Capítulo 37
Formas Diferenciais

Conteúdo

FORMAS diferenciais são utilizadas de maneira importante na Geometria Diferencial, na Topologia Algébrica e em diversas áreas da Física, como a Mecânica Clássica, a Teoria da Relatividade Geral, a Teoria Clássica de Campos e mesmo a Termodinâmica. O presente capítulo, devotado ao seu estudo básico, faz uso de ideias, definições e resultados apresentados e discutidos na Seção 2.3.7, página 169, e na Seção 2.5.2, página 182. O leitor do presente capítulo deve estar familiarizado com aquelas páginas e com a notação lá introduzida. Lá são discutidas as noções de subespaços antissimétricos de produtos tensoriais de espaços vetoriais e de álgebras exteriores, que empregaremos aqui. A leitura do presente capítulo dispensa em parte o material do Capítulo 36, página 1706, exceto no que concerne à dualidade de Hodge, tratada na Seção 37.2, abaixo.

A teoria das formas diferenciais é tão elegante que parece ter sido achada, não inventada. A noção de forma diferencial foi introduzida por Élie Cartan[1] em [57] em uma investigação sobre o uso de ideias de Álgebra Linear (mais precisamente, de álgebras de Grassmann[2], apresentadas na Seção 2.1.7.4, página 103) na organização e generalização de resultados sobre Cálculo em $\mathbb{R}^n$. Cartan notou a utilidade de diversas propriedades de tensores antissimétricos e sua relevância para a extensão de resultados bem conhecidos do Cálculo em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ (como os conhecidos Teoremas de Green, Gauss e Stokes) para o caso geral do Cálculo em $\mathbb{R}^n$. A implementação dessas ideias de Cartan a variedades diferenciáveis é bastante natural, mas foi feita posteriormente.

Formas diferenciais são tratadas em vários livros-textos devotados à Geometria Diferencial, como aqueles listados na introdução ao Capítulo 35, página 1642. Vide também [229]. Um excelente livro-texto sobre o uso de formas diferenciais no Cálculo em $\mathbb{R}^n$ é [305] e, no mesmo contexto, vide também [54] ou mesmo [71] .

37.1 Formas Diferenciais

• **Formas diferenciais em variedades**

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m, seja $p \in M$ e seja T^*M o espaço cotangente a M em p.

[1] Élie Joseph Cartan (1869–1951).
[2] Hermann Günther Grassmann (1809–1877).

Para $n \geq 2$ podemos definir uma representação $\mathcal{P}_n$ do grupo de permutações de n elementos, S_n, em $\big(\mathsf{T}^*_pM\big)^{\otimes n}$, da seguinte forma: se π é um elemento de S_n, definimos $\mathcal{P}_n(\pi) : \big(\mathsf{T}^*_pM\big)^{\otimes n} \to \big(\mathsf{T}^*_pM\big)^{\otimes n}$ como sendo o operador linear que a cada vetor da forma $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$, com $u_j \in \mathsf{T}^*_pM$, $j = 1, \ldots, n$, associa o vetor $u_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\pi(n)}$. Isso significa que $\mathcal{P}_n(\pi)$ age em elementos gerais de $\big(\mathsf{T}^*_pM\big)^{\otimes n}$ da forma

$$\mathcal{P}_n(\pi)\left(\sum_{k=1}^{l} \alpha_k\, u_1^k \otimes \cdots \otimes u_n^k\right) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k\, \mathcal{P}_n(\pi)\left(u_1^k \otimes \cdots \otimes u_n^k\right) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k\, u_{\pi(1)}^k \otimes \cdots \otimes u_{\pi(n)}^k ,$$

onde os α_k's são elementos de $\mathbb{R}$ e $u_j^k \in \mathsf{T}^*_pM$. É elementar constatar que $\mathcal{P}_n(\pi)\mathcal{P}_n(\pi') = \mathcal{P}_n(\pi\pi')$ para todos π, $\pi' \in S_n$ e que $\mathcal{P}_n(\mathbf{id}) = \mathbb{1}$, $\mathbf{id}$ sendo a identidade (elemento neutro) de S_n. Isso confirma que $\mathcal{P}_n$ é uma representação de S_n em $\big(\mathsf{T}^*_pM\big)^{\otimes n}$.

Seja $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, o operador de antissimetrização em $\big(\mathsf{T}^*_pM\big)^{\otimes n}$, definido por (vide (2.123, página 169))

$$\mathcal{A}_n := \frac{1}{n!}\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sinal}(\pi)\, \mathcal{P}_n(\pi) ,$$

onde sinal (π) é o sinal, ou paridade, de $\pi \in S_n$, sendo S_n o grupo de permutações de n elementos. Para $n = 0$ definimos $\mathcal{A}_0 = \mathbb{1}$, o operador identidade e, igualmente, para $n = 1$ definimos $\mathcal{A}_1 = \mathbb{1}$. As propriedades básicas de $\mathcal{A}_n$ estão listada na Proposição 2.14, página 169. A mais relevante é $(\mathcal{A}_n)^2 = \mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, que indica que $\mathcal{A}_n$ é um projetor.

Para $1 \leq r \leq m$, denotaremos por $\Lambda_p^r(M)$, ou simplesmente por Λ_p^r o subespaço antissimétrico $\Big(\mathsf{T}^*M\Big)^{\otimes r}_A$ de $\Big(\mathsf{T}^*M\Big)^{\otimes r}$: $\Lambda_p^r := \mathcal{A}_r\Big(\mathsf{T}^*M\Big)^{\otimes r}$.

Note-se que $\Lambda_p^1 = \mathsf{T}^*M$. Para $r = 0$ identificamos por conveniência Λ_p^0 com o corpo $\mathbb{R}$. Note-se também que $\Lambda_p^r = \{0\}$ caso $r > m$.

Um elemento $\omega_p \in \Lambda_p^r(M)$ é dito ser uma *r-forma* ou uma *r-forma diferencial*. Uma r-forma $\omega_p \in \Lambda_p^r(M)$ é, portanto, um tensor antissimétrico de tipo $(0, r)$ (e, portanto, "covariante") e pode ser escrito em uma base local de coordenadas como

$$\Lambda_p^r(M) \ni \omega_p = \frac{1}{r!}\omega_{a_1\cdots a_r}(p)\big(dx^{a_1}|_p\big) \wedge \cdots \wedge \big(dx^{a_r}|_p\big) , \tag{37.1}$$

onde, denotando por simplicidade $dx^a|_p$ por dx^a, temos

$$dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_r} := (r!)\, \mathcal{A}_r\big(dx^{a_1} \otimes \cdots \otimes dx^{a_r}\big) = \sum_{\pi \in S_r} \operatorname{sinal}(\pi)\, dx^{a_{\pi(1)}} \otimes \cdots \otimes dx^{a_{\pi(r)}} ,$$

com S_r sendo o grupo de permutações de r elementos. As quantidades reais $\omega_{a_1\cdots a_r}(p)$, acima, são denominadas *componentes* da forma diferencial ω_p e são totalmente antissimétricas por permutações dos índices, ou seja, $\omega_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(r)}}(p) = \operatorname{sinal}(\pi)\omega_{a_1\cdots a_r}(p)$ para cada $\pi \in S_r$.

Como já comentamos na Seção 2.3.7, página 169, $\Lambda_p^r(M)$ é um espaço vetorial de dimensão $\binom{m}{r} = \frac{m!}{(m-r)!r!}$ e, como já notamos na mesma seção, $\Lambda_p^r(M)$ e $\Lambda_p^{m-r}(M)$ têm a mesma dimensão sendo, portanto, (não-canonicamente) isomorfos. Esse isomorfismo será explorado mais abaixo quando da presença de uma métrica em T^*_pM (ou, equivalentemente, em T_pM), levando à teoria do dual de Hodge.

Conforme apresentamos em (2.145), página 184, o espaço $\mathscr{T}_A\big(\mathsf{T}^*_pM\big)$ de todos os tensores antissimétricos covariantes é

$$\mathscr{T}_A\big(\mathsf{T}^*_pM\big) = \mathbb{R} \oplus \big(\mathsf{T}^*_pM\big) \oplus \Lambda_p^2(M) \oplus \cdots \oplus \Lambda_p^m(M) , \tag{37.2}$$

Na literatura, $\mathscr{T}_A\big(\mathsf{T}^*_pM\big)$ é também denotado por $\Lambda_p^*(M)$, ou simplesmente Λ_p^*, e é denominado *espaço das formas* sobre T^*_pM. Como vimos na Seção 2.5.2, página 182, o espaço vetorial Λ_p^* tem dimensão 2^m e é também uma álgebra associativa para o chamado *produto exterior*. Essa álgebra é denominada *álgebra exterior de formas* e dela trataremos agora.

• **O produto exterior de formas e a álgebra exterior de formas**

Defina-se o produto $\wedge_{q,\,r} : \Lambda_p^q(M) \times \Lambda_p^r(M) \to \Lambda_p^{q+r}(M)$ por (vide (2.137, página 182)

$$x \wedge_{q,\,r} y := \frac{(q+r)!}{q!r!}\mathcal{A}_{q+r}\big(x \otimes y\big) , \tag{37.3}$$

para $x \in \Lambda_p^q(M)$ e $y \in \Lambda_p^r(M)$. Note-se que, por essa definição, valerá no caso $q = 0$ que $x \in \mathbb{R}$ e, portanto, $x \wedge_{0,\,r} y := \mathcal{A}_r(x \otimes y) = \mathcal{A}_r(xy) = x\mathcal{A}_r(y) = xy$. Analogamente, no caso $r = 0$ teremos $y \in \mathbb{R}$ e, portanto, $x \wedge_{q,\,0} y := \mathcal{A}_q(x \otimes y) = \mathcal{A}_q(yx) = y\mathcal{A}_q(x) = yx$.

As propriedades elementares desse produto foram capturadas na Proposição 2.20, página 183, que, por conveniência, reproduzimos:

Proposição 37.1 *Com as definições acima valem,*

1. *O produto $\wedge_{q,\,r} : \Lambda_p^q \times \Lambda_p^r \to \Lambda_p^{q+r}$ é bilinear, ou seja, satisfaz*

$$\big(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\big) \wedge_{q,\,r} y \;=\; \alpha_1 x_1 \wedge_{p,\,q} y + \alpha_2 x_2 \wedge_{q,\,r} y \qquad e \qquad x \wedge_{q,\,r} \big(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\big) \;=\; \alpha_1 x \wedge_{q,\,r} y_1 + \alpha_2 x \wedge_{q,\,r} y_2 \,,$$

para todos $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $x,\ x_1,\ x_2 \in \Lambda_p^q$ e $y,\ y_1,\ y_2 \in \Lambda_p^r$.

2. *O produto $\wedge_{q,\,r} : \Lambda_p^q \times \Lambda_p^r \to \Lambda_p^{q+r}$ satisfaz*

$$\big(x \wedge_{q,\,r} y\big) \wedge_{q+r,\,s} z \;=\; x \wedge_{q,\,r+s} \big(y \wedge_{r,\,s} z\big) \,. \tag{37.4}$$

para todos $x \in \Lambda_p^q$, $y \in \Lambda_p^r$ e $z \in \Lambda_p^s$. Essa propriedade é por vezes denominada pré-associatividade.

3. *Para todos $x \in \Lambda_p^q$ e $y \in \Lambda_p^r$ vale*

$$x \wedge_{q,\,r} y \;=\; (-1)^{qr}\, y \wedge_{r,\,q} x \,. \tag{37.5}$$

Essa propriedade é por vezes denominada comutatividade graduada. *Caso q seja ímpar, isso implica $x \wedge_{q,\,q} x = 0$. Para q par isso não é necessariamente verdade. Porém, para $x_1,\ \ldots,\ x_q \in \mathsf{T}_p^*M$, vale*

$$\big(x_1 \wedge \cdots \wedge x_q\big) \wedge_{q,\,q} \big(x_1 \wedge \cdots \wedge x_q\big) = x_1 \wedge \cdots \wedge x_q \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_q \;=\; 0$$

para <u>todo</u> $q \in \mathbb{N}$. □

Fazendo uso das operações $\wedge_{q,\,r}$ definidas acima podemos fazer de $\Lambda_p^*(M)$, definida em (37.2), uma álgebra associativa unital, com um produto denotado por $\wedge$ e definido por

$$\begin{aligned}\left(\sum_k \alpha_k a_0^k \oplus a_1^k \oplus \cdots \oplus a_m^k\right) \wedge \left(\sum_l \beta_l b_0^l \oplus b_1^l \oplus \cdots \oplus b_m^l\right) \;&:=\; \sum_{k,\,l} \alpha_k \beta_l \Big(a_0^k \oplus a_1^k \oplus \cdots \oplus a_m^k\Big) \wedge \Big(b_0^l \oplus b_1^l \oplus \cdots \oplus b_m^l\Big) \\ &=\; \sum_{k,\,l} \alpha_k \beta_l \bigoplus_{q=0}^m \left[\sum_{r=0}^q a_r^k \wedge_{r,\,q-r} b_{q-r}^l\right] \\ &=\; \bigoplus_{q=0}^m \left[\sum_{r=0}^q \left(\sum_k \alpha_k a_r^k\right) \wedge_{r,\,q-r} \left(\sum_l \beta_l b_{q-r}^l\right)\right] .\end{aligned} \tag{37.6}$$

Acima, as somas em k e l são finitas, os α_k's e β_l's são números reais e os a_j^k e b_j^l são elementos de $\Lambda_p^j(M)$.

É claro pela definição que $\wedge$ é bilinear em seus fatores e, assim, define legitimamente um produto algébrico. A associatividade do produto $\wedge$ decorre diretamente de (37.4) e sua demonstração é deixada como exercício. Como exercício também fica a tarefa de constatar que o elemento $1 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0$ é a unidade de $\Lambda_p^*(M)$ para o produto $\wedge$.

E. 37.1 *<u>Exercício</u>.* Prove as afirmações do último parágrafo. ✠

O espaço vetorial $\Lambda_p^*(M)$ torna-se, assim, uma álgebra associativa e unital denominada *álgebra exterior* de T_p^*M. Na literatura, tanto os produtos $\wedge_{q,\,r}$ quanto o produto $\wedge$ são denominados *produto exterior de formas*.

As álgebras exteriores definidas acima são um exemplo de álgebras de Grassmann[3] (no caso, $m+1$ graduadas), apresentadas na Seção 2.1.7.4, página 103.

[3] Hermann Günther Grassmann (1809–1877).

• <u>O produto interior de formas</u>

Há também um outro produto útil que pode ser definido entre espaços $\Lambda_p^r(M)$, o chamado *produto interior de formas*. Para $1 \leq r \leq m$ e $u \in \mathsf{T}_pM$ define-se o operador linear $I_u^r : \Lambda_p^r(M) \to \Lambda_p^{r-1}$ da seguinte forma: para cada $\omega \in \Lambda_p^r(M)$ a $(r-1)$-forma $I_u^r\omega$ é o elemento de $\Lambda_p^{r-1}(M)$ tal que para todos $v_1,\ \ldots,\ v_{r-1} \in \mathsf{T}_pM$ vale

$$\big\langle I_u^r\omega\,, v_1 \oplus \cdots \oplus v_{r-1}\big\rangle \;=\; \big\langle \omega\,, u \oplus v_1 \oplus \cdots \oplus v_{r-1}\big\rangle \,. \tag{37.7}$$

Honorificamente define-se também $I_u^0 \equiv 0$.

O produto interior de formas ocorre em certas relações envolvendo a derivada exterior de formas, a serem introduzidas abaixo.

E. 37.2 *<u>Exercício</u>.* Mostre que a definição (37.7), quando expressa em coordenadas locais, fica

$$I_u^r\omega \;=\; \frac{1}{(r-1)!}\, u^{a_1} \omega_{a_1 a_2 \cdots a_r} dx^{a_2} \wedge \cdots \wedge dx^{a_r} \;\in\; \Lambda_p^{r-1}(M) \,, \tag{37.8}$$

para $1 \leq r \leq m$, com $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathsf{T}_pM$ e com $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{a_1 a_2 \cdots a_r} dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_r} \in \Lambda_p^r(M)$. ✠

E. 37.3 *<u>Exercício</u>.* Demonstre as seguintes propriedades do produto interior:

$$I_u^r I_u^{r+1} \;=\; 0\,, \quad 0 \leq r \leq m-1\,. \tag{37.9}$$

$$I_u^{r_1+r_2}\big(\omega_1 \wedge_{r_1,\,r_2} \omega_2\big) \;=\; \big(I_u^{r_1}\omega_1\big) \wedge_{r_1-1,\,r_2} \omega_2 + (-1)^{r_1}\omega_1 \wedge_{r_1,\,r_2-1} I_u^{r_2}\big(\omega_2\big) \,, \tag{37.10}$$

para todos $\omega_1 \in \Lambda_p^{r_1}(M)$ e $\omega_2 \in \Lambda_p^{r_2}(M)$. Observe-se que a propriedade (37.10) é similar à regra de Leibniz para derivadas, exceto pelo fator $(-1)^{r_1}$ do lado direito. ✠

O produto interior pode ser estendido a todo $\Lambda_p^*(M)$ pelo operador linear $I_u : \Lambda_p^*(M) \to \Lambda_p^*(M)$ definido por

$$I_u \bigoplus_{a=0}^m \omega^a \;:=\; \bigoplus_{a=0}^m \big(I_u^a \omega^a\big) \;=\; \bigoplus_{a=1}^m \big(I_u^a \omega^a\big) \,, \tag{37.11}$$

onde $\omega^a \in \Lambda_p^a(M)$ para cada $a = 0,\ \ldots,\ m$. Observe-se que a imagem de I_u é o subespaço $\bigoplus_{a=0}^{m-1} \Lambda_p^a(M)$ de $\Lambda_p^*(M) \equiv \bigoplus_{a=0}^{m-} \Lambda_p^a(M)$. Por (37.9), vale

$$\big(I_u\big)^2 \bigoplus_{a=0}^m \omega^a \;=\; \bigoplus_{a=1}^m \big(I_u^{a-1} I_u^a \omega^a\big) \;\stackrel{(37.9)}{=}\; 0 \,,$$

provando que $\big(I_u\big)^2 = 0$ e, portanto, que I_u é nilpotente.

Sejam

$$\omega_1 \;:=\; \sum_k \alpha_k a_0^k \oplus a_1^k \oplus \cdots \oplus a_m^k \qquad e \qquad \omega_2 \;:=\; \sum_l \beta_l b_0^l \oplus b_1^l \oplus \cdots \oplus b_m^l$$

elementos de $\Lambda_p^*(M)$. Então, vale a relação

$$I_u\Big(\omega_1 \wedge \omega_2\Big) \;=\; \big(I_u\omega_1\big) \wedge \omega_2 + \big(G\omega_1\big) \wedge \big(I_u\omega_2\big) \,, \tag{37.12}$$

onde $G : \Lambda_p^*(M) \to \Lambda_p^*(M)$, o chamado *operador de graduação*, é o operador linear definido por

$$G \bigoplus_{j=0}^m a_j \;:=\; \bigoplus_{j=0}^m (-1)^j a_j \,.$$

Por exemplo, no caso $m = 5$, $G\Big(a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5\Big) = a_0 \oplus (-a_1) \oplus a_2 \oplus (-a_3) \oplus a_4 \oplus (-a_5)$. A demonstração de (37.12) é apresentada no Apêndice 2.A, página 194.

• <u>Campos C^∞ de formas</u>

Até aqui definimos formas diferenciais no espaço cotangente a um ponto $p \in M$, T_pM, mas podemos generalizar todas as definições e resultados para campos (infinitamente diferenciáveis) de formas. Para $0 \leq r \leq m$ uma aplicação

$M \ni p \mapsto \omega_p \in \Lambda_p^r(M)$ é dita ser um campo C^∞ de r-formas se suas componentes locais $\omega_{a_1\cdots a_r}(p)$, introduzidas em (37.1) forem infinitamente diferenciáveis em todas as cartas locais de coordenadas de M.

As definições de produto exterior e interior estendem-se naturalmente a campos de formas.

Denotaremos a coleção de todos os campos infinitamente diferenciáveis de r-formas por $\Lambda^r(M)$, sendo que, agora, $\Lambda^0(M) = C^\infty(M)$, a coleção das funções infinitamente diferenciáveis em M, e $\Lambda^1(M) = \mathscr{X}^*(M)$, a coleção dos campos covetoriais infinitamente diferenciáveis em M. O símbolo $\Lambda^*(M)$ denotará a correspondente álgebra exterior. Tem-se, generalizado (37.2),

$$\Lambda^*(M) \;=\; C^\infty(M) \oplus \mathscr{X}^*(M) \oplus \Lambda^2(M) \oplus \cdots \oplus \Lambda^m(M) \,. \tag{37.13}$$

Naturalmente, para $1 \leq r \leq m$, $\Lambda^r(M) = \Big(\big(\mathscr{X}^*(M)\big)^{\otimes r}\Big)_A$, pontualmente.

37.1.1 A Derivada Exterior de Formas

O ingrediente mais importante da teoria introduzida por Cartan em seu trabalho seminal [57] foi a noção de *derivada exterior de formas*, que passaremos a apresentar e discutir.

Vamos começar apresentando uma definição direta da noção de derivada exterior de formas. Uma definição mais abstrata e "axiomática" será discutida em seguida. Como antes, M representa uma variedade diferenciável de dimensão $m \in \mathbb{N}$.

Para $0 \leq r < m$ define-se a aplicação linear $d_r : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r+1}(M)$ por

$$d_0 f \;=\; \frac{\partial f}{\partial x^a} dx^a \,, \qquad f \in \Lambda^0(M) \equiv C^\infty(M) \,, \tag{37.14}$$

$$d_r\omega \;=\; \frac{1}{r!}\frac{\partial \omega_{a_1\cdots a_r}}{\partial x^a}\, dx^a \wedge dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \wedge \cdots \wedge dx^{a_r} \,, \qquad \omega \in \Lambda^r(M),\ 1 \leq r < m \tag{37.15}$$

Adicionalmente, convenciona-se definir d_m como sendo o operador nulo agindo em $\Lambda^m(M)$. Acima, f e ω são representados em uma carta local de coordenadas, sendo $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{a_1\cdots a_r} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \wedge \cdots \wedge dx^{a_r} \in \Lambda^r(M)$. É fácil demonstrar, e recomendamos ao estudante fazê-lo, que as definições (37.14)–(37.15) independem da particular carta local de coordenadas empregada, sendo, portanto, intrínsecas.

Antes de prosseguirmos apresentando uma outra definição abstrata dos operadores lineares d_r, demonstremos algumas propriedades essenciais dos mesmos que decorrem das definições (37.14)–(37.15).

Proposição 37.2 *Com as definições (37.14)–(37.15) valem as seguintes propriedades:*

1. *Para $0 \leq r \leq m-1$ tem-se $d_{r+1}d_r = 0$.*
2. *Se $\omega_1 \in \Lambda^{r_1}(M)$ e $\omega_2 \in \Lambda^{r_2}(M)$, vale*

$$d_{r_1+r_2}\big(\omega_1 \wedge_{r_1,\, r_2} \omega_2\big) \;=\; \big(d_{r_1}\omega_1\big) \wedge_{r_1+1,\, r_2} \omega_2 + (-1)^{r_1}\omega_1 \wedge_{r_1,\, r_2+1} \big(d_{r_2}\omega_2\big) \,. \tag{37.16}$$

A relação (37.16) generaliza a regra de Leibniz para a derivada exterior. □

Prova. Prova do item 1. No caso $r = m$ não há o que se provar, pois $d_m = 0$, por definição. Seja então $0 \leq r \leq m-2$. Tomando $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{a_1\cdots a_r} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \wedge \cdots \wedge dx^{a_r} \in \Lambda^r(M)$, podemos escrever, por (37.15),

$$d_r\omega \;=\; \frac{1}{r!}\frac{\partial \omega_{b_2\cdots b_{r+1}}}{\partial x^{b_1}}\, dx^{b_1} \wedge dx^{b_2} \wedge \cdots \wedge dx^{b_{r+1}}$$

o que nos faz concluir que as componentes de $d_r\omega$ são $\frac{r+1!}{r!}\frac{\partial \omega_{b_2\cdots b_{r+1}}}{\partial x^{b_1}}$. Assim,

$$d_{r+1}\big(d_r\omega\big) \;=\; \frac{1}{r!}\frac{\partial^2 \omega_{b_2\cdots b_{r+1}}}{\partial x^{b_0}\partial x^{b_1}}\, dx^{b_0} \wedge dx^{b_1} \wedge dx^{b_2} \wedge \cdots \wedge dx^{b_{r+1}} \,. \tag{37.17}$$

Agora, $\frac{\partial^2 \omega_{b_2\cdots b_{r+1}}}{\partial x^{b_0}\partial x^{b_1}}$ é simétrico pela troca $b_0 \leftrightarrow b_1$, enquanto que $dx^{b_0} \wedge dx^{b_1}$ é antissimétrico pela mesma troca. Isso implica a nulidade do lado direito de (37.17), como desejávamos provar.

Prova do item 2. Sejam $\omega_1 \in \Lambda^{r_1}(M)$ e $\omega_2 \in \Lambda^{r_2}(M)$ representados em uma carta local de coordenadas por

$$\omega_1 \;=\; \frac{1}{r_1!}\omega^1_{a_1\cdots a_{r_1}} dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_{r_1}} \quad \text{e} \quad \omega_2 \;=\; \frac{1}{r_2!}\omega^2_{b_1\cdots b_{r_2}} dx^{b_1} \wedge \cdots \wedge dx^{b_{r_2}} \,,$$

onde $\omega^1_{a_1\cdots a_{r_1}}$ e $\omega^2_{b_1\cdots b_{r_2}}$ são funções reais infinitamente diferenciáveis definidas em M que representam as componentes de ω_1 e ω_2, respectivamente, na carta de coordenadas considerada. Temos, usando implicitamente a pré-associatividade dos produtos $\wedge$,

$$\omega_1 \wedge_{r_1,\, r_2} \omega_2 \;=\; \frac{1}{r_1!r_2!}\, \omega^1_{a_1\cdots a_{r_1}} \omega^2_{b_1\cdots b_{r_2}} \Big(dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_{r_1}} \wedge_{r_1,\, r_2} dx^{b_1} \wedge \cdots \wedge dx^{b_{r_2}}\Big) \,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
d_{r_1+r_2}\big(\omega_1 \wedge_{r_1,\, r_2} \omega_2\big) \;&=\; \frac{1}{r_1!r_2!}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\omega^1_{a_1\cdots a_{r_1}}\omega^2_{b_1\cdots b_{r_2}}\Big)dx^i \wedge \Big(dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_{r_1}} \wedge_{r_1,\, r_2} dx^{b_1} \wedge \cdots \wedge dx^{b_{r_2}}\Big) \\
&\overset{\text{Leibniz}}{=} \left(\frac{1}{r_1!}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\omega^1_{a_1\cdots a_{r_1}}\Big)dx^i \wedge dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_{r_1}}\right) \wedge_{r_1+1,\, r_2} \left(\frac{1}{r_2!}\omega^2_{b_1\cdots b_{r_2}} dx^{b_1} \wedge \cdots \wedge dx^{b_{r_2}}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{r_1!}\omega^1_{a_1\cdots a_{r_1}} dx^i \wedge dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_{r_1}}\right) \wedge_{r_1,\, r_2} \left(\frac{1}{r_2!}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\omega^2_{b_1\cdots b_{r_2}}\Big)dx^{b_1} \wedge \cdots \wedge dx^{b_{r_2}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{r_1!}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\omega^1_{a_1\cdots a_{r_1}}\Big)dx^i \wedge dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_{r_1}}\right) \wedge_{r_1+1,\, r_2} \left(\frac{1}{r_2!}\omega^2_{b_1\cdots b_{r_2}} dx^{b_1} \wedge \cdots \wedge dx^{b_{r_2}}\right) \\
&\quad + (-1)^{r_1}\left(\frac{1}{r_1!}\omega^1_{a_1\cdots a_{r_1}} dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_{r_1}}\right) \wedge_{r_1,\, r_2+1} \left(\frac{1}{r_2!}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\omega^2_{b_1\cdots b_{r_2}}\Big)dx^i \wedge dx^{b_1} \wedge \cdots \wedge dx^{b_{r_2}}\right) \\
&= \big(d_{r_1}\omega_1\big) \wedge_{r_1+1,\, r_2} \omega_2 + (-1)^{r_1}\omega_2 \wedge_{r_1,\, r_2+1} \big(d_{r_2}\omega_2\big) \,.
\end{aligned}$$

onde, na penúltima igualdade, usamos que $dx^i \wedge dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_{r_1}} = (-1)^{r_1} dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_{r_1}} \wedge dx^i$. Também usamos os fatos que

$$dx^i \wedge \left(\Big(dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_{r_1}}\Big) \wedge_{r_1,\, r_2} \Big(dx^{b_1} \wedge \cdots \wedge dx^{b_{r_2}}\Big)\right) \;=\; \left(dx^i \wedge \Big(dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_{r_1}}\Big)\right) \wedge_{r_1+1,\, r_2} \Big(dx^{b_1} \wedge \cdots \wedge dx^{b_{r_2}}\Big)$$

(na segunda igualdade) e que

$$\left(\Big(dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_{r_1}}\Big) \wedge dx^i\right) \wedge_{r_1+1,\, r_2} \Big(dx^{b_1} \wedge \cdots \wedge dx^{b_{r_2}}\Big) \;=\; \Big(dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_{r_1}}\Big) \wedge_{r_1,\, r_2+1} \left(dx^i \wedge \Big(dx^{b_1} \wedge \cdots \wedge dx^{b_{r_2}}\Big)\right)$$

(na penúltima igualdade), que são decorrência direta da regra de pré-associatividade (37.4). ■

• O exemplo de formas em $\mathbb{R}^3$

É instrutivo considerarmos o caso em que $M = \mathbb{R}^3$. Há quatro possíveis formas nesse caso: adotando-se em $\mathbb{R}^3$ um atlas composto de uma única carta de coordenadas Cartesianas $(x^1,\ x^2,\ x^3)$, temos:

1. As 0-formas são funções $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.
2. As 1-formas são todas da forma $\alpha = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 + \alpha_3 dx^3$, onde α_1, β_2 e α_3 são funções de $C^\infty(\mathbb{R}^3)$
3. As 2-formas são todas da forma $\beta = \beta_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \beta_{23} dx^2 \wedge dx^3 + \beta_{31} dx^3 \wedge dx^1$, onde β_{12}, β_{23} β_{31} são funções de $C^\infty(\mathbb{R}^3)$
4. As 3-formas são todas da forma $\gamma = \gamma_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, onde γ_{123} é uma função de $C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

A ação da derivada exterior em cada um dos casos acima é

$$
\begin{aligned}
d_0 f &= \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}dx^3 \,, \\
d_1\alpha &= \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^2}\right) dx^1\wedge dx^2 + \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x^3}\right) dx^2\wedge dx^3 + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial x^1}\right) dx^3\wedge dx^1 \,, \\
d_2\beta &= \left(\frac{\partial \beta_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial \beta_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial \beta_{12}}{\partial x^3}\right) dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 \,, \\
d_3\gamma &= 0 \,.
\end{aligned}
$$

E. 37.4 *Exercício importante*. Verifique! ✣

O estudante iniciante deve contemplar a similaridade entre a derivada exterior de 0-formas e o operador gradiente, entre a derivada exterior de 1-formas e o operador rotacional e entre a derivada exterior de 3-formas e o operador divergente.

Além disso, estudante iniciante deve contemplar a similaridade entre a propriedade $d_1 d_0 f = 0$ e a familiar relação $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla} f) = 0$, do cálculo vetorial em $\mathbb{R}^3$, assim como similaridade entre a propriedade $d_2 d_1 \alpha = 0$ e a bem conhecida relação $\nabla\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{\alpha}) = 0$, também do cálculo vetorial em $\mathbb{R}^3$.

Os fatos acima relatados ajudam a revelar a elegância da teoria das formas diferenciais e da noção de derivada exterior de formas. Essa elegância irá ainda se manifestar na teoria de integração de formas.

• Definição axiomática da derivada exterior

Da forma como apresentamos a noção de derivação exterior, as propriedades listadas na Proposição 37.2, página 1799, são propriedades derivadas das definições (37.14)–(37.15). É possível, porém, expor as coisas de uma forma inversa, o que é o conteúdo do Exercício que segue:

E. 37.5 *Exercício*. Para cada $0 \leq r \leq m$ define-se a aplicação linear $d_r : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r+1}(M)$ através das seguintes propriedades:

1. Para toda $f \in C^\infty(M)$, $d_0 f$ coincide com a 1-forma df induzida por f: para todo $A \in \mathscr{X}(M)$ vale $\langle d_0 f,\, A\rangle = \langle df,\, A\rangle = A(f) = A^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$, essa última igualdade sendo a representação de $A(f)$ em cartas locais de coordenadas[4].
2. Para toda $f \in C^\infty(M)$, vale $d_1(d_0 f) = 0$.
3. Para todos $\omega_1 \in \Lambda^{r_1}(M)$ e $\omega_2 \in \Lambda^{r_2}(M)$, vale
$$d_{r_1+r_2}(\omega_1 \wedge_{r_1,\, r_2} \omega_2) = (d_{r_1}\omega_1) \wedge_{r_1+1,\, r_2} \omega_2 + (-1)^{r_1}\omega_1 \wedge_{r_1,\, r_2+1} (d_{r_2}\omega_2) \,. \tag{37.18}$$
4. $d_m = 0$.

Isto posto,

I. Mostre que (37.15) decorre dos postulados 1–4.
II. Mostre que os postulados 1–4 implicam diretamente que $d_{r+1}d_r = 0$ para cada $0 \leq r \leq m-1$.

O interesse na formulação da derivada exterior em termos dos postulados 1–4 se manifesta em áreas como a *Topologia Algébrica* e a chamada *Geometria Não-Comutativa*. ✣

37.1.2 Formas Exatas e Formas Fechadas

• Formas exatas e fechadas. O grupo de co-homologia de de Rham. O complexo de de Rham

O fato de valer $d_{r+1}\circ d_r = 0$ conduz a diversas explorações que apenas delinearemos aqui.

[4]Vide (35.60), página 1677

Uma r-forma ζ é dita ser *exata* se existir uma $(r-1)$-forma ξ tal que $\zeta = d_{r-1}\xi$. É claro que a coleção de todas as r-formas exatas compõe um subespaço vetorial de $\Lambda^r(m)$ e esse subespaço coincide com a imagem $\mathrm{Im}\,(d_{r-1})$ de d_{r-1}.

Uma r-forma θ é dita ser *fechada* se $d_r\theta = 0$. É claro que a coleção de todas as r-formas fechadas compõe um subespaço vetorial de $\Lambda^r(m)$ e esse subespaço coincide com o núcleo $\mathrm{Ker}\,(d_r)$ de d_r.

Claro está que toda r-forma exata é fechada (mas a recíproca não é necessariamente verdade) e isso significa que $\mathrm{Im}\,(d_{r-1}) \subset \mathrm{Ker}\,(d_r)$.

A questão de se saber se uma forma fechada dada é exata é importante e, interessantemente, a questão de saber se podem ou não haver formas fechadas que não são exatas depende de propriedades "topológicas" específicas da variedade diferenciável M.

Como $\mathrm{Im}\,(d_{r-1})$ e $\mathrm{Ker}\,(d_r)$ não são necessariamente iguais, é interessante considerar seu quociente. O espaço quociente[5]

$$H^r(M) := \mathrm{Ker}\,(d_r)/\mathrm{Im}\,(d_{r-1})$$

é denominado *grupo*[6] *de co-homologia de de Rham*[7].

Em um caso hipotético em que, para um dado r, toda r-forma fechada fosse exata, ou seja, no caso em que $\mathrm{Im}\,(d_{r-1}) = \mathrm{Ker}\,(d_r)$, o correspondente grupo de co-homologia de de Rham $H^r(M)$ seria trivial: $H^r(M) = \{0\}$. Dessa forma, no caso geral, podemos dizer *cum grano salis* que $H^r(M)$ "mede" em que grau as r-formas fechadas deixam de ser exatas. Uma outra razão por que os grupos $H^r(M)$ são importantes é que eles são invariantes por difeomorfismos e, portanto, podem ser estudados no sentido de classificar variedades diferenciáveis. Não iremos nos aprofundar mais nesses importantes temas aqui, que são objeto de área de estudo conhecida como Topologia Algébrica, e remetemos o estudante à literatura pertinente. Para uma introdução gentil a esses temas, vide *e.g.*, [160]. Vide também [316].

O encadeamento das aplicações $d_r : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r+1}(M)$ pode ser pictorialmente representado pelo seguinte diagrama:

$$0 \xrightarrow{\ i\ } \Lambda^0(M) \xrightarrow{\ d_0\ } \Lambda^1(M) \xrightarrow{\ d_1\ } \cdots \xrightarrow{\ d_{m-2}\ } \Lambda^{m-1}(M) \xrightarrow{\ d_{m-1}\ } \Lambda^m(M) \xrightarrow{\ d_m\ } 0 \,. \tag{37.19}$$

Acima, i representa a inclusão de $\{0\}$ em $\Lambda^0(M)$. A composição de duas aplicações sucessivas (na direção das flechas) resulta na aplicação nula (consequência do fato que $d_{r+1}\circ d_r = 0$). Uma estrutura com essa propriedade é dita ser um *complexo de cocadeias* e o complexo de cocadeias específico acima, que surge no contexto de formas diferenciais em variedades, é denominado *complexo de de Rham*. No caso em que $\mathrm{Im}\,(d_{r-1}) = \mathrm{Ker}\,(d_r)$ para todo r, (37.19) é dita ser uma *sequência exata*.

• *Pullbacks* agindo sobre formas diferenciais

Na expressão (35.58), da página 1674, vimos como se dá a ação de *pullbacks* sobre tensores tipo $(0,\ r)$. Aquela expressão se generaliza de forma imediada para formas diferenciais.

Sejam M_1 e M_2 duas variedades difeomorfas e seja $f : M_1 \to M_2$ um difeomorfismo. Seja $\omega \in \Lambda^r(M_2)$ uma r-forma em M_2, expressa em ponto $q \in M_2$ como $\omega_q = \omega_{i_1\cdots i_r}(q)dy_q^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy_q^{i_r}$. Em concordância com (35.58), o *pullback* de f sobre ω é dado por[8]

$$\big(f^*\omega\big)_p = \left(\omega_{i_1\cdots i_r}\big(f(p)\big)\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{j_r}}\right) dx_p^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_p^{j_r} \in \Lambda^r(M_1) \,, \tag{37.20}$$

sendo $p = f^{-1}(q) \in M_1$. Acima, $(x^1,\ \ldots,\ x^m)$ e $(y^1,\ \ldots,\ y^m)$ são sistemas de coordenadas locais em M_1 e M_2, respectivamente, em torno dos pontos p e q, respectivamente, sendo ainda m a dimensão de M_1 e de M_2. Para não sobrecarregar as fórmulas iremos frequentemente simplificar a notação, omitindo, por vezes, referências aos pontos $p \in M_1$ e $q = f(p) \in M_2$.

E. 37.6 *Exercício*. Justifique (37.20) com base em (35.58). ✣

[5]A noção de quociente de dois espaços vetoriais é introduzida na Seção 2.3.3, página 149, estendendo a noção de quociente de grupos, tratada no mesmo capítulo.

[6]Trata-se, em verdade, de um espaço vetorial (quociente) e, portanto, como tal, é um grupo Abeliano, daí a nomenclatura.

[7]Georges de Rham (1903–1990).

[8]Por simplicidade, usamos em (37.20) a mesma notação f^*, empregada para *pullbacks* usuais. Mais correto seria denotá-lo por $(f^*)^{\otimes r}$, o que teria a vantagem de marcar a dependência com r, mas evitamos fazê-lo.

Lema 37.1 *A aplicação $f^* : \Lambda^r(M_2) \to \Lambda^r(M_1)$ definida em (37.20) é um isomorfismo.* □

Prova. A linearidade de f^* é evidente por (37.20). Se ω e $\tilde{\omega}$ são dois elementos de $\Lambda^r(M_2)$ tais que $f^*\omega = f^*\tilde{\omega}$, então, por (37.20), $\omega_{i_1\cdots i_r}\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{j_r}} = \tilde{\omega}_{i_1\cdots i_r}\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{j_r}}$, o que implica $\omega_{i_1\cdots i_r} = \tilde{\omega}_{i_1\cdots i_r}$ para todos os índices $i_1, \cdots, i_r$, implicando, por sua vez, $\omega = \tilde{\omega}$. Isso provou que f^* é injetora. Para provar a sobrejetividade, tome-se $\theta \in \Lambda^r(M_1)$, arbitrário, da forma $\theta_{j_1\cdots j_r} dx_p^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_p^{j_r}$. Definindo-se $\omega \in \Lambda^r(M_2)$ por $\omega = \theta_{j_1\cdots j_r}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{i_r}} dy_q^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy_q^{i_r}$, é fácil ver por (37.20) que $f^*\omega = \theta$, mostrando que a imagem de f^* é todo $\Lambda^r(M_1)$. ■

• ***Pullbacks*** **e derivadas exteriores**

Vamos agora estabelecer um teorema de importância fundamental.

Teorema 37.1 *Sejam M_1 e M_2 duas variedades difeomorfas de dimensão m e seja $f : M_1 \to M_2$ um difeomorfismo. Para cada $r = 0, \ldots, m$, sejam ${}^1d_r$ e ${}^2d_r$ as derivadas exteriores definidas em $\Lambda^r(M_1)$ e $\Lambda^r(M_2)$, respectivamente. Então, vale*

$$ {}^1d_r\big(f^*\omega\big)_p \;=\; f^*\big({}^2d_r\omega\big)_p \tag{37.21}$$

para cada $r = 0, \ldots, m-1$, onde f^* é o pullback *definido em (37.20). Notemos que a igualdade fundamental (37.21) equivale à afirmação que o diagrama que segue é um* diagrama comutativo*:*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^r(M_2) & \xrightarrow{\;{}^2d_r\;} & \Lambda^{r+1}(M_2) \\ {\scriptstyle f^*}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f^*} \\ \Lambda^r(M_1) & \xrightarrow{\;{}^1d_r\;} & \Lambda^{r+1}(M_1) \end{array} \quad . \tag{37.22}$$

Além disso, para cada r, o isomorfismo f^* mapeia bijetivamente $\mathrm{Ker}\,({}^2d_r)$ em $\mathrm{Ker}\,({}^1d_r)$ e mapeia bijetivamente $\mathrm{Im}\,({}^2d_r)$ em $\mathrm{Im}\,({}^1d_r)$. Em outras palavras, o pullback *f^* mapeia bijetivamente formas exatas em formas exatas e formas fechadas em formas fechadas.*

Segue desses fatos que se M_1 e M_2 forem variedades diferenciáveis difeomorfas, então seus respectivos grupos de co-homologia de de Rham são isomorfos. Especificamente, vale

$$H^r(M_1) \;\simeq\; H^r(M_2)\,,$$

para todo $r = 0, \ldots, m$. □

Comentário. Um dos problemas fundamentais da Topologia Diferencial é identificar quando duas variedades são ou não difeomorfas. O Teorema 37.1 mostra-nos que se para duas variedades diferenciáveis M_1 e M_2, de mesma dimensão, valer $H^r(M_1) \not\simeq H^r(M_2)$ para algum r, então elas não podem ser difeomorfas. ♣

Prova do Teorema 37.1. Seguindo as definições acima, temos

$$\begin{aligned} {}^1d_r\big(f^*\omega\big)_p \;&=\; \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\omega_{i_1\cdots i_r}\big(f(p)\big)\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{j_r}}\right) dx_p^j\wedge dx_p^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_p^{j_r} \\ &=\; \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\omega_{i_1\cdots i_r}\big(f(p)\big)\right)\left(\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{j_r}}\right) dx_p^j\wedge dx_p^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_p^{j_r} \;\in\; \Lambda^{r+1}(M_1)\,, \end{aligned} \tag{37.23}$$

onde usamos repetidas vezes o fato que

$$\frac{\partial^2 y^{i_1}}{\partial x^j\partial x^{j_l}} dx_p^j\wedge dx_p^{j_l} \;=\; 0\,,$$

pois a derivada parcial dupla é simétrica pela troca de índices $j \leftrightarrow j_l$, enquanto que $dx_p^j\wedge dx_p^{j_l}$ é antissimétrico por essa troca.

Paralelamente, temos

$$\begin{aligned} f^*\big({}^2d_r\omega\big)_p \;&=\; f^*\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\omega_{i_1\cdots i_r}(q)\right) dy_q^i\wedge dy_p^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy_p^{i_r}\right] \\ &=\; \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\omega_{i_1\cdots i_r}(q)\right)\big(f^*dy_q^i\big)\wedge\big(f^*dy_p^{i_1}\big)\wedge\cdots\wedge\big(f^*dy_p^{i_r}\big) \\ &=\; \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\omega_{i_1\cdots i_r}(q)\right)\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{j_r}}\right) dx_p^j\wedge dx_p^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_p^{j_r} \\ &=\; \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\omega_{i_1\cdots i_r}\big(f(p)\big)\right)\left(\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{j_r}}\right) dx_p^j\wedge dx_p^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_p^{j_r} \;\in\; \Lambda^{r+1}(M_1)\,. \end{aligned} \tag{37.24}$$

Comparando (37.23) a (37.24), constatamos a igualdade desejada

$$ {}^1d_r\big(f^*\omega\big)_p \;=\; f^*\big({}^2d_r\omega\big)_p\,. \tag{37.25}$$

Se $\omega \in \Lambda^r(M_2)$ for exata, então $\omega = {}^2d_{r-1}\zeta$ para algum $\zeta \in \Lambda^{r-1}(M_2)$. Por (37.25), teremos $f^*\omega = f^*\big({}^2d_{r-1}\zeta\big) = {}^1d_{r-1}\big(f^*\zeta\big)$, o que prova que $f^*\omega \in \Lambda^r(M_1)$ é também exata. Reciprocamente, se $f^*\omega$ é exata, então existe $\theta \in \Lambda^{r-1}(M_1)$ tal que $f^*\omega = {}^1d_{r-1}\theta$. Como f^* é um isomorfismo, podemos definir $\alpha := \big(f^*\big)^{-1}\theta \in \Lambda^{r-1}(M_2)$ e teremos $f^*\omega = {}^1d_{r-1}\theta = {}^1d_{r-1}f^*\alpha = f^*\,{}^2d_{r-1}\alpha$, o que implica $\omega = {}^2d_{r-1}\alpha$ (novamente, pois f^* é um isomorfismo), mostrando que ω é exata. Isso estabeleceu que f^* mapeia bijetivamente $\mathrm{Im}\,\big({}^2d_{r-1}\big)$ em $\mathrm{Im}\,\big({}^2d_{r-1}\big)$.

Se $\omega \in \Lambda^r(M_2)$ for fechada, então ${}^2d_r\omega = 0$. Portanto, por (37.25) teremos ${}^1d_r\big(f^*\omega\big)_p = f^*\big({}^2d_r\omega\big)_p = 0$, provando que $f^*\omega \in \Lambda^r(M_1)$ é também fechada. Reciprocamente, se $f^*\omega$ for fechada, então $0 = {}^1d_rf^*\omega = f^*\,{}^2d_r\omega$, o que implica ${}^2d_r\omega = 0$, pois f^* é um isomorfismo. Isso mostrou que ω é igualmente fechada e estabeleceu-se que Isso estabeleceu que f^* mapeia bijetivamente $\mathrm{Ker}\,\big({}^2d_r\big)$ em $\mathrm{Ker}\,\big({}^2d_r\big)$.

Dos fatos acima, é imediato que $H^r(M_1) \simeq H^r(M_2)$ para cada $r = 0, \ldots, m$, completando a demonstração. ■

• Comentário sobre o Teorema de de Rham

Como expusemos, os grupos de co-homologia de de Rham $H^r(M)$, $r = 0, \ldots, m$, de uma variedade m-dimensional M, são associados ao complexo (37.19), produzido pelas derivadas exteriores d_r agindo sobre r-formas diferenciais. Um importante teorema, também devido a de Rham, afirma que cada grupo de co-homologia de de Rham de uma variedade compacta M é isomorfo a um outro grupo de co-homologia, denominado *grupo de co-homologia singular*. Tais grupos são associados a complexos de *símplices* definidos sobre M. Esse isomorfismo permite, em muitos casos de interesse, determinar os grupos de co-homologia de de Rham por meio da determinação dos grupos de co-homologia singulares, que pode ser mais direta. O desenvolvimento desse importante tema está além das atuais pretenções destas Notas. Para uma introdução gentil ao assunto, recomendamos [160]. Vide também [43] e [316].

37.1.2.1 O Lema de Poincaré

Como mencionamos, a questão de identificar condições suficientes para que se possa garantir, ao menos localmente, que uma forma fechada é exata, é muito importante. Na Física essa questão é relevante no Eletromagnetismo (quando o campo eletromagnético pode ser descrito por meio de um potencial vetor?) ou na Física Quântica (por exemplo na discussão sobre a forma da equação de Schrödinger[9] para uma partícula carregada sob a ação de um campo eletromagnético externo ou no estudo do efeito *efeito Bohm*[10]*–Aharonov*[11]. Vide, *e.g.*, [40]).

Nesse contexto, o chamado *Lema de Poincaré*[12] desempenha um papel muito importante. Passemos ao seu enunciado e à sua demonstração.

[9]Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887–1961).
[10]David Joseph Bohm (1917–1992).
[11]Yakir Aharonov (1932–).
[12]Jules Henri Poincaré (1854–1912).

• **Abertos estrelados em $\mathbb{R}^m$**

Um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ é dito ser um *aberto estrelado*[13] se existir $x_0 \in U$ tal que todo $x \in U$ possa ser conectado a x_0 por um segmento de reta inteiramente contido em U, ou seja, se para cada $x \in U$ o segmento de reta $\{x_0 + t(x - x_0),\ t \in [0,\ 1]\} \subset \mathbb{R}^m$ for um subconjunto de U.

Se U é um aberto estrelado, um tal ponto $x_0 \in U$ é dito ser um *centro* de U. É fácil ver, por exemplo, que se um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ for convexo, então U é estrelado e todo ponto de U é um centro.

• **Resultados preliminares**

Na demonstração do Lema de Poincaré que apresentaremos faremos uso de alguns resultados que exporemos aqui.

Seja U um aberto estrelado de $\mathbb{R}^m$ e suponha que a origem $0 \in \mathbb{R}^m$ seja um centro de U. Defina-se para cada $k \in \mathbb{N}$ a aplicação linear $\mathscr{G}_k : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ dada por

$$\big(\mathscr{G}_k f\big)(x) \;:=\; \int_0^1 t^{k-1} f(tx)\, dt \;, \tag{37.26}$$

$x \in U$, $\ f \in C^\infty(U)$. Antes de prosseguir, observe-se que essa expressão está bem definida com a hipótese que U é estrelado e 0 é um centro de U, pois, com isso, o ponto tx pertence a U sempre que $x \in U$ e $t \in [0,\ 1]$.

Afirmamos que para cada k vale

$$\left(k + \sum_{j=1}^m x^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\big(\mathscr{G}_k f\big)(x) \;=\; f(x) \;. \tag{37.27}$$

De fato, pela definição, vale para todo $\lambda \in [0,\ 1]$,

$$\big(\mathscr{G}_k f\big)(\lambda x) \;=\; \int_0^1 t^{k-1} f(t\lambda x)\, dt \;=\; \lambda^{-k} \int_0^\lambda t^{k-1} f(tx)\, dt \;.$$

Derivando-se ambos os lados em relação a λ, teremos

$$\frac{d}{d\lambda}\big(\mathscr{G}_k f\big)(\lambda x) \;=\; \sum_{j=1}^m x^j \frac{\partial\big(\mathscr{G}_k f\big)}{\partial x^j}(\lambda x) \;=\; -k\lambda^{-k-1}\int_0^\lambda t^{k-1} f(tx)\, dt + \lambda^{-1} f(\lambda x)$$

e tomando-se $\lambda = 1$ obtém-se finalmente da última igualdade a relação (37.27). Verifique!

Denotando-se por f_i a derivada parcial de f em relação à i-ésima coordenada, tem-se também que

$$\left(\mathscr{G}_k\left(k + \sum_{j=1}^m x^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) f\right)(x) \;=\; \int_0^1 t^{k-1}\left(k + \sum_{j=1}^m t x^j f_j(tx)\right) dt \;=\; \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(t^k f(tx)\Big)\, dt \;=\; t^k f(tx)\Big|_0^1 \;=\; f(x) \;.$$

Isso demonstrou que o operador diferencial $k + \sum_{j=1}^m x^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ é o operador inverso do operador integral $\mathscr{G}_k$ em $C^\infty(U)$.

Observe-se também que para todo j

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\big(\mathscr{G}_k f\big)(x) \;=\; \int_0^1 t^k f_j(tx)\, dt \;=\; \big(\mathscr{G}_{k+1} f_j\big)(x)$$

e, portanto, para cada j valem as seguintes relações de comutação entre os operadores $\mathscr{G}_k$ e as derivadas parciais:

$$\mathscr{G}_{k+1}\frac{\partial}{\partial x^j} \;=\; \frac{\partial}{\partial x^j}\mathscr{G}_k \;. \tag{37.28}$$

• **O Lema de Poincaré em $\mathbb{R}^m$**

Vamos agora enunciar e demonstrar o Lema de Poincaré para abertos estrelados de $\mathbb{R}^m$, para posteriormente apresentarmos generalizações desse resultado.

[13] "Star-shaped", em Inglês.

Teorema 37.2 (Lema de Poincaré em $\mathbb{R}^m$) *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto estrelado. Então, $H^r(U) \simeq \{0\}$ para todo $r = 0, \ldots, m$, ou seja, se $\beta \in \Lambda^r(U)$ é tal que $d_r\beta = 0$, então existe $\alpha \in \Lambda^{r-1}(U)$ tal que $\beta = d_{r-1}\alpha$. Em outras palavras, para cada $r = 0, \ldots, m$, vale a afirmação que toda r-forma fechada em $\Lambda^r(U)$ é exata.* □

Prova. Seguiremos as ideias da demonstração de [160], mas com uma organização que cremos ser melhor. Para $r = 0$ não há o que se demonstrar. Tomemos $r > 0$.

Sem perda de generalidade, podemos considerar que a origem $0 \in \mathbb{R}^m$ é um centro de U. Se tal não for o caso e x_0 for um centro de U, podemos transladar U de $-x_0$ e obter o efeito desejado. Note-se que uma translação é um difeomorfismo em $\mathbb{R}^m$ e, portanto, não altera os grupos de co-homologia de seus abertos (Teorema 37.1, página 1803).

Seja ω um elemento genérico de $\Lambda^r(U)$ da forma $\omega = \omega_{a_1\ldots a_r} dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_r}$ (aqui voltamos a usar a convenção e Einstein). Defina-se um operador linear $O_r : \Lambda^r(U) \to \Lambda^{r-1}(U)$ por

$$O_r\omega \;=\; \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1}\Big(x^{a_j}\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big) dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{a_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{a_r} \;,$$

onde $\widehat{dx^{a_j}}$ significa que esse fator é omitido da produtória exterior. O operador $\mathscr{G}_r$, acima, foi definido em (37.26).

Para facilitar a organização, vamos dividir o restante da demonstração em partes e subpartes.

Parte I. *Uma relação crucial.*

Afirmamos que vale a seguinte relação crucial:

$$O_{r+1} \circ d_r + d_{r-1} \circ O_r \;=\; \mathbf{id}_r \;, \tag{37.29}$$

onde $\mathbf{id}_r$ é a aplicação identidade em $\Lambda^r(U)$. A prova de (37.29) é a parte tecnicamente mais elaborada de toda a demonstração e requer uma análise separada dos termos $O_{r+1} \circ d_r$ e $d_{r-1} \circ O_r$.

Parte Ia. *Determinação de $O_{r+1} \circ d_r$.*

Para $\omega \in \Lambda^r(U)$ como acima, podemos escrever

$$d_r\omega \;=\; \frac{\partial\omega_{a_1\ldots a_r}}{\partial x^{a_{r+1}}} dx^{a_{r+1}} \wedge dx^{a_1} \wedge \cdots\cdots \wedge dx^{a_r} \;=\; (-1)^r \frac{\partial\omega_{a_1\ldots a_r}}{\partial x^{a_{r+1}}} dx^{a_1} \wedge \cdots\cdots \wedge dx^{a_r} \wedge dx^{a_{r+1}}$$

e, assim,

$$\begin{aligned}
O_{r+1}\big(d_r\omega\big) \;&=\; \sum_{j=1}^{r+1}(-1)^{r+j-1} x^{a_j}\mathscr{G}_{r+1}\left(\frac{\partial\omega_{a_1\ldots a_r}}{\partial x^{a_{r+1}}}\right) dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{a_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{a_r} \wedge dx^{a_{r+1}} \\
&\overset{(37.28)}{=}\; \sum_{j=1}^{r+1}(-1)^{r+j-1} x^{a_j}\frac{\partial}{\partial x^{a_{r+1}}}\Big(\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big) dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{a_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{a_r} \wedge dx^{a_{r+1}} \\
&=\; \sum_{j=1}^{r}(-1)^{r+j-1} x^{a_j}\frac{\partial}{\partial x^{a_{r+1}}}\Big(\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big) dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{a_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{a_r} \wedge dx^{a_{r+1}} \\
&\quad + x^{a_{r+1}}\frac{\partial}{\partial x^{a_{r+1}}}\Big(\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big) dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_r} \;,
\end{aligned}$$

sendo que a última linha corresponde ao termo com $j = r+1$ da linha anterior. Agora, na penúltima linha acima, onde ocorre a somatória para j variando entre 1 e r, vamos permutar o fator $dx^{a_{r+1}}$ com os demais, colocando-o na primeira posição, com o que ganhamos um fator $(-1)^{r-1}$, dado que há $r-1$ fatores diferenciais a serem permutados. Além disso, em ambas as últimas linhas vamos renomear o índice a_{r+1} simplesmente por a. Ficamos com

$$\begin{aligned}
O_{r+1}\big(d_r\omega\big) \;&=\; \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j} x^{a_j}\frac{\partial}{\partial x^{a}}\Big(\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big) dx^{a} \wedge dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{a_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{a_r} \\
&\quad + x^{a}\frac{\partial}{\partial x^{a}}\Big(\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big) dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_r} \;.
\end{aligned} \tag{37.30}$$

Parte Ib. *Determinação de $d_{r-1} \circ O_r$.*

Para $\omega \in \Lambda^r(U)$ como acima, temos

$$\begin{aligned}
d_{r-1}\Big(O_r\omega\Big) &= \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}d_{r-1}\bigg(\Big(x^{a_j}\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big)dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{a_j}}\wedge\cdots\wedge dx^{a_r}\bigg)\\
&= \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\frac{\partial}{\partial x^a}\Big(x^{a_j}\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big)dx^a\wedge dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{a_j}}\wedge\cdots\wedge dx^{a_r}\\
&\overset{\text{Leibniz}}{=} \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\delta_a{}^{a_j}\Big(\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big)dx^a\wedge dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{a_j}}\wedge\cdots\wedge dx^{a_r}\\
&\quad+\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}x^{a_j}\frac{\partial}{\partial x^a}\Big(\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big)dx^a\wedge dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{a_j}}\wedge\cdots\wedge dx^{a_r}\\
&= \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\Big(\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big)dx^{a_j}\wedge dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{a_j}}\wedge\cdots\wedge dx^{a_r}\\
&\quad+\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}x^{a_j}\frac{\partial}{\partial x^a}\Big(\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big)dx^a\wedge dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{a_j}}\wedge\cdots\wedge dx^{a_r}\ .
\end{aligned}$$

Na penúltima linha podemos comutar o fator dx^{a_j} de volta à j-ésima posição (onde o mesmo fator fora omitido). Esse processo custa um fator $(-1)^{j-1}$ e assim obtemos para a penúltima linha

$$\sum_{j=1}^{r}\Big(\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big)dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge dx^{a_r} \;=\; r\Big(\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big)dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge dx^{a_r}\ .$$

Dessa forma, concluímos que

$$\begin{aligned}
d_{r-1}\Big(O_r\omega\Big) &= r\Big(\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big)dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge dx^{a_r}\\
&\quad-\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j}x^{a_j}\frac{\partial}{\partial x^a}\Big(\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big)dx^a\wedge dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{a_j}}\wedge\cdots\wedge dx^{a_r}\ .
\end{aligned} \tag{37.31}$$

Parte Ic. *Completando a prova de (37.29).*

Juntando (37.30) a (37.31), podemos constatar (faça-o!) que os termos das somatórias em j se cancelam e obtemos

$$\begin{aligned}
O_{r+1}\big(d_r\omega\big)+d_{r-1}\Big(O_r\omega\Big) &= r\Big(\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big)dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge dx^{a_r}+x^a\frac{\partial}{\partial x^a}\Big(\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big)dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge dx^{a_r}\\
&= \left(k+\sum_{a=1}^{m}x^a\frac{\partial}{\partial x^a}\right)\Big(\mathscr{G}_r\big(\omega_{a_1\ldots a_r}\big)\Big)dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge dx^{a_r}\\
&\overset{(37.27)}{=} \omega_{a_1\ldots a_r}dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge dx^{a_r} \;=\; \omega\ ,
\end{aligned}$$

demonstrando, assim, a relação crucial (37.29).

Parte II. *Completando a prova do Lema de Poincaré.*

A relação crucial

$$O_{r+1}\big(d_r\omega\big)+d_{r-1}\Big(O_r\omega\Big) \;=\; \omega\ , \tag{37.32}$$

provada acima, é válida para toda $\omega \in \Lambda^r(U)$. Em particular, se $\omega \in \Lambda^r(U)$ for fechada, ou seja, se valer $d_r\omega = 0$, então (37.32) diz-nos que

$$\omega \;=\; d_{r-1}\alpha\ ,$$

com $\alpha \in \Lambda^{r-1}(U)$ dada por $\alpha = O_r\omega$. Isso mostra que toda r-forma fechada em U é também exata, completando a demonstração do Teorema 37.2, o Lema de Poincaré para abertos estrelados em $\mathbb{R}^m$. ■

• **Extensões do Lema de Poincaré**

O Lema de Poincaré para abertos estrelados em $\mathbb{R}^m$, Teorema 37.2, página 1806, juntamente com o Teorema 37.1, página 1803, conduzem à seguinte consequência imediata, que não requer demonstração:

Corolário 37.1 *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e suponha que M seja difeomorfa a um aberto estrelado $U \subset \mathbb{R}^m$. Então,*

$$H^r(M) \;\simeq\; \{0\}$$

para todo $r = 0, \ldots, m$. Portanto, vale também em M o Lema de Poincaré: toda r-forma fechada em $\Lambda^r(M)$ é também exata. □

Uma variedade M é dita ser suavemente contratível a um ponto $p_0 \in M$ se existir uma aplicação infinitamente diferenciável $H : M \times [0, 1] \to M$ tal que para todo $p \in M$ valham $H(p, 0) = p$ e $H(p, 1) = p_0$. Abertos estrelados de $\mathbb{R}^m$ são exemplos de variedades suavemente contratíveis a um ponto.

O Corolário 37.1 admite a seguinte generalização:

Teorema 37.3 *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e suponha que M seja suavemente contratível a um ponto $p_0 \in M$. Então,*

$$H^r(M) \;\simeq\; \{0\}$$

para todo $r = 0, \ldots, m$. Portanto, vale também em M o Lema de Poincaré: toda r-forma fechada em $\Lambda^r(M)$ é também exata. □

Uma demonstração desse teorema, fazendo uso da teoria de integração de formas, pode ser encontrada em [229]. O Teorema 37.3 também pode ser demonstrado com uso do já mencionado Teorema de de Rham, que afirma que os grupos de co-homologia de de Rham $H^r(M)$ são isomorfos aos grupos de co-homologia singulares de M, os quais são definidos através de complexos de símplices. O leitor pode acompanhar esses desenvolvimentos, por exemplo, em [160].

37.2 Dualidade de Hodge

A teoria das formas diferenciais foi desenvolvida até aqui sem o uso de um tensor métrico definido na variedade diferenciável considerada. Entraremos agora em um tema no qual um tensor métrico é empregado, o estudo da chamada *dualidade de Hodge*.

Nesta seção faremos uso eventual da definição e de propriedades dos chamados *símbolos de Levi-Civita* e a eles dedicamos o Apêndice 37.A, página 1821.

37.2.1 O Mapa Dual de Hodge

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m. Já comentamos que os espaços $\Lambda^r(M)$ e $\Lambda^{m-r}(M)$, com $r \in \{0, \ldots, m\}$ possuem a mesma dimensão (a saber $\binom{m}{r} = \frac{m!}{(m-r)!r!}$) e, portanto, são isomorfos. Há muitos de tais isomorfismos. A título de exemplo, um desses possíveis isomorfismos entre $\Lambda^r(M)$ e $\Lambda^{m-r}(M)$ é $E_r : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{m-r}(M)$ dado por

$$E_r\Big(\varphi_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\Big) \;:=\; \varphi_{i_1\cdots i_r}\varepsilon_{i_1\cdots i_r j_1\cdots j_{m-r}}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_{m-r}}\ .$$

Acima fizemos uso dos chamados *símbolos de Levi-Civita*, definidos em (37.A.1) ou (37.A.2), página 1821. Esse isomorfismo, porém, não possui propriedades interessantes.

• **Novos símbolos de Levi-Civita**

Em havendo um tensor métrico g em M podemos definir novas classes de símbolos de Levi-Civita que serão empregados na definição do mapa dual de Hodge e no estudo de suas propriedades Definimos,

$$\varepsilon^{b_1\cdots b_r}{}_{a_{r+1}\cdots a_m} := g^{b_1a_1}\cdots g^{b_ra_r}\,\varepsilon_{a_1\cdots a_ra_{r+1}\cdots a_m} . \tag{37.33}$$

Note-se que o erguimento dos índices segue as convenções usuais. Para uso futuro, afirmamos que no caso $r = m$ vale a seguinte relação:

$$\varepsilon^{b_1\cdots b_m} = \mathbf{g}^{-1}\,\varepsilon_{b_1\cdots b_m} , \tag{37.34}$$

onde $\mathbf{g}$ é o determinante da matriz g_{ij}, composta pelas componentes do tensor métrico (covariante). Isso decorre do fato que

$$\varepsilon^{b_1\cdots b_m} := g^{b_1a_1}\cdots g^{b_ma_m}\,\varepsilon_{a_1\cdots a_m} = \Big(g^{1a_1}\cdots g^{ma_m}\,\varepsilon_{a_1\cdots a_m}\Big)\varepsilon_{b_1\cdots b_m} = \mathbf{g}^{-1}\varepsilon_{b_1\cdots b_m} ,$$

pois, pela fórmula de Leibniz para o determinante de matrizes (vide (9.17), página 359), $g^{1a_1}\cdots g^{ma_m}\,\varepsilon_{a_1\cdots a_m}$ é o determinante da matriz g^{ij}, composta pelas componentes do tensor métrico contravariante, e esse determinante vale $\mathbf{g}^{-1}$.

Em particular,

$$\varepsilon^{1\cdots m} = \mathbf{g}^{-1}\varepsilon_{1\cdots m} = \mathbf{g}^{-1} . \tag{37.35}$$

Como dissemos, mais propriedades dos símbolos de Levi-Civita serão apresentadas no Apêndice 37.A, página 1821.

• **O mapa dual de Hodge**

Em havendo um tensor métrico g em M, é possível definir um isomorfismo entre $\Lambda^r(M)$ e $\Lambda^{m-r}(M)$ com propriedades de especial interesse, denominado *isomorfismo de Hodge*, *operação $*$ de Hodge*, *mapa dual de Hodge*, *dualidade de Hodge*[14] ou talvez outros nomes similares.

Podemos definir o chamado *mapa dual de Hodge*, como sendo a aplicação linear $\mathcal{H}_r : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{m-r}(M)$ dada por

$$\mathcal{H}_r\left(\frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\right) := \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{(m-r)!\,r!}\,\varphi_{i_1\cdots i_r}\varepsilon^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_{m-r}}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_{m-r}} , \tag{37.36}$$

onde $\mathbf{g}$ é o determinante da matriz g_{ij} que compõe o tensor métrico. O fator $\frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{(m-r)!}$ é introduzido por mera conveniência, como ficará claro nas expressões que obteremos adiante. É claro por (37.36) que $\mathcal{H}_r$ transforma as componentes $\varphi_{i_1\cdots i_r}$ de uma r-forma nas componentes $\frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{r!}\,\varphi_{i_1\cdots i_r}\varepsilon^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_{m-r}}$ de uma $(m-r)$-forma.

• **Propriedades básicas do mapa dual de Hodge**

Listemos algumas das propriedades básicas do mapa dual de Hodge.

Proposição 37.3 *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m. Seja $r \in \{0, \ldots, m\}$. Para o mapa dual de Hodge $\mathcal{H}_r$, definido em (37.36), valem as seguintes propriedades úteis:*

1. *Para $1 \in \Lambda^0(M)$, temos*

$$\mathcal{H}_0(1) = \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{m!}\,\varepsilon_{j_1\cdots j_r}\,dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_m} = \sqrt{|\mathbf{g}|}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m \in \Lambda^m(M) . \tag{37.37}$$

2. *Para $\varphi = \varphi_{1\cdots m}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m \in \Lambda^m(M)$, temos*

$$\mathcal{H}_m\left(\frac{\varphi_{1\cdots m}}{m!}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m\right) = \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{\mathbf{g}}\,\frac{\varphi_{1\cdots m}}{m!} . \tag{37.38}$$

[14] Sir William Vallance Douglas Hodge (1903–1975).

3. *Para as composições $\mathcal{H}_{m-r}\circ\mathcal{H}_r : \Lambda^r(M)\to\Lambda^r(M)$ e $\mathcal{H}_r\circ\mathcal{H}_{m-r} : \Lambda^{m-r}(M)\to\Lambda^{m-r}(M)$, temos:*

$$\mathcal{H}_{m-r}\circ\mathcal{H}_r = (-1)^{r(m-r)}\frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}}\,\mathbf{id}_r , \tag{37.39}$$

$$\mathcal{H}_r\circ\mathcal{H}_{m-r} = (-1)^{r(m-r)}\frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}}\,\mathbf{id}_{m-r} . \tag{37.40}$$

Note-se que $\frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}} = +1$, caso o tensor métrico seja Riemanniano, e $\frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}} = -1$, caso seja Lorentziano.

4. *Para todos $\omega,\ \zeta \in \Lambda^r(M)$ vale*

$$\omega\wedge_{r,\,m-r}\Big(\mathcal{H}_r(\zeta)\Big) = \frac{1}{r!}\omega_{a_1\cdots a_r}\zeta^{a_1\cdots a_r}\sqrt{|\mathbf{g}|}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m , \tag{37.41}$$

onde escrevemos $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{a_1\cdots a_r}dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge dx^{a_r}$ e $\zeta = \frac{1}{r!}\zeta_{b_1\cdots b_r}dx^{b_1}\wedge\cdots\wedge dx^{b_r} \in \Lambda^r(M)$.

5. *Para todos $\omega,\ \zeta \in \Lambda^r(M)$ vale*

$$\omega\wedge_{r,\,m-r}\Big(\mathcal{H}_r(\zeta)\Big) = \zeta\wedge_{r,\,m-r}\Big(\mathcal{H}_r(\omega)\Big) . \tag{37.42}$$

□

Comentários. **I.** Com (37.39) e (37.40) podemos identificar o operador inverso $\big(\mathcal{H}_r\big)^{-1} : \Lambda^{m-r}(M)\to\Lambda^r(M)$ como sendo

$$\big(\mathcal{H}_r\big)^{-1} = (-1)^{r(m-r)}\frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|}\mathcal{H}_{m-r} . \tag{37.43}$$

Observe-se que $\big(\mathcal{H}_0\big)^{-1} = \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|}\mathcal{H}_m$ e $\big(\mathcal{H}_m\big)^{-1} = \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|}\mathcal{H}_0$.

II. Se M for compacta, orientável e sem fronteira as relações (37.41) e (37.42) mostram que

$$\begin{aligned}\langle\omega,\ \zeta\rangle^r_{\text{Hodge}} := \int_M\Big(\omega\wedge_{r,\,m-r}\big(\mathcal{H}_r(\zeta)\big)\Big) &= \frac{1}{r!}\int_M\big(\omega_{a_1\cdots a_r}\zeta^{a_1\cdots a_r}\big)\sqrt{|\mathbf{g}|}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m \\ &= \frac{1}{r!}\int_M\big(\omega_{a_1\cdots a_r}\zeta^{a_1\cdots a_r}\big)\sqrt{|\mathbf{g}|}\,dx^1\cdots dx^m\end{aligned} \tag{37.44}$$

define uma forma bilinear em $\Lambda^r(M)$ que é simétrica, $\langle\omega,\ \zeta\rangle^r_{\text{Hodge}} = \langle\zeta,\ \omega\rangle^r_{\text{Hodge}}$ e, no caso de g ser Riemanniano, positiva. ♣

Prova da Proposição 37.3. Como $1 \in \Lambda^0(M)$, temos de (37.36)

$$\mathcal{H}_0(1) = \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{m!}\,\varepsilon_{j_1\cdots j_r}\,dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_m} = \sqrt{|\mathbf{g}|}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m \in \Lambda^m(M) .$$

Para $\varphi = \varphi_{1\cdots m}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m \in \Lambda^m(M)$, temos

$$\mathcal{H}_m\Big(\varphi_{1\cdots m}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m\Big) := \sqrt{|\mathbf{g}|}\,\varphi_{1\cdots m}\,\varepsilon^{1\cdots m} \overset{(37.35)}{=} \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{\mathbf{g}}\,\varphi_{1\cdots m} . \tag{37.45}$$

A prova de (37.39) é apresentada no Apêndice 37.B, página 1824. A relação (37.40) é obtida de (37.39) pela troca $r \leftrightarrow (m-r)$.

As demonstrações de (37.41) e de (37.42) (que é uma consequência elementar de (37.41)) são apresentadas no Apêndice 37.C, página 1825. ■

• **Comentário sobre outras notações para o mapa dual de Hodge**

Advertimos o leitor que muitos textos empregam uma notação simplificadora para o mapa dual de Hodge: ele é denotado apenas por $*$, sem referência ao índice r, que indica sobre qual espaço $\Lambda^r(M)$ ele age. Por essa razão o mapa dual de Hodge é muitas vezes denominado *operador estrela de Hodge* ("Hodge star operator"). Uma relação como (37.39), por exemplo, se expressa nessa notação

$$** = (-1)^{r(m-r)}\frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}} .$$

Neste texto evitaremos o uso dessa notação simplificadora por entender que ela pode conduzir a mal-entendidos de diversos tipos.

37.2.2 A Coderivada Exterior

Conforme a definição da Seção 37.1.1, página 1799, a derivada exterior d_r, $r = 0, \ldots, m$, é um mapeamento linear $d_r : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r+1}(M)$. Com uso do mapa dual de Hodge podemos definir um operador dual à derivada exterior.

Definimos a coderivada exterior, ou codiferencial, como sendo o operador $d_r^\dagger : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r-1}(M)$ definido por

$$d_r^\dagger \;:=\; (-1)^r \left(\mathcal{H}_{r-1}\right)^{-1} \circ d_{m-r} \circ \mathcal{H}_r \; . \tag{37.46}$$

Na literatura, a coderivada exterior, ou codiferencial, $d_r^\dagger$ é também frequentemente denotada por δ_r.

A relação entre d e $d^\dagger$ pode ser esclarecida no seguinte *diagrama comutativo*:

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{m-r}(M) \arrow[r, "d_{m-r}"] & \Lambda^{m-r+1}(M) \arrow[d, "\left(\mathcal{H}_{r-1}\right)^{-1}"] \\ \Lambda^r(M) \arrow[u, "\mathcal{H}_r"] \arrow[r, "(-1)^r d_r^\dagger"'] & \Lambda^{r-1}(M) \end{tikzcd} \quad . \tag{37.47}$$

Por (37.43), $\left(\mathcal{H}_{r-1}\right)^{-1} = (-1)^{(r-1)(m-r+1)} \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} \mathcal{H}_{m-r+1}$ e, portanto, podemos também escrever

$$d_r^\dagger \;=\; (-1)^{r+(r-1)(m-r+1)} \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} \mathcal{H}_{m-r+1} \circ d_{m-r} \circ \mathcal{H}_r \; .$$

Sucede ainda que $r + (r-1)(m-r+1) = \left[(r+1)m+1\right] + 2(r-m-1) - r(r-1)$ e como $2(r-m-1)$ e $r(r-1)$ são sempre números pares, podemos escrever

$$d_r^\dagger \;=\; (-1)^{(r+1)m+1} \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} \, \mathcal{H}_{m-r+1} \circ d_{m-r} \circ \mathcal{H}_r \; . \tag{37.48}$$

Escrevemos essa expressão pois a codiferencial $d_r^\dagger$ é muitas vezes definida dessa forma na literatura. A definição (37.46), porém, lhe é superior.

Dela podemos ver facilmente que $d_{r-1}^\dagger d_r^\dagger = 0$. De fato,

$$d_{r-1}^\dagger d_r^\dagger \;=\; -\left(\mathcal{H}_{r-2}\right)^{-1} \circ d_{m-r+1} \circ \mathcal{H}_{r-1} \circ \left(\mathcal{H}_{r-1}\right)^{-1} \circ d_{m-r} \circ \mathcal{H}_r \;=\; -\left(\mathcal{H}_{r-2}\right)^{-1} \circ d_{m-r+1} \circ d_{m-r} \circ \mathcal{H}_r \;=\; 0 \; .$$

pois já sabemos que $d_{m-r+1} d_{m-r} = 0$.

Em analogia à (37.19), página 1802, o encadeamento das aplicações $d_r^\dagger : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r-1}(M)$ pode ser pictorialmente representado pelo seguinte diagrama:

$$0 \xleftarrow{\;d_0^\dagger\;} \Lambda^0(M) \xleftarrow{\;d_1^\dagger\;} \Lambda^1(M) \xleftarrow{\;d_2^\dagger\;} \cdots \xleftarrow{\;d_{m-1}^\dagger\;} \Lambda^{m-1}(M) \xleftarrow{\;d_m^\dagger\;} \Lambda^m(M) \xleftarrow{\;i\;} 0 \; . \tag{37.49}$$

Acima, i representa a inclusão de $\{0\}$ em $\Lambda^m(M)$. A composição de duas aplicações sucessivas (na direção das flechas) resulta na aplicação nula.

Para uso futuro exibimos a expressão explícita para $d_1^\dagger$ agindo em uma 1-forma $\omega = \omega_i dx^i \in \Lambda^1(M)$, arbitrária:

$$d_1^\dagger\big(\omega_i dx^i\big) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(g^{ij}\omega_j \sqrt{|\mathbf{g}|}\Big) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\omega^i \sqrt{|\mathbf{g}|}\Big) \; . \tag{37.50}$$

A demonstração pode ser acompanhada no Apêndice 37.D, página 1826.

• Formas coexatas e cofechadas

Para a codiferencial $d^\dagger$ podemos introduzir definições análogas às que apresentamos para a derivada exterior.

Uma r-forma α é dita ser uma *forma coexata* se $\alpha = d_{r+1}^\dagger \beta$ para alguma $r+1$-forma β.

Uma r-forma α é dita ser uma *forma cofechada* se $d_r^\dagger \alpha = 0$.

De forma análoga ao que fizemos na definição da co-homologia de de Rham. definimos os grupos de homologia associados à codiferencial por

$$H_r(M) \;:=\; \operatorname{Ker}\big(d_r^\dagger\big) / \operatorname{Im}\big(d_{r+1}^\dagger\big) \; .$$

Como as aplicações $\mathcal{H}_r$, $r = 0, \ldots, m$, são isomorfismos de espaços vetoriais, é fácil ver por (37.46) que $\operatorname{Ker}\big(d_r^\dagger\big) = \big(\mathcal{H}_r\big)^{-1} \operatorname{Ker}\left(d_{m-r}\right)$ e $\operatorname{Im}\big(d_{r+1}^\dagger\big) = \big(\mathcal{H}_r\big)^{-1} \operatorname{Ker}\left(d_{m-r-1}\right)$. Assim, concluímos que

$$H_r(M) \;\simeq\; \operatorname{Ker}\left(d_{m-r}\right) / \operatorname{Ker}\left(d_{m-r-1}\right) \;=\; H^{m-r}(M) \; ,$$

com o isomorfismo sendo dado por $\big(\mathcal{H}_r\big)^{-1}$. Assim, os grupos de homologia associados à codiferencial são isomorfos a grupos de co-homologia associados à diferencial exterior. A contemplação do diagrama comutativo (37.47), página 1811, pode ajudar a compreensão desses fatos.

• O adjunto formal da derivada e da coderivada exterior

Uma das qualidades especiais da coderivada (e de toda a teoria da dualidade de Hodge) reside na seguinte proposição:

Proposição 37.4 *Seja M uma variedade diferenciável, compacta, orientável e sem fronteira e seja $\langle \cdot, \cdot \rangle^r_{\text{Hodge}}$ a forma bilinear definida em (37.44), página 1810. Então, vale*

$$\big\langle d_{r-1}\alpha, \; \beta \big\rangle^r_{\text{Hodge}} \;=\; \big\langle \alpha, \; d_r^\dagger \beta \big\rangle^{r-1}_{\text{Hodge}} \tag{37.51}$$

para todos $\alpha \in \Lambda^{r-1}(M)$ e $\beta \in \Lambda^r(M)$. Nesse sentido, podemos afirmar que $d_r^\dagger$ é o adjunto formal de d_{r-1}. □

Demonstração. Temos que

$$\big\langle \alpha, \; d_r^\dagger \beta \big\rangle^{r-1}_{\text{Hodge}} \;=\; \int_M \Big(\alpha \wedge_{r-1,\,m-r+1} \mathcal{H}_{r-1}\big(d_r^\dagger \beta\big)\Big) \;=\; (-1)^r \int_M \Big(\alpha \wedge_{r-1,\,m-r+1} \big(d_{m-r}\mathcal{H}_r(\beta)\big)\Big) \; .$$

Agora, pela regra de Leibniz para a derivada exterior (37.16), página 1799, vale

$$d_{m-1}\big(\alpha \wedge_{r-1,\,m-r} \mathcal{H}_r(\beta)\big) \;=\; \big(d_{r-1}\alpha\big) \wedge_{r,\,m-r} \mathcal{H}_r(\beta) + (-1)^{r-1} \alpha \wedge_{r-1,\,m-r+1} \big(d_{m-r}\mathcal{H}_r(\beta)\big) \; .$$

Assim,

$$\big\langle \alpha, \; d_r^\dagger \beta \big\rangle^{r-1}_{\text{Hodge}} \;=\; \int_M \big(d_{r-1}\alpha\big) \wedge_{r,\,m-r} \mathcal{H}_r(\beta) - \int_M d_{m-1}\big(\alpha \wedge_{r-1,\,m-r} \mathcal{H}_r(\beta)\big) \; .$$

Pelo Teorema de Stokes, e pelo fato de M ser compacta, orientável e sem fronteiras, a segunda integral do lado direito é nula. Assim,

$$\big\langle \alpha, \; d_r^\dagger \beta \big\rangle^{r-1}_{\text{Hodge}} \;=\; \int_M \big(d_{r-1}\alpha\big) \wedge_{r,\,m-r} \mathcal{H}_r(\beta) \;\stackrel{(37.44)}{=}\; \big\langle d_{r-1}\alpha, \; \beta \big\rangle^r_{\text{Hodge}} \; ,$$

completando a demonstração. ■

• A forma bilinear de Hodge no caso Riemanniano

Para M for compacta, orientável, sem fronteira, de dimensão m e dotada de um tensor métrico g, definimos em (37.44), página 1810, a forma bilinear de Hodge $\langle \cdot, \cdot \rangle^r_{\text{Hodge}}$ no espaço das r-formas $\Lambda^r(M)$.

No caso de o tensor métrico g ser Riemanniano, afirmamos que para toda $\alpha \in \Lambda^r(M)$ vale $\langle \alpha, \; \alpha \rangle^r_{\text{Hodge}} \geq 0$ e que se $\langle \alpha, \; \alpha \rangle^r_{\text{Hodge}} = 0$ se e somente se $\alpha = 0$. De fato, por (37.44), escrevendo em componentes $\alpha = \frac{1}{r!} \alpha_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$, temos $\langle \alpha, \; \alpha \rangle^r_{\text{Hodge}} = \frac{1}{r!} \int_M \left(\alpha_{a_1 \cdots a_r} \alpha^{a_1 \cdots a_r}\right) \sqrt{|\mathbf{g}|} \, dx^1 \cdots dx^m$. Agora, como g é Riemanniano, para cada $p \in M$ podemos encontrar um sistema de coordenadas onde g é diagonal: $g_p^{ij} = \delta^{ij}$. Nesse ponto, e nesse sistema de coordenadas, teremos $\alpha_{a_1 \cdots a_r} \alpha^{a_1 \cdots a_r} = \sum_{a_1=1}^m \cdots \sum_{a_r=1}^m \left(\alpha_{a_1 \cdots a_r}\right)^2 \geq 0$. Como o lado esquerdo é invariante, provamos que $\left(\alpha_{a_1 \cdots a_r} \alpha^{a_1 \cdots a_r}\right) \geq 0$ em todo sistema de coordenadas locais e em todo ponto de M. Como a medida de integração é positiva, isso estabeleceu que $\langle \alpha, \; \alpha \rangle^r_{\text{Hodge}} \geq 0$. Pela mesma razão $\langle \alpha, \; \alpha \rangle^r_{\text{Hodge}} = 0$ implica $\alpha_{a_1 \cdots a_r} = 0$ quase em toda a parte, e para todos os possíveis índices. A continuidade de α implica, portanto, que suas componentes devem ser identicamente nulas.

Em resumo, provamos:

Proposição 37.5 *Se M for compacta, orientável, sem fronteira, de dimensão m e dotada de um tensor métrico Riemanniano g, a forma bilinear de Hodge $\langle\cdot,\ \cdot\rangle^r_{\text{Hodge}}$ define um produto escalar em $\Lambda^r(M)$.* □

37.2.3 O Operador de Laplace-de Rham

Na Seção 36.2.4, página 1741, descrevemos uma generalização do operador Laplaciano para funções agindo em variedades diferenciáveis dotadas de uma conexão de Levi-Civita, o chamado *operador de Laplace-Beltrami*. Fazendo uso do mapa dual de Hodge vamos agora tratar de uma outra generalização para formas diferenciais (de grau qualquer) definidas em uma variedade diferenciável: o chamado *operador de Laplace-de Rham*.

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e seja $r \in \{0, \ldots, m\}$. O operador de Laplace-de Rham, denotado por $\Delta \equiv \Delta_r : \Lambda^r(M) \to \Lambda^r(M)$ é definido por

$$\Delta_r := d^\dagger_{r+1}d_r + d_{r-1}d^\dagger_r . \tag{37.52}$$

Se M for orientável, compacta e sem fronteira, é evidente por (37.51) que Δ_r é um operador simétrico (formalmente autoadjunto) em relação à forma bilinear $\langle\cdot,\ \cdot\rangle^r_{\text{Hodge}}$:

$$\langle\alpha,\ \Delta_r\beta\rangle^r_{\text{Hodge}} = \langle\Delta_r\alpha,\ \beta\rangle^r_{\text{Hodge}} \tag{37.53}$$

para todas $\alpha,\ \beta \in \Lambda^r(M)$.

E. 37.7 *Exercício fácil.* Prove isso! Sugestão: use (37.51)! ✣

Além disso, (37.51) e a simetria da forma bilinear $\langle\cdot,\ \cdot\rangle^r_{\text{Hodge}}$ informam-nos também que

$$\langle\alpha,\ \Delta_r\alpha\rangle^{r-1}_{\text{Hodge}} = \langle\alpha,\ d^\dagger_{r+1}d_r\alpha\rangle^r_{\text{Hodge}} + \langle\alpha,\ d_{r-1}d^\dagger_r\alpha\rangle^{r-1}_{\text{Hodge}} \stackrel{(37.51)}{=} \langle d_r\alpha,\ d_r\alpha\ \rangle^{r+1}_{\text{Hodge}} + \langle d^\dagger_r\alpha,\ d^\dagger_r\alpha\rangle^{r-1}_{\text{Hodge}} , \tag{37.54}$$

para todo $\alpha \in \Lambda^r(M)$. Assim, no caso de g ser um tensor métrico Riemanniano, concluímos que o operador de Laplace-de Rham $\Delta_r : \Lambda^r(M) \to \Lambda^r(M)$ é um operador não-negativo[15], pois nesse caso $\langle d_r\alpha,\ d_r\alpha\rangle^{r+1}_{\text{Hodge}} \geq 0$ e $\langle d^\dagger_r\alpha,\ d^\dagger_r\alpha\rangle^{r-1}_{\text{Hodge}} \geq 0$. Outras consequências de (37.54) serão discutidas adiante.

É interessante obtermos uma fórmula mais explícita em coordenadas locais para $\Delta_0 f$, sendo $f \in C^\infty(M) \equiv \Lambda^0(M)$. Como $\Delta_0 f = d^\dagger_1 d_0 f$ (pois $d^\dagger_0 f = 0$), o resultado é

$$\Delta_0 f = -\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{|\mathbf{g}|}\, g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) . \tag{37.55}$$

Isso é uma consequência imediata do fato que $d_0 f = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$ e da relação (37.50).

O estudante deve aperceber-se do fato que (37.55) difere por um sinal da expressão correspondente para o operador de Laplace-Beltrami (no caso de conexões de Levi-Civita), expressão (36.141), página 1743. Isso se deve ao emprego de diferentes convenções de sinais nas definições do operador de Laplace-de Rham e do operador de Laplace-Beltrami, fato que provavelmente tem meramente uma origem histórica.

37.2.3.1 Definindo Gradiente, Divergente e Rotacional Via Formas Diferenciais

Uma das qualidades especiais de formas diferenciais, da derivação exterior e da coderivação, é poder, no contexto de variedades diferenciáveis gerais dotadas de um tensor métrico, definir certos operadores diferenciais familiares ao Cálculo em $\mathbb{R}^3$, como o gradiente, o divergente, o rotacional, além do operador de Laplace-de Rham, apresentado logo acima. Comentamos que uma outra via de definição de tais operadores por meio de conexões afins (exceto para o rotacional) é

[15] A positividade dos operadores de Laplace-de Rham Δ_r pode parecer estranha a quem está acostumado a ver $-\Delta$ como um operador positivo no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Essa diferença de sinais é consequência de uma diferente convenção histórica. Vide também o comentário que segue a equação (37.55), adiante.

seguida na Seção 36.2.4, página 1741. Em um certo sentido as definições daquela seção são um tanto mais gerais, pois aplicam-se também a conexões que não sejam de Levi-Civita. Conexões de qualquer tipo não desempenham nenhum papel no que segue.

• **O gradiente de um campo escalar**

Seja $f \in C^\infty(M) = \Lambda^0(M)$ um campo escalar definido em uma variedade diferenciável de dimensão m. Definimos seu gradiente em (36.130), página 1741), como sendo o campo vetorial dado por $\operatorname{grad}(f) := \boldsymbol{g}^\sharp\big(d_0 f\big)$.

As aplicações $\boldsymbol{g}^\sharp : \Lambda^1(M) \equiv \mathscr{X}^*(M) \to \mathscr{X}(M)$ e $\boldsymbol{g}_\sharp : \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}^*(M) \equiv \Lambda^1(M)$, que são inversas uma da outra, foram definidas em (36.16) e (36.19), respectivamente (vide página 1714).

• **O divergente de um campo vetorial**

Seja $v \in \mathscr{X}(M)$, um campo vetorial definido em uma variedade diferenciável de dimensão m. O divergente de v é definido por

$$\operatorname{div}(v) := (\mathcal{H}_0)^{-1}\Big(d_{m-1}\Big(\mathcal{H}_1\big(\boldsymbol{g}_\sharp(v)\big)\Big)\Big) = -d^\dagger_1\big(\boldsymbol{g}_\sharp(v)\big) \in \Lambda^0(M) \equiv C^\infty(M) . \tag{37.56}$$

• **O rotacional de um campo vetorial**

Seja $v \in \mathscr{X}(M)$, um campo vetorial definido em uma variedade diferenciável de dimensão m. O rotacional de v é definido por

$$\operatorname{rot}(v) := \mathcal{H}_2\Big(d_1\big(\boldsymbol{g}_\sharp(v)\big)\Big) \in \Lambda^{m-2}(M) . \tag{37.57}$$

Como se vê, $\operatorname{rot}(v)$ é uma $(m-2)$-forma.

• **O Laplaciano de um campo escalar**

Para $f \in C^\infty(M)$, definimos o Laplaciano de f com uso do divergente e do gradiente definidos acima:

$$\Delta f := \operatorname{div}\big(\operatorname{grad} f\big) = d^\dagger_1\big(\boldsymbol{g}_\sharp(\operatorname{grad} f)\big) = -d^\dagger_1\big(d_0 f\big) = -\big(d^\dagger_1 d_0 + d_0 d^\dagger_1 d\big)f = -\Delta_0 f .$$

Observe-se que por essa definição o sinal sai correto!

• **Verificando algumas propriedades das definições**

Vamos agora verificar se e como os operadores diferenciais definidos acima satisfazem propriedades que lhes são comummente atribuídas no Cálculo em $\mathbb{R}^3$.

Como no Cálculo em $\mathbb{R}^3$, gostaríamos de mostrar que também nesse caso geral tem-se $\operatorname{rot}\big(\operatorname{grad} f\big) = 0$. Isso de fato é assim, pois

$$\operatorname{rot}\big(\operatorname{grad} f\big) = \mathcal{H}_2\Big(d_1\big(d_0 f\big)\Big) = 0 ,$$

dado que $d_1 d_0 = 0$.

Gostaríamos de mostrar também que $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$ para $v \in \mathscr{X}(M)$. Mas $\operatorname{rot} v$ é uma $(m-2)$-forma e, por isso, a combinação $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v)$ em geral não faz sentido, pois o divergente só está definido sobre campos vetoriais. Há um caso especial, porém, no qual o cálculo pode ser feito, fornecendo o resultado desejado.

Para $m = 3$ o rotacional $\operatorname{rot} v$ é uma 1-forma e, portanto, $\boldsymbol{g}^\sharp(\operatorname{rot} v)$ é um campo vetorial, do qual podemos calcular o divergente. Assim,

$$\operatorname{div}\Big(\boldsymbol{g}^\sharp(\operatorname{rot} v)\Big) = -d^\dagger_1\big(\operatorname{rot} v\big) = ; -d^\dagger_1\Big(\mathcal{H}_2\Big(d_1\big(\boldsymbol{g}_\sharp(v)\big)\Big)\Big) = -\frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}}d^\dagger_1\Big(d^\dagger_2\Big(\big(\mathcal{H}_2\big)^{-1}\big(\boldsymbol{g}_\sharp(v)\big)\Big)\Big) = 0 ,$$

pois $d^\dagger_1 d^\dagger_2 = 0$. Acima, usamos o fato que

$$\mathcal{H}_2 \circ d_1 = \frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}}d^\dagger_2 \circ \big(\mathcal{H}_2\big)^{-1} , \tag{37.58}$$

obtido de (37.48) para $m = 3$. Verifique!

Por fim, ainda no caso $m = 3$ calculemos

$$\mathrm{rot}\Big(\boldsymbol{g}^\sharp\big(\mathrm{rot}\,(v)\big)\Big) \;=\; \mathcal{H}_2\bigg(d_1\Big(\mathcal{H}_2\Big(d_1\big(\boldsymbol{g}_\flat(v)\big)\Big)\Big)\bigg) \overset{(37.58)}{=} \frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}} d_2^\dagger\Big(d_1\big(\boldsymbol{g}_\flat(v)\big)\Big)$$

$$= \frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}}\Big(\Delta_1 - d_0 d_1^\dagger\Big)\big(\boldsymbol{g}_\flat(v)\big) \overset{(37.56)}{=} \frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}}\Big[\Delta_1\big(\boldsymbol{g}_\flat(v)\big) + d_0 \mathrm{div}\,(v)\Big] \;.$$

Dessa forma, temos finalmente

$$\boldsymbol{g}^\sharp\bigg(\mathrm{rot}\,\Big(\boldsymbol{g}^\sharp\big(\mathrm{rot}\,(v)\big)\Big)\bigg) \;=\; \frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}}\Big[\mathrm{grad}\,\big(\mathrm{div}\,(v)\big) + \boldsymbol{g}^\sharp\Big(\Delta_1\big(\boldsymbol{g}_\flat(v)\big)\Big)\Big] \;.$$

Essa expressão generaliza uma bem conhecida expressão do Cálculo em $\mathbb{R}^3$: $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times v) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\, v) - \Delta v$ (vide (4.29), página 237). Aqui devemos lembrar o fato já apontado que, na convenção adotada, o sinal de Δ_1, definido sobre 1-formas, é o oposto do que deveria ser pela convenção usual.

• Fórmulas explicitas para o Laplaciano, o gradiente, o divergente e o rotacional

Para propósitos mais práticos, é útil expressar os diversos operadores diferenciais que introduzimos acima em componentes em sistemas locais de coordenadas.

Para $f \in C^\infty(M)$, temos para o operador Laplaciano obtido acima $\Delta f = -\Delta_0 f$, onde $\Delta_0 f$ foi fornecido explicitamente em (37.55).

Para $f \in C^\infty(M)$, sabemos que

$$\mathrm{grad}\, f \;=\; \left(g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

em uma carta local de coordenadas. Essa expressão em nada difere do gradiente definido na Seção 36.2.4, página 1741 (vide (36.134)).

E. 37.8 *Exercício*. Mostre que para o divergente definido em (37.56), vale

$$\mathrm{div}\, v \;=\; \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|\mathbf{g}|}v^i\right) \;, \tag{37.59}$$

onde $v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathscr{X}(M)$ é um campo vetorial infinitamente diferenciável. Sugestão: use (37.50), página 1811. ✠

O estudante deve observar que a expressão (37.59) para o operador divergente em nada difere da expressão (36.139), página 1742, obtida no contexto de conexões de Levi-Civita.

E. 37.9 *Exercício*. Mostre que para o rotacional definido em (37.57), vale

$$\mathrm{rot}\, v \;=\; \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{(m-2)!}\,\varepsilon_{abj_1\cdots j_{m-2}}\, g^{i_1 a}g^{i_2 b}\,\frac{\partial v_{i_2}}{\partial x^{i_1}}\, dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_{m-2}} \tag{37.60}$$

$$= \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{(m-2)!}\,\varepsilon_{abj_1\cdots j_{m-2}}\, g^{i_1 a}g^{i_2 b}\,\frac{\partial\big(g_{i_2 l}\, v^l\big)}{\partial x^{i_1}}\, dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_{m-2}} \;\in\; \Lambda^{m-2}(M)\,, \tag{37.61}$$

onde $v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathscr{X}(M)$ é um campo vetorial infinitamente diferenciável.

É interessante considerarmos o caso $m = 3$. Mostre que nessa situação obtém-se de (37.61) que

$$\boldsymbol{g}^\sharp(\mathrm{rot}\, v) \;=\; \left(\sqrt{|\mathbf{g}|}\,\varepsilon_{abc}\, g^{ia}g^{jb}g^{kc}\,\frac{\partial v_k}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{37.62}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{\mathbf{g}}\,\varepsilon_{ijk}\,\frac{\partial v_k}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} \;=\; \left(\frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{\mathbf{g}}\,\varepsilon_{ijk}\,\frac{\partial\big(g_{kl}v^l\big)}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} \;. \tag{37.63}$$

Vale comentar aqui que, como $\mathrm{rot}\, v$ é, nesse caso, uma 1-forma é a expressão $\boldsymbol{g}^\sharp(\mathrm{rot}\, v)$ que verdadeiramente descreve o *campo vetorial* associado ao rotacional.

No caso $m = 2$ o rotacional $\mathrm{rot}\, v$ de um campo vetorial $v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathscr{X}(M)$ é uma 0-forma, ou seja, uma função escalar. Constate que o rotacional nesse caso é dado por

$$\mathrm{rot}\, v \;=\; \sqrt{|\mathbf{g}|}\;\varepsilon_{ab}\; g^{i_1 a}g^{i_2 b}\;\frac{\partial\big(g_{i_2 l}\, v^l\big)}{\partial x^{i_1}} \;\in\; \Lambda^0(M)\,. \tag{37.64}$$

Use (37.61). ✠

• Fórmulas explícitas no caso de variedades Riemannianas tridimensionais

É interessante para o estudante comparar a expressão (37.63) com a bem conhecida fórmula (4.17), página 235, para o rotacional no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$.

E. 37.10 *Exercício*. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão 3. Um sistema de coordenadas é dito ser ortogonal se o tensor métrico g for diagonal $g_{ii} = (h_i)^2$, para $i = 1,\ 2,\ 3$, e $g_{ij} = 0$ caso $i \neq j$. Em $\mathbb{R}^3$, por exemplo, há diversos sistemas de coordenadas que têm essa propriedade (ex: coordenadas Cartesianas, esféricas, esféricas cilíndricas, elípticas cilíndricas, parabólicas cilíndricas, cônicas, bipolares, esferoidais prolatas, esferoidais oblatas, parabólicas, toroidais, biesféricas, elipsoidais confocais, parabólicas confocais etc. Vide *e.g.*, [13] e/ou [238] para uma lista talvez mais extensa). Mostre que em tal caso tem-se para o Laplaciano de uma função $f \in C^\infty(M)$

$$\Delta f \;=\; \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)\right] \;. \tag{37.65}$$

Além disso, mostre que para o gradiente, na base não-normalizada $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\ \frac{\partial}{\partial x^2},\ \frac{\partial}{\partial x^3}\right\}$, tem-se

$$\mathrm{grad}\, f \;=\; \left(\frac{1}{(h_1)^2}\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(\frac{1}{(h_2)^2}\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{(h_3)^2}\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)\frac{\partial}{\partial x^3}\,,$$

e para o divergente de um campo vetorial $v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathscr{X}(M)$

$$\nabla\cdot v \;=\; \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\big(h_1h_2h_3v^1\big) + \frac{\partial}{\partial x^2}\big(h_1h_2h_3v^2\big) + \frac{\partial}{\partial x^3}\big(h_1h_2h_3v^3\big)\right]$$

e para o rotacional de um campo vetorial $v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathscr{X}(M)$

$$\boldsymbol{g}^\sharp(\mathrm{rot}\, v) \;=$$

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\left(\frac{\partial\big((h_3)^2v^3\big)}{\partial x^2} - \frac{\partial\big((h_2)^2v^2\big)}{\partial x^3}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial\big((h_1)^2v^1\big)}{\partial x^3} - \frac{\partial\big((h_3)^2v^3\big)}{\partial x^1}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial\big((h_2)^2v^2\big)}{\partial x^1} - \frac{\partial\big((h_1)^2v^1\big)}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^3}\right]\;.$$

Advertência. O leitor deve tomar um certo cuidado com as fórmulas acima para o gradiente, divergente e rotacional, pois os vetores de base $\frac{\partial}{\partial x^1}$, $\frac{\partial}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial}{\partial x^3}$ **não** estão normalizados. Se introduzirmos os versores (vetores normalizados a 1)

$$\mathbf{e}_1 \;:=\; \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x^1}\,, \qquad \mathbf{e}_2 \;:=\; \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x^2}\,, \qquad \mathbf{e}_3 \;:=\; \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial x^3}\,,$$

teremos, agora sim, $g(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$. O vetor $v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ se expressa nessa nova base como $v = \overline{v}^1\mathbf{e}_1 + \overline{v}^2\mathbf{e}_2 + \overline{v}^3\mathbf{e}_3$, sendo que, para cada índice a definimos $\overline{v}^a = h_a v^a$ (sem a convenção de Einstein aqui).

Para o Laplaciano a fórmula (37.65) não se altera, mas nessa nova base temos: para o gradiente, divergente e rotacional

$$\mathrm{grad}\, f \;=\; \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)\mathbf{e}_3\,, \tag{37.66}$$

$$\nabla\cdot v \;=\; \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\big(h_2h_3\overline{v}^1\big) + \frac{\partial}{\partial x^2}\big(h_1h_3\overline{v}^2\big) + \frac{\partial}{\partial x^3}\big(h_1h_2\overline{v}^3\big)\right]\,, \tag{37.67}$$

$$\boldsymbol{g}^\sharp(\mathrm{rot}\, v) \;=\; \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\left(\frac{\partial\big(h_3\overline{v}^3\big)}{\partial x^2} - \frac{\partial\big(h_2\overline{v}^2\big)}{\partial x^3}\right)h_1\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial\big(h_1\overline{v}^1\big)}{\partial x^3} - \frac{\partial\big(h_3\overline{v}^3\big)}{\partial x^1}\right)h_2\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial\big(h_2\overline{v}^2\big)}{\partial x^1} - \frac{\partial\big(h_1\overline{v}^1\big)}{\partial x^2}\right)h_3\mathbf{e}_3\right] \tag{37.68}$$

Há quem goste de expressar (37.68) como

$$g^{\sharp}(\mathrm{rot}\, v) \;=\; \frac{1}{h_1h_2h_3}\,\det\begin{pmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ h_1\overline{v}^1 & h_2\overline{v}^2 & h_3\overline{v}^3 \end{pmatrix} . \tag{37.69}$$

As expressões (37.65), (37.66), (37.67) e (37.68) são úteis quando o desejo é expressar esses operadores diferenciais de forma explícita em um sistema de coordenadas ortogonal em uma variedade tridimensional, por exemplo, em $\mathbb{R}^3$. Vide [13] e/ou [238] para diversos exemplos. ♣

• **Fórmulas explícitas no caso de variedades Riemannianas bidimensionais**

O caso de maior interesse em aplicações é aquele no qual o tensor métrico é Riemanniano e o sistema de coordenadas é ortogonal, caso em que g é diagonal: $g_{11} = (h_1)^2$, $g_{22} = (h_2)^2$ e $g_{12} = g_{21} = 0$. Nessa situação temos para o operador Laplaciano

$$\Delta f \;=\; \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial f}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)\right] . \tag{37.70}$$

Além disso, para o gradiente, na base não-normalizada $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\ \frac{\partial}{\partial x^2}\right\}$, tem-se

$$\mathrm{grad}\, f \;=\; \left(\frac{1}{(h_1)^2}\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(\frac{1}{(h_2)^2}\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} ,$$

e para o divergente de um campo vetorial $v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathscr{X}(M)$

$$\nabla\cdot v \;=\; \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\Big(h_1h_2v^1\Big) + \frac{\partial}{\partial x^2}\Big(h_1h_2v^2\Big)\right] .$$

Para o rotacional, temos segundo (37.64),

$$\mathrm{rot}\, v \;=\; \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\Big((h_2)^2v^2\Big) - \frac{\partial}{\partial x^2}\Big((h_1)^2v^1\Big)\right] .$$

E. 37.11 *Exercício*. Verifique as fórmulas acima! ♣

Se introduzirmos os versores (vetores normalizados a 1)

$$\mathbf{e}_1 \;:=\; \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x^1} , \qquad \mathbf{e}_2 \;:=\; \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x^2} ,$$

teremos $g\big(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j\big) = \delta_{ij}$. O vetor $v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ se expressa nessa nova base como $v = \overline{v}^1\mathbf{e}_1 + \overline{v}^2\mathbf{e}_2$ sendo que, para cada índice a definimos $\overline{v}^a = h_av^a$ (sem a convenção de Einstein aqui). Com isso, teremos

$$\mathrm{grad}\, f \;=\; \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)\mathbf{e}_2 , \tag{37.71}$$

$$\nabla\cdot v \;=\; \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\Big(h_2\overline{v}^1\Big) + \frac{\partial}{\partial x^2}\Big(h_1\overline{v}^2\Big)\right] , \tag{37.72}$$

$$\mathrm{rot}\, v \;=\; \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\Big(h_2\overline{v}^2\Big) - \frac{\partial}{\partial x^2}\Big(h_1\overline{v}^1\Big)\right] . \tag{37.73}$$

Novamente comentamos que (37.70), (37.71), (37.72) e (37.73) são úteis quando fórmulas explícitas desses operadores são requeridas.

37.2.4 Formas Harmônicas. O Teorema da Decomposição Hodge e o Teorema de Hodge

Vamos nesta seção tratar de temas cuja validade limita-se (até onde o conhecimento do autor lhe permite ver) a variedades *Riemannianas*. A teoria das formas harmônicas e o Teorema da Decomposição, que encontraremos adiante, foi uma das motivações originais de Hodge ao desenvolver sua teoria da dualidade de formas diferenciais.

Doravante, nesta seção, M será uma variedade Riemanniana compacta, orientável e sem fronteiras e de dimensão m.

• **Formas harmônicas**

Uma r-forma $\zeta \in \Lambda^r(M)$ é dita ser uma *forma harmônica* se satisfizer $\Delta_r\zeta = 0$. É elementar constatar que a coleção das r-formas harmônicas é um espaço vetorial (real). Esse espaço é denotado por $\mathrm{Harm}^r(M)$ sendo que, naturalmente, $\mathrm{Harm}^r(M) \subset \Lambda^r(M)$. Note-se que, por definição

$$\mathrm{Harm}^r(M) \;=\; \mathrm{Ker}\,(\Delta_r) . \tag{37.74}$$

Ao longo desta seção demonstraremos alguns fatos importantes sobre $\mathrm{Harm}^r(M)$.

A relação (37.54) e a Proposição 37.5, página 1813, permitem-nos inferir, sem necessidade de demonstração, o seguinte resultado básico:

Lema 37.2 *Seja M uma variedade Riemanniana, compacta, orientável e sem fronteiras e de dimensão m. Uma r-forma $\zeta \in \Lambda^r(M)$ é harmônica se e somente se satisfizer $d_r\zeta = 0$ e $d_r^\dagger\zeta = 0$, ou seja, se e somente se for fechada e cofechada.* □

Um corolário simples, mas fundamental para o Teorema de Decomposição de Hodge, Teorema 37.4, página 1818, é o seguinte:

Corolário 37.2 *Seja M uma variedade Riemanniana, compacta, orientável, sem fronteiras e de dimensão m. Então,*

$$\big\langle d_{r-1}\omega,\ \zeta\big\rangle^r_{\text{Hodge}} \;=\; 0 , \tag{37.75}$$

$$\big\langle d_{r+1}^\dagger\varphi,\ \zeta\big\rangle^r_{\text{Hodge}} \;=\; 0 , \tag{37.76}$$

$$\big\langle d_{r-1}\omega,\ d_{r+1}^\dagger\varphi\big\rangle^r_{\text{Hodge}} \;=\; 0 , \tag{37.77}$$

para todas $\omega \in \Lambda^{r-1}(M)$, $\varphi \in \Lambda^{r+1}(M)$ e $\zeta \in \mathrm{Harm}^r(M)$. □

Prova. A prova faz uso de (37.51) e da afirmação do Lema 37.2 de que toda forma harmônica é fechada e cofechada. Assim, $\big\langle d_{r-1}\omega,\ \zeta\big\rangle^r_{\text{Hodge}} \overset{(37.51)}{=} \big\langle \omega,\ d_r^\dagger\zeta\big\rangle^{r-1}_{\text{Hodge}} = 0$, pois $d_r^\dagger\zeta = 0$. Analogamente, $\big\langle d_{r+1}^\dagger\varphi,\ \zeta\big\rangle^r_{\text{Hodge}} \overset{(37.51)}{=} \big\langle \varphi,\ d_r\zeta\big\rangle^{r+1}_{\text{Hodge}} = 0$, pois $d_r\zeta = 0$.

Finalmente, $\big\langle d_{r-1}\omega,\ d_{r+1}^\dagger\varphi\big\rangle^r_{\text{Hodge}} \overset{(37.51)}{=} \big\langle \omega,\ d_r^\dagger d_{r+1}^\dagger\varphi\big\rangle^r_{\text{Hodge}} = 0$, simplesmente pois $d_r^\dagger d_{r+1}^\dagger = 0$. ■

• **O Teorema de Decomposição de Hodge**

Chegamos agora a um dos resultados mais importantes da corrente seção.

Teorema 37.4 (Teorema de Decomposição de Hodge) *Seja M uma variedade Riemanniana, compacta, orientável e sem fronteiras e de dimensão m. Então, $\Lambda^r(M)$ possui a seguinte decomposição ortogonal:*

$$\Lambda^r(M) \;=\; \mathrm{Im}\,\big(d_{r-1}\big) \oplus \mathrm{Im}\,\big(d_{r+1}^\dagger\big) \oplus \mathrm{Harm}^r(M) , \tag{37.78}$$

com a soma ortogonal sendo no sentido do produto escalar de Hodge $\big\langle \cdot,\ \cdot\big\rangle^r_{\text{Hodge}}$ em $\Lambda^r(M)$. □

É importante observar que o Teorema de Decomposição de Hodge, Teorema 37.4, estende parcialmente o Teorema de Decomposição de Helmholtz, Teorema 20.3, página 895, discutido na Seção 20.2, página 895. Fazemos notar que o Teorema de Decomposição de Helmholtz é válido para campos vetoriais definidos no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, que não é um espaço compacto, e possui hipóteses adicionais que automaticamente eliminam a componente harmônica.

Prova do Teorema 37.4. Primeiramente, afirmamos que $\mathrm{Im}\,(\Delta_r) \subset \big(\mathrm{Harm}^r(M)\big)^\perp$, onde o complemento ortogonal é no sentido do produto escalar de Hodge $\langle\cdot,\,\cdot\rangle^r_{\text{Hodge}}$ em $\Lambda^r(M)$. De fato, por Δ_r ser formalmente simétrico (vide (37.53)), vale

$$\langle\Delta_r\alpha,\,\zeta\rangle^r_{\text{Hodge}} \;=\; \langle\alpha,\,\Delta_r\zeta\rangle^r_{\text{Hodge}} \;=\; 0$$

para todo $\alpha \in \Lambda^r(M)$ e todo $\zeta \in \mathrm{Harm}^r(M)$. Em verdade, é possível provar que Δ_r é inversível no complemento ortogonal de seu núcleo[16], que, por definição é $\mathrm{Harm}^r(M)$ (vide (37.74)). Assim, para todo $\phi \in \big(\mathrm{Harm}^r(M)\big)^\perp$ tem-se $\phi \in \mathrm{Im}\,(\Delta_r)$. Logo, $\Lambda^r(M) = \mathrm{Im}\,(\Delta_r) \oplus \mathrm{Harm}^r(M)$, (com a soma direta ortogonal sendo no sentido do produto escalar de Hodge).

Isso provou que todo $\omega \in \Lambda^r(M)$ é da forma $\omega = \Delta_r\phi + \zeta$, para algum $\phi \in \Lambda^r(M)$ e algum $\zeta \in \mathrm{Harm}^r(M)$. Consequentemente, pela definição (37.52),

$$\phi \;=\; d^\dagger_{r+1}\big(d_r\phi\big) + d_{r-1}\big(d^\dagger_r\phi\big) + \zeta\;.$$

Isso mostrou que todo elemento de $\Lambda^r(M)$ é a soma de um elemento de $\mathrm{Im}\,\big(d_{r-1}\big)$, de um elemento de $\mathrm{Im}\,\big(d^\dagger_{r+1}\big)$ e de um elemento de $\mathrm{Harm}^r(M)$.

As relações (37.75)–(37.77) estabelecem justamente que esses três subespaços $\mathrm{Im}\,\big(d_{r-1}\big)$, $\mathrm{Im}\,\big(d^\dagger_{r+1}\big)$ e $\mathrm{Harm}^r(M)$ são Hodge-ortogonais. Isso completa a demonstração. ■

• O Teorema de Hodge

O Teorema de Decomposição de Hodge, Teorema 37.4, possui uma consequência, também estabelecida por Hodge, que contém uma importante informação sobre a relação entre os grupos de co-homologia de de Rham e o espaço das formas harmônicas. A saber, sob as devidas hipóteses, esses dois espaços vetoriais são isomorfos.

Teorema 37.5 (Teorema de Hodge) *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m, compacta, orientável e sem fronteira. Então,*

$$H^r(M) \;\simeq\; \mathrm{Harm}^r(M) \tag{37.79}$$

para todo $r \in \{0,\,\ldots,\,m\}$. □

Prova. Por definição, cada elemento de $H^r(M)$ é uma classe de equivalência da forma $[\omega] \equiv \big\{\omega + d_{r-1}\phi,\ \phi \in \Lambda^{r-1}(M)\big\} \subset \Lambda^r(M)$, onde $\omega \in \mathrm{Ker}\,(d_r)$ e $\phi \in \Lambda^{r-1}(M)$.

Pelo Teorema de Decomposição de Hodge, cada $\omega + d_{r-1}\phi \in [\omega]$ pode ser escrito na forma $\omega + d_{r-1}\phi = d_{r-1}\alpha_{\omega,\phi} + d^\dagger_{r+1}\beta_{\omega,\phi} + \gamma_{\omega,\phi}$, onde $\alpha_{\omega,\phi} \in \Lambda^{r-1}(M)$, $\beta_{\omega,\phi} \in \Lambda^{r+1}(M)$ e $\gamma_{\omega,\phi} \in \mathrm{Harm}^r(M)$. Como $d_r\omega = 0$ e $d_rd_{r-1} = 0$, segue também que para todo $\phi \in \Lambda^{r-1}(M)$,

$$0 \;=\; d_r\big(\omega + d_{r-1}\phi\big) \;=\; d_r\big(d_{r-1}\alpha_{\omega,\phi} + d^\dagger_{r+1}\beta_{\omega,\phi} + \gamma_{\omega,\phi}\big) \;=\; d_rd^\dagger_{r+1}\beta_{\omega,\phi}\;,$$

pois $d_rd_{r-1} = 0$ e pois $d_r\gamma_{\omega,\phi} = 0$, já que $\gamma_{\omega,\phi}$ é harmônica. Assim, $d_rd^\dagger_{r+1}\beta_{\omega,\phi} = 0$. Disso segue que

$$\big\langle d^\dagger_{r+1}\beta_{\omega,\phi},\ d^\dagger_{r+1}\beta_{\omega,\phi}\big\rangle^r_{\text{Hodge}} \stackrel{(37.51)}{=} \big\langle\beta_{\omega,\phi},\ d_rd^\dagger_{r+1}\beta_{\omega,\phi}\big\rangle^{r+1}_{\text{Hodge}} \;=\; 0\;,$$

o que implica $d^\dagger_{r+1}\beta_{\omega,\phi} = 0$ e, portanto, $\omega + d_{r-1}\phi = d_{r-1}\alpha_{\omega,\phi} + \gamma_{\omega,\phi}$.

[16] Por ser simétrico e positivo, Δ_r possui, pelo Teorema de Extensão de Friedrichs, ao menos uma extensão autoadjunta Δ^F_r agindo no espaço de Hilbert $\mathscr{L}^r$ construído completando-se $\Lambda^r(M)$ na norma induzida pelo produto escalar de Hodge $\langle\cdot,\,\cdot\rangle^r_{\text{Hodge}}$. Por Δ^F_r ser autoadjunto, vale $\mathscr{L}^r = \mathrm{Im}\,(\Delta^F_r) \oplus \mathrm{Ker}\,(\Delta^F_r)$. A restrição de Δ^F_r a $\mathrm{Im}\,(\Delta^F_r)$ tem inversa compacta, devido à compacidade de M. Essa inversa possui um núcleo integral (por ser compacta) e com ele é possível provar a invertibilidade de Δ_r na sua imagem em $\Lambda^r(M)$.

Vamos agora provar que $\gamma_{\omega,\phi}$ independe de ϕ e, portanto, é constante em toda a classe $[\omega]$. Tomando $\phi' \in \Lambda^{r-1}(M)$, escrevamos $\omega + d_{r-1}\phi' = d_{r-1}\alpha_{\omega,\phi'} + \gamma_{\omega,\phi'}$. Valerá

$$\big(\omega + d_{r-1}\phi\big) - \big(\omega + d_{r-1}\phi'\big) \;=\; d_{r-1}(\alpha_{\omega,\phi} - \alpha_{\omega,\phi'}) + \gamma_{\omega,\phi} - \gamma_{\omega,\phi'}\;.$$

Assim, $\gamma_{\omega,\phi} - \gamma_{\omega,\phi'} = d_{r-1}\big(\phi - \phi' - \alpha_{\omega,\phi} + \alpha_{\omega,\phi'}\big) \in \mathrm{Im}\,(d_{r-1})$. Como $\gamma_{\omega,\phi} - \gamma_{\omega,\phi'} \in \mathrm{Harm}^r(M)$, segue do Teorema da Decomposição de Hodge que $\gamma_{\omega,\phi} = \gamma_{\omega,\phi'}$. Assim, podemos ignorar a dependência em ϕ e escrever apenas $\gamma_{[\omega]}$.

Depreendemos disso que existe uma aplicação $P_r : H^r(\omega) \to \mathrm{Harm}^r(M)$ que associa $P[\omega] = \gamma_{[\omega]}$.

Afirmamos que P_r é linear. Sejam $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$. Então, $P_r\big(a_1[\omega_1]+a_2[\omega_2]\big) = P_r\big([a_1\omega_1+a_2\omega_2]\big)$, mas para $\phi \in \Lambda^{r-1}(M)$,

$$\begin{aligned}\big(a_1\omega_1 + a_2\omega_2\big) + d_{r-1}\phi \;&=\; a_1(\omega_1 + d_{r-1}\phi) + a_2(\omega_2 + d_{r-1}\phi) + (1 - a_1 - a_2)d_{r-1}\phi\\ &=\; d_{r-1}\Big(a_1\alpha_{\omega_1,\phi} + a_2\alpha_{\omega_2,\phi} + (1 - a_1 - a_2)\phi\Big) + a_1\gamma_{[\omega_1]} + a_2\gamma_{[\omega_2]}\;,\end{aligned}$$

o que mostra que

$$P_r\big(a_1[\omega_1] + a_2[\omega_2]\big) \;=\; P_r\big([a_1\omega_1 + a_2\omega_2]\big) \;=\; a_1\gamma_{[\omega_1]} + a_2\gamma_{[\omega_2]} \;=\; a_1P_r[\omega_1] + a_2P_r[\omega_2]$$

e estabelece a linearidade de P_r.

Como toda $\overline{\gamma} \in \mathrm{Harm}^r(M)$ satisfaz $d_r\overline{\gamma} = 0$, temos que $\mathrm{Harm}^r(M) \subset \mathrm{Ker}\,(d_r)$ e temos $[\overline{\gamma}] \in H^r(M)$. Evidentemente $P_r[\overline{\gamma}] = \overline{\gamma}$. Isso mostra que P_r é sobrejetora.

Afirmamos que as classes $[\omega] \in H^r(M)$ são univocamente determinadas por $P_r[\omega] = \gamma_{[\omega]}$. Suponhamos que haja $\omega,\ \omega' \in \mathrm{Ker}\,(d_r)$ tais que $P_r[\omega] = P_r[\omega'] = \gamma \in \mathrm{Harm}^r(M)$. Para $\phi,\ \phi' \in \Lambda^{r-1}(M)$, teremos $\omega + d_{r-1}\phi = d_{r-1}\alpha_{\omega,\phi} + \gamma$ e $\omega' + d_{r-1}\phi' = d_{r-1}\alpha_{\omega',\phi'} + \gamma$ Assim, $\omega - \omega' = d_{r-1}\big(\alpha_{\omega,\phi} - \alpha_{\omega',\phi'} + \phi' - \phi\big)$, o que significa que $\omega - \omega' \in \mathrm{Im}\,(d_{r-1})$ e, portanto, implica $[\omega] = [\omega']$.

Concluímos disso que $P_r : H^r(\omega) \to \mathrm{Harm}^r(M)$ é também injetora e, portanto, é bijetora, ou seja, é um isomorfismo linear entre $H^r(\omega)$ e $\mathrm{Harm}^r(M)$. ■

O Teorema de Hodge, Teorema 37.5, página 1819, tem uma consequência digna de nota: se a variedade M adicionalmente for contratível, então, segundo o Lema de Poincaré, $\mathrm{Harm}^r(M) \simeq \{0\}$, ou seja, M não possui formas harmônicas não-triviais (ou seja, não constantes).

Apêndices

37.A Os Símbolos de Levi-Civita

Muito úteis nas manipulações deste e de outros capítulos são os chamados *símbolos de Levi-Civita*, para os quais obteremos alguns resultados relevantes.

Os *símbolos de Levi-Civita* são definidos por

$$\varepsilon_{a_1\cdots a_m} \; := \; \begin{cases} 0 \, , & \text{caso ao menos dois dos índices sejam iguais,} \\ \\ \text{sinal}\big(a_1, \, \ldots, \, a_m\big) \, , & \text{de outra forma,} \end{cases} \tag{37.A.1}$$

com $a_k \in \{1, \, \ldots, \, m\}$ para todo k, onde, caso $a_1, \, \ldots, \, a_m$ sejam todos distintos, $\text{sinal}\big(a_1, \, \ldots, \, a_m\big)$ vale $+1$ caso a m-upla $\big(a_1, \, \ldots, \, a_m\big)$ possa ser levada à m-upla $\big(1, \, \ldots, \, m\big)$ por um número par de permutações e -1 caso a m-upla $\big(a_1, \, \ldots, \, a_m\big)$ possa ser levada à m-upla $\big(1, \, \ldots, \, m\big)$ por um número ímpar de permutações.

A fórmula de Leibniz (9.17), página 359, para o determinante de uma matriz $A \in \text{Mat}\,(\mathbb{C}, \; n)$, pode ser escrita em termos dos símbolos de Levi-Civita:

$$\det(A) \; = \; A_{1l_1} \cdots A_{nl_n} \varepsilon_{l_1 \cdots l_n} \, ,$$

onde também empregamos a convenção de soma de Einstein, sendo que os índices l variam no conjunto $\{1, \, \ldots, \, n\}$.

Os símbolos de Levi-Civita podem ser expressos de uma forma alternativa, a qual é muito mais útil. Seja $\Delta\big(a_1, \, \ldots, \, a_m\big)$ a matriz $m \times m$ cujo elemento ij é dado por

$$\Delta\big(a_1, \, \ldots, \, a_m\big)_{ij} \; := \; \delta^i{}_{a_j} \, , \qquad \text{ou seja,} \qquad \Delta\big(a_1, \, \ldots, \, a_m\big) \; := \; \begin{pmatrix} \delta^1{}_{a_1} & \cdots & \delta^1{}_{a_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^m{}_{a_1} & \cdots & \delta^m{}_{a_m} \end{pmatrix} .$$

Então, vale

$$\varepsilon_{a_1\cdots a_m} \; = \; \det\Big(\Delta\big(a_1, \, \ldots, \, a_m\big)\Big) \, . \tag{37.A.2}$$

Essa igualdade pode ser demonstrada constatando-se que ambos os lados são iguais quando $\big(a_1, \, \ldots, \, a_m\big) = \big(1, \, \ldots, \, m\big)$ (em cujo caso $\Delta\big(a_1, \, \ldots, \, a_m\big) = \mathbb{1}_m$), que ambos os lados anulam-se quando ao menos dois dos índices $\big(a_1, \, \ldots, \, a_m\big)$ são iguais (um determinante anula-se quando duas colunas são iguais) e que ambos os lados trocam de sinal quando dois índices são trocados (um determinante troca de sinal quando da troca de lugar de duas colunas).

Com uso de (37.A.2) podemos provar diversas relações úteis. É fácil ver, por exemplo, que para os elementos de matriz da matriz produto $\Delta\big(a_1, \, \ldots, \, a_m\big)\Delta\big(b_1, \, \ldots, \, b_m\big)$ vale

$$\Big(\Delta\big(a_1, \, \ldots, \, a_m\big)\Delta\big(b_1, \, \ldots, \, b_m\big)\Big)_{ij} \; = \; \sum_{k=1}^{m} \delta^i{}_{a_k} \delta^k{}_{b_j} \; = \; \delta^i{}_{a_{b_j}} \, .$$

Portanto,

$$\varepsilon_{a_1\cdots a_m}\varepsilon_{b_1\cdots b_m} \; = \; \det\Big(\Delta\big(a_1, \, \ldots, \, a_m\big)\Delta\big(b_1, \, \ldots, \, b_m\big)\Big) \; = \; \det \begin{pmatrix} \delta^1{}_{a_{b_1}} & \cdots & \delta^1{}_{a_{b_m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^m{}_{a_{b_1}} & \cdots & \delta^m{}_{a_{b_k}} \end{pmatrix}$$

$$= \; \det\Big(\Delta\big(a_{b_1}, \, \cdots, \, a_{b_m}\big)\Big) \; = \; \varepsilon_{a_{b_1}\cdots a_{b_m}} \, .$$

Essa relação

$$\varepsilon_{a_1\cdots a_m}\varepsilon_{b_1\cdots b_m} \; = \; \varepsilon_{a_{b_1}\cdots a_{b_m}} \tag{37.A.3}$$

tem alguma utilidade, mas talvez mais útil seja a seguinte identidade:

$$\varepsilon_{a_1\cdots a_m}\varepsilon_{b_1\cdots b_m} \; = \; \det \begin{pmatrix} \delta^{b_1}{}_{a_1} & \cdots & \delta^{b_1}{}_{a_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{b_m}{}_{a_1} & \cdots & \delta^{b_m}{}_{a_m} \end{pmatrix} . \tag{37.A.4}$$

Sua prova. novamente, pode ser obtida por constatação: ambos os lados coincidem caso $\big(a_1, \, \ldots, \, a_m\big) = \big(1, \, \ldots, \, m\big)$ ou caso $\big(b_1, \, \ldots, \, b_m\big) = \big(1, \, \ldots, \, m\big)$ e satisfazem as mesmas propriedades de antissimetria quando da permutação dos índices a_i ou dos índices b_i. Fazendo $b_1 = a_1$ temos, Suspendendo o uso da convenção de soma de Einstein,

$$\varepsilon_{a_1a_2\cdots a_m}\varepsilon_{a_1b_2\cdots b_m} \; = \; \det \begin{pmatrix} 1 & \delta^{a_1}{}_{a_2} & \cdots & \delta^{a_1}{}_{a_m} \\ \delta^{b_2}{}_{a_1} & \delta^{b_2}{}_{a_2} & \cdots & \delta^{b_2}{}_{a_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{b_m}{}_{a_1} & \delta^{b_m}{}_{a_2} & \cdots & \delta^{b_m}{}_{a_m} \end{pmatrix} . \tag{37.A.5}$$

Expandindo o determinante do lado direito na sua primeira linha, teremos

$$\varepsilon_{a_1a_2\cdots a_m}\varepsilon_{a_1b_2\cdots b_m} \; = \; A + \sum_{l=2}^{m}(-1)^{l+1}\delta^{a_1}{}_{a_l}F_l$$

onde

$$A \; = \; \det \begin{pmatrix} \delta^{b_2}{}_{a_2} & \cdots & \delta^{b_2}{}_{a_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{b_m}{}_{a_2} & \cdots & \delta^{b_m}{}_{a_m} \end{pmatrix} \qquad \text{e onde } F_l \text{ é o determinante da matriz} \qquad \begin{pmatrix} \delta^{b_2}{}_{a_1} & \delta^{b_2}{}_{a_2} & \cdots & \delta^{b_2}{}_{a_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{b_m}{}_{a_1} & \delta^{b_m}{}_{a_2} & \cdots & \delta^{b_m}{}_{a_m} \end{pmatrix}$$

com a l-ésima coluna omitida, sendo $l = 2, \, \ldots, \, m$. Note-se que A não depende dos índices a_1 e b_1 e que F_l não depende dos índices a_l e b_1. Escrevendo apenas a dependência nos índices a, temos $F_l \equiv F_l\big(a_1, \, a_2, \, \ldots, \, \widehat{a_l}, \, \ldots, \, a_m\big)$, onde o chapéu indica a omissão.

Vamos agora somar sobre o índice a_1. Temos

$$\sum_{a_1=1}^{m} \varepsilon_{a_1a_2\cdots a_m}\varepsilon_{a_1b_2\cdots b_m} \; = \; mA + \sum_{l=2}^{m}(-1)^{l+1}\sum_{a_1=1}^{m}\Big(\delta^{a_1}{}_{a_l}F_l\Big) \; = \; mA + \sum_{l=2}^{m}(-1)^{l+1}F_l\big(a_l, \, a_2, \, \ldots, \, \widehat{a_l}, \, \ldots, \, a_m\big) \, .$$

Como se vê, devido ao fator $\delta^{a_1}{}_{a_l}$ e à soma em a_1, a dependência com a_l, que fora omitida em F_l ressurge na primeira posição, o que significa dizer que a coluna omitida na matriz ressurge na primeira coluna. Recolocando essa coluna de volta à l-ésima posição, o que custa um fator $(-1)^l$ (justifique!), obtemos

$$F_l\big(a_l, \, a_2, \, \ldots, \, \widehat{a_l}, \, \ldots, \, a_m\big) \; = \; (-1)^l \det \begin{pmatrix} \delta^{b_2}{}_{a_2} & \cdots & \delta^{b_2}{}_{a_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{b_m}{}_{a_2} & \cdots & \delta^{b_m}{}_{a_m} \end{pmatrix} \; = \; (-1)^l A \, .$$

Dessa forma, temos

$$\sum_{a_1=1}^{m} \varepsilon_{a_1 a_2\cdots a_m}\varepsilon_{a_1 b_2\cdots b_m} \;=\; mA - \sum_{l=2}^{m} A \;=\; A\,, \tag{37.A.6}$$

e concluímos que

$$\sum_{a_1=1}^{m} \varepsilon_{a_1 a_2\cdots a_m}\varepsilon_{a_1 b_2\cdots b_m} \;=\; \det\begin{pmatrix} \delta^{b_2}{}_{a_2} & \cdots & \delta^{b_2}{}_{a_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{b_m}{}_{a_2} & \cdots & \delta^{b_m}{}_{a_m}\end{pmatrix} .$$

Prosseguindo indutivamente, é fácil generalizar isso e provar que

$$\sum_{a_1=1}^{m}\cdots\sum_{a_r=1}^{m} \varepsilon_{a_1\cdots a_r a_{r+1}\cdots a_m}\varepsilon_{a_1\cdots a_r b_{r+1}\cdots b_m} \;=\; r!\det\begin{pmatrix} \delta^{b_{r+1}}{}_{a_{r+1}} & \cdots & \delta^{b_{r+1}}{}_{a_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{b_m}{}_{a_{r+1}} & \cdots & \delta^{b_m}{}_{a_m}\end{pmatrix} . \tag{37.A.7}$$

E. 37.12 *Exercício*. Prove isso! Para entender a gênese do fator $r!$ observe que para $r = 2$ tem-se, pelo mesmo proceder que levou a (37.A.6),

$$\sum_{a_1=1}^{m}\sum_{a_2=1}^{m} \varepsilon_{a_1 a_2\cdots a_m}\varepsilon_{a_1 b_2\cdots b_m} \;=\; mA' - \sum_{l=2}^{m-1} A' \;=\; \big(m-(m-2)\big)A' \;=\; 2A'\,, \tag{37.A.8}$$

onde agora $A' = \det\begin{pmatrix} \delta^{b_3}{}_{a_3} & \cdots & \delta^{b_3}{}_{a_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{b_m}{}_{a_3} & \cdots & \delta^{b_m}{}_{a_m}\end{pmatrix}$. A é o determinante de uma matriz $(m-1)\times(m-1)$, enquanto que A' é o determinante de uma matriz $(m-2)\times(m-2)$. Devido a essa redução do tamanho das matrizes, em (37.A.8) a soma em l vai de $l = 2$ até $m-1$ e possui $m-2$ termos, como lá indicado. Na soma em a_3 haverá analogamente um fator 3 que se juntará ao fator 2 de acima produzindo $3!$, e assim por diante. Complete os detalhes. ✠

E. 37.13 *Exercício*. Compare a expressão (37.A.7) com as expressões (4.7), (4.8) e (4.9), página 234, obtidas para o caso $m = 3$. ✠

Usando o fato de que o determinante de uma matriz é igual ao de sua transposta, podemos substituir o determinante em (37.A.7) por $\det\begin{pmatrix} \delta^{b_{r+1}}{}_{a_{r+1}} & \cdots & \delta^{b_m}{}_{a_{r+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{b_{r+1}}{}_{a_m} & \cdots & \delta^{b_m}{}_{a_m}\end{pmatrix}$. De acordo com a definição de determinante de uma matriz, podemos assim reescrever (37.A.7) como

$$\sum_{a_1=1}^{m}\cdots\sum_{a_r=1}^{m} \varepsilon_{a_1\cdots a_r a_{r+1}\cdots a_m}\varepsilon_{a_1\cdots a_r b_{r+1}\cdots b_m} \;=\; r!\,\delta^{b_{r+1}}{}_{a_{l_1}}\cdots\delta^{b_m}{}_{a_{l_{m-r}}}\,\varepsilon_{l_1\cdots l_{m-r}}\,, \tag{37.A.9}$$

com os índices l_j variando no conjunto $\{r+1,\,\ldots,\,m\}$.

37.B Composição de Mapas de Hodge. Demonstração de (37.39)

Tomemos $\varphi = \varphi_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r} \in \Lambda^r(M)$. Pela definição (37.36), página 1809,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{m-r}\Big(\mathcal{H}_r\big(\varphi_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\big)\Big) \;&=\; \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{(m-r)!}\,\varphi_{i_1\cdots i_r}\varepsilon^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_{m-r}}\mathcal{H}_{m-r}\big(dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_{m-r}}\big)\\ &=\; \frac{|\mathbf{g}|}{(m-r)!\,r!}\,\varphi_{i_1\cdots i_r}\Big(\varepsilon^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_{m-r}}\varepsilon^{j_1\cdots j_{m-r}}{}_{k_1\cdots k_r}\Big)dx^{k_1}\wedge\cdots\wedge dx^{k_r}\,.\end{aligned}$$

Agora,

$$\varepsilon^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_{m-r}}\varepsilon^{j_1\cdots j_{m-r}}{}_{k_1\cdots k_r} \;=\; \varepsilon^{i_1\cdots i_r j_1\cdots j_{m-r}}\varepsilon_{j_1\cdots j_{m-r}k_1\cdots k_r}\,,$$

sendo que, no caso de $(i_1,\,\cdots,\,i_r,\,,j_1,\,\cdots\,j_{m-r})$ serem índices distintos vale

$$\varepsilon^{i_1\cdots i_r j_1\cdots j_{m-r}} \;=\; g^{i_1a_1}\cdots g^{i_ra_r}\,g^{j_1a_{r+1}}\cdots g^{j_{m-r}a_m}\varepsilon_{a_1\cdots a_ra_{r+1}\cdots a_m} \;=\; \text{sinal}\big(i_1,\,\cdots,\,i_r,\,j_1,\,\cdots,\,j_{m-r}\big)\mathbf{g}^{-1}$$

pois $g^{1a_1}\cdots g^{ra_r}\,g^{(r+1)a_{r+1}}\cdots g^{ma_m}\varepsilon_{a_1\cdots a_ra_{r+1}\cdots a_m}$ é o determinante da matriz g^{ab}, do tensor métrico contravariante, que vale $\mathbf{g}^{-1}$. Assim, no caso geral tem-se

$$\varepsilon^{i_1\cdots i_r j_1\cdots j_{m-r}} \;=\; \mathbf{g}^{-1}\,\varepsilon_{i_1\cdots i_r j_1\cdots j_{m-r}}\,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{m-r}\Big(\mathcal{H}_r\big(\varphi_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\big)\Big) \;&=\; \frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}}\frac{1}{(m-r)!\,r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}\varepsilon_{i_1\cdots i_rj_1\cdots j_{m-r}}\varepsilon_{j_1\cdots j_{m-r}k_1\cdots k_r}dx^{k_1}\wedge\cdots\wedge dx^{k_r}\\ &=\; \frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}}\frac{(-1)^{r(m-r)}}{(m-r)!\,r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}\varepsilon_{j_1\cdots j_{m-r}i_1\cdots i_r}\varepsilon_{j_1\cdots j_{m-r}k_1\cdots k_r}dx^{k_1}\wedge\cdots\wedge dx^{k_r}\\ &\overset{(37.A.9)}{=}\; \frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}}\frac{(-1)^{r(m-r)}}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}\det\begin{pmatrix}\delta^{i_1}{}_{k_1} & \cdots & \delta^{i_1}{}_{k_r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \delta^{i_r}{}_{k_1} & \cdots & \delta^{i_r}{}_{k_r}\end{pmatrix}dx^{k_1}\wedge\cdots\wedge dx^{k_r}\,.\end{aligned}$$

O fator $(-1)^{r(m-r)}$ que surge na segunda linha é devido à transformação de $\varepsilon_{i_1\cdots i_rj_1\cdots j_{m-r}}$ em $\varepsilon_{j_1\cdots j_{m-r}i_1\cdots i_r}$, que envolve a transposição de $m-r$ índices j sobre r índices i, ao todo $r(m-r)$ transposições, sendo que cada uma rende um fator -1.

De acordo com a definição de determinante,

$$\det\begin{pmatrix}\delta^{i_1}{}_{k_1} & \cdots & \delta^{i_1}{}_{k_r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \delta^{i_r}{}_{k_1} & \cdots & \delta^{i_r}{}_{k_r}\end{pmatrix} \;=\; \delta^{i_1}{}_{k_{l_1}}\cdots\delta^{i_r}{}_{k_{l_r}}\varepsilon_{l_1\cdots l_r}$$

com os índices l_j variando em $\{1,\,\ldots,\,r\}$. Assim,

$$\varphi_{i_1\cdots i_r}\det\begin{pmatrix}\delta^{i_1}{}_{k_1} & \cdots & \delta^{i_1}{}_{k_r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \delta^{i_r}{}_{k_1} & \cdots & \delta^{i_r}{}_{k_r}\end{pmatrix} \;=\; \varphi_{i_1\cdots i_r}\delta^{i_1}{}_{k_{l_1}}\cdots\delta^{i_r}{}_{k_{l_r}}\varepsilon_{l_1\cdots l_r} \;=\; \varphi_{k_{l_1}\cdots k_{l_r}}\varepsilon_{l_1\cdots l_r} \;=\; r!\varphi_{k_1\cdots k_r}\,,$$

devido à antissimetria das componentes de φ por permutações de índices, Assim, finalizando, concluímos que

$$\mathcal{H}_{m-r}\Big(\mathcal{H}_r\big(\varphi\big)\Big) \;=\; \mathcal{H}_{m-r}\Big(\mathcal{H}_r\big(\varphi_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\big)\Big) \;=\; \frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}}(-1)^{r(m-r)}\varphi_{k_1\cdots k_r}dx^{k_1}\wedge\cdots\wedge dx^{k_r} \;=\; \frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}}(-1)^{r(m-r)}\varphi\,,$$

para todo $\varphi \in \Lambda^r(M)$, o que estabelece que

$$\mathcal{H}_{m-r} \circ \mathcal{H}_r = \frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}} (-1)^{r(m-r)} \,\mathbf{id}_r \,.$$

Note-se que $\frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}} = +1$, caso o tensor métrico seja Riemanniano, e $\frac{|\mathbf{g}|}{\mathbf{g}} = -1$, caso seja Lorentziano.

37.C Demonstração de (37.41) e (37.42)

Sejam $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{a_1\cdots a_r} dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_r}$ e $\zeta = \frac{1}{r!}\zeta_{b_1\cdots b_r} dx^{b_1} \wedge \cdots \wedge dx^{b_r}$ elementos arbitrários de $\Lambda^r(M)$. Então, pela definição de $\mathcal{H}_r$ em (37.36), página 1809,

$$\begin{aligned} \omega \wedge_{r,\, m-r} \Big(\mathcal{H}_r(\zeta) \Big) &= \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{(m-r)!} \left(\frac{\omega_{a_1\cdots a_r}}{r!} dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_r} \right) \wedge_{r,\, m-r} \left(\frac{\zeta_{b_1\cdots b_r}}{r!} \varepsilon^{b_1\cdots b_r}{}_{j_1\cdots j_{m-r}} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{m-r}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{(r!)^2 (m-r)!} \Big(\omega_{a_1\cdots a_r} \zeta_{b_1\cdots b_r} \varepsilon^{b_1\cdots b_r}{}_{j_1\cdots j_{m-r}} \Big) dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{m-r}} \,. \end{aligned}$$

Renomeando os índices $j_1 \to a_{r+1}, \, \cdots, \, j_{m-r} \to a_m$, obtemos

$$\begin{aligned} \omega \wedge_{r,\, m-r} \Big(\mathcal{H}_r(\zeta) \Big) &= \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{(r!)^2 (m-r)!} \Big(\omega_{a_1\cdots a_r} \zeta_{b_1\cdots b_r} \varepsilon^{b_1\cdots b_r}{}_{a_{r+1}\cdots a_m} \Big) dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_m} \\ &= \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{(r!)^2 (m-r)!} \Big(\omega_{a_1\cdots a_r} \zeta^{b_1\cdots b_r} \varepsilon_{b_1\cdots b_r a_{r+1}\cdots a_m} \Big) dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_m} \,. \end{aligned}$$

Observe-se agora que $\Lambda^m(M) \ni dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_m} = \varepsilon_{a_1\cdots a_m} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$. Assim,

$$\omega \wedge_{r,\, m-r} \Big(\mathcal{H}_r(\zeta) \Big) = \frac{1}{(r!)^2 (m-r)!} \Big(\omega_{a_1\cdots a_r} \zeta^{b_1\cdots b_r} \Big) \Big(\varepsilon_{b_1\cdots b_r a_{r+1}\cdots a_m} \varepsilon_{a_1\cdots a_m} \Big) \sqrt{|\mathbf{g}|}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \,. \tag{37.C.10}$$

De acordo com (37.A.9)

$$\varepsilon_{b_1\cdots b_r a_{r+1}\cdots a_m} \varepsilon_{a_1\cdots a_m} = \varepsilon_{a_{r+1}\cdots a_m b_1\cdots b_r} \varepsilon_{a_{r+1}\cdots a_m a_1\cdots a_r} = (m-r)! \, \delta_{b_1 a_{l_1}} \cdots \delta_{b_r a_{l_r}} \, \varepsilon_{l_1\cdots l_r}$$

com os índices l variando no conjunto $\{1, \, \ldots, \, r\}$. Inserindo isso de volta a (37.C.10), obtemos

$$\omega \wedge_{r,\, m-r} \Big(\mathcal{H}_r(\zeta) \Big) = \frac{1}{(r!)^2} \Big(\omega_{a_1\cdots a_r} \zeta^{a_{l_1}\cdots a_{l_r}} \varepsilon_{l_1\cdots l_r} \Big) \sqrt{|\mathbf{g}|}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \tag{37.C.11}$$

e disso obtemos que

$$\omega \wedge_{r,\, m-r} \Big(\mathcal{H}_r(\zeta) \Big) = \frac{1}{r!} \omega_{a_1\cdots a_r} \zeta^{a_1\cdots a_r} \sqrt{|\mathbf{g}|}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \,, \tag{37.C.12}$$

pois $\zeta^{a_{l_1}\cdots a_{l_r}} \varepsilon_{l_1\cdots l_r} = r! \, \zeta^{a_1\cdots a_r}$, devido à antissimetria das componentes de ζ. Isso demonstrou (37.41).

O lado direito de (37.C.12) é invariante pela troca $\omega \leftrightarrow \zeta$, e disso obtemos que

$$\omega \wedge_{r,\, m-r} \Big(\mathcal{H}_r(\zeta) \Big) = \zeta \wedge_{r,\, m-r} \Big(\mathcal{H}_r(\omega) \Big) \,,$$

que é a relação e (37.42), como desejávamos.

37.D Demonstração de (37.50)

Vamos aqui obter a relação (37.50), da página 1811, com $\omega = \omega_i dx^i \in \Lambda^1(M)$.

$$\begin{aligned} d_1^\dagger \omega &= d_1^\dagger \left(\omega_a dx^a \right) \\ &\overset{(37.48)}{=} -\frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} \, \mathcal{H}_m \circ d_{m-1} \circ \mathcal{H}_1 \left(\omega_a dx^a \right) \\ &\overset{(37.36)}{=} -\frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|(m-1)!} \mathcal{H}_m \circ d_{m-1} \left(\sqrt{|\mathbf{g}|}\, \omega_{i_1} \varepsilon^{i_1}{}_{j_1\cdots j_{m-1}} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{m-1}} \right) \\ &= -\frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|(m-1)!} \varepsilon_{j_0 j_1\cdots j_{m-1}} \mathcal{H}_m \circ d_{m-1} \left(\sqrt{|\mathbf{g}|}\, g^{i_1 j_0} \omega_{i_1} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{m-1}} \right) \\ &= -\frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|(m-1)!} \varepsilon_{j_0 j_1\cdots j_{m-1}} \mathcal{H}_m \left[\frac{\partial}{\partial x^a} \left(\sqrt{|\mathbf{g}|}\, g^{i_1 j_0} \omega_{i_1} \right) dx^a \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{m-1}} \right] \\ &= -\frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|(m-1)!} \varepsilon_{j_0 j_1\cdots j_{m-1}} \varepsilon_{a j_1\cdots j_{m-1}} \mathcal{H}_m \left[\frac{\partial}{\partial x^a} \left(\sqrt{|\mathbf{g}|}\, g^{i_1 j_0} \omega_{i_1} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^m \right] \\ &\overset{(37.38)}{=} -\frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|(m-1)!} \Big(\varepsilon_{j_0 j_1\cdots j_{m-1}} \varepsilon_{a j_1\cdots j_{m-1}} \Big) \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{\mathbf{g}} \frac{\partial}{\partial x^a} \left(\sqrt{|\mathbf{g}|}\, g^{i_1 j_0} \omega_{i_1} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^m \\ &\overset{(37.A.7)}{=} -\frac{1}{(m-1)! \sqrt{|\mathbf{g}|}} \Big((m-1)! \delta_{a j_0} \Big) \frac{\partial}{\partial x^a} \left(\sqrt{|\mathbf{g}|}\, g^{i_1 j_0} \omega_{i_1} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{|\mathbf{g}|}\, g^{ij} \omega_i \right) \,, \end{aligned}$$

que é a expressão desejada.

Parte VIII

Séries e Transformadas de Fourier. Distribuições