in I$. O Lema 36.4 ensina-nos que o tipo de uma curva geodésica não se altera.

• **Comprimento de curvas no caso de métricas Riemannianas**

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana diferenciável conexa de dimensão n . Com o uso da métrica Riemanniana g podemos definir uma noção de comprimento para curvas diferenciáveis em M com a qual podemos definir uma métrica em M , ou seja, uma noção de distância entre pontos, tal como definido na Seção 27.1, página 1312.

Seja $\mathbb{R} \supset [a, b] \ni t \mapsto c(t) \in M$ uma curva diferenciável em M , sendo a e b arbitrários e tais que $-\infty < a < b < \infty$. Definimos o comprimento de c segundo g como sendo a quantidade

$$\ell(c) \equiv \ell_g(c) := \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))_{c(t)}} dt.$$

A noção de comprimento de curvas pode ser facilmente estendida de modo a incluir curvas contínuas e diferenciáveis por partes, ou seja, curvas $\mathbb{R} \supset [a, b] \ni t \mapsto c(t) \in M$ contínuas e tais que exista um conjunto finito $\{t_0, \dots, t_m\} \subset [a, b]$ com $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$ tal que em cada intervalo $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, m-1$ a curva seja diferenciável. Nesse caso, define-se

$$\ell(c) \equiv \ell_g(c) := \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))_{c(t)}} dt,$$

como é de se esperar. É quase desnecessário observar que $\ell(c) \geq 0$ e que $\ell(c) = 0$ se e somente se c for uma curva constante.

Dada uma curva contínua e diferenciável por partes $\mathbb{R} \supset [a, b] \ni t \mapsto c(t) \in M$, denominamos $c(a)$ como o ponto inicial de c e $c(b)$ como o ponto final de c e, seguindo a linguagem comum, dizemos que c parte de $c(a)$ e chega em $c(b)$. Note-se que se c parte de $c(a)$ e chega em $c(b)$, então a curva $\mathbb{R} \supset [a, b] \ni t \mapsto c(a + b - t) \in M$ parte de $c(b)$ e chega em $c(a)$.

• **Comprimento de curvas no caso de métricas Lorentzianas**

No caso Lorentziano na noção de comprimento de também ser definida para curvas que possuam um tipo bem definido: para curvas tipo tempo, definimos $\ell(c) \equiv \ell_g(c) := \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))_{c(t)}} dt$ e para curvas tipo espaço, definimos $\ell(c) \equiv \ell_g(c) := \int_a^b \sqrt{-g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))_{c(t)}} dt$. No caso de curvas tipo luz, o comprimento é nulo, naturalmente.

• **Curvas minimizantes do comprimento, no caso Riemanniano**

Se a curva diferenciável c (e, em particular, os pontos inicial e final $c(a)$ e $c(b)$) estiver dentro de uma carta local V , podemos escrever seu comprimento em termos de coordenadas locais como

$$\ell(c) = \int_a^b L(x^1(t), \dots, x^m(t), \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^m(t)) dt,$$

$$\text{com } L(x^1(t), \dots, x^m(t), \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^m(t)) := [g_{ij}(x^1(t), \dots, x^m(t))\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)]^{1/2}. \quad (36.189)$$

A curva c será uma *curva extremal local* (eventualmente, uma *curva minimizante local*) se satisfizer as equações de Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0$, $k = 1, \dots, m$. Isso significa que o comprimento de c é um extremo (máximo ou mínimo) entre as curvas locais que se iniciam e terminam nos mesmos pontos $c(a)$ e $c(b)$.

Calcular a forma explícita das equações de Euler-Lagrange acima é um exercício que recomendamos a todo estudante. O resultado é

$$\ddot{x}^k(t) + \left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\} (x^1(t), \dots, x^m(t)) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t) = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

onde $\left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\}$ são os símbolos de Christoffel definidos em (36.105). Como se vê, as equações de Euler-Lagrange acima coincidem com as equações da curva geodésica da conexão de Levi-Civita associada à métrica Riemanniana g (vide (36.186)).

Obtemos, portanto, que no caso de conexões de Levi-Civita há uma interpretação adicional para a natureza das curvas geodésicas: elas são localmente curvas minimizantes ou maximizantes de comprimento. No caso de conexões mais gerais essa interpretação não está presente e, caso uma métrica esteja definida, é necessário distinguir entre curvas minimizantes ou maximizantes de comprimento e curvas geodésicas.

No caso Lorentziano, as conclusões são as mesmas quer as curvas consideradas sejam tipo tempo ou tipo espaço.

• **O mapa exponencial geodésico**

Vamos aqui supor que M seja uma variedade infinitamente diferenciável e que conexão ∇ seja também infinitamente diferenciável, ou seja, que suas componentes Γ^k_{ij} sejam funções infinitamente diferenciáveis em suas respectivas coordenadas locais.

Pretendemos aqui fazer algumas considerações importantes sobre o sistema de equações diferenciais (36.187)–(36.188). É natural considerarmos esse sistema sob condições iniciais que especifiquem o valor das funções incógnitas $x^i(t)$ e $y^i(t)$ no instante $t = 0$, ou seja, sob a especificação de $(x^1(0), \dots, x^m(0), y^1(0), \dots, y^m(0)) \equiv (x_0^1, \dots, x_0^m, y_0^1, \dots, y_0^m)$. Esses dados de Cauchy especificam o ponto da variedade atingido pela curva geodésica em $t = 0$, a saber, aquele com coordenadas locais (x_0^1, \dots, x_0^m) e a velocidade da curva geodésica em $t = 0$, especificada pelo vetor (y_0^1, \dots, y_0^m) , também em coordenadas locais.

Fazendo uso de teoremas gerais da Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias (notadamente, do Teorema de Picard-Lindelöf, Teorema 28.4, página 1386) podemos estabelecer a seguinte afirmação sobre o sistema de equações diferenciais expresso em (36.187)–(36.188).

Proposição 36.13 *A variedade M pode ser recoberta com abertos U com a seguinte propriedade: para cada U existem $\delta > 0$ e $r > 0$ tais que o sistema (36.187)–(36.188) com condições iniciais $p \in U$ e $v \in \mathbb{T}_p M$, sendo com $\|v\| < r$, possui solução única dentro de um mesmo intervalo $t \in (-\delta, \delta)$.* □

No que segue, vamos denotar por $\gamma(t, p, v)$ a curva geodésica definida no intervalo $t \in (-\delta, \delta)$ e que passa por $p \in U$ com velocidade v (com $\|v\| < r$) em $t = 0$. Assim, $\gamma(0, p, v) = p$ e $\dot{\gamma}(0, p, v) = v \in \mathbb{T}_p M$. Note-se que, pelo Lema 36.4, página 1750, temos

$$g(\dot{\gamma}(t, p, v), \dot{\gamma}(t, p, v))_{\gamma(t, p, v)} = g(v, v)_p \quad (36.190)$$

para todo $t \in (-\delta, \delta)$.

Antes de prosseguirmos, façamos uma observação importante sobre curvas geodésicas. É de se esperar que, para uma dado aberto U , exista alguma relação entre as quantidades δ e r referidas na Proposição 36.13, pois se nos permitirmos aumentar $\|v\|$, o intervalo de validade da solução $\gamma(t, p, v)$, especificado por δ , pode ter de ser reduzido. A proposição que segue, a qual reflete uma propriedade de invariância de escala específica de curvas geodésicas, permite ter essa relação entre r e δ sob um certo controle.

Proposição 36.14 *Sejam U , δ e r referidos na Proposição 36.13. Então, para todo $p \in U$ e cada $a > 0$ vale a relação*

$$\gamma(t/a, p, v) = \gamma(t, p, v/a)$$

sempre que $p \in U$ e $v \in \mathbb{T}_p M$ com $\|v\| < r$ para todo $t \in (-a\delta, a\delta)$. □

Prova. Seja $a > 0$. Tomemos o sistema (36.187)–(36.188) e definamos

$$\tilde{x}^k(t) := x^k(at) \quad \text{e} \quad \tilde{y}^k(t) := ay^k(at).$$

Com o que podemos escrever $x^k(t) = \tilde{x}^k(t/a)$ e $y^k(t) = a^{-1}\tilde{y}^k(t/a)$. Substituindo em (36.187)–(36.188), obtemos

$$\ddot{\tilde{x}}^k(\tau) = \tilde{y}^k(\tau), \quad k = 1, \dots, m, \quad (36.191)$$

$$\ddot{\tilde{y}}^k(\tau) = -\Gamma^k_{ij}(\tilde{x}^1(\tau), \dots, \tilde{x}^m(\tau)) \tilde{y}^i(\tau) \tilde{y}^j(\tau), \quad k = 1, \dots, m, \quad (36.192)$$

sendo que $\tau \equiv t/a$. As condições iniciais devem fixar $(\tilde{x}^1(0), \dots, \tilde{x}^m(0), \tilde{y}^1(0), \dots, \tilde{y}^m(0))$ e escolhendo

$$(\tilde{x}^1(0), \dots, \tilde{x}^m(0), \tilde{y}^1(0), \dots, \tilde{y}^m(0)) = (x_0^1, \dots, x_0^m, y_0^1, \dots, y_0^m)$$

temos um problema de valor inicial idêntico ao anterior, cuja solução fornecerá as curvas geodésicas $\gamma(\tau, p, v)$ com $p \in U, v \in \mathbb{T}_p M$ com $\|v\| < r$, em todo intervalo $\tau \in (-\delta, \delta)$.

Como $y^k(0) = a^{-1}\tilde{y}^k(0) = a^{-1}y_0^m$, para cada $k = 1, \dots, m$, vemos pela unicidade de soluções do Problema de Cauchy considerado que essa curva geodésica deve ser idêntica à curva $\gamma(t, p, v/a)$. Concluímos que

$$\gamma(t/a, p, v) = \gamma(t, p, v/a)$$

sempre que $p \in U$ e $v \in \mathbb{T}_p M$ com $\|v\| < r$ para todo $t \in (-a\delta, a\delta)$. ■

O que aprendemos da Proposição 36.14 é que podemos reescalonar o intervalo de existência de uma geodésica de $(-\delta, \delta)$ e um intervalo $(-a\delta, a\delta)$ com o preço de termos de reescalonar a condição inicial v para v/a .

Esses escalonamentos podem ser fixados se convençionarmos tomar $a\delta = 2$, com o que temos o seguinte:

Corolário 36.2 *A variedade M pode ser recoberta com abertos U com a seguinte propriedade: para cada U existe $r' > 0$ ($r' = r\delta/2$, com r e δ mencionados na Proposição 36.13) tal que o sistema (36.187)–(36.188) com condições iniciais $p \in U$ e $v \in \mathbb{T}_p M$, sendo com $\|v\| < r'$, possui solução única dentro de um mesmo intervalo $t \in (-2, 2)$. Essa solução corresponde a uma curva geodésica $\gamma(t, p, v)$ satisfazendo as condições iniciais $\gamma(0, p, v) = p$ e $\dot{\gamma}(0, p, v) = v \in \mathbb{T}_p M$ com $\|v\| < r'$, para todo $p \in U$.* □

No que segue denominaremos por $B_p(r')$ a bola de raio r' centrada em 0 no espaço tangente $\mathbb{T}_p M$.

Assim, com a mencionada restrição a v , $\gamma(t, p, v)$ está sempre definida para o intervalo padrão $t \in (-2, 2)$. Muitas propriedades topológicas de famílias de geodésicas podem ser estudadas analisando-se a aplicação que leva cada par (p, v) a $\gamma(t, p, v)$ para um valor de t fixo.

Com isso em mente, introduzimos a seguinte definição: a aplicação que a cada $(p, v) \in M \times B_p(r')$ associa o ponto $\gamma(1, p, v)$ é denominada *mapa exponencial geodésico*, ou *aplicação exponencial geodésica*, e é denotado por $\exp(p, v)$:

$$M \times B_p(r') \ni (p, v) \longmapsto \exp(p, v) := \gamma(1, p, v) \in M.$$

Em muitas situações fixamos o ponto p e atentamos apenas para a dependência com o vetor velocidade $v \in B_p(r')$. Com essa ênfase em mente é costume denotar-se $\exp(p, v)$ por $\exp_p(v)$. Assim, para cada $p \in M$, definimos

$$B_p(r') \ni v \longmapsto \exp_p(v) := \gamma(1, p, v) \in M.$$

Essa aplicação também é denominada mapa exponencial geodésico ou aplicação exponencial geodésica e a mesma é o objeto de diversos resultados importantes, tais como o Lema de Gauss, ao qual dedicamos a Seção 36.4.1, página 1753 (vide Lema 36.5, página 1755).

36.4.1 O Lema de Gauss

Aqui seguiremos basicamente a exposição de [223], mas com adaptações e com uma organização um tanto distinta.

Seja M uma variedade Riemanniana ou Lorentziana com uma métrica g e uma conexão métrica simétrica ∇ . Tomemos $p \in M$ e $v \in \mathbb{T}_p M$, um vetor do espaço tangente a M em p contido em uma bola aberta $B(0, r)$ centrada em $0 \in \mathbb{T}_p M$ de raio $r > 0$, suficientemente pequeno de modo a garantir a existência das geodésicas $\gamma(t, p, v)$ para todo $v \in B(0, r)$ e para todo t com $0 \leq t \leq 1$.

Para p fixo, a aplicação exponencial \exp_p mapeia $B(0, r)$ em M , de sorte que a aplicação diferencial $(d\exp_p)_v$ mapeia²⁷ $\mathbb{T}_v B(0, r) \subset \mathbb{T}_v(\mathbb{T}_p M)$ em $\mathbb{T}_{\exp_p(v)} M$.

²⁷O leitor deve atentar que a diferencial em $(d\exp_p)_v$ refere-se à dependência de $\exp_p(v)$ em v , não em p , que é fixo.

Para $v \in B(0, r)$, considere-se a curva diferenciável em $B(0, r)$ definida por uma função $v(s)$ com $v(0) = v$, sendo que consideraremos s em um intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, de sorte que $v(s) \in B(0, r)$ para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Vamos também assumir que ϵ é pequeno o suficiente de modo a garantir que $\{v(s), s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ não contenha vetores paralelos, ou seja, que não haja $s, s' \in (-\epsilon, \epsilon)$ com $s \neq s'$ e $v(s) = \alpha v(s')$ para algum $\alpha \neq 0$.

A derivada $v'(0)$ é o vetor tangente à curva no ponto v e, portanto, um elemento de $\mathbb{T}_v B(0, r) \subset \mathbb{T}_v(\mathbb{T}_p M)$. É importante notar que $\mathbb{T}_v(\mathbb{T}_p M)$ e $\mathbb{T}_p M$ são espaços vetoriais isomorfos: para $w \in \mathbb{T}_p M$ a curva $v(s) = v + sw$ satisfaz $v(0) = v$ e $v'(0) = w$, observação que permite identificar os elementos de $\mathbb{T}_v(\mathbb{T}_p M)$ com os de $\mathbb{T}_p M$.

Segundo (35.49), se $v(s)$ é uma curva como a de acima e $v'(0) \in \mathbb{T}_v B(0, r) \subset \mathbb{T}_v(\mathbb{T}_p M) \simeq \mathbb{T}_p M$, podemos calcular $(d\exp_p)_v(v'(0))$ com

$$(d\exp_p)_v(v'(0)) = \left. \frac{d}{ds} \exp_p(v(s)) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \gamma(1, p, v(s)) \right|_{s=0}, \quad (36.193)$$

onde o lado direito é entendido como o vetor tangente à curva $s \mapsto \gamma(1, p, v(s))$ no ponto definido por $s = 0$.

Seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto definido por

$$\mathcal{O} := \left\{ (t, s), 0 \leq t \leq 1, -\epsilon < s < \epsilon \right\}, \quad (36.194)$$

com ϵ especificado acima. Para diversos propósitos, necessitamos estudar propriedades da superfície bidimensional $S : \mathcal{O} \rightarrow M$ definida por

$$S(t, s) = \exp_p(tv(s)) = \gamma(1, p, tv(s)) = \gamma(t, p, v(s)), \quad (t, s) \in \mathcal{O}. \quad (36.195)$$

Para cada s fixo, a curva $t \mapsto S(t, s)$ é uma geodésica que parte de p em $t = 0$ com velocidade $v(s)$ enquanto que para t fixo a curva $s \mapsto S(t, s)$ intercepta aquelas geodésicas. Os vetores tangentes a essas curvas são $\frac{\partial S}{\partial t}$ e $\frac{\partial S}{\partial s}$, respectivamente, e no que segue iremos calculá-los em certos pontos de interesse. A derivada $\frac{\partial S}{\partial t}(t, s)$ representa a velocidade da geodésica em $\gamma(p, t, v(s))$, enquanto que a derivada $\frac{\partial S}{\partial s}(t, s)$ representa a taxa de variação de $\gamma(p, t, v(s))$ quando de uma variação do parâmetro s . Por essa razão $\frac{\partial S}{\partial s}(t, s)$ é denominada *variação geodésica* associada à família de velocidades $\{v(s), -\epsilon < s < \epsilon\}$.

Para a derivada em t temos

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, s) = \frac{\partial}{\partial t} \gamma(t, p, v(s)) \equiv \dot{\gamma}(t, p, v(s)), \quad (36.196)$$

que é simplesmente o vetor tangente à geodésica que parte de p com velocidade $v(s)$ no ponto $\gamma(t, p, v(s))$. Observemos também que para $\alpha \in \mathbb{R}$, a curva em $\mathbb{T}_p M$ definida por $\tau \mapsto v + \tau\alpha v$ passa por v em $\tau = 0$ com velocidade αv . Assim, por (35.49), temos

$$(d\exp_p)_v(\alpha v) = \left. \frac{d}{d\tau} \exp_p(v + \alpha\tau v) \right|_{\tau=0} = \left. \frac{d}{d\tau} \gamma(1, p, (1 + \alpha\tau)v) \right|_{\tau=0} = \left. \frac{d}{d\tau} \gamma(1 + \alpha\tau, p, v) \right|_{\tau=0} = \alpha \dot{\gamma}(1, p, v) \quad (36.197)$$

e por (36.196) concluímos que

$$(d\exp_p)_v(\alpha v) = \alpha \frac{\partial S}{\partial t}(1, 0). \quad (36.198)$$

Para a derivada em s temos

$$\frac{\partial S}{\partial s}(t, s) = \frac{\partial}{\partial s} \gamma(1, p, tv(s)) \stackrel{(36.193)}{=} (d\exp_p)_{tv(s)}(tv'(s)) = t(d\exp_p)_{tv(s)}(v'(s)). \quad (36.199)$$

Em particular, isso implica

$$\frac{\partial S}{\partial s}(1, 0) = (d\exp_p)_v(v'(0)) \quad (36.200)$$

e

$$\frac{\partial S}{\partial s}(0, s) = 0, \quad (36.201)$$

para todo s . Para referência futura, notemos também que por (36.199) segue que

$$\frac{\partial S}{\partial s}(t, 0) = (d\exp_p)_{tv(0)}(tv'(0)). \quad (36.202)$$

Lema 36.5 (Lema de Gauss) *Seja M uma variedade Riemanniana ou Lorentziana com uma métrica g e com uma conexão métrica simétrica ∇ . Seja $p \in M$. Então, vale*

$$g\left((d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w)\right)_{\exp_p(v)} = g(v, w)_p \quad (36.203)$$

para todos $v \in T_pM$ para os quais $\exp_p(v)$ esteja definida e todo $w \in T_v(T_pM) \simeq T_pM$. \square

Prova. Para $v = 0$ ou $w = 0$ a relação (36.203) é válida trivialmente, de sorte que consideramos $v \neq 0$ e $w \neq 0$. Também assumiremos, para o caso Lorentziano, que v não é tipo luz. A validade de (36.203) para v tipo luz pode ser obtida por continuidade a partir dos demais casos.

Fixado v , vamos decompor w em uma componente paralela a v e uma componente “perpendicular” a v . Para tal, escrevemos $w_{\parallel} := \frac{g(v, w)_p}{g(v, v)_p} v$ e $w_{\perp} := w - w_{\parallel}$. É trivial que $w = w_{\parallel} + w_{\perp}$ e é fácil ver que $g(v, w_{\perp})_p = 0$.

Como a aplicação $w \mapsto (d\exp_p)_v(w)$ é linear, podemos escrever $(d\exp_p)_v(w) = (d\exp_p)_v(w_{\parallel}) + (d\exp_p)_v(w_{\perp})$. Para demonstrar o lema é suficiente provarmos que

$$g\left((d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w_{\parallel})\right)_{\exp_p(v)} = g(v, w_{\parallel})_p \quad (36.204)$$

e que

$$g\left((d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w_{\perp})\right)_{\exp_p(v)} = 0 = g(v, w_{\perp})_p, \quad (36.205)$$

o que será feito no que segue.

Para provarmos (36.204), notamos que se $w_{\parallel} = av$, então podemos escrever, por (36.197), que

$$(d\exp_p)_v(w_{\parallel}) = (d\exp_p)_v(av) = a\dot{\gamma}(1, p, v).$$

Logo,

$$g\left((d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w_{\parallel})\right)_{\exp_p(v)} = ag\left(\dot{\gamma}(1, p, v), \dot{\gamma}(1, p, v)\right)_{\exp_p(v)}.$$

Agora, como γ é uma geodésica, $\dot{\gamma}$ é transportada paralelamente ao longo de γ e, pelo Lema 36.4, página 1750, tem-se $g\left(\dot{\gamma}(1, p, v), \dot{\gamma}(1, p, v)\right)_{\exp_p(v)} = g\left(\dot{\gamma}(0, p, v), \dot{\gamma}(0, p, v)\right)_p = g(v, v)_p$. Logo, provamos que

$$g\left((d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w_{\parallel})\right)_{\exp_p(v)} = ag(v, v)_p = g(v, w_{\parallel})_p,$$

que é (36.204). Passemos agora à demonstração de (36.205).

Seja a curva em T_pM definida por $v(s) := v + sw_{\perp}$ com $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, como discutido acima. Naturalmente, $v(0) = v$ e $v'(s) = w_{\perp}$ para todo s . Para tal curva $s \mapsto v(s)$ consideremos a superfície $S_{w_{\perp}} : \mathcal{O} \rightarrow M$ definida como em (36.195) por $S_{w_{\perp}}(t, s) = \exp_p(tv(s)) = \exp_p(t(v + sw_{\perp})) = \gamma(1, p, t(v + sw_{\perp})) = \gamma(t, p, v + sw_{\perp})$, $(t, s) \in \mathcal{O}$. (36.206)

Por (36.198) (com $\alpha = 1$), e por (36.200), temos

$$g\left((d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w_{\perp})\right)_{\exp_p(v)} = g\left(\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(1, 0), \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial s}(1, 0)\right)_{\exp_p(v)}. \quad (36.207)$$

Motivados pela expressão do lado direito, vamos estudar o produto escalar $g\left(\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s), \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial s}(t, s)\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)}$ com $(t, s) \in \mathcal{O}$ (vide (36.194)). Em particular, desejamos provar que essa expressão independe de t quando $s = 0$. Tem-se que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s), \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial s}(t, s)\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)} \\ &= g\left(\frac{D}{\partial t} \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s), \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial s}(t, s)\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)} + g\left(\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s), \frac{D}{\partial t} \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial s}(t, s)\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)}. \end{aligned}$$

Observemos que para cada s vale $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s) = \frac{D}{\partial t} \dot{\gamma}(t, p, v(s)) = 0$, por definição, pois γ é uma geodésica. Com isso, o primeiro termo do lado direito da expressão acima é nulo. Para provar que o segundo termo também é nulo devemos primeiramente invocar o Lema de Simetria, Lema 36.1, página 1727, e escrever

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s), \frac{D}{\partial t} \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial s}(t, s)\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)} &= g\left(\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s), \frac{D}{\partial s} \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s)\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s), \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s)\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g\left(\dot{\gamma}(t, p, v(s)), \dot{\gamma}(t, p, v(s))\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)}. \end{aligned}$$

Com $\dot{\gamma}$ é transportado paralelamente (segundo ∇) ao longo de γ , o Lema 36.4, página 1750, garante que

$$\begin{aligned} g\left(\dot{\gamma}(t, p, v(s)), \dot{\gamma}(t, p, v(s))\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)} &= g\left(\dot{\gamma}(0, p, v(s)), \dot{\gamma}(0, p, v(s))\right)_{S_{w_{\perp}}(0, s) \equiv p} \\ &= g(v(s), v(s))_p = g(v + sw_{\perp}, v + sw_{\perp})_p = g(v, v)_p + s^2 g(w_{\perp}, w_{\perp})_p. \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s), \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial s}(t, s)\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)} = sg(w_{\perp}, w_{\perp})_p.$$

Como essa expressão anula-se em $s = 0$, segue que $g\left(\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial s}(t, 0)\right)_{S_{w_{\perp}}(t, 0) \equiv \exp_p(tv)}$ é constante em t . Porém, por (36.201), $\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial s}(t, 0)$ anula-se em $t = 0$ e, assim,

$$g\left(\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial s}(t, 0)\right)_{\exp_p(tv)} = 0 \quad \text{para todo } t. \quad (36.208)$$

Logo, por (36.207), estabelecemos que $g\left((d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w_{\perp})\right)_{\exp_p(v)} = 0$, provando (36.205). \blacksquare

Expresso em outros termos, (36.208) informa-nos que

$$g\left(\dot{\gamma}(t, p, v), \frac{d}{ds} \gamma(t, p, v + sw_{\perp}) \Big|_{s=0}\right)_{\gamma(t, p, v)} = 0, \quad (36.209)$$

para cada $t \in [0, 1]$ e para todos $v \in T_pM$ para os quais $\exp_p(v)$ esteja definida e todo $w \in T_v(T_pM) \simeq T_pM$.

Essa afirmação possui um conteúdo geométrico, o qual expressamos na seguinte proposição:

Proposição 36.15 *Seja $r > 0$ tal que $\exp_p(v)$ esteja definida para todo $v \in T_pM$ com $g(v, v)_p = r$. Seja $S(r) = \{v' \in T_pM \mid g(v', v')_p = r\}$ a superfície da “esfera” em T_pM de raio r (segundo a métrica g) centrada na origem. Para $t \in [0, 1]$, seja a superfície em M definida por $S_t(r) := \{\gamma(t, p, v'), v' \in S(r)\} \subset M$, ou seja, a imagem de $S(r)$ pelo mapa $T_pM \ni u \mapsto \exp_p(u) \in M$.*

Então, para cada $t \in [0, 1]$ e cada $v \in S(r)$ o vetor tangente $\dot{\gamma}(t, p, v)$ da geodésica $\tau \mapsto \gamma(\tau, p, v)$ é ortogonal (segundo g) à superfície $S_t(r)$ no ponto $\gamma(t, p, v)$. \square

Prova. A demonstração é uma mera reinterpretação dos fatos já expostos. Fixemos o vetor $v \in S(r)$. Para os pontos da curva $s \mapsto v + sw_{\perp} \in T_pM$ teremos $g(v + sw_{\perp}, v + sw_{\perp})_p = g(v, v)_p + s^2 g(w_{\perp}, w_{\perp})_p$ e, portanto, a curva $s \mapsto v + sw_{\perp}$ tangencia em $s = 0$ a superfície $S(r)$ em v . Agora, o vetor $\frac{d}{ds} \gamma(t, p, v + sw_{\perp}) \Big|_{s=0}$ é tangente a superfície $S_t(r)$ no ponto $\gamma(t, p, v)$ para qualquer w_{\perp} ortogonal (segundo g) a v . Assim, (36.209) está afirmando que para cada $t \in [0, 1]$ o vetor tangente $\dot{\gamma}(t, p, v)$ à geodésica que parte de p com velocidade v é ortogonal à superfície $S_t(r)$ no ponto $\gamma(t, p, v)$. \blacksquare

A afirmação da Proposição 36.15 é a versão do Lema de Gauss, tal como originalmente formulado por seu autor.

36.4.2 Pontos Conjugados e a Equação de Jacobi

Nesta seção discutiremos algumas propriedades especiais de famílias de geodésicas, como a de focalização, e discutiremos a influência da curvatura sobre essas propriedades. Salvo menção em contrário estaremos sempre lidando com conexões de Levi-Civita.

36.4.2.1 A Equação de Jacobi

Consideremos a superfície $S \equiv S_{v,w}$ definida em (36.195), $v(s)$ na forma $v(s) = v + sw$, com $v, w \in T_p M$, para um certo $p \in M$. Naturalmente, $v(0) = v$ e $v'(0) = w$. Consideremos nessa superfície o campo $\mathcal{O} \ni (t, s) \mapsto C_{v,w}(t, s) \in T_{\gamma(t,p,v(s))}M$ definido por $C_{v,w}(t, s) := \frac{\partial S_{v,w}}{\partial s}(t, s)$, com $(t, s) \in \mathcal{O}$. Como discutimos anteriormente (página 1754), $C_{v,w}(t, s)$ é o campo das *variações geodésicas* sobre a superfície definida pela função $S_{v,w}$. No que segue, vamos estabelecer uma equação diferencial, denominada *equação de Jacobi*, satisfeita por $\frac{\partial S_{v,w}}{\partial s}(t, 0)$, a variação geodésica sobre a geodésica $t \mapsto \gamma(p, t, v)$.

Sabemos que $\frac{D}{dt} \frac{\partial S_{v,w}}{\partial t}(t, s) = 0$, pois $\frac{\partial S_{v,w}}{\partial t}(t, s) = \dot{\gamma}(p, t, v(s))$ e $t \mapsto \gamma(p, t, v(s))$ é uma geodésica. Logo,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial S_{v,w}}{\partial t}(t, s) &= \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial S_{v,w}}{\partial t}(t, s) + \left[\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} - \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \right] \frac{\partial S_{v,w}}{\partial t}(t, s) \\ (36.83) \quad &= \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial S_{v,w}}{\partial t}(t, s) + \left[\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} - \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \right] \frac{\partial S_{v,w}}{\partial t}(t, s) \\ (36.139) \quad &= \frac{D^2}{dt^2} \frac{\partial S_{v,w}}{\partial s}(t, s) + \left(R \left(\frac{\partial S_{v,w}}{\partial s}, \frac{\partial S_{v,w}}{\partial t} \right) \frac{\partial S_{v,w}}{\partial t} \right)(t, s), \end{aligned} \quad (36.210)$$

sendo que na passagem da primeira para a segunda linha usamos o Lema de Simetria, Lema 36.1, página 1727, e na última igualdade usamos a Proposição 36.7, página 1739.

Consideremos agora a geodésica $t \mapsto \gamma(t, p, v(0))$ e sobre a mesma os campos definidos por $t \mapsto \frac{\partial S_{v,w}}{\partial s}(t, 0)$ e $t \mapsto \frac{\partial S_{v,w}}{\partial t}(t, 0) = \dot{\gamma}(t, p, v(0)) \equiv \dot{\gamma}(t)$. O primeiro é o campo de variação geodésica sobre a geodésica $t \mapsto \gamma(p, t, v)$ induzida por uma variação “infinitesimal” da velocidade inicial na direção w . O segundo é o campo das velocidades sobre a mesma geodésica.

A igualdade obtida em (36.210) implica (tomando-se $s = 0$)

$$\frac{D^2}{dt^2} \left[\frac{\partial S_{v,w}}{\partial s}(t, 0) \right] + R \left(\left[\frac{\partial S_{v,w}}{\partial s}(t, 0) \right], \dot{\gamma}(t) \right) \dot{\gamma}(t) = 0, \quad (36.211)$$

para todo t . Essa expressão inspira as seguintes definições. Dada uma geodésica $t \mapsto \gamma(p, t, v)$, $t \in (a, b)$, dizemos que um campo $J(t) \in T_{\gamma(p,t,v)}M$, $t \in (a, b)$, definido ao longo de γ , é um *campo de Jacobi*²⁸ se satisfizer a equação diferencial

$$\frac{D^2}{dt^2} J(t) + R \left(J(t), \dot{\gamma}(t) \right) \dot{\gamma}(t) = 0, \quad (36.212)$$

para todo $t \in (a, b)$. A equação (36.212) é denominada *equação de Jacobi*. Trata-se de uma equação diferencial linear de segunda ordem e estaremos interessados em tratá-la enquanto problema de valor inicial, com dados iniciais tais como $J(0)$ e $\frac{d}{dt} J(0)$ ou $J(0)$ e $\frac{d}{dt} J(0)$ (assumindo aqui $0 \in (a, b)$). Note-se que $\frac{d}{dt} J(0)$ pode ser expressa em termos de $J(0)$ e $\frac{d}{dt} J(0)$ e, reciprocamente, que $\frac{d}{dt} J(0)$ pode ser expressa em termos de $J(0)$ e $\frac{d}{dt} J(0)$, o que facilmente se vê pela expressão (36.63), página 1722, da derivação covariante em uma carta local de coordenadas.

• Soluções da equação de Jacobi

Antes de prosseguirmos, vamos discutir algumas soluções mais óbvias da equação de Jacobi. Afirmamos que os campos

$$J_1^{v,w}(t) := \frac{\partial S_{v,w}}{\partial s}(t, 0), \quad J_2^v(t) := \dot{\gamma}(p, t, v), \quad \text{e} \quad J_3^v(t) := tJ_2(t) := t\dot{\gamma}(p, t, v) \quad (36.213)$$

²⁸Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851).

são campos de Jacobi definidos sobre a geodésica $t \mapsto \gamma(p, t, v)$ e satisfazem as condições iniciais

$$\begin{cases} J_1^{v,w}(0) = 0, \\ \frac{D}{dt} J_1^{v,w}(0) = w, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} J_2^v(0) = v, \\ \frac{D}{dt} J_2^v(0) = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} J_3^v(0) = 0, \\ \frac{D}{dt} J_3^v(0) = v. \end{cases} \quad (36.214)$$

A argumentação que justifica tais afirmações é a que segue:

- Como vimos em (36.211), o campo $J_1^{v,w}(t) = \frac{\partial S_{v,w}}{\partial s}(t, 0)$ é um campo de Jacobi e satisfaz $J_1^{v,w}(0) = 0$ (vide (36.201)) $\frac{D}{dt} J_1^{v,w}(0) = w$, pois

$$\frac{D}{dt} J_1^{v,w}(0) = \frac{D}{dt} \frac{\partial S_{v,w}}{\partial s}(0, 0) \stackrel{(36.83)}{=} \frac{D}{ds} \frac{\partial S_{v,w}}{\partial t}(0, 0) = \frac{D}{ds} \dot{\gamma}(p, 0, v(s)) \Big|_{s=0} = \frac{D}{ds} v(s) \Big|_{s=0} = v'(0) = w,$$

pois, $\frac{D}{ds} v(s) = v'(s)$ para todo s . O estudante não convencido dessa última igualdade deve recordar que, em uma carta local de coordenadas, na qual possamos escrever as coordenadas de $\gamma(p, t, v(s))$ como $x^k(t, s)$, teremos

$$\frac{D}{ds} v = \sum_a \left[\frac{dv^a}{ds} + \sum_{b,c} \Gamma_{bc}^a v^b \frac{\partial x^c}{\partial s}(0, s) \right] \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{dv^a}{ds} \frac{\partial}{\partial x^a} = v'(s),$$

já que $\frac{\partial x^c}{\partial s}(0, s) = 0$, pois $\gamma(p, 0, v(s)) = p$ para todo s .

- O campo $J_2^v(t) = \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(p, t, v(0)) = \frac{\partial S}{\partial t}(t, 0)$ é um campo de Jacobi, pois $\frac{D}{dt} \dot{\gamma}(t) = 0$ (equação da geodésica) e pois $R(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = 0$, devido à antissimetria do tensor de curvatura R , o que mostra que (36.212) é, nesse caso, trivialmente satisfeita.

Para esse campo de Jacobi tem-se $J_2^v(0) = \dot{\gamma}(p, 0, v(0)) = v(0) \equiv v$ e $\frac{D}{dt} J_2^v(0) = 0$, pois $\frac{D}{dt} \dot{\gamma}(t) = \frac{D}{dt} \dot{\gamma}(t) = 0$ para todo t , novamente pela equação da geodésica.

- O campo $J_3^v(t) = t\dot{\gamma}(t)$ é também um campo de Jacobi, pois $R(t\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = tR(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = 0$, devido à antissimetria do tensor de curvatura e pois $\frac{D}{dt} J_3^v(t) = \frac{D}{dt}(t\dot{\gamma}(t)) = t\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) + \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t)$ (pela regra de Leibniz para a derivação covariante e pela equação da geodésica) e, portanto, $\frac{D^2}{dt^2} J_3^v(t) = \frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) = 0$, novamente pela equação da geodésica.

Para esse campo de Jacobi tem-se $J_3^v(0) = 0$ (evidentemente) e $\frac{D}{dt} J_3^v(0) = \dot{\gamma}(0) = v(0) \equiv v$, pelo exposto no último parágrafo.

Da linearidade da equação de Jacobi e das considerações de acima, concluímos:

Lema 36.6 *Considere-se a geodésica $[0, a] \ni t \mapsto \gamma(p, t, v)$. Então, fixadas condições iniciais $J(0)$ e $\frac{D}{dt} J(0)$, a equação de Jacobi (36.212) possui solução única. Em particular, para as condições iniciais $J(0) = 0$ e $\frac{D}{dt} J(0) = w$ a solução única é $J_1^{v,w}(t)$. \square*

É fácil inferir disso, que em uma variedade n dimensional existem n campos de Jacobi linearmente independentes.

• Algumas propriedades dos campos de Jacobi

As afirmações da proposição e do corolário que seguem e suas demonstrações provêm de [223].

Proposição 36.16 *Se J é um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica $[0, a] \ni t \mapsto \gamma(p, t, v)$ então vale para todo $t \in [0, a]$*

$$g \left(J(t), \dot{\gamma}(p, t, v) \right)_{\gamma(p,t,v)} = g \left(\left(J(0) + t \frac{D}{dt} J(0) \right), v \right)_p = g(J(0), v)_p + t g \left(\frac{D}{dt} J(0), v \right)_p. \quad (36.215)$$

\square

Prova. Denotemos $g(J(t), \dot{\gamma}(p, t, v))_{\gamma(p, t, v)}$ simplesmente por $g(J, \dot{\gamma})(t)$. Como $\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = 0$, segue que

$$\frac{d}{dt}g(J, \dot{\gamma})(t) = g\left(\frac{D}{dt}J, \dot{\gamma}\right)(t). \quad (36.216)$$

Também tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g\left(\frac{D}{dt}J, \dot{\gamma}\right)(t) &= g\left(\frac{D^2}{dt^2}J, \dot{\gamma}\right)(t) \stackrel{(36.212)}{=} -g\left(R(J(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\right)(t) \\ &\stackrel{(36.150)}{=} g\left(R(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), J(t)\right)(t) = 0, \end{aligned}$$

devido à antissimetria do tensor de curvatura. Isso mostrou que $g\left(\frac{D}{dt}J, \dot{\gamma}\right)(t)$ é constante e, logicamente, igual a $g\left(\frac{D}{dt}J, \dot{\gamma}\right)(0)$. Logo, (36.216) fica $\frac{d}{dt}g(J, \dot{\gamma})(t) = g\left(\frac{D}{dt}J, \dot{\gamma}\right)(0)$. Integrando-se ambos os lados entre 0 e t , obtemos $g(J, \dot{\gamma})(t) = g(J, \dot{\gamma})(0) + tg\left(\frac{D}{dt}J, \dot{\gamma}\right)(0)$, como queríamos provar. ■

Corolário 36.3 *Seja J um campo de Jacobi sobre uma geodésica $[0, a] \ni t \mapsto \gamma(p, t, v) \equiv \gamma(t)$. Se existirem t_1 e t_2 distintos em $[0, a]$ tais que $g(J, \dot{\gamma})(t_1) = g(J, \dot{\gamma})(t_2)$ então $g\left(\frac{D}{dt}J(0), v\right)_p = 0$ e $g(J, \dot{\gamma})(t)$ é constante em todo $[0, a]$. □*

Prova. É evidente da linearidade em t do lado direito da expressão (36.215) que se existirem t_1 e t_2 distintos em $[0, a]$ tais que $g(J, \dot{\gamma})(t_1) = g(J, \dot{\gamma})(t_2)$ então $g\left(\frac{D}{dt}J(0), v\right)_p = 0$ e $g(J, \dot{\gamma})(t)$ é constante em todo $[0, a]$. ■

36.4.2.2 Pontos Conjugados

• Pontos conjugados

Seja $[-a, a] \ni t \mapsto \gamma(t) \equiv \gamma(p, t, v)$, $a > 0$, uma geodésica que passa por $p \in M$ em $t = 0$. Um ponto $\bar{p} = \gamma(t_0)$, $t_0 \in [-a, 0) \cup (0, a]$, é dito ser um *ponto conjugado* de p se existir sobre a curva γ um campo de Jacobi não-nulo J tal que $J(0) = 0$ e $J(t_0) = 0$.

Como se percebe, a questão por trás da existência de pontos conjugados é a questão de saber se alguma variação geodésica $\frac{\partial S_v}{\partial s}(t, 0)$ da geodésica $\gamma(p, t, v)$ anula-se em outro ponto que não p . Dessa forma, podemos interpretar pontos conjugados a p como pontos de focalização de geodésicas “infinitesimalmente” próximas que partem de p .

O corolário a seguir é uma decorrência elementar do Corolário 36.3, página 1759, e dispensa demonstração.

Corolário 36.4 *Se uma geodésica $[0, a] \ni t \mapsto \gamma(p, t, v) \equiv \gamma(t)$ possuir um ponto conjugado a p , digamos, em $t_0 \in (0, a]$, e J for um campo de Jacobi não-nulo tal que $J(0) = J(t_0) = 0$, então $g\left(\frac{D}{dt}J(0), v\right)_p = 0$ e $g(J, \dot{\gamma})(t) = 0$ para todo $t \in [0, a]$, ou seja, o campo J é g -ortogonal ao vetor tangente a γ em toda a geodésica. □*

É interessante observar que decorre de (36.215) e de (36.214) que

$$g\left(J_1^{v,w}(t), \dot{\gamma}(p, t, v)\right)_{\gamma(p, t, v)} = tg(w, v)_p,$$

que $g(J_2^v, \dot{\gamma})(t) = g(v, v)_p$ e que $g(J_3^v, \dot{\gamma})(t) = tg(v, v)_p$ (as duas últimas relações são triviais pelas definições de J_2^v e J_3^v). Disso segue que se p tem um ponto conjugado em γ , digamos, em t_0 , e $J_1^{v,w}$ anula-se em 0 e em t_0 , então $g(w, v)_p = 0$, ou seja, w é g -ortogonal à velocidade inicial v .

• Pontos conjugados e singularidades da aplicação exponencial

A noção de ponto conjugado é relevante em função da interpretação que apresentamos acima como ponto de focalização aproximada de geodésicas próximas. Há também uma outra razão que agora discutiremos, a saber, pontos conjugados possuem uma íntima relação com pontos singulares da aplicação exponencial. Como acima, seguimos aqui proximamente [223].

Proposição 36.17 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana (ou Lorentziana) e $p \in M$. Seja $v \in T_pM$ no domínio de definição do mapa exponencial \exp_p e seja a geodésica $[0, 1] \ni t \mapsto \gamma(p, t, v) \in M$. Um ponto $\bar{p} = \gamma(p, t_0, v) = \gamma(p, 1, t_0v) = \exp_p(t_0v)$, com $t_0 \in (0, 1]$, é um ponto conjugado de p se e somente se t_0v for um ponto crítico²⁹ da aplicação exponencial \exp_p . □*

Prova. Por definição, $\bar{p} = \gamma(p, t_0, v)$ é um ponto conjugado de p em γ se e somente existir sobre γ um campo de Jacobi não-identicamente nulo J tal que $J(0) = 0$ e $J(t_0) = 0$. Seja $w := \frac{D}{dt}J(0)$. Pelo Lema 36.6, página 1758, o campo de Jacobi J satisfazendo $J(0) = 0$ e $\frac{D}{dt}J(0) = w$ é igual a $J_1^{v,w}$, definido em (36.213), ou seja,

$$J(t) = J_1^{v,w}(t) = \frac{\partial S_{v,w}}{\partial s}(t, 0) \stackrel{(36.202)}{=} (d\exp_p)_{tv}(tw) = t(d\exp_p)_{tv}(w).$$

É claro que $(d\exp_p)_{tv}(w)$ anula-se caso $w = 0$, pois $(d\exp_p)_{tv}$ é uma aplicação linear. Da igualdade $J(t) = t(d\exp_p)_{tv}(w)$ concluímos que se J for não-nulo para algum valor de $t \neq 0$, então $w \neq 0$. Ao mesmo tempo, se $w \neq 0$ o campo J não pode ser identicamente nulo, pois se o fosse teríamos $\frac{D}{dt}J(t) = 0$ para todo t e como $w = \frac{D}{dt}J(0)$ teríamos uma contradição. Concluímos disso que o campo J é não-identicamente nulo se e somente se $w \neq 0$.

Agora, por hipótese, p tem um ponto conjugado em $\bar{p} = \gamma(p, t_0, v)$, $t_0 \in (0, 1]$, se e somente se valer $0 = J(t_0) = t_0(d\exp_p)_{t_0v}(w)$, o que é verdadeiro se e somente se $(d\exp_p)_{t_0v}(w) = 0$. Porém, como $w \neq 0$, isso é possível se e somente se t_0v for um ponto crítico de \exp_p . ■

• O tensor de curvatura e a ausência de pontos conjugados. Caso Riemanniano

A seguinte proposição elementar aponta para o fato de que certas condições sobre o tensor de curvatura podem implicar na ausência de pontos conjugados. Chamamos a atenção do leitor para o fato de usarmos a convenção (36.132) para a definição do tensor de curvatura, cujo sinal é oposto daquele comumente usado em geometria Riemanniana (a esfera tem curvatura negativa na nossa convenção).

Proposição 36.18 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana dotada de uma conexão de Levi-Civita ∇ e seja γ uma geodésica em M . Se em cada ponto $q \in \gamma$ e para todos os campos vetoriais diferenciáveis A e B definidos sobre γ valer*

$$g\left(R(A, B)A, B\right)_q \geq 0, \quad (36.217)$$

então não ocorrem pontos conjugados em γ . □

Observe-se que no caso Riemanniano a condição (36.217) equivale à não-negatividade da curvatura seccional relativa ao plano gerado por A e B em T_qM .

Prova da Proposição 36.18. Vamos supor que J seja um campo de Jacobi não-nulo sobre a geodésica γ e que $J(0) = J(t_0) = 0$. Temos que

$$\frac{d}{dt}g(J, J) = 2g\left(\frac{D}{dt}J, J\right). \quad (36.218)$$

Agora, usando a antissimetria de R ,

$$\frac{d}{dt}g\left(\frac{D}{dt}J, J\right) = g\left(\frac{D^2}{dt^2}J, J\right) + g\left(\frac{D}{dt}J, \frac{D}{dt}J\right) \stackrel{(36.212)}{=} +g\left(R(\dot{\gamma}(t), J)\dot{\gamma}(t), J\right) + g\left(\frac{D}{dt}J, \frac{D}{dt}J\right) \geq 0,$$

pois $g\left(\frac{D}{dt}J, \frac{D}{dt}J\right) \geq 0$ e, por hipótese, $g\left(R(\dot{\gamma}(t), J)\dot{\gamma}(t), J\right) \geq 0$. Com isso, estabelecemos que a função $g\left(\frac{D}{dt}J, J\right)(t)$ é não-decrescente em t . Como J anula-se em 0 e em t_0 concluímos disso que $g\left(\frac{D}{dt}J, J\right)(t) = 0$ para todo t . Logo, segue de (36.218) que $g(J, J)(t)$ é constante em t e como $J(0) = J(t_0) = 0$, segue que $g(J, J)(t) = 0$ para todo t , implicando que J é identicamente nulo, uma contradição que implica na inexistência de um campo de Jacobi com as propriedades mencionadas e, portanto, na inexistência de pontos conjugados em γ . ■

²⁹A noção de ponto crítico encontra-se definida à página 1670.

36.5 A Estrutura Causal de Variedades Lorentzianas

Vamos agora tratar de algumas características de variedades Lorentzianas, como os espaços-tempos da Teoria da Relatividade Geral. Começamos observando que é costumeiro, no caso de variedades Lorentzianas de dimensão m (com $m \geq 2$), indexar coordenadas, vetores, tensores etc. com índices que variam de 0 a $m - 1$. A coordenada com índice 0 corresponde ao sinal + da signatura do tensor métrico e é referida como *coordenada temporal* e as demais como *coordenadas espaciais*.

• Tipos de vetores e curvas

Se (M, g) é uma variedade Lorentziana e $p \in M$, dizemos que um vetor $u \in T_pM$ é

1. *tipo tempo* se $g(u, u)_p > 0$,
2. *tipo espaço* se $g(u, u)_p < 0$,
3. *tipo luz*, ou *nulo*, se $g(u, u)_p = 0$.

Essas definições, bem conhecidas da Teoria da Relatividade Especial, podem ser usadas para classificar curvas diferenciáveis em M . Seja I algum intervalo aberto de \mathbb{R} e seja $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M . Dizemos que c é uma curva tipo espaço, tempo ou luz, se o vetor tangente $\dot{c}(t)$ for tipo espaço, tempo ou luz para todo $t \in I$. De modo geral curvas $c : I \rightarrow M$ podem mudar de tipo, podendo ser de um tipo em algum subintervalo de I e de outro tipo em algum outro subintervalo.

Uma observação relevante é que geodésicas não mudam de tipo. De fato, se $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, então $\frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})_{\gamma(t)} = g(\frac{D}{dt}\dot{\gamma}, \dot{\gamma})_{\gamma(t)} = 0$, pois $\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = 0$, por definição, provando que $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})_{\gamma(t)}$ é constante. Assim, podemos falar de geodésicas tipo espaço, tipo tempo ou nulas. *Ipsa facto*, se $t \mapsto \gamma(t, p, v)$ representa uma geodésica que passa por $p \in M$ em $t = 0$ com velocidade $v \in T_pM$, então seu tipo é igual ao tipo de v .

Na Teoria da Relatividade Geral, curvas tipo tempo representam o movimento de partículas materiais e geodésicas tipo tempo representam o movimento de partículas materiais em queda livre, ou seja, sob a ação apenas de campos gravitacionais. Curvas nulas representam movimentos a velocidade da luz e geodésicas nulas representam o movimento de raios luminosos (ou seja, movimento de fótons de comprimento de onda desprezível). Curvas tipo espaço não possuem uma interpretação de interesse físico imediato.

• Orientação temporal de vetores tipo tempo

Lema 36.7 *Seja (M, g) é uma variedade Lorentziana de dimensão $m + 1$. Sejam $p \in M$ e sejam $u, v \in T_pM$ tais que u é tipo tempo e $v \neq 0$ não é de tipo espaço (ou seja, é tipo tempo ou tipo luz), então $g(u, v)_p \neq 0$, ou seja, tem-se $g(u, v)_p < 0$ ou $g(u, v)_p > 0$.* \square

Prova. A demonstração é feita por contradição. Vamos assumir que $g(u, v)_p = 0$. Teríamos $g(\alpha u + v, \alpha u + v)_p = \alpha^2 g(u, u)_p + g(v, v)_p > 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \neq 0$, pois $g(u, u)_p > 0$ e $g(v, v)_p \geq 0$. Escolhamos uma base na qual g_p assume a forma diagonal canônica $g_p = \text{diag}(+, -, \dots, -)$ (vide página 1707). Teremos que $0 < g(u, u)_p = (u^0)^2 - \sum_{k=1}^{m-1} (u^k)^2$, implicando $(u^0)^2 > \sum_{k=1}^{m-1} (u^k)^2 \geq 0$ e, portanto $u^0 \neq 0$. Analogamente, teremos que $v^0 \neq 0$, pois se $v^0 = 0$ valeria $0 \leq g(v, v)_p = -\sum_{k=1}^{m-1} (v^k)^2$, um absurdo, pois assumimos que $v \neq 0$. Agora, além disso, teremos também $g(\alpha u + v, \alpha u + v)_p = (\alpha u^0 + v^0)^2 - \sum_{k=1}^{m-1} (\alpha u^k + v^k)^2$. Assim, com a escolha $\alpha = -v^0/u^0$ teríamos $\alpha \neq 0$ com $g(\alpha u + v, \alpha u + v)_p = -\sum_{k=1}^{m-1} (\alpha u^k + v^k)^2 \leq 0$, uma contradição que implica $g(u, v)_p \neq 0$. \blacksquare

É natural, portanto, introduzirmos a seguinte definição. Se (M, g) é uma variedade Lorentziana e $p \in M$, dizemos que dois vetores tipo tempo $u, v \in T_pM$ têm a mesma *orientação temporal* se $g(u, v)_p > 0$ e, analogamente, dizemos que u e v têm *orientações opostas* se $g(u, v)_p < 0$. Dizemos também que u é *positivamente orientado* em relação a v se $g(u, v)_p > 0$ e que u é *negativamente orientado* em relação a v se $g(u, v)_p < 0$. Nesse contexto, a proposição a seguir é de especial relevância:

Proposição 36.19 *Seja (M, g) uma variedade Lorentziana, seja $p \in M$ e sejam $u, v, w \in T_pM$ três vetores tipo tempo. Então, a orientação de u em relação a u coincide com a orientação de u em relação a w se e somente se $g(v, w)_p > 0$ ou seja, se e somente se v e w têm a mesma orientação temporal.* \square

A Proposição 36.19, acima, é uma consequência imediata do seguinte lema, o qual possui interesse próprio:

Lema 36.8 *Se (M, g) é uma variedade Lorentziana, $p \in M$ e $u, v, w \in T_pM$ são três vetores tipo tempo arbitrários, então, $g(u, v)_p g(v, w)_p g(w, u)_p > 0$.* \square

Prova. Vamos supor que $g(u, v)_p > 0$, $g(w, v)_p > 0$ mas $g(u, w)_p < 0$. Como $g(u + \lambda v, u + \lambda v)_p = \lambda^2 g(v, v)_p + 2\lambda g(u, v)_p + g(u, u)_p$, segue que $u + \lambda v$ é tipo tempo para todo $\lambda \geq 0$. Seja $F(\lambda) := g(u + \lambda v, w)_p = g(u, w)_p + \lambda g(v, w)_p$. Como $u + \lambda v$ é tipo tempo para todo $\lambda \geq 0$ segue do Lema 36.7 que $F(\lambda)$ não se anula para nenhum $\lambda \geq 0$. Seja $\lambda_0 \equiv \frac{-g(u, w)_p}{g(v, w)_p}$. Pela hipótese, $\lambda_0 > 0$. Agora, como facilmente se verifica, tem-se $F(\lambda_0) = 0$, uma contradição que implica que $g(u, w)_p \geq 0$. Como a igualdade é impossível pelo Lema 36.7, segue que $g(u, w)_p > 0$.

Assim, provamos que se $g(u, v)_p > 0$ e $g(w, v)_p > 0$, então $g(u, w)_p > 0$. Analisemos agora as outras três possibilidades.

- a. Se $g(u, v)_p < 0$ e $g(w, v)_p < 0$ valeria, obviamente, $g(u, -v)_p > 0$, $g(w, -v)_p > 0$, o que, pelo exposto acima, implica $g(u, w)_p > 0$.
- b. Se $g(u, v)_p < 0$ e $g(w, v)_p > 0$ valeria, obviamente, $g(-u, v)_p > 0$, $g(w, v)_p > 0$, o que, pelo exposto acima, implica $g(-u, w)_p > 0$, ou seja $g(u, w)_p < 0$.
- c. Se $g(u, v)_p > 0$, e $g(w, v)_p < 0$ valeria, obviamente, $g(u, v)_p > 0$, $g(-w, v)_p > 0$, o que, pelo exposto acima, implica $g(u, -w)_p > 0$, ou seja, $g(u, w)_p < 0$.

Os quatro casos acima descritos esgotam as possibilidades e em cada um vale que $g(u, v)_p g(v, w)_p g(w, u)_p > 0$. \blacksquare

• Relação de equivalência de vetores tipo tempo

Com a Proposição 36.19 é possível estabelecer uma relação de equivalência (vide Seção 1.1.1.3, página 41) entre vetores tipo tempo: se $u, v \in T_pM$ são vetores tipo tempo, dizemos que $u \sim v$ se $g(u, v)_p > 0$, ou seja, $u \sim v$ se u e v têm a mesma orientação temporal. A condição de reflexividade $u \sim u$ é evidente para vetores tipo tempo, a condição de simetria ($u \sim v$ implica $v \sim u$) é evidente pela simetria da métrica e a transitividade ($u \sim v$ e $u \sim w$ implicam $v \sim w$) segue da Proposição 36.19.

E. 36.27 *Exercício (fácil).* Mostre que se $u, v \in T_pM$ são vetores tipo tempo equivalentes (no sentido de acima), então αu e βv também o são para quaisquer $\alpha, \beta > 0$ e mostre que $\lambda u + (1 - \lambda)v$ é também equivalente a u e a v para todo $\lambda \in [0, 1]$. Esses fatos afirmam que as classes de equivalência pela relação de equivalência de acima compõem cones convexos em T_pM . \star

• Orientação temporal de variedades Lorentzianas

As considerações de acima sobre orientação de vetores tipo tempo sugerem a introdução de uma importante definição. Uma variedade Lorentziana é dita ser *temporalmente orientada* se existir um campo $T \in \mathcal{X}(M)$ que seja tipo tempo em todo ponto de M . Se um tal campo existir, então é possível empregá-lo de modo a definir de forma global uma orientação aos vetores tipo tempo de cada espaço tangente T_pM , $p \in M$. Observe-se que, de acordo com as observações de acima, dois campos $T, T' \in \mathcal{X}(M)$ que sejam tipo tempo em todo ponto de M proverão a mesma orientação se e somente se $g(T, T')_p > 0$ para todo $p \in M$.

Dada uma variedade Lorentziana (M, g) temporalmente orientada e um campo T que provê uma orientação temporal a M , dizemos que um vetor tipo tempo $v \in T_pM$ é *orientado ao futuro* em relação a T , ou *aponta para o futuro* em relação a T , se $g(v, T)_p > 0$. Analogamente, que um vetor tipo tempo $v \in T_pM$ é *orientado ao passado* em relação a T , ou *aponta para o passado* em relação a T , se $g(v, T)_p < 0$.

Essa nomenclatura estende-se também a curvas tipo tempo em M . Uma curva tipo tempo $c : I \rightarrow M$ (com I sendo um intervalo aberto de \mathbb{R}) é dita ser *dirigida para o futuro* (*dirigida para o passado*) em relação a T se os vetores tangentes $\dot{c}(t)$ forem orientados ao futuro (ao passado) para todo $t \in I$, ou seja, se $g(\dot{c}(t), T)_{c(t)} > 0$ (se $g(\dot{c}(t), T)_{c(t)} < 0$) para todo $t \in I$.

Uma questão relevante nesse contexto é a de se saber sob quais condições uma variedade Lorentziana é orientável temporalmente. A seguinte observação é útil nesse contexto:

Proposição 36.20 *Seja M uma variedade diferenciável e suponhamos que exista um campo $U \in \mathcal{X}(M)$ tal que U_p é não-nulo para todo $p \in M$. Então M possui uma métrica Lorentziana na qual é temporalmente orientada.* \square

Prova. Segundo a Proposição 36.2, página 1708, e sua demonstração, M é uma variedade Lorentziana para a métrica $g := 2V_{\hat{t}_a} \otimes V_{\hat{t}_a} - h$, onde $V \in \mathcal{X}(M)$ é definido por $V_p = (h(U, U)_p)^{-1/2} U_p$, $p \in M$, e h é uma métrica Riemanniana em M . Para essa métrica vale $g(V, V)_p = 1$ (vide demonstração da Proposição 36.2), mostrando que V é tipo tempo. ■

Uma conclusão imediata é que uma variedade diferenciável admite uma métrica Lorentziana com a qual é temporalmente orientável se e somente se existir um campo $V \in \mathcal{X}(M)$ que não se anula em M . Tal condição requer ou que M seja não-compacta ou que tenha característica de Euler igual a zero.

36.5.1 A Identidade de Raychaudhuri

Nesta seção consideraremos sempre o caso de conexões de Levi-Civita em uma variedade diferenciável M de dimensão m . Nosso maior interesse reside no caso de tensores métricos Lorentzianos, mas alguns dos resultados abaixo têm validade mais geral. Nosso propósito é derivar uma versão da chamada *identidade de Raychaudhuri*³⁰, ou de *identidade de Raychaudhuri-Landau*³¹, que nos permita uma dedução simples de um importante teorema de singularidades da Teoria da Relatividade Geral, o chamado Teorema de Hawking³²-Penrose³³.

A análise da identidade de Raychaudhuri apresenta um caminho alternativo ao da equação de Jacobi para o estudo de propriedades de curvas geodésicas e adapta-se bem ao contexto de variedades Lorentzianas. Trata-se de uma equação que descreve a dinâmica de expansão de famílias de curvas geodésicas. Nossos primeiros passos serão no sentido de apresentar os ingredientes necessários para a definição e análise dessa dinâmica. A identidade de Raychaudhuri será obtida em seguida e passaremos a discutir condições suficientes para o mencionado teorema de singularidades, que será enunciado e demonstrado ao final.

No que segue, M é uma variedade diferenciável Lorentziana m -dimensional (com $m \geq 2$) e índices de coordenadas, vetores, tensores etc. variam de 0 a $m - 1$, salvo menção em contrário.

• Congruências de curvas

Seja M um variedade diferenciável e seja $X \in \mathcal{X}(M)$ um campo vetorial que não se anula em M (como já comentamos, que um tal campo exista depende da validade de certas propriedades topológicas de M , como ter característica de Euler nula ou ser não-compacta). A família de curvas integrais de X é denominada uma *congruência de curvas*.

No caso Lorentziano, congruências são denominadas tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-luz se o campo X for (em todo ponto) tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-luz, respectivamente.

• Campos geodésicos e congruências geodésicas

Um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(M)$ que não se anula em é dito ser uma *campo geodésico* se satisfizer $\nabla_X X = 0$.

Uma congruência de curvas associada a um campo $X \in \mathcal{X}(M)$ é dita ser uma *congruência geodésica* se X for um campo geodésico.

Por definição, as curvas c da congruência associada a X satisfazem $\dot{c} = X(c(t))$ e, portanto, para a derivada covariante de X ao longo de uma particular curva c teremos

$$\frac{D}{dt}X(c(t)) \stackrel{(36.62)}{=} (\nabla_{\dot{c}(t)}X)_{c(t)} = (\nabla_X X)_{c(t)} = 0.$$

Assim, $\frac{D}{dt}\dot{c} = 0$ e concluímos que uma congruência geodésica é uma família de curvas geodésicas.

³⁰Amal Kumar Raychaudhuri (1923–2005). A referência ao trabalho original é A. K. Raychaudhuri, “Relativistic cosmology I”. Phys. Rev. **98**, 1123 (1955), doi:10.1103/PhysRev.98.1123. Vide também: A. K. Raychaudhuri, Z. Astrophysik **43**, 161 (1957), para um tratamento mais próximo da versão moderna dessa identidade.

³¹Lev Davidovich Landau (1908–1968). A contribuição de Landau ao tema apareceu nas primeiras edições de [195].

³²Stephen William Hawking (1942–).

³³Sir Roger Penrose (1931–).

Dessa forma, podemos entender uma congruência geodésica como uma família de curvas geodésicas cujo campo de velocidades associado (o campo que a cada $p \in M$ associa $\dot{\gamma}_p$, o vetor velocidade associado à geodésica que passa por p) é diferenciável e não se anula em parte alguma.

• A expansão geodésica e sua interpretação

Fixada uma congruência geodésica associada a um campo geodésico X , consideremos a aplicação linear $\kappa \equiv \mathcal{X}^X : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$, definida em (36.120), que a cada campo vetorial $B \in \mathcal{X}(M)$ associa $\kappa(B) := \nabla_B X$. Em coordenadas locais escrevemos

$$\kappa \left(B^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = (\nabla_B X)^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \left(B^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} + \Gamma^j_{ik} B^i X^k \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Definindo κ^j_i por $\kappa \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \kappa^j_i \frac{\partial}{\partial x^j}$ teremos

$$\kappa^j_i = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} + \Gamma^j_{ik} X^k$$

e podemos escrever, para $B \in \mathcal{X}(M)$,

$$\kappa \left(B^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \kappa^j_i B^i \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Como auxílio ao leitor, apontamos que as componentes de κ podem ser denotadas de outras formas, eventualmente mais familiares:

$$\kappa^j_i \equiv \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X^j \equiv \nabla_i X^j \equiv X^j_{;i}. \tag{36.219}$$

Apontamos também que, de acordo com nossas convenções, podemos interpretar κ como um tensor de tipo (1, 1), a saber, como

$$\kappa = \kappa^j_i \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^i.$$

Para uso futuro, observemos que

$$\nabla_X(\kappa(B)) = R(X, B)X + \nabla_{[X, B]}X \tag{36.220}$$

o que se demonstra do fato que

$$\nabla_X(\kappa(B)) = \nabla_X \nabla_B X = \left(\nabla_X \nabla_B - \nabla_B \nabla_X \right) X + \nabla_B \underbrace{\nabla_X X}_{=0} = R(X, B)X + \nabla_{[X, B]}X.$$

A chamada *expansão geodésica* associada ao campo geodésico X é a grandeza escalar definida por

$$\theta := \text{Tr}(\kappa) \stackrel{(36.121)}{=} \text{div}(X). \tag{36.221}$$

Como veremos com a expressão (36.247), adiante, θ pode ser interpretado como a taxa de variação de um elemento de volume “infinitesimal” definido por uma congruência de geodésicas, daí a denominação *expansão geodésica*. A identidade de Raychaudhuri, que obteremos adiante, mostra-nos essencialmente como θ evolui ao longo de uma geodésica e do estudo dessa evolução podem ser extraídas conclusões importância sobre a estrutura de certas variedades Lorentzianas, como os espaços-tempos da Teoria da Relatividade Geral.

• A identidade de Raychaudhuri

Como discutido à página 1712, tomemos $\{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{m-1}\}$, uma base de vetores em $T_p M$, e $\{\mathbf{e}^0, \dots, \mathbf{e}^{m-1}\}$, sua base dual de covetores em $T_p^* M$, de sorte que para o pareamento de \mathbf{e}^i e \mathbf{e}_j , valha $\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle_p = \delta^i_j$. Sejam também as bases de vetores $\{\mathbf{e}^{0\sharp}, \dots, \mathbf{e}^{m-1\sharp}\}$ em $T_p M$ e de covetores duais $\{\mathbf{e}_{0\sharp}, \dots, \mathbf{e}_{m-1\sharp}\}$, definidos em (36.21), de sorte que tenhamos (36.24).

Teremos, usando a convenção de Einstein para soma sobre índices repetidos,

$$\theta := \text{Tr}(\kappa) = \langle \mathbf{e}^i, \kappa(\mathbf{e}_i) \rangle = g \left(\mathbf{e}^{i\sharp}, \kappa(\mathbf{e}_i) \right)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
X(\theta) &= X(g(\mathbf{e}^{\sharp}, \kappa(\mathbf{e}_i))) \\
&= g(\nabla_X \mathbf{e}^{\sharp}, \kappa(\mathbf{e}_i)) + g(\mathbf{e}^{\sharp}, \nabla_X(\kappa(\mathbf{e}_i))) \\
&= g(\nabla_X \mathbf{e}^{\sharp}, \kappa(\mathbf{e}_i)) + g(\mathbf{e}^{\sharp}, R(X, \mathbf{e}_i)X) + g(\mathbf{e}^{\sharp}, \nabla_{[X, \mathbf{e}_i]}X). \tag{36.222}
\end{aligned}$$

Para o primeiro termo do lado direito de (36.222) temos o seguinte resultado:

Lema 36.9 Para qualquer tensor $L : \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_p M$ vale

$$g(\mathbf{e}^{\sharp}, L(\nabla_X \mathbf{e}_i)) = -g(\nabla_X \mathbf{e}^{\sharp}, L(\mathbf{e}_i)). \tag{36.223}$$

□

Prova. Em primeiro lugar, observemos que

$$\nabla_X \mathbf{e}^{\sharp} = g(\mathbf{e}_k, \nabla_X \mathbf{e}^{\sharp}) \mathbf{e}^{\sharp} \quad \text{e que} \quad \nabla_X \mathbf{e}_i = g(\mathbf{e}^{\sharp}, \nabla_X \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_l, \tag{36.224}$$

como é fácil de verificar (faça-o!). Como $g(\mathbf{e}^{\sharp}, \mathbf{e}_i) = \delta_j^i$, constante, vale $0 = X(g(\mathbf{e}^{\sharp}, \mathbf{e}_i)) = g(\nabla_X \mathbf{e}^{\sharp}, \mathbf{e}_i) + g(\mathbf{e}^{\sharp}, \nabla_X \mathbf{e}_i)$, implicando

$$g(\nabla_X \mathbf{e}^{\sharp}, \mathbf{e}_i) = -g(\mathbf{e}^{\sharp}, \nabla_X \mathbf{e}_i). \tag{36.225}$$

Assim,

$$L(\nabla_X \mathbf{e}_i) \stackrel{(36.224)}{=} g(\mathbf{e}^{\sharp}, \nabla_X \mathbf{e}_i) L(\mathbf{e}_l) \stackrel{(36.225)}{=} -g(\nabla_X \mathbf{e}^{\sharp}, \mathbf{e}_i) L(\mathbf{e}_l).$$

Logo,

$$g(\mathbf{e}^{\sharp}, L(\nabla_X \mathbf{e}_i)) = -g(\nabla_X \mathbf{e}^{\sharp}, \mathbf{e}_i) g(\mathbf{e}^{\sharp}, L(\mathbf{e}_l)) = -g(g(\mathbf{e}_i, \nabla_X \mathbf{e}^{\sharp}) \mathbf{e}^{\sharp}, L(\mathbf{e}_l)) \stackrel{(36.224)}{=} -g(\nabla_X \mathbf{e}^{\sharp}, L(\mathbf{e}_l)),$$

que é o que queríamos provar. ■

Retornando a (36.222) podemos, usando (36.223), escrever o primeiro termo do lado direito como $-g(\mathbf{e}^{\sharp}, \kappa(\nabla_X \mathbf{e}_i))$ e, com isso, a soma do primeiro e o terceiro termos do lado direito de (36.222) fica

$$g(\mathbf{e}^{\sharp}, [-\kappa(\nabla_X \mathbf{e}_i) + \nabla_{[X, \mathbf{e}_i]}X]). \tag{36.226}$$

Podemos reescrever a expressão entre colchetes, acima, como

$$\begin{aligned}
-\kappa(\nabla_X \mathbf{e}_i) + \nabla_{[X, \mathbf{e}_i]}X &= -\nabla_{\nabla_X \mathbf{e}_i}X + \nabla_{[X, \mathbf{e}_i]}X = \nabla_{-\nabla_X \mathbf{e}_i + [X, \mathbf{e}_i]}X = \nabla_{-\nabla_{\mathbf{e}_i}X}X = -\nabla_{\nabla_{\mathbf{e}_i}X}X \\
&= -\nabla_{\kappa(\mathbf{e}_i)}X = -\kappa(\kappa(\mathbf{e}_i)) = -(\kappa)^2(\mathbf{e}_i)
\end{aligned}$$

e com isso (36.226) fica

$$-g(\mathbf{e}^{\sharp}, (\kappa)^2(\mathbf{e}_i)) = -\text{Tr}((\kappa)^2).$$

Inserindo isso em (36.222), e usando que $-g(\mathbf{e}^{\sharp}, R(X, \mathbf{e}_i)X) = g(\mathbf{e}^{\sharp}, R(\mathbf{e}_i, X)X)$ (antissimetria do tensor de curvatura), obtemos

$$X(\theta) + \text{Tr}((\kappa)^2) + g(\mathbf{e}^{\sharp}, R(\mathbf{e}_i, X)X) = 0,$$

ou seja,

$$X(\theta) + \text{Tr}((\kappa)^2) + \text{Ric}(X, X) = 0. \tag{36.227}$$

(Para a definição de Ric, o tensor de Ricci, vide (36.181) e (36.183)). Em um sistema local de coordenadas essa identidade assume a forma

$$X^a \frac{\partial \theta}{\partial x^a} + \kappa^a_b \kappa^b_a + R_{ab} X^a X^b = 0. \tag{36.228}$$

A equação (36.227) (ou (36.228)) é nossa primeira versão da prometida *identidade de Raychaudhuri*. No que segue, obteremos uma ou duas variações da mesma, mais adequadas ao tratamento do chamado *Teorema de Hawking-Penrose*. Somando-se e subtraindo-se o termo $\frac{1}{m-1}(\text{Tr}\kappa)^2 = \frac{1}{m-1}\theta^2$ em (36.227), obtém-se,

$$X(\theta) + \frac{1}{m-1}\theta^2 + \left[\text{Tr}((\kappa)^2) - \frac{1}{m-1}(\text{Tr}\kappa)^2 \right] + \text{Ric}(X, X) = 0. \tag{36.229}$$

Afirmamos que, em circunstâncias a serem precisadas, o termo entre colchetes satisfaz

$$\text{Tr}((\kappa)^2) - \frac{1}{m-1}(\text{Tr}\kappa)^2 \geq 0. \tag{36.230}$$

A demonstração desse fato será apresentada logo adiante. Com isso e com a imposição da condição $\text{Ric}(X, X) \geq 0$ (denominada *condição forte de energia*, na Teoria da Relatividade Geral) demonstraremos a impossibilidade de prolongamento de geodésicas para tempos infinitos ou a existência de pontos conjugados para determinadas geodésicas tipo-tempo, que são parte do conteúdo do célebre *Teorema de Hawking-Penrose* da Teoria da Relatividade Geral.

• Reescrevendo a identidade de Raychaudhuri. Os tensores de cisalhamento e de rotação

Para acompanhar a literatura física, e com outros propósitos futuros, vamos apresentar uma forma alternativa da identidade de Raychaudhuri. Vamos introduzir dois novos tensores de tipo (1, 1), denotados por σ e ω e denominados *tensor de cisalhamento* (“shear tensor”) σ e *tensor de rotação* (“rotation tensor”) ω , respectivamente, os quais são definidos da seguinte forma:

$$\sigma := \frac{1}{2}(\kappa + \kappa^\dagger) - \frac{1}{m-1}(\mathbb{1} - X \otimes X) \theta, \tag{36.231}$$

$$\omega := \frac{1}{2}(\kappa - \kappa^\dagger). \tag{36.232}$$

Em termos de componentes em cartas locais de coordenadas, isso se escreve

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{2}(\kappa_{ab} + \kappa_{ba}) - \frac{1}{m-1}(g_{ab} - X_a X_b) \theta \tag{36.233}$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla_b X_a + \nabla_a X_b) - \frac{1}{m-1}(g_{ab} - X_a X_b) \theta, \tag{36.234}$$

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2}(\kappa_{ab} - \kappa_{ba}) \tag{36.235}$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla_b X_a - \nabla_a X_b), \tag{36.236}$$

sendo, como antes, $\theta := \text{Tr}(\kappa) = \kappa^c_c$. Como se vê, o tensor de rotação ω é uma de versão covariante do rotacional do campo de velocidades geodésicas.

É evidente das últimas expressões que valem

$$\sigma_{ab} = \sigma_{ba} \quad \text{e} \quad \omega_{ab} = -\omega_{ba}.$$

Além disso, σ é definido de tal forma que vale

$$\text{Tr}(\sigma) = \text{Tr}(\kappa) - \frac{1}{m-1}(m-1)\theta = 0,$$

onde usamos que $\text{Tr}(\mathbb{1}) = m$ e $X^a X_a = 1$. Podemos dizer que σ é a parte g -simétrica e de traço zero de κ e ω é a parte g -antissimétrica de κ .

De qualquer maneira, temos

$$\kappa = \sigma + \omega + \frac{1}{m-1}(\mathbb{1} - X \otimes X) \theta. \quad (36.237)$$

ou seja,

$$\kappa_{ab} = \sigma_{ab} + \omega_{ab} + \frac{1}{m-1}(g_{ab} - X_a X_b) \theta. \quad (36.238)$$

O termo $\text{Tr}((\kappa)^2)$ em (36.227) pode ser escrito em termos das componentes de κ como

$$\text{Tr}((\kappa)^2) = \kappa^a_b \kappa^b_a = \kappa^{ab} \kappa_{ba}.$$

É um exercício elementar constatar de (36.237) ou de (36.238) que vale

$$\text{Tr}((\kappa)^2) = \sigma^{ab} \sigma_{ab} - \omega^{ab} \omega_{ab} + \frac{1}{m-1} \theta^2. \quad (36.239)$$

E. 36.28 Exercício. Verifique! *Sugestões:* se desejar usar a notação com índices, use o fato que expressões como $\sigma^{ab} \omega_{ab}$ e $(g_{ab} - X_a X_b) \omega^{ab}$ anulam-se, pois σ^{ab} e $g_{ab} - X_a X_b$ são simétricos na troca de índices, enquanto que ω_{ab} é antissimétrico. Use também que $X^c X_c = 1$ e use que $X^a \kappa_{ab} X^b = X_a \underbrace{\kappa^a_b X^b}_{=0}$ e que $\sigma^a_a = 0$ para provar que $\sigma^{ab}(g_{ab} - X_a X_b) = 0$. Recorde também que

$$\text{Tr}(\mathbb{1}) = \delta^a_a = m. \quad \star$$

Com (36.239), a identidade de Raychaudhuri (36.227) pode ser escrita em coordenadas locais como

$$X^a \frac{\partial \theta}{\partial x^a} + \frac{1}{m-1} \theta^2 + \sigma^{ab} \sigma_{ab} - \omega^{ab} \omega_{ab} + R_{ab} X^a X^b = 0. \quad (36.240)$$

Essa versão da identidade de Raychaudhuri é frequentemente encontrada na literatura física devido à interpretação atribuída aos tensores σ e ω .

• Coordenadas Gaussianas normais

Para prosseguirmos em nossa análise da identidade de Raychaudhuri é importante fazermos uso de um sistema de coordenadas específico, a saber, do chamado *sistema de coordenadas Gaussianas normais*. Esse sistema de coordenadas conduz a simplificações úteis e facilita a interpretação de certas grandezas, como a expansão geodésica θ . Começemos com algumas definições.

Uma subvariedade $(m-1)$ -dimensional S de M é dita ser uma hipersuperfície de tipo espaço se todos os vetores tangentes a S forem de tipo espaço.

Dizemos que M pode ser folheada por S se existir um difeomorfismo infinitamente diferenciável $\psi : M \rightarrow S \times I$, onde I é algum intervalo aberto de \mathbb{R} . Para $t \in I$, denotamos $S_t := \psi^{-1}(S \times \{t\})$. Por convenção supomos que $I \ni 0$ e identificamos $S \equiv S_0$.

Para prosseguirmos na análise da identidade de Raychaudhuri é conveniente adotarmos um sistema de coordenadas locais específico, as chamadas *coordenadas Gaussianas normais*, que consistem em coordenadas co-moventes (“co-moving”) para congruências geodésicas.

Para introduzi-las é necessário listar a seguinte hipótese adicional em nosso tratamento: a de que o espaço-tempo considerado, a variedade m -dimensional M , admite uma folheação a um parâmetro por hipersuperfícies $(m-1)$ -dimensionais tipo espaço S_t com $t \in I$, com I sendo algum intervalo aberto de \mathbb{R} .

Seja S como acima e seja $p \in S$. Vamos constituir um sistema de coordenadas em uma vizinhança de p em M da seguinte forma. Seja N uma vizinhança de p em S e seja $q \in N$. Consideremos a geodésica $\gamma(\tau, q, n)$ que passa por q em $\tau = 0$ sendo $n \in T_q M$ o vetor tipo-tempo g -normal a S (ou seja, tal que $g(n, t)_q = 0$ para todo $t \in T_q M$ tangente a S), orientado para o futuro e de satisfazendo $g(n, n)_q = 1$. Cada ponto $\gamma(\tau, q, n)$ ao longo dessa geodésica pode ser associado a uma coordenada “temporal”, a saber τ e a $m-1$ coordenadas “espaciais”, por exemplos aquelas que coordenatizam q na subvariedade S .

Esse procedimento produz um sistema de coordenadas em alguma vizinhança em torno de cada ponto $p \in M$ denominado *sistema de coordenadas Gaussianas normais*.

Note-se que esse sistema de coordenadas pode não compor um atlas único para toda a variedade. Além disso, a coordenada τ em cada carta local pode ser limitada a algum intervalo, pois pode ocorrer cruzamento de geodésicas (“cáusticas”) $\gamma(\tau, q, n)$ para q 's e τ 's distintos.

Coordenadas Gaussianas normais têm propriedades interessantes para diversos propósitos. Uma delas é a seguinte afirmação, válida para conexões de Levi-Civita: nessas coordenadas a componente g_{00} do tensor métrico vale 1 e as componentes g_{0k} com $k \neq 0$ são nulas. Seja $r \equiv \gamma(\tau, q, n)$ um ponto na vizinhança de p com coordenadas $(\tau, x^1, \dots, x^{m-1})$. De fato, temos

$$(g_{00})_r = g\left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right)_r = g\left(\dot{\gamma}(\tau, q, n), \dot{\gamma}(\tau, q, n)\right)_r = g(n, n)_q = 1.$$

Além disso, para $k \neq 0$,

$$(g_{0k})_r - (g_{0k})_q = \int_0^\tau \frac{d}{dt} [(g_{0k})_{\gamma(t, q, n)}] dt = \int_0^\tau \frac{d}{dt} \left[g\left(\dot{\gamma}(t, q, n), \frac{\partial}{\partial x^k} \gamma(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} \right] dt.$$

Agora,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[g\left(\dot{\gamma}(t, q, n), \frac{\partial}{\partial x^k} \gamma(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} \right] \\ &= g\left(\frac{D}{dt} \dot{\gamma}(t, q, n), \frac{\partial}{\partial x^k} \gamma(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} + g\left(\dot{\gamma}(t, q, n), \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k} \gamma(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} \\ &\stackrel{(36.185)}{=} g\left(\dot{\gamma}(t, q, n), \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k} \gamma(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} \stackrel{(36.83)}{=} g\left(\dot{\gamma}(t, q, n), \frac{D}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial t} \gamma(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} \\ &= g\left(\dot{\gamma}(t, q, n), \frac{D}{\partial x^k} \dot{\gamma}(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} = g\left(\dot{\gamma}(t, q, n), \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \dot{\gamma}(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} \\ &\stackrel{(36.86)}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[g\left(\dot{\gamma}(t, q, n), \dot{\gamma}(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} \right] \stackrel{(36.190)}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} [g(n, n)_q] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} 1 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $(g_{0k})_r = (g_{0k})_n = g\left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)_q = g\left(n, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)_q = 0$, pois $\frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_q$ é um vetor tangente a S e n é g -normal a todo vetor tangente a S .

Com isso, em coordenadas Gaussianas normais, escrevemos

$$g = d\tau \otimes d\tau + g_{ab} dx^a \otimes dx^b =: d\tau \otimes d\tau + \underline{g}, \quad (36.241)$$

com $\underline{g} := g_{ab} dx^a \otimes dx^b$ e com a convenção que índices sublinhados são índices espaciais, e sua soma é realizada apenas de 1 a $m-1$, não de 0 a $m-1$.

Comentamos que $-g$ é um tensor métrico *Riemanniano* $(m-1)$ -dimensional. De fato, como já comentamos, uma mudança de coordenadas corresponde a uma transformação de congruência na matriz g_{ij} e uma tal transformação não altera o número de autovalores com um dado sinal (pelo Lei da Inércia de Sylvester, Teorema 9.17, página 404). Em (36.241) g tem a forma de blocos diagonais, com $g_{00} = 1$ sendo um autovalor positivo e os demais $m-1$ autovalores negativos devendo ser os da matriz g_{ab} .

Devido a essa estrutura em blocos, é evidente que para as componentes do tensor métrico contravariante temos $g^{00} = 1$, $g^{0k} = 0$ para $k \neq 0$ e

$$g^\# = \frac{\partial}{\partial \tau} \otimes \frac{\partial}{\partial \tau} + g^{ab} \frac{\partial}{\partial x^a} \otimes \frac{\partial}{\partial x^b}. \quad (36.242)$$

Devido a mencionada estrutura em blocos, é fácil verificar que a matriz $(m-1) \times (m-1)$ com elementos de matriz g^{ab} é a matriz inversa da matriz com elementos de matriz g_{ab} .

• **A aplicação κ em coordenadas Gaussianas normais**

Seja \mathcal{A} um aberto em que tenhamos definidas coordenadas Gaussianas normais e seja $r \equiv \gamma(\tau, q, n)$, $q \in S$, e n como acima, um ponto desse aberto com coordenadas Gaussianas normais $(\tau, x^1, \dots, x^{m-1})$. Considere-se a função $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(r) = \tau$, que associa a cada r sua coordenada “temporal” τ . Temos, nessas coordenadas,

$$\text{grad} f \stackrel{(36.118)}{=} g^{00} \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Paralelamente, a isso, sabemos que $X(r) = \dot{\gamma}(\tau, q, n) = \frac{\partial}{\partial \tau}$ e, portanto, em coordenadas Gaussianas normais X tem por componentes $X^0 = 1$ e $X^k = 0$, $k \neq 0$. De qualquer modo, isso estabelece que $X = \text{grad} f$ e, portanto, $\kappa = \mathcal{L}^f$, pela notação empregada na Proposição 36.5, página 1737. Essa mesma proposição estabelece que κ é g -simétrica e, portanto, valem para suas componentes em qualquer sistema de coordenadas as relações

$$\kappa^i_j = \kappa_j^i \quad \text{e} \quad \kappa_{ij} = \kappa_{ji}. \tag{36.243}$$

Como sabemos pela definição de X , vale $\kappa(X) = \nabla_X X = 0$, ou seja, $\kappa^i_j X^j = 0$ para todo i . Em coordenadas Gaussianas normais isso implica que $\kappa^i_0 = 0$ para todo i . Pela primeira relação em (36.243), temos também nessas coordenadas que $\kappa_0^i = 0$. Além disso, $\kappa_{kj} = g_{ki} \kappa^i_j$. Logo, em coordenadas Gaussianas normais teremos $\kappa_{k0} = g_{ki} \kappa^i_0 = 0$ para todo k . Pela segunda relação em (36.243), temos também $\kappa_{0k} = 0$, também para todo k . Segue facilmente disso e do fato que $g_{0k} = g^{0k} = 0$ para todo $k \neq 0$ que valem também $\kappa^0_i = \kappa_i^0 = 0$ para todo i e $\kappa^{00} = \kappa_{00} = 0$, também para todo i .

A conclusão é que quaisquer componentes de κ que possuam ao menos um índice igual a 0 anulam-se. Com isso, no sistema de coordenadas Gaussianas normais, temos, de acordo com nossa notação e convenções,

$$\text{Tr}(\kappa) = \kappa^a_a \quad \text{e} \quad \text{Tr}((\kappa)^2) = \kappa_{ab} \kappa^{ab},$$

que envolvem apenas somas sobre índices espaciais. Note-se ainda que $\kappa_{ab} = g_{ac} \kappa^{cd} g_{db}$ envolve apenas as componentes espaciais de $-g$, as quais compõem um tensor métrico Riemanniano $(m-1)$ -dimensional, como já observamos. Estamos, portanto, sob as mesmas hipóteses que garantem as desigualdades (36.49), que dizem-nos, por fim, que

$$\text{Tr}((\kappa)^2) - \frac{1}{m-1} (\text{Tr} \kappa)^2 \geq 0, \tag{36.244}$$

que é a desigualdade (36.230). Observe-se que, apesar dessa desigualdade ter sido obtida no caso específico de coordenadas Gaussianas normais, ela é válida em qualquer sistema de coordenadas, pois as grandezas nela envolvidas são invariantes escalares.

Com a desigualdade (36.244) concluímos de (36.229) que valerá

$$X(\theta) + \frac{1}{m-1} \theta^2 + \text{Ric}(X, X) \leq 0. \tag{36.245}$$

Essa inequação diferencial será explorada mais adiante. Note-se que ela assume em coordenadas Gaussianas normais a forma

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{1}{m-1} \theta^2 + R_{00} \leq 0. \tag{36.246}$$

• **Interpretação da expansão geodésica θ**

Em coordenadas Gaussianas normais temos também, como vimos em (36.221), que

$$\theta := \text{Tr}(\kappa) \stackrel{(36.121)}{=} \text{div}(X) \stackrel{(36.122)}{=} \Gamma^i_{i0} = \left\{ \begin{matrix} i \\ 0 \ i \end{matrix} \right\} \stackrel{(36.110)}{=} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \frac{\partial \sqrt{|\mathbf{g}|}}{\partial \tau} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \frac{\partial \sqrt{|\mathbf{g}|}}{\partial \tau}, \tag{36.247}$$

para conexões de Levi-Civita, pois $X^0 = 1$ e $X^k = 0$ se $k \neq 0$. Como $\sqrt{|\mathbf{g}|} d\tau dx^1 \dots dx^{m-1}$ é a medida de volume invariante em M (vide (36.9)), expresso em coordenadas Gaussianas normais, vemos de (36.247) que θ mede a taxa de expansão de um elemento de volume ao longo de uma geodésica.

• **Os tensores σ e ω em coordenadas Gaussianas normais**

A condição (36.243) implica, evidentemente, que $\omega_{ab} = 0$ e que $\sigma_{ab} = \kappa_{ab} - \frac{1}{m-1} (g_{ab} - X_a X_b) \theta$. Já vimos que, em coordenadas Gaussianas normais, as componentes de κ que tenham ao menos um índice igual a zero se anulam. O mesmo ocorre com o tensor de componentes $g_{ab} - X_a X_b$, como facilmente se constata (faça-o!), e, portanto, com o tensor σ . Assim, temos que $\text{Tr}(\sigma^2) = \sigma^{ab} \sigma_{ab} = \sigma^{ab} \sigma_{ab} \geq 0$, devido à desigualdade (36.43), por estarmos de volta ao caso Riemanniano. Assim, a equação (36.240) torna-se no sistema de coordenadas Gaussianas normais

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{1}{m-1} \theta^2 + \sigma^{ab} \sigma_{ab} + R_{00} = 0, \tag{36.248}$$

e a última desigualdade informa-nos que

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{1}{m-1} \theta^2 + R_{00} \leq 0 \tag{36.249}$$

e, com isso, reobtemos a inequação diferencial (36.246).

Observemos *en passant* que (36.248) é uma equação diferencial do tipo de Riccati (vide Seção 12.2, página 518). Usando (36.247), escrevemos $\theta = \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \sqrt{|\mathbf{g}|} = (m-1) \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \left(|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2(m-1)}} \right)$ e, portanto,

$$\theta = (m-1) |\mathbf{g}|^{-\frac{1}{2(m-1)}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2(m-1)}} \right). \tag{36.250}$$

Introduzindo isso em (36.248) obtemos a equação diferencial linear de segunda ordem

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2(m-1)}} \right) + \left(\frac{\sigma^{ab} \sigma_{ab} + R_{00}}{m-1} \right) |\mathbf{g}|^{\frac{1}{2(m-1)}} = 0. \tag{36.251}$$

Essa versão da identidade de Raychaudhuri é muito próxima da obtida originalmente por aquele autor.

• **A condição forte de energia e consequências da desigualdade (36.230)**

Uma variedade Lorentziana é dita satisfazer a *condição forte de energia*³⁴ se valer

$$\text{Ric}(Y, Y) \geq 0. \tag{36.252}$$

para todo campo vetorial tipo-tempo Y . Antes de esclarecermos seu significado físico no contexto da Teoria da Relatividade Geral, apontemos para as consequências da mesma. Com ela, obtemos de (36.245) que

$$X(\theta) + \frac{1}{m-1} \theta^2 \leq 0, \tag{36.253}$$

que em coordenadas Gaussianas normais fica

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{1}{m-1} \theta^2 \leq 0. \tag{36.254}$$

(Notar que a condição $\text{Ric}(X, X)$ significa em coordenadas Gaussianas normais que $R_{00} \geq 0$).

Observamos também que com a positividade de $\sigma^{ab} \sigma_{ab}$ e com condição forte de energia, (36.251) diz-nos que $\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2(m-1)}} \right) \leq 0$ e, portanto, $|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2(m-1)}}(\tau)$ é uma função côncava nos intervalos em que for contínua e diferenciável.

Vamos agora analisar as consequências da desigualdade (36.254). Em (36.254), $\theta(\tau) \equiv \theta(\gamma(\tau, p, n_p))$, $p \in S$. Denotemos $\theta(0) \equiv \theta_0$. Dividindo ambos os lados de (36.254) por θ^2 :

$$0 \geq \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial \theta(\tau)}{\partial \tau} + (m-1)^{-1} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(-\theta(\tau)^{-1} + \tau/(m-1) \right).$$

Logo, para $\theta_0 \neq 0$ temos $-\theta(\tau)^{-1} + \tau/(m-1) \leq -\theta_0^{-1} + \theta(\tau) \leq (\tau/(m-1) + \theta_0^{-1})^{-1}$. Para $\theta_0 = 0$ podemos dizer de (36.254) que $\theta(\tau) \leq \frac{-1}{m-1} \int_0^\tau \theta(\tau')^2 d\tau' \leq 0$.

³⁴A justificativa para essa denominação virá adiante.

Em resumo, segue de (36.254) que

$$\theta(\tau) \leq \phi(\tau) := \begin{cases} 0, & \text{se } \theta_0 = 0, \\ \frac{m-1}{\tau-\tau_*}, & \text{se } \theta_0 \neq 0, \end{cases} \quad \text{onde } \tau_* := -\frac{m-1}{\theta_0}. \quad (36.255)$$

Para $\theta_0 \neq 0$ as características mais relevantes da função ϕ são as seguintes: ϕ é contínua e decrescente nos intervalos $(-\infty, \tau_*)$ e (τ_*, ∞) , diverge para $-\infty$ quando τ aproxima-se de τ_* pela esquerda e para $+\infty$ quando τ aproxima-se de τ_* pela direita. Observemos também que, por (36.254), $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \leq \frac{-1}{m-1} \theta^2 < 0$ e, portanto, θ é não-crescente nos intervalos em que for contínua e diferenciável, sendo que só podemos eventualmente ter $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0$ nos pontos em que $\theta = 0$.

Vamos analisar o que (36.255) implica para a condição inicial θ_0 , dando particular atenção à região de valores de τ que contém o instante $\tau = 0$, no qual a geodésica cruza a superfície de Cauchy S .

1. Caso $\theta_0 = 0$, (36.255) informa-nos apenas que $\theta(\tau) \leq 0$ e é decrescente, indicando que as curvas geodésicas passando próximas a p não se afastam umas das outras.
2. Caso $\theta_0 < 0$, a função ϕ diverge a $-\infty$ quando τ cresce a partir de 0 e aproxima-se de $\tau_* > 0$ pela esquerda. Assim, pela mesma desigualdade (36.255), concluímos que $\theta(\tau)$ deve ser decrescente e deve também divergir para $-\infty$ em algum ponto τ_∞ com $0 < \tau_\infty \leq \tau_*$. Assim, a geodésica que passa por p não pode ser prolongada para tempos superiores a τ_∞ .

A função ϕ é negativa em todo o intervalo $(-\infty, \tau_*)$ e, portanto, θ também o é. Por (36.250), $\frac{\partial}{\partial \tau} \left(|\underline{g}|^{\frac{1}{2(m-1)}} \right) < 0$, o que indica que as curvas geodésicas passando próximas a p aproximam-se umas das outras.

Por (36.250), o fato de θ divergir a $-\infty$ em τ_∞ tem uma das seguintes duas possíveis consequências:

- (a) $|\underline{g}|^{1/2}$ converge a zero quando τ aproxima-se de τ_∞ pela esquerda. Isso significa que as geodésicas que passam próximas a p colapsam umas sobre as outras na medida em que τ cresce e aproxima-se de τ_∞ pela esquerda.
 - (b) $\frac{\partial}{\partial \tau} |\underline{g}|^{1/2}$ diverge a $-\infty$ quando τ aproxima-se de τ_∞ pela esquerda, mas $|\underline{g}|^{1/2}$ permanece finito.
3. Caso $\theta_0 > 0$, a função ϕ diverge a $-\infty$ quando τ cresce a partir de $-\infty$ e aproxima-se de $\tau_* < 0$ pela esquerda. Logo, pela mesma desigualdade (36.255), concluímos que $\theta(\tau)$ deve também divergir a $-\infty$ quando τ aproxima-se de $\tau_* < 0$ pela esquerda.

Mais relevante é o que ocorre quando partimos de $\tau = 0$ e retrocedemos para valores negativos de τ . O que acontece a θ quando τ aproxima-se de τ_* pela direita não pode ser decidido pelas considerações de acima: θ pode divergir a $+\infty$ ou permanecer finito (esse último caso é o que ocorre no Universo de Milne. Vide abaixo). θ não pode divergir para $-\infty$, pois isso contraria o fato de θ ser decrescente no intervalo considerado.

É certo, porém, devido à desigualdade (36.255), que a geodésica que passa por p não pode ser prolongada para tempos inferiores a $\tau_* < 0$.

Por (36.250), no caso de θ divergir a $+\infty$ quando τ aproxima-se de τ_* pela direita temos uma das seguintes duas possíveis consequências:

- (a) $|\underline{g}|^{1/2}$ converge a zero quando τ aproxima-se de τ_* pela direita. Isso significa que as geodésicas que passam próximas a p colapsam umas sobre as outras na medida em que τ decresce e aproxima-se de τ_* pela direita.
- (b) $\frac{\partial}{\partial \tau} |\underline{g}|^{1/2}$ diverge a $+\infty$ quando τ aproxima-se de τ_* pela direita, mas $|\underline{g}|^{1/2}$ permanece finito.

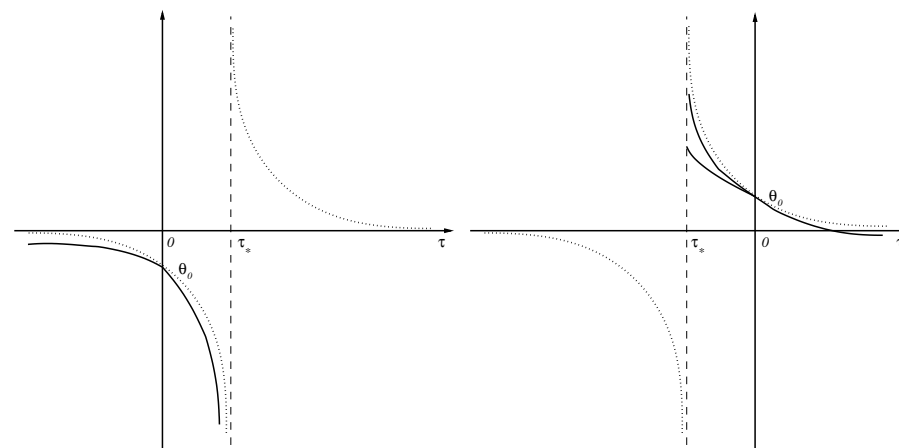


Figura 36.1: Gráficos comparativos de θ e ϕ . Ao lado esquerdo temos o caso $\theta_0 < 0$ e ao lado direito $\theta_0 > 0$. As linhas pontilhadas representam o gráfico de ϕ e as contínuas representam possíveis gráficos de θ em intervalos que contém $\tau = 0$, onde a condição inicial θ_0 é fixada para θ . Na situação à esquerda ($\theta_0 < 0$), θ é sempre divergente a $-\infty$ em τ_* ou em um instante $0 < \tau_\infty \leq \tau_*$. Na situação à direita ($\theta_0 > 0$), θ pode ou não divergir em τ_* , mas a geodésica não pode ser prolongada para valores de τ inferiores a τ_* .

Apêndices

36.A Demonstração de Algumas Propriedades do Tensor de Curvatura

36.A.1 Prova da Proposição 36.6

Prova da Proposição 36.6. A propriedade de antissimetria (36.134) é evidente da definição de $R(A, B)$. Provemos (36.135):

$$\begin{aligned}
R(f_1 A_1 + f_2 A_2, B)C &= \nabla_{f_1 A_1 + f_2 A_2}(\nabla_B C) - \nabla_B(\nabla_{f_1 A_1 + f_2 A_2} C) - \nabla_{[(f_1 A_1 + f_2 A_2), B]} C \\
&\stackrel{(35.62)}{=} \nabla_{f_1 A_1 + f_2 A_2}(\nabla_B C) - \nabla_B(\nabla_{f_1 A_1 + f_2 A_2} C) - \nabla_{-B(f_1 A_1 - B(f_2 A_2 + f_1[A_1, B] + f_2[A_2, B])C} \\
&\stackrel{(36.51)}{=} f_1 \nabla_{A_1}(\nabla_B C) + f_2 \nabla_{A_2}(\nabla_B C) - \nabla_B(f_1 \nabla_{A_1} C + f_2 \nabla_{A_2} C) \\
&\quad + B(f_1) \nabla_{A_1} C + B(f_2) \nabla_{A_2} C - f_1 \nabla_{[A_1, B]} C - f_2 \nabla_{[A_2, B]} C \\
&= f_1 (\nabla_{A_1}(\nabla_B C) - \nabla_{[A_1, B]} C) + f_2 (\nabla_{A_2}(\nabla_B C) - \nabla_{[A_2, B]} C) \\
&\quad - \nabla_B(f_1 \nabla_{A_1} C + f_2 \nabla_{A_2} C) + B(f_1) \nabla_{A_1} C + B(f_2) \nabla_{A_2} C \\
&= f_1 (\nabla_{A_1}(\nabla_B C) - \nabla_B(\nabla_{A_1} C) - \nabla_{[A_1, B]} C) \\
&\quad + f_2 (\nabla_{A_2}(\nabla_B C) - \nabla_B(\nabla_{A_2} C) - \nabla_{[A_2, B]} C) \\
&\quad + \underbrace{f_1 \nabla_B(\nabla_{A_1} C) + B(f_1) \nabla_{A_1} C - \nabla_B(f_1 \nabla_{A_1} C)}_{\stackrel{(36.52)}{=} 0} \\
&\quad + \underbrace{f_2 \nabla_B(\nabla_{A_2} C) + B(f_2) \nabla_{A_2} C - \nabla_B(f_2 \nabla_{A_2} C)}_{\stackrel{(36.52)}{=} 0} \\
&= f_1 R(A_1, B)C + f_2 R(A_2, B)C,
\end{aligned}$$

como queríamos. A propriedade (36.136) é consequência evidente de (36.135) e (36.134). Provemos, por fim, (36.137).

$$\begin{aligned}
R(A, B)(h_1 C_1 + h_2 C_2) &= \nabla_A(\nabla_B(h_1 C_1 + h_2 C_2)) - \nabla_B(\nabla_A(h_1 C_1 + h_2 C_2)) \\
&\quad - \nabla_{[A, B]}(h_1 C_1 + h_2 C_2) \\
&\stackrel{(36.52)}{=} \nabla_A(B(h_1)C_1 + h_1 \nabla_B C_1) + \nabla_A(B(h_2)C_2 + h_2 \nabla_B C_2) \\
&\quad - \nabla_B(A(h_1)C_1 + h_1 \nabla_A C_1) - \nabla_B(A(h_2)C_2 + h_2 \nabla_A C_2) \\
&\quad - [A, B](h_1)C_1 - h_1 \nabla_{[A, B]} C_1 - [A, B](h_2)C_2 - h_2 \nabla_{[A, B]} C_2 \\
&\stackrel{(36.52)}{=} A(B(h_1))C_1 + B(h_1) \nabla_A C_1 + A(h_1) \nabla_B C_1 + h_1 \nabla_A(\nabla_B C_1) \\
&\quad + A(B(h_2))C_2 + B(h_2) \nabla_A C_2 + A(h_2) \nabla_B C_2 + h_2 \nabla_A(\nabla_B C_2) \\
&\quad - B(A(h_1))C_1 - A(h_1) \nabla_B C_1 - B(h_1) \nabla_A C_1 - h_1 \nabla_B(\nabla_A C_1) \\
&\quad - B(A(h_2))C_2 - A(h_2) \nabla_B C_2 - B(h_2) \nabla_A C_2 - h_2 \nabla_B(\nabla_A C_2) \\
&\quad - [A, B](h_1)C_1 - h_1 \nabla_{[A, B]} C_1 - [A, B](h_2)C_2 - h_2 \nabla_{[A, B]} C_2 \\
&\stackrel{\text{cancelamentos diversos}}{=} h_1 (\nabla_A(\nabla_B C_1) - \nabla_B(\nabla_A C_1) - \nabla_{[A, B]} C_1) \\
&\quad + h_2 (\nabla_A(\nabla_B C_2) - \nabla_B(\nabla_A C_2) - \nabla_{[A, B]} C_2) \\
&= h_1 R(A, B)C_1 + h_2 R(A, B)C_2,
\end{aligned}$$

como desejávamos provar. ■

36.A.2 Prova da Primeira Identidade de Bianchi, Proposição 36.8

Prova da Proposição 36.8. A demonstração faz uso da definição (36.79) do tensor de torção e da identidade de Jacobi

(35.61).

$$\begin{aligned}
 R(A, B)C + R(C, A)B + R(B, C)A &= \nabla_A(\nabla_B C) - \nabla_B(\nabla_A C) - \nabla_{[A, B]}C \\
 &+ \nabla_C(\nabla_A B) - \nabla_A(\nabla_C B) - \nabla_{[C, A]}B \\
 &+ \nabla_B(\nabla_C A) - \nabla_C(\nabla_B A) - \nabla_{[B, C]}A \\
 &= \nabla_A(\nabla_B C - \nabla_C B) + \nabla_B(\nabla_C A - \nabla_A C) + \nabla_C(\nabla_A B - \nabla_B A) \\
 &\quad - \nabla_{[A, B]}C - \nabla_{[C, A]}B - \nabla_{[B, C]}A \\
 &\stackrel{(35.79)}{=} \nabla_A(T(B, C)) + \nabla_B(T(C, A)) + \nabla_C(T(A, B)) \\
 &\quad + \nabla_A([B, C]) + \nabla_B([C, A]) + \nabla_C([A, B]) \\
 &\quad - \nabla_{[A, B]}C - \nabla_{[C, A]}B - \nabla_{[B, C]}A \\
 &= \nabla_A(T(B, C)) + \nabla_B(T(C, A)) + \nabla_C(T(A, B)) \\
 &\quad + [\nabla_A([B, C]) - \nabla_{[B, C]}A] + [\nabla_B([C, A]) - \nabla_{[C, A]}B] \\
 &\quad + [\nabla_C([A, B]) - \nabla_{[A, B]}C] \\
 &= \nabla_A(T(B, C)) + \nabla_B(T(C, A)) + \nabla_C(T(A, B)) \\
 &\quad + T(A, [B, C]) + T(B, [C, A]) + T(C, [A, B]) \\
 &\quad + \underbrace{[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]}_{\stackrel{(35.61)}{=} 0} \\
 &= \nabla_A(T(B, C)) + \nabla_B(T(C, A)) + \nabla_C(T(A, B)) \\
 &\quad + T(A, [B, C]) + T(B, [C, A]) + T(C, [A, B]),
 \end{aligned}$$

como desejávamos mostrar. ■

36.A.3 Prova da Segunda Identidade de Bianchi, Proposição 36.9

Prova da Proposição 36.9. Usando o fato que $\nabla_A \nabla_B = \nabla_B \nabla_A + R(A, B) + \nabla_{[A, B]}$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \nabla_A(R(B, C)D) &= \nabla_A \nabla_B \nabla_C D - \nabla_A \nabla_C \nabla_B D - \nabla_A \nabla_{[B, C]}D \\
 &= \nabla_B \nabla_A \nabla_C D - \nabla_C \nabla_A \nabla_B D \\
 &\quad + R(A, B) \nabla_C D - R(A, C) \nabla_B D - R(A, [B, C])D \\
 &\quad + \nabla_{[A, B]} \nabla_C D - \nabla_{[A, C]} \nabla_B D - \nabla_{[B, C]} \nabla_A D \\
 &\quad + \nabla_{[A, [B, C]]}D, \tag{36.A.1}
 \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade comutamos ∇_A para a direita. De forma análoga, comutando-se novamente ∇_A para a direita, tem-se

$$\begin{aligned}
 \nabla_B \nabla_A \nabla_C D - \nabla_C \nabla_A \nabla_B D &= (\nabla_B \nabla_C - \nabla_C \nabla_B) \nabla_A D \\
 &\quad + \nabla_B(R(A, C)D) - \nabla_C(R(A, B)D) \\
 &\quad + \nabla_B \nabla_{[C, A]}D - \nabla_C \nabla_{[A, B]}D \\
 &= R(B, C) \nabla_A D + \nabla_{[B, C]} \nabla_A D \\
 &\quad - \nabla_B(R(C, A)D) - \nabla_C(R(A, B)D) \\
 &\quad + \nabla_B \nabla_{[C, A]}D - \nabla_C \nabla_{[A, B]}D.
 \end{aligned}$$

Inserindo-se isso em (36.A.1), obtém-se

$$\begin{aligned}
 \nabla_A(R(B, C)D) + \nabla_B(R(C, A)D) + \nabla_C(R(A, B)D) &= +R(A, B) \nabla_C D - R(A, C) \nabla_B D + R(B, C) \nabla_A D \\
 &\quad - R(A, [B, C])D \\
 &\quad + (\nabla_{[A, B]} \nabla_C - \nabla_C \nabla_{[A, B]})D + (\nabla_B \nabla_{[C, A]} - \nabla_{[A, C]} \nabla_B)D \\
 &\quad + \nabla_{[A, [B, C]]}D.
 \end{aligned}$$

Agora,

$$(\nabla_{[A, B]} \nabla_C - \nabla_C \nabla_{[A, B]})D + (\nabla_B \nabla_{[C, A]} - \nabla_{[A, C]} \nabla_B)D = R([A, B], C)D - R(B, [C, A])D + \nabla_{[[A, B], C]}D - \nabla_{[B, [A, C]]}D.$$

Inserindo isso acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 \nabla_A(R(B, C)D) + \nabla_B(R(C, A)D) + \nabla_C(R(A, B)D) &= R(A, B) \nabla_C D - R(A, C) \nabla_B D + R(B, C) \nabla_A D \\
 &\quad - R(A, [B, C])D + R([A, B], C)D - R(B, [C, A])D \\
 &\quad + \nabla_{[A, [B, C]]}D + \nabla_{[[A, B], C]}D - \nabla_{[B, [A, C]]}D.
 \end{aligned}$$

Por fim, notemos que

$$\nabla_{[A, [B, C]]}D + \nabla_{[[A, B], C]}D - \nabla_{[B, [A, C]]}D = \nabla_{[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]}D = 0,$$

devido à identidade de Jacobi (35.61). Portanto,

$$\begin{aligned}
 \nabla_A(R(B, C)D) + \nabla_B(R(C, A)D) + \nabla_C(R(A, B)D) &= R(A, B) \nabla_C D + R(C, A) \nabla_B D + R(B, C) \nabla_A D \\
 &\quad + R([A, B], C)D + R([C, A], B)D + R([B, C], A)D.
 \end{aligned}$$

Isso estabeleceu (36.146).

Observemos agora que

$$\begin{aligned}
\nabla_A(R)(B, C) + \nabla_B(R)(C, A) + \nabla_C(R)(A, B) &= \nabla_A(R(B, C)) + \nabla_B(R(C, A)) + \nabla_C(R(A, B)) \\
&\quad - R(A, B)\nabla_C - R(C, A)\nabla_B - R(B, C)\nabla_A \\
&\quad - R(\nabla_A B, C) - R(\nabla_B C, A) - R(\nabla_C A, B) \\
&\quad - R(B, \nabla_A C) - R(C, \nabla_B A) - R(A, \nabla_C B) \\
&\stackrel{(36.A.2)}{=} -R(\nabla_A B, C) - R(\nabla_B C, A) - R(\nabla_C A, B) \\
&\quad + R(\nabla_A C, B) + R(\nabla_B A, C) + R(\nabla_C B, A) \\
&\quad + R([A, B], C) + R([C, A], B) + R([B, C], A) \\
&= -R(\nabla_A B - \nabla_B A, C) - R(\nabla_B C - \nabla_C B, A) \\
&\quad - R(\nabla_C A - \nabla_A C, B) \\
&\quad + R([A, B], C) + R([C, A], B) + R([B, C], A) \\
&\stackrel{(36.79)}{=} -R(T(A, B), C) - R(T(C, A), B) - R(T(B, C), A),
\end{aligned}$$

que estabelece (36.147). ■

36.A.4 Prova da Proposição 36.10

Prova da Proposição 36.10. (De [223] e [302], com modificações e acréscimos). Para provar (36.149), provemos primeiramente que $g(R(A, B)C, C) = 0$. Como ∇ é um compatível com a métrica, tem-se

$$\begin{aligned}
g(\nabla_A \nabla_B C, C) &= A(g(\nabla_B C, C)) - g(\nabla_B C, \nabla_A C) \\
&= \frac{1}{2}A(B(g(C, C))) - g(\nabla_B C, \nabla_A C), \\
g(\nabla_B \nabla_A C, C) &= \frac{1}{2}B(A(g(C, C))) - g(\nabla_A C, \nabla_B C), \\
g(\nabla_{[A, B]} C, C) &= \frac{1}{2}[A, B](g(C, C)).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
g(R(A, B)C, C) &= g(\nabla_A \nabla_B C, C) - g(\nabla_B \nabla_A C, C) - g(\nabla_{[A, B]} C, C) \\
&= \frac{1}{2}A(B(g(C, C))) - \frac{1}{2}B(A(g(C, C))) - \frac{1}{2}[A, B](g(C, C)) = 0.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $0 = g(R(A, B)(C + D), (C + D)) = g(R(A, B)C, D) + g(R(A, B)D, C)$, provando (36.149).

A expressão (36.150) é um caso particular de (36.152) para conexões simétricas (em cujo caso, o tensor de torção T e o tensor S são nulos). Passemos à prova de (36.152). A identidade de Bianchi (36.141) implica que

$$\begin{aligned}
g(R(A, B)C, D) + g(R(C, A)B, D) + g(R(B, C)A, D) &= g(S(A, B, C), D), \\
g(R(A, B)D, C) + g(R(D, A)B, C) + g(R(B, D)A, C) &= g(S(A, B, D), C), \\
g(R(A, C)D, B) + g(R(D, A)C, B) + g(R(C, D)A, B) &= g(S(A, C, D), B), \\
g(R(B, C)D, A) + g(R(D, B)C, A) + g(R(C, D)B, A) &= g(S(B, C, D), A).
\end{aligned}$$

Verifique! Usando (36.149) e/ou a antissimetria de R , as linhas acima podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
g(R(A, B)C, D) + g(R(C, A)B, D) + g(R(B, C)A, D) &= g(S(A, B, C), D), \\
-g(R(A, B)C, D) + g(R(D, A)B, C) - g(R(B, D)C, A) &= g(S(A, B, D), C), \\
g(R(C, A)B, D) - g(R(D, A)B, C) + g(R(C, D)A, B) &= g(S(A, C, D), B), \\
-g(R(B, C)A, D) - g(R(B, D)C, A) - g(R(C, D)A, B) &= g(S(B, C, D), A).
\end{aligned}$$

Verifique! Somando-se as expressões acima, obtemos

$$\begin{aligned}
2g(R(C, A)B, D) - 2g(R(B, D)C, A) \\
= g(S(A, B, C), D) + g(S(A, B, D), C) + g(S(A, C, D), B) + g(S(B, C, D), A).
\end{aligned}$$

Verifique! Efetuando-se a permutação de letras $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ e usando-se (36.145), obtemos

$$\begin{aligned}
2g(R(A, B)C, D) - 2g(R(C, D)A, B) \\
= g(S(B, C, A), D) + g(S(B, C, D), A) + g(S(B, A, D), C) + g(S(C, A, D), B)
\end{aligned}$$

(verifique!), provando (36.152). ■

36.A.5 Prova da Proposição 36.11

Demonstração. (Extraída de [223]). Por hipótese, $F_1(A + C, B, A + C, B) = F_2(A + C, B, A + C, B)$. Pela multi-linearidade de F_1 e F_2 e por (36.165)–(36.167), isso implica

$$F_1(A, B, A, B) + 2F_1(A, B, C, B) + F_1(C, B, C, B) = F_1(A, B, A, B) + 2F_2(A, B, C, B) + F_2(C, B, C, B)$$

(verifique!), o que, pela hipótese (36.174), diz-nos que

$$F_1(A, B, C, B) = F_2(A, B, C, B), \quad (36.A.2)$$

para todos $A, B, C \in \mathcal{V}$. Essa mesma relação afirma que

$$F_1(A, B + D, C, B + D) = F_2(A, B + D, C, B + D)$$

para todos $A, B, C, D \in \mathcal{V}$. Novamente pela multi-linearidade de F_1 e F_2 e por (36.165)–(36.167), isso implica

$$\begin{aligned}
F_1(A, B, C, B) + F_1(A, B, C, D) + F_1(A, D, C, B) + F_1(A, D, C, D) \\
= F_2(A, B, C, B) + F_2(A, B, C, D) + F_2(A, D, C, B) + F_2(A, D, C, D)
\end{aligned}$$

(verifique!), o que, por (36.A.2), diz-nos que

$$F_1(A, B, C, D) + F_1(A, D, C, B) = F_2(A, B, C, D) + F_2(A, D, C, B).$$

Isso pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} F_1(A, B, C, D) - F_2(A, B, C, D) &= F_2(A, D, C, B) - F_1(A, D, C, B) \\ &\stackrel{(36.165)-(36.167)}{=} F_1(B, C, A, D) - F_2(B, C, A, D). \end{aligned}$$

Verifique! Ora, a igualdade assim obtida

$$F_1(A, B, C, D) - F_2(A, B, C, D) = F_1(B, C, A, D) - F_2(B, C, A, D)$$

implica também (pela troca de letras $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$) que

$$F_1(B, C, A, D) - F_2(B, C, A, D) = F_1(C, A, B, D) - F_2(C, A, B, D).$$

Assim, mostramos que a expressão $F_1(A, B, C, D) - F_2(A, B, C, D)$ é invariante por permutações cíclicas das três primeiras letras. Logo,

$$\begin{aligned} 3(F_1(A, B, C, D) - F_2(A, B, C, D)) &= F_1(A, B, C, D) - F_2(A, B, C, D) \\ &\quad + F_1(B, C, A, D) - F_2(B, C, A, D) \\ &\quad + F_1(C, A, B, D) - F_2(C, A, B, D) \\ &= (F_1(A, B, C, D) + F_1(C, A, B, D) + F_1(B, C, A, D)) \\ &\quad - (F_2(A, B, C, D) + F_2(C, A, B, D) + F_2(B, C, A, D)) \\ &\stackrel{(36.173)}{=} 0. \end{aligned}$$

Logo, $F_1(A, B, C, D) = F_2(A, B, C, D)$, como queríamos demonstrar. ■

Parte VIII

Séries e Transformadas de Fourier. Distribuições