


# Capítulo 36

## Noções Geométricas em Variedades

Conteúdo

<b>36.1</b>	<b>Tensores Métricos Riemannianos e Semi-Riemannianos</b>	<b>1707</b>
36.1.1	Transposição em Relação a Tensores Métricos	1716
<b>36.2</b>	<b>Conexões Afins</b>	<b>1720</b>
36.2.1	Conexões Afins em Campos Vetoriais	1720
36.2.1.1	Conexões Afins em Campos Tensoriais	1726
36.2.2	O Tensor de Torção	1729
36.2.3	Tipos Especiais de Conexões Afins	1730
36.2.3.1	Conexões Simétricas (ou Livres de Torção)	1730
36.2.3.2	Conexões Métricas (ou Riemannianas)	1732
36.2.3.3	Conexões de Levi-Civita	1738
36.2.3.4	Conexões de Weyl e a Origem das Transformações de Calibre	1738
36.2.4	Gradiente, Divergente e Laplaciano	1741
<b>36.3</b>	<b>O Tensor de Curvatura</b>	<b>1744</b>
36.3.1	As Identidades de Bianchi e Outras Propriedades	1747
36.3.2	O Tensor de Curvatura em Coordenadas Locais	1749
36.3.3	A Curvatura Seccional	1751
36.3.4	O Tensor de Ricci e a Curvatura Escalar	1754
36.3.5	Comentário Sobre a Segunda Identidade de Bianchi e as Equações de Einstein	1757
<b>36.4</b>	<b>Geodésicas</b>	<b>1760</b>
36.4.1	O Lema de Gauss	1765
36.4.2	Pontos Conjugados e a Equação de Jacobi	1768
36.4.2.1	A Equação de Jacobi	1769
36.4.2.2	Pontos Conjugados	1771
<b>36.5</b>	<b>Campos de Killing</b>	<b>1772</b>
<b>36.6</b>	<b>A Estrutura Causal de Variedades Lorentzianas</b>	<b>1777</b>
36.6.1	A Identidade de Raychaudhuri	1779
<b>APÊNDICES</b>		
<b>36.A</b>	<b>Demonstração de Algumas Propriedades do Tensor de Curvatura</b>	<b>1789</b>
36.A.1	Prova da Proposição 36.6	1789
36.A.2	Prova da Primeira Identidade de Bianchi, Proposição 36.8	1790
36.A.3	Prova da Segunda Identidade de Bianchi, Proposição 36.9	1791
36.A.4	Prova da Proposição 36.10	1793
36.A.5	Prova da Proposição 36.11	1794

 ESTE capítulo daremos continuidade ao Capítulo 35, página 1642, introduzindo agora noções de natureza geométrica no estudo de variedades diferenciáveis, noções tais como a de tensor métrico, a de tensor métrico Riemanniano, a de tensor métrico semi-Riemanniano, a de tensor métrico Lorentziano, a de conexão afim, a de tensor de torção, a de derivação covariante, a de transporte paralelo, a de curva geodésica, a de conexão de Levi-Civita, a de tensor de curvatura etc. Todos esses temas fazem parte da área da Matemática denominada *Geometria Diferencial* e encontram aplicações importantes em Física na *Teoria da Relatividade Geral*. Uma lista de referências bibliográficas para os assuntos aqui discutidos encontra-se na introdução ao Capítulo 35, página 1642.

### 36.1 Tensores Métricos Riemannianos e Semi-Riemannianos

Em tudo o que segue denotaremos por  $C^\infty(M)$  o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis com valores em  $\mathbb{R}$  definidas em uma variedade diferenciável  $M$  e por  $\mathcal{X}(M)$  o conjunto dos campos vetoriais reais infinitamente diferenciáveis também definidos em  $M$ .

• **Tensores Métricos semi-Riemannianos**

Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$ . Seja  $g$  um campo tensorial de tipo  $(0, 2)$ , ou seja, uma aplicação  $g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para cada  $p \in M$  a aplicação  $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \ni (A, B) \mapsto g(A, B)_p$  seja bilinear, ou seja, valha

$$g(A, B + C)_p = g(A, B)_p + g(A, C)_p,$$

$$g(A + B, C)_p = g(A, C)_p + g(B, C)_p,$$

$$g(aA, B)_p = a_p g(A, B)_p,$$

$$g(A, bB)_p = b_p g(A, B)_p,$$

para todo  $p \in M$ , para todos  $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$  e todos  $a, b \in C^\infty(M)$ . Um campo tensorial  $g$  de tipo  $(2, 0)$  é dito ser uma *tensor métrico semi-Riemanniano*<sup>1</sup>, ou uma *pseudométrica Riemanniana* se for simétrico e não-degenerado, ou seja, se

$$g(A, B)_p = g(B, A)_p$$

para todo  $p \in M$  e para todos  $A, B \in \mathcal{X}(M)$  (simetria) e se valer para todo  $p \in M$  que a condição  $g(A, B)_p = 0$  é válida para todo  $A \in \mathcal{X}(M)$  se e somente se  $B$  for identicamente nulo em  $p$  (não-degenerescência). Suporemos também que para cada  $(A, B) \in \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$  a aplicação  $p \mapsto g(A, B)_p$  seja suficientemente diferenciável, eventualmente, infinitamente diferenciável.

Na literatura física, um tensor métrico é muito frequentemente denominado *métrica*. Essa nomenclatura não é muito adequada (e evitamos usá-la sempre que possível) por confundir-se indevidamente com a noção topológica de métrica (assunto do Capítulo 27, página 1313).

• **Tensores métricos Riemannianos**

Um tensor métrico semi-Riemanniano  $g$  é dita ser uma *tensor métrico Riemanniano* se for não-negativo:

$$g(A, A)_p \geq 0,$$

para todo  $p \in M$  e para todo  $A \in \mathcal{X}(M)$ . Tensores métricos Riemannianos ocorrem naturalmente na Geometria de Superfícies, daí sua relevância.

Para nós, tensores métricos Riemannianos são um caso especial de tensores métricos semi-Riemannianos, de modo que ao fazermos afirmações gerais sobre os segundos, estas valerão também para os primeiros como caso particular.

Afirmamos que se  $g$  é um tensor métrico Riemanniano, então vale

$$(g(A, B)_p)^2 \leq g(A, A)_p g(B, B)_p \tag{36.1}$$

para todo  $p \in M$  e para todos  $A, B \in \mathcal{X}(M)$ , propriedade essa conhecida como *desigualdade de Cauchy-Schwarz*. De fato, se  $g$  é um tensor métrico Riemanniano, então para todos  $A, B \in \mathcal{X}(M)$  e todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  vale

$$0 \leq g(A + \lambda B, A + \lambda B)_p = \lambda^2 g(B, B)_p + 2\lambda g(A, B)_p + g(A, A)_p. \tag{36.2}$$

Caso  $g(B, B)_p = 0$  a expressão (36.2) só pode ser verdadeira para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  se  $g(A, B)_p = 0$ , em cujo caso (36.1) é trivialmente satisfeita (ambos os lados se anulam). Caso  $g(B, B)_p > 0$  a expressão (36.2) fica

$$0 \leq g(B, B)_p \left( \lambda + \frac{g(A, B)_p}{g(B, B)_p} \right)^2 + \left( g(A, A)_p - \frac{(g(A, B)_p)^2}{g(B, B)_p} \right),$$

<sup>1</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866).

o que só pode ser verdadeiro para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  se  $g(A, A)_p - \frac{(g(A, B)_p)^2}{g(B, B)_p} \geq 0$ , provando (36.1).

Um corolário evidente de (36.1) é que  $g$  é um tensor métrico Riemanniano se e somente se valerm as seguintes condições para todo  $p \in M$ :

1.  $g$  é simétrico:  $g(A, B)_p = g(B, A)_p, \forall A, B \in \mathcal{X}(M)$ ,
2.  $g$  é não-negativo:  $g(A, A)_p \geq 0, \forall A \in \mathcal{X}(M)$ ,
3.  $g(A, A)_p = 0$  se e somente se  $A_p = 0$ .

De fato, se  $g$  é Riemanniano 1 e 2 são satisfeitos e se  $g(A, A)_p = 0$ , teremos por (36.1) que  $g(A, B)_p = 0$  para todo  $B_p$ , o que implica  $A_p = 0$  pela não-degenerescência de  $g$ . Por outro lado, se valerm as condições 1, 2 e 3 e  $g(A, B)_p = 0$  para todo  $B_p$ , tem-se, em particular, que  $g(A, A)_p = 0$ , o que implica  $A_p = 0$  pela condição 3, acima.

• **Tensores métricos semi-Riemannianos e formas bilineares**

Se  $g$  é um tensor métrico semi-Riemanniano, então para cada  $p \in M$  temos definida uma forma bilinear simétrica e não-degenerada em  $T_pM$  por  $T_pM \times T_pM \ni (A, B) \mapsto g(A, B)_p \in \mathbb{R}$ . Reciprocamente, uma forma bilinear simétrica e não-degenerada definida em cada  $T_pM$  (e que seja também diferenciável) define um tensor métrico semi-Riemanniano.

No caso de  $g$  ser um tensor métrico Riemanniano a forma bilinear simétrica e não-degenerada  $g(A, B)_p$  é também positiva e, portanto, define um produto escalar (ou produto interno) em  $T_pM$ . Um tensor métrico Riemanniano em  $M$ , portanto, coincide com um produto escalar definido em cada espaço tangente  $T_pM$  (e que seja também diferenciável).

• **Representação em coordenadas locais**

Em uma carta local de coordenadas (que denotamos por  $(x^1, \dots, x^m)$ ) podemos escrever um vetor  $A \in T_pM$  como (omitiremos a dependência com o ponto  $p$  para não sobrecarregar a notação)  $A_p = A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Assim, se  $g$  é um tensor métrico semi-Riemanniano, teremos

$$g(A, B) = g\left(A^i \frac{\partial}{\partial x^i}, B^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) A^i B^j = g_{ij} A^i B^j,$$

onde

$$g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

são as componentes (covariantes) do tensor métrico semi-Riemanniano  $g$  na base  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$  de  $T_pM$  definida pelas coordenadas locais em questão. A condição de simetria implica que  $g_{ij} = g_{ji}$  para todos os índices  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ . Assim, o tensor métrico semi-Riemanniano  $g$  possui  $m(m+1)/2$  componentes independentes.

Alternativamente, podemos escrever

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

com o que teremos também o *pareamento*<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \langle g, A \otimes B \rangle &= \left\langle g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \left(A^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \otimes \left(B^l \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \right\rangle = g_{ij} A^k B^l \left\langle dx^i \otimes dx^j, \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle \\ &= g_{ij} A^k B^l \underbrace{\left\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle}_{=\delta_k^i} \underbrace{\left\langle dx^j, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle}_{=\delta_l^j} = g_{ij} A^i B^j = g(A, B), \end{aligned}$$

como esperado.

<sup>2</sup>Sobre a nomenclatura. Seja  $V$  um espaço vetorial e seja  $V'$  seu dual. Seja  $v' \in V'$ . A função  $V \ni v \mapsto v'(v)$  é muitas vezes denotada por  $\langle v', v \rangle$ . Para  $v \in V$  e  $v' \in V'$  a expressão  $\langle v', v \rangle$  é denominada *pareamento* e  $v'$  e  $v$ , em uma tradução do inglês *pairing*.

• **Transformação das componentes de um tensor métrico por mudanças de sistemas de coordenadas**

Em um sistema de coordenadas  $(x^1, \dots, x^m)$ , para o qual teremos a base no espaço tangente  $T_pM$  dada por  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$  com  $\frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial x^b}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x^b}$  (vide (35.16)), as componentes de  $g$  serão

$$g'_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial x^l}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial x^j} g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial x^j} g_{kl}.$$

Assim,

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g'_{ij} dx'^i \otimes dx'^j,$$

com

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl}. \tag{36.3}$$

A expressão (36.3) mostra como obter as componentes de  $g$  no sistema de coordenadas  $(x^1, \dots, x^m)$  a partir das componentes de  $g$  no sistema de coordenadas  $(x^1, \dots, x^m)$ .

• **Tensores métricos Riemannianos. O exemplo de superfícies regulares**

Vamos discutir um exemplo importante (também historicamente) de tensores métricos Riemannianos, a saber, aquelas definidas sobre superfícies regulares de  $\mathbb{R}^n$ . Por conveniência, absteremo-nos na discussão deste exemplo de usar a convenção de soma de Einstein.

Seja  $S$  uma superfície regular de dimensão  $m$  em  $\mathbb{R}^n$  (com  $m \leq n$ ) e seja  $p \in S$ . Na vizinhança de  $p$  a superfície  $S$  é descrita por  $n$  funções diferenciáveis  $y^1(x^1, \dots, x^m), \dots, y^n(x^1, \dots, x^m)$  definidas em algum aberto  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^m$ . Denotaremos por  $(x_p^1, \dots, x_p^m)$  as coordenadas em  $\mathcal{O}$  correspondentes ao ponto  $p$ . A aplicação diferencial

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \tag{36.4}$$

é injetora em todo  $\mathcal{O}$ . Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em uma vizinhança suficientemente pequena de  $p$ , sua restrição a  $S$  pode ser expressa como uma função das coordenadas  $x^1, \dots, x^m$ :  $f(y^1(x^1, \dots, x^m), \dots, y^n(x^1, \dots, x^m))$ . Se considerarmos uma curva diferenciável  $x^1(t), \dots, x^m(t)$  em  $\mathcal{O}$  que passe por  $p$  em  $t = 0$  teremos para a função  $f$  a expressão  $F(t) \equiv f(y^1(x^1(t), \dots, x^m(t)), \dots, y^n(x^1(t), \dots, x^m(t)))$  quando restrita à imagem dessa curva em  $S$ . Assim, pela regra da cadeia,

$$\frac{dF}{dt}(0) = \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^m \frac{\partial f}{\partial y^a} \frac{\partial y^a}{\partial x^b} \dot{x}^b(0),$$

sendo as derivadas parciais calculadas em  $p$ . Considerando-se curvas como  $(x_p^1, \dots, x_p^j + t, \dots, x_p^n)$  vemos que

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p = \sum_{a=1}^n \frac{\partial y^a}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^a}.$$

Os vetores  $\frac{\partial}{\partial y^a}, a = 1, \dots, n$  compõem uma base de coordenadas Cartesianas do *espaço ambiente*  $\mathbb{R}^n$ . Assim, a última expressão mostra-nos como os vetores  $\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p, j = 1, \dots, m$ , do espaço tangente são expressos em termos dos vetores da base Cartesiana de  $\mathbb{R}^n$ . Lá vemos que as componentes de  $\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$  nessa base são dadas por  $\frac{\partial y^a}{\partial x^j}, a = 1, \dots, n$ .

No espaço ambiente existe um produto escalar natural definido entre os vetores: o produto escalar Euclidiano usual, dado por

$$\left\langle \sum_{a=1}^n A^a \frac{\partial}{\partial y^a}, \sum_{b=1}^n B^b \frac{\partial}{\partial y^b} \right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{a=1}^n A^a B^a.$$

Segundo esse produto escalar, temos

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{a=1}^n \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial y^a}{\partial x^j},$$

para todos  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ . Trata-se de um produto escalar restrito ao espaço tangente  $T_p S$ , o plano tangente a  $S$  em  $p$ . Portanto, esse produto escalar define um tensor métrico Riemanniano com componentes

$$g_{ij} \equiv g \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\rangle_{\mathbb{R}^n},$$

sendo  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , ou seja,

$$g_{ij} = \sum_{a=1}^n \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial y^a}{\partial x^j}.$$

Que  $g$  define um produto escalar (forma bilinear, simétrica, positiva e não-degenerada) em  $T_p S$ , segue das propriedades correspondentes do produto escalar do Euclidiano no espaço ambiente e da injetividade de (36.4).

Esse tensor métrico é denominado *tensor métrico natural* definido na superfície regular  $S$ . Trata-se do tensor métrico induzido em  $S$  pelo produto escalar Euclidiano usual do espaço ambiente  $\mathbb{R}^n$  onde  $S$  está mergulhada.

• **Signatura de tensores métricos semi-Riemannianos**

Retornemos agora à discussão geral.

Considerando as matrizes  $G$  e  $G'$ , com elementos de matriz  $(G)_{ij} = g_{ij}$  e  $(G')_{ij} = g'_{ij}$ , respectivamente, (36.3) indica-nos que, por transformações de coordenadas,  $G$  e  $G'$  relacionam-se por

$$G' = P^T G P, \tag{36.5}$$

onde  $P$  é a matriz com elementos de matriz  $P_{ab} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^b}$ . Assim,  $G$  é levada em  $G'$  por uma transformação de congruência (para a definição, vide página 405).

A condição de simetria sobre um tensor métrico semi-Riemanniano  $g$  garante também que a matriz  $G$  possui autovalores reais e garante a possibilidade de diagonalizá-la em um ponto  $q \in M$ , ou seja, para  $q \in M$  existe uma base em  $T_q M$  tal que a matriz  $G_q$  assume uma forma diagonal<sup>3</sup>. Como  $g$  é não-degenerada,  $G$  não pode conter 0 como autovalor (justifique!).

Pela Lei da Inércia de Sylvester, Teorema 9.17, página 406, transformações de congruência, ainda que possam alterar os autovalores de  $G$ , preservam o número de autovalores positivos, o número de autovalores negativos e o número de autovalores nulos (sempre contando a degenerescência dos autovalores). Assim, como não ocorre o autovalor nulo, o número de autovalores positivos e o número de autovalores negativos são uma característica de  $g$ , ou seja, não são alterados por mudanças de coordenadas.

O par  $(p, n)$ , onde  $p$  é o número de autovalores positivos de  $g$  e  $n$  é o número de autovalores negativos de  $g$  (sempre contando a degenerescência dos autovalores) é denominado *signatura* do tensor métrico  $g$  e é, portanto, um invariante por mudanças de sistemas de coordenadas.

Da imposição que  $g$  é não-degenerada em toda a variedade  $M$  obtém-se também que a signatura de  $g$  é constante em toda  $M$  pois, se assim não fosse, um dos autovalores teria de trocar de sinal, anulando-se, portanto, em algum ponto, devido à continuidade de  $g$ , o que violaria a condição de não-degenerescência.

O estudante há de perceber também que se trocarmos uma tensor métrico semi-Riemanniano  $g$  por  $-g$  a signatura muda de  $(p, n)$  para  $(n, p)$ .

Muitas vezes a signatura  $(p, n)$  de um tensor métrico semi-Riemanniano  $g$  é denotada por uma  $m$ -upla de  $p$  sinais “+” e  $n$  sinais “-”:  $(\underbrace{+, \dots, +}_p, \underbrace{-, \dots, -}_n)$ .

<sup>3</sup>Note-se que pode não ser possível diagonalizar cada  $G_q$  simultaneamente para todo  $q \in M$  de modo contínuo.

• **Forma diagonal canônica**

Seja  $g$  um tensor métrico semi-Riemanniano com signatura  $(p, n)$ . Em um ponto específico  $q$  é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas no qual a matriz  $G_q$  assume a forma diagonal  $(\underbrace{+, \dots, +}_p, \underbrace{-, \dots, -}_n)$ . De fato, como co-

mentamos, podemos escolher uma base na qual  $G_q$  assume a forma diagonal  $g_p = \text{diag}(d_1, \dots, d_p, -d_{p+1}, \dots, -d_{p+n})$ , com  $d_k > 0$  para todo  $k$ . Reescalando-se as coordenadas  $x^k$  na forma  $x^k \rightarrow \sqrt{d_k} x^k$ ,  $G_q$  assume a forma desejada, que denominamos *forma diagonal canônica* do tensor métrico semi-Riemanniano no ponto  $q$ . Como antes lembramos que em geral só é possível reduzir um tensor métrico à sua forma canônica em um ponto isolado, nem sempre sendo possível igualmente fazê-lo em uma vizinhança desse ponto.

• **Tensores métricos Lorentzianas**

É muito fácil perceber que um tensor métrico é Riemanniano se e somente se possuir signatura  $(+, \dots, +)$ .

Além de tensores métricos com tal signatura, importantes nas Geometrias Riemannianas, há também um interesse especial por tensores métricos com signatura  $(+, -, \dots, -)$  (ou  $(-, +, \dots, +)$ , dependendo da convenção), pois são tais tensores métricos que ocorrem na descrição do espaço-tempo na Teoria da Relatividade Geral. Tensores métricos com signatura  $(+, -, \dots, -)$  (ou  $(-, +, \dots, +)$ ), são denominadas *tensores métricos Lorentzianos*<sup>4</sup>.

Nestas notas adotaremos a convenção (dita “da maioria”) de considerar tensores métricos Lorentzianos sempre com signatura  $(+, -, \dots, -)$ . O leitor seja, porém, advertido de que tal convenção não é universal em textos de Física, onde por vezes adota-se a convenção  $(-, +, \dots, +)$ . A convenção  $(+, -, \dots, -)$  é mais comum na Física das Partículas Elementares e na Teoria Quântica de Campos, enquanto que a convenção  $(-, +, \dots, +)$  é mais comum na Teoria da Relatividade Geral.

• **Variedades semi-Riemannianas, Riemannianas e Lorentzianas**

Uma variedade diferenciável  $M$  dotada de um tensor métrico semi-Riemanniano (Riemanniano, Lorentziana)  $g$  é dita ser uma *variedade semi-Riemanniana* (*Riemanniana*, *Lorentziana*, respectivamente).

Variedades semi-Riemannianas (tais como variedades Riemannianas ou Lorentzianas) serão frequentemente denotadas por um par  $(M, g)$ , com  $M$  sendo a variedade e  $g$  sendo o tensor métrico semi-Riemanniano considerada em  $M$ .

Uma questão matematicamente importante é saber se uma variedade diferenciável  $M$  dada admite algum tensor métrico semi-Riemanniano com uma dada signatura. Como veremos logo abaixo, toda variedade diferenciável admite um tensor métrico Riemanniano, mas para tensores métricos Lorentzianos a situação é mais restritiva: para que uma variedade diferenciável  $M$  admita um tensor métrico Lorentziano é necessária e suficiente ou que  $M$  seja não-compacta ou que  $M$  seja compacta, mas tenha característica de Euler nula (a esfera  $S^2$ , por exemplo, não admite nenhum tensor métrico Lorentziano, por ter característica de Euler igual a 2). Como veremos, toda variedade Lorentziana compacta possui curvas tipo-tempo fechadas. Como essa é uma característica indesejada de modelos físicos do espaço-tempo (por ser o princípio de causalidade violado), variedades compactas são frequentemente desconsideradas.

• **Existência de tensores métricos Riemannianos**

**Proposição 36.1** *Toda variedade diferenciável  $M$  admite ao menos um tensor métrico Riemanniano.* □

**Prova.** Seja  $m$  a dimensão de  $M$  e  $\mathcal{A} = \{(A_\lambda, h_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$  um atlas infinitamente diferenciável em  $M$ . Sejam  $(x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^m)$  as coordenadas com que são descritos os pontos do aberto  $A_\lambda \subset M$ , de modo que para cada  $p \in A_\lambda$  tenhamos em  $T_p M$  uma base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\lambda^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\lambda^m} \Big|_p \right\}$ . Para  $A = A^i \frac{\partial}{\partial x_\lambda^i} \Big|_p$  e  $B = B^i \frac{\partial}{\partial x_\lambda^i} \Big|_p$  definamos nessa base  $g_p^\lambda(A, B) := \delta_{ij} A^i B^j$ , ou seja,  $(g_p^\lambda)_{ij} = \delta_{ij}$ . É bastante claro que  $g^\lambda$  é infinitamente diferenciável e define um tensor métrico Riemanniano em  $A_\lambda$ . Com isso, temos um tensor métrico Riemanniano definida em cada carta local  $A_\lambda$  do atlas  $\mathcal{A}$  e, com isso, podemos evocar a Proposição 35.5, página 1656, e definir um tensor métrico  $g$  em toda  $M$  por

$$g(A, B)_p = \sum_{a \in \mathbb{N}} P_a(p) g_p^{\lambda_a}(A, B), \tag{36.6}$$

<sup>4</sup>Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928).

onde as funções  $P_p$  compõem uma partição da unidade infinitamente diferenciável em  $M$  subordinada ao recobrimento  $\mathcal{A}$ . É elementar constatar que  $g$  é também um tensor métrico Riemanniano, por ser diferenciável e por valer  $g(A, A) \geq 0$ , sendo  $g(A, A) = 0$  se e somente se  $A = 0$ . ■

• **Condições para a existência de tensores métricos Lorentzianos**

A Proposição 36.1 não pode ser estendida de modo a incluir tensores métricos semi-Riemannianos ou Lorentzianos. Ainda que seja sempre possível definir tensores métricos Lorentzianos em cartas locais (adotando-se, por exemplo,  $(g_p^\lambda)_{ij} = \eta_{ij}$ , com  $\eta$  sendo o tensor métrico de Minkowski), a extensão (36.6) não fornece necessariamente um tensor métrico Lorentziano (não é garantido que se obtenha uma forma não-degenerada nem que se obtenha a signatura desejada). A proposição que segue fornece uma condição necessária e suficiente para que uma variedade admita um tensor métrico Lorentziano.

**Proposição 36.2** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Uma condição necessária e suficiente para que  $M$  admita um tensor métrico Lorentziano é que exista um campo vetorial  $V \in \mathcal{X}(M)$  com a propriedade de nunca se anular em  $M$ , ou seja,  $V_p \neq 0$  para todo  $p \in M$ .*

*Assim, uma condição necessária e suficiente para que  $M$  admita um tensor métrico Lorentziano é que  $M$  seja não-compacta ou seja compacta mas possua característica de Euler nula.* □

**Prova.** Seja  $g$  algum tensor métrico Riemanniano em  $M$  (que ao menos uma exista é garantido pela Proposição 36.1). Vamos supor que exista um campo vetorial  $V \in \mathcal{X}(M)$  que nunca se anula em  $M$ . Pela hipótese  $g(V, V)_p \neq 0$  para todo  $p \in M$ . Defina-se

$$h(A, B) := \frac{2g(A, V)g(B, V) - g(A, B)g(V, V)}{(g(V, V))^2}. \tag{36.7}$$

Vamos provar que  $h$  é um tensor métrico Lorentziano em  $M$ . Em primeiro lugar,  $h$  é evidentemente simétrica. Em segundo lugar,  $h$  é diferenciável, pois  $g(V, V)_p \neq 0$  para todo  $p \in M$  e pois todos os demais ingredientes em (36.7) o são. Em terceiro lugar,  $h$  é não-degenerada, o que se prova pelo seguinte raciocínio: se  $A$  for tal que  $h(A, B) = 0$  para todo  $B$ , teremos para  $B = V$  que  $g(A, V) = 2g(A, V)$ , o que implica  $g(A, V) = 0$ . Assim,  $h(A, B) = -g(A, B)/g(V, V)$  para todo  $B$  e, portanto, se  $h(A, B) = 0$  para todo  $B$ , teremos  $g(A, B) = 0$  para todo  $B$ . Como o tensor métrico Riemanniano  $g$  é não-degenerado, isso implica que  $A = 0$ , provando que  $h$  é não-degenerado.

É fácil constatar agora que  $h(V, V) = 1$ . Ao mesmo tempo, se  $W$  é tal que  $g(W, V)_p = 0$  com  $g(W, W)_p > 0$ , teremos  $h(W, V)_p = 0$  e  $h(W, W)_p = -g(W, W)/g(V, V)_p < 0$ . Disso conclui-se facilmente (exercício!) que  $h$  tem a signatura de um tensor métrico Lorentziana.

A demonstração da recíproca é mais complexa e pode ser encontrada em e.g. [256].

Vimos que uma condição necessária e suficiente para que  $M$  admita um tensor métrico Lorentziano é que  $M$  admita um campo vetorial que não se anule em parte alguma em  $M$ . Por teoremas bem-conhecidos da Topologia Algébrica, isso ocorrerá se e somente se  $M$  for não-compacta ou se for compacta, mas possuir característica de Euler nula. ■

• **Alguns comentários sobre notação e nomenclatura**

Façamos alguns comentários e advertências gerais antes de prosseguirmos. Em primeiro lugar, o estudante principiante não deve confundir a noção de tensor métrico, introduzida acima com a de métrica no sentido usado em Topologia (uma noção de distância entre elementos de um conjunto, vide Capítulo 27, página 1313). Com um tensor métrico Riemanniano é possível definir-se uma noção de comprimento de curvas e, com isso, uma métrica no sentido topológico, mas as duas noções não podem ser confundidas.

Comentamos também que alguns textos usam uma notação do tipo produto escalar  $\langle A, B \rangle^g$  para designar  $g(A, B)$ . Observe-se o sup-índice  $g$  em  $\langle A, B \rangle^g$ . Não empregaremos essa notação para evitar confusões com o pareamento  $\langle V', V \rangle$ , onde  $V$  é um elemento de um espaço vetorial e  $V'$  de seu dual.

Alertamos o estudante para o seguinte ponto de nomenclatura. Tensores métricos Lorentzianos foram no passado denominadas *métricas pseudo-Riemannianas* (especialmente em livros de Relatividade Geral). Hoje em dia, em textos matemáticos, a expressão “métrica pseudo-Riemanniana” é sinônimo de “métrica semi-Riemanniana” no sentido que

usamos à página 1707. Em verdade, a expressão “métrica pseudo-Riemanniana”, em qualquer sentido, tende lentamente ao desuso (talvez devido a um efeito psicológico nocivo no prefixo “pseudo”). As expressões “métrica Riemanniana” e “métrica Lorentziana”, como não é raro de acontecer nas Ciências, não fazem justiça aos seus verdadeiros introdutores: Gauss<sup>5</sup> e Minkowski<sup>6</sup>, respectivamente.

• **Tensores métricos semi-Riemannianos e medida de integração invariante em variedades**

Vamos aproveitar o ensejo para introduzir uma medida de integração invariante (por difeomorfismos que preservam orientação) em variedades. Essa breve exposição é um tanto informal e pode ser apresentada de forma muito mais geral e elegante quando discutirmos propriedades de formas diferenciais.

Seja  $g$  um tensor métrico Riemanniano e sejam  $G$  e  $G'$  (com  $(G)_{ij} = g_{ij}$  e  $(G')_{ij} = g'_{ij}$ ) as representações matriciais de suas componentes dois sistemas local de coordenadas  $(x^1, \dots, x^m)$  e  $(x'^1, \dots, x'^m)$ , respectivamente. Como já comentamos em (36.3) indica-nos que  $G$  e  $G'$  relacionam-se por  $G' = P^T G P$ , onde  $P$  é a matriz com elementos de matriz  $P_{ab} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^b}$ . Se denotarmos por  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{g}'$  os determinantes de  $G$  e  $G'$ , respectivamente, segue disso que

$$\mathbf{g}' = J^2 \mathbf{g}, \tag{36.8}$$

onde  $J := \det(P)$  é o Jacobiano da matriz de mudança de coordenadas  $P$ .

Assim, se a mudança de coordenadas  $(x^1, \dots, x^m)$  e  $(x'^1, \dots, x'^m)$  possui Jacobiano positivo, segue que

$$\sqrt{|\mathbf{g}'|} dx'^1 \dots dx'^m = \sqrt{|\mathbf{g}|} dx^1 \dots dx^m,$$

pois  $dx^1 \dots dx^m = J dx'^1 \dots dx'^m$ . Vemos com isso que

$$\sqrt{|\mathbf{g}|} dx^1 \dots dx^m \tag{36.9}$$

provê uma medida de integração invariante por mudanças locais de coordenadas em uma variedade semi-Riemanniana orientável.

• **A “inversa” do tensor métrico**

A condição de não-degenerescência do tensor métrico implica que, em uma carta local de coordenadas  $(x^1, \dots, x^m)$ , a matriz  $G$  introduzida à página 1710, com elementos  $g_{ij}$ , possui uma inversa. Os elementos de matriz dessa inversa  $G^{-1}$  são denotados por  $g^{ij}$ , com índices superiores. Como veremos, essa distinção notacional de índices superiores e inferiores, ainda que não possua nenhum significado profundo em si, é muito conveniente. Observe-se que como  $G$  é uma matriz simétrica,  $G^{-1}$  também o é e vale a relação simetria  $g^{ij} = g^{ji}$  para todos os índices  $i, j$ .

Naturalmente,  $G^{-1}G = \mathbf{1}$  e  $GG^{-1} = \mathbf{1}$ , o que se escreve na forma

$$g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i \quad \text{e} \quad g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k. \tag{36.10}$$

Por uma mudança de sistema de coordenadas  $G$  transforma-se segundo (36.5). Logo,  $G^{-1}$  transforma-se como  $G'^{-1} = P^{-1}G^{-1}(P^{-1})^T$ . Os elementos de matriz de  $P$  são  $P_{ab} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^b}$  e os elementos de matriz de  $P^{-1}$  são  $(P^{-1})_{ab} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b}$  (verifique!). Logo, a transformação dos elementos  $g^{ij}$  é

$$g'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} g^{kl}. \tag{36.11}$$

**E. 36.1 Exercício.** Verifique isso e constate que essa expressão respeita as relações (36.10), como esperado. ✦

Com os elementos  $g^{ij}$  é possível definir um tensor  $g^\sharp : \mathcal{X}^*(M) \times \mathcal{X}^*(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , de tipo  $(0, 2)$ , definido em uma carta local por

$$g^\sharp(A_i dx^i, B_j dx^j) = g^{ij} A_i B_j, \tag{36.12}$$

ou seja,

$$g^\sharp = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{36.13}$$

<sup>5</sup>Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855).

<sup>6</sup>Hermann Minkowski (1864–1909).

Observe-se que

$$g^\sharp(dx^i, dx^j) = g^{ij}. \quad (36.14)$$

É importante notar que as expressões (36.12) e (36.13) são invariantes por mudanças de sistemas de coordenadas. É suficiente provar essa afirmação para (36.13). De fato,

$$\begin{aligned} g^\sharp &= g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \stackrel{(36.11) \text{ e } (35.16)}{=} \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial x^j} g^{kl} \left( \frac{\partial x^a}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^a} \right) \otimes \left( \frac{\partial x^b}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^b} \right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial x^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^a}{\partial x^k}}_{=\delta_k^i} \underbrace{\frac{\partial x^l}{\partial x^j} \frac{\partial x^b}{\partial x^l}}_{=\delta_l^j} g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^a} \otimes \frac{\partial}{\partial x^b} = g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^l} = g^\sharp, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. Isso prova que  $g^\sharp$  tem uma existência intrínseca, independente do sistema de coordenadas adotado.

Agora, um pouco da nomenclatura adotada em textos de Física. As componentes de  $g^\sharp$  em uma carta local de coordenadas são (por definição)  $g^{ij}$  e são denominadas *componentes contravariantes do tensor métrico*. As componentes  $g_{ij}$  do tensor métrico são também denominadas *componentes covariantes do tensor métrico*. O tensor  $g$  é também denominado *tensor métrico covariante* e o tensor  $g^\sharp$  é também denominado *tensor métrico contravariante*.

#### • Elevando e abaixando índices

Por uma questão de simetria, vamos aqui denotar o tensor métrico  $g$  por  $g_\sharp$ . Temos, portanto, em uma carta local,

$$g_\sharp = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad \text{e} \quad g^\sharp = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

O tensor  $g_\sharp$  permite definir uma aplicação linear de  $\mathcal{X}(M)$  em  $\mathcal{X}^*(M)$  que denotamos por  $\mathbf{g}_\sharp$ . Definimos essa aplicação linear  $\mathbf{g}_\sharp : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}^*(M)$  como sendo a aplicação linear que a cada  $A \in \mathcal{X}(M)$  associa um elemento  $A_\sharp \equiv \mathbf{g}_\sharp(A) \in \mathcal{X}^*(M)$  de forma que

$$\langle A_\sharp, B \rangle = g_\sharp(A, B) \quad (36.15)$$

seja válida para todo  $B \in \mathcal{X}(M)$ . Em componentes de uma carta local, escrevendo  $A = A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $B = B^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  e  $A_\sharp = (A_\sharp)_k dx^k$ , (36.15) fica  $(A_\sharp)_j B^j = g_{ij} A^i B^j$ , mostrando que  $(A_\sharp)_j = g_{ij} A^i$ .

Em resumo,

$$\mathbf{g}_\sharp \left( A^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = g_{ij} A^i dx^j. \quad (36.16)$$

É também interessante observar que, seguindo as definições acima,

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_\sharp = \mathbf{g}_\sharp \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = g_{ij} dx^j. \quad (36.17)$$

Verifique!

Há uma construção análoga envolvendo o tensor  $g^\sharp$ . O tensor  $g^\sharp$  permite definir uma aplicação linear  $\mathbf{g}^\sharp : \mathcal{X}^*(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  como sendo a aplicação linear que a cada  $B \in \mathcal{X}^*(M)$  associa um elemento  $B^\sharp \equiv \mathbf{g}^\sharp(B) \in \mathcal{X}(M)$  de forma que

$$\langle A, B^\sharp \rangle = g^\sharp(A, B) \quad (36.18)$$

seja válida para todo  $A \in \mathcal{X}^*(M)$ . Em componentes de uma carta local, escrevendo  $A = A_i dx^i$ ,  $B = B_j dx^j$  e  $B^\sharp = (B^\sharp)^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ , (36.18) fica  $A_i (B^\sharp)^i = g^{ij} A_i B_j$ , mostrando que  $(B^\sharp)^i = g^{ij} B_j$ .

Em resumo,

$$\mathbf{g}^\sharp(B_j dx^j) = g^{ij} B_j \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (36.19)$$

É também interessante observar que, seguindo as definições acima,

$$(dx^i)^\sharp = \mathbf{g}^\sharp(dx^i) = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (36.20)$$

Verifique!

Como é de se esperar, as aplicações  $\mathbf{g}^\sharp$  e  $\mathbf{g}_\sharp$  são a inversa uma da outra. Isso é mais facilmente constatado em uma base de coordenadas. De fato, para todo  $i$  tem-se

$$\mathbf{g}_\sharp(\mathbf{g}^\sharp(dx^i)) \stackrel{(36.20)}{=} g^{ij} \mathbf{g}_\sharp \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \stackrel{(36.17)}{=} \underbrace{g^{ij} g_{jk}}_{=\delta_k^i} dx^k = dx^i,$$

o que, devido à linearidade de  $\mathbf{g}^\sharp$  e  $\mathbf{g}_\sharp$ , implica  $\mathbf{g}_\sharp \circ \mathbf{g}^\sharp = \mathbf{id}_{\mathcal{X}^*(M)}$ . De maneira totalmente análoga demonstra-se que  $\mathbf{g}^\sharp \circ \mathbf{g}_\sharp = \mathbf{id}_{\mathcal{X}(M)}$ . Em função disso, (36.15) e (36.18) implicam também

$$\langle A, B \rangle = g_\sharp(A^\sharp, B) = g^\sharp(A, B_\sharp), \quad (36.21)$$

para todos  $A \in \mathcal{X}^*(M)$  e  $B \in \mathcal{X}(M)$ .

Como vimos acima, a aplicação que leva um vetor  $A$  ao covetor  $A_\sharp$  corresponde, no que concerne às suas componentes em uma base de coordenadas, a transformar as componentes  $A^i$  nas componentes  $(A_\sharp)_j = g_{ij} A^i$ . Analogamente, a aplicação que leva um covetor  $B$  ao vetor  $B^\sharp$  corresponde, no que concerne às suas componentes em uma base de coordenadas, a transformar as componentes  $B_j$  nas componentes  $(B^\sharp)^i = g^{ij} B_j$ . Uma notação muito mais prática, encontrada amíúde em livros sobre a Teoria da Relatividade Geral, omite o símbolo  $\sharp$  das componentes dos vetores e dos covetores e permite escrever as componentes de  $A_\sharp$  e  $B^\sharp$  como  $A_j = g_{ij} A^i$  e  $B^i = g^{ij} B_j$ , respectivamente. Assim, de um ponto de vista notacional, no que concerne às componentes, a passagem de  $A$  a  $A_\sharp$  e de  $B$  a  $B^\sharp$  consiste em abaixar e, respectivamente, elevar seus índices, transformações essas definidas pelas contrações  $A_j = g_{ij} A^i$  e  $B^i = g^{ij} B_j$ , respectivamente, com as componentes dos tensores  $g_\sharp$  e  $g^\sharp$ , respectivamente. Essas operações são inversas uma da outra, como já comentamos. Componentes de vetores, com índices em cima, são frequentemente denominadas *componentes contravariantes* e componentes de covetores, com índices em baixo, são frequentemente denominadas *componentes covariantes*.

Como tensores são elementos de produtos tensoriais dos espaços  $\mathcal{X}(M)$  e  $\mathcal{X}^*(M)$ , as aplicações  $\mathbf{g}_\sharp$  e  $\mathbf{g}^\sharp$  estendem-se também a tensores de maneira óbvia, permitindo, analogamente, definir as operações de elevar e abaixar índices tensoriais.

#### • Bases em $\mathbb{T}_p M$ e bases duais em $\mathbb{T}_p^* M$

Tomemos  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ , uma base de vetores em  $\mathbb{T}_p M$ , e  $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^m\}$ , sua base dual de covetores em  $\mathbb{T}_p^* M$ , de sorte que para o pareamento de  $\mathbf{e}^i$  e  $\mathbf{e}_j$ , valha  $\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle_p = \delta_j^i$ . Como em (35.18) e (35.21), escrevemos

$$\mathbf{e}_k = E_k{}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad \text{e} \quad \mathbf{e}^k = E^k{}_i dx^i \Big|_p. \quad (36.22)$$

Sejam também o conjunto de vetores  $\{\mathbf{e}^{1\sharp}, \dots, \mathbf{e}^{m\sharp}\}$  em  $\mathbb{T}_p M$  e o conjunto de covetores  $\{\mathbf{e}_{1\sharp}, \dots, \mathbf{e}_{m\sharp}\}$  em  $\mathbb{T}_p^* M$  definidos por

$$\mathbf{e}^{k\sharp} := \mathbf{g}^\sharp(\mathbf{e}^k) \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_{k\sharp} := \mathbf{g}_\sharp(\mathbf{e}_k), \quad (36.23)$$

$k = 1, \dots, m$ . É fácil constatar, pela invertibilidade de  $\mathbf{g}_\sharp$  e  $\mathbf{g}^\sharp$  que  $\{\mathbf{e}^{1\sharp}, \dots, \mathbf{e}^{m\sharp}\}$  compõe uma base em  $\mathbb{T}_p M$  e que  $\{\mathbf{e}_{1\sharp}, \dots, \mathbf{e}_{m\sharp}\}$  compõe uma base em  $\mathbb{T}_p^* M$ . Por definição, teremos

$$g(\mathbf{e}^{i\sharp}, \mathbf{e}_j)_p = \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle_p = \delta_j^i \quad \text{e} \quad g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{j\sharp})_p = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle_p = \delta_j^i. \quad (36.24)$$

Verifique! Teremos também  $\langle \mathbf{e}_{j\sharp}, \mathbf{e}^{i\sharp} \rangle_p \stackrel{(36.15)}{=} g_\sharp(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}^{i\sharp})_p = g(\mathbf{e}^{i\sharp}, \mathbf{e}_j)_p \stackrel{(36.24)}{=} \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle_p = \delta_j^i$  e, portanto,

$$\langle \mathbf{e}_{j\sharp}, \mathbf{e}^{i\sharp} \rangle_p = \delta_j^i. \quad (36.25)$$

Isso estabeleceu que a base  $\{\mathbf{e}_{1\sharp}, \dots, \mathbf{e}_{m\sharp}\}$  é a base dual da base  $\{\mathbf{e}^{1\sharp}, \dots, \mathbf{e}^{m\sharp}\}$ . Para uso futuro, resumindo as expressões acima em uma linha, tem-se

$$\delta_j^i = \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle_p = g\left(\mathbf{e}^{i\sharp}, \mathbf{e}_j\right)_p = g\left(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_{j\sharp}\right)_p = \left\langle \mathbf{e}_{j\sharp}, \mathbf{e}^{i\sharp} \right\rangle_p. \quad (36.26)$$

Por (36.22) e (36.23) e por (36.17) e (36.20) tem-se,

$$\mathbf{e}^{k\sharp} = \left(E^k_l g^{lm}\right) \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_p =: E^{kl} \frac{\partial}{\partial x^l} \Big|_p \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_{k\sharp} = \left(E_k^l g_{lm}\right) dx^m \Big|_p =: E_{kl} dx^l \Big|_p.$$

Em particular, valem em um ponto  $p$ ,

$$dx^{k\sharp} = g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^l} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_\sharp = g_{kl} dx^l. \quad (36.27)$$

• **O tensor métrico Riemanniano usual e  $\mathbb{R}^n$**

Considere-se a variedade  $\mathbb{R}^n$  usual, com o atlas  $\{(\mathbb{R}^n, \text{id})\}$ , composto por uma única carta com um sistema de coordenadas Cartesianas. Dados dois campos vetoriais expressos nessa carta como  $A = A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  e  $B = B^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  a expressão

$$g(A, B) := \sum_{i=1}^n A^i B^j$$

define um tensor métrico Riemanniano em  $\mathbb{R}^n$ , como facilmente se verifica. Note-se que  $g(A, B)$  é o produto escalar usual de vetores em  $\mathbb{R}^n$ , daí denominar-se esse tensor  $g$  como o *tensor métrico Riemanniano usual em  $\mathbb{R}^n$* .

Claro está que para as componentes do tensor métrico Riemanniano usual tem-se  $g_{ij} = \delta_{ij}$  e para o tensor métrico contravariante  $g^{ij} = \delta^{ij} \equiv \delta_{ij}$ .

No caso desse tensor métrico Riemanniano usual em  $\mathbb{R}^n$  as operações de subir e abaixar índices são triviais:  $A^i = A_i$ .

Se adotarmos uma nova carta de coordenadas em  $\mathbb{R}^n$ , essas componentes tornam-se, segundo (36.3) e (36.11),

$$g'_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \quad \text{e} \quad g'^{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^k}. \quad (36.28)$$

Por conveniência, evitamos aqui adotar a convenção de Einstein. As expressões (36.28) são úteis, por exemplo, quando expressamos certos operadores diferenciais, como o gradiente, o divergente e o Laplaciano, em sistemas de coordenadas que não as Cartesianas em  $\mathbb{R}^n$ . Vide Seção 36.2.4, página 1741.

**E. 36.2 Exercício.** Seja  $J$  a matriz  $n \times n$  dada por

$$J := \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial x'^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial x'^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial x'^n} \end{pmatrix} \quad (36.29)$$

e seja  $G$  a matriz  $n \times n$  cujos elementos de matriz são  $G_{ij} = g'_{ij}$ , dados em (36.28). Constate por (36.28) que  $G = J^T J$ . Se denotarmos por  $\mathbf{g}$  o determinante de  $G$ , teremos, portanto,  $\mathbf{g} = (\det(J))^2$ . \*

**36.1.1 Transposição em Relação a Tensores Métricos**

Seja  $M$  uma variedade diferenciável e seja  $V : T_p M \rightarrow T_p M$  uma aplicação linear de  $T_p M$  em si mesmo, de sorte que, em uma base de coordenadas  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$ , tenhamos  $V \frac{\partial}{\partial x^a} = V_a^b \frac{\partial}{\partial x^b}$ . Naturalmente,  $V$  define um elemento de  $T_p M \otimes T_p M$ , um tensor de tipo  $(1, 1)$ , a saber, podemos identificar  $V = V_a^b \frac{\partial}{\partial x^a} \otimes dx^b$ .

Na Seção 35.2.3.2, página 1668, introduzimos a aplicação linear transposta  $V^T : T_p^* M \rightarrow T_p^* M$  como a aplicação linear definida por (35.39). Vamos aqui tratar de uma noção similar de transposição associada a uma tensor métrico.

Dada uma aplicação linear  $V : T_p M \rightarrow T_p M$ , como acima, definimos  $V^\dagger : T_p M \rightarrow T_p M$  como sendo a aplicação linear tal que

$$g(V^\dagger A, B)_p = g(A, VB)_p \quad (36.30)$$

para todos  $A, B \in T_p M$ . A aplicação linear  $V^\dagger : T_p M \rightarrow T_p M$  é dita ser a *g-transposta*, ou *g-dual*, de  $V : T_p M \rightarrow T_p M$ .

**E. 36.3 Exercício.** De (36.30) e da definição de tensor transposto em (35.39), mostre que

$$(V^\dagger A)_\sharp = V^T(A_\sharp)$$

para todo  $A \in T_p M$ , ou seja, mostre que vale  $\mathbf{g}_\sharp \circ V^\dagger = V^T \circ \mathbf{g}_\sharp$ , o que implica que

$$V^\dagger = \mathbf{g}^\sharp \circ V^T \circ \mathbf{g}_\sharp, \quad (36.31)$$

sendo que  $V^T$  foi definido em (35.39). \*

Da definição (36.30) e da simetria de  $g$ , segue facilmente que

$$(V^\dagger)^\dagger = V. \quad (36.32)$$

Verifique!

Em coordenadas locais, escrevendo-se  $A = A^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ ,  $B = B^b \frac{\partial}{\partial x^b}$  e  $V^\dagger \frac{\partial}{\partial x^a} = (V^\dagger)^b_a \frac{\partial}{\partial x^b}$ , a definição (36.30) implica que

$$(V^\dagger)^d_a = g_{ab} V_c^d g^{cd}, \quad \text{ou seja,} \quad (V^\dagger)^d_a = V_a^d. \quad (36.33)$$

**E. 36.4 Exercício.** Verifique! Alternativamente, use (36.31) para reobter (36.33). \*

**E. 36.5 Exercício.** Mostre que

$$\text{Tr}(V^\dagger) = \text{Tr}(V). \quad (36.34)$$

Use a primeira igualdade em (36.33). \*

**E. 36.6 Exercício.** Mostre, usando a definição (36.30), que vale

$$(V_1 V_2)^\dagger = V_2^\dagger V_1^\dagger \quad (36.35)$$

para quaisquer aplicações lineares  $V_1 : T_p M \rightarrow T_p M$  e  $V_2 : T_p M \rightarrow T_p M$ . Essa identidade segue também de (36.31) usando-se (35.42). Verifique! \*

• **g-transposição no espaço cotangente**

O que foi desenvolvido acima deixa-se facilmente generalizar para o caso de aplicações lineares agindo no espaço cotangente.

Seja  $W : T_p^* M \rightarrow T_p^* M$  uma aplicação linear de  $T_p^* M$  em si mesmo, de sorte que, em uma base dual de coordenadas  $\{dx^1, \dots, dx^m\}$ , tenhamos  $W dx^a = W_b^a dx^b$ . Naturalmente,  $W$  define um elemento de  $T_p^* M \otimes T_p^* M$ , um tensor de tipo  $(1, 1)$ , a saber, podemos identificar  $W = W_b^a dx^b \otimes \frac{\partial}{\partial x^a}$ .

Dada uma aplicação linear  $W : T_p^* M \rightarrow T_p^* M$ , como acima, definimos  $W^\dagger : T_p^* M \rightarrow T_p^* M$  por

$$g^\sharp(W^\dagger A, B)_p = g^\sharp(A, WB)_p \quad (36.36)$$

para todos  $A, B \in T_p^* M$ . A aplicação linear  $W^\dagger : T_p^* M \rightarrow T_p^* M$  é dita ser a *g-transposta*, ou a aplicação *g-dual*, de  $W : T_p^* M \rightarrow T_p^* M$ .

**E. 36.7** *Exercício.* De (36.36) e da definição de tensor transposto em (35.40), mostre que

$$(W^\dagger A)^\dagger = W^T(A^\dagger)$$

para todo  $A \in \mathbb{T}_p^*M$ , ou seja, mostre que vale  $g^\sharp \circ W^\dagger = W^T \circ g^\sharp$ , o que implica que

$$W^\dagger = g_\sharp \circ W^T \circ g^\sharp, \tag{36.37}$$

sendo que  $W^T$  foi definido em (35.40). ✱

Da definição (36.30) e da simetria de  $g$ , segue facilmente que

$$(W^\dagger)^\dagger = W. \tag{36.38}$$

Verifique!

Em coordenadas locais, escrevendo-se  $A = A_a dx^a$ ,  $B = B_b dx^b$  e  $W^\dagger dx^a = (W^\dagger)_b^a dx^b$ , a definição (36.36) implica que

$$(W^\dagger)_d^a = g^{ab} W_b^c g_{cd}, \quad \text{ou seja,} \quad (W^\dagger)_d^a = W_d^a. \tag{36.39}$$

**E. 36.8** *Exercício.* Verifique! Alternativamente, use (36.37) para reobter (36.39). ✱

**E. 36.9** *Exercício.* Mostre que

$$\text{Tr}(W^\dagger) = \text{Tr}(W). \tag{36.40}$$

Use a primeira igualdade em (36.39). ✱

**E. 36.10** *Exercício.* Mostre, usando a definição (36.36), que vale

$$(W_1 W_2)^\dagger = W_2^\dagger W_1^\dagger \tag{36.41}$$

para quaisquer aplicações lineares  $W_1 : \mathbb{T}_p^*M \rightarrow \mathbb{T}_p^*M$  e  $W_2 : \mathbb{T}_p^*M \rightarrow \mathbb{T}_p^*M$ . Essa identidade segue também de (36.37) usando-se (35.42). Verifique! ✱

• **Operadores  $g$ -simétricos**

Um operador linear  $V : \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_p M$  é dito ser  $g$ -simétrico se

$$g(VA, B)_p = g(A, VB)_p \tag{36.42}$$

para todos  $A, B \in \mathbb{T}_p M$ . Naturalmente,  $V$  é  $g$ -simétrico se e somente se  $V^\dagger = V$ , ou seja, se e somente suas componentes em coordenadas locais satisfizerem

$$V_a^b = V_a^b \quad \text{em cujo caso, valem também,} \quad V_{ab} = V_{ba} \quad \text{e} \quad V^{ab} = V^{ba}.$$

Um operador linear  $W : \mathbb{T}_p^*M \rightarrow \mathbb{T}_p^*M$  é dito ser  $g$ -simétrico se

$$g^\sharp(WA, B)_p = g^\sharp(A, WB)_p \tag{36.43}$$

para todos  $A, B \in \mathbb{T}_p^*M$ . Naturalmente,  $W$  é  $g$ -simétrico se e somente se  $W^\dagger = W$ , ou seja, se e somente suas componentes em coordenadas locais satisfizerem

$$W_b^a = W_b^a \quad \text{em cujo caso, valem também,} \quad W_{ab} = W_{ba} \quad \text{e} \quad W^{ab} = W^{ba}.$$

•  **$g$ -transposição e uma propriedade de positividade do traço**

Vamos agora estabelecer uma consequência não-trivial das definições de acima, a qual é válida no caso de tensores métricos Riemannianos e possui várias utilidades. Ela será empregada na discussão sobre a identidade de Raychaudhuri na Seção 36.6.1, página 1779.

**Proposição 36.3** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e seja  $g$  um tensor métrico Riemanniano em  $M$ . Então, vale*

$$\text{Tr}(V^\dagger V) \geq 0 \tag{36.44}$$

para toda aplicação linear  $V : \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_p M$ , sendo que  $\text{Tr}(V^\dagger V) = 0$  se e somente se  $V = 0$ . Em termos das componentes de  $V$  em um sistema de coordenadas locais essa desigualdade diz-nos que

$$V^{ab} V_{ab} = V_a^b V_b^a \geq 0. \tag{36.45}$$

Enfatizamos que essa desigualdade não é necessariamente válida caso  $g$  não seja Riemanniano. □

**Prova.** Sabemos por (35.30) que  $(V^\dagger V)_a^b = (V^\dagger)_c^b V_a^c$  e, portanto,  $\text{Tr}(V^\dagger V) = (V^\dagger)_c^b V_b^c$ . Usando (36.33) isso se escreve como

$$\text{Tr}(V^\dagger V) = g_{cc} V_f^e g^{fb} V_b^c. \tag{36.46}$$

Para prosseguirmos, é conveniente escrever essa expressão fazendo uso da notação usual de matrizes. Para tal, definamos três matrizes  $m \times m$ , que denotamos por  $G, H$  e  $A$ , como sendo as matrizes cujos elementos de matriz são dados por

$$G_{ab} := g_{ab}, \quad H_{ab} := g^{ab} \quad \text{e} \quad A_{ab} := V_b^a.$$

Como se vê, abdicamos de distinguir índices em cima e em baixo. Com isso, podemos escrever (36.46) como

$$\text{Tr}(V^\dagger V) = G_{cc} A_{ef} H_{fb} A_{cb}.$$

Usando as regras usuais de operação com matrizes, o lado direito se escreve como

$$G_{cc} A_{ef} H_{fb} A_{cb} = \text{Tr}(GAHA^T) \tag{36.47}$$

onde  $\text{Tr}$  agora descreve o traço usual de matrizes  $m \times m$  e  $A^T$  descreve a transposta usual da matriz  $A$  (ou seja,  $A^T$  é a matriz cujos elementos satisfazem  $(A^T)_{ab} = A_{ba}$ ).

Observemos agora que  $H = G^{-1}$  (assim foi definido o tensor métrico contravariante de componentes  $g^{ab}$ , com índices em cima). Fora isso, tanto  $G$  quanto  $H$  são matrizes simétricas, ou seja, vale que  $G^T = G$  e  $H^T = H$  (pois o tensor métrico é simétrico). Por fim – e este é um ponto crucial –  $G$  e  $H$  são matrizes positivas (i.e., simétricas com autovalores positivos), pois  $g$  é suposta ser um tensor métrico Riemanniano. Portanto, ambas possuem raízes quadradas<sup>7</sup>, ou seja, existem matrizes positivas e simétricas  $G^{1/2}$  e  $H^{1/2}$  tais que  $(G^{1/2})^2 = G$  e  $(H^{1/2})^2 = H$ . Com isso, podemos escrever o lado direito de (36.47) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(GAHA^T) &= \text{Tr}\left(G^{1/2} G^{1/2} A H^{1/2} H^{1/2} A^T\right) = \text{Tr}\left(\left(H^{1/2} A^T G^{1/2}\right) G^{1/2} A H^{1/2}\right) \\ &= \text{Tr}\left(\left(G^{1/2} A H^{1/2}\right)^T \left(G^{1/2} A H^{1/2}\right)\right) \geq 0, \end{aligned}$$

sendo que acima usamos a propriedade cíclica do traço na segunda igualdade e o fato bem conhecido que  $\text{Tr}(M^T M) \geq 0$  para qualquer matriz  $m \times m$  real  $M$ .

Isso estabeleceu que  $\text{Tr}(V^\dagger V) \geq 0$ . Se  $\text{Tr}(V^\dagger V) = 0$ , então devemos ter  $G^{1/2} A H^{1/2} = 0$ , o que (já que  $G^{1/2}$  e  $H^{1/2}$  são inversíveis) implica  $A = 0$  e, portanto,  $V = 0$ . A relação (36.45) segue diretamente de (36.44) escrevendo-se explicitamente  $\text{Tr}(V^\dagger V)$  em termos das componentes de  $V$ . ■

A Proposição 36.3 permite-nos introduzir um produto escalar (real) no espaço dos operadores lineares definidos em  $\mathbb{T}_p M$ , a saber:

$$\langle U, V \rangle \equiv \langle U, V \rangle_p := \text{Tr}(U^\dagger V).$$

<sup>7</sup>Vide Seção 9.5.1, página 402. Para um tratamento ainda mais geral, vide Lema 41.30, página 2168.

**E. 36.11** *Exercício.* Mostre que  $\langle U, V \rangle$ , acima, define de fato um produto escalar (real). Para provar diretamente a propriedade de simetria  $\langle U, V \rangle = \langle V, U \rangle$ , use (36.34) e as propriedades (36.32) e (36.35). (Lembre-se, porém, que a simetria segue da positividade e da bilinearidade. Vide Teorema 3.1, página 202).  $\star$

Em coordenadas locais, escreve-se

$$\langle U, V \rangle = U^{ab} V_{ab} .$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (vide página 202) para esse produto escalar, tem-se que

$$\left( \text{Tr}(U^\dagger V) \right)^2 \leq \text{Tr}(U^\dagger U) \text{Tr}(V^\dagger V) . \quad (36.48)$$

Em coordenadas locais, isso fica

$$\left( U^{ab} V_{ab} \right)^2 \leq \left( U^{cd} U_{cd} \right) \left( V^{ef} V_{ef} \right) , \quad (36.49)$$

desigualdade essa válida, como já dissemos, no caso de tensores métricos Riemannianas.

Tomando-se  $V = \mathbf{1}$  (ou seja,  $V^a_b = \delta^a_b$ ) em (36.48), obtém-se

$$\left( \text{Tr}(U) \right)^2 \leq m \text{Tr}(U^\dagger U) , \quad \text{ou seja,} \quad \left( U^a_a \right)^2 \leq m \left( U^c_d U_c^d \right) , \quad (36.50)$$

e se  $U$  for  $g$ -simétrico, isso fica

$$\left( \text{Tr}(U) \right)^2 \leq m \text{Tr}(U^2) , \quad \text{ou seja,} \quad \left( U^a_a \right)^2 \leq m \left( U^c_d U^d_c \right) . \quad (36.51)$$

Uma ligeira variante dessa desigualdade será obtida para um tensor  $U$  específico na discussão sobre a identidade de Raychaudhuri na Seção 36.6.1, página 1779.

## 36.2 Conexões Afins

A noção de conexão afim tem suas origens no estudo da Geometria de Superfícies, mas sua definição geral e sua teoria básica foram criadas por Gerhard Hessenberg<sup>8</sup> em 1917<sup>9</sup>. Na década de 1920, em vários trabalhos, essa noção foi sistematizada e estendida por Élie Cartan<sup>10</sup>, que introduziu entre outras a noção de torção, da qual falaremos adiante, em 1922<sup>11</sup>.

Um ponto importante a se notar é que todos esses artigos fazem referência aos trabalhos de Einstein sobre a Teoria da Relatividade Geral, atestando assim a importância dessa teoria no desenvolvimento da Geometria Diferencial e, consequentemente, da Matemática.

A noção de conexão é fundamental por permitir introduzir uma noção de paralelismo entre vetores de espaços tangentes distintos e por permitir formalizar a noção de curvatura no contexto de variedades diferenciáveis.

Vamos apresentar a definição formal da noção de conexão afim e algumas de suas propriedades para posteriormente discutir sua motivação à luz da noção de transporte paralelo em superfícies regulares. Preferimos essa ordem de apresentação, pois a mesma enfatiza os aspectos operacionais mais relevantes.

### 36.2.1 Conexões Afins em Campos Vetoriais

Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e seja  $\mathcal{X}(M)$  o conjunto de todos os campos vetoriais infinitamente diferenciáveis em  $M$ .

<sup>8</sup>Gerhard Hessenberg (1874–1925).

<sup>9</sup>A publicação original é: Gerhard Hessenberg, “Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie”, *Mathematische Annalen*, **78** (1): 187–217 (1917), doi:10.1007/bf01457097.

<sup>10</sup>Élie Joseph Cartan (1869–1951).

<sup>11</sup>Algumas referências para trabalhos originais de Cartan: 1<sup>o</sup> Élie Cartan. “Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion.” *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **174**, 593–595 (1922). 2<sup>o</sup> Élie Cartan. “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée.” Part I: *Ann. Éc. Norm.* **40**, 325–412 (1923) and *ibid.* **41**, 1–25 (1924); 3<sup>o</sup> Part II: *ibid.* **42**, 17–88 (1925).

Para o que segue, recordemos também a seguinte definição. Seja  $A \in \mathcal{X}(M)$  e seja  $f \in C^\infty(M)$ . Em (35.60), página 1677, definimos  $A(f) \in C^\infty(M)$  por

$$A(f) := A^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (36.52)$$

em uma carta local de coordenadas. Essa definição é, porém, válida, em todas as cartas locais de coordenadas, dado que o lado direito é invariante por mudanças de cartas locais. Aqui  $A^i$  são as componentes de  $A$  na base definida pelas coordenadas locais:  $A = A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

#### • Definindo a noção de conexão afim

Uma aplicação  $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ , que a cada par  $(A, B) \in \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$  de campos vetoriais infinitamente diferenciáveis definidos em  $M$  associa um campo vetorial infinitamente diferenciável denotado por  $\nabla_A B \in \mathcal{X}(M)$  é dita ser uma *conexão afim*<sup>12</sup> se possuir as seguintes propriedades: para todos  $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$  e todas as funções  $f, g \in C^\infty(M)$  valem

$$\nabla_{fA+gB} C = f \nabla_A C + g \nabla_B C , \quad (36.53)$$

$$\nabla_A (fB) = f \nabla_A B + A(f)B \quad \text{e} \quad \nabla_A (B+C) = \nabla_A B + \nabla_A C , \quad (36.54)$$

com  $A(f)$  definida em (36.52).

A propriedade (36.53) afirma, em particular, que uma conexão afim  $(A, B) \mapsto \nabla_A B$  é linear em sua dependência com o primeiro campo vetorial (aquele indicado como subíndice)<sup>13</sup>. A propriedade (36.54) refere-se à dependência de  $\nabla$  com o segundo campo vetorial e reúne aditividade ( $\nabla_A (B+C) = \nabla_A B + \nabla_A C$ ) e a regra de Leibniz ( $\nabla_A (fB) = f \nabla_A B + A(f)B$ ). Assim, a propriedade (36.54) aponta-nos para o fato de que uma conexão afim age de forma semelhante a um operador diferencial. Mais sobre isso adiante.

Muitas vezes nos referiremos a uma tripla  $(M, g, \nabla)$  como composta por uma variedade diferenciável  $M$  dotada de um tensor métrico semi-Riemanniano  $g$  e de uma conexão afim  $\nabla$ .

#### • A diferença de duas conexões afins

Um ponto importante a se notar sobre as propriedades definidoras acima é que se  $\nabla^{(1)}$  e  $\nabla^{(2)}$  são duas conexões afins, então sua diferença  $D := \nabla^{(1)} - \nabla^{(2)}$ , definida como a aplicação  $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \ni (A, B) \mapsto D(A, B) \in \mathcal{X}(M)$  dada por

$$D(A, B) \equiv (\nabla^{(1)} - \nabla^{(2)})_A B := \nabla_A^{(1)} B - \nabla_A^{(2)} B , \quad (36.55)$$

satisfaz,

$$D(fA + gB, C) = fD(A, C) + gD(B, C) \quad \text{e} \quad D(A, fB + gC) = fD(A, B) + gD(A, C) ,$$

para quaisquer  $A, B \in \mathcal{X}(M)$  e quaisquer  $f, g \in C^\infty(M)$ , ou seja,

$$(\nabla^{(1)} - \nabla^{(2)})_{fA+gB} C = f(\nabla^{(1)} - \nabla^{(2)})_A C + g(\nabla^{(1)} - \nabla^{(2)})_B C ,$$

$$(\nabla^{(1)} - \nabla^{(2)})_A (fB + gC) = f(\nabla^{(1)} - \nabla^{(2)})_A B + g(\nabla^{(1)} - \nabla^{(2)})_A C .$$

Verifique! Assim,  $D$  é linear na sua dependência nos dois campos vetoriais, definindo, portanto, um tensor de ordem (1, 2). As componentes desse tensor serão estudadas no Exercício E. 36.12, página 1724.

#### • Os coeficientes de uma conexão afim

Ainda que a definição de conexão afim, apresentada acima, tenha sido introduzida de forma intrínseca, é muito importante que saibamos expressá-la em coordenadas locais. Seja  $p \in M$  e seja uma carta de coordenadas locais que permita expressar os pontos de uma vizinhança de  $p$  em termos de coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$ . Dentro dessa carta local temos definidos os campos vetoriais diferenciáveis  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  que em cada ponto da carta compõe uma base no correspondente espaço tangente. Naturalmente,  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$  define um campo vetorial diferenciável o qual pode também ser expresso em cada ponto em termos da base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^k}, k = 1, \dots, n \right\}$ :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} . \quad (36.56)$$

<sup>12</sup>A razão dessa adjetivação “afim” é esclarecida na discussão que segue a eq. (36.61), página 1724.

<sup>13</sup>Em verdade, trata-se de algo além de simples linearidade, pois  $f$  e  $g$  são funções, não sendo necessariamente constantes, portanto.



Os coeficientes  $\Gamma^k_{ij}$  são denominados *coeficientes da conexão afim*  $\nabla$ , ou como *símbolos da conexão afim*  $\nabla$ . Alguns textos também se referem aos coeficientes  $\Gamma^k_{ij}$  como *símbolos de Christoffel*<sup>14</sup>, mas preferimos reservar essa nomenclatura para o caso particular dos coeficientes de conexões de Levi-Civita<sup>15</sup> (que introduziremos adiante).

É de se notar que, por definição, os coeficientes  $\Gamma^k_{ij}$  são funções infinitamente diferenciáveis em  $M$ , ou seja, em cada ponto  $p$ , e em uma carta local, os coeficientes  $\Gamma^k_{ij}$  dependem de forma infinitamente diferenciável das coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  de  $p$ . Além disso, é de se notar que, sem outras hipóteses sobre a conexão afim  $\nabla$ , esta possui  $n^3$  coeficientes independentes.

Para melhor revelarmos o uso dos coeficientes de uma conexão afim  $\nabla$ , façamos as seguintes considerações. Sejam  $A, B \in \mathcal{X}(M)$  expressos em termos dessas coordenadas locais como  $A = A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  e  $B = B^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ . Usando as propriedades definidoras (36.53) e (36.54) da definição de conexão afim, teremos

$$\begin{aligned} \nabla_A B &= \nabla_{A^i \frac{\partial}{\partial x^i}} B \stackrel{(36.53)}{=} A^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} B = A^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( B^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \stackrel{(36.54)}{=} A^i B^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} + A^i \frac{\partial B^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= A^i B^j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} + A^i \frac{\partial B^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned}$$

e, assim,

$$\nabla_A B = \left[ A^i \frac{\partial B^k}{\partial x^i} + A^i B^j \Gamma^k_{ij} \right] \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (36.57)$$

A equação (36.57) é muito útil por permitir uma expressão concreta de uma conexão afim em uma carta local de coordenadas e é empregada amiúde na Teoria da Relatividade Geral.

A expressão (36.57) torna claro que, em cada ponto  $p$  e em uma carta local,  $\nabla_A B$  depende das componentes de  $A$  e  $B$  nessa carta calculadas em  $p$  e das derivadas parciais das componentes de  $B$  em relação às coordenadas dessa carta, também calculadas em  $p$ , ou mais precisamente, da derivada direcional das componentes de  $B$  na direção de  $A$ .

Por fim, comentemos que, pela definição (36.56), podemos escrever em cada ponto  $p$

$$\Gamma^k_{ij}(p) = \left\langle dx^k, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p, \quad (36.58)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  denota o pareamento entre elementos do espaço cotangente  $T_p^*M$  e do espaço tangente  $T_pM$ . É útil observar também que

$$g \left( \frac{\partial}{\partial x^k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p = \Gamma^l_{ij}(p) g \left( \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right)_p = g_{kl}(p) \Gamma^l_{ij}(p). \quad (36.59)$$

#### • Alguns comentários importantes sobre a notação e a nomenclatura

É importante que o estudante familiarize-se com outras notações frequentemente empregadas na literatura, especialmente na literatura de Física, para denotar algumas das expressões e noções que introduzimos acima.

Os elementos  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , de uma base local de coordenadas são frequentemente denotados por  $\partial_i$ , sendo a referência às coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  apenas implícita.

A expressão  $\frac{\partial B^k}{\partial x^i}$ , que ocorre, por exemplo, em (36.57), e que representa a derivada parcial da  $k$ -ésima componente de um campo  $B$  em relação à  $i$ -ésima coordenada de uma carta local, é frequentemente denotada de forma simplificada por  $\partial_i B^k$  ou por  $B^k_{;i}$  (estando novamente implícito com qual sistema de coordenadas se está lidando):

$$\frac{\partial B^k}{\partial x^i} \equiv \partial_i B^k \equiv B^k_{;i}.$$

Se escrevermos (na carta local em questão)  $\nabla_A B = (\nabla_A B)^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ , vemos que

$$(\nabla_A B)^k = A^i \frac{\partial B^k}{\partial x^i} + A^i B^j \Gamma^k_{ij} = A^i B^k_{;i} + A^i B^j \Gamma^k_{ij},$$

que são as componentes de  $\nabla_A B$  na base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \dots, n \right\}$ .

Devido à propriedade (36.53) da definição de conexão afim, a expressão  $\nabla_A B$  podem ser escrita como a combinação linear  $A^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} B$ . Muitas vezes o símbolo  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$  é simplificado para

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \equiv \nabla_i.$$

Dessa forma, escreve-se

$$\nabla_A B = A^i \nabla_i B.$$

Assim também, os coeficientes  $(\nabla_i B)^k$  de  $\nabla_i B$  são  $(\nabla_i B)^k = \frac{\partial B^k}{\partial x^i} + B^j \Gamma^k_{ij}$ . Na literatura, especialmente na literatura de Física, os coeficientes  $(\nabla_i B)^k$  são frequentemente denotados por  $B^k_{;i}$ . Assim,

$$B^k_{;i} = \frac{\partial B^k}{\partial x^i} + B^j \Gamma^k_{ij} = \partial_i B^k + B^j \Gamma^k_{ij} = B^k_{;i} + B^j \Gamma^k_{ij}. \quad (36.60)$$

A componente  $(\nabla_i B)^k$  é também denotada por  $\nabla_i B^k$ , ou seja,  $\nabla_i B^k \equiv B^k_{;i}$ .

Resumindo,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} B = \nabla_i B = (\nabla_i B)^k \frac{\partial}{\partial x^k} = (\nabla_i B^k) \frac{\partial}{\partial x^k} = B^k_{;i} \frac{\partial}{\partial x^k},$$

ou

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} B = \nabla_i B = (\nabla_i B)^k \partial_k = (\nabla_i B^k) \partial_k = B^k_{;i} \partial_k,$$

com

$$(\nabla_i B)^k = \nabla_i B^k = B^k_{;i} = \frac{\partial B^k}{\partial x^i} + B^j \Gamma^k_{ij} = \partial_i B^k + B^j \Gamma^k_{ij} = B^k_{;i} + B^j \Gamma^k_{ij}.$$

O símbolo  $\nabla_i$  é denominado *operador de derivação covariante* em relação à  $i$ -ésima coordenada. O símbolo  $\nabla_A$  é denominado *operador de derivação covariante* ao longo do campo  $A$ . A expressão  $\nabla_i B$  é denominada a *derivada covariante* do campo  $B$  em relação à  $i$ -ésima coordenada. A expressão  $\nabla_i B^k$  ou  $B^k_{;i}$  é denominada a *derivada covariante* da  $k$ -ésima coordenada do campo  $B$  em relação à  $i$ -ésima coordenada. Com um certo abuso de linguagem,  $\nabla_i B^k$  e  $B^k_{;i}$  são também ditas serem a *derivada covariante* do campo  $B$ , o que é natural, já que  $\nabla_i \left( B^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = (\nabla_i B^k) \frac{\partial}{\partial x^k} = B^k_{;i} \frac{\partial}{\partial x^k}$ .

#### • A transformação dos coeficientes de uma conexão afim por mudanças de cartas de coordenadas

Vamos agora discutir como os coeficientes de uma conexão afim transformam-se quando de uma mudança de sistema de coordenadas. Em dois sistemas de coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  e  $(x'^1, \dots, x'^n)$  os coeficientes de uma conexão afim  $\nabla$  são dados por

$$\Gamma^k_{ij}(p) = \left\langle dx^k, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p \quad \text{e} \quad \Gamma'^k_{ij}(p) = \left\langle dx'^k, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x'^i}} \frac{\partial}{\partial x'^j} \right\rangle_p,$$

<sup>14</sup>Elwin Bruno Christoffel (1829–1900).

<sup>15</sup>Tullio Levi-Civita (1873–1941).

respectivamente. Vide (36.58). Vale, portanto,

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{jk}_{ij}(p) &= \left\langle dx^{jk}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p = \left\langle \frac{\partial x^{jk}}{\partial x^a} dx^a, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \frac{\partial x^b}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^b} \right) \right\rangle_p \\
 &= \frac{\partial x^{jk}}{\partial x^a} \left\langle dx^a, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \frac{\partial x^b}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^b} \right) \right\rangle_p \\
 (36.54) \quad &= \frac{\partial x^{jk}}{\partial x^a} \left\langle dx^a, \left( \frac{\partial^2 x^b}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^b} + \frac{\partial x^b}{\partial x^j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^b} \right) \right\rangle_p \\
 &= \frac{\partial x^{jk}}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^b}{\partial x^i \partial x^j} \underbrace{\left\langle dx^a, \frac{\partial}{\partial x^b} \right\rangle_p}_{=\delta^a_b} + \frac{\partial x^{jk}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^j} \left\langle dx^a, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^b} \right\rangle_p \\
 &= \frac{\partial x^{jk}}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial x^{jk}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^j} \left\langle dx^a, \nabla_{\frac{\partial x^c}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^c}} \frac{\partial}{\partial x^b} \right\rangle_p \\
 (36.53) \quad &= \frac{\partial x^{jk}}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial x^{jk}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^j} \frac{\partial x^c}{\partial x^i} \left\langle dx^a, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^c}} \frac{\partial}{\partial x^b} \right\rangle_p \\
 &= \frac{\partial x^{jk}}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial x^{jk}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^j} \frac{\partial x^c}{\partial x^i} \Gamma^a_{cb}(p).
 \end{aligned}$$

Assim, reescrevendo um pouco a última expressão, a transformação entre os coeficientes da conexão afim  $\nabla$  é dada por

$$\Gamma^{jk}_{ij} = \frac{\partial x^{jk}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^i} \frac{\partial x^c}{\partial x^j} \Gamma^a_{bc} + \frac{\partial x^{jk}}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial x^i \partial x^j}. \tag{36.61}$$

O primeiro termo,  $\frac{\partial x^{jk}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^i} \frac{\partial x^c}{\partial x^j} \Gamma^a_{bc}$ , corresponde à fórmula usual de transformação de tensores do tipo (2, 1), mas há um segundo termo  $\frac{\partial x^{jk}}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial x^i \partial x^j}$ , independente dos coeficientes  $\Gamma$ , que mostra que os coeficientes de uma conexão afim não se transformam como um tensor, mas sofrem uma transformação afim<sup>16</sup>, daí  $\nabla$  ser chamada de *conexão afim*.

**E. 36.12 Exercício.** Sejam  $\nabla^{(1)}$  e  $\nabla^{(2)}$  duas conexões afins cujos coeficientes em uma carta local sejam  $(\Gamma^{(1)})^{k}_{ij}$  e  $(\Gamma^{(2)})^{k}_{ij}$ , respectivamente. Seja  $D = \nabla^{(1)} - \nabla^{(2)}$  o tensor definido em (36.55), dado pela diferença das duas conexões. Escrevamos  $D(A, B)$  em coordenadas locais como  $D(A, B) = A^i B^j D^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$ , com  $D^k_{ij}$  sendo as componentes de  $D$  nessas coordenadas. Mostre que  $D^k_{ij} = (\Gamma^{(1)})^{k}_{ij} - (\Gamma^{(2)})^{k}_{ij}$  e conclua, usando (36.61), que a expressão para a transformação das componentes do tensor  $D$  por mudança de coordenadas é

$$D^{jk}_{ij} = \frac{\partial x^{jk}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^i} \frac{\partial x^c}{\partial x^j} D^a_{bc}.$$

\*

• **O caráter local de uma conexão afim**

A expressão (36.57), que representa a expressão local da conexão afim  $\nabla$  em uma carta local de coordenadas, permite discutir um aspecto muito relevante da noção de conexão afim, a saber, o seu caráter local. Se  $h$  for uma carta de coordenadas para uma vizinhança aberta de um ponto  $p \in M$ , podemos escrever (36.57) em  $p$  de uma forma um tanto mais precisa (e talvez pedante) como

$$\nabla_A B(p) = \left[ A^i(h(p)) \frac{\partial B^k}{\partial x^i}(h(p)) + A^i(h(p)) B^j(h(p)) \Gamma^k_{ij}(h(p)) \right] \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(p)}.$$

<sup>16</sup>Uma transformação afim em  $\mathbb{R}^3$ , por exemplo, é uma transformação que leva um vetor  $\vec{x}$  em  $R\vec{x} + \vec{y}$ , onde  $R$  é uma matriz de rotação. Assim, trata-se de uma transformação envolvendo uma rotação e uma translação. Compare-se com (36.61).

com  $h(p) = (x^1, \dots, x^m)$ , as coordenadas de  $p$  na carta local. Da contemplação dos termos dessa expressão, ficam bastante claras os seguintes fatos concernentes à dependência de  $\nabla_A B(p)$  em  $A$  e  $B$ : 1<sup>o</sup>  $\nabla_A B(p)$  depende dos valores das componentes de  $A$  no ponto  $p$  (mais precisamente, dos valores de suas componentes em sua representação local em  $h(p)$ ); 2<sup>o</sup>  $\nabla_A B(p)$  depende dos valores das componentes de  $B$  no ponto  $p$  (dos valores de suas componentes em sua representação local em  $h(p)$ ) e dos valores da derivada direcional de  $B$  na direção  $A$ , tal como expresso no termo  $A^i \frac{\partial B^k}{\partial x^i}$ , sempre no ponto  $h(p)$ .

Essas considerações nos mostram que se  $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{h(p)}$  é um vetor em  $T_p M$  (definido, portanto, em apenas um ponto) a expressão  $\nabla_v B(p)$  está bem definida enquanto

$$\nabla_v B(p) := \left[ v^i \frac{\partial B^k}{\partial x^i}(h(p)) + v^i B^j(h(p)) \Gamma^k_{ij}(h(p)) \right] \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(p)}. \tag{36.62}$$

No sentido expresso em (36.62), uma conexão afim  $\nabla$  pode, portanto, ser também considerada para cada  $p \in M$  enquanto uma aplicação  $\nabla : T_p M \times \mathcal{X}(M) \rightarrow T_p M$ .

Como antes, a dependência de  $\nabla_v B(p)$  em  $B$  se dá nas componentes de  $B$  em  $h(p)$  na carta local e na derivada direcional de  $B$  na direção de  $v$ , também em  $h(p)$  e na carta local.

Para futura referência, observemos que (36.62) implica

$$\left( \nabla_v \frac{\partial}{\partial x^a} \right) (p) = v^i \Gamma^k_{ia}(h(p)) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(p)}. \tag{36.63}$$

• **A noção de derivação covariante ao longo de curvas diferenciáveis**

Seja  $c : I \ni t \mapsto c(t) \in M$  uma curva diferenciável em  $M$ , onde  $I$  é algum intervalo de  $\mathbb{R}$ . Seja  $V$  um campo vetorial definido ao longo da imagem de  $c$  e seja  $V \circ c(t) = V(c(t)) \in T_{c(t)} M$ ,  $t \in I$ . Se  $t \mapsto V \circ c(t)$  for  $k$ -vezes diferenciável, dizemos que  $V$  é um campo vetorial  $k$ -vezes diferenciável definido ao longo de  $c$ . No que segue vamos frequentemente identificar  $V$  e  $V \circ c$  escrevendo, para evitar tornar a notação desnecessariamente complicada,  $V(t)$  em lugar de  $V(c(t))$ . Denotemos por  $\mathcal{V}^k(c)$  a coleção dos campos vetoriais  $k$ -vezes diferenciáveis definido ao longo de  $c$ .

Uma *derivação covariante* ao longo da curva diferenciável  $c$  é uma aplicação que a cada campo vetorial em  $V \in \mathcal{V}^1(c)$  associa um campo vetorial ao longo de  $c$ , denotado por  $\frac{D}{dt} V$ , de forma que valha

$$\frac{D}{dt}(fV)(t) = \frac{df}{dt}(t)V(t) + f(t) \frac{D}{dt} V(t) \quad \text{e} \quad \frac{D}{dt}(V+W)(t) = \frac{D}{dt} V(t) + \frac{D}{dt} W(t) \tag{36.64}$$

para qualquer função diferenciável  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e quaisquer  $V, W \in \mathcal{V}^1(c)$ .

De relevância aqui são campos vetoriais sobre a curva  $c$  formados por restrições de campos vetoriais sobre  $M$  à curva  $c$ . Seja  $Y \in \mathcal{X}(M)$  um campo vetorial que a cada  $p \in M$  associa  $Y(p) \in T_p M$ . Então,  $I \ni t \mapsto Y(c(t)) \in T_{c(t)} M$  define um elemento de  $\mathcal{V}^1(c)$ .

Uma derivação covariante é dita ser uma *derivação covariante associada a uma conexão afim*  $\nabla$  se valer

$$\frac{D}{dt} Y(c(t)) = (\nabla_{c(t)} Y)(c(t)) \tag{36.65}$$

para todo  $Y \in \mathcal{X}(M)$ . Aqui, a conexão afim  $\nabla$  é considerada enquanto uma aplicação  $\nabla : T_p M \times \mathcal{X}(M) \rightarrow T_p M$  com  $p \in M$ , tal como expresso em (36.62). É um exercício elementar, deixado ao estudante, constatar que a expressão (36.65), para a derivação covariante, satisfaz as condições (36.64).

Uma derivação covariante associada a uma conexão afim ao longo de uma curva diferenciável  $c$  depende da curva  $c$  e da conexão  $\nabla$ , de modo que, um tanto pedantemente, dever-se-ia notá-la, por exemplo, por  $\frac{D}{dt}^{c, \nabla}$ , o que não fazemos para evitar sobrecarregar ainda mais a já pesada notação.

Em Geometria Riemanniana e na Teoria da Relatividade, praticamente só há interesse em derivações covariantes que sejam associadas a uma conexão afim  $\nabla$  e, em acordo com isso, só consideraremos doravante derivações covariantes desse tipo e que, portanto, satisfaçam (36.64) e (36.65). Afirmamos que, dada uma conexão afim  $\nabla$ , uma tal derivação covariante é fixada univocamente pelas condições (36.64) e (36.65). Consideremos uma carta local onde escrevemos as

coordenadas da curva  $c$  como  $h(c(t)) = (c^1(t), \dots, c^m(t))$  e  $\dot{c}(t) = \dot{c}^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))}$ . Nessa carta escrevemos também  $V(c(t)) = V^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))}$ . Teremos,

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}V(t) &= \frac{D}{dt} \left( V^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))} \right) \stackrel{(36.64)}{=} \frac{dV^k}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))} + V^k(t) \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))} \\ &\stackrel{(36.65)}{=} \frac{dV^k}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))} + V^k(t) \left( \nabla_{\dot{c}(t)} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) (c(t)) \\ &\stackrel{(36.63)}{=} \frac{dV^k}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))} + V^j(t) \dot{c}^i(t) \Gamma^k_{ij}(h(c(t))) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{D}{dt}V(t) = \left[ \frac{dV^k}{dt}(t) + \dot{c}^i(t) V^j(t) \Gamma^k_{ij}(h(c(t))) \right] \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{h(c(t))} \quad (36.66)$$

é a expressão local para a derivação covariante dada em (36.65).

• **Transportar paralelamente ao longo de uma curva segundo uma conexão afim**

Seja  $\nabla$  uma conexão afim, seja  $c : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável na variedade  $M$  e seja  $V : I \ni t \mapsto V(t) \in T_{c(t)}M$  um campo diferenciável sobre a curva  $c$ . Seja  $\frac{D}{dt}$  a derivação covariante associada a  $\nabla$  ao longo de  $c$ . Dizemos que  $V$  é transportado paralelamente ao longo de  $c$  segundo a conexão afim  $\nabla$  se  $\frac{D}{dt}V(t) = 0$  para todo  $t \in I$ .

Seja  $p$  um ponto da curva  $c$  e suponhamos que a parametrização dessa curva é tal que  $p = c(0)$ . Se  $V$  é transportado paralelamente segundo  $\nabla$ , então se tomarmos uma carta local de coordenadas em torno de  $p$ , teremos

$$\frac{dV^k}{dt}(t) + \dot{c}^i(t) V^j(t) \Gamma^k_{ij}(h(c(t))) = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

para todo  $t$  em um intervalo  $(-a, a)$ , com  $a > 0$ . Trata-se de um sistema de  $m$  equações diferenciais ordinárias lineares ( $m$  é a dimensão de  $M$ ). Para uma condição inicial  $V(0) = V_0 \in T_pM$ , com  $V_0 = V_0^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ , a teoria das equações diferenciais ordinárias garante-nos<sup>17</sup> a existência e a unicidade de soluções desse sistema dentro de algum intervalo  $(-a_0, a_0)$ ,  $0 < a_0 \leq a$ , sendo que  $a_0$  pode também depender da condição inicial  $V_0$ .

A solução  $V(t)$  do sistema acima com a condição inicial  $V_0 \in T_pM$  é dita ser o *transporte paralelo* do vetor  $V_0 \in T_pM$  ao longo da curva  $c$ . Os teoremas de existência e extensões são a associação com a noção de derivação covariante ao longo de curvas e a ideia de que operadores de derivação devem satisfazer a regra de Leibniz.

**36.2.1.1 Conexões Afins em Campos Tensoriais**

Até o momento apresentamos a definição de conexão afim enquanto operador agindo em campos vetoriais. Nosso propósito agora é estender a definição a campos tensoriais gerais. Começamos definindo a noção de conexão agindo em campos escalares, passando a campos covetoriais para, ao final, estendermos a definição a campos tensoriais gerais. As duas ideias condutoras das generalizações e extensões são a associação com a noção de derivação covariante ao longo de curvas e a ideia de que operadores de derivação devem satisfazer a regra de Leibniz.

Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável ( $f \in C^1(M)$ ) definida em  $M$  assumindo valores em  $\mathbb{R}$  e seja  $A \in \mathcal{X}(M)$ . Definimos  $\nabla_A f$  por

$$\nabla_A f := A(f) \quad (36.67)$$

cuja expressão local é

$$\nabla_A f = A^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

<sup>17</sup>Vide Teorema de Picard-Lindelöf, Teorema 11.2, página 515. Vide também a generalização expressa no Teorema 28.4, página 1388.

É claro que, com essa definição,  $\nabla$  é uma aplicação do tipo  $\nabla : \mathcal{X}(M) \times C^1(M) \rightarrow C^1(M)$ . Apesar da natureza distinta das conexões afins anteriormente definidas como aplicações  $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  continuaremos a denotá-las pelo símbolo  $\nabla$ . Claro é também que  $\nabla$  satisfaz

$$\nabla_{g_1 A_1 + g_2 A_2} f = g_1 \nabla_{A_1} f + g_2 \nabla_{A_2} f, \quad (36.68)$$

$$\nabla_A(fg) = f \nabla_A g + g \nabla_A f \quad \text{e} \quad \nabla_A(f+g) = \nabla_A f + \nabla_A g \quad (36.69)$$

para quaisquer  $A, A_1, A_2 \in \mathcal{X}(M)$  e  $f, g, g_1, g_2 \in C^1(M)$ .

Vamos agora estender a definição a campos covetoriais. Sejam  $A, B \in \mathcal{X}^*(M)$  campos vetoriais e  $\omega \in \mathcal{X}^*(M)$  um campo covetorial. Definimos  $\nabla_A \omega$  de sorte que valha a seguinte relação:

$$\nabla_A(\langle \omega, B \rangle) = \langle \nabla_A \omega, B \rangle + \langle \omega, \nabla_A B \rangle. \quad (36.70)$$

Observe-se que a imposição dessa regra corresponde à imposição da regra de Leibniz para o emparelhamento  $\langle \omega, B \rangle$ . Além disso, observe-se que  $\langle \omega, B \rangle$  é uma função escalar diferenciável e, portanto,  $\nabla_A(\langle \omega, B \rangle) = A(\langle \omega, B \rangle)$ , de acordo com a definição de acima. Fora isso,  $\nabla_A B$  já foi definido previamente quando definimos conexões sobre campos vetoriais. Logo, (36.70) corresponde a definir-se  $\nabla_A \omega$  de sorte que

$$\langle \nabla_A \omega, B \rangle = A(\langle \omega, B \rangle) - \langle \omega, \nabla_A B \rangle$$

seja válida para todo  $B \in \mathcal{X}(M)$ . Em coordenadas locais o lado direito é

$$A^i \frac{\partial(\omega_k B^k)}{\partial x^i} - \omega_k A^i \frac{\partial B^k}{\partial x^i} - \omega_k A^i B^j \Gamma^k_{ij} = B^k A^i \frac{\partial \omega_k}{\partial x^i} - \omega_k A^i B^j \Gamma^k_{ij}.$$

Logo, a expressão local de  $\nabla_A \omega$  é

$$\nabla_A \omega = \left[ A^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \omega_k A^i \Gamma^k_{ij} \right] dx^j. \quad (36.71)$$

Segue disso que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^k = -\Gamma^k_{ij} dx^j \quad \text{e, portanto,} \quad \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^k, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = -\Gamma^k_{ij}.$$

Comparando a (36.58), vemos que

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^k, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = - \left\langle dx^k, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle. \quad (36.72)$$

Com isso, definiu-se  $\nabla$  enquanto aplicação do tipo  $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}^*(M) \rightarrow \mathcal{X}^*(M)$ . Suas propriedades básicas são:

$$\nabla_{g_1 A_1 + g_2 A_2} \omega = g_1 \nabla_{A_1} \omega + g_2 \nabla_{A_2} \omega, \quad (36.73)$$

$$\nabla_A(f\omega) = f \nabla_A \omega + A(f)\omega \quad \text{e} \quad \nabla_A(\omega_1 + \omega_2) = \nabla_A \omega_1 + \nabla_A \omega_2 \quad (36.74)$$

para quaisquer  $A, A_1, A_2 \in \mathcal{X}(M)$  e  $f, g_1, g_2 \in C^1(M)$  e  $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{X}^*(M)$ .

Com os ingredientes acima podemos agora apresentar a definição de  $\nabla$  agindo sobre campos tensoriais. O guia para a definição é a regra de Leibniz, que impomos da seguinte forma: se  $T_1$  e  $T_2$  são campos tensoriais, então assumimos ser válido que

$$\nabla_A(T_1 \otimes T_2) := (\nabla_A T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_A T_2).$$

Isso permite-nos definir recorrentemente  $\nabla_A$  aplicado a qualquer campo tensorial de qualquer ordem. Seja  $T$  um campo tensorial de tipo  $(a, b)$ , mais especificamente, com  $T_p \in (\otimes_{\mathbb{R}}^a T_p M) (\otimes_{\mathbb{R}}^b T_p^* M)$ . Em uma carta  $(U, h)$ , com  $p \in U$ , escrevemos

$$\begin{aligned} (\nabla_A T)_p &= \nabla_A \left( T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}} \Big|_{h(p)} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^{i_a}} \Big|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} dx_{h(p)}^{i_{a+1}} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} dx_{h(p)}^{i_{a+b}} \right) \\ &+ T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}}(h(p)) \left[ \sum_{k=1}^a \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \Big|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \left( \nabla_A \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \Big|_{h(p)} \right) \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^{i_a}} \Big|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} dx_{h(p)}^{i_{a+1}} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} dx_{h(p)}^{i_{a+b}} \right. \\ &\left. + \sum_{l=a+1}^{a+b} \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \Big|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \Big|_{h(p)} \otimes_{\mathbb{R}} dx_{h(p)}^{i_{a+1}} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \left( \nabla_A dx_{h(p)}^{i_l} \right) \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} dx_{h(p)}^{i_{a+b}} \right]. \quad (36.75) \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\nabla_A \left( T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}} \right)_{h(p)} &= A^i(h(p)) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}} \right) (h(p)), \\ \nabla_A \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \Big|_{h(p)} &= A^i(h(p)) \Gamma^{j_k}_{i i_k}(h(p)) \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \Big|_{h(p)}, \\ \nabla_A dx^i_{h(p)} &= -A^i(h(p)) \Gamma^i_{ij}(h(p)) dx^j_{h(p)}\end{aligned}$$

e, com isso, omitindo-se por simplicidade o ponto  $h(p)$  da expressão, temos

$$\begin{aligned}(\nabla_A T)_p &= A^i \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x^i} T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}} \right) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \mathbb{R} \dots \otimes \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial x^{i_a}} \otimes \mathbb{R} dx^{i_{a+1}} \otimes \mathbb{R} \dots \otimes \mathbb{R} dx^{i_{a+b}} \right. \\ &+ T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}} \left[ \sum_{k=1}^a \Gamma^{j_k}_{i i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \mathbb{R} \dots \otimes \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \otimes \mathbb{R} \dots \otimes \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial x^{i_a}} \otimes \mathbb{R} dx^{i_{a+1}} \otimes \mathbb{R} \dots \otimes \mathbb{R} dx^{i_{a+b}} \right. \\ &\left. \left. - \sum_{l=a+1}^{a+b} \Gamma^i_{ij} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \mathbb{R} \dots \otimes \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \otimes \mathbb{R} dx^{i_{a+1}} \otimes \mathbb{R} \dots \otimes \mathbb{R} dx^{j_l} \otimes \mathbb{R} \dots \otimes \mathbb{R} dx^{i_{a+b}} \right] \right\}. \quad (36.76)\end{aligned}$$

Lê-se disso que as componentes de  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} T \equiv \nabla_i T$  na base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{h(p)} \otimes \mathbb{R} \dots \otimes \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial x^{i_a}} \Big|_{h(p)} \otimes \mathbb{R} dx^i_{h(p)} \otimes \mathbb{R} \dots \otimes \mathbb{R} dx^i_{h(p)} \right\}$  são dadas por

$$\left( T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}} \right)_{,i} = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}} \right) + \sum_{k=1}^a T^{i_1 \dots j_k \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}} \Gamma^{i_k}_{i j_k} - \sum_{l=a+1}^{a+b} T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots j_l \dots i_{a+b}} \Gamma^{j_l}_{i i_l}, \quad (36.77)$$

onde  $T^{i_1 \dots j_k \dots i_a}_{i_{a+1} \dots i_{a+b}}$  significa que o índice  $i_k$  é substituído pelo índice  $j_k$  e analogamente para  $T^{i_1 \dots i_a}_{i_{a+1} \dots j_l \dots i_{a+b}}$ .

**E. 36.13** *Exercício.* Verifique cuidadosamente a validade das expressões acima. ✦

• **O caso do tensor métrico**

De particular relevância é o cálculo de uma conexão afim sobre o tensor métrico. De acordo com (36.77), temos para as componentes covariantes e contravariantes em uma carta local

$$(g_{kl})_{,i} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - g_{jl} \Gamma^j_{ik} - g_{kj} \Gamma^j_{il}, \quad (36.78)$$

$$(g^{kl})_{,i} = \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i} + g^{jl} \Gamma^k_{ij} + g^{kj} \Gamma^l_{ij}. \quad (36.79)$$

Se  $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$ , temos, com uso repetido da regra de Leibniz para as conexões,

$$\nabla_A \langle g(B, C) \rangle = \nabla_A \langle g, B \otimes C \rangle = \langle \nabla_A g, B \otimes C \rangle + \langle g, (\nabla_A B) \otimes C \rangle + \langle g, B \otimes (\nabla_A C) \rangle.$$

Agora,  $g(B, C)$  é uma grandeza escalar e, portanto,  $\nabla_A \langle g(B, C) \rangle = A \langle g(B, C) \rangle$ , do que segue que

$$\langle \nabla_A g, B \otimes C \rangle = A \langle g(B, C) \rangle - \langle g, (\nabla_A B) \otimes C \rangle - \langle g, B \otimes (\nabla_A C) \rangle. \quad (36.80)$$

Faremos uso dessa relação adiante quando tratarmos das chamadas conexões métricas.

### 36.2.2 O Tensor de Torção

Como já mencionamos, a noção de torção foi introduzida por Élie Cartan em 1922. Para algumas referências aos trabalhos originais de Cartan, vide nota-de-rodapé 11, página 1720. Para comentários adicionais sobre a relevância dessa noção na Teoria da Relatividade Geral, nas chamadas Teorias de Einstein-Cartan, vide página 1738.

Seguiremos aqui uma abordagem mais moderna e começamos definindo a noção de tensor de torção por meio da definição de conexão dual.

• **A conexão dual a uma conexão**

Seja  $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  uma conexão afim em  $M$ . Afirmamos que a expressão

$$\tilde{\nabla}_{AB} := \nabla_B A + [A, B]$$

também define uma nova conexão afim  $\tilde{\nabla} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  em  $M$ , que denominamos *conexão dual* à conexão afim  $\nabla$ . De fato, para  $f, g \in C^\infty(M)$  e  $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$ , tem-se

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{fA+gB} C &= \nabla_C(fA+gB) + [fA+gB, C] \\ (36.54) \quad &= f \nabla_C A + g \nabla_C B + C(f)A + C(g)B + [fA+gB, C] \\ (36.63) \quad &= f \nabla_C A + g \nabla_C B + C(f)A + C(g)B - C(f)A - C(g)B + f[A, C] + g[B, C] \\ &= f \nabla_C A + f[A, C] + g \nabla_C B + g[B, C] \\ &= f \tilde{\nabla}_A C + g \tilde{\nabla}_B C,\end{aligned}$$

provando que a propriedade (36.53) é satisfeita por  $\tilde{\nabla}$  e

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_A(fB+gC) &= \nabla_{fB+gC} A + [A, fB+gC] \\ (36.53) \quad &= f \nabla_B A + g \nabla_C A + [A, fB+gC] \\ (36.63) \quad &= f \nabla_B A + g \nabla_C A + A(f)B + A(g)C + f[A, B] + g[A, C] \\ &= f \tilde{\nabla}_A B + g \tilde{\nabla}_A C + A(f)B + A(g)C,\end{aligned}$$

provando que a propriedade (36.54) é satisfeita por  $\tilde{\nabla}$ .

**E. 36.14** *Exercício (fácil).* Mostre que  $\tilde{\tilde{\nabla}} = \nabla$ , ou seja, a conexão dual à conexão dual a  $\nabla$  é a própria conexão  $\nabla$ . ✦

• **O tensor de torção**

A diferença

$$T := \nabla - \tilde{\nabla} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M) \quad (36.81)$$

é um tensor, de acordo com os comentários da página 1721 sobre a diferença entre duas conexões afins. Esse tensor é denominado *tensor de torção* associado à conexão afim  $\nabla$ . Assim, para  $A, B \in \mathcal{X}(M)$ , temos

$$T(A, B) := \nabla_A B - \tilde{\nabla}_A B = \nabla_A B - \nabla_B A - [A, B]. \quad (36.82)$$

Essa expressão permite uma interpretação ligeira do significado do tensor de torção, ao mostrar que  $T(A, B)$  “mede” o quanto a diferença  $\nabla_A B - \nabla_B A$  difere do comutador  $[A, B]$ . Da expressão (36.82) é evidente que  $T$  é antissimétrico:

$$T(A, B) = -T(B, A).$$

Dada uma carta de coordenadas locais onde a conexão  $\nabla$  tenha coeficientes  $\Gamma^k_{ij}$  teremos (vide (36.57))  $\nabla_{AB} = \left[ A^i \frac{\partial B^k}{\partial x^i} + A^i B^j \Gamma^k_{ij} \right] \frac{\partial}{\partial x^k}$ . Para a conexão  $\tilde{\nabla}$  teremos na mesma carta de coordenadas

$$\tilde{\nabla}_{AB} := \left[ A^i \frac{\partial B^k}{\partial x^i} + A^i B^j \Gamma^k_{ji} \right] \frac{\partial}{\partial x^k},$$

expressão que difere de (36.57) pela troca  $\Gamma^k_{ij} \rightarrow \Gamma^k_{ji}$ . Assim, concluímos que os coeficientes da conexão afim  $\tilde{\nabla}$  são  $\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ .

**E. 36.15** *Exercício importante.* Prove as afirmações acima. ✦

Como consequência, valerá em coordenadas locais,

$$T(A, B) = \nabla_{AB} - \tilde{\nabla}_{AB} = A^i B^j \left( \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Assim, as componentes de  $T$  na carta local considerada serão  $T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$  (vide Exercício E. 36.12, página 1724) e teremos  $T(A, B) = A^i B^j T^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$ . É evidente que  $T^k_{ij} = -T^k_{ji}$ , o que expressa a antissimetria do tensor de torção. Disso segue que o tensor de torção tem  $\frac{n(n-1)}{2}$  componentes independentes.

Tal como no Exercício E. 36.12, página 1724, usando (36.61) podemos obter a expressão para a transformação das componentes do tensor de torção por mudança de coordenadas:

$$T^k_{ij} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x'^i} \frac{\partial x^c}{\partial x'^j} T^a_{bc}. \quad (36.83)$$

### 36.2.3 Tipos Especiais de Conexões Afins

Vamos agora descrever os tipos de conexões afins de maior interesse, as conexões simétricas (ou livres de torção), as conexões métricas (ou Riemannianas) e, talvez de maior relevância, as conexões de Levi-Civita (que são simultaneamente métricas e simétricas) e as conexões de Weyl. Propriedades básicas desses tipos de conexões serão também apresentadas.

#### 36.2.3.1 Conexões Simétricas (ou Livres de Torção)

É útil observar que, por (36.82), podemos escrever, para uma conexão afim geral,

$$\nabla_{AB} - \nabla_B A = [A, B] + T(A, B). \quad (36.84)$$

Uma conexão afim  $\nabla$  é dita ser uma *conexão simétrica*, ou *livre de torção*, se o tensor de torção associado a si for identicamente nulo, ou seja, se para todos  $A, B \in \mathcal{X}(M)$  valer

$$\nabla_{AB} - \nabla_B A = [A, B]. \quad (36.85)$$

Para uso futuro, observemos *en passant* que essa relação se escreve também como

$$\nabla_{AB} - \nabla_B A = \mathcal{L}_A B. \quad (36.86)$$

onde  $\mathcal{L}$  é a derivada de Lie, introduzida na Seção 35.3.1, página 1679.

Impor que o tensor de torção seja nulo significa evidentemente impor que suas componentes são nulas em um sistema de coordenadas (e, portanto, em todos). Assim, uma conexão afim  $\nabla$  é dita ser simétrica se e somente se seus coeficientes satisfizerem em todos os pontos da variedade

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$$

para todos os índices  $i, j, k$ , em um sistema de coordenadas (e, portanto, em todos). Uma conexão simétrica possui  $\frac{n^2(n+1)}{2}$  coeficientes independentes (justifique!).

#### • O Lema de Simetria

Se  $M$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ , podemos representar uma superfície bidimensional conexa em  $M$  através de uma função bijetora  $S : \mathcal{O} \rightarrow M$ , onde  $\mathcal{O}$  é um aberto conexo de  $\mathbb{R}^2$ . Para cada  $(u, v) \in \mathcal{O}$  o ponto associado por  $S$  é  $S(u, v) \in M$ . A superfície mergulhada em  $M$  assim definida será também denotada por  $S$ . Se  $p$  é um ponto de  $S$  e  $(A, h)$  é uma carta local de coordenadas em  $M$  com  $p \in A$ , a aplicação  $h \circ S : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $\mathcal{O} \ni (u, v) \mapsto h(S(u, v)) = (x^1(u, v), \dots, x^n(u, v))$  descreve uma superfície bidimensional em  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Para cada  $v$  fixo,  $u \mapsto S(u, v)$  descreve uma curva em  $M$  cujo vetor tangente denotamos por  $\frac{\partial S}{\partial u} \in T_p M$  com  $p = S(u, v)$ . Analogamente, para cada  $u$  fixo,  $v \mapsto S(u, v)$  descreve uma curva em  $M$  cujo vetor tangente denotamos por  $\frac{\partial S}{\partial v} \in T_p M$ . Esses vetores são dados na representação definida pela carta local  $(A, h)$  (com  $p \in A$ ) por

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \sum_{a=1}^n \frac{\partial x^a}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^a} \Big|_p \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial v} = \sum_{b=1}^n \frac{\partial x^b}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x^b} \Big|_p,$$

com as funções  $x^a(u, v)$  definidas acima. Ao longo das curvas de  $u$  constante e de  $v$  constante podemos também definir as derivadas covariantes

$$\frac{D}{\partial u} = \nabla_{\frac{\partial S}{\partial u}} = \nabla_{\sum_{a=1}^n \frac{\partial x^a}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^a}} = \sum_{a=1}^n \frac{\partial x^a}{\partial u} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}}$$

e

$$\frac{D}{\partial v} = \nabla_{\frac{\partial S}{\partial v}} = \nabla_{\sum_{b=1}^n \frac{\partial x^b}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x^b}} = \sum_{b=1}^n \frac{\partial x^b}{\partial v} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^b}}.$$

O lema técnico a seguir será empregado em diversas manipulações algébricas.

**Lema 36.1 (Lema de Simetria)** *Se  $\nabla$  é uma conexão simétrica então, com as definições dadas acima, vale*

$$\frac{D}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial v} = \frac{D}{\partial v} \frac{\partial S}{\partial u} \quad (36.87)$$

*em todo ponto de  $S$ .* □

**Prova.** Devido à condição de a conexão  $\nabla$  ser simétrica, tem-se para todos  $a$  e  $b$   $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^b} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^b}} \frac{\partial}{\partial x^a} = \left[ \frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b} \right] = 0$  e, portanto,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^b} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^b}} \frac{\partial}{\partial x^a} = 0. \quad (36.88)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial v} &= \frac{D}{\partial u} \left( \sum_{b=1}^n \frac{\partial x^b}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x^b} \right) \\ &= \sum_{b=1}^n \frac{\partial^2 x^b}{\partial u \partial v} \frac{\partial}{\partial x^b} + \sum_{b=1}^n \frac{\partial x^b}{\partial v} \frac{D}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^b} \\ &= \sum_{b=1}^n \frac{\partial^2 x^b}{\partial u \partial v} \frac{\partial}{\partial x^b} + \sum_{b=1}^n \frac{\partial x^b}{\partial v} \sum_{a=1}^n \frac{\partial x^a}{\partial u} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^b} \\ &\stackrel{(36.88)}{=} \sum_{b=1}^n \frac{\partial^2 x^b}{\partial u \partial v} \frac{\partial}{\partial x^b} + \sum_{b=1}^n \frac{\partial x^b}{\partial v} \sum_{a=1}^n \frac{\partial x^a}{\partial u} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{a=1}^n \frac{\partial^2 x^a}{\partial u \partial v} \frac{\partial}{\partial x^a} + \sum_{a=1}^n \frac{\partial x^a}{\partial u} \sum_{b=1}^n \frac{\partial x^b}{\partial v} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^b} \\ &= \sum_{a=1}^n \frac{\partial^2 x^a}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x^a} + \sum_{a=1}^n \frac{\partial x^a}{\partial u} \frac{D}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x^a} \\ &= \frac{D}{\partial v} \sum_{a=1}^n \frac{\partial x^a}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{D \partial S}{\partial v \partial u}, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ■

O estudante deve perceber-se que (36.88) é a versão em coordenadas locais da expressão (36.87).

### 36.2.3.2 Conexões Métricas (ou Riemannianas)

Ao introduzirmos a noção de conexão afim, acima, não fizemos menção à presença de um tensor métrico Riemanniano ou Lorentziano na variedade. Vamos agora tratar da situação na qual uma ou outra estão presentes.

#### • Conexões métricas, ou Riemannianas

Uma conexão afim  $\nabla$  é dita ser uma *conexão compatível com um tensor métrico* semi-Riemanniana  $g$  se valer

$$\nabla_A(g) = 0 \tag{36.89}$$

para todo  $A \in \mathcal{X}(M)$ . De acordo com (36.80), isso equivale a

$$A(g(B, C)) = g(\nabla_A B, C) + g(B, \nabla_A C) \tag{36.90}$$

para todos  $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$ . Uma conexão que seja compatível com um tensor métrico é também dita ser uma *conexão métrica*, ou uma *conexão Riemanniana*. A identidade expressa em (36.90) é por vezes denominada *identidade de Ricci*<sup>18</sup>.

De acordo com (36.78), a expressão local de (36.89) é

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = g_{jl} \Gamma^j_{ik} + g_{kj} \Gamma^j_{il}. \tag{36.91}$$

Para entender o significado da propriedade especificada em (36.90), observe-se que se  $\nabla_A B = \nabla_A C = 0$ , então  $g(B, B)$ ,  $g(C, C)$  e  $g(B, C)$  não variam ao longo de  $A$ , ou seja, se  $B$  e  $C$  são paralelamente transportados ao longo de  $A$  segundo  $\nabla$ , então seu módulos e o “ângulo” que formam entre si não variam ao longo e  $A$ , em coerência com a intuição por trás da noção de transporte paralelo.

Para reforçar as considerações das últimas linhas, apresentaremos algumas caracterizações equivalentes da definição de conexão métrica (novamente seguimos [231], mas com uma organização distinta). Observe-se que o item 2 da proposição que segue vem precisamente ao encontro do comentário do parágrafo precedente, ao afirmar que pares de vetores transportados paralelamente ao longo de curvas diferenciáveis preservam seu produto escalar.

**Proposição 36.4** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana ou Lorentziana e seja  $\nabla$  uma conexão afim em  $M$ . Denotemos por  $\frac{D}{dt}$  a derivação covariante associada à conexão  $\nabla$  ao longo de uma curva especificada. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. A conexão  $\nabla$  é compatível com o tensor métrico, ou seja,  $A(g(B, C)) = g(\nabla_A B, C) + g(B, \nabla_A C)$  para todos  $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$ .
2. Para toda curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  ( $I$  sendo algum intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ .) vale que se  $V^{(1)} : I \ni t \mapsto V^{(1)}(t) \in T_{c(t)}M$  e  $V^{(2)} : I \ni t \mapsto V^{(2)}(t) \in T_{c(t)}M$  são pares de campos vetoriais definidos sobre  $c$  que são transportados

<sup>18</sup>Gregorio Ricci Curbastro (1853–1925).

paralelamente ao longo de  $c$  (ou seja, tais que  $\frac{D}{dt}V^{(1)} = \frac{D}{dt}V^{(2)} = 0$  para todo  $t \in I$ ), então  $g(V^{(1)}, V^{(2)})$  é constante ao longo de  $c$ , ou seja,

$$\frac{d}{dt}g\left(V^{(1)}(t), V^{(2)}(t)\right)_{c(t)} = 0 \tag{36.92}$$

para todo  $t \in I$ .

3. Para toda curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  vale que se  $V : I \ni t \mapsto V(t) \in T_{c(t)}M$  e  $W : I \ni t \mapsto W(t) \in T_{c(t)}M$  são pares de campos vetoriais definidos sobre  $c$ , então

$$\frac{d}{dt}g\left(V(t), W(t)\right)_{c(t)} = g\left(\frac{D}{dt}V(t), W(t)\right)_{c(t)} + g\left(V(t), \frac{D}{dt}W(t)\right)_{c(t)}. \tag{36.93}$$

□

**Prova. 1  $\rightarrow$  2.** Vamos escolher  $A, B$  e  $C$  de modo que, em alguma (eventualmente “pequena”) vizinhança sobre  $c$  de um ponto  $c(t_0)$ , o campo  $A$  coincida com  $\dot{c}(t)$ ,  $B$  com  $V^{(1)}(t)$  e  $C$  com  $V^{(2)}(t)$ . Teremos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g\left(V^{(1)}(t), V^{(2)}(t)\right)_{c(t)}\Big|_{t=t_0} &= A\left(g(B, C)\right)_{c(t_0)} \\ &\stackrel{1}{=} g(\nabla_A B, C)_{c(t_0)} + g(B, \nabla_A C)_{c(t_0)} = g(\nabla_{\dot{c}(t_0)} B, C)_{c(t_0)} + g(B, \nabla_{\dot{c}(t_0)} C)_{c(t_0)} \\ &\stackrel{(36.65)}{=} g\left(\frac{D}{dt}V^{(1)}(t_0), V^{(2)}(t_0)\right)_{c(t_0)} + g\left(V^{(1)}(t_0), \frac{D}{dt}V^{(2)}(t_0)\right)_{c(t_0)} = 0. \end{aligned}$$

**2  $\rightarrow$  3.** Sob a hipótese 2 vale o seguinte:

**Lema 36.2** *Seja  $(g, M)$  uma variedade Riemanniana ou Lorentziana, com  $g$  sendo, portanto, não-degenerada. Vamos supor que valha a hipótese 2, acima. Seja  $c : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável e seja  $p = c(t_0)$  um ponto da curva  $c$ . Seja  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  uma base em  $T_pM$  e seja, para cada  $k = 1, \dots, n$ ,  $\mathbf{b}_k(t)$  o vetor obtido transportando  $\mathbf{b}_k$  paralelamente ao longo de  $c$  em alguma vizinhança suficientemente pequena de  $p$  (que supomos ser a mesma para todos os  $k$ 's). Então  $\{\mathbf{b}_1(t), \dots, \mathbf{b}_n(t)\}$  é uma base em  $T_{c(t)}M$ . □*

**Prova do Lema 36.2.** Fixemos  $t$  e suponhamos que existam escalares  $\alpha_k$  tais que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{b}_k(t) = 0$ . Então, para todo  $j$  vale

$$0 = g\left(\mathbf{b}_j(t), \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{b}_k(t)\right)_{c(t)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k g(\mathbf{b}_j(t), \mathbf{b}_k(t))_{c(t)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k g(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k)_p = g\left(\mathbf{b}_j, \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{b}_k\right)_p.$$

Como os  $\mathbf{b}_j$  formam uma base em  $T_pM$  e o tensor métrico é não-degenerado, isso implica que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{b}_k = 0$  e, portanto, que todos os  $\alpha_k$ 's são nulos. ■

Seguindo esse resultado, podemos escrever  $V(t) = \sum_{i=1}^n v^i(t) \mathbf{b}_i(t)$  e  $W(t) = \sum_{j=1}^n w^j(t) \mathbf{b}_j(t)$  para todo  $t$  em uma vizinhança de  $t_0$ . Assim, pela hipótese 2,

$$g(V(t), W(t))_{c(t)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i(t) w^j(t) g(\mathbf{b}_i(t), \mathbf{b}_j(t))_{c(t)} \stackrel{2}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i(t) w^j(t) g(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_p.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}g(V(t), W(t))_{c(t)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left[ v^i(t) w^j(t) \right] g(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_p. \tag{36.94}$$

Por outro lado, como  $\frac{D}{dt}\mathbf{b}_j(t) = 0$  para todo  $j$ , vale por (36.64)

$$\frac{D}{dt}V(t) = \frac{D}{dt} \sum_{i=1}^n v^i(t) \mathbf{b}_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(v^i(t)) \mathbf{b}_i(t)$$

e, portanto,

$$g\left(\frac{D}{dt}V(t), W(t)\right)_{c(t)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt}(v^i(t)) w^j(t) g(\mathbf{b}_i(t), \mathbf{b}_j(t))_{c(t)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt}(v^i(t)) w^j(t) g(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_p.$$

Analogamente, obtém-se

$$g\left(V(t), \frac{D}{dt}W(t)\right)_{c(t)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i(t) \frac{d}{dt}(w^j(t)) g(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_p.$$

Logo,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{D}{dt}V(t), W(t)\right)_{c(t)} + g\left(V(t), \frac{D}{dt}W(t)\right)_{c(t)} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt}(v^i(t)) w^j(t) + v^i(t) \frac{d}{dt}(w^j(t)) \right] g(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_p \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} [v^i(t) w^j(t)] g(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_p \stackrel{(36.94)}{=} \frac{d}{dt} g(V(t), W(t))_{c(t)}. \end{aligned}$$

**3**  $\rightarrow$  **2**. Trivial.

**3**  $\rightarrow$  **1**. Para um dado campo  $A$  e  $p \in M$ , seja  $c : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável passando por  $p$  em  $t_0$  e tal que  $\dot{c}(t_0) = A(p) \in T_pM$ . Teremos  $A(p)(g(C, C)_p) = \frac{d}{dt}g(B, C)_{c(t)}|_{t=t_0}$ . Pela hipótese 3, o lado direito dessa igualdade pode ser escrito como

$$\begin{aligned} g\left(\frac{D}{dt}B(c(t_0)), C(c(t_0))\right)_{c(t_0)} + g\left(B(c(t_0)), \frac{D}{dt}C(c(t_0))\right)_{c(t_0)} \\ \stackrel{(36.65)}{=} g(\nabla_{\dot{c}(t_0)}B, C)_{c(t_0)} + g(B, \nabla_{\dot{c}(t_0)}C)_{c(t_0)} = g(\nabla_A B, C)_p + g(B, \nabla_A C)_p, \end{aligned}$$

que é o que se desejava provar. ■

**• A fórmula de Koszul. Determinando uma conexão métrica em termos do tensor métrico e da torção**

No que segue provaremos que uma conexão métrica é determinada univocamente pelo tensor métrico e pelo tensor de torção.

Seja  $g$  um tensor métrico semi-Riemanniano e  $\nabla$  uma conexão afim compatível com esse tensor métrico. Fazendo permutações cíclicas de  $A, B$  e  $C$  em (36.90), temos

$$A(g(B, C)) = g(\nabla_A B, C) + g(B, \nabla_A C), \tag{36.95}$$

$$B(g(C, A)) = g(\nabla_B C, A) + g(C, \nabla_B A), \tag{36.96}$$

$$C(g(A, B)) = g(\nabla_C A, B) + g(A, \nabla_C B). \tag{36.97}$$

Disso segue que

$$\begin{aligned} A(g(B, C)) + B(g(C, A)) - C(g(A, B)) &= g(\nabla_A B, C) + g(B, \nabla_A C) + g(\nabla_B C, A) + g(C, \nabla_B A) \\ &\quad - g(\nabla_C A, B) - g(A, \nabla_C B) + (g(C, \nabla_B A) - g(C, \nabla_B A)) \\ &= g((\nabla_A B - \nabla_B A), C) + g((\nabla_A C - \nabla_C A), B) + g((\nabla_B C - \nabla_C B), A) \\ &\quad + 2g(C, \nabla_B A) \\ &\stackrel{(36.84)}{=} g([A, B], C) + g([A, C], B) + g([B, C], A) \\ &\quad + g(T(A, B), C) + g(T(A, C), B) + g(T(B, C), A) \\ &\quad + 2g(C, \nabla_B A). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(C, \nabla_B A) &= \frac{1}{2} [A(g(B, C)) + B(g(C, A)) - C(g(A, B))] - \frac{1}{2} [g([A, B], C) + g([A, C], B) + g([B, C], A)] \\ &\quad - \frac{1}{2} [g(T(A, B), C) + g(T(A, C), B) + g(T(B, C), A)]. \end{aligned} \tag{36.98}$$

A expressão acima, denominada *fórmula de Koszul*<sup>19</sup> por alguns autores, mostra que uma conexão métrica  $\nabla$  é univocamente determinada pelo tensor métrico  $g$  e pela torção  $T$ . Isso talvez fique mais claro se, para uma carta local, tomarmos  $A = \frac{\partial}{\partial x^j}$ ,  $B = \frac{\partial}{\partial x^i}$  e  $C = \frac{\partial}{\partial x^k}$ . Usando (36.59) e o fato que  $[\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b}] = 0$  para quaisquer  $a, b$ , obtemos

$$g_{kl} \Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right] - \frac{1}{2} [T^l_{ji} g_{lk} + T^l_{jk} g_{li} + T^l_{ik} g_{lj}]$$

e, conseqüentemente,

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left[ \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right] - \frac{1}{2} [T^k_{ji} + T_{ij}{}^k + T_{ji}{}^k], \tag{36.99}$$

ou, alternativamente, usando a antissimetria das componentes do tensor de torção,

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left[ \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right] + \frac{1}{2} [T^k_{ij} + T_i{}^k{}_j + T_j{}^k{}_i]. \tag{36.100}$$

**E. 36.16** *Exercício importante.* Reproduza todos os cálculos que conduzem às expressões acima. ✦

**• O tensor de contorção**

A expressão (36.98) aponta a necessidade de introduzir-se a seguinte definição: o tensor  $K : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , portanto de tipo  $(0, 3)$ , definido por

$$K(C, B, A) := -\frac{1}{2} [g(T(A, B), C) + g(T(A, C), B) + g(T(B, C), A)], \tag{36.101}$$

com  $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$ , é denominado (um tanto jocosamente) *tensor de contorção*. Em componentes de uma carta

<sup>19</sup>Jean-Louis Koszul (1921–).

local de coordenadas isso se escreve como

$$\begin{aligned} K_{kji} C^k B^j A^i &= -\frac{1}{2} (T_{ij}^l g_{kl} + T_{ik}^l g_{lj} + T_{jk}^l g_{li}) A^i B^j C^k = -\frac{1}{2} (T_{kij} + T_{jik} + T_{ijk}) A^i B^j C^k \\ &= \frac{1}{2} (T_{ji}^l g_{kl} + T_{ki}^l g_{lj} + T_{kj}^l g_{li}) A^i B^j C^k \\ &= \frac{1}{2} (T_{kji} + T_{jki} + T_{ikj}) A^i B^j C^k, \end{aligned}$$

sendo que na segunda linha usamos a antissimetria das componentes do tensor de torção. Portanto, as componentes do tensor de contorção são dadas por

$$K_{kji} = -\frac{1}{2} (T_{kij} + T_{jik} + T_{ijk}) = \frac{1}{2} (T_{kji} + T_{jki} + T_{ikj}), \quad (36.102)$$

Com o tensor de contorção, a fórmula de Koszul (36.98) escreve-se como

$$\begin{aligned} g(C, \nabla_B A) &= \frac{1}{2} [A(g(B, C)) + B(g(C, A)) - C(g(A, B))] - \frac{1}{2} [g([A, B], C) + g([A, C], B) + g([B, C], A)] \\ &\quad + K(C, B, A). \end{aligned} \quad (36.103)$$

Usando (36.102), a expressão (36.99) ou (36.100), por sua vez, fica

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left[ \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right] + K^k{}_{ij}. \quad (36.104)$$

Verifique!

**E. 36.17** *Exercício.* Usando (36.101), mostre que

$$K(C, B, A) - K(C, A, B) = -g(T(A, B), C) \quad (36.105)$$

e que

$$K(C, B, A) = -K(A, B, C), \quad (36.106)$$

o que, em termos de componentes, significa que

$$K_{kji} - K_{kij} = -T_{kij} = T_{kji} \quad \text{e} \quad K_{kji} = -K_{ijk}, \quad (36.107)$$

respectivamente. Segue de (36.105), ou da primeira igualdade em (36.107), que se o tensor de contorção for nulo, então o tensor de torção também o é. Concluímos dessa observação e da definição (36.101) ou (36.102) que o tensor de contorção é nulo se e somente se o tensor de torção o for.  $\star$

**E. 36.18** *Exercício.* Mostre que as componentes do tensor de contorção transformam-se por mudanças de coordenadas como

$$K'^k{}_{ij} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x'^i} \frac{\partial x^c}{\partial x'^j} K^a{}_{bc} \quad \text{ou} \quad K'^k{}_{ij} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^k} \frac{\partial x^b}{\partial x'^i} \frac{\partial x^c}{\partial x'^j} K_{abc}. \quad (36.108)$$

$\star$

### • Símbolos de Christoffel

Os termos de (36.100) e (36.104) que envolvem as derivadas parciais das componentes do tensor métrico (e não envolvem a torção) são de particular interesse e para eles alguns autores reservam uma notação e uma denominação particular: define-se os chamados *símbolos de Christoffel*<sup>20</sup> por

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\} := \frac{1}{2} g^{kl} \left[ \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right]. \quad (36.109)$$

<sup>20</sup>Elwin Bruno Christoffel (1829–1900).

É importante observar que os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos índices inferiores:

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} k \\ j i \end{matrix} \right\} \quad (36.110)$$

para todos  $i, j, k$ . Isso se constata diretamente de (36.109). Com uso dessa notação, (36.104) fica

$$\Gamma^k{}_{ij} = \left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\} + K^k{}_{ij}, \quad (36.111)$$

onde  $K^k{}_{ij}$  são as componentes do tensor de contorção.

**E. 36.19** *Exercício.* Usando (36.61), conclua que os símbolos de Christoffel transformam-se por mudanças de coordenadas como

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\}' = \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x'^i} \frac{\partial x^c}{\partial x'^j} \left\{ \begin{matrix} a \\ b c \end{matrix} \right\} + \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial x'^i \partial x'^j}. \quad (36.112)$$

$\star$

### • Os símbolos de Christoffel e o determinante das componentes do tensor métrico

Vamos agora apresentar algumas identidades envolvendo os símbolos de Christoffel que serão usadas na Seção 36.2.4, página 1741 e alhures. Denotemos por  $\mathbf{g}$  o determinante da matriz dos  $g_{ij}$ . Como a matriz dos  $g^{ij}$  é a inversa da matriz dos  $g_{ij}$ , segue imediatamente da *fórmula de Jacobi* (9.36), página 372, que, em uma carta local de coordenadas,

$$\frac{1}{\mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x^i} = g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i}. \quad (36.113)$$

Pela definição (36.109) dos símbolos de Christoffel, temos

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ i k \end{matrix} \right\} := \frac{1}{2} g^{kl} \left[ \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right] = \frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i},$$

onde, de acordo com a convenção de Einstein,  $\left\{ \begin{matrix} k \\ i k \end{matrix} \right\}$  significa  $\sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} k \\ i k \end{matrix} \right\}$ . Assim, provamos que

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ i k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2\mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x^i} = \frac{\partial \ln \sqrt{|\mathbf{g}|}}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \frac{\partial \sqrt{|\mathbf{g}|}}{\partial x^i}. \quad (36.114)$$

Tem-se também

$$\begin{aligned} g^{ij} \left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} g^{kl} \left[ g^{ij} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + g^{ij} \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right] = g^{kl} g^{ij} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} g^{kl} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \\ &\stackrel{(36.113)}{=} g^{ij} g^{kl} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - g^{kl} \frac{1}{2\mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x^l} = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \underbrace{g^{kl} g_{il}}_{=\delta_i^k} \right) - \underbrace{g^{ij} g_{il}}_{=\delta_i^j} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^j} - g^{kl} \frac{1}{2\mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x^l} = -\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i} - g^{kl} \frac{1}{2\mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Logo, usando (36.114), estabelecemos que

$$g^{ij} \left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\} = -\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i} - g^{kl} \left\{ \begin{matrix} j \\ l j \end{matrix} \right\} \quad (36.115)$$

e também que

$$g^{ij} \left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{kl} \sqrt{|\mathbf{g}|}). \quad (36.116)$$

As propriedades (36.114), (36.115) e (36.116) são úteis e serão empregadas no que segue.



### 36.2.3.3 Conexões de Levi-Civita

Chegamos agora à mais importante classe de conexões afins. Uma conexão afim que seja métrica e simétrica é dita ser uma *conexão de Levi-Civita*<sup>21</sup>.

Recordemos que pelas observações do Exercício E. 36.17, página 1736, o tensor de torção associado a uma conexão métrica é nulo se e somente se o tensor de contorção o for.

Por ser simétrica, uma conexão de Levi-Civita possui torção nula (e, portanto, contorção nula) e, assim, por (36.98) ou (36.103), a fórmula de Koszul assume a forma

$$g(C, \nabla_B A) = \frac{1}{2} [A(g(B, C)) + B(g(C, A)) - C(g(A, B))] - \frac{1}{2} [g([A, B], C) + g([A, C], B) + g([B, C], A)]. \quad (36.117)$$

Por (36.100) ou (36.104), valerá para os coeficientes de uma conexão de Levi-Civita

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left[ \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right] = \left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\}. \quad (36.118)$$

Assim, os coeficientes de uma conexão de Levi-Civita coincidem com os símbolos de Christoffel. Da condição de simetria vale, naturalmente,  $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$  para todos  $i, j, k$ . Mais importante é notar que, segundo (36.118), os coeficientes de uma conexão de Levi-Civita são univocamente determinados pelo tensor métrico apenas. Esse fato é muitas vezes denominado *Teorema Fundamental da Geometria Riemanniana*.

É importante também observar que, como toda variedade diferenciável admite um tensor métrico Riemanniano infinitamente diferenciável (Proposição 36.1, página 1711), segue que toda variedade diferenciável possui também uma conexão de Levi-Civita para esse tensor métrico Riemanniano.

#### • Conexões de Riemann-Cartan e de Einstein-Cartan

Se  $(M, g)$  é uma variedade Riemanniana (Lorentziana), uma conexão  $\nabla$  compatível com  $g$  (ou seja, métrica) e dotada de torção não-nula é por vezes dita ser uma *conexão de Riemann-Cartan* (*conexão de Einstein-Cartan*). A variedade  $(M, g, \nabla)$  assim constituída é dita ser uma *variedade de Riemann-Cartan* (*variedade de Einstein-Cartan*). O estudo de variedades de Riemann-Cartan (de Einstein-Cartan) é denominado *Geometria de Riemann-Cartan* (*Geometria de Einstein-Cartan*).

A formulação Einsteiniana da Teoria da Relatividade Geral pressupõe uma conexão de Levi-Civita, compatível com um tensor métrico Lorentziano e, portanto, com torção nula. Há uma formulação alternativa, denominada *Teoria de Einstein-Cartan*, na qual considera-se uma conexão de Einstein-Cartan, i.e., compatível com um tensor métrico Lorentziano, mas com torção não-nula. A Teoria de Einstein-Cartan introduz efeitos gravitacionais devidos ao *spin* da matéria. Os efeitos físicos mensuráveis da presença de torção, porém, são muito pequenos para serem observáveis dentro dos padrões atuais de experimentação. Para alguns artigos de revisão sobre a torção na Teoria da Relatividade Geral, vide [142] ou [336].

Para algumas referências aos trabalhos originais de Cartan, vide nota-de-rodapé 11, página 1720.

### 36.2.3.4 Conexões de Weyl e a Origem das Transformações de Calibre

As conexões de Levi-Civita possuem uma generalização de alguma relevância, as chamadas *conexões de Weyl*. Parte dessa relevância é histórica, pois o estudo das conexões de Weyl deu origem à descoberta de uma importante classe de “transformações de simetria”: as transformações de calibre.

Os trabalhos de Weyl, notadamente o livro [348], cuja primeira edição data de 1918, foram também muito influentes no desenvolvimento geral da teoria das conexões. Esses trabalhos representam também a primeira tentativa de unificação geométrica da Gravitação com o Eletromagnetismo e uma das primeiras tentativas de estender Teoria da Relatividade Geral de Einstein.

#### • Conexões de Weyl

Uma conexão afim  $\nabla$  que seja simétrica (ou seja, com torção nula) é dita ser uma *conexão de Weyl*<sup>22</sup> se existir um

<sup>21</sup>Tullio Levi-Civita (1873–1941).

<sup>22</sup>Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955).

campo de covetores  $\phi \in \mathcal{X}^*(M)$  tal que

$$\nabla_A(g) = \langle \phi, A \rangle g \quad (36.119)$$

para todo  $A \in \mathcal{X}(M)$ , com  $g$  sendo o tensor métrico. Em coordenadas locais, escreve-se (36.119) como

$$g_{\mu\nu;\alpha} = \phi_\alpha g_{\mu\nu}. \quad (36.120)$$

Cada conexão de Weyl é, portanto, caracterizada por um campo  $\phi \in \mathcal{X}^*(M)$ . Por vezes, emprega-se a notação  $\nabla^{(g, \phi)}$  para caracterizar a dependência da conexão com  $g$  e com  $\phi$ . Como se vê, conexões de Levi-Civita correspondem ao caso particular onde  $\phi$  é identicamente nulo.

Uma expressão explícita para os coeficientes de uma conexão de Weyl em termos de  $g$  e  $\phi$  será obtida mais adiante. Vide (36.128)–(36.129).

Conexões de Weyl foram introduzidas por aquele autor em cerca de 1918<sup>23</sup> em uma proposta de unificação geométrica do Eletromagnetismo com a Teoria da Relatividade Geral, um sonho teórico perseguido por vários autores (Einstein inclusive), seguindo diversas ideias distintas. No caso de Weyl, a 1-forma definida por  $\phi$  deve ser entendida como o quadripotencial-vetor do Eletromagnetismo e a 2-forma  $F := d\phi$ , cujas componentes em uma carta local de coordenadas são  $F_{\mu\nu} = \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x^\nu}$ , deve ser identificada com o campo eletromagnético. Logo adiante elaboraremos mais a respeito.

O texto clássico a respeito dos trabalhos de Weyl sobre teorias com conexões de Weyl é [348]. Vide também a contribuição de Weyl a [92]. Para uma análise física detalhada da teoria de Weyl, vide [259].

Para uma análise de algumas antigas teorias de unificação do Eletromagnetismo com a Gravitação, vide [259] e [257], esse último texto possui, inclusive, uma cronologia das diversas teorias.

#### • A origem das transformações de calibre

Para tornar as observações que seguem mais transparentes, vamos denotar uma conexão de Weyl por  $\nabla^{(g, \phi)}$  de modo a deixar clara a dependência com o tensor métrico  $g$  e com  $\phi$ .

Tomemos  $\lambda \in C^\infty(M)$ . Considere-se a transformação  $g \mapsto g' := e^\lambda g$  (por vezes denominada uma *transformação conforme* do tensor métrico, ou *reescalonamento de Weyl*), acompanhada pela transformação  $\phi \mapsto \phi' := \phi - d\lambda$  (ou seja, em coordenadas locais,  $\phi_\alpha \mapsto \phi_\alpha - \frac{\partial \lambda}{\partial x^\alpha}$ ). Teremos,

$$\nabla_A^{(g, \phi)}(e^\lambda g) - \langle \phi - d\lambda, A \rangle(e^\lambda g) = e^\lambda \nabla_A^{(g, \phi)} g + \underline{A}(e^\lambda) \overline{g} - \langle \phi, A \rangle e^\lambda g - \underline{A}(\lambda) e^\lambda \overline{g} = e^\lambda \left( \nabla_A^{(g, \phi)} g - \langle \phi, A \rangle g \right) \stackrel{(36.119)}{=} 0.$$

Como, por definição,

$$0 = \nabla_A^{(g', \phi')}(g') - \langle \phi', A \rangle g' = \nabla_A^{(g', \phi')}(e^\lambda g) - \langle \phi - d\lambda, A \rangle(e^\lambda g),$$

concluímos que

$$\nabla_A^{(g', \phi')}(g') = \nabla_A^{(g, \phi)}(g').$$

Fazendo agora uso da expressão (36.78), essa igualdade implica que

$$g'_{jl} \Gamma^{ij}_{ik} + g'_{kj} \Gamma^{ij}_{il} = g'_{jl} \Gamma^j_{ik} + g'_{kj} \Gamma^j_{il},$$

onde  $\Gamma^{ij}_{ik}$  e  $\Gamma^j_{ik}$  denotam os coeficientes da conexão  $\nabla^{(g', \phi')}$  e  $\nabla^{(g, \phi)}$ , respectivamente. Definindo um tensor  $Q^a_{bc}$  por  $Q^a_{bc} := \Gamma^{ja}_{bc} - \Gamma^a_{bc}$  (trata-se de um tensor por ser a diferença entre duas conexões), obtemos

$$g'_{jl} Q^j_{ik} + g'_{kj} Q^j_{il} = 0 \quad \text{ou seja,} \quad Q_{lik} = -Q_{kil} \quad (36.121)$$

(aqui, o rebaixamento de índices é feito com o tensor métrico  $g'$ ). Além disso, vale também

$$Q^a_{bc} = Q^a_{cb} \quad \text{e, portanto,} \quad Q_{abc} = Q_{acb}, \quad (36.122)$$

pois ambas as conexões  $\nabla_A^{(g', \phi')}$  e  $\nabla_A^{(g, \phi)}$  são supostas simétricas.

Vamos agora provar que as relações (36.121) e (36.122) implicam  $Q^a_{bc} = 0$ . De fato,

$$Q_{lik} \stackrel{(36.121)}{=} -Q_{kil} \stackrel{(36.122)}{=} -Q_{kli} \stackrel{(36.121)}{=} Q_{ilk} \stackrel{(36.122)}{=} Q_{ikl} \stackrel{(36.121)}{=} -Q_{lki} \stackrel{(36.122)}{=} -Q_{lik},$$

<sup>23</sup>Uma primeira referência seria: H. Weyl, “Gravitation und Elektrizität”, Sitzungsberichte der Preussischen Akad. der Wissenschaften, **465**, (1918), reproduzido em traduzido para o Inglês em [92]. Para mais referências a trabalhos originais da teoria de Weyl, vide [259].

o que mostra que  $Q_{lik} = 0$  e estabelece que

$$\nabla^{(g', \phi')} = \nabla^{(g, \phi)}.$$

Esta identidade mostra que a conexão  $\nabla^{(g, \phi)}$  é invariante pela transformação

$$(g, \phi) \mapsto (g', \phi') := (e^\lambda g, \phi - d\lambda). \quad (36.123)$$

Pode-se dizer, portanto, que a transformação (36.123) é uma transformação de simetria no espaço das conexões de Weyl.

Essa transformação foi denominada por Weyl uma *transformação de calibre*<sup>24</sup>.

O nome “calibre” provém da ideia geométrica de que a transformação  $g \mapsto e^\lambda g$  corresponde a uma recalibração das medidas de distância, não alterando o tipo (luz, tempo ou espaço) dos quadrivetores e, portanto, não alterando as relações causais.

O fato de (36.123) envolver a transformação  $\phi \mapsto \phi - d\lambda$  reforça a ideia que as conexões de Weyl  $\nabla^{(g, \phi)}$  dependem não da 1-forma  $\phi$ , mas da 2-forma  $F = d\phi$ , que é invariante por essa transformação, pois  $d(d\lambda) = 0$  (vide Proposição 37.2, página 1800).

Apesar de admirado por Einstein, o trabalho de Weyl e sua proposta de usar conexões de Weyl para a unificação da Gravitação com o Eletromagnetismo acabou rejeitado por razões físicas. Einstein apontou que teorias com a conexões de Weyl violam o princípio de equivalência (essencialmente pois as curvas geodésicas dependem de  $\phi$ ). Uma análise física da teoria das conexões de Weyl encontra-se em [259].

Ainda assim, transformações similares às de calibre foram redescobertas no contexto da Física Quântica (na forma das transformações simultâneas  $\psi \mapsto e^{i\lambda}\psi$ ,  $\phi \mapsto \phi - d\lambda$ , com  $\psi$  sendo a função de onda de um sistema quântico) e desempenham nessa nova forma um papel central na Física posterior aos anos 60–70 do séc. XX, especialmente com o advento do Modelo Padrão da Física das Partículas Elementares. Aparentemente essa nova versão das transformações de calibre em sistemas quânticos foi criada pelo próprio Weyl na década de 1920.

#### • Obtendo explicitamente os coeficientes de uma conexão de Weyl

Para completar essa discussão vamos obter uma expressão explícita para os coeficientes  $\Gamma^i_{jk}$  de uma conexão de Weyl.

Escrevendo (36.120) com uso de (36.78), temos

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - g_{ji}\Gamma^j_{ik} - g_{kj}\Gamma^j_{il} = \phi_i g_{kl}, \quad (36.124)$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - g_{ji}\Gamma^j_{kl} - g_{lj}\Gamma^j_{ki} = \phi_k g_{li}, \quad (36.125)$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{jk}\Gamma^j_{li} - g_{ij}\Gamma^j_{lk} = \phi_l g_{ik}, \quad (36.126)$$

onde as duas linhas inferiores são obtidas da linha de cima por permutações cíclicas dos índices. Somando a última à penúltima e subtraindo a primeira linha, obtemos, usando também a simetria  $\Gamma^{a_{bc}} = \Gamma^{a_{cb}}$  da conexão,

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - 2g_{ji}\Gamma^j_{kl} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \phi_k g_{li} + \phi_l g_{ik} - \phi_i g_{kl}. \quad (36.127)$$

Portanto,

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{ij} \left( \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} \right) + \frac{1}{2} \left( \phi^i g_{kl} - \phi_k \delta_l^i - \phi_l \delta_k^i \right) \quad (36.128)$$

$$\stackrel{(36.109)}{=} \left\{ \begin{matrix} i \\ k l \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} \left( \phi^i g_{kl} - \phi_k \delta_l^i - \phi_l \delta_k^i \right). \quad (36.129)$$

**E. 36.20** *Exercício.* Complete os detalhes para a obtenção de (36.127), (36.128) e (36.129)! ✦

<sup>24</sup>No original, “Eichtransformation”, em Inglês “gauge transformation”.

**E. 36.21** *Exercício.* Usando diretamente (36.128), prove novamente o fato já estabelecido que  $\Gamma^i_{kl}$  é invariante pelas transformações de calibre (36.123). ✦

## 36.2.4 Gradiente, Divergente e Laplaciano

Vamos agora introduzir as noções muito úteis de *gradiente*, *divergente* e *Laplaciano* (ou *operador de Laplace-Beltrami*) no contexto de variedades Riemannianas ou Lorentzianas dotadas de uma conexão afim.

Fazemos notar que, para o caso de conexões de Levi-Civita, essas noções podem ser introduzidas com mais elegância e generalidade na teoria das formas diferenciais fazendo uso do chamado mapa dual de Hodge<sup>25</sup>. Esse é o assunto da Seção 37.2.3.1, página 1814. Lá indicaremos inclusive como definir o operador rotacional em variedades, o que não faremos aqui.

Em contraste, no presente contexto de conexões, podemos definir os operadores divergente e Laplaciano mesmo em variedades com torção, o que não ocorre no contexto de formas diferenciais.

O estudante deve notar que as definições de gradiente, divergente e Laplaciano que apresentaremos adiante são definições intrínsecas, isto é, independentes de cartas locais de coordenadas, ainda que nosso principal objetivo seja obter expressões para esses operadores em cartas locais de coordenadas.

#### • Gradiente

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana ou Lorentziana e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $M$  assumindo valores nos reais. Recordando, a diferencial de  $f$ , denotada por  $df$  é o elemento de  $\mathcal{X}^*(M)$  definido por<sup>26</sup>

$$\langle df, A \rangle = A(f),$$

para todo  $A \in \mathcal{X}(M)$ , onde  $A(f)$  foi definido em (36.52), página 1721. Assim,  $df$  é um campo de covetores tais que para todo  $A \in \mathcal{X}(M)$  vale  $\langle df, A \rangle \equiv df(A) = A^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$  em uma carta local (e, portanto, em todas, devido à invariância do lado direito), sendo  $A = A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

Definimos o *gradiente* de  $f$ , denotado por  $\text{grad}(f) \in \mathcal{X}(M)$ , por

$$\text{grad}(f) := \mathbf{g}^\sharp(df), \quad (36.130)$$

ou seja,  $\text{grad}(f)$  é definido como o campo vetorial definido em  $M$  tal que para todo  $p \in M$  e todo  $v \in \mathbb{T}_p M$  valha

$$g(\text{grad}(f), v)_p = (df)_p(v). \quad (36.131)$$

Em um sistema de coordenadas  $x^1, \dots, x^n$  definido por uma carta local em  $p$  em que  $v = v^k \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p$  (usando a convenção de soma de Einstein) e  $\text{grad}(f)_p = (\text{grad}(f)_p)^k \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p$ , teremos  $(df)_p(v) = \frac{\partial f}{\partial x^k}(p)v^k$  e  $g(\text{grad}(f), v)_p = (\text{grad}(f)_p)^i v^j g_{ij}(p)$ . Assim, (36.131) se escreve na forma

$$g(\text{grad}(f), v)_p = (\text{grad}(f)_p)^i v^j g_{ij}(p) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)v^j, \quad (36.132)$$

implicando que  $(\text{grad}(f)_p)^i g_{ij}(p) = \frac{\partial f}{\partial x^j} \Big|_p$  para todo  $j$  e, portanto, que

$$(\text{grad}(f)_p)^i = g^{ij}(p) \frac{\partial f}{\partial x^j} \Big|_p \quad (36.133)$$

para todo  $i$ . Assim,

$$\text{grad}(f)_p = \left( g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)_p \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p. \quad (36.134)$$

<sup>25</sup>William Vallance Douglas Hodge (1903–1975).

<sup>26</sup>A aplicação  $df$  foi também definida em (35.53), página 1673, como o *pushforward* de funções reais definidas em  $M$ , mais precisamente, como a aplicação diferencial associada a uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ .

Observe-se que, para um campo vetorial  $A \in \mathcal{X}(M)$ , (36.132) afirma que

$$g(\text{grad}(f), A) = A(f). \quad (36.135)$$

Por razões facilmente compreensíveis, o gradiente de  $f$  é frequentemente denotado por  $\nabla^i f$  ou por  $\partial^i f$ .

• **Divergente**

Seja  $\nabla$  uma conexão afim e  $A \in \mathcal{X}(M)$  e considere-se o tensor  $\mathcal{K}^A : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  definido por

$$\mathcal{K}^A(B) := \nabla_B A, \quad (36.136)$$

para  $B \in \mathcal{X}(M)$ . Definimos o *divergente* de  $A$  (segundo  $\nabla$ ) como sendo o traço da aplicação definida por  $\mathcal{K}^A$ :

$$\text{div}(A) := \text{Tr}(\mathcal{K}^A). \quad (36.137)$$

(A noção de traço encontra-se definida à página 1666). Pela considerações que fizemos quando da definição da noção de traço, concluímos que  $\text{div}(A)$  é invariante por mudança de coordenadas.

É interessante e útil expressarmos  $\mathcal{K}^A$  e  $\text{div}(A)$  em coordenadas locais. Escrevendo

$$\mathcal{K}^A \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = (\mathcal{K}^A)^k{}_i \frac{\partial}{\partial x^k}$$

teremos,

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}^A)^b{}_i \frac{\partial}{\partial x^b} &= \mathcal{K}^A \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A = \left( \frac{\partial A^k}{\partial x^i} + \Gamma^k{}_{ij} A^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ (\mathcal{K}^A)^k{}_i &= \frac{\partial A^k}{\partial x^i} + \Gamma^k{}_{ij} A^j \end{aligned}$$

e, por (35.33), teremos  $\text{div}(A) = \text{Tr}(\mathcal{K}^A) \stackrel{(35.33)}{=} (\mathcal{K}^A)^i{}_i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i{}_{ij} A^j = A^i{}_{;i} = (\nabla_i A)^i$ . Em particular, em coordenadas locais e para uma conexão afim geral, vemos que

$$\text{div}(A) = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i{}_{ij} A^j. \quad (36.138)$$

O estudante facilmente percebe-se que no caso da variedade  $\mathbb{R}^n$  com a conexão plana usual tem-se para coordenadas Cartesianas  $\text{div}(A) = \frac{\partial A^i}{\partial x^i}$ , que é a definição usual de divergente de um campo vetorial.

Por razões facilmente compreensíveis, o divergente de  $A$  é frequentemente denotado por  $\nabla_j A^j$  ou por  $A^j{}_{;j}$ .

Se  $\nabla$  for uma conexão métrica e simétrica (ou seja, uma conexão de Levi-Civita), então podemos usar (36.114) e escrever

$$\text{div}(A) = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i{}_{ij} A^j = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \left( \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^j} \right) A^j$$

e, portanto,

$$\text{div}(A) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( A^j \sqrt{|g|} \right). \quad (36.139)$$

• **Laplaciano (ou operador de Laplace-Beltrami)**

Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duas vezes diferenciável em  $M$  assumindo valores nos reais. Definimos o *Laplaciano* de  $f$ , denotado por  $\Delta(f)$ , por

$$\Delta(f) := \text{div}(\text{grad}(f)).$$

O Laplaciano mapeia funções infinitamente diferenciáveis de  $M$  em funções infinitamente diferenciáveis de  $M$  e, por isso, podemos falar de um *operador Laplaciano*. No contexto de Geometrias Riemannianas ou Lorentzianas e na Geometria de superfícies, o operador Laplaciano é frequentemente denominado *operador de Laplace<sup>27</sup>-Beltrami<sup>28</sup>*.

<sup>27</sup>Pierre-Simon Laplace (1749–1827).

<sup>28</sup>Eugenio Beltrami (1835–1899).

Em coordenadas locais e para uma conexão afim geral, teremos por (36.138) e (36.133),

$$\Delta(f) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) + \Gamma^i{}_{ij} g^{jk} \frac{\partial f}{\partial x^k}. \quad (36.140)$$

O estudante facilmente percebe-se que no caso da variedade  $\mathbb{R}^n$  com o tensor métrico Riemanniano usual e a conexão plana usual tem-se para coordenadas Cartesianas  $\Delta(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i2}}$ , que é a definição usual de Laplaciano de uma função escalar.

Por razões facilmente compreensíveis, o Laplaciano de  $f$  é frequentemente denotado por  $\nabla_i \nabla^i f$ .

Se  $\nabla$  for uma conexão métrica e simétrica (ou seja, uma conexão de Levi-Civita), então podemos usar (36.139), e escrever

$$\Delta(f) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sqrt{|g|} g^{jt} \frac{\partial f}{\partial x^t} \right). \quad (36.141)$$

Essa relação pode ser usada mesmo no caso plano de  $\mathbb{R}^n$  para expressar o Laplaciano em coordenadas gerais. Vide Seção 4.3, página 239.

**E. 36.22** *Exercício.* Usando (36.115), mostre que, no caso de uma conexão de Levi-Civita, (36.140) pode ser reescrita como

$$\Delta(f) = g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right). \quad (36.142)$$

✦

**E. 36.23** *Exercício.* Mostre que para uma conexão métrica geral tem-se

$$\text{div}(A) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( A^j \sqrt{|g|} \right) + K^i{}_k A^k, \quad (36.143)$$

$K$  sendo o tensor de contorção, e

$$\Delta(f) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sqrt{|g|} g^{jt} \frac{\partial f}{\partial x^t} \right) + K^i{}_k \frac{\partial f}{\partial x^k} \quad (36.144)$$

$$= g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) + K^i{}_k \frac{\partial f}{\partial x^k}. \quad (36.145)$$

*Sugestão:* Basta usar (36.111) e os resultados (36.139) e (36.141).

✦

\* \* \* \* \*

As relações (36.133), (36.139) e (36.141) são muito úteis, podendo mesmo ser usadas nas variedades planas  $\mathbb{R}^n$ , com o tensor métrico Riemanniano usual, para expressar o gradiente, o divergente e o Laplaciano em coordenadas outras que não as Cartesianas, tal como fizemos em diversos problemas do Capítulo 21, página 903, e alhures. Para tal, emprega-se as expressões de (36.28), que apresentam as componentes do tensor métrico Riemanniano (covariante e contravariante) em sistemas de coordenadas gerais em  $\mathbb{R}^n$ . Nesse caso, como comentamos no Exercício E. 36.2, página 1716, podemos usar o fato que  $g = (\det(J))^2$ , onde  $J$  é a matriz dada em (36.29). Vide também a Seção 4.3, página 239, para a forma explícita do operador Laplaciano em alguns sistemas de coordenadas de interesse em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

Em certos livros-texto de Física-Matemática, como [241] e [13], o estudante pode encontrar tais expressões para os operadores gradiente, divergente e Laplaciano em diversos sistemas de coordenadas de interesse físico em  $\mathbb{R}^2$  e em  $\mathbb{R}^3$ . Essas referências [241] e [13] obtêm (36.133), (36.139) e (36.141) por meios mais pedestres e com menos generalidade. Como já dissemos acima, as diversas expressões que encontramos podem ser obtidas com mais elegância e generalidade através do uso de formas diferenciais. Vide Seção 37.2.3.1, página 1814.

• **A conexão de Levi-Civita, o gradiente e um operador simétrico**

A proposição a seguir é relevante em diversos contextos. Iremos usá-la na análise da identidade de Raychaudhuri, na Seção 36.6.1, página 1779.

**Proposição 36.5** *Seja  $\nabla$  uma conexão de Levi-Civita e seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função ao menos duas vezes diferenciável. Seja  $\mathcal{L}^f : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  o tensor de tipo  $(1, 1)$  definido por*

$$\mathcal{L}^f(B) := \mathcal{X}^{\text{grad} f}(B) = \nabla_B \text{grad}(f),$$

com  $B \in \mathcal{X}(M)$ . Então,  $\mathcal{L}^f$  é um tensor  $g$ -simétrico (vide definição à página 1718), ou seja,  $(\mathcal{L}^f)^\dagger = \mathcal{L}^f$  e, pois vale

$$g(B, \mathcal{L}^f(C)) = g(\mathcal{L}^f(B), C) \tag{36.146}$$

para todos  $B, C \in \mathcal{X}(M)$ , ou seja,

$$g\left(B, \nabla_C \text{grad}(f)\right) = g\left(C, \nabla_B \text{grad}(f)\right).$$

As componentes de  $\mathcal{L}^f$  em um sistema local de coordenadas, são dadas por

$$(\mathcal{L}^f)_i^j = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( g^{ja} \frac{\partial f}{\partial x^a} \right) + \Gamma^l_{ij} g^{ja} \frac{\partial f}{\partial x^a}. \tag{36.147}$$

e (36.146) significa que  $(\mathcal{L}^f)^i_j = (\mathcal{L}^f)_j^i$ , ou ainda que  $(\mathcal{L}^f)_{ij} = (\mathcal{L}^f)_{ji}$ . □

**Prova.** De (36.117) segue facilmente que

$$g\left(C, \nabla_B A\right) - g\left(B, \nabla_C A\right) = B\left(g(C, A)\right) - C\left(g(B, A)\right) - g([B, C], A)$$

para todos  $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$  (verifique!). Tomando  $A = \text{grad}(f)$ , teremos por (36.135)

$$\begin{aligned} g\left(C, \nabla_B \text{grad}(f)\right) - g\left(B, \nabla_C \text{grad}(f)\right) &= B\left(g(C, \text{grad}(f))\right) - C\left(g(B, \text{grad}(f))\right) - g([B, C], \text{grad}(f)) \\ &\stackrel{(36.135)}{=} B(C(f)) - C(B(f)) - [B, C](f) = 0. \end{aligned}$$

Isso provou (36.146). Em um sistema local de coordenadas, escrevemos

$$\mathcal{L}^f(B) = (\mathcal{L}^f)_i^l B^l \frac{\partial}{\partial x^i} = (\mathcal{L}^f)_i^l B^i \frac{\partial}{\partial x^l} = B^i \nabla_i \text{grad}(f) = B^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \text{grad}(f)^l + \Gamma^l_{ij} \text{grad}(f)^j \right) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

de modo que

$$(\mathcal{L}^f)_i^l = \frac{\partial}{\partial x^i} \text{grad}(f)^l + \Gamma^l_{ij} \text{grad}(f)^j = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( g^{la} \frac{\partial f}{\partial x^a} \right) + \Gamma^l_{ij} g^{ja} \frac{\partial f}{\partial x^a}.$$

A relação de simetria (36.146) significa  $g_{ik} B^i (\mathcal{L}^f)^k_j C^j = g_{ij} (\mathcal{L}^f)_i^l B^l C^j$ , ou seja,  $g_{ik} (\mathcal{L}^f)^k_j = g_{lj} (\mathcal{L}^f)_i^l$ , que significa  $(\mathcal{L}^f)_{ij} = (\mathcal{L}^f)_{ji}$ , ou ainda,  $(\mathcal{L}^f)^i_j = (\mathcal{L}^f)_j^i$ . ■

Observe-se que  $\text{Tr}(\mathcal{L}^f) = (\mathcal{L}^f)_i^i = (\mathcal{L}^f)_i^i \stackrel{(36.140)}{=} \Delta(f)$ .

### 36.3 O Tensor de Curvatura

A noção de curvatura tem uma longa história na Geometria Diferencial, especialmente no estudo da geometria de curvas e superfícies, existindo em diversas variantes relacionadas entre si de maneiras diversas. Nesta seção iremos nos concentrar no estudo do chamado tensor de curvatura, de importância central nas Geometrias Riemanniana e Lorentziana, em particular, na Teoria da Relatividade Geral.

#### • O tensor de curvatura

Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  e dotada de uma conexão afim  $\nabla$ . Para  $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$  definamos

$$R(A, B) := \nabla_A \nabla_B - \nabla_B \nabla_A - \nabla_{[A, B]}, \tag{36.148}$$

como sendo a aplicação que a cada  $C \in \mathcal{X}(M)$  associa o elemento de  $\mathcal{X}(M)$  dado por

$$R(A, B)C := \nabla_A(\nabla_B C) - \nabla_B(\nabla_A C) - \nabla_{[A, B]}C. \tag{36.149}$$

Como veremos na Proposição 36.6, logo adiante, a aplicação  $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  dada por

$$\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \ni (A, B, C) \longmapsto R(A, B)C \in \mathcal{X}(M)$$

é linear nos três argumentos, definindo, portanto, um tensor de tipo  $(3, 1)$ , denominado *tensor de curvatura associado à conexão afim  $\nabla$* .

**Notas.** Antes de justificarmos a definição e explorarmos as propriedades do objeto acima definido (antes, por exemplo, de mostrarmos que se trata realmente de um tensor), fazemos notar que a definição adotada em (36.148) segue a convenção mais frequentemente encontrada em textos sobre Variedades Lorentzianas e sobre Relatividade Geral, enquanto que textos sobre Geometria Riemanniana (como [231]) adotam um sinal “-” global no lado direito, tomando  $R(A, B) := \nabla_B \nabla_A - \nabla_A \nabla_B - \nabla_{[B, A]}$ . Essa diferença de convenções se deve ao fato que, na Geometria Riemanniana, convencionou-se dizer que a esfera é uma superfície de curvatura positiva, enquanto que, na Teoria da Relatividade Geral, convencionou-se dizer que o espaço-tempo de de Sitter é de curvatura positiva. É relevante notar também que, como veremos em (36.175) (com uso de (36.109)), para conexões de Levi-Civita, o tensor de curvatura é par no tensor métrico (ou seja, é invariante pela troca  $g \rightarrow -g$ ) e, portanto, no caso Lorentziano ele não se altera se passarmos da signatura “+ - - -” para “- + + +”. ♣

A seguinte proposição lista as propriedades formais básicas de  $R$ :

**Proposição 36.6** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  dotada de uma conexão afim  $\nabla$  e seja o tensor de curvatura  $R$  associado à conexão  $\nabla$ , definido em (36.148). De acordo com as definições acima, valem as propriedades*

1. *Antissimetria:*

$$R(A, B) = -R(B, A), \tag{36.150}$$

2. *Linearidade:*

$$R(f_1 A_1 + f_2 A_2, B) = f_1 R(A_1, B) + f_2 R(A_2, B), \tag{36.151}$$

$$R(A, g_1 B_1 + g_2 B_2) = g_1 R(A, B_1) + g_2 R(A, B_2), \tag{36.152}$$

$$R(A, B)(h_1 C_1 + h_2 C_2) = h_1 R(A, B)C_1 + h_2 R(A, B)C_2, \tag{36.153}$$

para todos  $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1$  e  $C_2 \in \mathcal{X}(M)$  e todos  $f_1, f_2, g_1, g_2, h_1$  e  $h_2 \in C^\infty(M)$ . □

As propriedades (36.151)–(36.153) evidenciam o caráter tensorial de  $R$ . A demonstração da Proposição 36.6 é obtida por uma aplicação quase que mecânica das propriedades (36.53) e (36.54) da conexão afim  $\nabla$  e iremos apresentá-la no Apêndice 36.A.1, página 1789.

#### • A interpretação geométrica do tensor de curvatura

Se tivermos uma carta local de coordenadas e considerarmos os campos  $A = \frac{\partial}{\partial x^i}$  e  $B = \frac{\partial}{\partial x^j}$  definidos nessa carta, teremos, naturalmente,  $[A, B] = 0$  e, portanto,

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}. \tag{36.154}$$

Essa expressão permite-nos entender  $R$  informalmente, como sendo uma “medida” da não-comutatividade da derivação covariante em direções coordenadas diferentes. A Proposição 36.7, que segue, torna essa ideia um tanto mais precisa. Sua interpretação será feita após sua demonstração. Note-se também que é claro por (36.154) que  $R$  anula-se no caso da variedade Euclidiana  $\mathbb{R}^n$  (pois lá  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ). Assim,  $R$  indica informalmente o quanto uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  desvia-se em cada ponto da variedade Euclidiana  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposição 36.7** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  e seja  $\nabla$  uma conexão afim em  $M$ . Seja  $\mathcal{O} \ni (u, v) \mapsto S(u, v) \in M$  uma superfície bidimensional ao menos duas vezes diferenciável mergulhada em  $M$ , onde  $\mathcal{O}$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $V$  um campo vetorial diferenciável sobre a superfície  $S$  (de sorte que  $V(u, v) \in \mathbb{T}_{S(u, v)}M$  para cada  $(u, v) \in \mathcal{O}$ ). Então, vale*

$$\left( \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} - \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} \right) V(u, v) = R \left( \frac{\partial S}{\partial u}, \frac{\partial S}{\partial v} \right) V \Big|_{S(u, v)} \quad (36.155)$$

para todo  $(u, v) \in \mathcal{O}$ .  $\square$

**Prova.** (De [231]). Em uma carta local, cada ponto  $S(u, v)$  é descrito por coordenadas  $(x^1(u, v), \dots, x^n(u, v)) \in \mathbb{R}^n$ , sendo cada função  $x^i(u, v)$  ao menos duas vezes diferenciável. Para os vetores tangentes  $\frac{\partial S}{\partial u}$  e  $\frac{\partial S}{\partial v}$  à superfície teremos a representação em coordenadas locais  $\frac{\partial S}{\partial u} = \frac{\partial x^k}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{S(u, v)}$  e  $\frac{\partial S}{\partial v} = \frac{\partial x^j}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{S(u, v)}$ .

Seja  $X_i(u, v) := \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{S(u, v)} \in \mathbb{T}_{S(u, v)}M$ . Calculemos  $\frac{D}{\partial u} X_i(u, v)$ ,  $\frac{D}{\partial v} X_i(u, v)$  e as derivações covariantes segundas  $\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_i(u, v)$  e  $\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_i(u, v)$ . Por definição, temos

$$\frac{D}{\partial u} X_i(u, v) = \nabla_{\frac{\partial x^j}{\partial u} X_j(u, v)} X_i(u, v) = \frac{\partial x^j}{\partial u} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \Big|_{S(u, v)}.$$

Analogamente,

$$\frac{D}{\partial v} X_i(u, v) = \frac{\partial x^j}{\partial v} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \Big|_{S(u, v)}.$$

Assim,

$$\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_i(u, v) = \frac{\partial^2 x^j}{\partial v \partial u} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial x^j}{\partial u} \frac{\partial x^k}{\partial v} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) \Big|_{S(u, v)}$$

e, analogamente,

$$\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_i(u, v) = \frac{\partial^2 x^j}{\partial u \partial v} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial x^j}{\partial v} \frac{\partial x^k}{\partial u} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) \Big|_{S(u, v)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left( \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} - \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} \right) X_i(u, v) &= \frac{\partial x^j}{\partial v} \frac{\partial x^k}{\partial u} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) \Big|_{S(u, v)} \\ &\stackrel{(36.154)}{=} \frac{\partial x^k}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} R \left( \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{S(u, v)}. \end{aligned} \quad (36.156)$$

Calculemos agora  $\frac{D}{\partial v} V(u, v)$ ,  $\frac{D}{\partial u} V(u, v)$  e as derivações covariantes segundas  $\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} V(u, v)$  e  $\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} V(u, v)$ . Naturalmente, podemos escrever  $V(u, v) = v^i(u, v) X_i(u, v)$ . Teremos,

$$\frac{D}{\partial v} V(u, v) = \frac{D}{\partial u} \left( v^i(u, v) X_i(u, v) \right) = \frac{\partial v^i}{\partial u} X_i(u, v) + v^i \frac{D}{\partial u} X_i(u, v)$$

e

$$\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} V(u, v) = \frac{\partial^2 v^i}{\partial v \partial u} X_i(u, v) + \frac{\partial v^i}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_i(u, v) + \frac{\partial v^i}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_i(u, v) + v^i \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_i(u, v).$$

Analogamente,

$$\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} V(u, v) = \frac{\partial^2 v^i}{\partial u \partial v} X_i(u, v) + \frac{\partial v^i}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_i(u, v) + \frac{\partial v^i}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_i(u, v) + v^i \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_i(u, v).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left( \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} - \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} \right) V(u, v) &= v^i \left( \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} - \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} \right) X_i(u, v) \stackrel{(36.156)}{=} v^i \frac{\partial x^k}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} R \left( \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{S(u, v)} \\ &= R \left( \frac{\partial x^k}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial x^j}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \left( v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \Big|_{S(u, v)} = R \left( \frac{\partial S}{\partial u}, \frac{\partial S}{\partial v} \right) V \Big|_{S(u, v)}, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar, sendo que na penúltima igualdade usamos a linearidade de  $R$ .  $\blacksquare$

A Proposição 36.7 diz-nos o seguinte. Escolhamos  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  pequenos o suficiente e tomemos o vetor  $V(u, v)$  em um ponto  $S(u, v)$ . Transportemo-lo paralelamente ao ponto  $S(u, v + \epsilon_2)$  ao longo da curva  $u \mapsto S(u, v)$  e, em seguida, transportemos o vetor resultante ao ponto  $S(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)$  ao longo da curva  $u \mapsto S(u, v + \epsilon_2)$ . Resulta desses dois transportes um vetor  $V^1$  definido em  $\mathbb{T}_{S(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)}M$ , o qual não é necessariamente igual ao vetor  $V(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)$ , definido no mesmo ponto. A diferença entre esses dois vetores dividida por  $\epsilon_1 \epsilon_2$  é  $\frac{V^1 - V(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)}{\epsilon_1 \epsilon_2}$  e converge, no limite  $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ , a  $\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} V(u, v)$ .

Façamos agora o oposto: transportemos o vetor  $V(u, v)$  paralelamente ao ponto  $S(u + \epsilon_1, v)$  ao longo da curva  $u \mapsto S(u, v)$  e, em seguida, transportemos o vetor resultante ao ponto  $S(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)$  ao longo da curva  $v \mapsto S(u + \epsilon_1, v)$ . Resulta um vetor  $V^2$  definido em  $\mathbb{T}_{S(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)}M$ , o qual também não é necessariamente igual ao vetor  $V(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)$ , definido no mesmo ponto. A diferença entre esses dois vetores dividida por  $\epsilon_1 \epsilon_2$  é  $\frac{V^2 - V(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)}{\epsilon_1 \epsilon_2}$  e converge, no limite  $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$  a  $\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} V(u, v)$ .

Concluímos que para a diferença  $V^1 - V^2$  dos dois vetores de  $\mathbb{T}_{S(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)}M$  obtidos transportando  $V(u, v)$  paralelamente ao longo dos dois trajetos descritos acima que conectam  $S(u, v)$  a  $S(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)$  vale

$$\begin{aligned} \frac{V^1 - V^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} &= \left( \frac{V^1 - V(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)}{\epsilon_1 \epsilon_2} \right) - \left( \frac{V^2 - V(u + \epsilon_1, v + \epsilon_2)}{\epsilon_1 \epsilon_2} \right) \\ &\stackrel{\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0}{=} \left( \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} V - \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} V \right) (u, v) \stackrel{(36.155)}{=} R \left( \frac{\partial S}{\partial u}, \frac{\partial S}{\partial v} \right) V \Big|_{S(u, v)}. \end{aligned}$$

Podemos, portanto, afirmar que se  $A, B, V \in \mathbb{T}_pM$  são três vetores do espaço tangente  $\mathbb{T}_pM$ , então  $R(A, B)V$  determina a variação do vetor  $V$  quando de um transporte paralelo executado em uma curva fechada “infinitesimal” no retângulo definido pelos vetores tangentes  $A$  e  $B$ . Nesse sentido,  $R(A, B)$  é uma medida da “curvatura” local da variedade  $M$  ao redor do ponto  $p$ . Uma noção associada, a de curvatura seccional, será introduzida e discutida mais adiante.

### 36.3.1 As Identidades de Bianchi e Outras Propriedades

Passemos agora a uma classe de propriedades muito importantes do tensor de curvatura, obtidas por Voss<sup>29</sup>, Ricci<sup>30</sup> e Bianchi<sup>31</sup> em 1880, 1889 e 1902, respectivamente (apud [257]), denominadas *primeira identidade de Bianchi* (ou *identidade de Bianchi algébrica*) e *segunda identidade de Bianchi* (ou *identidade de Bianchi diferencial*). Vide [257] para um relato histórico mais detalhado que inclui a entrada dessas identidades na Teoria da Relatividade Geral.

No caso de conexões de Levi-Civita as identidades de Bianchi podem ser obtidas com uso do chamado Teorema de Noether<sup>32</sup>, mas seguiremos aqui uma abordagem mais direta e geral (para conexões afins gerais).

Na Seção 36.3.2, página 1749, apresentaremos a forma que as identidades de Bianchi assumem em coordenadas locais.

#### • A primeira identidade de Bianchi

<sup>29</sup>Aurel Edmund Voss (1845–1931)

<sup>30</sup>Gregorio Ricci Curbastro (1853–1925).

<sup>31</sup>Luigi Bianchi (1856–1928).

<sup>32</sup>Amalie Emmy Noether (1882–1935).

**Proposição 36.8 (Primeira Identidade de Bianchi)** *Seja  $\nabla$  uma conexão afim em uma variedade diferenciável  $M$ . Para todos  $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$  vale*

$$R(A, B)C + R(C, A)B + R(B, C)A = S(A, B, C), \quad (36.157)$$

onde

$$S(A, B, C) := \nabla_A(T(B, C)) + \nabla_B(T(C, A)) + \nabla_C(T(A, B)) + T(A, [B, C]) + T(B, [C, A]) + T(C, [A, B]), \quad (36.158)$$

sendo  $T$  o tensor de torção, dado em (36.82). Em particular, se  $\nabla$  for uma conexão simétrica, vale

$$R(A, B)C + R(C, A)B + R(B, C)A = 0. \quad (36.159)$$

□

As expressões (36.157) e (36.159) são ambas denominadas *identidade de Bianchi*. A expressão (36.159), válida no contexto de conexões simétricas, é particularmente relevante.

A prova da Proposição 36.8 encontra-se no Apêndice 36.A.2, página 1790.

**E. 36.24 Exercício.** A expressão  $S(A, B, C)$ , dada em (36.158), define um tensor. Que se trata de um tensor não é óbvio por (36.158), mas por (36.157). Mostre que o tensor  $S(A, B, C)$  pode ser reescrito como

$$S(A, B, C) = (\nabla_A T)(B, C) + (\nabla_B T)(C, A) + (\nabla_C T)(A, B) + T(T(A, B), C) + T(T(B, C), A) + T(T(C, A), B). \quad (36.160)$$

**Sugestão:** em (36.158), use as expressões para a derivação covariante de tensores e a definição do tensor de torção. ✦

Observe-se também que  $S(A, B, C)$  é invariante por permutações cíclicas:

$$S(A, B, C) = S(C, A, B) = S(B, C, A). \quad (36.161)$$

• **A segunda identidade de Bianchi**

A seguinte proposição contém uma asserção importante sobre o tensor de curvatura, a chamada *segunda identidade de Bianchi* ou *identidade de Bianchi diferencial*, e que, em particular, tem consequências sobre o chamado *tensor de Einstein*, de relevância para a Teoria da Relatividade Geral. Essa relevância será discutida adiante, na Seção 36.3.5 à página 1757.

**Proposição 36.9 (Segunda Identidade de Bianchi)** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável dotada de uma conexão afim  $\nabla$ . Então, vale*

$$\begin{aligned} & \nabla_A(R(B, C)D) + \nabla_B(R(C, A)D) + \nabla_C(R(A, B)D) \\ &= R(A, B)\nabla_C D + R(C, A)\nabla_B D + R(B, C)\nabla_A D + R([A, B], C)D + R([C, A], B)D + R([B, C], A)D. \end{aligned} \quad (36.162)$$

o que implica

$$\nabla_A(R)(B, C) + \nabla_B(R)(C, A) + \nabla_C(R)(A, B) = -R(T(A, B), C) - R(T(C, A), B) - R(T(B, C), A). \quad (36.163)$$

Caso  $\nabla$  seja uma conexão simétrica, (36.163) ensina-nos que

$$\nabla_A(R)(B, C) + \nabla_B(R)(C, A) + \nabla_C(R)(A, B) = 0. \quad (36.164)$$

Acima,  $A, B, C, D$  são elementos arbitrários de  $\mathcal{X}(M)$ . □

As expressões (36.162) e (36.163), e mesmo o caso particular (36.164), são denominadas *segunda identidade de Bianchi* ou *identidade de Bianchi diferencial*. A demonstração da Proposição 36.9 encontra-se no Apêndice 36.A.3, página 1791.

• **Outras propriedades do tensor de curvatura**

Na proposição que segue são listadas mais algumas propriedades úteis do tensor de curvatura, válidas no caso de conexões de Levi-Civita.

**Proposição 36.10** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana ou Lorentziana e seja  $\nabla$  uma conexão afim em  $M$ . Sejam  $A, B, C, D \in \mathcal{X}(M)$ .*

Para  $\nabla$  uma conexão afim arbitrária, vale

$$g(R(A, B)C, D) = -g(R(B, A)C, D), \quad (36.165)$$

o que segue diretamente de (36.150).

Se  $\nabla$  é compatível com  $g$ , vale

$$g(R(A, B)C, D) = -g(R(A, B)D, C). \quad (36.166)$$

Se  $\nabla$  é compatível com  $g$  e simétrica (ou seja, se  $\nabla$  for uma conexão de Levi-Civita), vale

$$g(R(A, B)C, D) = g(R(C, D)A, B) \quad (36.167)$$

e, por (36.150) e (36.166), tem-se também

$$g(R(A, B)C, D) = g(R(D, C)B, A). \quad (36.168)$$

No caso de  $\nabla$  ser compatível com  $g$ , mas não simétrica, em lugar de (36.167) tem-se

$$g(R(A, B)C, D) = g(R(C, D)A, B) + S(A, B, C, D), \quad (36.169)$$

onde

$$S(A, B, C, D) := \frac{1}{2} \left[ g(S(B, C, A), D) + g(S(B, C, D), A) + g(S(B, A, D), C) + g(S(C, A, D), B) \right],$$

o tensor  $S$  tendo sido definido em (36.158). □

A demonstração da Proposição 36.10 encontra-se no Apêndice 36.A.4, página 1793.

### 36.3.2 O Tensor de Curvatura em Coordenadas Locais

É importante, especialmente em aplicações como à Teoria da Relatividade Geral, expressar algumas das propriedades do tensor de curvatura que encontramos acima em termos de suas componentes em uma carta local de coordenadas.

Em uma carta local de coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$ , escrevamos

$$R \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = R^l{}_{kij} \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Os termos  $R^l{}_{ijk}$  são denominados *componentes do tensor de curvatura* ou *coeficientes do tensor de curvatura*. Naturalmente,

$$R^l{}_{kij} = \left\langle dx^l, R \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \quad (36.170)$$

e, caso a variedade em questão seja dotada de um tensor métrico Riemanniana ou Lorentziana  $g$ , teremos também

$$R^l{}_{kij} = g^{lm} g \left( \frac{\partial}{\partial x^m}, R \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \right).$$

É fácil constatar disso que  $g(R(A, B)C, D)$  pode ser escrito em termos das componentes do tensor de curvatura em coordenadas locais como

$$g(R(A, B)C, D) = R_{lkij} A^i B^j C^k D^l = R^l{}_{kij} A^i B^j C^k D_l. \quad (36.171)$$

**E. 36.25** *Exercício.* Usando (36.170), mostre que as componentes do tensor de curvatura transformam-se por mudanças de coordenadas como

$$R^l{}_{kij} = \frac{\partial x^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^k} \frac{\partial x^c}{\partial x^i} \frac{\partial x^d}{\partial x^j} R^a{}_{bcd}. \quad (36.172)$$

✦

Usando a expressão geral (36.170) podemos obter uma importante relação que expressa os coeficientes de  $R$  em termos dos coeficientes de uma conexão afim geral. Tem-se

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} &\stackrel{(36.154)}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \\ &\stackrel{(36.56)}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\Gamma^a{}_{jk} \frac{\partial}{\partial x^a}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\Gamma^a{}_{ik} \frac{\partial}{\partial x^a}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^a{}_{jk}\right) \frac{\partial}{\partial x^a} + \Gamma^a{}_{jk} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^a} - \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^a{}_{ik}\right) \frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma^a{}_{ik} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^a} \\ &\stackrel{(36.56)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^a{}_{jk}\right) \frac{\partial}{\partial x^a} + \Gamma^a{}_{jk} \Gamma^b{}_{ia} \frac{\partial}{\partial x^b} - \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^a{}_{ik}\right) \frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma^a{}_{ik} \Gamma^b{}_{ja} \frac{\partial}{\partial x^b} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^a{}_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^a{}_{ik}\right) \frac{\partial}{\partial x^a} + \left(\Gamma^a{}_{jk} \Gamma^b{}_{ia} - \Gamma^a{}_{ik} \Gamma^b{}_{ja}\right) \frac{\partial}{\partial x^b} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$R^l{}_{kij} = \frac{\partial \Gamma^l{}_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l{}_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^a{}_{jk} \Gamma^l{}_{ia} - \Gamma^a{}_{ik} \Gamma^l{}_{ja} \quad (36.173)$$

$$= (\Gamma^l{}_{jk})_{,i} - (\Gamma^l{}_{ik})_{,j} + \Gamma^a{}_{jk} \Gamma^l{}_{ia} - \Gamma^a{}_{ik} \Gamma^l{}_{ja}. \quad (36.174)$$

Essa expressão é deveras interessante, por exemplo, por tornar explícito o fato de as componentes do tensor de curvatura associado a uma conexão afim dependerem exclusivamente dos coeficientes da conexão afim. Usando (36.111) é possível expressar  $R^l{}_{kij}$  em termos dos símbolos de Christoffel e das componentes do tensor de contorção (e, portanto, das componentes do tensor de torção).

No caso especial de conexões de Levi-Civita, (36.118) permite expressar  $R^l{}_{kij}$  em termos dos coeficientes  $g_{ij}$  e  $g^{ij}$  do tensor métrico, de suas derivadas primeiras e segundas. O exercício a seguir explicita isso:

**E. 36.26** *Exercício.* Usando (36.118), mostre que no caso de conexões de Levi-Civita vale

$$R^l{}_{kij} = \frac{1}{2} g^{la} \left( \frac{\partial^2 g_{aj}}{\partial x^k \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{ai}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^k \partial x^i} \right) + g^{la} g_{np} \left( \left\{ \begin{matrix} n \\ ki \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p \\ aj \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} n \\ kj \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p \\ ai \end{matrix} \right\} \right), \quad (36.175)$$

com os símbolos de Christoffel dados em (36.109). O estudante deve notar de (36.175) e (36.109) que, para conexões de Levi-Civita, o tensor de curvatura é par no tensor métrico (ou seja, é invariante pela troca  $g \rightarrow -g$ ) e, portanto, no caso Lorentziano ele não se altera se passarmos da assinatura “+---” para “-+++”. ✦

**E. 36.27** *Exercício.* No caso de uma conexão afim geral, expresse  $R^l{}_{kij}$  em termos dos coeficientes do tensor métrico e das componentes do tensor de torção. ✦

Como mencionamos, podemos expressar algumas das propriedades do tensor métrico obtidas acima em termos de seus coeficientes.

1. Para uma conexão afim geral, a propriedade de antissimetria (36.150), ou (36.165) implica

$$R_{lkij} = -R_{lkji}, \quad \text{ou seja,} \quad R^l{}_{kij} = -R^l{}_{kji}. \quad (36.176)$$

2. Para conexões simétricas, a primeira identidade de Bianchi (36.159) implica

$$R^l{}_{kij} + R^l{}_{jki} + R^l{}_{ikj} = 0. \quad (36.177)$$

3. Para conexões simétricas, a segunda identidade de Bianchi (36.164) implica

$$R^l{}_{kij;m} + R^l{}_{kmi;j} + R^l{}_{kjm;i} = 0. \quad (36.178)$$

4. Para conexões compatíveis com o tensor métrico  $g$ , (36.166) implica

$$R_{lkij} = -R_{lkij}, \quad (36.179)$$

o que equivale a

$$R^l{}_{kij} = -R^l{}_{kij}. \quad (36.180)$$

5. Para conexões compatíveis com o tensor métrico  $g$  e simétricas (ou seja, para conexões de Levi-Civita), (36.168) implica

$$R_{lkij} = R_{ijlk}, \quad (36.181)$$

o que equivale a

$$R^l{}_{kij} = R^l{}_{ij k}. \quad (36.182)$$

**E. 36.28** *Exercício.* Verifique todas as afirmações acima. ✦

Naturalmente, no importante caso de conexões de Levi-Civita todas as relações (36.176)–(36.182) são válidas.

### 36.3.3 A Curvatura Seccional

A noção de curvatura seccional é intimamente ligada à de tensor de curvatura. Essa noção foi introduzida por Gauss e estendida por Riemann e é muitas vezes denominada *curvatura de Gauss*, ou *curvatura Gaussiana*, especialmente no estudo de superfícies em  $\mathbb{R}^n$ . No nosso contexto de variedades diferenciáveis vamos introduzi-la a partir do tensor de curvatura, mas no caso de superfícies seria mais natural fazê-lo de modo mais geométrico, tal como na sequência histórica na qual nasceu. Para essa última abordagem, vide, por exemplo, [230]. Para a conexão entre as duas abordagens, vide [231], especialmente o Capítulo VI dessa referência.

#### • Algumas propriedades de certas formas quárticas

Para nossa discussão sobre a curvatura seccional precisamos de algumas propriedade de certas formas quárticas em espaços vetoriais.

Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial real e seja  $F : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação que seja linear em cada um de seus argumentos (uma forma quártica) e que satisfaça

$$F(A, B, C, D) = -F(B, A, C, D), \quad (36.183)$$

$$F(A, B, C, D) = -F(A, B, D, C) \quad \text{e} \quad (36.184)$$

$$F(A, B, C, D) = F(C, D, A, B), \quad (36.185)$$

para todos  $A, B, C, D \in \mathcal{V}$ . O leitor há de perceber que as propriedades listadas em (36.183)–(36.185) são inspiradas em propriedades idênticas (vide (36.150), (36.166) e (36.167)) válidas para a forma quártica  $g(R(A, B)C, D)$  no caso de variedades semi-Riemannianas dotadas de uma conexão de Levi-Civita, o que será explorado mais adiante.

Defina-se agora  $H_F : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$H_F(A, B) := F(A, B, A, B).$$

As afirmações contidas no lema que segue serão úteis adiante.

**Lema 36.3** *Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial real e seja  $F$  uma função de  $\mathcal{V}^4$  em  $\mathbb{R}$ , linear em todos os argumentos, satisfazendo (36.183)–(36.185) e defina  $H_F(A, B) := F(A, B, A, B)$ , com  $A, B \in \mathcal{V}$ . Então, valem*

$$H_F(A, B) = H_F(B, A), \quad (36.186)$$

$$H_F(A, A) = 0, \quad (36.187)$$

$$H_F(A, A+B) = H_F(A, B), \quad (36.188)$$

$$H_F(\alpha A, \beta B) = \alpha^2 \beta^2 H_F(A, B), \quad (36.189)$$

$$H_F(\alpha_1 A + \beta_1 B, \alpha_2 A + \beta_2 B) = (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^2 H_F(A, B), \quad (36.190)$$

para todos  $A, B \in \mathcal{V}$  e todos  $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ . □

**Prova.** Exercício! ■

Na verdade, (36.190) implica as relações anteriores, mas preferimos listá-las todas para ressaltar sua relevância individual. A seguinte proposição importante é válida:

**Proposição 36.11** *Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial real e sejam  $F_1$  e  $F_2$  duas funções de  $\mathcal{V}^4$  em  $\mathbb{R}$ , lineares em todos os argumentos, satisfazendo (36.183)–(36.185), satisfazendo*

$$F_1(A, B, C, D) + F_1(C, A, B, D) + F_1(B, C, A, D) = F_2(A, B, C, D) + F_2(C, A, B, D) + F_2(B, C, A, D) \quad (36.191)$$

para todos  $A, B, C, D \in \mathcal{V}$  e tais que  $H_{F_1}(A, B) = H_{F_2}(A, B)$  para todos  $A, B \in \mathcal{V}$ , ou seja,

$$F_1(A, B, A, B) = F_2(A, B, A, B) \quad (36.192)$$

Então,  $F_1 = F_2$ , ou seja,

$$F_1(A, B, C, D) = F_2(A, B, C, D)$$

para todos  $A, B, C, D \in \mathcal{V}$ . □

A demonstração (extraída de [231]) da Proposição 36.11 é apresentada no Apêndice 36.A.5, página 1794. Da Proposição 36.11, acima, pode-se obter a seguinte consequência não-trivial:

**Proposição 36.12** *Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial real e seja  $F$  uma função de  $\mathcal{V}^4$  em  $\mathbb{R}$ , linear em todos os argumentos, satisfazendo (36.183)–(36.185) e satisfazendo*

$$F(A, B, C, D) + F(C, A, B, D) + F(B, C, A, D) = 0 \quad (36.193)$$

para todos  $A, B, C, D \in \mathcal{V}$ . Seja  $H_F(A, B) := F(A, B, A, B)$ . Então,

$$\begin{aligned} F(A, B, C, D) &:= \frac{1}{6} \left\{ \left[ H_F(A+C, B+D) - H_F(A+D, B+C) \right] \right. \\ &+ \left[ H_F(A, B+C) + H_F(B, A+D) + H_F(C, A+D) + H_F(D, B+C) \right. \\ &\quad \left. - H_F(A, B+D) - H_F(B, A+C) - H_F(C, B+D) - H_F(D, A+C) \right] \\ &\left. + \left[ H_F(A, D) + H_F(B, C) - H_F(B, D) - H_F(A, C) \right] \right\}. \quad (36.194) \end{aligned}$$

para todos  $A, B, C, D \in \mathcal{V}$ . □

**Prova.** A relação (36.194) pode ser demonstrada por verificação de duas maneiras distintas. A primeira, bastante pesada, consiste em expandir-se o lado direito e constatar que equivale ao esquerdo. A segunda demonstração é um pouco menos pesada e faz uso da Proposição 36.11. Vamos a ela.

Seja  $F_1(A, B, C, D) := F(A, B, C, D)$  e seja  $F_2(A, B, C, D)$  definida pela expressão do lado direito da igualdade em (36.194). Afirmamos que  $F_2$  também satisfaz (36.183)–(36.185) e que vale

$$F_2(A, B, C, D) + F_2(C, A, B, D) + F_2(B, C, A, D) = 0 \quad (36.195)$$

para todos  $A, B, C, D \in \mathcal{V}$ , o que, junto com (36.193), mostra que (36.191) é satisfeita. Além disso, vale (36.192). Todas essas afirmações podem ser verificadas diretamente da definição de  $F_2$  no lado direito de (36.194), tarefa que deixamos ao paciente e diligente leitor (use (36.186)–(36.190)!). A validade de (36.195), por exemplo, pode ser mais facilmente constatada verificando-se que essa identidade é separadamente satisfeita por cada um dos três termos entre colchetes [...] no lado direito de (36.194). Com isso, a Proposição 36.11 garante-nos a igualdade  $F(A, B, C, D) = F_2(A, B, C, D)$  para todos  $A, B, C, D \in \mathcal{V}$ . ■

#### • A curvatura seccional

No que segue,  $M$  é uma variedade diferenciável dotada de um tensor métrico  $g$  (Riemanniana ou Lorentziana) e de uma conexão de Levi-Civita  $\nabla$  (simétrica e compatível com  $g$ ) e  $p$  é um ponto arbitrário de  $M$ .

A aplicação

$$R(A, B, C, D) := g(R(A, B)C, D),$$

definida em  $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$  com valores em  $\mathbb{R}$  é linear em cada um dos argumentos e satisfaz (36.183)–(36.185) (devido a (36.150), (36.166) e (36.167)). O mesmo vale para a aplicação de  $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$  em  $\mathbb{R}$  definida por

$$G(A, B, C, D) := g(A, C)g(B, D) - g(A, D)g(B, C), \quad (36.196)$$

como é fácil constatar (faça-o!). Assim, para  $p \in M$ , definindo<sup>33</sup>

$$H_{p,R}(A, B) := R_p(A, B, A, B) = g(R(A, B)A, B)_p, \quad (36.197)$$

$$H_{p,G}(A, B) := G_p(A, B, A, B) = g(A, A)_p g(B, B)_p - (g(A, B)_p)^2, \quad (36.198)$$

teremos, por (36.190),

$$H_{p,R}(\alpha_1 A + \beta_1 B, \alpha_2 A + \beta_2 B) = (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^2 H_{p,R}(A, B),$$

$$H_{p,G}(\alpha_1 A + \beta_1 B, \alpha_2 A + \beta_2 B) = (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^2 H_{p,G}(A, B),$$

para todos  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ . Logo, se  $A$  e  $B \in T_p M$  são linearmente independentes, a aplicação  $K : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$K_p(A, B) := \frac{H_{p,R}(A, B)}{H_{p,G}(A, B)} = \frac{g(R(A, B)A, B)_p}{g(A, A)_p g(B, B)_p - (g(A, B)_p)^2}$$

satisfaz

$$K_p(\alpha_1 A + \beta_1 B, \alpha_2 A + \beta_2 B) = K_p(A, B),$$

para todos  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  (naturalmente, tais que  $\alpha_1 A + \beta_1 B$  e  $\alpha_2 A + \beta_2 B$  sejam linearmente independentes). Portanto, em  $K_p(A, B)$  podemos substituir  $A$  e  $B$  por quaisquer outros dois vetores linearmente independentes do

<sup>33</sup>Observe-se que, no caso Riemanniano,  $H_{p,G}(A, B) \geq 0$ , devido à desigualdade de Cauchy-Schwarz (3.11), página 202. No caso da variedade Euclidiana  $\mathbb{R}^3$ , observe-se também que  $H_{p,G}(A, B)$  é idêntico a  $\|A \wedge B\|^2$ , o quadrado do módulo do produto vetorial de  $A$  e  $B$ . Para ver isso, lembre-se que no caso Euclidiano  $|g(A, B)| = \|A\| \|B\| \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre  $A$  e  $B$  e, portanto,  $H_{p,G}(A, B) = \|A\|^2 \|B\|^2 (\sin \theta)^2 = \|A \wedge B\|^2$ .



subespaço gerado por  $A_p$  e  $B_p$ . Isso significa que  $K_p(A, B)$  depende apenas do subespaço gerado por  $A_p$  e  $B_p$  em  $T_pM$ . Assim, dado um subespaço bidimensional  $\sigma$  de  $T_pM$ , definimos

$$K_p(\sigma) := K_p(A, B),$$

onde  $A, B$  são dois vetores linearmente independentes quaisquer de  $\sigma$ . A expressão  $K_p(\sigma)$  é denominada *curvatura seccional* de  $M$  em  $p$  em relação ao plano  $\sigma$  e coincide com a noção de curvatura Gaussiana da Geometria de Superfícies. Um fato importante é que o tensor de curvatura é determinado em  $p$  por curvaturas seccionais em  $p$ . Essa afirmação é o conteúdo do seguinte corolário da Proposição 36.12:

**Corolário 36.1** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável dotada de um tensor métrico  $g$  (Riemanniana ou Lorentziana) e de uma conexão de Levi-Civita  $\nabla$  (simétrica e compatível com  $g$ ). Então, em cada ponto  $p \in M$ , o tensor de curvatura  $R$  associado a  $\nabla$  é determinado por curvaturas seccionais em  $p$ . Mais especificamente, vale a seguinte expressão formidável:*

$$\begin{aligned} g(R(A, B)C, D)_p &= \frac{1}{6} \left\{ H_{p,R}(A+C, B+D) - H_{p,R}(A+D, B+C) \right. \\ &\quad + H_{p,R}(A, B+C) + H_{p,R}(B, A+D) + H_{p,R}(C, A+D) + H_{p,R}(D, B+C) \\ &\quad - H_{p,R}(A, B+D) - H_{p,R}(B, A+C) - H_{p,R}(C, B+D) - H_{p,R}(D, A+C) \\ &\quad \left. + H_{p,R}(A, D) + H_{p,R}(B, C) - H_{p,R}(B, D) - H_{p,R}(A, C) \right\}, \end{aligned} \quad (36.199)$$

com  $H_{p,R}$  definido em (36.197). Como  $H_{p,R}(A, B) = H_{p,G}(A, B)K_p(A, B)$ , com  $H_{p,G}$  definido em (36.198) e  $K_p$  sendo a curvatura seccional, vemos que  $g(R(A, B)C, D)_p$  pode ser expresso como uma combinação linear de curvaturas seccionais em  $p$  com coeficientes proporcionais às  $H_{p,G}$ 's.  $\square$

**Prova.** Adotando  $\mathcal{V} = T_pM$  e  $F(A, B, C, D) = R_p(A, B, C, D) = g(R(A, B)C, D)_p$ , as condições da Proposição 36.12 são satisfeitas ((36.193), por exemplo, segue da primeira identidade de Bianchi (36.159)). Assim, (36.194) conduz a (36.199) e daí às demais afirmações.  $\blacksquare$

### 36.3.4 O Tensor de Ricci e a Curvatura Escalar

Seja  $M$  uma variedade diferenciável dotada de um tensor métrico  $g$  (Riemanniano ou Lorentziano) e de uma conexão afim  $\nabla$  e seja  $R$  o correspondente tensor de curvatura. Seja  $p$  um ponto arbitrário de  $M$ .

Como discutido à página 1715, tomemos  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , uma base de vetores em  $T_pM$ , e  $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ , sua base dual de covetores em  $T_p^*M$ , de sorte que para o pareamento de  $\mathbf{e}^i$  e  $\mathbf{e}_j$ , valha  $\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle_p = \delta_j^i$ . Sejam também as bases de vetores  $\{\mathbf{e}^{1\sharp}, \dots, \mathbf{e}^{n\sharp}\}$  em  $T_pM$  e de covetores duais  $\{\mathbf{e}_{1\sharp}, \dots, \mathbf{e}_{n\sharp}\}$ , definidos em (36.23), de sorte que tenhamos (36.26).

Fixados  $B, C \in \mathcal{X}(M)$  a aplicação  $\mathcal{X}(M) \ni A \mapsto R(A, B)C$  define uma aplicação linear de  $\mathcal{X}(M)$  em si mesmo, a qual denotamos por  $\mathcal{R}_{C, BA}$ . Definimos

$$\text{Ric}(C, B) := \text{Tr}(\mathcal{R}_{C, B}). \quad (36.200)$$

É claro que  $\text{Ric}$  define um tensor de tipo  $(0, 2)$ , denominado *tensor de Ricci*<sup>34</sup>. Observe-se que vale a igualdade

$$\text{Ric}(C, B) := \text{Tr}(\mathcal{R}_{C, B}) = \langle \mathbf{e}^l, \mathcal{R}_{C, B} \mathbf{e}_l \rangle_p = \langle \mathbf{e}^l, R(\mathbf{e}_l, B)C \rangle_p.$$

#### • Simetria do tensor de Ricci

No caso de  $\nabla$  ser uma conexão de Levi-Civita para o tensor métrico  $g$ , o tensor de Ricci possui uma propriedade de simetria:

$$\text{Ric}(C, B) = \text{Ric}(B, C) \quad (36.201)$$

<sup>34</sup>Gregorio Ricci Curbastro (1853–1925).

para todos  $B, C \in \mathcal{X}(M)$  pois, pela definição de traço (vide (35.31)),

$$\begin{aligned} \text{Ric}(C, B) &:= \text{Tr}(\mathcal{R}_{C, B}) = \langle \mathbf{e}^l, \mathcal{R}_{C, B} \mathbf{e}_l \rangle_p \stackrel{(36.21)}{=} g(\mathbf{e}^{l\sharp}, \mathcal{R}_{C, B} \mathbf{e}_l)_p = g(\mathcal{R}_{C, B} \mathbf{e}_l, \mathbf{e}^{l\sharp})_p \\ &= g(R(\mathbf{e}_l, B)C, \mathbf{e}^{l\sharp})_p \stackrel{(36.168)}{=} g(R(\mathbf{e}^{l\sharp}, C)B, \mathbf{e}_l)_p = g(\mathcal{R}_{B, C} \mathbf{e}^{l\sharp}, \mathbf{e}_l)_p = g(\mathbf{e}_l, \mathcal{R}_{B, C} \mathbf{e}^{l\sharp})_p \\ &\stackrel{(36.15)}{=} \langle \mathbf{e}_{l\sharp}, \mathcal{R}_{B, C} \mathbf{e}^{l\sharp} \rangle_p = \text{Tr}(\mathcal{R}_{B, C}) = \text{Ric}(B, C). \end{aligned}$$

#### • O tensor de Ricci em coordenadas locais

O caráter tensorial de  $\text{Ric}$  talvez fique mais evidente se expressarmos-lo em uma carta local de coordenadas. Escrevendo  $\mathcal{R}_{C, BA} = (\mathcal{R}_{C, BA})^l_{\partial x^l} = (\mathcal{R}_{C, B})^l_i A^i \frac{\partial}{\partial x^l}$ , teremos

$$(\mathcal{R}_{C, B})^l_i A^i \frac{\partial}{\partial x^l} = R^l_{kij} A^i B^j C^k \frac{\partial}{\partial x^l}$$

e, portanto,

$$(\mathcal{R}_{C, B})^l_i = R^l_{kij} B^j C^k.$$

Logo, pela definição de traço,

$$\text{Ric}(C, B) = (\mathcal{R}_{C, B})^l_l = R^l_{klj} B^j C^k.$$

As componentes do tensor de Ricci são comumente denotadas por  $R_{ij}$ . Assim, escrevendo

$$\text{Ric}(C, B) = R_{ij} C^i B^j,$$

ou seja, com

$$\text{Ric} = R_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

teremos  $R_{ij} C^i B^j = R^l_{ilj} B^j C^i$  e, portanto

$$R_{ij} = R^l_{ilj}, \quad (36.202)$$

o que expressa as componentes de  $\text{Ric}$  em termos das componentes do tensor de curvatura. De (36.202) e de (36.172) é fácil mostrar (faça-o!) que as componentes do tensor de Ricci transformam-se por mudanças de coordenadas de acordo com a seguinte expressão:

$$R'_{ij} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^i} \frac{\partial x^b}{\partial x'^j} R_{ab}. \quad (36.203)$$

Se  $\nabla$  for uma conexão de Levi-Civita para o tensor métrico  $g$ , então (36.182) implica que

$$R^l_{klj} = R_{ij}{}^l{}_k = R^l_{jlk},$$

ou seja, vale para as componentes do tensor de Ricci a propriedade de simetria

$$R_{ij} = R_{ji}, \quad (36.204)$$

refletindo (36.201). De (36.173) e (36.175) obtém-se no caso de conexões de Levi-Civita as fórmulas mais explícitas para as componentes do tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{\partial \Gamma^l_{ji}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{li}}{\partial x^j} + \Gamma^a_{ji} \Gamma^l_{la} - \Gamma^a_{li} \Gamma^l_{ja} \\ &= \frac{1}{2} g^{la} \left( \frac{\partial^2 g_{aj}}{\partial x^i \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^a \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{al}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^a \partial x^l} \right) + g^{la} g_{np} \left( \left\{ \begin{matrix} n \\ il \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p \\ aj \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} n \\ ij \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p \\ al \end{matrix} \right\} \right). \end{aligned} \quad (36.206)$$

É interessante observar que a propriedade de simetria (36.204) não é evidente em (36.205) (o que não seria de se esperar, pois (36.205) é válida mesmo para o caso de conexões que não sejam de Levi-Civita), mas pode ser observada em (36.206) se renomearmos convenientemente alguns índices mudos. Faça-o!

• **A curvatura de Ricci**

No caso Riemanniano, se  $C$  é um vetor não-nulo em  $T_pM$ , a expressão

$$\mathcal{R}ic(C)_p := \frac{1}{m-1} \frac{\mathcal{R}ic(C, C)_p}{g(C, C)_p} = \frac{1}{m-1} \frac{\langle \mathbf{e}^l, R(\mathbf{e}_l, C)C \rangle_p}{g(C, C)_p}$$

é por vezes denominada *curvatura de Ricci* na direção  $C$ . A escolha do fator  $m-1$  ( $m$  sendo a dimensão de  $M$ ) deve-se ao fato que  $R(\mathbf{e}_l, C)C$  será nula caso o vetor  $\mathbf{e}_l$  seja escolhido na direção de  $C$  (pela antissimetria do tensor de curvatura  $R$ ). Assim, na expressão  $\langle \mathbf{e}^l, R(\mathbf{e}_l, C)C \rangle_p$  são efetivamente somados  $m-1$  termos. Com isso,  $\mathcal{R}ic(C)$  representa uma espécie de curvatura média na direção definida por  $C$ .

Devido à simetria do tensor de Ricci, podemos sempre escrever, para todos  $A, B \in \mathcal{X}(M)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}ic(A, B) &= \frac{1}{4} [\mathcal{R}ic(A+B, A+B) - \mathcal{R}ic(A-B, A-B)] \\ &= \frac{m-1}{4} [\mathcal{R}ic(A+B)g(A+B, A+B) - \mathcal{R}ic(A-B)g(A-B, A-B)], \end{aligned}$$

o que mostra que o tensor de Ricci pode ser determinado a partir da curvatura de Ricci. Por ser obtido a partir do tensor de curvatura, o tensor de Ricci é também determinado pela curvatura seccional.

• **A curvatura escalar**

Com o tensor de Ricci podemos definir um tensor  $\mathcal{R}ic^\sharp : \mathcal{X}^*(M) \times \mathcal{X}(M)$  por  $\mathcal{R}ic^\sharp(A, B) := \mathcal{R}ic(A^\sharp, B)$ , com  $A \in \mathcal{X}^*(M)$  e  $B \in \mathcal{X}(M)$ . Se em uma carta local escrevermos  $A = A_i dx^i$  e  $B = B^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ , teremos  $\mathcal{R}ic^\sharp(A, B) = R_{ij} g^{ik} A_k B^j = R^k_j A_k B^j$ , como facilmente se constata.

Considere-se aplicação  $\mathcal{R} : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  que a cada  $B \in \mathcal{X}(M)$  associa  $\mathcal{R}(B) \in \mathcal{X}(M)$  de sorte que para todo  $A \in \mathcal{X}^*(M)$  valha  $\langle A, \mathcal{R}(B) \rangle = \mathcal{R}ic^\sharp(A, B)$ . Pelo exposto acima, vale em uma carta local  $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(B)^i \frac{\partial}{\partial x^i} = R^i_j B^j \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Verifique! O traço de  $\mathcal{R}$ , que denotaremos por  $\mathcal{R}$ , será invariante por mudanças locais de coordenadas e dado por

$$\mathcal{R} := \text{Tr}(\mathcal{R}) = \langle \mathbf{e}^i, \mathcal{R}(\mathbf{e}_i) \rangle = \left\langle dx^i, \mathcal{R} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right\rangle = R^i_i,$$

sendo que acima usamos (35.32) e (35.33). A grandeza  $\mathcal{R}$  é denominada *curvatura escalar*, ou *escalar de curvatura*, associada ao tensor de Ricci (e ao tensor de curvatura). Note-se que podemos escrever  $\mathcal{R}$  diretamente em termos das componentes do tensor de curvatura pois, por (36.202),

$$\mathcal{R} = R^i_i = R^j_{ji}.$$

A curvatura escalar desempenha um papel na Teoria da Relatividade Geral.

• **Um pouco sobre espaços de curvatura constante**

Seja uma variedade  $M$  dotada de um tensor métrico  $g$  e de uma conexão de Levi-Civita  $\nabla$ . A tripla  $(M, g, \nabla)$  é dita ser um *espaço de curvatura constante* se sua curvatura seccional  $K_p(\sigma)$  for independente do plano  $\sigma$  em todo  $p \in M$ , ou seja, se tivermos  $K_p(\sigma) = K_p$ , uma função de  $p$  somente.

De acordo com (36.199), temos para espaços de curvatura constante

$$\begin{aligned} g(R(A, B)C, D)_p &= K_p \frac{1}{6} \left\{ H_{p,G}(A+C, B+D) - H_{p,G}(A+D, B+C) \right. \\ &\quad + H_{p,G}(A, B+C) + H_{p,G}(B, A+D) + H_{p,G}(C, A+D) + H_{p,G}(D, B+C) \\ &\quad - H_{p,G}(A, B+D) - H_{p,G}(B, A+C) - H_{p,G}(C, B+D) - H_{p,G}(D, A+C) \\ &\quad \left. + H_{p,G}(A, D) + H_{p,G}(B, C) - H_{p,G}(B, D) - H_{p,G}(A, C) \right\}. \end{aligned} \quad (36.207)$$

Por (36.194), o fator que multiplica  $K_p$  acima é igual a  $G(A, B, C, D)$  (definido em (36.196), página 1753). Daí, temos que em espaços de curvatura constante vale

$$g(R(A, B)C, D)_p = K_p G(A, B, C, D)_p = K_p (g(A, C)_p g(B, D)_p - g(A, D)_p g(B, C)_p). \quad (36.208)$$

Isolando-se  $D$  do lado direito, temos

$$g(R(A, B)C, D) = K_p G(A, B, C, D) = K_p g(g(A, C)B - g(B, C)A, D),$$

e disso concluímos que

$$R(A, B)C = g(A, C)B - g(B, C)A. \quad (36.209)$$

Portanto,  $R(A, B)$  é o operador

$$R(A, B)* = g(A, *)B - g(B, *)A. \quad (36.210)$$

onde  $*$  indica a posição do operando de  $\mathcal{X}(M)$ .

Em coordenadas locais, (36.208) se escreve  $R_{lkij} A^i B^j C^k D^l = K_p (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) A^i B^j C^k D^l$  e disso concluímos imediatamente que em cada ponto  $p \in M$  vale

$$R_{lkij} = K_p (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}). \quad (36.211)$$

Para as componentes do tensor de Ricci, temos

$$R_{ij} = R^l_{lij} = (m-1) K_p g_{ij} \quad \text{e, portanto,} \quad \mathcal{R}ic_p = (m-1) K_p g_p, \quad (36.212)$$

sendo  $m$  a dimensão de  $M$ .

**E. 36.29** *Exercício.* Verifique! ✦

Disso segue imediatamente também que o escalar de curvatura é

$$\mathcal{R}_p = m(m-1) K_p. \quad (36.213)$$

Para um estudo mais aprofundado de espaços de curvatura constante no caso Riemanniano, vide, *e.g.*, [231].

### 36.3.5 Comentário Sobre a Segunda Identidade de Bianchi e as Equações de Einstein

As equações fundamentais da Teoria da Relatividade Geral são as chamadas *Equações de Einstein*, que escreveremos logo adiante, e que foram apresentadas pela primeira vez em 25 de novembro de 1915 em seção da Academia Prussiana de Ciências, em Berlim. Como as mesmas representam uma *Lei da Natureza*, elas não podem, estritamente falando, ser “deduzidas”. Podem ser apenas propostas para que se possa testar sua veracidade empiricamente. No entanto, é possível apresentar alguns argumentos de plausibilidade para as mesmas e é isso o que pretendemos aqui, fazendo uso da segunda identidade de Bianchi para conexões de Levi-Civita, que expressamos em coordenadas locais em (36.178), página 1751. O raciocínio que apresentaremos não é o original de Einstein, o qual, segundo [257], não conhecia ainda, em 1915, as identidades de Bianchi<sup>35</sup>. Sobre os passos de Einstein falaremos um pouco adiante.

Segundo [257] a relevância da segunda identidade de Bianchi para as equações de Einstein foi esclarecida pela primeira vez por A. E. Harward<sup>36</sup> em 1922, cerca de sete anos após a apresentação final de Einstein das equações que levam seu nome.

Consideremos o caso de conexões de Levi-Civita e consideremos a segunda identidade de Bianchi escrita em forma local, ou seja, na forma expressa (36.178), página 1751:  $R^l_{kij;m} + R^l_{kmi;j} + R^l_{kjm;i} = 0$ . Contraíndo-se os índices  $l$  e  $i$ , essa identidade fica<sup>37</sup>

$$0 = R^l_{klj;m} + R^l_{kml;j} + R^l_{kjm;l} = R^l_{klj;m} - R^l_{klmj} + R^l_{kjm;l}, \quad (36.214)$$

<sup>35</sup>A mesma referência [257] especula que nem mesmo Hilbert, com o qual Einstein manteve uma prolífica correspondência no período da formulação final da Teoria da Relatividade Geral (na segunda metade de 1915), conhecia as identidades de Bianchi.

<sup>36</sup>A. E. Harward. Phil. Mag. 44, 380 (1922).

<sup>37</sup>A contração de índices sob a derivação covariante é permitida pois a conexão é supostamente métrica (de Levi-Civita).

onde na segunda igualdade usamos a antissimetria do tensor de curvatura expressa em (36.176), ou seja  $R^l_{kjm;l} = R^l_{klm;j} - R^l_{klj;m}$ . Como  $R^l_{klm} = R_{km} + R^l_{klj}$ , isso fica

$$R^l_{kjm;l} = R_{km;j} - R_{kj;m}. \tag{36.215}$$

As identidades (36.214) e (36.215) são por vezes denominadas *identidades de Bianchi reduzidas* ou *identidades de Bianchi contraídas*.

Contraíndo-se agora os índices  $k$  e  $m$  em (36.215), obtemos  $R^l_{jk;l} = R^k_{k;j} - R^k_{j;k}$ . Agora,  $R^k_k = \mathcal{R}$ , o escalar de curvatura, e  $R^l_{jk;l} \stackrel{(36.179)}{=} -R^{kl}_{jk;l} \stackrel{(36.176)}{=} R^{kl}_{kj;l} = R^l_{j;l}$ . Com isso, obtemos  $R^l_{j;l} = \mathcal{R}_{;j} - R^k_{j;k}$ , ou seja,  $2R^l_{j;l} - \mathcal{R}_{;j} = 0$ .

Como  $g_{ab;c} = 0$  para quaisquer índices  $abc$  (pois a conexão é de Levi-Civita), segue disso a seguinte cadeia de igualdades:

$$\begin{aligned} 2R^l_{j;l} = \mathcal{R}_{;j} &\implies 2g^{kj}R^l_{j;l} = g^{kj}\mathcal{R}_{;j} &\implies 2g^{kj}R^l_{j;l} = g^{kl}\mathcal{R}_{;l} &\implies 2\left(g^{kj}R^l_{j;l}\right)_{;l} = \left(g^{kl}\mathcal{R}\right)_{;l} \\ & & &\implies \left(R^{kl} - \frac{1}{2}g^{kl}\mathcal{R}\right)_{;l} = 0. \end{aligned} \tag{36.216}$$

Define-se o *tensor de Einstein*<sup>38</sup> por

$$G := \text{Ric} - \frac{1}{2}g\mathcal{R}, \quad \text{ou seja escrevendo,} \quad G = G_{ij}dx^i \otimes dx^j, \quad \text{temos} \quad G_{ij} := R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{R}. \tag{36.217}$$

Para uma conexão de Levi-Civita vale  $R_{ij} = R_{ji}$ , e, portanto, o tensor de Einstein é igualmente simétrico:  $G_{ij} = G_{ji}$ . A última igualdade em (36.216) afirma que

$$G^{kl}_{;l} = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \nabla_l G^{lk} = 0. \tag{36.218}$$

Essa igualdade mostra que  $G$  satisfaz uma lei de conservação covariante de natureza puramente geométrica.

Essa identidade pode ser tomada como ponto de partida para as equações de Einstein da relatividade geral. Como o tensor de energia-momento  $T^{lk}$  da matéria, por razões físicas, também satisfaz uma lei de conservação covariante  $T^{lk}_{;l} = 0$ , é sugestivo pensar que ambos deveriam ser proporcionais:  $G^{lk} = \kappa T^{lk}$ , onde  $\kappa$  seria uma constante universal<sup>39</sup>.

Analisando o limite de campos gravitacionais fracos, quando dever-se-ia esperar que as equações  $G^{lk} = \kappa T^{lk}$  reduzem-se à equação de Poisson  $\Delta\phi = 4\pi G\rho$  para o potencial gravitacional  $\phi$ , onde  $G = 6,67408(31) \times 10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2}$  é a *constante de gravitação universal* e  $\rho$  a densidade de massa, pode-se concluir que  $\kappa = 8\pi G/c^4$ . Assim surgem as *equações de Einstein* da Teoria da Relatividade Geral, de importância central na física gravitacional:

$$G^{lk} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{lk}, \quad \text{ou seja,} \quad R^{lk} - \frac{1}{2}g^{lk}\mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{lk}. \tag{36.219}$$

Se contraírmos os índices  $k$  e  $l$  em (36.219), obtemos, em quatro dimensões espaço-temporais,  $\mathcal{R} = -\frac{8\pi G}{c^4}T$ , onde  $T := T^l_l$ . Substituindo isso de volta em (36.219), obtemos

$$R^{lk} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T^{lk} - \frac{1}{2}g^{lk}T\right). \tag{36.220}$$

Essa variante das equações de Einstein foi apresentada pelo mesmo em 25 de novembro de 1915 em seção da Academia Prussiana de Ciências, em Berlim<sup>40</sup>. É muito fácil constatar, por contração de índices, que (36.220) também implica que  $\mathcal{R} = -\frac{8\pi G}{c^4}T$  e que (36.219) e (36.220) são equivalentes.

Os passos que levaram Einstein a propor (36.220) foram, porém, outros já que, segundo a detalhada discussão histórica de [257], as identidades de Bianchi não eram do conhecimento de Einstein (nem de Hilbert!). Vide também [91]. Para uma coletânea de artigos originais, vide [92].

<sup>38</sup>Uma interpretação geométrica desse tensor é discutida em [238].

<sup>39</sup>Hoje denominada *constante de Einstein*.

<sup>40</sup>Albert Einstein “Die Feldgleichungen der Gravitation”. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin: 844-847 (November 25, 1915).

A verdadeira história da obtenção das Equações de Einstein é  muito  mais longa e complicada. Por exemplo, a equação que Einstein primeiramente propôs não foi (36.219) ou (36.220), mas foi  $R^{lk} = \kappa T^{lk}$  (e apenas para sistemas de referência que satisfizessem  $|\det g| = 1$ ). Logo, porém, Einstein percebeu que essa equação, ainda que covariante (por ser tensorial), não poderia ser correta, pois o tensor de Ricci sozinho não satisfaz uma equação de conservação como  $R^{lk}_{;k} = 0$ . Desconhecendo (36.218), e após idas e vindas onde até mesmo a necessidade da lei de conservação covariante do tensor de energia-momento foi questionada, Einstein segundo [257] propôs impor essa lei de conservação à força: considerou uma equação da forma geral

$$R^{lk} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T^{lk} - \alpha g^{lk}T\right), \tag{36.221}$$

com  $\alpha$  arbitrário, e procurou determinar para qual valor de  $\alpha$  o tensor de energia-momento satisfaz a lei de conservação covariante  $T^{lk}_{;k} = 0$ . Após alguns cálculos (que passaram por tomar o traço de ambos os lados de (36.221) e escolher um sistema de referência em que  $|\det g| = 1$ ), Einstein concluiu que  $\alpha = 1/2$ , obtendo assim (36.220). Devido à covariância de (36.221), a restrição do sistema de referência no cálculo não é relevante mas, de qualquer forma, Einstein eliminou-a algum tempo depois.

Quase simultaneamente, Hilbert<sup>41</sup> chegou às mesmas equações (36.219) seguindo outro caminho: obtendo (36.219) por um princípio variacional do qual (36.219) são as correspondentes equações de Euler-Lagrange. Esse último caminho é o preferido da maioria dos livros-texto atuais que apresentam a Teoria da Relatividade Geral (vide *e.g.*, [203]).

Posteriormente, em 1917<sup>42</sup>, motivado por considerações cosmológicas, Einstein propôs um acréscimo às equações (36.219):

$$R^{lk} - \frac{1}{2}g^{lk}\mathcal{R} + \Lambda g^{lk} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{lk}, \tag{36.222}$$

sendo  $\Lambda$  é uma constante, hoje denominada *constante cosmológica*. O termo  $\Lambda g^{lk}$  é denominado *termo cosmológico* e, por vezes, é escrito com outra convenção de sinais:  $-\Lambda g^{lk}$ . O termo cosmológico  $\pm \Lambda g^{lk}$  não viola a lei de conservação do lado esquerdo, pois o tensor métrico satisfaz  $g^{lk}_{;k}$ , já que a conexão é suposta ser de Levi-Civita.

A existência ou não do termo cosmológico, assim como estimativas observacionais de valores para  $\Lambda$ , são objeto de intensa pesquisa, desde sua proposta. O valor atualmente estimado com base em modelos de evolução do universo é  $\Lambda = (1,501 \pm 0,043) \times 10^{-26}kg\ m^{-3}$ , um valor muito “pequeno”, cuja relevância só se manifesta em fenômenos de escala cosmológica. Para citar apenas duas referências sobre o tema em um universo bibliográfico, vide [352] e [353].

O leitor interessado em um relato detalhado do épico esforço de Einstein em propor sua Teoria da Relatividade Geral, talvez o maior feito individual da história da Ciência, encontrará em [257] uma excelente referência. Vide também [318], [319] ou [91]. Para uma coletânea de artigos originais, vide [92].



**E. 36.30 Exercício.** Para conexões de Levi-Civita o tensor de Einstein, definido em (36.217), é identicamente nulo em duas dimensões (mesmo no caso Riemanniano). Portanto, não há gravitação de Einstein em espaços-tempos bidimensionais.

Para ver isso, constate que, devido às propriedades de simetria e antissimetria por troca de índices (expressas em (36.176), (36.179) e (36.181)), as únicas componentes não-identicamente nulas do tensor de curvatura de Riemann  $R_{kl;j}$  em duas dimensões são  $R_{1212} = R_{2121} = -R_{2112} = -R_{1221}$ . Com isso, verifique que para as componentes do tensor de Ricci tem-se

$$R_{11} = g^{22}R_{1212}, \quad R_{12} = R_{21} = -g^{21}R_{1212}, \quad R_{11} = g^{11}R_{1212}, \tag{36.223}$$

ou seja, em forma matricial,

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12} & R_{22} \end{pmatrix} = R_{1212} \begin{pmatrix} g^{22} & -g^{12} \\ -g^{12} & g^{11} \end{pmatrix}.$$

Constatare que, coincidentemente, a matriz do lado direito é  $[g^{11}g^{22} - (g^{12})^2] \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{12} & g^{22} \end{pmatrix}^{-1} = [g^{11}g^{22} - (g^{12})^2]g$ , com  $g = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{12} & g^{22} \end{pmatrix}$ . Com isso, vemos que  $\text{Ric} = [g^{11}g^{22} - (g^{12})^2]R_{1212}g$ .

Verifique por (36.223) que o escalar de curvatura é dado por  $\mathcal{R} = g^{ij}R_{ij} = 2[g^{11}g^{22} - (g^{12})^2]R_{1212}$ . Conclua disso que  $\text{Ric} = \frac{1}{2}\mathcal{R}g$ , ou seja, que  $R_{ij} = \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{ij}$ , o que afirma a nulidade do tensor de Einstein.  $\star$

<sup>41</sup>David Hilbert (1862-1943).

<sup>42</sup>A. Einstein. “Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitaetstheorie”. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin. part 1: 142-152 (1917).

### 36.4 Geodésicas

A noção de curva geodésica é uma das noções fundamentais da Geometria Diferencial, particularmente, das Geometrias Riemanniana e semi-Riemanniana, e desempenha um papel importante na Teoria da Relatividade Geral, onde, no caso de geodésicas tipo-tempo, descreve o movimento em “queda livre” (i.e., sob ausência de forças externas) de um observador idealmente pontual. No caso da Geometria Riemanniana, uma curva geodésica entre dois pontos é, num sentido que precisaremos, uma curva que minimiza a distância entre esses pontos. Nesse sentido, curvas geodésicas em superfícies têm sido estudadas desde o Século XVII.

Dada uma curva contínua e diferenciável por partes  $\mathbb{R} \supset [a, b] \ni t \mapsto c(t) \in M$ , denominamos  $c(a)$  como o ponto inicial de  $c$  e  $c(b)$  como o ponto final de  $c$  e, seguindo a linguagem comum, dizemos que  $c$  parte de  $c(a)$  e chega em  $c(b)$ . Note-se que se  $c$  parte de  $c(a)$  e chega em  $c(b)$ , então a curva  $\mathbb{R} \supset [a, b] \ni t \mapsto c(a + b - t) \in M$  parte de  $c(b)$  e chega em  $c(a)$ .

• **Geodésicas. Definição**

Seja  $I$  um intervalo aberto e conexo da reta real e seja  $\gamma : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável em uma variedade diferenciável  $m$ -dimensional onde tenhamos definido uma conexão afim  $\nabla$ . Seja  $I \ni t \mapsto \dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ , a aplicação que associa a cada  $t \in I$  o vetor tangente  $\dot{\gamma}$  (“velocidade”) da curva  $\gamma$  no ponto  $\gamma(t) \in M$ .

A curva  $\gamma$  é dita ser uma *geodésica em relação à conexão afim*  $\nabla$  se

$$\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = 0 \tag{36.224}$$

em todo  $I$ , onde  $\frac{D}{dt}$  é a derivação covariante associada a  $\nabla$ , dada em (36.65). Como se vê, uma curva geodésica é uma curva cujo vetor tangente é transportado paralelamente ao longo da mesma, de acordo com uma dada conexão afim. Sobre a existência de curvas geodésicas comentaremos mais adiante (Proposição 36.13, página 1762).

Seja  $(V, h)$  uma carta local de coordenadas em  $M$  e vamos supor que  $I$  seja pequeno suficiente de sorte que a curva  $\gamma$  esteja inteiramente contida em  $V$ . Usando a carta de coordenadas  $h$ , a curva  $\gamma$  será descrita em  $\mathbb{R}^m$  por funções  $h(\gamma(t)) \equiv (x^1(t), \dots, x^m(t))$ ,  $t \in I$ . A representação local de (36.224) é, segundo (36.66), dada por

$$\ddot{x}^k(t) + \Gamma^k_{ij}(x^1(t), \dots, x^m(t)) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{36.225}$$

que é um sistema de  $m$  equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, não-lineares, para as funções  $x^1(t), \dots, x^m(t)$ .

Usando um truque bem conhecido da teoria das equações diferenciais ordinárias, o sistema de  $m$  equações de segunda ordem acima pode ser transformado no seguinte sistema de  $2m$  equações de primeira ordem

$$\dot{x}^k(t) = y^k(t), \quad k = 1, \dots, m, \tag{36.226}$$

$$\dot{y}^k(t) = -\Gamma^k_{ij}(x^1(t), \dots, x^m(t)) y^i(t) y^j(t), \quad k = 1, \dots, m, \tag{36.227}$$

para as  $2m$  funções  $(x^1(t), \dots, x^m(t), y^1(t), \dots, y^m(t))$ ,  $t \in I$ . Claro está que esse sistema equivale ao anterior e corresponde a uma expressão local de uma equação para  $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$  no fibrado tangente.

Façamos um comentário final no intento de evitar um certo mal-entendido. No caso de conexões métricas temos  $\Gamma^k_{ij} = \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\} + K^k_{ij}$ , onde  $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\}$  são os símbolos de Christoffel e  $K^k_{ij}$  são as componentes do tensor de contorção. Os símbolos de Christoffel são simétricos  $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ji \end{smallmatrix} \right\}$  (vide (36.109) e (36.110)), mas as componentes do tensor de contorção **não** são, em geral, antissimétricas,  $K^k_{ij} \neq -K^k_{ji}$ , ao contrário do que ocorre com as componentes do tensor de torção, que são antissimétricas:  $T^k_{ij} = -T^k_{ji}$ . Assim, a contribuição das componentes da conexão a equação (36.225) é  $\Gamma^k_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\} \dot{x}^i \dot{x}^j + K^k_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \stackrel{(36.102)}{=} \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\} \dot{x}^i \dot{x}^j + T^k_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$ . A contribuição do tensores de contorção ou de torção ao lado direito é, em geral, não-nula, mesmo que o produto  $\dot{x}^i \dot{x}^j$  seja simétrico na troca de índices  $i \leftrightarrow j$  pois, em geral,  $T^k_{ij} \neq -T^k_{ji}$ .

• **Geodésicas em relação a conexões métricas**

O resultado que segue, de demonstração elementar, é frequentemente usado:

**Lema 36.4** *Seja  $\nabla$  uma conexão métrica em relação a um tensor métrico  $g$  definido em  $M$  e seja  $\gamma : I \rightarrow M$  uma curva geodésica em  $M$ . Então,  $g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))_{\gamma(t)}$  é constante para todo  $I$ .* □

*Prova.* Seja  $\nabla$  uma conexão métrica, ou seja, satisfazendo (36.90). Temos, por (36.93), página 1733,

$$\frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))_{\gamma(t)} = 2g\left(\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\right)_{\gamma(t)} \stackrel{(36.224)}{=} 0.$$

Isso estabeleceu que  $g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))_{\gamma(t)}$  é constante, como desejávamos provar. ■

• **Curvas tipo espaço, tempo e luz**

No caso de tensores métricos Lorentzianos, uma curva  $c : I \rightarrow M$  ( $I$  sendo um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ ) é dita ser uma *curva tipo espaço* se  $g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))_{c(t)} < 0$  para todo  $t \in I$ . Ela é dita ser uma *curva tipo tempo* se  $g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))_{c(t)} > 0$  para todo  $t \in I$  e é dita ser uma *curva tipo espaço* se  $g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))_{c(t)} = 0$  para todo  $t \in I$ . O Lema 36.4 ensina-nos que o tipo de uma curva geodésica não se altera.

• **Comprimento de curvas no caso de métricas Riemannianas**

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana diferenciável conexa de dimensão  $n$ . Com o uso do tensor métrico Riemanniano  $g$  podemos definir uma noção de comprimento para curvas diferenciáveis em  $M$  com a qual podemos definir uma métrica em  $M$ , ou seja, uma noção de distância entre pontos, tal como definido na Seção 27.1, página 1314.

Seja  $\mathbb{R} \supset [a, b] \ni t \mapsto c(t) \in M$  uma curva diferenciável em  $M$ , sendo  $a$  e  $b$  arbitrários e tais que  $-\infty < a < b < \infty$ . Definimos o comprimento de  $c$  segundo  $g$  como sendo a quantidade

$$\ell(c) \equiv \ell_g(c) := \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))_{c(t)}} dt.$$

A noção de comprimento de curvas pode ser facilmente estendida de modo a incluir curvas contínuas e diferenciáveis por partes, ou seja, curvas  $\mathbb{R} \supset [a, b] \ni t \mapsto c(t) \in M$  contínuas e tais que exista um conjunto finito  $\{t_0, \dots, t_m\} \subset [a, b]$  com  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$  tal que em cada intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, m - 1$  a curva seja diferenciável. Nesse caso, define-se

$$\ell(c) \equiv \ell_g(c) := \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))_{c(t)}} dt,$$

como é de se esperar. É quase desnecessário observar que  $\ell(c) \geq 0$  e que  $\ell(c) = 0$  se e somente se  $c$  for uma curva constante.

• **Comprimento de curvas no caso de tensores métricos Lorentzianos**

No caso Lorentziano a noção de comprimento de curvas pode também ser definida para curvas que possuam um tipo bem definido: para curvas tipo tempo, definimos  $\ell(c) \equiv \ell_g(c) := \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))_{c(t)}} dt$  e para curvas tipo espaço, definimos  $\ell(c) \equiv \ell_g(c) := \int_a^b \sqrt{-g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))_{c(t)}} dt$ . No caso de curvas tipo luz, o comprimento é nulo, naturalmente.

• **Curvas minimizantes do comprimento, no caso Riemanniano**

Se a curva diferenciável  $c$  (e, em particular, os pontos inicial e final  $c(a)$  e  $c(b)$ ) estiver dentro de uma carta local  $V$ , podemos escrever seu comprimento em termos de coordenadas locais como

$$\ell(c) = \int_a^b L(x^1(t), \dots, x^m(t), \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^m(t)) dt,$$

$$\text{com} \quad L(x^1(t), \dots, x^m(t), \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^m(t)) := \left[ g_{ij}(x^1(t), \dots, x^m(t)) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t) \right]^{1/2}. \tag{36.228}$$

A curva  $c$  será uma *curva extremal local* (eventualmente, uma *curva minimizante local*) se satisfizer as equações de Euler-Lagrange:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Isso significa que o comprimento de  $c$  é um extremo (máximo ou mínimo) entre as curvas locais que se iniciam e terminam nos mesmos pontos  $c(a)$  e  $c(b)$ .

Calcular a forma explícita das equações de Euler-Lagrange acima é um exercício que recomendamos a todo estudante. O resultado é

$$\ddot{x}^k(t) + \left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\} (x^1(t), \dots, x^m(t)) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t) = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

onde  $\left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\}$  são os símbolos de Christoffel definidos em (36.109). Como se vê, as equações de Euler-Lagrange acima coincidem com as equações da curva geodésica da conexão de Levi-Civita associada ao tensor métrico Riemanniano  $g$  (vide (36.225)).

Obtemos, portanto, que no caso de conexões de Levi-Civita há uma interpretação adicional para a natureza das curvas geodésicas: elas são localmente curvas minimizantes ou maximizantes de comprimento. No caso de conexões mais gerais essa interpretação não está presente e, caso um tensor métrico esteja definido, é necessário distinguir entre curvas minimizantes ou maximizantes de comprimento e curvas geodésicas.

No caso Lorentziano, as conclusões são as mesmas quer as curvas consideradas sejam tipo tempo ou tipo espaço.

• **O mapa exponencial geodésico**

Vamos aqui supor que  $M$  seja uma variedade infinitamente diferenciável e que conexão  $\nabla$  seja também infinitamente diferenciável, ou seja, que suas componentes  $\Gamma^k_{ij}$  sejam funções infinitamente diferenciáveis em suas respectivas coordenadas locais.

Pretendemos aqui fazer algumas considerações importantes sobre o sistema de equações diferenciais (36.226)–(36.227). É natural considerarmos esse sistema sob condições iniciais que especifiquem o valor das funções incógnitas  $x^i(t)$  e  $y^j(t)$  no instante  $t = 0$ , ou seja, sob a especificação de  $(x^1(0), \dots, x^m(0), y^1(0), \dots, y^m(0)) \equiv (x_0^1, \dots, x_0^m, y_0^1, \dots, y_0^m)$ . Esses dados de Cauchy especificam o ponto da variedade atingido pela curva geodésica em  $t = 0$ , a saber, aquele com coordenadas locais  $(x_0^1, \dots, x_0^m)$  e a velocidade da curva geodésica em  $t = 0$ , especificada pelo vetor  $(y_0^1, \dots, y_0^m)$ , também em coordenadas locais.

Fazendo uso de teoremas gerais da Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias (notadamente, do Teorema de Picard-Lindelöf, Teorema 28.4, página 1388) podemos fazer a seguinte afirmação sobre o sistema de equações diferenciais expresso em (36.226)–(36.227).

**Proposição 36.13** *A variedade  $M$  pode ser recoberta com abertos  $U$  com a seguinte propriedade: para cada  $p \in U$  e  $v \in \mathbb{T}_p M$  existe  $\delta > 0$  (eventualmente dependente de  $p, v \in U$ ) tal que o sistema (36.226)–(36.227) com condições iniciais  $p \in U$  e  $v \in \mathbb{T}_p M$  possui solução única em  $U$  dentro de um intervalo  $t \in (-\delta, \delta)$ .  $\square$*

No que segue, vamos denotar por  $\gamma(t, p, v)$  a curva geodésica definida no intervalo  $t \in (-\delta, \delta)$  e que passa por  $p \in U$  com velocidade  $v$  em  $t = 0$ . Assim,  $\gamma(0, p, v) = p$  e  $\dot{\gamma}(0, p, v) = v \in \mathbb{T}_p M$ . Note-se que, pelo Lema 36.4, página 1761, temos

$$g\left(\dot{\gamma}(t, p, v), \dot{\gamma}(t, p, v)\right)_{\gamma(t, p, v)} = g(v, v)_p \tag{36.229}$$

para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ .

Antes de prosseguirmos, façamos uma observação importante sobre curvas geodésicas. É de se esperar que, para uma dado aberto  $U$ , exista alguma relação entre  $\delta$  e as condições iniciais  $p$  e  $v$  referidas na Proposição 36.13, pois se nos permitirmos aumentar<sup>43</sup>  $\|v\|$ , o intervalo de validade da solução  $\gamma(t, p, v)$ , especificado por  $\delta$ , pode ter de ser reduzido. A proposição que segue, a qual reflete uma propriedade de invariância de escala específica de curvas geodésicas, permite ter essa relação entre  $\|v\|$  e  $\delta$  sob um certo controle.

**Proposição 36.14** *Sejam  $U, \delta$  referidos na Proposição 36.13. Então, para todo  $p \in U$  e cada  $\alpha \in \mathbb{R}$  existe  $r > 0$  (eventualmente dependente de  $p$ ) tal que vale a relação*

$$\gamma(\alpha t, p, v) = \gamma(t, p, \alpha v) \tag{36.230}$$

para todo  $t \in (-\delta/|\alpha|, \delta/|\alpha|)$  (caso  $|\alpha| \neq 0$ ), sempre que  $v \in \mathbb{T}_p M$  com  $\|v\| < r$ .  $\square$

<sup>43</sup>Aqui,  $\|v\|$  refere-se à norma Euclidiana usual de  $v \in \mathbb{T}_p M$ , mas qualquer norma pode ser usada.

**Prova.** Seja  $\alpha > 0$  e seja  $a \equiv 1/\alpha$ . Tomemos o sistema (36.226)–(36.227) e definamos

$$\tilde{x}^k(t) := x^k(at) \quad \text{e} \quad \tilde{y}^k(t) := ay^k(at).$$

Com o que podemos escrever  $x^k(t) = \tilde{x}^k(t/a)$  e  $y^k(t) = a^{-1}\tilde{y}^k(t/a)$ . Substituindo em (36.226)–(36.227), obtemos

$$\ddot{\tilde{x}}^k(\tau) = \tilde{y}^k(\tau), \quad k = 1, \dots, m, \tag{36.231}$$

$$\ddot{\tilde{y}}^k(\tau) = -\Gamma^k_{ij}(\tilde{x}^1(\tau), \dots, \tilde{x}^m(\tau)) \tilde{y}^i(\tau) \tilde{y}^j(\tau), \quad k = 1, \dots, m, \tag{36.232}$$

sendo que  $\tau \equiv t/a$ . As condições iniciais devem fixar  $(\tilde{x}^1(0), \dots, \tilde{x}^m(0), \tilde{y}^1(0), \dots, \tilde{y}^m(0))$  e escolhendo

$$(\tilde{x}^1(0), \dots, \tilde{x}^m(0), \tilde{y}^1(0), \dots, \tilde{y}^m(0)) = (x_0^1, \dots, x_0^m, y_0^1, \dots, y_0^m)$$

temos um problema de valor inicial idêntico ao anterior, cuja solução fornecerá as curvas geodésicas  $\gamma(\tau, p, v)$  com  $p \in U, v \in \mathbb{T}_p M$  com  $\|v\| < r$ , em todo intervalo  $\tau \in (-\delta, \delta)$ .

Como  $y^k(0) = a^{-1}\tilde{y}^k(0) = a^{-1}y_0^k$ , para cada  $k = 1, \dots, m$ , vemos pela unicidade de soluções do Problema de Cauchy considerado que essa curva geodésica deve ser idêntica à curva  $\gamma(t, p, v/a)$ . Concluímos que

$$\gamma(t/a, p, v) = \gamma(t, p, v/a) \tag{36.233}$$

sempre que  $p \in U$  e  $v \in \mathbb{T}_p M$  com  $\|v\| < r$  para todo  $t \in (-a\delta, a\delta)$ .

Note-se ainda que as trocas simultâneas  $t \mapsto -t, y^k \mapsto -y^k$ , para todos os  $k$ 's no conjunto  $\{1, \dots, m\}$  mantêm invariantes as equações (36.226)–(36.227), o que permite estender (36.233) para valores negativos de  $a$ .

Para  $v = 0$ , (36.233) fica  $\gamma(t/a, p, 0) = \gamma(t, p, 0)$  para todo  $t$  e todo  $a > 0$ , o que mostra que  $\gamma(t, p, 0)$  é constante. Como  $\gamma(0, p, 0) = p$ , concluímos que  $p = \gamma(0, p, 0) = \gamma(t, p, 0)$ , o que permite estender (36.230) para  $\alpha = 0$ .  $\blacksquare$

O que aprendemos da Proposição 36.14 é que podemos reescalonar o intervalo de existência de uma geodésica de  $(-\delta, \delta)$  e um intervalo  $(-a\delta, a\delta)$  com o preço de termos de reescalonar a condição inicial  $v$  para  $v/a$ .

Esses escalonamentos podem ser fixados se convençionarmos tomar  $a\delta = 2$ , com o que temos o seguinte:

**Corolário 36.2** *A variedade  $M$  pode ser recoberta com abertos  $U$  com a seguinte propriedade: para cada  $U$  existe  $r' > 0$  ( $r' = r\delta/2$ , com  $r$  e  $\delta$  mencionados na Proposição 36.13) tal que o sistema (36.226)–(36.227) com condições iniciais  $p \in U$  e  $v \in \mathbb{T}_p M$ , sendo com  $\|v\| < r'$ , possui solução única dentro de um mesmo intervalo  $t \in (-2, 2)$ . Essa solução corresponde a uma curva geodésica  $\gamma(t, p, v)$  satisfazendo as condições iniciais  $\gamma(0, p, v) = p$  e  $\dot{\gamma}(0, p, v) = v \in \mathbb{T}_p M$  com  $\|v\| < r'$ , para todo  $p \in U$ .  $\square$*

No que segue denominaremos por  $B_p(0, r')$  a bola aberta de raio  $r'$  centrada em 0 no espaço tangente  $\mathbb{T}_p M$ .

Assim, com a mencionada restrição a  $v, \gamma(t, p, v)$  está sempre definida para o intervalo padrão  $t \in (-2, 2)$ . Muitas propriedades topológicas de famílias de geodésicas podem ser estudadas analisando-se a aplicação que leva cada par  $(p, v)$  a  $\gamma(t, p, v)$  para um valor de  $t$  fixo.

Com isso em mente, introduzimos a seguinte definição: a aplicação que a cada  $(p, v) \in M \times B_p(0, r')$  associa o ponto  $\gamma(1, p, v)$  é denominada *mapa exponencial geodésico*, ou *aplicação exponencial geodésica*, e é denotado por  $\exp(p, v)$ , ou por  $\exp_{(p, v)}$ :

$$M \times B_p(0, r') \ni (p, v) \mapsto \exp(p, v) := \gamma(1, p, v) \in M.$$

Na maioria das situações fixamos o ponto  $p$  e atentamos apenas para a dependência com o vetor velocidade  $v \in B_p(0, r')$ . Com essa ênfase em mente é costume denotar-se  $\exp(p, v)$  por  $\exp_p(v)$ . Assim, para cada  $p \in M$ , definimos

$$B_p(0, r') \ni v \mapsto \exp_p(v) := \gamma(1, p, v) \in M.$$

Essa aplicação também é denominada *mapa exponencial geodésico* ou *aplicação exponencial geodésica* e a mesma é o objeto de diversos resultados importantes, tais como o Lema de Gauss, ao qual dedicamos a Seção 36.4.1, página 1765 (vide Lema 36.5, página 1766).

É relevante notar que, com as devidas restrições,

$$\exp_p(tv) = \gamma(1, p, tv) = \gamma(t, p, v)$$

pois, segundo (36.230),  $\gamma(1, p, \alpha v) = \gamma(\alpha, p, v)$ , o que, para  $\alpha = t$ , implica  $\gamma(1, p, tv) = \gamma(t, p, v)$ . Assim, uma curva geodésica pode ser também escrita na forma do mapa  $t \mapsto \exp_p(tv)$  com  $t$  em um intervalo adequado em torno de  $t = 0$ .

• **O mapa exponencial geodésico é um difeomorfismo local**

A proposição que segue apresenta uma propriedade essencial do mapa exponencial geodésico: se restrito a uma vizinhança suficientemente pequena da origem em  $T_pM$  o mapa exponencial geodésico é um difeomorfismo.

**Proposição 36.15** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e seja  $p \in M$ , fixo. Seja  $B_p(0, r) \subset T_pM$  a bola de raio  $r > 0$  centrada em  $0$ , de sorte que o mapa exponencial  $\exp_p : B_p(0, r) \rightarrow M$  esteja definido, conforme explanado anteriormente. Então,  $\exp_p$  é um difeomorfismo local em torno do vetor nulo, ou seja, existe  $r' < r$  tal que  $\exp_p : B_p(0, r') \rightarrow \exp_p(B_p(0, r'))$  é um difeomorfismo.  $\square$*

**Prova.** Considere-se a curva em  $B_p(0, r) \subset T_pM$  dada por  $c(s) = sw$ , onde  $w \in T_pM$  e  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$  para algum  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno. Essa curva passa pela origem (o vetor nulo  $v = 0$ ) para  $s = 0$  e  $\dot{c}(0) = w \in T_0B_p(0, r) \subset T_0(T_pM) \simeq T_pM$ . Assim, como podemos identificar  $w$  como um elemento de  $T_pM$  escolhamos  $w \in B_p(0, r)$ .

A imagem de  $c$  pelo mapa exponencial é a curva geodésica  $\exp_p(sw) = \gamma(1, p, sw) \stackrel{(36.230)}{=} \gamma(s, p, w)$ . Logo, pela definição de aplicação diferencial, temos para  $(d\exp_p)_0$  (o “0” refere-se ao vetor nulo),

$$(d\exp_p)_0(w) = \left. \frac{d}{ds} \exp_p(sw) \right|_{s=0} = \dot{\gamma}(0, p, w) = w.$$

Disso concluímos que  $(d\exp_p)_0(w) = w$  e, portanto, que  $(d\exp_p)_0 = \text{id}$ . Assim,  $(d\exp_p)_0$  é um isomorfismo e, por continuidade, concluímos que  $(d\exp_p)_v$  é igualmente um isomorfismo em uma vizinhança suficientemente pequena de  $0 \in T_pM$ . Pela Proposição 35.6, página 1671, concluímos que  $\exp_p$  é um difeomorfismo local em torno de  $0 \in T_pM$ .  $\blacksquare$

Vale ainda comentar o seguinte. Na Proposição 36.15, acima,  $p \in M$  é fixo, mas o argumento de continuidade usado na demonstração permite estender a afirmação sobre o isomorfismo da aplicação diferencial também de sorte a incluir uma vizinhança de  $p$  em  $M$ . Assim, o mapa exponencial também é um difeomorfismo local no espaço tangente  $TM$ .

• **Coordenadas normais**

Uma consequência imediata da Proposição 36.15 é que podemos usar o mapa exponencial geodésico para constituir um atlas especial em  $M$ , denominado *atlas de coordenadas normais*. Para cada  $p \in M$ , considere-se o aberto  $\exp_p(B_p(0, r')) \in M$ , o qual contém  $p$ . O sistema de coordenadas adotado em  $\exp_p(B_p(0, r'))$  é definido pela aplicação inversa do mapa exponencial restrita a esse aberto. Assim, se  $q \in \exp_p(B_p(0, r'))$  é da forma  $q = \exp_p(v)$  com  $v \in B_p(0, r')$  associamos a  $q$  uma coleção de  $m$  coordenadas associadas ao correspondente vetor  $v$  (por exemplo, suas  $m$  componentes em alguma base). Essas coordenadas são denominadas *coordenadas normais* centradas em  $p \in M$ .

As coordenadas normais têm algumas propriedades relevantes. Uma delas é a seguinte. Considere-se a geodésica  $\gamma(t, p, v) = \exp_p(tv)$ . Ao ponto  $\gamma(t, p, v)$  ao longo dessa geodésica associamos as coordenadas  $tv$ , ou seja, a uma  $m$ -tupla  $(x^1(t), \dots, x^m(t)) = (tv^1, \dots, tv^m)$ . Dessa forma  $\ddot{x}^k(t) = 0$  e  $\dot{x}^k(t) = v^k$  e na equação da geodésica (36.225), teremos

$$\Gamma^k_{ij}(tv^1, \dots, tv^m)v^i v^j = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Em particular, para  $t = 0$  (que corresponde ao ponto  $p$ ), teremos  $\Gamma^k_{ij}(0)v^i v^j = 0$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Nessa relação  $\Gamma^k_{ij}(0)$  independe de  $v$ . Suponhamos que a conexão seja simétrica:  $\Gamma^k_{ij}(0) = \Gamma^k_{ji}(0)$ . Pelo Lema 3.4, página 212, concluímos que  $\Gamma^k_{ij}(0) = 0$  para todos  $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$ .

Isso significa que, no caso de conexões simétricas, dado um ponto  $p \in M$  podemos sempre escolher um sistema de coordenadas (as coordenadas normais centradas em  $p$ ) de tal forma que os coeficientes de uma dada conexão se anulam nesse ponto nesse sistema de coordenadas.

*Nota.* Se a conexão não for simétrica, a conclusão é que  $\Gamma^k_{ij}(0) + \Gamma^k_{ji}(0) = 0$ .  $\clubsuit$

### 36.4.1 O Lema de Gauss

Aqui seguiremos basicamente a exposição de [231], mas com adaptações e com uma organização um tanto distinta.

Seja  $M$  uma variedade Riemanniana ou Lorentziana com um tensor métrico  $g$  e uma conexão métrica simétrica  $\nabla$ . Tomemos  $p \in M$  e  $v \in T_pM$ , um vetor do espaço tangente a  $M$  em  $p$  contido em uma bola aberta  $B_p(0, r) \equiv B(0, r)$  centrada em  $0 \in T_pM$  de raio  $r > 0$ , suficientemente pequeno de modo a garantir a existência das geodésicas  $\gamma(t, p, v)$  para todo  $v \in B(0, r)$  e para todo  $t$  com  $0 \leq t \leq 1$ .

Para  $p$  fixo, a aplicação exponencial  $\exp_p$  mapeia  $B(0, r)$  em  $M$ , de sorte que a aplicação diferencial  $(d\exp_p)_v$  mapeia<sup>44</sup>  $T_vB(0, r) \subset T_v(T_pM)$  em  $T_{\exp_p(v)}M$ .

Para  $v \in B(0, r)$ , considere-se a curva diferenciável em  $B(0, r)$  definida por uma função  $v(s)$  com  $v(0) = v$ , sendo que consideraremos  $s$  em um intervalo  $(-\epsilon, \epsilon)$  com  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, de sorte que  $v(s) \in B(0, r)$  para todo  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Vamos também assumir que  $\epsilon$  é pequeno o suficiente de modo a garantir que  $\{v(s), s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$  não contenha vetores paralelos, ou seja, que não haja  $s, s' \in (-\epsilon, \epsilon)$  com  $s \neq s'$  e  $v(s) = \alpha v(s')$  para algum  $\alpha \neq 0$ .

A derivada  $v'(0)$  é o vetor tangente à curva no ponto  $v$  e, portanto, um elemento de  $T_vB(0, r) \subset T_v(T_pM)$ . É importante notar que  $T_v(T_pM)$  e  $T_pM$  são espaços vetoriais isomorfos: para  $w \in T_pM$  a curva  $v(s) = v + sw$  satisfaz  $v(0) = v$  e  $v'(0) = w$ , observação que permite identificar os elementos de  $T_v(T_pM)$  com os de  $T_pM$ .

Segundo (35.49), se  $v(s)$  é uma curva como a acima e  $v'(0) \in T_vB(0, r) \subset T_v(T_pM) \simeq T_pM$ , podemos calcular  $(d\exp_p)_v(v'(0))$  com

$$(d\exp_p)_v(v'(0)) = \left. \frac{d}{ds} \exp_p(v(s)) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \gamma(1, p, v(s)) \right|_{s=0}, \quad (36.234)$$

onde o lado direito é entendido como o vetor tangente à curva  $s \mapsto \gamma(1, p, v(s))$  no ponto definido por  $s = 0$ .

Seja  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$  o conjunto definido por

$$\mathcal{O} := \left\{ (t, s), 0 \leq t \leq 1, -\epsilon < s < \epsilon \right\}, \quad (36.235)$$

com  $\epsilon$  especificado acima. Para diversos propósitos, necessitamos estudar propriedades da superfície bidimensional  $S : \mathcal{O} \rightarrow M$  definida por

$$S(t, s) = \exp_p(tv(s)) = \gamma(1, p, tv(s)) = \gamma(t, p, v(s)), \quad (t, s) \in \mathcal{O}. \quad (36.236)$$

Para cada  $s$  fixo, a curva  $t \mapsto S(t, s)$  é uma geodésica que parte de  $p$  em  $t = 0$  com velocidade  $v(s)$  enquanto que para  $t$  fixo a curva  $s \mapsto S(t, s)$  intercepta aquelas geodésicas. Os vetores tangentes a essas curvas são  $\frac{\partial S}{\partial t}$  e  $\frac{\partial S}{\partial s}$ , respectivamente, e no que segue iremos calculá-los em certos pontos de interesse. A derivada  $\frac{\partial S}{\partial t}(t, s)$  representa a velocidade da geodésica em  $\gamma(p, t, v(s))$ , enquanto que a derivada  $\frac{\partial S}{\partial s}(t, s)$  representa a taxa de variação de  $\gamma(p, t, v(s))$  quando de uma variação do parâmetro  $s$ . Por essa razão  $\frac{\partial S}{\partial s}(t, s)$  é denominada *variação geodésica* associada à família de velocidades  $\{v(s), -\epsilon < s < \epsilon\}$ .

Para a derivada em  $t$  temos

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, s) = \frac{\partial}{\partial t} \gamma(t, p, v(s)) \equiv \dot{\gamma}(t, p, v(s)), \quad (36.237)$$

que é simplesmente o vetor tangente à geodésica que parte de  $p$  com velocidade  $v(s)$  no ponto  $\gamma(t, p, v(s))$ . Observemos também que para  $\alpha \in \mathbb{R}$ , a curva em  $T_pM$  definida por  $\tau \mapsto v + \tau\alpha v$  passa por  $v$  em  $\tau = 0$  com velocidade  $\alpha v$ . Assim, por (35.49), temos

$$(d\exp_p)_v(\alpha v) = \left. \frac{d}{d\tau} \exp_p(v + \alpha\tau v) \right|_{\tau=0} = \left. \frac{d}{d\tau} \gamma(1, p, (1 + \alpha\tau)v) \right|_{\tau=0} = \left. \frac{d}{d\tau} \gamma(1 + \alpha\tau, p, v) \right|_{\tau=0} = \alpha \dot{\gamma}(1, p, v) \quad (36.238)$$

e por (36.237) concluímos que

$$(d\exp_p)_v(\alpha v) = \alpha \frac{\partial S}{\partial t}(1, 0). \quad (36.239)$$

Para a derivada em  $s$  teremos

$$\frac{\partial S}{\partial s}(t, s) = \frac{\partial}{\partial s} \gamma(1, p, tv(s)) \stackrel{(36.234)}{=} (d\exp_p)_{tv(s)}(tv'(s)) = t(d\exp_p)_{tv(s)}(v'(s)). \quad (36.240)$$

<sup>44</sup>O leitor deve atentar que a diferencial em  $(d\exp_p)_v$  refere-se à dependência de  $\exp_p(v)$  em  $v$ , não em  $p$ , que é fixo.

Em particular, isso implica

$$\frac{\partial S}{\partial s}(1, 0) = (d \exp_p)_v(v'(0)) \quad (36.241)$$

e

$$\frac{\partial S}{\partial s}(0, s) = 0, \quad (36.242)$$

para todo  $s$ . Para referência futura, notemos também que por (36.240) segue que

$$\frac{\partial S}{\partial s}(t, 0) = (d \exp_p)_{tv(0)}(tv'(0)). \quad (36.243)$$

**Lema 36.5 (Lema de Gauss)** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana ou Lorentziana com um tensor métrico  $g$  e com uma conexão de Levi-Civita (i.e., uma conexão métrica e simétrica)  $\nabla$ . Seja  $p \in M$ . Então, vale*

$$g\left((d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w)\right)_{\exp_p(v)} = g(v, w)_p \quad (36.244)$$

para todos  $v \in \mathbb{T}_p M$  para os quais  $\exp_p(v)$  esteja definida e todo  $w \in \mathbb{T}_v(\mathbb{T}_p M) \simeq \mathbb{T}_p M$ .  $\square$

A Figura 36.1, página 1766, ilustra esquematicamente o conteúdo do Lema de Gauss, Lema 36.5.

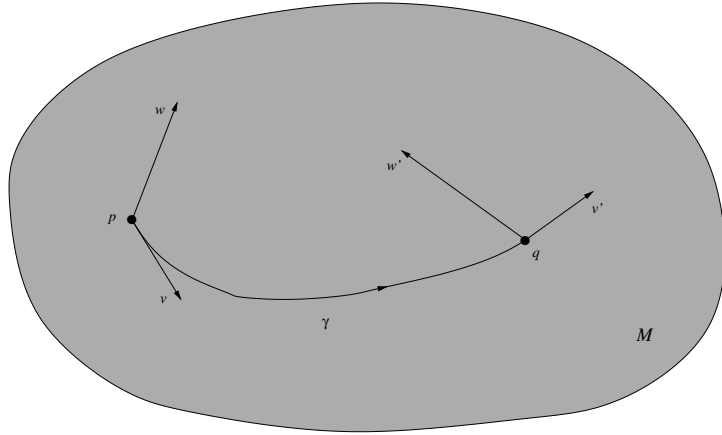


Figura 36.1: Acima,  $p$  é um ponto da variedade  $M$ ,  $v$  e  $w$  são vetores de  $\mathbb{T}_p M$ , o espaço tangente a  $M$  em  $p$ . O vetor  $v$  deve ser pequeno o suficiente para que o mapa exponencial  $\exp_p(v)$  esteja definido. A curva  $\gamma$  é a geodésica  $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ ,  $t \in [0, 1]$ , e ponto  $q$  é  $q := \exp_p(v)$ . Está claro que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$  e  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Temos ainda  $v' := (d \exp_p)_v(v)$  e  $w' := (d \exp_p)_v(w)$ , ambos elementos de  $\mathbb{T}_q M$ . Por (36.238), temos que  $v' = \dot{\gamma}(1)$ , que é tangente à curva  $\gamma$  em  $q$ . A afirmação do Lema de Gauss é que vale  $g(v', w')_q = g(v, w)_p$ .

**Prova do Lema 36.5.** Para  $v = 0$  ou  $w = 0$  a relação (36.244) é válida trivialmente, de sorte que consideramos  $v \neq 0$  e  $w \neq 0$ . Também assumiremos, para o caso Lorentziano, que  $v$  não é tipo luz. A validade de (36.244) para  $v$  tipo luz pode ser obtida por continuidade a partir dos demais casos.

Fixado  $v$ , vamos decompor  $w$  em uma componente paralela a  $v$  e uma componente “perpendicular” a  $v$ . Para tal, escrevemos  $w_{\parallel} := \frac{g(v, w)_p}{g(v, v)_p} v$  e  $w_{\perp} := w - w_{\parallel}$ . É trivial que  $w = w_{\parallel} + w_{\perp}$  e é fácil ver que  $g(v, w_{\perp})_p = 0$ .

Como a aplicação  $w \mapsto (d \exp_p)_v(w)$  é linear, podemos escrever  $(d \exp_p)_v(w) = (d \exp_p)_v(w_{\parallel}) + (d \exp_p)_v(w_{\perp})$ . Para demonstrar o lema é suficiente provarmos que

$$g\left((d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w_{\parallel})\right)_{\exp_p(v)} = g(v, w_{\parallel})_p \quad (36.245)$$

e que

$$g\left((d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w_{\perp})\right)_{\exp_p(v)} = 0 = g(v, w_{\perp})_p, \quad (36.246)$$

o que será feito no que segue.

Para provarmos (36.245), notamos que se  $w_{\parallel} = av$ , então podemos escrever, por (36.238), que

$$(d \exp_p)_v(w_{\parallel}) = (d \exp_p)_v(av) = a\dot{\gamma}(1, p, v).$$

Logo,

$$g\left((d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w_{\parallel})\right)_{\exp_p(v)} = a g\left(\dot{\gamma}(1, p, v), \dot{\gamma}(1, p, v)\right)_{\exp_p(v)}.$$

Agora, como  $\gamma$  é uma geodésica,  $\dot{\gamma}$  é transportada paralelamente ao longo de  $\gamma$  e, pelo Lema 36.4, página 1761, tem-se  $g\left(\dot{\gamma}(1, p, v), \dot{\gamma}(1, p, v)\right)_{\exp_p(v)} = g\left(\dot{\gamma}(0, p, v), \dot{\gamma}(0, p, v)\right)_p = g(v, v)_p$ . Logo, provamos que

$$g\left((d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w_{\parallel})\right)_{\exp_p(v)} = a g(v, v)_p = g(v, w_{\parallel})_p,$$

que é (36.245). Passemos agora à demonstração de (36.246).

Seja a curva em  $\mathbb{T}_p M$  definida por  $v(s) := v + s w_{\perp}$  com  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ , como discutido acima. Naturalmente,  $v(0) = v$  e  $v'(s) = w_{\perp}$  para todo  $s$ . Para tal curva  $s \mapsto v(s)$  consideremos a superfície  $S_{w_{\perp}} : \mathcal{O} \rightarrow M$  definida como em (36.236) por  $S_{w_{\perp}}(t, s) = \exp_p(tv(s)) = \exp_p(t(v + s w_{\perp})) = \gamma(1, p, t(v + s w_{\perp})) = \gamma(t, p, v + s w_{\perp})$ ,  $(t, s) \in \mathcal{O}$ . (36.247)

Por (36.239) (com  $\alpha = 1$ ), e por (36.241), temos

$$g\left((d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w_{\perp})\right)_{\exp_p(v)} = g\left(\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(1, 0), \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial s}(1, 0)\right)_{\exp_p(v)}. \quad (36.248)$$

Motivados pela expressão do lado direito, vamos estudar o produto escalar  $g\left(\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s), \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial s}(t, s)\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)}$  com  $(t, s) \in \mathcal{O}$  (vide (36.235)). Em particular, desejamos provar que essa expressão independe de  $t$  quando  $s = 0$ . Tem-se que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s), \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial s}(t, s)\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)} \\ &= g\left(\frac{D}{\partial t} \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s), \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial s}(t, s)\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)} + g\left(\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s), \frac{D}{\partial t} \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial s}(t, s)\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)}. \end{aligned}$$

Observemos que para cada  $s$  vale  $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s) = \frac{D}{\partial t} \dot{\gamma}(t, p, v(s)) = 0$ , por definição, pois  $\gamma$  é uma geodésica. Com isso, o primeiro termo do lado direito da expressão acima é nulo. Para provar que o segundo termo também é nulo devemos primeiramente invocar o Lema de Simetria, Lema 36.1, página 1731, e escrever

$$\begin{aligned} & g\left(\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s), \frac{D}{\partial t} \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial s}(t, s)\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)} = g\left(\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s), \frac{D}{\partial s} \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s)\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s), \frac{\partial S_{w_{\perp}}}{\partial t}(t, s)\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g\left(\dot{\gamma}(t, p, v(s)), \dot{\gamma}(t, p, v(s))\right)_{S_{w_{\perp}}(t, s)}. \end{aligned}$$

Com  $\dot{\gamma}$  é transportado paralelamente (segundo  $\nabla$ ) ao longo de  $\gamma$ , o Lema 36.4, página 1761, garante que

$$\begin{aligned} g\left(\dot{\gamma}(t, p, v(s)), \dot{\gamma}(t, p, v(s))\right)_{S_{w_\perp}(t, s)} &= g\left(\dot{\gamma}(0, p, v(s)), \dot{\gamma}(0, p, v(s))\right)_{S_{w_\perp}(0, s) \equiv p} \\ &= g(v(s), v(s))_p = g(v + sw_\perp, v + sw_\perp)_p = g(v, v)_p + s^2 g(w_\perp, w_\perp)_p. \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial S_{w_\perp}}{\partial t}(t, s), \frac{\partial S_{w_\perp}}{\partial s}(t, s)\right)_{S_{w_\perp}(t, s)} = s g(w_\perp, w_\perp)_p.$$

Como essa expressão anula-se em  $s = 0$ , segue que  $g\left(\frac{\partial S_{w_\perp}}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial S_{w_\perp}}{\partial s}(t, 0)\right)_{S_{w_\perp}(t, 0) \equiv \exp_p(tv)}$  é constante em  $t$ . Porém, por (36.242),  $\frac{\partial S_{w_\perp}}{\partial s}(t, 0)$  anula-se em  $t = 0$  e, assim,

$$g\left(\frac{\partial S_{w_\perp}}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial S_{w_\perp}}{\partial s}(t, 0)\right)_{\exp_p(tv)} = 0 \quad \text{para todo } t. \quad (36.249)$$

Logo, por (36.248), estabelecemos que  $g\left((d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w_\perp)\right)_{\exp_p(v)} = 0$ , provando (36.246). ■

Expresso em outros termos, (36.249) informa-nos que

$$g\left(\dot{\gamma}(t, p, v), \frac{d}{ds} \gamma(t, p, v + sw_\perp)\Big|_{s=0}\right)_{\gamma(t, p, v)} = 0, \quad (36.250)$$

para cada  $t \in [0, 1]$  e para todos  $v \in T_p M$  para os quais  $\exp_p(v)$  esteja definida e todo  $w \in T_v(T_p M) \simeq T_p M$ .

Essa afirmação possui um conteúdo geométrico, o qual expressamos na seguinte proposição:

**Proposição 36.16** *Seja  $r > 0$  tal que  $\exp_p(v)$  esteja definida para todo  $v \in T_p M$  com  $g(v, v)_p = r$ . Seja  $S(r) = \{v' \in T_p M \mid g(v', v')_p = r\}$  a superfície da “esfera” em  $T_p M$  de raio  $r$  (segundo o tensor métrico  $g$ ) centrada na origem. Para  $t \in [0, 1]$ , seja a superfície em  $M$  definida por  $S_t(r) := \{\gamma(t, p, v'), v' \in S(r)\} \subset M$ , ou seja, a imagem de  $S(r)$  pelo mapa  $T_p M \ni u \mapsto \exp_p(tu) \in M$ .*

*Então, para cada  $t \in [0, 1]$  e cada  $v \in S(r)$  o vetor tangente  $\dot{\gamma}(t, p, v)$  da geodésica  $\tau \mapsto \gamma(\tau, p, v)$  é ortogonal (segundo  $g$ ) à superfície  $S_t(r)$  no ponto  $\gamma(t, p, v)$ . □*

**Prova.** A demonstração é uma mera reinterpretação dos fatos já expostos. Fixemos o vetor  $v \in S(r)$ . Para os pontos da curva  $s \mapsto v + sw_\perp \in T_p M$  teremos  $g(v + sw_\perp, v + sw_\perp)_p = g(v, v)_p + s^2 g(w_\perp, w_\perp)_p$  e, portanto, a curva  $s \mapsto v + sw_\perp$  tangencia em  $s = 0$  a superfície  $S(r)$  em  $v$ . Agora, o vetor  $\frac{d}{ds} \gamma(t, p, v + sw_\perp)\Big|_{s=0}$  é tangente a superfície  $S_t(r)$  no ponto  $\gamma(t, p, v)$  para qualquer  $w_\perp$  ortogonal (segundo  $g$ ) a  $v$ . Assim, (36.250) está afirmando que para cada  $t \in [0, 1]$  o vetor tangente  $\dot{\gamma}(t, p, v)$  à geodésica que parte de  $p$  com velocidade  $v$  é ortogonal à superfície  $S_t(r)$  no ponto  $\gamma(t, p, v)$ . ■

A afirmação da Proposição 36.16 é a versão do Lema de Gauss, tal como originalmente formulado por seu autor.

### 36.4.2 Pontos Conjugados e a Equação de Jacobi

Nesta seção discutiremos algumas propriedades especiais de famílias de geodésicas, como a de focalização, e discutiremos a influência da curvatura sobre essas propriedades. Salvo menção em contrário estaremos sempre lidando com conexões de Levi-Civita.

#### 36.4.2.1 A Equação de Jacobi

Consideremos a superfície  $S \equiv S_{v, w} = \exp_p(tv(s))$ , definida em (36.236),  $v(s)$  na forma  $v(s) = v + sw$ , com  $v, w \in T_p M$ , para um certo  $p \in M$ , fixo. Naturalmente,  $v(0) = v$  e  $v'(0) = w$ . Consideremos nessa superfície o campo  $\mathcal{O} \ni (t, s) \mapsto \frac{\partial S_{v, w}}{\partial s}(t, s) \in T_{\gamma(t, p, v(s))} M$ , com  $(t, s) \in \mathcal{O}$ . Como discutimos anteriormente (página 1765),  $\frac{\partial S_{v, w}}{\partial s}(t, s)$  é o campo das *variações geodésicas* sobre a superfície definida pela função  $S_{v, w}$ . No que segue, vamos estabelecer uma equação diferencial, denominada *equação de Jacobi*, satisfeita por  $\frac{\partial S_{v, w}}{\partial s}(t, 0)$ , a variação geodésica sobre a geodésica  $t \mapsto \gamma(t, p, v)$ .

Sabemos que  $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial S_{v, w}}{\partial t}(t, s) = 0$ , pois  $\frac{\partial S_{v, w}}{\partial t}(t, s) = \dot{\gamma}(t, p, v(s))$  e  $t \mapsto \gamma(t, p, v(s))$  é uma geodésica. Logo,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial S_{v, w}}{\partial t}(t, s) &= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial S_{v, w}}{\partial t}(t, s) + \left[ \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \right] \frac{\partial S_{v, w}}{\partial t}(t, s) \\ (36.87) \quad &= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial S_{v, w}}{\partial s}(t, s) + \left[ \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \right] \frac{\partial S_{v, w}}{\partial t}(t, s) \\ (36.155) \quad &= \frac{D^2}{\partial t^2} \frac{\partial S_{v, w}}{\partial s}(t, s) + \left( R \left( \frac{\partial S_{v, w}}{\partial s}, \frac{\partial S_{v, w}}{\partial t} \right) \frac{\partial S_{v, w}}{\partial t} \right)(t, s), \quad (36.251) \end{aligned}$$

sendo que na passagem da primeira para a segunda linha usamos o Lema de Simetria, Lema 36.1, página 1731, e na última igualdade usamos a Proposição 36.7, página 1746.

Consideremos agora a geodésica  $t \mapsto \gamma(t, p, v(0))$  e sobre a mesma os campos definidos por  $t \mapsto \frac{\partial S_{v, w}}{\partial s}(t, 0)$  e  $t \mapsto \frac{\partial S_{v, w}}{\partial t}(t, 0) = \dot{\gamma}(t, p, v(0)) \equiv \dot{\gamma}(t)$ . O primeiro é o campo de variação geodésica sobre a geodésica  $t \mapsto \gamma(t, p, v)$  induzida por uma variação “infinitesimal” da velocidade inicial na direção  $w$ . O segundo é o campo das velocidades sobre a mesma geodésica.

A igualdade obtida em (36.251) implica (tomando-se  $s = 0$ )

$$\frac{D^2}{dt^2} \left[ \frac{\partial S_{v, w}}{\partial s}(t, 0) \right] + R \left( \left[ \frac{\partial S_{v, w}}{\partial s}(t, 0) \right], \dot{\gamma}(t) \right) \dot{\gamma}(t) = 0, \quad (36.252)$$

para todo  $t$ . Essa expressão inspira as seguintes definições. Dada uma geodésica  $t \mapsto \gamma(t, p, v)$ ,  $t \in (a, b)$ , dizemos que um campo  $J(t) \in T_{\gamma(t, p, v)} M$ ,  $t \in (a, b)$ , definido ao longo de  $\gamma$ , é um *campo de Jacobi*<sup>45</sup> se satisfizer a equação diferencial

$$\frac{D^2}{dt^2} J(t) + R(J(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t) = 0, \quad (36.253)$$

para todo  $t \in (a, b)$ . A equação (36.253) é denominada *equação de Jacobi*. Trata-se de uma equação diferencial linear de segunda ordem e estaremos interessados em tratá-la enquanto problema de valor inicial, com dados iniciais tais como  $J(0)$  e  $\frac{d}{dt} J(0)$  ou  $J(0)$  e  $\frac{D}{dt} J(0)$  (assumindo aqui  $0 \in (a, b)$ ). Note-se que  $\frac{D}{dt} J(0)$  pode ser expressa em termos de  $J(0)$  e  $\frac{d}{dt} J(0)$  e, reciprocamente, que  $\frac{d}{dt} J(0)$  pode ser expressa em termos de  $J(0)$  e  $\frac{D}{dt} J(0)$ , o que facilmente se vê pela expressão (36.66), página 1726, da derivação covariante em uma carta local de coordenadas.

#### • Soluções da equação de Jacobi

Antes de prosseguirmos, vamos discutir algumas soluções mais óbvias da equação de Jacobi. Afirmamos que os campos

$$J_1^{v, w}(t) := \frac{\partial S_{v, w}}{\partial s}(t, 0), \quad J_2^v(t) := \dot{\gamma}(t, p, v), \quad \text{e} \quad J_3^v(t) := t J_2(t) := t \dot{\gamma}(t, p, v) \quad (36.254)$$

são campos de Jacobi definidos sobre a geodésica  $t \mapsto \gamma(t, p, v)$  e satisfazem as condições iniciais

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1^{v, w}(0) = 0, \\ \frac{D}{dt} J_1^{v, w}(0) = w, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} J_2^v(0) = v, \\ \frac{D}{dt} J_2^v(0) = 0, \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} J_3^v(0) = 0, \\ \frac{D}{dt} J_3^v(0) = v. \end{array} \right. \quad (36.255)$$

A argumentação que justifica tais afirmações é a que segue:

<sup>45</sup>Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851).



1. Como vimos em (36.252), o campo  $J_1^{v,w}(t) = \frac{\partial S_{v,w}}{\partial s}(t, 0)$  é um campo de Jacobi e satisfaz  $J_1^{v,w}(0) = 0$  (vide (36.242))  $\frac{D}{dt} J_1^{v,w}(0) = w$ , pois

$$\frac{D}{dt} J_1^{v,w}(0) = \frac{D}{dt} \frac{\partial S_{v,w}}{\partial s}(0, 0) \stackrel{(36.87)}{=} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial S_{v,w}}{\partial t}(0, 0) = \frac{D}{\partial s} \dot{\gamma}(0, p, v(s)) \Big|_{s=0} = \frac{D}{ds} v(s) \Big|_{s=0} = v'(0) = w,$$

pois,  $\frac{D}{ds} v(s) = v'(s)$  para todo  $s$ . O estudante não convencido dessa última igualdade deve recordar que, em uma carta local de coordenadas, na qual possamos escrever as coordenadas de  $\gamma(t, p, v(s))$  como  $x^k(t, s)$ , teremos

$$\frac{D}{ds} v = \sum_a \left[ \frac{dv^a}{ds} + \sum_{b,c} \Gamma_{bc}^a v^b \frac{\partial x^c}{\partial s}(0, s) \right] \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{dv^a}{ds} \frac{\partial}{\partial x^a} = v'(s),$$

já que  $\frac{\partial x^c}{\partial s}(0, s) = 0$ , pois  $\gamma(0, p, v(s)) = p$  para todo  $s$ .

2. O campo  $J_2^v(t) = \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(p, t, v(0)) = \frac{\partial S}{\partial t}(t, 0)$  é um campo de Jacobi, pois  $\frac{D}{dt} \dot{\gamma}(t) = 0$  (equação da geodésica) e pois  $R(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = 0$ , devido à antissimetria do tensor de curvatura  $R$ , o que mostra que (36.253) é, nesse caso, trivialmente satisfeita.

Para esse campo de Jacobi tem-se  $J_2^v(0) = \dot{\gamma}(p, 0, v(0)) = v(0) \equiv v$  e  $\frac{D}{dt} J_2^v(0) = 0$ , pois  $\frac{D}{dt} J_2^v(t) = \frac{D}{dt} \dot{\gamma}(t) = 0$  para todo  $t$ , novamente pela equação da geodésica.

3. O campo  $J_3^v(t) = t\dot{\gamma}(t)$  é também um campo de Jacobi, pois  $R(t\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = tR(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = 0$ , devido à antissimetria do tensor de curvatura e pois  $\frac{D}{dt} J_3^v(t) = \frac{D}{dt}(t\dot{\gamma}(t)) = t\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) + \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t)$  (pela regra de Leibniz para a derivação covariante e pela equação da geodésica) e, portanto,  $\frac{D^2}{dt^2} J_3^v(t) = \frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) = 0$ , novamente pela equação da geodésica.

Para esse campo de Jacobi tem-se  $J_3^v(0) = 0$  (evidentemente) e  $\frac{D}{dt} J_3^v(0) = \dot{\gamma}(0) = v(0) \equiv v$ , pelo exposto no último parágrafo.

Da linearidade da equação de Jacobi e das considerações acima, concluímos:

**Lema 36.6** *Considere-se a geodésica  $[0, a] \ni t \mapsto \gamma(t, p, v)$ . Então, fixadas condições iniciais  $J(0)$  e  $\frac{D}{dt} J(0)$ , a equação de Jacobi (36.253) possui solução única. Em particular, para as condições iniciais  $J(0) = 0$  e  $\frac{D}{dt} J(0) = w$  a solução única é  $J_1^{v,w}(t)$ .*  $\square$

É fácil inferir disso, que em uma variedade  $n$  dimensional existem  $n$  campos de Jacobi linearmente independentes.

• **Algumas propriedades dos campos de Jacobi**

As afirmações da proposição e do corolário que seguem e suas demonstrações provêm de [231].

**Proposição 36.17** *Se  $J$  é um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica  $[0, a] \ni t \mapsto \gamma(t, p, v)$  então vale para todo  $t \in [0, a]$*

$$g\left(J(t), \dot{\gamma}(t, p, v)\right)_{\gamma(t, p, v)} = g\left(\left(J(0) + t \frac{D}{dt} J(0)\right), v\right)_p = g(J(0), v)_p + t g\left(\frac{D}{dt} J(0), v\right)_p. \quad (36.256)$$

$\square$

**Prova.** Denotemos  $g(J(t), \dot{\gamma}(t, p, v))_{\gamma(t, p, v)}$  simplesmente por  $g(J, \dot{\gamma})(t)$ . Como  $\frac{D}{dt} \dot{\gamma} = 0$ , segue que

$$\frac{d}{dt} g(J, \dot{\gamma})(t) = g\left(\frac{D}{dt} J, \dot{\gamma}\right)(t). \quad (36.257)$$

Também tem-se que

$$\frac{d}{dt} g\left(\frac{D}{dt} J, \dot{\gamma}\right)(t) = g\left(\frac{D^2}{dt^2} J, \dot{\gamma}\right)(t) \stackrel{(36.253)}{=} -g\left(R(J(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\right)(t)$$

$$\stackrel{(36.167)}{=} g\left(R(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), J(t)\right)(t) = 0,$$

devido à antissimetria do tensor de curvatura. Isso mostrou que  $g\left(\frac{D}{dt} J, \dot{\gamma}\right)(t)$  é constante e, logicamente, igual a  $g\left(\frac{D}{dt} J, \dot{\gamma}\right)(0)$ . Logo, (36.257) fica  $\frac{d}{dt} g(J, \dot{\gamma})(t) = g\left(\frac{D}{dt} J, \dot{\gamma}\right)(0)$ . Integrando-se ambos os lados entre 0 e  $t$ , obtemos  $g(J, \dot{\gamma})(t) = g(J, \dot{\gamma})(0) + tg\left(\frac{D}{dt} J, \dot{\gamma}\right)(0)$ , como queríamos provar.  $\blacksquare$

**Corolário 36.3** *Seja  $J$  um campo de Jacobi sobre uma geodésica  $[0, a] \ni t \mapsto \gamma(t, p, v) \equiv \gamma(t)$ . Se existirem  $t_1$  e  $t_2$  distintos em  $[0, a]$  tais que  $g(J, \dot{\gamma})(t_1) = g(J, \dot{\gamma})(t_2)$  então  $g\left(\frac{D}{dt} J(0), v\right)_p = 0$  e  $g(J, \dot{\gamma})(t)$  é constante em todo  $[0, a]$ .*  $\square$

**Prova.** É evidente da linearidade em  $t$  do lado direito da expressão (36.256) que se existirem  $t_1$  e  $t_2$  distintos em  $[0, a]$  tais que  $g(J, \dot{\gamma})(t_1) = g(J, \dot{\gamma})(t_2)$  então  $g\left(\frac{D}{dt} J(0), v\right)_p = 0$  e  $g(J, \dot{\gamma})(t)$  é constante em todo  $[0, a]$ .  $\blacksquare$

36.4.2.2 Pontos Conjugados

• **Pontos conjugados**

Seja  $[-a, a] \ni t \mapsto \gamma(t) \equiv \gamma(t, p, v)$ ,  $a > 0$ , uma geodésica que passa por  $p \in M$  em  $t = 0$ . Um ponto  $\tilde{p} = \gamma(t_0)$ ,  $t_0 \in [-a, 0) \cup (0, a]$ , é dito ser um *ponto conjugado* de  $p$  se existir sobre a curva  $\gamma$  um campo de Jacobi não identicamente nulo  $J$  tal que  $J(0) = 0$  e  $J(t_0) = 0$ .

Como se percebe, a questão por trás da existência de pontos conjugados é a questão de saber se alguma variação geodésica  $\frac{\partial S_{v,w}}{\partial s}(t, 0)$  da geodésica  $\gamma(t, p, v)$  anula-se em outro ponto que não  $p$ . Dessa forma, podemos interpretar pontos conjugados a  $p$  como pontos de focalização de geodésicas “infinitesimalmente” próximas que partem de  $p$ .

O corolário a seguir é uma decorrência elementar do Corolário 36.3, página 1771, e dispensa demonstração.

**Corolário 36.4** *Se uma geodésica  $[0, a] \ni t \mapsto \gamma(t, p, v) \equiv \gamma(t)$  possuir um ponto conjugado a  $p$ , digamos, em  $t_0 \in (0, a]$ , e  $J$  for um campo de Jacobi não-nulo tal que  $J(0) = J(t_0) = 0$ , então  $g\left(\frac{D}{dt} J(0), v\right)_p = 0$  e  $g(J, \dot{\gamma})(t) = 0$  para todo  $t \in [0, a]$ , ou seja, o campo  $J$  é  $g$ -ortogonal ao vetor tangente a  $\gamma$  em toda a geodésica.*  $\square$

É interessante observar que decorre de (36.256) e de (36.255) que

$$g\left(J_1^{v,w}(t), \dot{\gamma}(t, p, v)\right)_{\gamma(t, p, v)} = tg(w, v)_p,$$

que  $g(J_2^v, \dot{\gamma})(t) = g(v, v)_p$  e que  $g(J_3^v, \dot{\gamma})(t) = tg(v, v)_p$  (as duas últimas relações são triviais pelas definições de  $J_2^v$  e  $J_3^v$ ). Disso segue que se  $p$  tem um ponto conjugado em  $\gamma$ , digamos, em  $t_0$ , e  $J_1^{v,w}$  anula-se em 0 e em  $t_0$ , então  $g(w, v)_p = 0$ , ou seja,  $w$  é  $g$ -ortogonal à velocidade inicial  $v$ .

• **Pontos conjugados e singularidades da aplicação exponencial**

A noção de ponto conjugado é relevante em função da interpretação que apresentamos acima como ponto de focalização aproximada de geodésicas próximas. Há também uma outra razão que agora discutiremos, a saber, pontos conjugados possuem uma íntima relação com pontos singulares da aplicação exponencial. Como acima, seguimos aqui proximamente [231].

**Proposição 36.18** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana (ou Lorentziana) e  $p \in M$ . Seja  $v \in T_p M$  no domínio de definição do mapa exponencial  $\exp_p$  e seja a geodésica  $[0, 1] \ni t \mapsto \gamma(t, p, v) \in M$ . Um ponto  $\tilde{p} = \gamma(t_0, p, v) = \gamma(1, p, t_0 v) = \exp_p(t_0 v)$ , com  $t_0 \in (0, 1]$ , é um ponto conjugado de  $p$  se e somente se  $t_0 v$  for um ponto crítico<sup>46</sup> da aplicação exponencial  $\exp_p$ .*  $\square$

<sup>46</sup>A noção de ponto crítico encontra-se definida à página 1672. Recordemo-la. Se  $f : M_1 \rightarrow M_2$  é uma aplicação  $C^\infty$  entre duas variedades de mesma dimensão  $m$ , então um ponto  $p \in M_1$  é dito ser um *ponto crítico* para  $f$  se a aplicação diferencial  $df_p$  não for um isomorfismo entre  $T_p M_1$  e  $T_{f(p)} M_2$ . Pela Proposição 35.6, página 1671,  $f$  não pode ser um difeomorfismo local em torno de um ponto crítico.

**Prova.** Por definição,  $\tilde{p} = \gamma(t_0, p, v)$  é um ponto conjugado de  $p$  em  $\gamma$  se e somente existir sobre  $\gamma$  um campo de Jacobi não-identicamente nulo  $J$  tal que  $J(0) = 0$  e  $J(t_0) = 0$ . Seja  $w := \frac{D}{dt}J(0)$ . Pelo Lema 36.6, página 1770, o campo de Jacobi  $J$  satisfazendo  $J(0) = 0$  e  $\frac{D}{dt}J(0) = w$  é igual a  $J_1^{v,w}$ , definido em (36.254), ou seja,

$$J(t) = J_1^{v,w}(t) = \frac{\partial S_{v,w}}{\partial s}(t, 0) \stackrel{(36.243)}{=} (d\exp_p)_{tv}(tw) = t(d\exp_p)_{tv}(w).$$

É claro que  $(d\exp_p)_{tv}(w)$  anula-se caso  $w = 0$ , pois  $(d\exp_p)_{tv}$  é uma aplicação linear. Da igualdade  $J(t) = t(d\exp_p)_{tv}(w)$  concluímos que se  $J$  for não-nulo para algum valor de  $t \neq 0$ , então  $w \neq 0$ . Ao mesmo tempo, se  $w \neq 0$  o campo  $J$  não pode ser identicamente nulo, pois se o fosse teríamos  $\frac{D}{dt}J(t) = 0$  para todo  $t$  e como  $w = \frac{D}{dt}J(0)$  teríamos uma contradição. Concluímos disso que o campo  $J$  é não-identicamente nulo se e somente se  $w \neq 0$ .

Agora, por hipótese,  $p$  tem um ponto conjugado em  $\tilde{p} = \gamma(t_0, p, v)$ ,  $t_0 \in (0, 1]$ , se e somente se valer  $0 = J(t_0) = t_0(d\exp_p)_{t_0v}(w)$ , o que é verdadeiro se e somente se  $(d\exp_p)_{t_0v}(w) = 0$ . Porém, como  $w \neq 0$ , isso é possível se e somente se  $t_0v$  for um ponto crítico de  $\exp_p$ . ■

• **O tensor de curvatura e a ausência de pontos conjugados. Caso Riemanniano**

A seguinte proposição elementar aponta para o fato que certas condições sobre o tensor de curvatura podem implicar na ausência de pontos conjugados. Chamamos a atenção do leitor para o fato de usarmos a convenção (36.148) para a definição do tensor de curvatura, cujo sinal é oposto daquele comumente usado em geometria Riemanniana (a esfera tem curvatura negativa na nossa convenção).

**Proposição 36.19** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana dotada de uma conexão de Levi-Civita  $\nabla$  e seja  $\gamma$  uma geodésica em  $M$ . Se em cada ponto  $q \in \gamma$  e para todos os campos vetoriais diferenciáveis  $A$  e  $B$  definidos sobre  $\gamma$  valer*

$$g(R(A, B)A, B) \geq 0, \tag{36.258}$$

então não ocorrem pontos conjugados em  $\gamma$ . □

Observe-se que no caso Riemanniano a condição (36.258) equivale à não-negatividade da curvatura seccional relativa ao plano gerado por  $A$  e  $B$  em  $T_qM$ .

**Prova da Proposição 36.19.** Vamos supor que  $J$  seja um campo de Jacobi não-nulo sobre a geodésica  $\gamma$  e que  $J(0) = J(t_0) = 0$ . Temos que

$$\frac{d}{dt}g(J, J) = 2g\left(\frac{D}{dt}J, J\right). \tag{36.259}$$

Agora, usando a antissimetria de  $R$ ,

$$\frac{d}{dt}g\left(\frac{D}{dt}J, J\right) = g\left(\frac{D^2}{dt^2}J, J\right) + g\left(\frac{D}{dt}J, \frac{D}{dt}J\right) \stackrel{(36.253)}{=} +g(R(\dot{\gamma}(t), J)\dot{\gamma}(t), J) + g\left(\frac{D}{dt}J, \frac{D}{dt}J\right) \geq 0,$$

pois  $g(\frac{D}{dt}J, \frac{D}{dt}J) \geq 0$  e, por hipótese,  $g(R(\dot{\gamma}(t), J)\dot{\gamma}(t), J) \geq 0$ . Com isso, estabelecemos que a função  $g(\frac{D}{dt}J, J)(t)$  é não-decrescente em  $t$ . Como  $J$  anula-se em 0 e em  $t_0$  concluímos disso que  $g(\frac{D}{dt}J, J)(t) = 0$  para todo  $t$ . Logo, segue de (36.259) que  $g(J, J)(t)$  é constante em  $t$  e como  $J(0) = J(t_0) = 0$ , segue que  $g(J, J)(t) = 0$  para todo  $t$ , implicando que  $J$  é identicamente nulo, uma contradição que implica na inexistência de um campo de Jacobi com as propriedades mencionadas e, portanto, na inexistência de pontos conjugados em  $\gamma$ . ■

## 36.5 Campos de Killing

Campos de Killing<sup>47</sup> são relevantes ao se discutir simetrias (isometrias) na Geometria Diferencial e, em particular, na Teoria da Relatividade Geral. Vamos aqui primeiramente apresentar o tratamento dos campos de Killing (e obter as

<sup>47</sup>Wilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923).

equações de Killing) de forma intrínseca, independente de sistemas de coordenadas. Mais adiante, para atender o interesse de leitores mais acostumados à discussão de textos de Física, repetiremos o mesmo tratamento em coordenadas locais. Por fim, teremos exercícios instrutivos.

Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $g$  um tensor métrico em  $M$  e seja  $\nabla$  uma conexão de Levi-Civita em  $M$ .

Vamos considerar a derivada de Lie  $\mathcal{L}_\xi g$  de  $g$  em um campo  $\xi \in \mathcal{X}(M)$  agindo em  $g$ . A noção de derivada de Lie foi introduzida na Seção 35.3.1, página 1679.

• **As equações de Killing. Tratamento intrínseco, independente de sistemas de coordenadas**

Seja  $\xi \in \mathcal{X}(M)$  e sejam  $A, B \in \mathcal{X}(M)$  dois outros campos vetoriais arbitrários. Sabemos por (35.88), página 1682, que vale

$$\mathcal{L}_\xi(g(A, B)) = (\mathcal{L}_\xi g)(A, B) + g(\mathcal{L}_\xi A, B) + g(A, \mathcal{L}_\xi B).$$

Como  $g(A, B)$  é uma grandeza escalar, o lado esquerdo é  $\xi(g(A, B))$ .

Por outro lado, para uma conexão  $\nabla$  vale igualmente que

$$\nabla_\xi(g(A, B)) = (\nabla_\xi g)(A, B) + g(\nabla_\xi A, B) + g(A, \nabla_\xi B),$$

sendo que o lado esquerdo também vale  $\xi(g(A, B))$ . Com isso, obtemos a identidade,

$$(\mathcal{L}_\xi g)(A, B) + g(\mathcal{L}_\xi A, B) + g(A, \mathcal{L}_\xi B) = (\nabla_\xi g)(A, B) + g(\nabla_\xi A, B) + g(A, \nabla_\xi B),$$

ou seja,

$$((\mathcal{L}_\xi - \nabla_\xi)g)(A, B) + g((\mathcal{L}_\xi - \nabla_\xi)A, B) + g(A, (\mathcal{L}_\xi - \nabla_\xi)B) = 0. \tag{36.260}$$

Chegamos agora a uma definição importante. Um campo  $\xi \in \mathcal{X}(M)$  é dito ser um *campo de Killing*<sup>48</sup> para o tensor métrico  $g$  se satisfazer

$$\mathcal{L}_\xi g = 0. \tag{36.261}$$

Segundo essa definição,  $g$  é invariante ao longo das curvas integrais definidas por  $\xi$  e o fluxo correspondente a essas curvas é, portanto, uma *isometria* para  $g$ .

Se supusermos que  $\xi$  é um campo de Killing para  $g$  e se adicionalmente supusermos que  $\nabla$  é uma conexão métrica, o primeiro termo de (36.260) será identicamente nulo (pois valem independentemente  $\mathcal{L}_\xi g = 0$  e  $\nabla_\xi g = 0$ ), e valerá

$$g((\mathcal{L}_\xi - \nabla_\xi)A, B) + g(A, (\mathcal{L}_\xi - \nabla_\xi)B) = 0. \tag{36.262}$$

Essa propriedade afirma que o operador diferencial  $\mathcal{L}_\xi - \nabla_\xi$  é  $g$ -antissimétrico.

Notemos também que se supusermos que  $\nabla$  é também livre de torção, ou seja, que é uma conexão de Levi-Civita, então, segundo (36.86), página 1730, valerá  $(\mathcal{L}_\xi - \nabla_\xi)C = -\nabla_C \xi$  para todo campo  $C$  e, portanto, (36.262) fica

$$g(\nabla_A \xi, B) + g(A, \nabla_B \xi) = 0. \tag{36.263}$$

Essa equação para  $\xi$  é denominada *equação de Killing*.

É possível demonstrar a recíproca: se  $\xi$  satisfaz a equação de Killing (36.263), então  $\mathcal{L}_\xi g = 0$  e, portanto,  $\xi$  é um campo de Killing. De fato, se  $\nabla$  é uma conexão métrica, então (36.260) afirma que

$$(\mathcal{L}_\xi g)(A, B) = -g((\mathcal{L}_\xi - \nabla_\xi)A, B) - g(A, (\mathcal{L}_\xi - \nabla_\xi)B). \tag{36.264}$$

Novamente, se  $\nabla$  é também livre de torção, ou seja, que se for uma conexão de Levi-Civita, então, segundo (36.86), página 1730, valerá  $(\mathcal{L}_\xi - \nabla_\xi)C = -\nabla_C \xi$  para todo campo  $C$  e, assim, podemos reescrever o lado direito de (36.264) como

$$(\mathcal{L}_\xi g)(A, B) = g(\nabla_A \xi, B) + g(A, \nabla_B \xi)$$

que é nulo pela suposição da validade de (36.263). Como isso vale para todos  $A, B \in \mathcal{X}(M)$ , concluímos que  $\mathcal{L}_\xi g = 0$ .

Reunindo os resultados demonstramos, portanto, o seguinte:

<sup>48</sup>Wilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923).

**Proposição 36.20** *Seja  $g$  o tensor métrico e seja  $\nabla$  a correspondente conexão de Levi-Civita. Então, um campo  $\xi \in \mathcal{X}(M)$  é um campo de Killing para  $g$ , ou seja, satisfaz  $\nabla_\xi g = 0$ , se e somente se  $\xi$  satisfizer a equação de Killing:*

$$g(\nabla_A \xi, B) + g(A, \nabla_B \xi) = 0. \quad (36.265)$$

para todos  $A, B \in \mathcal{X}(M)$ . □

A equação de Killing deve ser entendida como uma equação diferencial para  $\xi$ . Para ver isso melhor, é interessante expressarmos a equação de Killing (36.265) em coordenadas locais. Ela diz-nos que  $g_{ij}B^j A^k (\nabla_k \xi)^i + g_{ij}A^i B^k (\nabla_k \xi)^j = 0$ , ou seja,  $B^l A^k \left( (\nabla_k \xi)_i + (\nabla_i \xi)_k \right) = 0$ . Como  $A$  e  $B$  são arbitrários, segue que

$$(\nabla_k \xi)_i + (\nabla_i \xi)_k = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \xi_{k;i} + \xi_{i;k} = 0. \quad (36.266)$$

o que equivale a 
$$\xi^k_{;i} + \xi_{i;k} = 0, \quad (36.267)$$

pois a conexão é suposta simétrica.

A equação (36.266) é a equação de Killing expressa em coordenadas locais e vamos reobtê-la diretamente mais adiante. Utilizando as componentes da conexão, (36.266) pode ser escrita em coordenadas locais como

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - 2\xi_l \Gamma^l_{ik} = 0, \quad \therefore \quad \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - 2\xi_l \left\{ \begin{matrix} l \\ i \ k \end{matrix} \right\} = 0, \quad (36.268)$$

onde usamos  $\Gamma^l_{ik} = \Gamma^l_{ki} = \left\{ \begin{matrix} l \\ i \ k \end{matrix} \right\}$ , válidas para conexões de Levi-Civita.

• **O comutador de campos de Killing**

O seguinte resultado é digno de nota, pois afirma que campos de Killing compõem uma álgebra de Lie:

**Lema 36.7** *Sejam  $\xi$  e  $\tilde{\xi}$  dois campos de Killing para um tensor métrico  $g$ . Então, seu comutador  $[\xi, \tilde{\xi}]$  é igualmente um campo de Killing para  $g$ .* □

**Prova.** A afirmação é evidente por (35.94), página 1684. ■

• **O divergente de campos de Killing**

Segundo nossa discussão de página 1742, se  $\xi$  é um campo de Killing, seu divergente é dado por

$$\text{div}(\xi) = \xi^i_{;i} \stackrel{(36.267)}{=} -\xi_i{}^{;i} = -g^{il}\xi_{i;l} = -\xi^l_{;l} = -\text{div}(\xi),$$

onde novamente usamos, na penúltima igualdade, que a conexão é simétrica e, portanto,  $g^{ab}_{;c} = 0$  para todos  $a, b, c$ .

Conclui-se do exposto que o divergente de um campo de Killing é sempre nulo.

• **Campos de Killing e leis de conservação ao longo de geodésicas**

**Proposição 36.21** *Seja  $g$  o tensor métrico e seja  $\nabla$  a correspondente conexão de Levi-Civita. Seja  $\xi \in \mathcal{X}(M)$  um campo de Killing para  $g$ , ou seja, tal que  $\nabla_\xi g = 0$ . Seja  $\gamma(t)$ , com  $t$  em algum intervalo de  $\mathbb{R}$ , uma curva geodésica para a conexão  $\nabla$ . Então, a função de  $t$  definida por  $g(\xi_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t))_{\gamma(t)}$  é constante.* □

**Prova.** Caso  $A = B$ , a equação de Killing (36.265) fica simplesmente

$$g(\nabla_A \xi, A) = 0. \quad (36.269)$$

Considere-se uma curva geodésica  $\gamma(t)$ , com  $t$  em algum intervalo de  $\mathbb{R}$ , e considere-se a função de  $t$  definida por  $g(\xi_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t))_{\gamma(t)}$ . Teremos,

$$\frac{d}{dt} g(\xi_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t))_{\gamma(t)} \stackrel{(36.93)}{=} g\left(\frac{D}{dt}\xi_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t)\right)_{\gamma(t)} + g\left(\xi_{\gamma(t)}, \underbrace{\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t)}_{=0}\right)_{\gamma(t)} \stackrel{(36.65)}{=} g\left((\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\xi)_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t)\right)_{\gamma(t)} \stackrel{(36.269)}{=} 0,$$

o que estabelece que a grandeza  $g(\xi_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t))_{\gamma(t)}$  é constante ao longo da geodésica. ■

Essa lei de conservação ao longo de curvas geodésicas associada a campos de Killing é relevante, por exemplo, no estudo de trajetórias de partículas em queda livre na Relatividade Geral.

• **Dedução das equações de Killing diretamente em coordenadas locais**

Para atender a alguns gostos, vamos agora reobter a equação de Killing (36.266) fazendo uso desde o início de coordenadas locais.

Segundo (35.95), página 1684, as componentes de  $\mathcal{L}_\xi g$  em uma carta local de coordenadas são

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{ij} = \xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}. \quad (36.270)$$

**E. 36.31** Exercício. Verifique! ✦

Vamos agora tratar de reescrever (36.270) em uma forma mais adequada. Adotaremos para tal um caminho um tanto indireto.

Segundo (36.60), página 1723, a derivada covariante do campo  $\xi$  se expressa em coordenadas locais como

$$\xi^k_{;i} = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + \xi^j \Gamma^k_{ij},$$

o que implica<sup>49</sup>

$$\xi_{k;i} = g_{kl} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} + g_{kl} \xi^j \Gamma^l_{ij}.$$

Trocando-se os índices  $k$  e  $i$  e somando-se as expressões resultantes, obtemos

$$\xi_{k;i} + \xi_{i;k} = g_{kl} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} + g_{il} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} + \xi^j (g_{kl} \Gamma^l_{ij} + g_{il} \Gamma^l_{kj}).$$

Agora, para conexões de Levi-Civita os coeficientes da conexão coincidem com os símbolos de Christoffel. Portanto, segundo (36.109), página 1736, temos

$$\begin{aligned} g_{kl} \Gamma^l_{ij} + g_{il} \Gamma^l_{kj} &= g_{kl} \left\{ \begin{matrix} l \\ i \ j \end{matrix} \right\} + g_{il} \left\{ \begin{matrix} l \\ k \ j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \right] \\ &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\xi_{k;i} + \xi_{i;k} = g_{kl} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} + g_{il} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} + \xi^j \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}.$$

Comparando a (36.270) constatamos que

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{ij} = \xi_{i;j} + \xi_{j;i}. \quad (36.271)$$

<sup>49</sup>Recordar que tratamos de uma conexão de Levi-Civita, para a qual vale  $g_{ab;c} = 0$  para quaisquer índices  $a, b, c$ .

Chegamos agora a uma definição importante. Um campo  $\xi \in \mathcal{X}(M)$  é dito ser um *campo de Killing*<sup>50</sup> se satisfazer

$$\mathcal{L}_\xi g = 0. \tag{36.272}$$

Segundo essa definição,  $g$  é invariante ao longo das curvas integrais definidas por  $\xi$  e o fluxo correspondente a essas curvas é, portanto, uma *isometria*.

Como vemos de (36.271),  $\xi$  é um campo de Killing se e somente se satisfizer as *equações de Killing*:

$$\xi_{i;j} + \xi_{j;i} = 0 \tag{36.273}$$

para todos os índices  $i$  e  $j$ .

• **Alguns exercícios**

Campos de Killing desempenham um papel muito relevante no estudo de soluções exatas das equações de Einstein da Teoria da Relatividade Geral das quais se suponha que obedecem alguns princípios de simetria (por exemplo, invariância por rotações ou por translações temporais). De modo geral, campos de Killing são importantes por indicarem fluxos ao longo dos quais o tensor métrico é constante. Os exercícios que seguem ilustram isso.

**E. 36.32** Exercício. Reobtenha a lei de conservação de  $g(\xi_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t))_{\gamma(t)}$  em coordenadas locais. \*

**E. 36.33** Exercício. Considere  $M = \mathbb{R}^3$  com o tensor métrico Riemanniano plano  $g_{ij} = \delta_{ij}$  e a correspondente conexão de Levi-Civita. Adotamos em  $M$  uma (única) carta local de coordenadas Cartesiana. Constate que os três campos vetoriais

$$\hat{x} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{y} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{z} = \frac{\partial}{\partial z}$$

são campos de Killing. Constate que as isometrias associadas a esses campos correspondem à invariância do tensor métrico por translações ao longo dos eixos Cartesianos.

Constate que os três campos vetoriais

$$\ell_x = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, \quad \ell_y = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \quad \ell_z = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

são campos de Killing. Constate que as isometrias associadas a esses campos correspondem à invariância do tensor métrico por rotações em torno dos eixos Cartesianos. \*

**E. 36.34** Exercício. Seja  $M = \mathbb{R}^2$  onde adote coordenadas Cartesianas  $(x^0, x^2) \equiv (t, x)$  e adote como tensor métrico o tensor métrico e Minkowski  $\eta$ , com  $\eta_{00} = 1, \eta_{11} = -1, \eta_{01} = \eta_{10} = 0$ . Adote também a correspondente conexão de Levi-Civita. Mostre que o campo vetorial

$$M = x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x}$$

é um campo de Killing. Constate que a isometria associada a esse campo corresponde à invariância do tensor métrico por boosts de Lorentz na direção 1, ou seja, corresponde à invariância do tensor métrico em curvas de aceleração constante.

*Sugestão*. Não esquecer que  $M^0 = x$  e  $M^1 = t$ , mas que  $M_0 = x$  e  $M_1 = -t$ . \*

**E. 36.35** Exercício. Generalize os exercícios anteriores para o espaço-tempo de Minkowski em  $3 + 1$  dimensões, constatando que são campos de Killing os seguintes campos:

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \frac{\partial}{\partial t}, & \hat{x} &= \frac{\partial}{\partial x}, & \hat{y} &= \frac{\partial}{\partial y}, & \hat{z} &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ \ell_x &= y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, & \ell_y &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, & \ell_z &= x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \\ M_{01} &= x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x}, & M_{02} &= y \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial y}, & M_{03} &= z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Verifique a afirmação do Lema 36.7, constatando que o comutador de quaisquer dois desses campos de Killing é novamente (a menos de uma constante multiplicativa) um campo de Killing dessa mesma lista. \*

<sup>50</sup>Wilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923).

## 36.6 A Estrutura Causal de Variedades Lorentzianas

Vamos agora tratar de algumas características de variedades Lorentzianas, como os espaços-tempos da Teoria da Relatividade Geral. Começamos observando que é costumeiro, no caso de variedades Lorentzianas de dimensão  $m$  (com  $m \geq 2$ ), indexar coordenadas, vetores, tensores etc. com índices que variam de 0 a  $m - 1$ . A coordenada com índice 0 corresponde ao sinal + da assinatura do tensor métrico e é referida como *coordenada temporal* e as demais como *coordenadas espaciais*.

• **Tipos de vetores e curvas**

Se  $(M, g)$  é uma variedade Lorentziana e  $p \in M$ , dizemos que um vetor  $u \in T_p M$  é

1. *tipo tempo* se  $g(u, u)_p > 0$ ,
2. *tipo espaço* se  $g(u, u)_p < 0$ ,
3. *tipo luz*, ou *nulo*, se  $g(u, u)_p = 0$ .

Essas definições, bem conhecidas da Teoria da Relatividade Especial, podem ser usadas para classificar curvas diferenciáveis em  $M$ . Seja  $I$  algum intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  e seja  $c : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável em  $M$ . Dizemos que  $c$  é uma curva tipo espaço, tempo ou luz, se o vetor tangente  $\dot{c}(t)$  for tipo espaço, tempo ou luz para todo  $t \in I$ . De modo geral curvas  $c : I \rightarrow M$  podem mudar de tipo, podendo ser de um tipo em algum subintervalo de  $I$  e de outro tipo em algum outro subintervalo.

Uma observação relevante é que geodésicas não mudam de tipo. De fato, se  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma geodésica, então  $\frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})_{\gamma(t)} = g(\frac{d}{dt}\dot{\gamma}, \dot{\gamma})_{\gamma(t)} = 0$ , pois  $\frac{d}{dt}\dot{\gamma} = 0$ , por definição, provando que  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})_{\gamma(t)}$  é constante. Assim, podemos falar de geodésicas tipo espaço, tipo tempo ou nulas. *Ipso facto*, se  $t \mapsto \gamma(t, p, v)$  representa uma geodésica que passa por  $p \in M$  em  $t = 0$  com velocidade  $v \in T_p M$ , então seu tipo é igual ao tipo de  $v$ .

Na Teoria da Relatividade Geral, curvas tipo tempo representam o movimento de partículas materiais e geodésicas tipo tempo representam o movimento de partículas materiais em queda livre, ou seja, sob a ação apenas de campos gravitacionais. Curvas nulas representam movimentos a velocidade da luz e geodésicas nulas representam o movimento de raios luminosos (ou seja, movimento de fótons de comprimento de onda desprezível). Curvas tipo espaço não possuem uma interpretação de interesse físico imediato.

• **Orientação temporal de vetores tipo tempo**

**Lema 36.8** *Seja  $(M, g)$  é uma variedade Lorentziana de dimensão  $m + 1$ . Sejam  $p \in M$  e sejam  $u, v \in T_p M$  tais que  $u$  é tipo tempo e  $v \neq 0$  não é de tipo espaço (ou seja, é tipo tempo ou tipo luz), então  $g(u, v)_p \neq 0$ , ou seja, tem-se  $g(u, v)_p < 0$  ou  $g(u, v)_p > 0$ .* □

*Prova*. A demonstração é feita por contradição. Vamos assumir que  $g(u, v)_p = 0$ . Teríamos  $g(\alpha u + v, \alpha u + v)_p = \alpha^2 g(u, u)_p + g(v, v)_p > 0$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  com  $\alpha \neq 0$ , pois  $g(u, u)_p > 0$  e  $g(v, v)_p \geq 0$ . Escolhamos uma base na qual  $g_p$  assume a forma diagonal canônica  $g_p = \text{diag}(+, -, \dots, -)$  (vide página 1711). Teremos que  $0 < g(u, u)_p = (u^0)^2 - \sum_{k=1}^{m-1} (u^k)^2$ , implicando  $(u^0)^2 > \sum_{k=1}^{m-1} (u^k)^2 \geq 0$  e, portanto  $u^0 \neq 0$ . Analogamente, teremos que  $v^0 \neq 0$ , pois se  $v^0 = 0$  valeria  $0 \leq g(v, v)_p = -\sum_{k=1}^{m-1} (v^k)^2$ , um absurdo, pois assumimos que  $v \neq 0$ . Agora, além disso, teremos também  $g(\alpha u + v, \alpha u + v)_p = (\alpha u^0 + v^0)^2 - \sum_{k=1}^{m-1} (\alpha u^k + v^k)^2$ . Assim, com a escolha  $\alpha = -v^0/u^0$  teríamos  $\alpha \neq 0$  com  $g(\alpha u + v, \alpha u + v)_p = -\sum_{k=1}^{m-1} (\alpha u^k + v^k)^2 \leq 0$ , uma contradição que implica  $g(u, v)_p \neq 0$ . ■

É natural, portanto, introduzirmos a seguinte definição. Se  $(M, g)$  é uma variedade Lorentziana e  $p \in M$ , dizemos que dois vetores tipo tempo  $u, v \in T_p M$  têm a mesma *orientação temporal* se  $g(u, v)_p > 0$  e, analogamente, dizemos que  $u$  e  $v$  têm *orientações opostas* se  $g(u, v)_p < 0$ . Dizemos também que  $u$  é *positivamente orientado* em relação a  $v$  se  $g(u, v)_p > 0$  e que  $u$  é *negativamente orientado* em relação a  $v$  se  $g(u, v)_p < 0$ . Nesse contexto, a proposição a seguir é de especial relevância:

**Proposição 36.22** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Lorentziana, seja  $p \in M$  e sejam  $u, v, w \in T_p M$  três vetores tipo tempo. Então, a orientação de  $u$  em relação a  $v$  coincide com a orientação de  $u$  em relação a  $w$  se e somente se  $g(v, w)_p > 0$  ou seja, se e somente se  $v$  e  $w$  têm a mesma orientação temporal.* □

A Proposição 36.22, acima, é uma consequência imediata do seguinte lema, o qual possui interesse próprio:

**Lema 36.9** *Se  $(M, g)$  é uma variedade Lorentziana,  $p \in M$  e  $u, v, w \in \mathbb{T}_p M$  são três vetores tipo tempo arbitrários, então,  $g(u, v)_p g(v, w)_p g(w, u)_p > 0$ .*  $\square$

**Prova.** Vamos supor que  $g(u, v)_p > 0$ ,  $g(w, v)_p > 0$  mas  $g(u, w)_p < 0$ . Como  $g(u + \lambda v, u + \lambda v)_p = \lambda^2 g(v, v)_p + 2\lambda g(u, v)_p + g(u, u)_p$ , segue que  $u + \lambda v$  é tipo tempo para todo  $\lambda \geq 0$ . Seja  $F(\lambda) := g(u + \lambda v, w)_p = g(u, w)_p + \lambda g(v, w)_p$ . Como  $u + \lambda v$  é tipo tempo para todo  $\lambda \geq 0$  segue do Lema 36.8 que  $F(\lambda)$  não se anula para nenhum  $\lambda \geq 0$ . Seja  $\lambda_0 \equiv -\frac{g(u, w)_p}{g(v, w)_p}$ . Pela hipótese,  $\lambda_0 > 0$ . Agora, como facilmente se verifica, tem-se  $F(\lambda_0) = 0$ , uma contradição que implica que  $g(u, w)_p \geq 0$ . Como a igualdade é impossível pelo Lema 36.8, segue que  $g(u, w)_p > 0$ .

Assim, provamos que se  $g(u, v)_p > 0$  e  $g(w, v)_p > 0$ , então  $g(u, w)_p > 0$ . Analisemos agora as outras três possibilidades.

- Se  $g(u, v)_p < 0$  e  $g(w, v)_p < 0$  valeria, obviamente,  $g(u, -v)_p > 0$ ,  $g(w, -v)_p > 0$ , o que, pelo exposto acima, implica  $g(u, w)_p > 0$ .
- Se  $g(u, v)_p < 0$  e  $g(w, v)_p > 0$  valeria, obviamente,  $g(-u, v)_p > 0$ ,  $g(w, v)_p > 0$ , o que, pelo exposto acima, implica  $g(-u, w)_p > 0$ , ou seja  $g(u, w)_p < 0$ .
- Se  $g(u, v)_p > 0$ , e  $g(w, v)_p < 0$  valeria, obviamente,  $g(u, v)_p > 0$ ,  $g(-w, v)_p > 0$ , o que, pelo exposto acima, implica  $g(u, -w)_p > 0$ , ou seja,  $g(u, w)_p < 0$ .

Os quatro casos acima descritos esgotam as possibilidades e em cada um vale que  $g(u, v)_p g(v, w)_p g(w, u)_p > 0$ .  $\blacksquare$

#### • Relação de equivalência de vetores tipo tempo

Com a Proposição 36.22 é possível estabelecer uma relação de equivalência (vide Seção 1.1.1.3, página 42) entre vetores tipo tempo: se  $u, v \in \mathbb{T}_p M$  são vetores tipo tempo, dizemos que  $u \sim v$  se  $g(u, v)_p > 0$ , ou seja,  $u \sim v$  se  $u$  e  $v$  têm a mesma orientação temporal. A condição de reflexividade  $u \sim u$  é evidente para vetores tipo tempo, a condição de simetria ( $u \sim v$  implica  $v \sim u$ ) é evidente pela simetria do tensor métrico e a transitividade ( $u \sim v$  e  $u \sim w$  implicam  $v \sim w$ ) segue da Proposição 36.22.

**E. 36.36** *Exercício (fácil).* Mostre que se  $u, v \in \mathbb{T}_p M$  são vetores tipo tempo equivalentes (no sentido acima), então  $\alpha u$  e  $\beta v$  também o são para quaisquer  $\alpha, \beta > 0$  e mostre que  $\lambda u + (1 - \lambda)v$  é também equivalente a  $u$  e a  $v$  para todo  $\lambda \in [0, 1]$ . Esses fatos afirmam que as classes de equivalência pela relação de equivalência acima compõem cones convexos em  $\mathbb{T}_p M$ .  $\spadesuit$

#### • Orientação temporal de variedades Lorentzianas

As considerações acima sobre orientação de vetores tipo tempo sugerem a introdução de uma importante definição. Uma variedade Lorentziana é dita ser *temporalmente orientada* se existir um campo  $T \in \mathcal{X}(M)$  que seja tipo tempo em todo ponto de  $M$ . Se um tal campo existir, então é possível empregá-lo de modo a definir de forma global uma orientação aos vetores tipo tempo de cada espaço tangente  $\mathbb{T}_p M$ ,  $p \in M$ . Observe-se que, de acordo com as observações acima, dois campos  $T, T' \in \mathcal{X}(M)$  que sejam tipo tempo em todo ponto de  $M$  proverão a mesma orientação se e somente se  $g(T, T')_p > 0$  para todo  $p \in M$ .

Dada uma variedade Lorentziana  $(M, g)$  temporalmente orientada e um campo  $T$  que provê uma orientação temporal a  $M$ , dizemos que um vetor tipo tempo  $v \in \mathbb{T}_p M$  é *orientado ao futuro* em relação a  $T$ , ou *aponta para o futuro* em relação a  $T$ , se  $g(v, T)_p > 0$ . Analogamente, que um vetor tipo tempo  $v \in \mathbb{T}_p M$  é *orientado ao passado* em relação a  $T$ , ou *aponta para o passado* em relação a  $T$ , se  $g(v, T)_p < 0$ .

Essa nomenclatura estende-se também a curvas tipo tempo em  $M$ . Uma curva tipo tempo  $c : I \rightarrow M$  (com  $I$  sendo um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ ) é dita ser *dirigida para o futuro* (*dirigida para o passado*) em relação a  $T$  se os vetores tangentes  $\dot{c}(t)$  forem orientados ao futuro (ao passado) para todo  $t \in I$ , ou seja, se  $g(\dot{c}(t), T)_{c(t)} > 0$  (se  $g(\dot{c}(t), T)_{c(t)} < 0$ ) para todo  $t \in I$ .

Uma questão relevante nesse contexto é a de se saber sob quais condições uma variedade Lorentziana é orientável temporalmente. A seguinte observação é útil nesse contexto:

**Proposição 36.23** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável e suponhamos que exista um campo  $U \in \mathcal{X}(M)$  tal que  $U_p$  é não-nulo para todo  $p \in M$ . Então  $M$  possui um tensor métrico Lorentziano na qual é temporalmente orientada.*  $\square$

**Prova.** Segundo a Proposição 36.2, página 1712, e sua demonstração,  $M$  é uma variedade Lorentziana para o tensor métrico  $g := 2V_{\mathfrak{h}_n} \otimes V_{\mathfrak{h}_n} - h$ , onde  $V \in \mathcal{X}(M)$  é definido por  $V_p = (h(U, U_p))^{-1/2} U_p$ ,  $p \in M$ , e  $h$  é um tensor métrico Riemanniano em  $M$ . Para esse tensor métrico vale  $g(V, V)_p = 1$  (vide demonstração da Proposição 36.2), mostrando que  $V$  é tipo tempo.  $\blacksquare$

Uma conclusão imediata é que uma variedade diferenciável admite um tensor métrico Lorentziano com o qual é temporalmente orientável se e somente se existir um campo  $V \in \mathcal{X}(M)$  que não se anula em  $M$ . Tal condição requer ou que  $M$  seja não-compacta ou que tenha característica de Euler igual a zero.

### 36.6.1 A Identidade de Raychaudhuri

Nesta seção consideraremos sempre o caso de conexões de Levi-Civita em uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $m$ . Nosso maior interesse reside no caso de tensores métricos Lorentzianos, mas alguns dos resultados abaixo têm validade mais geral. Nosso propósito é derivar uma versão da chamada *identidade de Raychaudhuri*<sup>51</sup>, ou de *identidade de Raychaudhuri-Landau*<sup>52</sup>, que nos permita uma dedução simples de um importante teorema de singularidades da Teoria da Relatividade Geral, o chamado Teorema de Hawking<sup>53</sup>-Penrose<sup>54</sup>.

A análise da identidade de Raychaudhuri apresenta um caminho alternativo ao da equação de Jacobi para o estudo de propriedades de curvas geodésicas e adapta-se bem ao contexto de variedades Lorentzianas. Trata-se de uma equação que descreve a dinâmica de expansão de famílias de curvas geodésicas. Nossos primeiros passos serão no sentido de apresentar os ingredientes necessários para a definição e análise dessa dinâmica. A identidade de Raychaudhuri será obtida em seguida e passaremos a discutir condições suficientes para o mencionado teorema de singularidades, que será enunciado e demonstrado ao final.

No que segue,  $M$  é uma variedade diferenciável Lorentziana  $m$ -dimensional (com  $m \geq 2$ ) e índices de coordenadas, vetores, tensores etc. variam de 0 a  $m - 1$ , salvo menção em contrário.

#### • Congruências de curvas

Seja  $M$  um variedade diferenciável e seja  $X \in \mathcal{X}(M)$  um campo vetorial que não se anula em  $M$  (como já comentamos, que um tal campo exista depende da validade de certas propriedades topológicas de  $M$ , como ter característica de Euler nula ou ser não-compacta). A família de curvas integrais de  $X$  é denominada uma *congruência de curvas*.

No caso Lorentziano, congruências são denominadas tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-luz se o campo  $X$  for (em todo ponto) tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-luz, respectivamente.

#### • Campos geodésicos e congruências geodésicas

Um campo vetorial  $X \in \mathcal{X}(M)$  que não se anula em  $M$  é dito ser uma *campo geodésico* se satisfizer  $\nabla_X X = 0$ .

Uma congruência de curvas associada a um campo  $X \in \mathcal{X}(M)$  é dita ser uma *congruência geodésica* se  $X$  for um campo geodésico.

Por definição, as curvas  $c$  da congruência associada a  $X$  satisfazem  $\dot{c} = X(c(t))$  e, portanto, para a derivada covariante de  $X$  ao longo de uma particular curva  $c$  teremos

$$\frac{D}{dt} X(c(t)) \stackrel{(36.65)}{=} (\nabla_{\dot{c}(t)} X)_{c(t)} = (\nabla_X X)_{c(t)} = 0.$$

Assim,  $\frac{D}{dt} \dot{c} = 0$  e concluímos que uma congruência geodésica é uma família de curvas geodésicas.

<sup>51</sup>Amal Kumar Raychaudhuri (1923-2005). A referência ao trabalho original é A. K. Raychaudhuri, "Relativistic cosmology I". Phys. Rev. **98**, 1123 (1955), doi:10.1103/PhysRev.98.1123. Vide também: A. K. Raychaudhuri, Z. Astrophysik **43**, 161 (1957), para um tratamento mais próximo da versão moderna dessa identidade.

<sup>52</sup>Lev Davidovich Landau (1908-1968). A contribuição de Landau ao tema apareceu nas primeiras edições de [203].

<sup>53</sup>Stephen William Hawking (1942-).

<sup>54</sup>Sir Roger Penrose (1931-).

Dessa forma, podemos entender uma congruência geodésica como uma família de curvas geodésicas cujo campo de velocidades associado (o campo que a cada  $p \in M$  associa  $\dot{\gamma}_p$ , o vetor velocidade associado à geodésica que passa por  $p$ ) é diferenciável e não se anula em parte alguma.

• **A expansão geodésica e sua interpretação**

Fixada uma congruência geodésica associada a um campo geodésico  $X$ , consideremos a aplicação linear  $\kappa \equiv \mathcal{K}^X : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ , definida em (36.136), que a cada campo vetorial  $B \in \mathcal{X}(M)$  associa  $\kappa(B) := \nabla_B X$ . Em coordenadas locais escrevemos

$$\kappa \left( B^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = (\nabla_B X)^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \left( B^l \frac{\partial X^j}{\partial x^l} + \Gamma^j_{lk} B^l X^k \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Definindo  $\kappa^j_i$  por  $\kappa \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \kappa^j_i \frac{\partial}{\partial x^j}$  teremos

$$\kappa^j_i = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} + \Gamma^j_{ik} X^k$$

e podemos escrever, para  $B \in \mathcal{X}(M)$ ,

$$\kappa \left( B^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \kappa^j_i B^i \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Como auxílio ao leitor, apontamos que as componentes de  $\kappa$  podem ser denotadas de outras formas, eventualmente mais familiares:

$$\kappa^j_i \equiv \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X^j \equiv \nabla_i X^j \equiv X^j_{;i}. \tag{36.274}$$

Apontamos também que, de acordo com nossas convenções, podemos interpretar  $\kappa$  como um tensor de tipo (1, 1), a saber, como

$$\kappa = \kappa^j_i \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^i.$$

Para uso futuro, observemos que

$$\nabla_X (\kappa(B)) = R(X, B)X + \nabla_{[X, B]} X \tag{36.275}$$

o que se demonstra do fato que

$$\nabla_X (\kappa(B)) = \nabla_X \nabla_B X = \left( \nabla_X \nabla_B - \nabla_B \nabla_X \right) X + \nabla_B \underbrace{\nabla_X X}_{=0} = R(X, B)X + \nabla_{[X, B]} X.$$

A chamada *expansão geodésica* associada ao campo geodésico  $X$  é a grandeza escalar definida por

$$\theta := \text{Tr}(\kappa) \stackrel{(36.137)}{=} \text{div}(X). \tag{36.276}$$

Como veremos com a expressão (36.302), adiante,  $\theta$  pode ser interpretado como a taxa de variação de um elemento de volume “infinitesimal” definido por uma congruência de geodésicas, daí a denominação *expansão geodésica*. A identidade de Raychaudhuri, que obteremos adiante, mostra-nos essencialmente como  $\theta$  evolui ao longo de uma geodésica e do estudo dessa evolução podem ser extraídas conclusões importância sobre a estrutura de certas variedades Lorentzianas, como os espaços-tempos da Teoria da Relatividade Geral.

• **A identidade de Raychaudhuri**

Como discutido à página 1715, tomemos  $\{e_0, \dots, e_{m-1}\}$ , uma base de vetores em  $\mathbb{T}_p M$ , e  $\{e^0, \dots, e^{m-1}\}$ , sua base dual de covetores em  $\mathbb{T}_p^* M$ , de sorte que para o pareamento de  $e^i$  e  $e_j$ , valha  $\langle e^i, e_j \rangle_p = \delta^i_j$ . Sejam também as bases de vetores  $\{e^{0\sharp}, \dots, e^{m-1\sharp}\}$  em  $\mathbb{T}_p M$  e de covetores duais  $\{e_{0\sharp}, \dots, e_{m-1\sharp}\}$ , definidos em (36.23), de sorte que tenhamos (36.26).

Teremos, usando a convenção de Einstein para soma sobre índices repetidos,

$$\theta := \text{Tr}(\kappa) = \langle e^i, \kappa(e_i) \rangle = g(e^{i\sharp}, \kappa(e_i))$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} X(\theta) &= X(g(e^{i\sharp}, \kappa(e_i))) \\ &= g(\nabla_X e^{i\sharp}, \kappa(e_i)) + g(e^{i\sharp}, \nabla_X (\kappa(e_i))) \\ &= g(\nabla_X e^{i\sharp}, \kappa(e_i)) + g(e^{i\sharp}, R(X, e_i)X) + g(e^{i\sharp}, \nabla_{[X, e_i]} X). \end{aligned} \tag{36.277}$$

Para o primeiro termo do lado direito de (36.277) temos o seguinte resultado:

**Lema 36.10** Para qualquer tensor  $L : \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_p M$  vale

$$g(e^{i\sharp}, L(\nabla_X e_i)) = -g(\nabla_X e^{i\sharp}, L(e_i)). \tag{36.278}$$

□

*Prova.* Em primeiro lugar, observemos que

$$\nabla_X e^{i\sharp} = g(e_k, \nabla_X e^{i\sharp}) e^{k\sharp} \quad \text{e que} \quad \nabla_X e_i = g(e^{l\sharp}, \nabla_X e_i) e_l, \tag{36.279}$$

como é fácil de verificar (faça-o!). Como  $g(e^{i\sharp}, e_i) = \delta^i_i$ , constante, vale  $0 = X(g(e^{i\sharp}, e_i)) = g(\nabla_X e^{i\sharp}, e_i) + g(e^{i\sharp}, \nabla_X e_i)$ , implicando

$$g(\nabla_X e^{i\sharp}, e_i) = -g(e^{i\sharp}, \nabla_X e_i). \tag{36.280}$$

Assim,

$$L(\nabla_X e_i) \stackrel{(36.279)}{=} g(e^{i\sharp}, \nabla_X e_i) L(e_i) \stackrel{(36.280)}{=} -g(\nabla_X e^{i\sharp}, e_i) L(e_i).$$

Logo,

$$g(e^{i\sharp}, L(\nabla_X e_i)) = -g(\nabla_X e^{i\sharp}, e_i) g(e^{i\sharp}, L(e_i)) = -g(g(e_i, \nabla_X e^{i\sharp}) e^{i\sharp}, L(e_i)) \stackrel{(36.279)}{=} -g(\nabla_X e^{i\sharp}, L(e_i)),$$

que é o que queríamos provar. ■

Retornando a (36.277) podemos, usando (36.278), escrever o primeiro termo do lado direito como  $-g(e^{i\sharp}, \kappa(\nabla_X e_i))$  e, com isso, a soma do primeiro e o terceiro termos do lado direito de (36.277) fica

$$g(e^{i\sharp}, [-\kappa(\nabla_X e_i) + \nabla_{[X, e_i]} X]). \tag{36.281}$$

Podemos reescrever a expressão entre colchetes, acima, como

$$\begin{aligned} -\kappa(\nabla_X e_i) + \nabla_{[X, e_i]} X &= -\nabla_{\nabla_X e_i} X + \nabla_{[X, e_i]} X = \nabla_{-\nabla_X e_i + [X, e_i]} X = \nabla_{-\nabla_{e_i} X} X = -\nabla_{\nabla_{e_i} X} X \\ &= -\nabla_{\kappa(e_i)} X = -\kappa(\kappa(e_i)) = -(\kappa)^2(e_i) \end{aligned}$$

e com isso (36.281) fica

$$-g(e^{i\sharp}, (\kappa)^2(e_i)) = -\text{Tr}((\kappa)^2).$$

Inserindo isso em (36.277), e usando que  $-g(e^{i\sharp}, R(X, e_i)X) = g(e^{i\sharp}, R(e_i, X)X)$  (antissimetria do tensor de curvatura), obtemos

$$X(\theta) + \text{Tr}((\kappa)^2) + g(e^{i\sharp}, R(e_i, X)X) = 0,$$

ou seja,

$$X(\theta) + \text{Tr}((\kappa)^2) + \text{Ric}(X, X) = 0. \quad (36.282)$$

(Para a definição de Ric, o tensor de Ricci, vide (36.200) e (36.202)). Em um sistema local de coordenadas essa identidade assume a forma

$$X^a \frac{\partial \theta}{\partial x^a} + \kappa^a{}_b \kappa^b{}_a + R_{ab} X^a X^b = 0. \quad (36.283)$$

A equação (36.282) (ou (36.283)) é nossa primeira versão da prometida *identidade de Raychaudhuri*. No que segue, obteremos uma ou duas variações da mesma, mais adequadas ao tratamento do chamado *Teorema de Hawking-Penrose*. Somando-se e subtraindo-se o termo  $\frac{1}{m-1}(\text{Tr}\kappa)^2 = \frac{1}{m-1}\theta^2$  em (36.282), obtém-se,

$$X(\theta) + \frac{1}{m-1}\theta^2 + \left[ \text{Tr}((\kappa)^2) - \frac{1}{m-1}(\text{Tr}\kappa)^2 \right] + \text{Ric}(X, X) = 0. \quad (36.284)$$

Afirmamos que, em circunstâncias a serem precisadas, o termo entre colchetes satisfaz

$$\text{Tr}((\kappa)^2) - \frac{1}{m-1}(\text{Tr}\kappa)^2 \geq 0. \quad (36.285)$$

A demonstração desse fato será apresentada logo adiante. Com isso e com a imposição da condição  $\text{Ric}(X, X) \geq 0$  (denominada *condição forte de energia*, na Teoria da Relatividade Geral) demonstraremos a impossibilidade de prolongamento de geodésicas para tempos infinitos ou a existência de pontos conjugados para determinadas geodésicas tipo-tempo, que são parte do conteúdo do célebre *Teorema de Hawking-Penrose* da Teoria da Relatividade Geral.

### • Reescrevendo a identidade de Raychaudhuri. Os tensores de cisalhamento e de rotação

Para acompanhar a literatura física, e com outros propósitos futuros, vamos apresentar uma forma alternativa da identidade de Raychaudhuri. Vamos introduzir dois novos tensores de tipo (1, 1), denotados por  $\sigma$  e  $\omega$  e denominados *tensor de cisalhamento* (“shear tensor”)  $\sigma$  e *tensor de rotação* (“rotation tensor”)  $\omega$ , respectivamente, os quais são definidos da seguinte forma:

$$\sigma := \frac{1}{2}(\kappa + \kappa^\dagger) - \frac{1}{m-1}(\mathbb{1} - X \otimes X_\sharp)\theta, \quad (36.286)$$

$$\omega := \frac{1}{2}(\kappa - \kappa^\dagger). \quad (36.287)$$

Em termos de componentes em cartas locais de coordenadas, isso se escreve

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{2}(\kappa_{ab} + \kappa_{ba}) - \frac{1}{m-1}(g_{ab} - X_a X_b)\theta \quad (36.288)$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla_b X_a + \nabla_a X_b) - \frac{1}{m-1}(g_{ab} - X_a X_b)\theta, \quad (36.289)$$

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2}(\kappa_{ab} - \kappa_{ba}) \quad (36.290)$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla_b X_a - \nabla_a X_b), \quad (36.291)$$

sendo, como antes,  $\theta := \text{Tr}(\kappa) = \kappa^c{}_c$ . Como se vê, o tensor de rotação  $\omega$  é uma de versão covariante do rotacional do campo de velocidades geodésicas.

É evidente das últimas expressões que valem

$$\sigma_{ab} = \sigma_{ba} \quad \text{e} \quad \omega_{ab} = -\omega_{ba}.$$

Além disso,  $\sigma$  é definido de tal forma que vale

$$\text{Tr}(\sigma) = \text{Tr}(\kappa) - \frac{1}{m-1}(m-1)\theta = 0,$$

onde usamos que  $\text{Tr}(\mathbb{1}) = m$  e  $X^a X_a = 1$ . Podemos dizer que  $\sigma$  é a parte  $g$ -simétrica e de traço zero de  $\kappa$  e  $\omega$  é a parte  $g$ -antissimétrica de  $\kappa$ .

De qualquer maneira, temos

$$\kappa = \sigma + \omega + \frac{1}{m-1}(\mathbb{1} - X \otimes X_\sharp)\theta. \quad (36.292)$$

ou seja,

$$\kappa_{ab} = \sigma_{ab} + \omega_{ab} + \frac{1}{m-1}(g_{ab} - X_a X_b)\theta. \quad (36.293)$$

O termo  $\text{Tr}((\kappa)^2)$  em (36.282) pode ser escrito em termos das componentes de  $\kappa$  como

$$\text{Tr}((\kappa)^2) = \kappa^a{}_b \kappa^b{}_a = \kappa^{ab} \kappa_{ba}.$$

É um exercício elementar constatar de (36.292) ou de (36.293) que vale

$$\text{Tr}((\kappa)^2) = \sigma^{ab} \sigma_{ab} - \omega^{ab} \omega_{ab} + \frac{1}{m-1}\theta^2. \quad (36.294)$$

**E. 36.37 Exercício.** Verifique! *Sugestões:* se desejar usar a notação com índices, use o fato que expressões como  $\sigma^{ab} \omega_{ab}$  e  $(g_{ab} - X_a X_b) \omega^{ab}$  anulam-se, pois  $\sigma^{ab}$  e  $g_{ab} - X_a X_b$  são simétricos na troca de índices, enquanto que  $\omega_{ab}$  é antissimétrico. Use também que  $X^c X_c = 1$  e use que  $X^a \kappa_{ab} X^b = X_a \underbrace{\kappa^a{}_b X^b}_0$  e que  $\sigma^a{}_a = 0$  para provar que  $\sigma^{ab}(g_{ab} - X_a X_b) = 0$ . Recorde também que

$$\text{Tr}(\mathbb{1}) = \delta^a{}_a = m. \quad *$$

Com (36.294), a identidade de Raychaudhuri (36.282) pode ser escrita em coordenadas locais como

$$X^a \frac{\partial \theta}{\partial x^a} + \frac{1}{m-1}\theta^2 + \sigma^{ab} \sigma_{ab} - \omega^{ab} \omega_{ab} + R_{ab} X^a X^b = 0. \quad (36.295)$$

Essa versão da identidade de Raychaudhuri é frequentemente encontrada na literatura física devido à interpretação atribuída aos tensores  $\sigma$  e  $\omega$ .

### • Coordenadas Gaussianas normais

Para prosseguirmos em nossa análise da identidade de Raychaudhuri é importante fazermos uso de um sistema de coordenadas específico, a saber, do chamado *sistema de coordenadas Gaussianas normais*. Esse sistema de coordenadas conduz a simplificações úteis e facilita a interpretação de certas grandezas, como a expansão geodésica  $\theta$ . Começemos com algumas definições.

Uma subvariedade  $(m-1)$ -dimensional  $S$  de  $M$  é dita ser uma hipersuperfície de tipo espaço se todos os vetores tangentes a  $S$  forem de tipo espaço.

Dizemos que  $M$  pode ser folheada por  $S$  se existir um difeomorfismo infinitamente diferenciável  $\psi : M \rightarrow S \times I$ , onde  $I$  é algum intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ . Para  $t \in I$ , denotamos  $S_t := \psi^{-1}(S \times \{t\})$ . Por convenção supomos que  $I \ni 0$  e identificamos  $S \equiv S_0$ .

Para prosseguirmos na análise da identidade de Raychaudhuri é conveniente adotarmos um sistema de coordenadas locais específico, as chamadas *coordenadas Gaussianas normais*, que consistem em coordenadas comovetes (“co-moving”) para congruências geodésicas.

Para introduzi-las é necessário listar a seguinte hipótese adicional em nosso tratamento: a de que o espaço-tempo considerado, a variedade  $m$ -dimensional  $M$ , admite uma folheação a um parâmetro por hipersuperfícies  $(m-1)$ -dimensionais tipo espaço  $S_t$  com  $t \in I$ , com  $I$  sendo algum intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ .

Seja  $S$  como acima e seja  $p \in S$ . Vamos constituir um sistema de coordenadas em uma vizinhança de  $p$  em  $M$  da seguinte forma. Seja  $N$  uma vizinhança de  $p$  em  $S$  e seja  $q \in N$ . Consideremos a geodésica  $\gamma(\tau, q, n)$  que passa por  $q$  em  $\tau = 0$  sendo  $n \in \mathbb{T}_q M$  o vetor tipo-tempo  $g$ -normal a  $S$  (ou seja, tal que  $g(n, t)_q = 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}_q M$  tangente a  $S$ ), orientado para o futuro e de satisfazendo  $g(n, n)_q = 1$ . Cada ponto  $\gamma(\tau, q, n)$  ao longo dessa geodésica pode ser associado a uma coordenada “temporal”, a saber  $\tau$  e a  $m-1$  coordenadas “espaciais”, por exemplos aquelas que coordenatizam  $q$  na subvariedade  $S$ .

Esse procedimento produz um sistema de coordenadas em alguma vizinhança em torno de cada ponto  $p \in M$  denominado *sistema de coordenadas Gaussianas normais*.

Note-se que esse sistema de coordenadas pode não compor um atlas único para toda a variedade. Além disso, a coordenada  $\tau$  em cada carta local pode ser limitada a algum intervalo, pois pode ocorrer cruzamento de geodésicas (“cáusticas”)  $\gamma(\tau, q, n)$  para  $q$ 's e  $\tau$ 's distintos.

Coordenadas Gaussianas normais têm propriedades interessantes para diversos propósitos. Uma delas é a seguinte afirmação, válida para conexões de Levi-Civita: nessas coordenadas a componente  $g_{00}$  do tensor métrico vale 1 e as componentes  $g_{0k}$  com  $k \neq 0$  são nulas. Seja  $r \equiv \gamma(\tau, q, n)$  um ponto na vizinhança de  $p$  com coordenadas  $(\tau, x^1, \dots, x^{m-1})$ . De fato, temos

$$(g_{00})_r = g\left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right)_r = g\left(\dot{\gamma}(\tau, q, n), \dot{\gamma}(\tau, q, n)\right)_r = g(n, n)_q = 1.$$

Além disso, para  $k \neq 0$ ,

$$(g_{0k})_r - (g_{0k})_q = \int_0^\tau \frac{d}{dt} \left[ (g_{0k})_{\gamma(t, q, n)} \right] dt = \int_0^\tau \frac{d}{dt} \left[ g\left(\dot{\gamma}(t, q, n), \frac{\partial}{\partial x^k} \gamma(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} \right] dt.$$

Agora,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[ g\left(\dot{\gamma}(t, q, n), \frac{\partial}{\partial x^k} \gamma(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} \right] \\ &= g\left(\frac{D}{dt} \dot{\gamma}(t, q, n), \frac{\partial}{\partial x^k} \gamma(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} + g\left(\dot{\gamma}(t, q, n), \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k} \gamma(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} \\ &\stackrel{(36.224)}{=} g\left(\dot{\gamma}(t, q, n), \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k} \gamma(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} \stackrel{(36.87)}{=} g\left(\dot{\gamma}(t, q, n), \frac{D}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial t} \gamma(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} \\ &= g\left(\dot{\gamma}(t, q, n), \frac{D}{\partial x^k} \dot{\gamma}(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} = g\left(\dot{\gamma}(t, q, n), \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \dot{\gamma}(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} \\ &\stackrel{(36.90)}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[ g\left(\dot{\gamma}(t, q, n), \dot{\gamma}(t, q, n)\right)_{\gamma(t, q, n)} \right] \stackrel{(36.229)}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} [g(n, n)_q] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} 1 = 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $(g_{0k})_r = (g_{0k})_n = g\left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)_q = g\left(n, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)_q = 0$ , pois  $\frac{\partial}{\partial x^k}|_q$  é um vetor tangente a  $S$  e  $n$  é  $g$ -normal a todo vetor tangente a  $S$ .

Com isso, em coordenadas Gaussianas normais, escrevemos

$$g = d\tau \otimes d\tau + g_{ab} dx^a \otimes dx^b =: d\tau \otimes d\tau + \underline{g}, \tag{36.296}$$

com  $\underline{g} := g_{ab} dx^a \otimes dx^b$  e com a convenção que índices sublinhados são índices espaciais, e sua soma é realizada apenas de 1 a  $m-1$ , não de 0 a  $m-1$ .

Comentamos que  $-\underline{g}$  é um tensor métrico *Riemanniano*  $(m-1)$ -dimensional. De fato, como já comentamos, uma mudança de coordenadas corresponde a uma transformação de congruência na matriz  $g_{ij}$  e uma tal transformação não altera o número de autovalores com um dado sinal (pelo Lei da Inércia de Sylvester, Teorema 9.17, página 406). Em (36.296)  $g$  tem a forma de blocos diagonais, com  $g_{00} = 1$  sendo um autovalor positivo e os demais  $m-1$  autovalores negativos devendo ser os da matriz  $g_{ab}$ .

Devido a essa estrutura em blocos, é evidente que para as componentes do tensor métrico contravariante temos  $g^{00} = 1$ ,  $g^{0k} = 0$  para  $k \neq 0$  e

$$g^\sharp = \frac{\partial}{\partial \tau} \otimes \frac{\partial}{\partial \tau} + g^{ab} \frac{\partial}{\partial x^a} \otimes \frac{\partial}{\partial x^b}. \tag{36.297}$$

Devido à mencionada estrutura em blocos, é fácil verificar que a matriz  $(m-1) \times (m-1)$  com elementos de matriz  $g^{ab}$  é a matriz inversa da matriz com elementos de matriz  $g_{ab}$ .

• **A aplicação  $\kappa$  em coordenadas Gaussianas normais**

Seja  $\mathcal{A}$  um aberto em que tenhamos definidas coordenadas Gaussianas normais e seja  $r \equiv \gamma(\tau, q, n)$ ,  $q \in S$ , e  $n$  como acima, um ponto desse aberto com coordenadas Gaussianas normais  $(\tau, x^1, \dots, x^{m-1})$ . Considere-se a função  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(r) = \tau$ , que associa a cada  $r$  sua coordenada “temporal”  $\tau$ . Temos, nessas coordenadas,

$$\text{grad } f \stackrel{(36.134)}{=} g^{00} \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Paralelamente, a isso, sabemos que  $X(r) = \dot{\gamma}(\tau, q, n) = \frac{\partial}{\partial \tau}$  e, portanto, em coordenadas Gaussianas normais  $X$  tem por componentes  $X^0 = 1$  e  $X^k = 0$ ,  $k \neq 0$ . De qualquer modo, isso estabelece que  $X = \text{grad } f$  e, portanto,  $\kappa = \mathcal{L}^f$ , pela notação empregada na Proposição 36.5, página 1744. Essa mesma proposição estabelece que  $\kappa$  é  $g$ -simétrica e, portanto, valem para suas componentes em qualquer sistema de coordenadas as relações

$$\kappa^i_j = \kappa_j^i \quad \text{e} \quad \kappa_{ij} = \kappa_{ji}. \tag{36.298}$$

Como sabemos pela definição de  $X$ , vale  $\kappa(X) = \nabla_X X = 0$ , ou seja,  $\kappa^i_j X^j = 0$  para todo  $i$ . Em coordenadas Gaussianas normais isso implica que  $\kappa^i_0 = 0$  para todo  $i$ . Pela primeira relação em (36.298), temos também nessas coordenadas que  $\kappa_0^i = 0$ . Além disso,  $\kappa_{kj} = g_{ki} \kappa^i_j$ . Logo, em coordenadas Gaussianas normais teremos  $\kappa_{k0} = g_{ki} \kappa^i_0 = 0$  para todo  $k$ . Pela segunda relação em (36.298), temos também  $\kappa_{0k} = 0$ , também para todo  $k$ . Segue facilmente disso e do fato que  $g_{0k} = g^{0k} = 0$  para todo  $k \neq 0$  que valem também  $\kappa^0_i = \kappa_i^0 = 0$  para todo  $i$  e  $\kappa^{0i} = \kappa_{0i} = 0$ , também para todo  $i$ .

A conclusão é que quaisquer componentes de  $\kappa$  que possuam ao menos um índice igual a 0 anulam-se. Com isso, no sistema de coordenadas Gaussianas normais, temos, de acordo com nossa notação e convenções,

$$\text{Tr}(\kappa) = \kappa^a_a \quad \text{e} \quad \text{Tr}(\kappa^2) = \kappa_{ab} \kappa^{ab},$$

que envolvem apenas somas sobre índices espaciais. Note-se ainda que  $\kappa_{ab} = g_{ac} \kappa^{cd} g_{db}$  envolve apenas as componentes espaciais de  $-\underline{g}$ , as quais compõem um tensor métrico Riemanniano  $(m-1)$ -dimensional, como já observamos. Estamos, portanto, sob as mesmas hipóteses que garantem as desigualdades (36.51), que dizem-nos, por fim, que

$$\text{Tr}(\kappa^2) - \frac{1}{m-1} (\text{Tr} \kappa)^2 \geq 0, \tag{36.299}$$

que é a desigualdade (36.285). Observe-se que, apesar dessa desigualdade ter sido obtida no caso específico de coordenadas Gaussianas normais, ela é válida em qualquer sistema de coordenadas, pois as grandezas nela envolvidas são invariantes escalares.

Com a desigualdade (36.299) concluímos de (36.284) que valerá

$$X(\theta) + \frac{1}{m-1} \theta^2 + \text{Ric}(X, X) \leq 0. \tag{36.300}$$

Essa inequação diferencial será explorada mais adiante. Note-se que ela assume em coordenadas Gaussianas normais a forma

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{1}{m-1} \theta^2 + R_{00} \leq 0. \tag{36.301}$$

• **Interpretação da expansão geodésica  $\theta$**

Em coordenadas Gaussianas normais temos também, como vimos em (36.276), que

$$\theta := \text{Tr}(\kappa) \stackrel{(36.137)}{=} \text{div}(X) \stackrel{(36.138)}{=} \Gamma^i_{i0} = \left\{ \begin{matrix} i \\ 0 \end{matrix} \right\} \stackrel{(36.114)}{=} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \frac{\partial \sqrt{|\mathbf{g}|}}{\partial \tau} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \frac{\partial \sqrt{|\mathbf{g}|}}{\partial \tau}, \tag{36.302}$$

para conexões de Levi-Civita, pois  $X^0 = 1$  e  $X^k = 0$  se  $k \neq 0$ . Como  $\sqrt{|\mathbf{g}|} d\tau dx^1 \dots dx^{m-1}$  é a medida de volume invariante em  $M$  (vide (36.9)), expresso em coordenadas Gaussianas normais, vemos de (36.302) que  $\theta$  mede a taxa de expansão de um elemento de volume ao longo de uma geodésica.



• Os tensores  $\sigma$  e  $\omega$  em coordenadas Gaussianas normais

A condição (36.298) implica, evidentemente, que  $\omega_{ab} = 0$  e que  $\sigma_{ab} = \kappa_{ab} - \frac{1}{m-1}(g_{ab} - X_a X_b)\theta$ . Já vimos que, em coordenadas Gaussianas normais, as componentes de  $\kappa$  que tenham ao menos um índice igual a zero se anulam. O mesmo ocorre com o tensor de componentes  $g_{ab} - X_a X_b$ , como facilmente se constata (faça-o!), e, portanto, com o tensor  $\sigma$ . Assim, temos que  $\text{Tr}(\sigma^2) = \sigma^{ab}\sigma_{ab} = \sigma^{ab}\sigma_{ab} \geq 0$ , devido à desigualdade (36.45), por estarmos de volta ao caso Riemanniano. Assim, a equação (36.295) torna-se no sistema de coordenadas Gaussianas normais

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \frac{1}{m-1}\theta^2 + \sigma^{ab}\sigma_{ab} + R_{00} = 0, \tag{36.303}$$

e a última desigualdade informa-nos que

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \frac{1}{m-1}\theta^2 + R_{00} \leq 0 \tag{36.304}$$

e, com isso, reobtemos a inequação diferencial (36.301).

Observemos *en passant* que (36.303) é uma equação diferencial do tipo de Riccati (vide Seção 12.2, página 520). Usando (36.302), escrevemos  $\theta = \frac{\partial}{\partial\tau} \ln \sqrt{|\mathbf{g}|} = (m-1)\frac{\partial}{\partial\tau} \ln \left( |\mathbf{g}|^{\frac{1}{2(m-1)}} \right)$  e, portanto,

$$\theta = (m-1)|\mathbf{g}|^{-\frac{1}{2(m-1)}} \frac{\partial}{\partial\tau} \left( |\mathbf{g}|^{\frac{1}{2(m-1)}} \right). \tag{36.305}$$

Introduzindo isso em (36.303) obtemos a equação diferencial linear de segunda ordem

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \left( |\mathbf{g}|^{\frac{1}{2(m-1)}} \right) + \left( \frac{\sigma^{ab}\sigma_{ab} + R_{00}}{m-1} \right) |\mathbf{g}|^{\frac{1}{2(m-1)}} = 0. \tag{36.306}$$

Essa versão da identidade de Raychaudhuri é muito próxima da obtida originalmente por aquele autor.

• A condição forte de energia e consequências da desigualdade (36.285)

Uma variedade Lorentziana é dita satisfazer a *condição forte de energia*<sup>55</sup> se valer

$$\text{Ric}(Y, Y) \geq 0. \tag{36.307}$$

para todo campo vetorial tipo-tempo  $Y$ . Antes de esclarecermos seu significado físico no contexto da Teoria da Relatividade Geral, apontemos para as consequências da mesma. Com ela, obtemos de (36.300) que

$$X(\theta) + \frac{1}{m-1}\theta^2 \leq 0, \tag{36.308}$$

que em coordenadas Gaussianas normais fica

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \frac{1}{m-1}\theta^2 \leq 0. \tag{36.309}$$

(Notar que a condição  $\text{Ric}(X, X)$  significa em coordenadas Gaussianas normais que  $R_{00} \geq 0$ ).

Observamos também que com a positividade de  $\sigma^{ab}\sigma_{ab}$  e com condição forte de energia, (36.306) diz-nos que  $\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \left( |\mathbf{g}|^{\frac{1}{2(m-1)}} \right) \leq 0$  e, portanto,  $|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2(m-1)}}(\tau)$  é uma função côncava nos intervalos em que for contínua e diferenciável.

Vamos agora analisar as consequências da desigualdade (36.309). Em (36.309),  $\theta(\tau) \equiv \theta(\gamma(\tau, p, n_p))$ ,  $p \in S$ . Denotemos  $\theta(0) \equiv \theta_0$ . Dividindo ambos os lados de (36.309) por  $\theta^2$ :

$$0 \geq \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial\theta(\tau)}{\partial\tau} + (m-1)\theta^{-1} = \frac{\partial}{\partial\tau} \left( -\theta(\tau)^{-1} + \tau/(m-1) \right).$$

Logo, para  $\theta_0 \neq 0$  temos  $-\theta(\tau)^{-1} + \tau/(m-1) \leq -\theta_0^{-1} + \theta(\tau) \leq (\tau/(m-1) + \theta_0^{-1})^{-1}$ . Para  $\theta_0 = 0$  podemos dizer de (36.309) que  $\theta(\tau) \leq \frac{-1}{m-1} \int_0^\tau \theta(\tau')^2 d\tau' \leq 0$ .

<sup>55</sup>A justificativa para essa denominação virá adiante.

Em resumo, segue de (36.309) que

$$\theta(\tau) \leq \phi(\tau) := \begin{cases} 0, & \text{se } \theta_0 = 0, \\ \frac{m-1}{\tau - \tau_*}, & \text{se } \theta_0 \neq 0, \end{cases} \quad \text{onde } \tau_* := -\frac{m-1}{\theta_0}. \tag{36.310}$$

Para  $\theta_0 \neq 0$  as características mais relevantes da função  $\phi$  são as seguintes:  $\phi$  é contínua e decrescente nos intervalos  $(-\infty, \tau_*)$  e  $(\tau_*, \infty)$ , diverge para  $-\infty$  quando  $\tau$  aproxima-se de  $\tau_*$  pela esquerda e para  $+\infty$  quando  $\tau$  aproxima-se de  $\tau_*$  pela direita. Observemos também que, por (36.309),  $\frac{\partial\theta}{\partial\tau} \leq \frac{-1}{m-1}\theta^2 < 0$  e, portanto,  $\theta$  é não-crescente nos intervalos em que for contínua e diferenciável, sendo que só podemos eventualmente ter  $\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = 0$  nos pontos em que  $\theta = 0$ .

Vamos analisar o que (36.310) implica para a condição inicial  $\theta_0$ , dando particular atenção à região de valores de  $\tau$  que contém o instante  $\tau = 0$ , no qual a geodésica cruza a superfície de Cauchy  $S$ .

1. Caso  $\theta_0 = 0$ , (36.310) informa-nos apenas que  $\theta(\tau) \leq 0$  e é decrescente, indicando que as curvas geodésicas passando próximas a  $p$  não se afastam umas das outras.
2. Caso  $\theta_0 < 0$ , a função  $\phi$  diverge a  $-\infty$  quando  $\tau$  cresce a partir de 0 e aproxima-se de  $\tau_* > 0$  pela esquerda. Assim, pela mesma desigualdade (36.310), concluímos que  $\theta(\tau)$  deve ser decrescente e deve também divergir para  $-\infty$  em algum ponto  $\tau_\infty$  com  $0 < \tau_\infty \leq \tau_*$ . Assim, a geodésica que passa por  $p$  não pode ser prolongada para tempos superiores a  $\tau_\infty$ .

A função  $\phi$  é negativa em todo o intervalo  $(-\infty, \tau_*)$  e, portanto,  $\theta$  também o é. Por (36.305),  $\frac{\partial}{\partial\tau} \left( |\mathbf{g}|^{\frac{1}{2(m-1)}} \right) < 0$ , o que indica que as curvas geodésicas passando próximas a  $p$  aproximam-se umas das outras.

Por (36.305), o fato de  $\theta$  divergir a  $-\infty$  em  $\tau_\infty$  tem uma das seguintes duas possíveis consequências:

- (a)  $|\mathbf{g}|^{1/2}$  converge a zero quando  $\tau$  aproxima-se de  $\tau_\infty$  pela esquerda. Isso significa que as geodésicas que passam próximas a  $p$  colapsam umas sobre as outras na medida em que  $\tau$  cresce e aproxima-se de  $\tau_\infty$  pela esquerda.
  - (b)  $\frac{\partial}{\partial\tau} |\mathbf{g}|^{1/2}$  diverge a  $-\infty$  quando  $\tau$  aproxima-se de  $\tau_\infty$  pela esquerda, mas  $|\mathbf{g}|^{1/2}$  permanece finito.
3. Caso  $\theta_0 > 0$ , a função  $\phi$  diverge a  $-\infty$  quando  $\tau$  cresce a partir de  $-\infty$  e aproxima-se de  $\tau_* < 0$  pela esquerda. Logo, pela mesma desigualdade (36.310), concluímos que  $\theta(\tau)$  deve também divergir a  $-\infty$  quando  $\tau$  aproxima-se de  $\tau_* < 0$  pela esquerda.

Mais relevante é o que ocorre quando partimos de  $\tau = 0$  e retrocedemos para valores negativos de  $\tau$ . O que acontece a  $\theta$  quando  $\tau$  aproxima-se de  $\tau_*$  pela direita não pode ser decidido pelas considerações acima:  $\theta$  pode divergir a  $+\infty$  ou permanecer finito (esse último caso é o que ocorre no Universo de Milne. Vide abaixo).  $\theta$  não pode divergir para  $-\infty$ , pois isso contraria o fato de  $\theta$  ser decrescente no intervalo considerado.

É certo, porém, devido à desigualdade (36.310), que a geodésica que passa por  $p$  não pode ser prolongada para tempos inferiores a  $\tau_* < 0$ .

Por (36.305), no caso de  $\theta$  divergir a  $+\infty$  quando  $\tau$  aproxima-se de  $\tau_*$  pela direita temos uma das seguintes duas possíveis consequências:

- (a)  $|\mathbf{g}|^{1/2}$  converge a zero quando  $\tau$  aproxima-se de  $\tau_*$  pela direita. Isso significa que as geodésicas que passam próximas a  $p$  colapsam umas sobre as outras na medida em que  $\tau$  decresce e aproxima-se de  $\tau_*$  pela direita.
- (b)  $\frac{\partial}{\partial\tau} |\mathbf{g}|^{1/2}$  diverge a  $+\infty$  quando  $\tau$  aproxima-se de  $\tau_*$  pela direita, mas  $|\mathbf{g}|^{1/2}$  permanece finito.

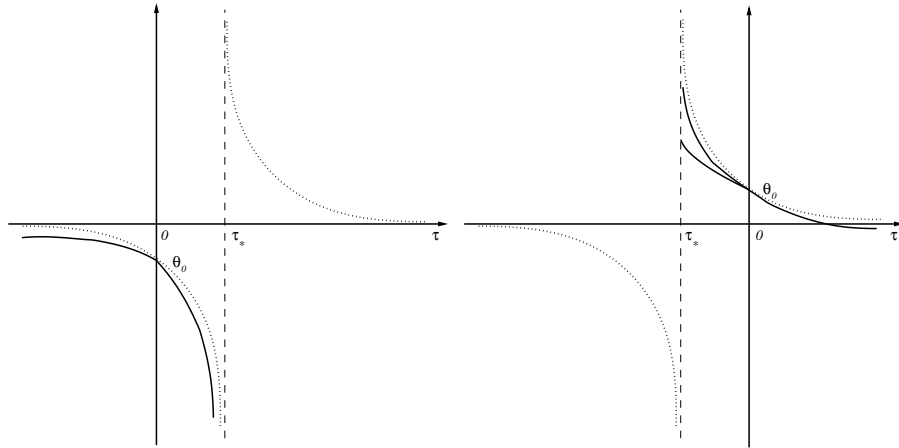


Figura 36.2: Gráficos comparativos de  $\theta$  e  $\phi$ . Ao lado esquerdo temos o caso  $\theta_0 < 0$  e ao lado direito  $\theta_0 > 0$ . As linhas pontilhadas representam o gráfico de  $\phi$  e as contínuas representam possíveis gráficos de  $\theta$  em intervalos que contêm  $\tau = 0$ , onde a condição inicial  $\theta_0$  é fixada para  $\theta$ . Na situação à esquerda ( $\theta_0 < 0$ ),  $\theta$  é sempre divergente a  $-\infty$  em  $\tau_*$  ou em um instante  $0 < \tau_\infty \leq \tau_*$ . Na situação à direita ( $\theta_0 > 0$ ),  $\theta$  pode ou não divergir em  $\tau_*$ , mas a geodésica não pode ser prolongada para valores de  $\tau$  inferiores a  $\tau_*$ .

## Apêndices

### 36.A Demonstração de Algumas Propriedades do Tensor de Curvatura

#### 36.A.1 Prova da Proposição 36.6

Prova da Proposição 36.6. A propriedade de antissimetria (36.150) é evidente da definição de  $R(A, B)$ . Provemos (36.151):

$$\begin{aligned}
 R(f_1 A_1 + f_2 A_2, B)C &= \nabla_{f_1 A_1 + f_2 A_2}(\nabla_B C) - \nabla_B(\nabla_{f_1 A_1 + f_2 A_2} C) - \nabla_{[(f_1 A_1 + f_2 A_2), B]} C \\
 &\stackrel{(35.63)}{=} \nabla_{f_1 A_1 + f_2 A_2}(\nabla_B C) - \nabla_B(\nabla_{f_1 A_1 + f_2 A_2} C) - \nabla_{-B(f_1 A_1 - B(f_2 A_2 + f_1[A_1, B] + f_2[A_2, B])C} \\
 &\stackrel{(36.53)}{=} f_1 \nabla_{A_1}(\nabla_B C) + f_2 \nabla_{A_2}(\nabla_B C) - \nabla_B(f_1 \nabla_{A_1} C + f_2 \nabla_{A_2} C) \\
 &\quad + B(f_1) \nabla_{A_1} C + B(f_2) \nabla_{A_2} C - f_1 \nabla_{[A_1, B]} C - f_2 \nabla_{[A_2, B]} C \\
 &= f_1 (\nabla_{A_1}(\nabla_B C) - \nabla_{[A_1, B]} C) + f_2 (\nabla_{A_2}(\nabla_B C) - \nabla_{[A_2, B]} C) \\
 &\quad - \nabla_B(f_1 \nabla_{A_1} C + f_2 \nabla_{A_2} C) + B(f_1) \nabla_{A_1} C + B(f_2) \nabla_{A_2} C \\
 &= f_1 (\nabla_{A_1}(\nabla_B C) - \nabla_B(\nabla_{A_1} C) - \nabla_{[A_1, B]} C) \\
 &\quad + f_2 (\nabla_{A_2}(\nabla_B C) - \nabla_B(\nabla_{A_2} C) - \nabla_{[A_2, B]} C) \\
 &\quad + \underbrace{f_1 \nabla_B(\nabla_{A_1} C) + B(f_1) \nabla_{A_1} C - \nabla_B(f_1 \nabla_{A_1} C)}_{\stackrel{(36.54)}{=} 0} \\
 &\quad + \underbrace{f_2 \nabla_B(\nabla_{A_2} C) + B(f_2) \nabla_{A_2} C - \nabla_B(f_2 \nabla_{A_2} C)}_{\stackrel{(36.54)}{=} 0} \\
 &= f_1 R(A_1, B)C + f_2 R(A_2, B)C,
 \end{aligned}$$

como queríamos. A propriedade (36.152) é consequência evidente de (36.151) e (36.150). Provemos, por fim, (36.153).

$$\begin{aligned}
 R(A, B)(h_1 C_1 + h_2 C_2) &= \nabla_A(\nabla_B(h_1 C_1 + h_2 C_2)) - \nabla_B(\nabla_A(h_1 C_1 + h_2 C_2)) \\
 &\quad - \nabla_{[A, B]}(h_1 C_1 + h_2 C_2) \\
 &\stackrel{(36.54)}{=} \nabla_A(B(h_1)C_1 + h_1 \nabla_B C_1) + \nabla_A(B(h_2)C_2 + h_2 \nabla_B C_2) \\
 &\quad - \nabla_B(A(h_1)C_1 + h_1 \nabla_A C_1) - \nabla_B(A(h_2)C_2 + h_2 \nabla_A C_2) \\
 &\quad - [A, B](h_1)C_1 - h_1 \nabla_{[A, B]} C_1 - [A, B](h_2)C_2 - h_2 \nabla_{[A, B]} C_2 \\
 &\stackrel{(36.54)}{=} A(B(h_1))C_1 + B(h_1)\nabla_A C_1 + A(h_1)\nabla_B C_1 + h_1 \nabla_A(\nabla_B C_1) \\
 &\quad + A(B(h_2))C_2 + B(h_2)\nabla_A C_2 + A(h_2)\nabla_B C_2 + h_2 \nabla_A(\nabla_B C_2) \\
 &\quad - B(A(h_1))C_1 - A(h_1)\nabla_B C_1 - B(h_1)\nabla_A C_1 - h_1 \nabla_B(\nabla_A C_1) \\
 &\quad - B(A(h_2))C_2 - A(h_2)\nabla_B C_2 - B(h_2)\nabla_A C_2 - h_2 \nabla_B(\nabla_A C_2) \\
 &\quad - [A, B](h_1)C_1 - h_1 \nabla_{[A, B]} C_1 - [A, B](h_2)C_2 - h_2 \nabla_{[A, B]} C_2 \\
 &\stackrel{\text{cancelamentos diversos}}{=} h_1(\nabla_A(\nabla_B C_1) - \nabla_B(\nabla_A C_1) - \nabla_{[A, B]} C_1) \\
 &\quad + h_2(\nabla_A(\nabla_B C_2) - \nabla_B(\nabla_A C_2) - \nabla_{[A, B]} C_2) \\
 &= h_1 R(A, B)C_1 + h_2 R(A, B)C_2,
 \end{aligned}$$

como desejávamos provar. ■

### 36.A.2 Prova da Primeira Identidade de Bianchi, Proposição 36.8

Prova da Proposição 36.8. A demonstração faz uso da definição (36.82) do tensor de torção e da identidade de Jacobi

(35.62).

$$\begin{aligned}
 R(A, B)C + R(C, A)B + R(B, C)A &= \nabla_A(\nabla_B C) - \nabla_B(\nabla_A C) - \nabla_{[A, B]} C \\
 &\quad + \nabla_C(\nabla_A B) - \nabla_A(\nabla_C B) - \nabla_{[C, A]} B \\
 &\quad + \nabla_B(\nabla_C A) - \nabla_C(\nabla_B A) - \nabla_{[B, C]} A \\
 &= \nabla_A(\nabla_B C - \nabla_C B) + \nabla_B(\nabla_C A - \nabla_A C) + \nabla_C(\nabla_A B - \nabla_B A) \\
 &\quad - \nabla_{[A, B]} C - \nabla_{[C, A]} B - \nabla_{[B, C]} A \\
 &\stackrel{(36.82)}{=} \nabla_A(T(B, C)) + \nabla_B(T(C, A)) + \nabla_C(T(A, B)) \\
 &\quad + \nabla_A([B, C]) + \nabla_B([C, A]) + \nabla_C([A, B]) \\
 &\quad - \nabla_{[A, B]} C - \nabla_{[C, A]} B - \nabla_{[B, C]} A \\
 &= \nabla_A(T(B, C)) + \nabla_B(T(C, A)) + \nabla_C(T(A, B)) \\
 &\quad + [\nabla_A([B, C]) - \nabla_{[B, C]} A] + [\nabla_B([C, A]) - \nabla_{[C, A]} B] \\
 &\quad + [\nabla_C([A, B]) - \nabla_{[A, B]} C] \\
 &= \nabla_A(T(B, C)) + \nabla_B(T(C, A)) + \nabla_C(T(A, B)) \\
 &\quad + T(A, [B, C]) + T(B, [C, A]) + T(C, [A, B]) \\
 &\quad + \underbrace{[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]}_{\stackrel{(35.62)}{=} 0} \\
 &= \nabla_A(T(B, C)) + \nabla_B(T(C, A)) + \nabla_C(T(A, B)) \\
 &\quad + T(A, [B, C]) + T(B, [C, A]) + T(C, [A, B]),
 \end{aligned}$$

como desejávamos mostrar. ■

### 36.A.3 Prova da Segunda Identidade de Bianchi, Proposição 36.9

Prova da Proposição 36.9. Usando o fato que  $\nabla_A \nabla_B = \nabla_B \nabla_A + R(A, B) + \nabla_{[A, B]}$  podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \nabla_A(R(B, C)D) &= \nabla_A \nabla_B \nabla_C D - \nabla_A \nabla_C \nabla_B D - \nabla_A \nabla_{[B, C]} D \\
 &= \nabla_B \nabla_A \nabla_C D - \nabla_C \nabla_A \nabla_B D \\
 &\quad + R(A, B)\nabla_C D - R(A, C)\nabla_B D - R(A, [B, C])D \\
 &\quad + \nabla_{[A, B]}\nabla_C D - \nabla_{[A, C]}\nabla_B D - \nabla_{[B, C]}\nabla_A D \\
 &\quad + \nabla_{[A, [B, C]]} D,
 \end{aligned} \tag{36.A.1}$$

onde, na segunda igualdade comutamos  $\nabla_A$  para a direita. De forma análoga, comutando-se novamente  $\nabla_A$  para a direita, tem-se

$$\begin{aligned} \nabla_B \nabla_A \nabla_C D - \nabla_C \nabla_A \nabla_B D &= (\nabla_B \nabla_C - \nabla_C \nabla_B) \nabla_A D \\ &+ \nabla_B (R(A, C)D) - \nabla_C (R(A, B)D) \\ &+ \nabla_B \nabla_{[C, A]} D - \nabla_C \nabla_{[A, B]} D \\ &= R(B, C) \nabla_A D + \nabla_{[B, C]} \nabla_A D \\ &- \nabla_B (R(C, A)D) - \nabla_C (R(A, B)D) \\ &+ \nabla_B \nabla_{[C, A]} D - \nabla_C \nabla_{[A, B]} D. \end{aligned}$$

Inserindo-se isso em (36.A.1), obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla_A (R(B, C)D) + \nabla_B (R(C, A)D) + \nabla_C (R(A, B)D) &= +R(A, B) \nabla_C D - R(A, C) \nabla_B D + R(B, C) \nabla_A D \\ &- R(A, [B, C])D \\ &+ (\nabla_{[A, B]} \nabla_C - \nabla_C \nabla_{[A, B]})D + (\nabla_B \nabla_{[C, A]} - \nabla_{[A, C]} \nabla_B)D \\ &+ \nabla_{[A, [B, C]]} D. \end{aligned}$$

Agora,

$$(\nabla_{[A, B]} \nabla_C - \nabla_C \nabla_{[A, B]})D + (\nabla_B \nabla_{[C, A]} - \nabla_{[A, C]} \nabla_B)D = R([A, B], C)D - R(B, [C, A])D + \nabla_{[[A, B], C]} D - \nabla_{[B, [A, C]]} D.$$

Inserindo isso acima, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_A (R(B, C)D) + \nabla_B (R(C, A)D) + \nabla_C (R(A, B)D) &= R(A, B) \nabla_C D - R(A, C) \nabla_B D + R(B, C) \nabla_A D \\ &- R(A, [B, C])D + R([A, B], C)D - R(B, [C, A])D \\ &+ \nabla_{[A, [B, C]]} D + \nabla_{[[A, B], C]} D - \nabla_{[B, [A, C]]} D. \end{aligned}$$

Por fim, notemos que

$$\nabla_{[A, [B, C]]} D + \nabla_{[[A, B], C]} D - \nabla_{[B, [A, C]]} D = \nabla_{[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [B, A]]} D = 0,$$

devido à identidade de Jacobi (35.62). Portanto,

$$\begin{aligned} \nabla_A (R(B, C)D) + \nabla_B (R(C, A)D) + \nabla_C (R(A, B)D) &= R(A, B) \nabla_C D + R(C, A) \nabla_B D + R(B, C) \nabla_A D \\ &+ R([A, B], C)D + R([C, A], B)D + R([B, C], A)D. \end{aligned}$$

Isso estabeleceu (36.162).

Observemos agora que

$$\begin{aligned} \nabla_A (R)(B, C) + \nabla_B (R)(C, A) + \nabla_C (R)(A, B) &= \nabla_A (R(B, C)) + \nabla_B (R(C, A)) + \nabla_C (R(A, B)) \\ &- R(A, B) \nabla_C - R(C, A) \nabla_B - R(B, C) \nabla_A \\ &- R(\nabla_A B, C) - R(\nabla_B C, A) - R(\nabla_C A, B) \\ &- R(B, \nabla_A C) - R(C, \nabla_B A) - R(A, \nabla_C B) \\ &\stackrel{(36.A.2)}{=} -R(\nabla_A B, C) - R(\nabla_B C, A) - R(\nabla_C A, B) \\ &+ R(\nabla_A C, B) + R(\nabla_B A, C) + R(\nabla_C B, A) \\ &+ R([A, B], C) + R([C, A], B) + R([B, C], A) \\ &= -R(\nabla_A B - \nabla_B A, C) - R(\nabla_B C - \nabla_C B, A) \\ &- R(\nabla_C A - \nabla_A C, B) \\ &+ R([A, B], C) + R([C, A], B) + R([B, C], A) \\ &\stackrel{(36.82)}{=} -R(T(A, B), C) - R(T(C, A), B) - R(T(B, C), A), \end{aligned}$$

que estabelece (36.163). ■

### 36.A.4 Prova da Proposição 36.10

**Prova da Proposição 36.10.** (De [231] e [318], com modificações e acréscimos). Para provar (36.166), provemos primeiramente que  $g(R(A, B)C, C) = 0$ . Como  $\nabla$  é um compatível com o tensor métrico, tem-se

$$\begin{aligned} g(\nabla_A \nabla_B C, C) &= A(g(\nabla_B C, C)) - g(\nabla_B C, \nabla_A C) \\ &= \frac{1}{2} A(B(g(C, C))) - g(\nabla_B C, \nabla_A C), \\ g(\nabla_B \nabla_A C, C) &= \frac{1}{2} B(A(g(C, C))) - g(\nabla_A C, \nabla_B C), \\ g(\nabla_{[A, B]} C, C) &= \frac{1}{2} [A, B](g(C, C)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} g(R(A, B)C, C) &= g(\nabla_A \nabla_B C, C) - g(\nabla_B \nabla_A C, C) - g(\nabla_{[A, B]} C, C) \\ &= \frac{1}{2} A(B(g(C, C))) - \frac{1}{2} B(A(g(C, C))) - \frac{1}{2} [A, B](g(C, C)) = 0. \end{aligned}$$

Consequentemente,  $0 = g(R(A, B)(C + D), (C + D)) = g(R(A, B)C, D) + g(R(A, B)D, C)$ , provando (36.166).

A expressão (36.167) é um caso particular de (36.169) para conexões simétricas (em cujo caso, o tensor de torção  $T$  e o tensor  $S$  são nulos). Passemos à prova de (36.169). A identidade de Bianchi (36.157) implica que

$$g(R(A, B)C, D) + g(R(C, A)B, D) + g(R(B, C)A, D) = g(S(A, B, C), D),$$

$$g(R(A, B)D, C) + g(R(D, A)B, C) + g(R(B, D)A, C) = g(S(A, B, D), C),$$

$$g(R(A, C)D, B) + g(R(D, A)C, B) + g(R(C, D)A, B) = g(S(A, C, D), B),$$

$$g(R(B, C)D, A) + g(R(D, B)C, A) + g(R(C, D)B, A) = g(S(B, C, D), A).$$

Verifique! Usando (36.166) e/ou a antissimetria de  $R$ , as linhas acima podem ser escritas como

$$g(R(A, B)C, D) + g(R(C, A)B, D) + g(R(B, C)A, D) = g(S(A, B, C), D),$$

$$-g(R(A, B)C, D) + g(R(D, A)B, C) - g(R(B, D)C, A) = g(S(A, B, D), C),$$

$$g(R(C, A)B, D) - g(R(D, A)B, C) + g(R(C, D)A, B) = g(S(A, C, D), B),$$

$$-g(R(B, C)A, D) - g(R(B, D)C, A) - g(R(C, D)A, B) = g(S(B, C, D), A).$$

Verifique! Somando-se as expressões acima, obtemos

$$\begin{aligned} 2g(R(C, A)B, D) - 2g(R(B, D)C, A) \\ = g(S(A, B, C), D) + g(S(A, B, D), C) + g(S(A, C, D), B) + g(S(B, C, D), A). \end{aligned}$$

Verifique! Efetuando-se a permutação de letras  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  e usando-se (36.161), obtemos

$$\begin{aligned} 2g(R(A, B)C, D) - 2g(R(C, D)A, B) \\ = g(S(B, C, A), D) + g(S(B, C, D), A) + g(S(B, A, D), C) + g(S(C, A, D), B) \end{aligned}$$

(verifique!), provando (36.169). ■

### 36.A.5 Prova da Proposição 36.11

**Demonstração.** (Extraída de [231]). Por hipótese,  $F_1(A + C, B, A + C, B) = F_2(A + C, B, A + C, B)$ . Pela multilinearidade de  $F_1$  e  $F_2$  e por (36.183)–(36.185), isso implica

$$F_1(A, B, A, B) + 2F_1(A, B, C, B) + F_1(C, B, C, B) = F_1(A, B, A, B) + 2F_2(A, B, C, B) + F_2(C, B, C, B)$$

(verifique!), o que, pela hipótese (36.192), diz-nos que

$$F_1(A, B, C, B) = F_2(A, B, C, B), \quad (36.A.2)$$

para todos  $A, B, C \in \mathcal{V}$ . Essa mesma relação afirma que

$$F_1(A, B + D, C, B + D) = F_2(A, B + D, C, B + D)$$

para todos  $A, B, C, D \in \mathcal{V}$ . Novamente pela multilinearidade de  $F_1$  e  $F_2$  e por (36.183)–(36.185), isso implica

$$\begin{aligned} F_1(A, B, C, B) + F_1(A, B, C, D) + F_1(A, D, C, B) + F_1(A, D, C, D) \\ = F_2(A, B, C, B) + F_2(A, B, C, D) + F_2(A, D, C, B) + F_2(A, D, C, D) \end{aligned}$$

(verifique!), o que, por (36.A.2), diz-nos que

$$F_1(A, B, C, D) + F_1(A, D, C, B) = F_2(A, B, C, D) + F_2(A, D, C, B).$$

Isso pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} F_1(A, B, C, D) - F_2(A, B, C, D) &= F_2(A, D, C, B) - F_1(A, D, C, B) \\ &\stackrel{(36.183) = (36.185)}{=} F_1(B, C, A, D) - F_2(B, C, A, D). \end{aligned}$$

Verifique! Ora, a igualdade assim obtida

$$F_1(A, B, C, D) - F_2(A, B, C, D) = F_1(B, C, A, D) - F_2(B, C, A, D)$$

implica também (pela troca de letras  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ ) que

$$F_1(B, C, A, D) - F_2(B, C, A, D) = F_1(C, A, B, D) - F_2(C, A, B, D).$$

Assim, mostramos que a expressão  $F_1(A, B, C, D) - F_2(A, B, C, D)$  é invariante por permutações cíclicas das três primeiras letras. Logo,

$$\begin{aligned} 3(F_1(A, B, C, D) - F_2(A, B, C, D)) &= F_1(A, B, C, D) - F_2(A, B, C, D) \\ &\quad + F_1(B, C, A, D) - F_2(B, C, A, D) \\ &\quad + F_1(C, A, B, D) - F_2(C, A, B, D) \\ &= (F_1(A, B, C, D) + F_1(C, A, B, D) + F_1(B, C, A, D)) \\ &\quad - (F_2(A, B, C, D) + F_2(C, A, B, D) + F_2(B, C, A, D)) \\ &\stackrel{(36.191)}{=} 0. \end{aligned}$$

Logo,  $F_1(A, B, C, D) = F_2(A, B, C, D)$ , como queríamos demonstrar. ■