Capítulo 37

Capítulo Suplementar: Rudimentos da Geometria de Curvas e Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Sumário

37.1 Curvas Regulares em $\mathbb{R}^3$ 2021
37.1.1 Torção. Fórmulas de Frenet-Serret 2025
37.1.2 Hélices Circulares e Hélices Gerais 2028
37.1.2.1 Hélices Circulares 2028
37.1.2.2 Hélices Gerais, ou Hélices de Inclinação Constante 2031
37.1.3 Curvatura e Torção em Termos de Outros Parâmetros 2032
37.1.4 Alguns Outros Exemplos 2034
37.2 Superfícies Regulares em $\mathbb{R}^3$ 2038
37.2.1 O Mapa de Gauss 2039
37.2.2 A Primeira e a Segunda Formas Fundamentais 2041
37.2.3 O Mapa de Gauss e sua Diferencial. O Operador de Forma 2044
37.2.3.1 O Operador de Forma e a Segunda Forma Fundamental 2045
37.2.3.2 As Curvaturas Principais. A Curvatura Gaussiana e a Curvatura Média 2046
37.2.4 As Equações Fundamentais da Teoria de Superfícies 2047
37.2.4.1 As Equações de Weingarten 2047
37.2.4.2 As Equações de Gauss 2050
37.2.4.3 Relações de Gauss-Peterson-Mainardi-Codazzi para Superfícies em $\mathbb{R}^3$ 2052
37.2.4.4 Isometrias. O *Theorema Egregium* de Gauss 2055
37.2.4.5 As Equações Fundamentais em Notação Tensorial. Relação com o Tensor de Curvatura 2057
37.2.5 Derivação Covariante e seu Significado em Superfícies 2060
37.2.5.1 O Transporte Paralelo ao Longo de uma Curva 2066
37.2.5.2 A Conexão em Superfícies é uma Conexão Métrica 2067
37.2.6 A Noção de Curvatura Geodésica. Geodésicas 2068
37.2.6.1 Curvas Geodésicas em Superfícies 2070
APÊNDICES 2072
37.A Demonstração das Relações (37.204) e (37.205) 2072

O CAPÍTULO suplementar que aqui se inicia tem por objetivo levantar alguns pontos da Teoria de Curvas e Superfícies que permitam embasar melhor certas noções geométricas, como a de *conexão* ("*derivação covariante*") ou como a de *curvatura*, esta tratada de forma geral na Seção 35.3, página 1918. Alguns autores denominam os temas aqui desenvolvidos *Geometria Diferencial Clássica*, para contrastá-los com os desenvolvimentos que sucederam à criação da noção abstrata de variedade diferenciável e da Geometria Riemanniana. Não se trata de um estudo exaustivo da Teoria de Curvas e Superfícies e, para tal, remetemos o leitor à grande variedade de livros-texto sobre o assunto, como [524][1], [19], [398], os excelentes [519] e [315] e, especialmente, [362]. É justamente o desejo de formular ideias de forma mais intuitiva que nos leva a tratar apenas de curvas e superfícies no espaço tridimensional. Sempre que possível, apontaremos para possíveis generalizações.

Para um texto dedicado à História da Geometria Diferencial até o início do séc. XX, recomendamos [526]. Vide também [98].

Notamos que muito do material aqui apresentado precede historicamente os desenvolvimentos dos Capítulos 34, 35 e 36, tendo sido parcialmente superado por eles. Cremos, porém, que estudantes de Geometria Diferencial devam adquirir alguma familiaridade com a Geometria de Curvas e Superfícies em $\mathbb{R}^3$, pois esse conhecimento auxilia a compreensão de temas gerais de Geometria e Topologia Diferencial e motiva seu estudo.

[1] Esse texto é também notável por suas notas históricas. Seu autor, Dirk Jan Struik (1894–2000), é o mesmo autor de [525] e de [526].

37.1 Curvas Regulares em $\mathbb{R}^3$

Começamos com o tratamento de curvas no espaço tridimensional. Algumas das ideias que seguem são ilustradas no Exemplos da Seção 37.1.4, página 2034.

No que segue, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ representam uma base ortonormal positivamente orientada de vetores em $\mathbb{R}^3$. No corrente capítulo $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ indica o produto escalar usual de dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\|\mathbf{a}\| \equiv \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$ denota a norma Euclidiana usual de vetores de $\mathbb{R}^3$.

Uma curva parametrizada infinitamente diferenciável é uma função $I \ni t \mapsto \mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$, onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ (eventualmente podemos ter $I \equiv \mathbb{R}$) e onde as funções $x_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, são contínuas e infinitamente diferenciáveis. Uma curva parametrizada infinitamente diferenciável é dita ser *regular* se $\dot{\mathbf{x}}(t) \coloneqq \dot{x}_1(t)\mathbf{e}_1 + \dot{x}_2(t)\mathbf{e}_2 + \dot{x}_3(t)\mathbf{e}_3$ não se anular no intervalo I.

No que segue, trataremos basicamente de curvas regulares. Estritamente falando, a condição de infinita diferenciabilidade pode ser enfraquecida, na maioria dos resultados e definições, considerando-se curvas três vezes continuamente diferenciáveis ou mesmo três vezes diferenciáveis por partes.

• **Reparametrizações**

Seja $I \ni t \mapsto \mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ uma curva regular, como acima. Seja $J \subset \mathbb{R}$ um outro intervalo aberto e $\theta : J \to I$ um difeomorfismo, ou seja, uma bijeção infinitamente diferenciável com inversa também infinitamente diferenciável. A curva $J \ni \tau \mapsto \mathbf{y}(\tau) = \mathbf{x}\big(\theta(\tau)\big) = x_1\big(\theta(\tau)\big)\mathbf{e}_1 + x_2\big(\theta(\tau)\big)\mathbf{e}_2 + x_3\big(\theta(\tau)\big)\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ é também uma curva regular, com

$$\dot{\mathbf{y}}(\tau) \;=\; \dot{\mathbf{x}}\big(\theta(\tau)\big)\,\theta'(\tau)\,. \tag{37.1}$$

A curva $\mathbf{y}$ é dita ser uma *reparametrização* da curva $\mathbf{x}$.

Se escrevemos $\mathbf{y}(\tau) = y_1(\tau)\mathbf{e}_1 + y_2(\tau)\mathbf{e}_2 + y_3(\tau)\mathbf{e}_3$, valerá

$$\dot{\mathbf{y}}(\tau) \;=\; \dot{y}_1(\tau)\mathbf{e}_1 + \dot{y}_2(\tau)\mathbf{e}_2 + \dot{y}_3(\tau)\mathbf{e}_3\,.$$

Por (37.1), concluímos que, para $k = 1, 2, 3$,

$$\dot{y}_k(\tau) \;=\; \dot{x}_k\big(\theta(\tau)\big)\,\theta'(\tau)\,. \tag{37.2}$$

Observe-se que ambas as curvas parametrizadas $I \ni t \mapsto \mathbf{x}(t)$ e $J \ni \tau \mapsto \mathbf{y}(\tau)$ têm a mesma imagem. Assim, com um certo abuso de linguagem, podemos dizer que ambas as curvas são a mesma curva. Essa ideia pode ser formalizada por uma relação de equivalência: dizemos que duas curvas parametrizadas regulares são equivalentes se uma for uma reparametrização da outra, no sentido expresso acima. Com isso, podemos identificar curvas regulares com suas classes de equivalência por reparametrizações.

• **Comprimento de uma curva**

Pelas hipóteses, $\frac{d\theta}{d\tau}$ não se anula no intervalo J. Se $\frac{d\theta}{d\tau} > 0$ (< 0) dizemos que a reparametrização θ preserva (reverte) a orientação da curva.

Considere-se uma curva parametrizada regular $I \ni t \mapsto \mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ como acima e seja $(a,\, b) \subset I$ um subintervalo finito de I com $a < b$. Definimos o *comprimento de arco* (ou simplesmente o *comprimento*) da curva no intervalo $(a,\, b)$ como sendo a quantidade

$$\int_a^b \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)}\;dt \;=\; \int_a^b \sqrt{\big(\dot{x}_1(t)\big)^2 + \big(\dot{x}_2(t)\big)^2 + \big(\dot{x}_3(t)\big)^2}\;dt\,.$$

Se uma reparametrização θ preserva a orientação da curva, seu comprimento é preservado por ela. De fato, com a mudança de variáveis $t \equiv \theta(\tau)$,

$$\int_{\theta^{-1}(a)}^{\theta^{-1}(b)} \sqrt{\dot{\mathbf{y}}(\tau)\cdot\dot{\mathbf{y}}(\tau)}\;d\tau \;\overset{(37.1)}{=}\; \int_{\theta^{-1}(a)}^{\theta^{-1}(b)} \sqrt{\dot{\mathbf{x}}\big(\theta(\tau)\big)\cdot\dot{\mathbf{x}}\big(\theta(\tau)\big)}\,\frac{d\theta}{d\tau}\;d\tau \;=\; \int_a^b \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)}\;dt\,,$$

provando a afirmação.

• **O comprimento como um parâmetro**

O comprimento de arco de uma curva, ou simplesmente, o comprimento de uma curva, pode ser utilizado como parâmetro para descrevê-la e isso tem diversas utilidades.

Dada uma curva parametrizada regular $I \ni t \mapsto \mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$, descrita por um parâmetro t, fixemos nela um ponto o parametrizado por um valor, digamos $t = a$, para ser a origem a partir da qual o comprimento é definido. Definamos,

$$s \equiv \theta^{-1}(t) := \int_a^t \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(u)\cdot\dot{\mathbf{x}}(u)}\, du\,, \tag{37.3}$$

sendo eventualmente $s < 0$ se $t < a$. Assim, temos a reparametrização $t = \theta(s)$ e $s = \theta^{-1}(t)$. Vale,

$$\big(\theta^{-1}\big)'(t) = \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)}\,. \tag{37.4}$$

Denotemos por $J \ni s \mapsto \mathbf{y}(s) = y_1(s)\mathbf{e}_1 + y_2(s)\mathbf{e}_2 + y_3(s)\mathbf{e}_3 := \mathbf{x}\big(\theta(s)\big) \in \mathbb{R}^3$ a mesma curva quando parametrizada por s. Como $\theta^{-1}\big(\theta(s)\big) = s$, segue pela regra da cadeia que $\big(\theta^{-1}\big)'\big(\theta(s)\big)\theta'(s) = 1$ e, portanto,

$$\theta'(s) = \frac{1}{\big(\theta^{-1}\big)'\big(\theta(s)\big)} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\mathbf{x}}\big(\theta(s)\big)\cdot\dot{\mathbf{x}}\big(\theta(s)\big)}}\,. \tag{37.5}$$

Isso, em particular, nos informa que $\theta'(s) > 0$ para todo s e, portanto, a parametrização em s preserva a orientação da curva com a parametrização original.

Temos, então[2],

$$\mathbf{y}'(s) \overset{(37.1)}{=} \theta'(s)\dot{\mathbf{x}}\big(\theta(s)\big) = \frac{1}{\sqrt{\dot{\mathbf{x}}\big(\theta(s)\big)\cdot\dot{\mathbf{x}}\big(\theta(s)\big)}}\dot{\mathbf{x}}\big(\theta(s)\big)\,, \tag{37.6}$$

o que implica

$$\mathbf{y}'(s)\cdot\mathbf{y}'(s) = 1\,. \tag{37.7}$$

Isso significa que, na parametrização s, o vetor tangente $\mathbf{y}'(s)$ é unitário. Diferenciando-se a mesma expressão com relação a s, obtemos também

$$\mathbf{y}''(s)\cdot\mathbf{y}'(s) = 0\,. \tag{37.8}$$

O significado disso, que será explorado no que segue, é que o vetor $\mathbf{y}''(s)$ é, em cada ponto da curva, normal ao vetor tangente à curva no mesmo ponto (podendo também ser o vetor nulo), sendo, portanto, um vetor do plano ortogonal à curva, definido anteriormente.

• **Os vetores tangente, normal e binormal (ou de torção)**

O vetor $\mathbf{y}'(s)$ aponta na direção tangente à curva no ponto parametrizado por s, tendo por sentido aquele em que s cresce. Dada sua relevância, emprega-se uma notação especial para mesmo:

$$\mathbf{t}(s) := \mathbf{y}'(s)\,.$$

Por (37.7), temos $\|\mathbf{t}(s)\| = 1$. Por óbvio, $\mathbf{t}(s)$ é denominado *vetor tangente normalizado* à curva no ponto $\mathbf{y}(s)$.

Caso $\mathbf{y}''(s) \neq 0$, o vetor unitário

$$\mathbf{n}(s) := \frac{\mathbf{y}''(s)}{\|\mathbf{y}''(s)\|} \tag{37.9}$$

é denominado *vetor normal principal*, ou simplesmente *vetor normal*, à curva no ponto $\mathbf{y}(s)$. Ele não está definido em pontos em que $\mathbf{y}''(s) = 0$. Essa denominação se deve à observação que, por (37.8), $\mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{t}(s) = 0$. Claro está que $\|\mathbf{n}(s)\| = 1$.

Isso tudo sugere definir-se mais um vetor:

$$\mathbf{b}(s) := \mathbf{t}(s)\times\mathbf{n}(s)\,,$$

[2]Iremos doravante denotar as derivadas em relação ao comprimento de arco s por "$'$", reservando o ponto "$\cdot$" para derivadas em relação a outros parâmetros.

denominado *vetor binormal*, ou *vetor de torção*[3]. Sua interpretação será fornecida adiante. Observe-se que $\mathbf{b}(s)$ não está definida quando $\mathbf{n}(s)$ não estiver, o que é o caso de uma linha reta.

Como $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ são normalizados e ortogonais, segue que $\|\mathbf{b}(s)\| = 1$.

Para cada ponto parametrizado por s na curva, a tripla de vetores $(\mathbf{t}(s),\ \mathbf{n}(s),\ \mathbf{t}(s))$ compõe uma base ortonormal e positivamente orientada em $\mathbb{R}^3$, denominada *tripla de Frenet*[4], ou *tríade de Frenet*[5].

• **O plano osculante**

Uma noção relevante no estudo de curvas é a do chamado *plano osculante*[6] a uma curva em um dado ponto. Para cada s, trata-se do plano que passa pelo ponto $\mathbf{y}(s)$ que é gerado pelos vetores ortogonais $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$.

O plano osculante não está definido nas situações em que $\mathbf{y}''(s)$ anula-se. Tal ocorre, por exemplo, se a curva considerada for uma linha reta, onde o plano osculante pode ser definido arbitrariamente. Essa situação, porém, é um tanto excepcional para o que segue e será tratada à parte. Exceto em tais casos patológicos, o plano osculante à curva no ponto $\mathbf{y}(s)$ é o plano

$$\big\{\mathbf{y}(s) + \alpha\mathbf{t}(s) + \beta\mathbf{n}(s),\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\big\} \subset \mathbb{R}^3\,.$$

• **O plano normal e o plano retificador**

Um pouco mais de nomenclatura. O plano normal a $\mathbf{t}(s)$ em $\mathbf{y}(s)$ é denominado *plano normal à curva* no ponto $\mathbf{y}(s)$. Trata-se do plano gerado por $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ no ponto $\mathbf{y}(s)$.

O plano gerado por $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ no ponto $\mathbf{y}(s)$ é denominado *plano retificador*, ou *plano retificante*, da curva nesse ponto.

• **Curvatura**

Chegamos agora a uma das noções centrais na Geometria de Curvas e, em verdade, de toda a Geometria Diferencial.

Seja uma curva regular $s \to \mathbf{y}(s) \in \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco s, tal como exposto acima. Sua *curvatura* no ponto $\mathbf{y}(s)$ é definida por

$$\boldsymbol{\kappa}(s) := \big\|\mathbf{y}''(s)\big\|\,. \tag{37.10}$$

No caso de uma linha reta convencionamos dizer que a curvatura é nula.

Pela definição (37.10) temos sempre $\boldsymbol{\kappa}(s) > 0$ (com a convenção que $\boldsymbol{\kappa}(s) = 0$ em linhas retas). Isso é uma característica de curvas. Em superfícies com mais dimensões a curvatura pode também assumir valores negativos.

Definimos também $R(s) = 1/\boldsymbol{\kappa}(s)$, o chamado *raio de curvatura*. É relevante considerar que, pela definição do vetor normal principal $\mathbf{n}(s)$ dada em (37.9)

$$\mathbf{n}(s) := \frac{1}{\boldsymbol{\kappa}(s)}\mathbf{y}''(s)\,. \tag{37.11}$$

Para esclarecer o significado da noção de curvatura e de raio de curvatura introduziremos abaixo a noção de círculo osculante a uma curva em um dado ponto. Para tal, é relevante introduzir três definições.

• **Curvas que se cruzam, tangenciam e osculam**

Sejam duas curvas $s_1 \mapsto \mathbf{y}_1(s_1) \in \mathbb{R}^3$ e $s_2 \mapsto \mathbf{y}_2(s_2) \in \mathbb{R}^3$, ambas parametrizadas por seus comprimentos de arco, s_1 e s_2, respectivamente.

1. Dizemos que as curvas *se cruzam* para um certo valor dos parâmetros, digamos s_1^0 e s_2^0, se $\mathbf{y}_1(s_1^0) = \mathbf{y}_2(s_2^0)$.

[3]O uso da palavra "torção" será esclarecido adiante, mas adiantamos que nada tem a ver com a noção de torção introduzida na Seção 35.2.2, página 1902, associada à conexões afins. Trata-se de uma coincidência infeliz de nomenclatura. Segundo [524], o termo originalmente empregado na Geometria de Curvas era *"flexão"*, mas foi modificado para *"torção"* por influência de L. I. Vallée, em 1825. Segundo o mesmo texto, o nome *"binormal"* foi cunhado por B. de Saint Venant (Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797–1886)) em 1845.

[4]Jean Frédéric Frenet (1816–1900).

[5]Alguns autores a denominam "triedro de Frenet", nomenclatura que não nos parece adequada.

[6]Do Latim "*osculum*": "beijo". A noção foi originalmente definida por Johann Bernoulli (1667–1748).

2. Dizemos que as curvas *se tangenciam* para um certo valor dos parâmetros, se $\mathbf{y}_1(s_1^0) = \mathbf{y}_2(s_2^0)$ e $\mathbf{y}_1'(s_1^0) = \mathbf{y}_2'(s_2^0)$ e, portanto, se possuírem no ponto de cruzamento o mesmo vetor tangente: $\mathbf{t}_1(s_1^0) = \mathbf{t}_2(s_2^0)$. Ou seja, dizemos que as curvas se tangenciam se se cruzarem com o mesmo vetor tangente[7].

3. Dizemos que as curvas *se osculam* para um certo valor dos parâmetros se $\mathbf{y}_1(s_1^0) = \mathbf{y}_2(s_2^0)$, se $\mathbf{t}_1(s_1^0) = \mathbf{t}_2(s_2^0)$ e se $\mathbf{y}_1''(s_1^0) = \mathbf{y}_2''(s_2^0)$. Ou seja, dizemos que as curvas se osculam se se tangenciarem e suas derivadas coincidirem ao menos até segunda ordem no ponto de tangência. Isso também implica que a curvatura das duas curvas é também igual no ponto de tangência e implica que ambas têm o mesmo vetor normal principal no ponto de tangência: $\mathbf{n}_1(s_1^0) = \mathbf{n}_2(s_2^0)$. A recíproca pode não ser verdadeira: duas curvas que se tangenciam podem ter o mesmo vetor normal principal no ponto de tangência mas não se oscularem, caso suas curvaturas sejam distintas nesse ponto. Vide Figura 37.1, página 2024.

Um exemplo relevante de curvas que se osculam será visto logo adiante, quando apresentarmos a noção de *círculo osculante a uma curva* em um dado ponto.

Comentários. 1º Duas curvas somente se osculam num dado ponto se possuírem o mesmo plano osculante. 2º Por vezes, a condição de duas curvas se tangenciarem em um ponto de cruzamento $\mathbf{y}_1(s_1^0) = \mathbf{y}_2(s_2^0)$ é que valha $\mathbf{t}_1(s_1^0) = \pm\mathbf{t}_2(s_2^0)$. Analogamente, a condição de duas curvas se oscularem em um ponto de tangência é $\mathbf{y}_1''(s_1^0) = \pm\mathbf{y}_2''(s_2^0)$. Com essas definições, a condição de tangência ou a de osculação não dependem das particulares orientações das curvas. ♣

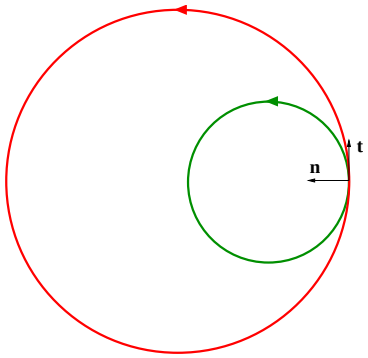

Figura 37.1: Dois círculos orientados que se tangenciam, mas **não** se osculam. No ponto de tangência, ambos têm o mesmo vetor tangente (o vetor $\mathbf{t}$ indicado) e o mesmo vetor normal principal (o vetor $\mathbf{n}$ indicado), mas têm curvaturas diferentes, por terem raios diferentes.

• **O círculo osculante a uma curva e a noção de curvatura**

Seja uma curva regular $s \to \mathbf{y}(s) \in \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco s, tal como exposto acima.

Para esclarecermos o significado da noção de curvatura e por que essa palavra é associada e essa quantidade, considere-se, para um s fixo, o círculo localizado no plano osculante, de raio $R(s)$ e centrado no ponto $\mathbf{y}(s) + R(s)\mathbf{n}(s)$. Esse círculo é dado em termos do seu parâmetro de comprimento ℓ por

$$\mathbf{z}(\ell) \;:=\; \Big(\mathbf{y}(s) + R(s)\mathbf{n}(s)\Big) + R(s)\left[-\cos\left(\frac{\ell}{R(s)}\right)\mathbf{n}(s) + \operatorname{sen}\left(\frac{\ell}{R(s)}\right)\mathbf{t}(s)\right] , \tag{37.12}$$

com ℓ variando no intervalo $\big[0,\, 2\pi R(s)\big)$. Claro está que o círculo passa pelo ponto $\mathbf{y}(s)$ da curva em $\ell = 0$: $\mathbf{z}(0) = \mathbf{y}(s)$. Por (37.12), seu vetor tangente nesse mesmo ponto $\ell = 0$ é

$$\mathbf{z}'(0) \;=\; \mathbf{t}(s) .$$

[7] Recordar que ambos os vetores tangentes são normalizados a 1.

Por fim, também por (37.12), temos

$$\mathbf{z}''(0) \;=\; \frac{1}{R(s)}\mathbf{n}(s) \;=\; \boldsymbol{\kappa}(s)\mathbf{n}(s) \overset{(37.11)}{=} \mathbf{y}''(s) \qquad \therefore \qquad \big\|\mathbf{z}''(0)\big\| \;=\; \boldsymbol{\kappa}(s) .$$

Vemos assim que a curvatura do círculo em $\ell = 0$ (em verdade, em qualquer valor de ℓ) é também $\boldsymbol{\kappa}(s)$.

Resumindo, o círculo $\mathbf{z}(\ell)$ em questão passa em $\ell = 0$ pelo ponto $\mathbf{y}(s)$, possui o mesmo vetor tangente que a curva $\mathbf{y}$ nesse ponto e possui também a mesma derivada segunda, o que também implica que o círculo e a curva possuem a mesma curvatura nesse ponto comum. Esse círculo é denominado *círculo osculante* à curva no ponto $\mathbf{y}(s)$.

O raio desse círculo osculante é $R(s) = 1/\boldsymbol{\kappa}(s)$ e isso nos permite entender por que essa grandeza é associada à curvatura da curva no ponto em questão. Quanto menor o valor de $R(s)$ mais "encurvada" a curva é no ponto $\mathbf{y}(s)$ e vice-versa.

37.1.1 Torção. Fórmulas de Frenet-Serret

• **Torção de uma curva**

Por definição, tem-se $\mathbf{t}(s) = \mathbf{y}'(s)$ e $\mathbf{n}(s) = \boldsymbol{\kappa}(s)^{-1}\mathbf{y}''(s)$. Logo,

$$\mathbf{t}'(s) \;=\; \boldsymbol{\kappa}(s)\mathbf{n}(s) . \tag{37.13}$$

Vimos também que

$$\mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{t}(s) \;=\; 0 , \tag{37.14}$$

$$\mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{n}(s) \;=\; 0 . \tag{37.15}$$

De (37.14), obtém-se, diferenciando ambos os lados,

$$0 \;=\; \mathbf{b}'(s)\cdot\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{t}'(s) \overset{(37.13)}{=} \mathbf{b}'(s)\cdot\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)\cdot\big(\boldsymbol{\kappa}(s)\mathbf{n}(s)\big) \overset{(37.15)}{=} \mathbf{b}'(s)\cdot\mathbf{t}(s) .$$

Assim, $\mathbf{b}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{t}(s)$. Por outro lado, temos também $1 = \mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{b}(s)$ e diferenciando ambos os lados, concluímos que $\mathbf{b}'(s)\cdot\mathbf{b}(s) = 0$, o que significa que $\mathbf{b}'(s)$ é também ortogonal a $\mathbf{b}(s)$. Dessa forma, concluímos que $\mathbf{b}'(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ devem ser proporcionais. A *torção* $\boldsymbol{\tau}(s)$ da curva considerada é definida como a constante de proporcionalidade entre esses dois vetores:

$$\mathbf{b}'(s) \;=\; -\boldsymbol{\tau}(s)\mathbf{n}(s) . \tag{37.16}$$

O sinal "−"é convencional. O significado da torção será apreciado adiante.

Observemos, por ora, que pelas convenções aqui adotadas temos sempre $\boldsymbol{\kappa} \geq 0$, mas $\boldsymbol{\tau}$ pode exibir qualquer sinal. Em mais dimensões a curvatura pode assumir valores negativos.

• **As Fórmulas de Frenet-Serret**

As relações (37.13) e (37.16) podem ser complementadas por uma expressão para a derivada $\mathbf{n}'(s)$. Como vale a normalização $\mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{n}(s) = 1$, vale $\mathbf{n}'(s)\cdot\mathbf{n}(s) = 0$. Conclui-se disso que $\mathbf{n}'(s)$ encontra-se no subespaço gerado por $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$:

$$\mathbf{n}'(s) \;=\; \alpha_1\mathbf{t}(s) + \alpha_2\mathbf{b}(s) .$$

Determinemos essas constantes. Como $\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{n}(s) = 0$, segue que $\mathbf{t}'(s)\cdot\mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{n}'(s) = 0$ e, assim,

$$\alpha_1 \;=\; \mathbf{n}'(s)\cdot\mathbf{t}(s) \;=\; -\mathbf{t}'(s)\cdot\mathbf{n}(s) \overset{(37.13)}{=} -\boldsymbol{\kappa}(s)\mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{n}(s) \;=\; -\boldsymbol{\kappa}(s) .$$

Analogamente, como $\mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{b}(s) = 0$, segue que $\mathbf{n}'(s)\cdot\mathbf{b}(s) + \mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{b}'(s) = 0$ e, assim,

$$\alpha_2 \;=\; \mathbf{n}'(s)\cdot\mathbf{b}(s) \;=\; -\mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{b}'(s) \overset{(37.13)}{=} \boldsymbol{\tau}(s)\mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{n}(s) \;=\; \boldsymbol{\tau}(s) .$$

Dessa forma, temos

$$\mathbf{n}'(s) \;=\; -\boldsymbol{\kappa}(s)\mathbf{t}(s) + \boldsymbol{\tau}(s)\mathbf{b}(s) . \tag{37.17}$$

Reunindo as equações (37.13), (37.16) e (37.17), obtemos o seguinte sistema fechado de equações diferenciais lineares de primeira ordem e homogêneos para a tríade $\big(\mathbf{t}(s),\ \mathbf{n}(s),\ \mathbf{b}(s)\big)$:

$$\mathbf{t}'(s) \;=\; \boldsymbol{\kappa}(s)\mathbf{n}(s)\;, \tag{37.18}$$

$$\mathbf{n}'(s) \;=\; -\boldsymbol{\kappa}(s)\mathbf{t}(s)+\boldsymbol{\tau}(s)\mathbf{b}(s)\;, \tag{37.19}$$

$$\mathbf{b}'(s) \;=\; -\boldsymbol{\tau}(s)\mathbf{n}(s)\;. \tag{37.20}$$

Esse sistema é conhecido como *fórmulas de Frenet*[8]*-Serret*[9]. Duas das três fórmulas foram obtidas por Frenet em 1847 e as três foram obtidas independentemente por Serret em 1851[10]. Esse sistema expressa a evolução com s da tripla $\big(\mathbf{t}(s),\ \mathbf{n}(s),\ \mathbf{b}(s)\big)$ e tem um papel fundamental no estudo de curvas em $\mathbb{R}^3$.

Comentário. As funções $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ podem ser até mesmo descontínuas em certos pontos! Uma tal situação é apresentada no Exemplo 37.2, página 2035. As equações (37.18)-(37.20) fazem sentido, fora de tais pontos. Neles $\boldsymbol{\kappa}$ anula-se. ♣

Comentário. Há um comentário relevante a se fazer sobre as fórmulas de Frenet-Serret e suas soluções. Como, por definição, $\mathbf{b}(s):=\mathbf{t}(s)\times\mathbf{n}(s)$ (e vale também $\mathbf{n}(s)=\mathbf{b}(s)\times\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{t}(s)=\mathbf{n}(s)\times\mathbf{b}(s)$), as três equações (37.18)-(37.20) aparentemente não são independentes. Sucede, porém, que quaisquer soluções de (37.18)-(37.20) satisfazem essas relações se as mesmas forem impostas como condições iniciais e, portanto, não é necessário impô-las separadamente, apenas para, digamos, $s=0$. De fato, para as soluções de (37.18)-(37.20) tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big(\mathbf{b}(s)-\mathbf{t}(s)\times\mathbf{n}(s)\Big) &= \frac{d}{ds}\mathbf{b}(s)-\Big(\frac{d}{ds}\mathbf{t}(s)\Big)\times\mathbf{n}(s)-\mathbf{t}(s)\times\Big(\frac{d}{ds}\mathbf{n}(s)\Big)\\ &\overset{(37.18)-(37.20)}{=} -\boldsymbol{\tau}(s)\mathbf{n}(s)-\Big(\boldsymbol{\kappa}(s)\mathbf{n}(s)\Big)\times\mathbf{n}(s)-\mathbf{t}(s)\times\Big(-\boldsymbol{\kappa}(s)\mathbf{t}(s)+\boldsymbol{\tau}(s)\mathbf{b}(s)\Big)\\ &= 0\;,\end{aligned}$$

como trivialmente se constata. De forma análoga, vemos que $\mathbf{n}(s)-\mathbf{b}(s)\times\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{t}(s)-\mathbf{n}(s)\times\mathbf{b}(s)$ são constantes. Além disso,

$$\frac{d}{ds}\Big(\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{t}(s)\Big) \;=\; 2\mathbf{t}(s)\cdot\Big(\frac{d}{ds}\mathbf{t}(s)\Big) \overset{(37.18)}{=} \mathbf{t}(s)\cdot\big(\boldsymbol{\kappa}(s)\mathbf{n}(s)\big) \;=\; 0$$

pois, como vimos antes, $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ são ortogonais, caso isso seja imposto como condição inicial. Assim, $\|\mathbf{t}(s)\|$ é constante e, analogamente, $\big\|\mathbf{n}(s)\big\|$ e $\big\|\mathbf{b}(s)\big\|$ também o são, podendo ser normalizados a 1. Todos esses fatos serão iluminados quando comentarmos, logo adiante, sobre o caráter ortogonal da evolução das soluções com s. ♣

• A solução geral das equações de Frenet-Serret

O sistema (37.18)-(37.20) pode ser escrito em forma matricial. Para tal, definimos $\mathbf{T}(s)$ como sendo a matriz real 3×3 cujas colunas sejam os vetores $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$:

$$\mathbf{T}(s) \;:=\; \begin{pmatrix}\mathbf{t}_1(s) & \mathbf{n}_1(s) & \mathbf{b}_1(s)\\ \mathbf{t}_2(s) & \mathbf{n}_2(s) & \mathbf{b}_2(s)\\ \mathbf{t}_3(s) & \mathbf{n}_3(s) & \mathbf{b}_3(s)\end{pmatrix}.$$

É fácil verificar (faça-o!) que as equações (37.18)-(37.20) podem ser escritas como

$$\mathbf{T}'(s) \;=\; \mathbf{T}(s)\mathbf{K}(s)\;,\qquad \text{com}\qquad \mathbf{K}(s) \;:=\; \begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{\kappa}(s) & 0\\ \boldsymbol{\kappa}(s) & 0 & -\boldsymbol{\tau}(s)\\ 0 & \boldsymbol{\tau}(s) & 0\end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{Mat}\,(\mathbb{R},\,3)\;. \tag{37.21}$$

É relevante observar que $\mathbf{K}(s)$ é uma matriz antissimétrica. A solução da equação $\mathbf{T}'(s)=\mathbf{T}(s)\mathbf{K}(s)$ pode ser obtida com uso da série de Dyson (vide Seção 14.2.2, página 748). Seja $J(s)$ a série de Dyson das matrizes transpostas $\mathbf{K}(s)^T$:

$$J(s) \;:=\; \mathbb{1}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^s\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{n-1}}\mathbf{K}(s_1)^T\mathbf{K}(s_2)^T\cdots\mathbf{K}(s_n)^T\,ds_n ds_{n-1}\cdots ds_1\;.$$

Sabemos que $\frac{d}{ds}J(s)=\mathbf{K}(s)^TJ(s)$. Logo, $\frac{d}{ds}J(s)^T=J(s)^T\mathbf{K}(s)$. Assim, vemos que, se tomarmos $\mathbf{T}(s)=\mathbf{T}(0)J(s)^T$ teremos $\frac{d}{ds}\mathbf{T}(s)=\mathbf{T}(0)J(s)^T\mathbf{K}(s)=\mathbf{T}(s)\mathbf{K}(s)$, mostrando que a equação diferencial é satisfeita, assim como a condição

[8] Jean Frédéric Frenet (1816–1900).
[9] Joseph Alfred Serret (1819–1885).
[10] Referências e mais comentários históricos podem ser encontrados em [524].

inicial em $s=0$. Para $J(s)^T$ temos

$$J(s)^T \;:=\; \mathbb{1}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^s\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{n-1}}\mathbf{K}(s_n)\mathbf{K}(s_{n-1})\cdots\mathbf{K}(s_1)\,ds_n ds_{n-1}\cdots ds_1\;. \tag{37.22}$$

Observe-se a reversão da ordem do produto de matrizes nos integrandos, devido à transposição matricial.

A expressão assim obtida para a solução geral das equações de Frenet-Serret

$$\mathbf{T}(s) \;=\; \mathbf{T}(0)J(s)^T\;, \tag{37.23}$$

com $J(s)^T$ dado em (37.22), no entanto, não é muito iluminante, exceto por dois aspectos:

1º Por $\mathbf{K}$ ser antissimétrica, segue que $J(s)^T$ é uma matriz ortogonal de determinante 1. De fato, como $\frac{d}{ds}J(s)=\mathbf{K}(s)^TJ(s)$ e $\frac{d}{ds}J(s)^T=J(s)^T\mathbf{K}(s)$, segue que $\frac{d}{ds}\big(J(s)^TJ(s)\big)=J(s)^T\mathbf{K}(s)J(s)+J(s)^T\mathbf{K}(s)^TJ(s)=0$, pois $\mathbf{K}(s)^T=-\mathbf{K}(s)$. Isso estabeleceu que $J(s)^TJ(s)$ é constante. Por (37.22) $J(0)^T=\mathbb{1}$ e, portanto, $J(0)=\mathbb{1}$, o que implica $J(s)^TJ(s)=\mathbb{1}$ para todo s. Assim, $\det(J(s))=\pm1$ para todo s. Como $\det\big(J(0)\big)=\det(\mathbb{1})=+1$, segue por continuidade que $\det(J(s))=+1$ para todo s. Logo, $J(s)^T\in\mathrm{SO}(3)$, o grupo de rotações em três dimensões, tratado em detalhe na Seção 21.3.2, página 1157.

2º No caso de $\mathbf{K}$ ser constante podemos encontrar fórmulas explícitas para a solução (37.23) das equações de Frenet-Serret e para a curva $\mathbf{y}(s)$, o que faremos na Seção 37.1.2.1, página 2028. Isso se deve ao fato que, para $\mathbf{K}$ constante, (37.22) reduz-se a $J(s)^T=\exp\big(s\mathbf{K}\big)$, como é bem sabido (vide Seção 14.2.2, página 748).

Decorre da observação que $J(s)^T\in\mathrm{SO}(3)$ que a tríade de vetores $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ evolui em s por rotações ortogonais simultâneas em s, as mesmas para cada um desses vetores.

• O Teorema Fundamental de Curvas Espaciais

Sejam as funções $\boldsymbol{\kappa}(s)$ e $\boldsymbol{\tau}(s)$ dadas e contínuas. O sistema de equações de Frenet-Serret (37.18)-(37.20) é um sistema de equações lineares e homogêneas de primeira ordem com coeficientes contínuos. O Teorema de Picard-Lindelöf, Teorema 12.2, página 716 (ou, com mais generalidade, o Teorema 26.4, página 1500), garante a existência e unicidade de soluções do problema de valor inicial envolvendo as equações Frenet-Serret (37.18)-(37.20) para condições iniciais que envolvam valores da tríade de Frenet, digamos, em $s=0$: $\big(\mathbf{t}(0),\ \mathbf{n}(0),\ \mathbf{b}(0)\big)$. As soluções são aquelas expressas acima em (37.22)-(37.23).

O vetor $\mathbf{t}(s)$ corresponde à primeira coluna da matriz $\mathbf{T}(s)$. Portanto, segundo (37.23), $\mathbf{t}(s)$ é obtido multiplicando-se a matriz de condições iniciais $\mathbf{T}(0)$ à primeira coluna da matriz $J(s)^T$, dada em (37.22). Isso será exemplificado em nosso tratamento de hélices na Seção 37.1.2, página 2028. Para a curva $\mathbf{y}(s)$ podemos usar a relação $\mathbf{y}(s)=\mathbf{y}(0)+\int_0^s\mathbf{t}(s')ds'$ e vemos que também $\mathbf{y}(s)$ é univocamente determinada pelas condições iniciais $\big(\mathbf{t}(0),\ \mathbf{n}(0),\ \mathbf{b}(0)\big)$ e $\mathbf{y}(0)$[11].

Concluímos que, fixadas essas condições iniciais, toda curva regular é determinada univocamente por sua curvatura $\boldsymbol{\kappa}(s)$ e por sua torção $\boldsymbol{\tau}(s)$, supostas contínuas. Esse resultado é referido na literatura como *Teorema Fundamental de Curvas Espaciais*.

Exemplos de como proceder para obter a tríade de Frenet $\big(\mathbf{t}(s),\ \mathbf{n}(s),\ \mathbf{b}(s)\big)$ e a curva $\mathbf{y}(s)$ de forma explícita serão apresentados na Seção 37.1.2, página 2028.

• O vetor de Darboux

O *vetor de Darboux*[12] é definido por

$$\boldsymbol{\Omega}_D(s) \;:=\; \boldsymbol{\tau}(s)\mathbf{t}(s)+\boldsymbol{\kappa}(s)\mathbf{b}(s)\;. \tag{37.24}$$

Claramente trata-se de um vetor localizado no plano retificador da curva em cada ponto. Sua utilidade reside no seguinte: com ele as equações de Frenet-Serret, equações (37.18)–(37.20), página 2026, podem ser escritas da seguinte

[11] Recordemos que há apenas três condições iniciais independentes, pois, como comentamos, deve-se impor, por exemplo, $\mathbf{b}(0)=\mathbf{t}(0)\times\mathbf{n}(0)$.
[12] Jean-Gaston Darboux (1842–1917).

forma elegante:

$$\mathbf{t}'(s) \;=\; \mathbf{\Omega}_D(s)\times\mathbf{t}(s)\;, \tag{37.25}$$

$$\mathbf{n}'(s) \;=\; \mathbf{\Omega}_D(s)\times\mathbf{n}(s)\;, \tag{37.26}$$

$$\mathbf{b}'(s) \;=\; \mathbf{\Omega}_D(s)\times\mathbf{b}(s)\;. \tag{37.27}$$

Deixamos ao diligente leitor a tarefa simples de verificar isso. As equações (37.25)–(37.27) são por vezes denominadas *equações de Darboux*, mas seu conteúdo, por assim dizer, é idêntico ao das equações (37.18)–(37.20). Sua relevância é interpretativa: das relações (37.25)–(37.27) vemos que o vetor de Darboux $\mathbf{\Omega}_D(s)$ representa um vetor de rotação angular intrínseca instantâneo em torno do qual os vetores da tríade de Frenet $\big(\mathbf{t}(s),\ \mathbf{n}(s),\ \mathbf{b}(s)\big)$ giram instantaneamente. Isso é também visível na expressão (37.30), página 2028, para o vetor de rotação unitário $\vec{\eta}$ do caso de curvas com curvatura e torção constantes (hélices circulares).

Com isso em mente, vemos de (37.24) que a curvatura $\boldsymbol{\kappa}(s)$ "mede" a rotação instantânea do par de vetores $\big(\mathbf{t}(s),\ \mathbf{n}(s)\big)$ em torno do eixo $\mathbf{b}(s)$, preservando o plano de osculação, mas encurvando a curva. Analogamente, a torção $\boldsymbol{\tau}(s)$ "mede" a rotação instantânea do par de vetores $\big(\mathbf{n}(s),\ \mathbf{b}(s)\big)$ em torno do eixo $\mathbf{t}(s)$, preservando o plano normal, mas alterando o plano retificante e o plano osculante, fazendo a curva deixar de ser plana, caso o fosse. Esses comentários vão ao encontro do que foi dito anteriormente a respeito da interpretação da curvatura $\boldsymbol{\kappa}(s)$ e da torção $\boldsymbol{\tau}(s)$ de uma curva.

37.1.2 Hélices Circulares e Hélices Gerais

Ilustraremos nesta seção o método de solução desenvolvido nas relações (37.22) e(37.23), tratando de uma classe específica de curvas espaciais: as hélices. Começamos com o caso mais simples das hélices circulares na Seção 37.1.2.1. Na Seção 37.1.2.2, página 2031, apresentamos a noção geral de hélice e sua solução.

37.1.2.1 Hélices Circulares

O significado da torção manifesta-se melhor em um caso particular de interesse por si só: o caso de curvas com curvatura e torção constantes, que podem ser explicitadas resolvendo-se as equações de Frenet-Serret, o que faremos adiante. Nessa situação de curvatura e torção, a versão matricial (37.21) das equações de Frenet-Serret fica

$$\mathbf{T}'(s) \;=\; \mathbf{T}(s)\mathbf{K}\,, \qquad \text{com} \qquad \mathbf{K} \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\kappa} & 0 \\ \boldsymbol{\kappa} & 0 & -\boldsymbol{\tau} \\ 0 & \boldsymbol{\tau} & 0 \end{pmatrix}, \tag{37.28}$$

uma matriz constante. A solução desse sistema é

$$\mathbf{T}(s) \;=\; \mathbf{T}(0)\exp\big(s\mathbf{K}\big)\;. \tag{37.29}$$

Como $\mathbf{K}$ é uma matriz real antissimétrica, a aplicação $\mathbb{R}\ni s\mapsto \exp\big(s\mathbf{K}\big)$, acima, é um subgrupo uniparamétrico do grupo SO(3), grupo este tratado em detalhe na Seção 21.3.2, página 1157. Para elaborarmos mais a respeito, escrevamos

$$\mathbf{K} \;=\; \boldsymbol{\tau}J_1 + \boldsymbol{\kappa}J_3 \;=\; \vartheta\vec{\eta}\cdot\vec{J}\,,$$

onde J_1 e J_3 são duas das matrizes antissimétricas introduzidas em (21.101) e (21.103), página 1160, e são geradores do grupo SO(3), e onde

$$\vartheta \;:=\; \sqrt{\boldsymbol{\kappa}^2+\boldsymbol{\tau}^2} \qquad \text{e} \qquad \vec{\eta} \;\equiv\; \big(\eta_1,\,\eta_2,\,\eta_3\big) \;=\; \frac{1}{\vartheta}\big(\boldsymbol{\tau},\,0,\,\boldsymbol{\kappa}\big)\;. \tag{37.30}$$

É claro que $\big\|\vec{\eta}\big\| = 1$. Assim, segundo a interpretação que apresentamos na Seção 21.3.2, página 1157,

$$\exp\big(s\mathbf{K}\big) \;=\; \exp\Big(\vartheta s\vec{\eta}\cdot\vec{J}\Big) \;\equiv\; R\big(\vartheta s,\,\vec{\eta}\big)$$

representa uma rotação de um ângulo ϑs em torno do eixo definido por $\vec{\eta}$.

Vamos nos concentrar na primeira coluna da solução (37.29), que nos fornece $\mathbf{t}(s)$. Fazendo uso da expressão matricial explícita (21.113), página 1162, temos que a primeira coluna da matriz $\mathbf{T}(0)\exp\big(s\mathbf{K}\big) = \mathbf{T}(0)R\big(\vartheta s,\,\vec{\eta}\big)$ é

$$\mathbf{t}(s) \;\equiv\; \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1(s) \\ \mathbf{t}_2(s) \\ \mathbf{t}_3(s) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1(0)\Big(\big(1-\cos(\vartheta s)\big)\eta_1^2+\cos(\vartheta s)\Big) + \mathbf{n}_1(0)\,\mathrm{sen}(\vartheta s)\eta_3 + \mathbf{b}_1(0)\big(1-\cos(\vartheta s)\big)\eta_1\eta_3 \\ \mathbf{t}_2(0)\Big(\big(1-\cos(\vartheta s)\big)\eta_1^2+\cos(\vartheta s)\Big) + \mathbf{n}_2(0)\,\mathrm{sen}(\vartheta s)\eta_3 + \mathbf{b}_2(0)\big(1-\cos(\vartheta s)\big)\eta_1\eta_3 \\ \mathbf{t}_3(0)\Big(\big(1-\cos(\vartheta s)\big)\eta_1^2+\cos(\vartheta s)\Big) + \mathbf{n}_3(0)\,\mathrm{sen}(\vartheta s)\eta_3 + \mathbf{b}_3(0)\big(1-\cos(\vartheta s)\big)\eta_1\eta_3 \end{pmatrix}. \tag{37.31}$$

Acima, já usamos o fato que $\eta_2 = 0$ em (37.30). Assim, usando as expressões para as demais componentes de $\vec{\eta}$ em (37.30) ($\eta_1 = \boldsymbol{\tau}/\vartheta$ e $\eta_3 = \boldsymbol{\kappa}/\vartheta$), obtemos facilmente de (37.31) a expressão

$$\mathbf{t}(s) \;=\; \Big[\frac{\boldsymbol{\tau}^2}{\vartheta^2}\mathbf{t}(0) + \frac{\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}}{\vartheta^2}\mathbf{b}(0)\Big] + \Big[\frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{\vartheta^2}\mathbf{t}(0) - \frac{\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}}{\vartheta^2}\mathbf{b}(0)\Big]\cos(\vartheta s) + \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\vartheta}\mathbf{n}(0)\,\mathrm{sen}(\vartheta s)\;. \tag{37.32}$$

Acima, usamos também o fato que $\vartheta^2 - \boldsymbol{\tau}^2 = \boldsymbol{\kappa}^2$. Adiante, precisaremos também determinar o vetor normal principal $\mathbf{n}(s)$. Por (37.18), página 2026, ele é dado por $\mathbf{n}(s) = \boldsymbol{\kappa}^{-1}\mathbf{t}'(s)$ e com (37.32) obtemos

$$\mathbf{n}(s) \;=\; -\Big[\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\vartheta}\mathbf{t}(0) - \frac{\boldsymbol{\tau}}{\vartheta}\mathbf{b}(0)\Big]\,\mathrm{sen}(\vartheta s) + \mathbf{n}(0)\cos(\vartheta s)\;. \tag{37.33}$$

Podemos usar a expressão (37.32) para identificar a curva $\mathbf{y}(s)$ com curvatura e torção constantes. Sabemos que $\mathbf{t}(s) \coloneqq \mathbf{y}'(s)$ e, portanto, $\mathbf{y}(s) = \mathbf{y}(0) + \int_0^s \mathbf{t}(s')ds'$. Daí, calculando essa integral, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(s) \;&=\; \Big(\mathbf{y}(0) + \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\vartheta^2}\mathbf{n}(0)\Big) + \Big[\frac{\boldsymbol{\tau}^2}{\vartheta^2}\mathbf{t}(0) + \frac{\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}}{\vartheta^2}\mathbf{b}(0)\Big]\,s \\ &\quad + \Big(\frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{\vartheta^3}\mathbf{t}(0) - \frac{\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}}{\vartheta^3}\mathbf{b}(0)\Big)\,\mathrm{sen}(\vartheta s) - \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\vartheta^2}\mathbf{n}(0)\cos(\vartheta s)\;.\end{aligned} \tag{37.34}$$

Verifique! A relação (37.34) expressa, portanto, a forma geral de uma curva com curvatura e torção constantes. No que segue, interpretaremos a forma dessa curva e veremos tratar-se de uma *hélice circular*.

A expressão (37.34) tem dois tipos de termos: um linear em s, no sentido do vetor

$$\mathbf{u} \;:=\; \frac{\boldsymbol{\tau}^2}{\vartheta^2}\mathbf{t}(0) + \frac{\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}}{\vartheta^2}\mathbf{b}(0)\;, \tag{37.35}$$

termo esse que corresponde à primeira linha, e um termo oscilatório em s, que corresponde à segunda linha, de período

$$L \;:=\; \frac{2\pi}{\vartheta}\;. \tag{37.36}$$

O termo oscilatório descreve um "movimento" circular e planar quando projetado no plano gerado pelos vetores ortogonais

$$\mathbf{v} \;:=\; \frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{\vartheta^3}\mathbf{t}(0) - \frac{\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}}{\vartheta^3}\mathbf{b}(0) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{w} := -\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\vartheta^2}\mathbf{n}(0)\;. \tag{37.37}$$

Note-se que $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = \boldsymbol{\kappa}/\vartheta^2$. Verifique! Assim, o raio desse círculo no plano $\mathbf{v}$-$\mathbf{w}$ é $\boldsymbol{\rho} \coloneqq \boldsymbol{\kappa}/\vartheta^2$. Esse movimento circular projetado pode é parametrizado como

$$\mathbf{c}(\ell) \;=\; \mathbf{v}\,\mathrm{sen}(s/\boldsymbol{\rho}) + \mathbf{w}\cos(s/\boldsymbol{\rho})\;, \tag{37.38}$$

com $\ell \in [0,\ 2\pi\boldsymbol{\rho})$ sendo o parâmetro de comprimento desse círculo.

É também relevante observar que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ (verifique!) e é evidente que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = 0$. Por fim, observe-se também que $\mathbf{u}$ e proporcional ao vetor de Darboux: $\mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\vartheta^2}\mathbf{\Omega}_D$ e que também vale $\|\mathbf{u}\| = |\boldsymbol{\tau}|/\vartheta$.

Comentário. Para o estudante vale colocar aqui o seguinte: o mencionado círculo é a projeção da curva $\mathbf{y}(s)$ no plano $\mathbf{v}$-$\mathbf{w}$ e tem raio $\boldsymbol{\rho} \coloneqq \boldsymbol{\kappa}/\vartheta^2$ e **não** não pode ser confundido com o círculo osculante, descrito anteriormente. Esse último encontra-se no plano gerado pelos vetores $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ e tem raio $\boldsymbol{\kappa}^{-1}$. Apenas no caso $\boldsymbol{\tau} = 0$ (vide adiante) ambos coincidem. ♣

Para cada s, o centro do círculo (37.38) que é a projeção da curva $\mathbf{y}(s)$ no plano $\mathbf{v}$-$\mathbf{w}$ e tem raio $\boldsymbol{\rho} := \boldsymbol{\kappa}/\vartheta^2$ é

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(s)+\boldsymbol{\rho}\mathbf{n}(s) &\overset{(37.33)\text{ e }(37.34)}{=} \left(\mathbf{y}(0)+\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\vartheta^2}\mathbf{n}(0)\right)+\left[\frac{\boldsymbol{\tau}^2}{\vartheta^2}\mathbf{t}(0)+\frac{\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}}{\vartheta^2}\mathbf{b}(0)\right]s \\ &\quad+\left(\frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{\vartheta^3}\mathbf{t}(0)-\frac{\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}}{\vartheta^3}\mathbf{b}(0)\right)\operatorname{sen}(\vartheta s)-\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\vartheta^2}\mathbf{n}(0)\cos(\vartheta s) \\ &\quad+\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\vartheta^2}\left\{-\left[\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\vartheta}\mathbf{t}(0)-\frac{\boldsymbol{\tau}}{\vartheta}\mathbf{b}(0)\right]\operatorname{sen}(\vartheta s)+\mathbf{n}(0)\cos(\vartheta s)\right\} \qquad (37.39)\\ &= \left(\mathbf{y}(0)+\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\vartheta^2}\mathbf{n}(0)\right)+\left[\frac{\boldsymbol{\tau}^2}{\vartheta^2}\mathbf{t}(0)+\frac{\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}}{\vartheta^2}\mathbf{b}(0)\right]s \qquad (37.40)\\ &= \left(\mathbf{y}(0)+\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\vartheta^2}\mathbf{n}(0)\right)+s\mathbf{u}\,, \qquad (37.41)\end{aligned}$$

após cancelamentos evidentes em (37.39). Vê-se dessa expressão que o centro do círculo projetado move-se linearmente com s.

Concluímos de todo o exposto acima que a trajetória $\mathbf{y}(s)$, no caso de curvatura e torção constantes não nulas, descreve uma hélice circular no espaço localizada no cilindro de raio $\boldsymbol{\rho} := \boldsymbol{\kappa}/\vartheta^2$ em torno do eixo de simetria descrito pela reta

$$\left(\mathbf{y}(0)+\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\vartheta^2}\mathbf{n}(0)\right)+\left[\frac{\boldsymbol{\tau}^2}{\vartheta^2}\mathbf{t}(0)+\frac{\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}}{\vartheta^2}\mathbf{b}(0)\right]\lambda\,, \qquad \lambda\in\mathbb{R}\,.$$

E. 37.1 *Exercício.* Usando (37.12) obtenha o círculo osculante à hélice circular $\mathbf{y}(s)$ considerada. Constate que seu centro $\mathbf{y}(s)+R(s)\mathbf{n}(s)=\mathbf{y}(s)+\boldsymbol{\kappa}^{-1}\mathbf{n}(s)$ também descreve uma hélice circular. ✣

• **Passo de uma hélice circular**

O *passo da hélice* é definido como o deslocamento de $\mathbf{y}(s)$ ao longo de um período do movimento circular projetado, e vale

$$\mathbf{y}(s+L)-\mathbf{y}(s) \;=\; L\left[\frac{\boldsymbol{\tau}^2}{\vartheta^2}\mathbf{t}(0)+\frac{\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}}{\vartheta^2}\mathbf{b}(0)\right] \;=\; L\mathbf{u} \;=\; \frac{2\pi|\boldsymbol{\tau}|}{\vartheta^2}\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\,,$$

com $L := 2\pi/\vartheta$ sendo o período movimento circular projetado, definido em (37.36), e $\|u\| = |\boldsymbol{\tau}|/\vartheta$, como já comentamos. Como o vetor $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ tem norma 1, vemos que a distância percorrida em um passo da hélice circular é $2\pi|\boldsymbol{\tau}|/\vartheta^2$. É de se notar que essa expressão anula-se na ausência de torção.

• **A inclinação de uma hélice circular**

A *inclinação de um hélice circular* é o ângulo α formado entre o vetor tangente $\mathbf{t}(s)$ e o eixo da hélice, definido pelo versor $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$. Esse ângulo pode ser obtido do produto escalar entre esses dois versores: $\cos\alpha := \big(\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{u}\big)/\|\mathbf{u}\|$. Usando (37.32) e (37.35), obtém-se facilmente

$$\cos\alpha \;:=\; \frac{\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \;=\; \frac{|\boldsymbol{\tau}|}{\vartheta}\,, \qquad (37.42)$$

Verifique! Segue imediatamente disso que $\tan\alpha = \boldsymbol{\kappa}/|\boldsymbol{\tau}|$. É de se observar que o lado direito de (37.42) é constante em s, o que significa que o ângulo entre o vetor tangente $\mathbf{t}(s)$ e eixo da hélice $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ é constante. Isso é uma característica das chamadas *hélices gerais*, ou *hélices de inclinação constante*, classe à qual as hélices circulares pertencem. Vide Seção 37.1.2.2, página 2031. Para hélices de inclinação constante a razão $\boldsymbol{\kappa}(s)/\boldsymbol{\tau}(s)$ é constante em s. É de se observar também que o lado direito de (37.42) é proporcional à torção, o que mais uma vez vai ao encontro da interpretação dessa grandeza: se a torção de uma hélice circular for nula, a hélice não possuirá inclinação e, portanto, será planar.

• **Hélices circulares dextrógiras ou levógiras**

Retornemos às definições (37.35) e (37.37). Uma hélice circular é dita ser *dextrógira* (ou *dextrogira*) se $\mathbf{u}\cdot\big(\mathbf{w}\times\mathbf{v}\big)>0$ e é dita ser *levógira* (ou *levogira*, ou ainda *sinistrógira* ou *sinistrogira*) se $\mathbf{u}\cdot\big(\mathbf{w}\times\mathbf{v}\big)<0$. Isso significa que uma hélice circular é *dextrógira* (*levógira*) se girar segundo a regra da mão direita (esquerda).

Uma conta simples usando (37.35) e (37.37) mostra que $\mathbf{u}\cdot\big(\mathbf{w}\times\mathbf{v}\big)=\boldsymbol{\kappa}^2\boldsymbol{\tau}/\vartheta^5$. Assim, a hélice circular é *dextrógira* se $\boldsymbol{\tau}>0$ e levógira se $\boldsymbol{\tau}<0$.

As noções de hélice circular dextrógira ou levógira são importantes na Química Orgânica, na Mineralogia, na Óptica e mesmo na Botânica e na Zoologia.

• **Os casos de torção nula e de curvatura nula**

Há dois casos especiais da solução (37.34) a se analisar.

1. Caso $\boldsymbol{\tau}=0$, $\boldsymbol{\kappa}>0$. Nesse caso a torção da curva é nula e temos, por (37.34),
$$\mathbf{y}(s) \;=\; \left(\mathbf{y}(0)+\frac{1}{\boldsymbol{\kappa}}\mathbf{n}(0)\right)+\frac{1}{\boldsymbol{\kappa}}\Big(\mathbf{t}(0)\operatorname{sen}(s\boldsymbol{\kappa})-\mathbf{n}(0)\cos(s\boldsymbol{\kappa})\Big)\,.$$
Trata-se de um círculo situado no plano definido por $\mathbf{t}(0)$ e $\mathbf{n}(0)$, de raio $1/\boldsymbol{\kappa}$ e centrado no ponto $\mathbf{y}(0)+\frac{1}{\boldsymbol{\kappa}}\mathbf{n}(0)$.
2. Caso $\boldsymbol{\kappa}=0$, $\boldsymbol{\tau}\neq 0$. Nesse caso a curvatura da curva é nula e temos, por (37.34),
$$\mathbf{y}(s) \;=\; \mathbf{y}(0)+\mathbf{t}(0)s\,,$$
que descreve uma linha reta no sentido de $\mathbf{t}(0)$ passando pelo ponto $\mathbf{y}(0)$. Observe-se que essa expressão *independe* da torção $\boldsymbol{\tau}$.

Esses dois casos permitem ilustrar uma afirmação frequentemente encontrada na literatura: a presença de torção em uma curva reflete sua incapacidade de ser planar e a presença de curvatura reflete sua incapacidade de ser uma linha reta. Em outras palavras, se a torção for nula a curva será planar e se a curvatura for nula ela será uma linha reta. Essa interpretação é corroborada com o uso do chamado *vetor de Darboux*, introduzido acima.

37.1.2.2 Hélices Gerais, ou Hélices de Inclinação Constante

Uma *hélice geral*, também denominada *hélice de inclinação constante*, é uma curva caracterizada por seu vetor tangente $\mathbf{t}(s)$ manter um ângulo constante com um versor $\mathbf{a}$, fixo (que podemos interpretar como o eixo de simetria da hélice). Como veremos, isso se dá se e somente se a razão $\boldsymbol{\kappa}(s)/\boldsymbol{\tau}(s)\equiv\boldsymbol{\beta}$ for independente de s, um resultado frequentemente denominado *Teorema de Lancret*[13]. Vide [524] para mais detalhes históricos.

Naturalmente, hélices circulares, tratadas na Seção 37.1.2.1, página 2028, são hélices de inclinação constante, o que se vê em (37.42) identificando-se $\mathbf{a}$ com $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ ou no fato de naquele caso ter-se $\boldsymbol{\kappa}$ e $\boldsymbol{\tau}$ constantes.

• **Prova do Teorema de Lancret**

Seguindo para tal [524] a argumentação é a seguinte. Seja $\mathbf{a}$ um tal versor com $\mathbf{a}\cdot\mathbf{t}(s)=\cos(\alpha)$, constante em s. Diferenciando-se em s e usando-se (37.18), obtemos $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}(s)=0$. Portanto, $\mathbf{a}$ está localizado no plano retificador e $\mathbf{a}=\cos(\alpha)\mathbf{t}(s)+\operatorname{sen}(\alpha)\mathbf{b}(s)$. Como $\mathbf{a}$ é suposto constante, diferenciando-se esta última igualdade em relação a s e usando-se (37.18) e (37.20), página 2026, obtém-se $0=\cos(\alpha)\boldsymbol{\kappa}(s)\mathbf{n}(s)-\operatorname{sen}(\alpha)\boldsymbol{\tau}(s)\mathbf{n}(s)$ e, portanto, $\boldsymbol{\kappa}(s)/\boldsymbol{\tau}(s)=\tan(\alpha)$, constante em s.

A recíproca também é verdadeira: se $\boldsymbol{\kappa}(s)/\boldsymbol{\tau}(s)=:\boldsymbol{\beta}$ é constante em s, então existe um versor $\mathbf{a}$ com as qualidades especificadas. Para tal, defina-se $\tan(\alpha):=\boldsymbol{\kappa}(s)/\boldsymbol{\tau}(s)$, constante por hipótese. Vale, com isso, $\cos(\alpha)\boldsymbol{\kappa}(s)\mathbf{n}(s)-\operatorname{sen}(\alpha)\boldsymbol{\tau}(s)\mathbf{n}(s)=0$ e, pelas relações (37.18) e (37.20), vale $\frac{d}{ds}\big(\cos(\alpha)\mathbf{t}(s)+\operatorname{sen}(\alpha)\mathbf{b}(s)\big)=0$. Definindo-se $\mathbf{a}:=\cos(\alpha)\mathbf{t}(s)+\operatorname{sen}(\alpha)\mathbf{b}(s)$, concluímos que trata-se de um vetor constante em s, com $\mathbf{a}\cdot\mathbf{t}(s)=\cos(\alpha)$, também constante, concluindo a argumentação.

• **A solução para o tríada de Frenet de uma hélice geral**

Nesse caso em que $\boldsymbol{\kappa}(s)/\boldsymbol{\tau}(s)$ é constante, é fácil verificar (faça-o!) que as matrizes $\mathbf{K}(s)$ comutam para valores diferentes de s. Com isso, a solução de (37.21) fica

$$\mathbf{T}(s) \;=\; \mathbf{T}(0)\exp\left(\int_0^s\mathbf{K}(s')\,ds'\right)$$

[13] Michel Ange Lancret (1774–1807).

(vide (14.51), página 767, da Seção 14.5, página 765), sendo

$$\int_0^s \mathbf{K}(s')\,ds' \;=\; \left(\int_0^s \boldsymbol{\tau}(s')\,ds'\right) J_1 + \left(\int_0^s \boldsymbol{\kappa}(s')\,ds'\right) J_3 \;=\; \sqrt{1+\boldsymbol{\beta}^2}\left(\int_0^s \boldsymbol{\tau}(s')\,ds'\right)\vec{\eta}\cdot\vec{J}\,,$$

com $\vec{\eta} := \frac{1}{\sqrt{1+\boldsymbol{\beta}^2}}\big(\mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\beta}\mathbf{e}_3\big)$, um vetor unitário. Para obtermos $\mathbf{t}(s)$ de forma explícita a situação é similar à da solução (37.31), para a hélice circular, com o produto ϑs tendo agora de ser substituído por $S(s) := \sqrt{1+\boldsymbol{\beta}^2}\,\big(\int_0^s \boldsymbol{\tau}(s')\,ds'\big)$ e com η_1 e η_3 dados agora por $\frac{1}{\sqrt{1+\boldsymbol{\beta}^2}}$ e $\frac{\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\beta}^2}}$, respectivamente. O resultado é

$$\mathbf{t}(s) \;=\; \left[\frac{\mathbf{t}(0)+\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{b}(0)}{1+\boldsymbol{\beta}^2}\right] + \left[\frac{\boldsymbol{\beta}^2\mathbf{t}(0)-\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{b}(0)}{1+\boldsymbol{\beta}^2}\right]\cos\big(S(s)\big) + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\beta}^2}}\mathbf{n}(0)\,\mathrm{sen}\big(S(s)\big) \tag{37.43}$$

e como $\mathbf{n}(s) = \boldsymbol{\kappa}(s)^{-1}\mathbf{t}'(s)$ ((37.18), página 2026), tem-se também

$$\mathbf{n}(s) \;=\; -\left[\frac{\boldsymbol{\beta}\mathbf{t}(0)-\mathbf{b}(0)}{\sqrt{1+\boldsymbol{\beta}^2}}\right]\mathrm{sen}\big(S(s)\big) + \mathbf{n}(0)\cos\big(S(s)\big)\,.$$

E. 37.2 *Exercício*. Obtenha essas expressões e calcule o versor $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s)\times\mathbf{n}(s)$. ✣

Como $\boldsymbol{\beta} = \tan(\alpha)$ e $\mathbf{a}$ é constante, temos $\mathbf{a} = \cos(\alpha)\mathbf{t}(0) + \mathrm{sen}(\alpha)\mathbf{b}(0) = \big(\mathbf{t}(0)+\boldsymbol{\beta}\mathbf{b}(0)\big)/\sqrt{1+\boldsymbol{\beta}^2}$, e podemos, assim, reescrever (37.43) como

$$\mathbf{t}(s) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+\boldsymbol{\beta}^2}}\mathbf{a} + \left[\frac{\boldsymbol{\beta}^2\mathbf{t}(0)-\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{b}(0)}{1+\boldsymbol{\beta}^2}\right]\cos\big(S(s)\big) + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\beta}^2}}\mathbf{n}(0)\,\mathrm{sen}\big(S(s)\big)\,. \tag{37.44}$$

Extraímos disso que a expressão para a curva $\mathbf{y}(s) = \mathbf{y}(0) + \int_0^s \mathbf{t}(s')ds'$ é

$$\mathbf{y}(s) \;=\; \mathbf{y}(0) + \left(\frac{1}{\sqrt{1+\boldsymbol{\beta}^2}}\mathbf{a}\right)s + \left[\frac{\boldsymbol{\beta}^2\mathbf{t}(0)-\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{b}(0)}{1+\boldsymbol{\beta}^2}\right]\mathscr{C}(s) + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\beta}^2}}\mathbf{n}(0)\mathscr{S}(s)\,, \tag{37.45}$$

com

$$\mathscr{C}(s) \;:=\; \int_0^s \cos\big(S(s')\big)ds' \;=\; \int_0^s \cos\left(\sqrt{1+\boldsymbol{\beta}^2}\int_0^{s'}\boldsymbol{\tau}(s'')\,ds''\right)ds'\,, \tag{37.46}$$

$$\mathscr{S}(s) \;:=\; \int_0^s \mathrm{sen}\big(S(s')\big)ds' \;=\; \int_0^s \mathrm{sen}\left(\sqrt{1+\boldsymbol{\beta}^2}\int_0^{s'}\boldsymbol{\tau}(s'')\,ds''\right)ds'\,. \tag{37.47}$$

Deste ponto em diante, dependendo da função $\boldsymbol{\tau}(s)$ que se considere, pode ser difícil, infelizmente, obter expressões explícitas para o lado direito de (37.46) ou (37.47) e para a curva $\mathbf{y}(s)$, ou para outras grandezas relevantes, e encerramos aqui nossa exposição sobre hélices gerais, ou hélices de inclinação constante, remetendo o leitor interessado em desenvolvimentos posteriores à literatura pertinente, *e.g.*, [524], [519] etc.

37.1.3 Curvatura e Torção em Termos de Outros Parâmetros

Em algumas aplicações é conveniente expressarmos e calcularmos a tríade de Frenet ($\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$), a curvatura $\boldsymbol{\kappa}$ e a torção $\boldsymbol{\tau}$ em termos de parâmetros outros que são o comprimento de arco da curva, s. Tratemos disso nesta Seção.

Como antes, escrevemos $s \equiv \theta^{-1}(t)$ e $t = \theta(s)$, com θ^{-1} definida em (37.3). Está claro por (37.6) que para o vetor tangente normalizado temos

$$\mathbf{t}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \mathbf{y}'\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)}}\dot{\mathbf{x}}(t)\,. \tag{37.48}$$

Por (37.6), temos $\mathbf{y}'(s) = \theta'(s)\dot{\mathbf{x}}\big(\theta(s)\big)$. Portanto, diferenciando em s essa expressão, obtemos

$$\mathbf{y}''(s) \;=\; \theta''(s)\dot{\mathbf{x}}\big(\theta(s)\big) + \big(\theta'(s)\big)^2\ddot{\mathbf{x}}\big(\theta(s)\big)\,,$$

donde obtemos

$$\mathbf{y}''\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \theta''\big(\theta^{-1}(t)\big)\dot{\mathbf{x}}(t) + \Big(\theta'\big(\theta^{-1}(t)\big)\Big)^2\ddot{\mathbf{x}}(t)\,. \tag{37.49}$$

Vamos agora tentar reescrever essa relação em termos mais adequados.

Por um lado, (37.5) informa-nos que

$$\theta'\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)}}\,.$$

Por outro lado, diferenciando-se (37.5) em relação a s e usando a própria relação (37.5), é fácil ver que

$$\theta''(s) \;=\; -\frac{\dot{\mathbf{x}}\big(\theta(s)\big)\cdot\ddot{\mathbf{x}}\big(\theta(s)\big)}{\Big(\dot{\mathbf{x}}\big(\theta(s)\big)\cdot\dot{\mathbf{x}}\big(\theta(s)\big)\Big)^2} \qquad \text{e, portanto,} \qquad \theta''\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; -\frac{\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\ddot{\mathbf{x}}(t)}{\Big(\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)\Big)^2}$$

Assim, (37.49) fica

$$\mathbf{y}''\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; -\frac{\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\ddot{\mathbf{x}}(t)}{\Big(\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)\Big)^2}\dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{1}{\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)}\ddot{\mathbf{x}}(t)\,. \tag{37.50}$$

A relação (37.50) pode ser expressa de outra forma mais simples. Usando a bem conhecida relação (4.14), página 323, é fácil constatar que podemos escrever

$$\mathbf{y}''\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; -\frac{1}{\Big(\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)\Big)^2}\Big(\dot{\mathbf{x}}(t)\times\big(\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big)\Big) \tag{37.51}$$

$$\overset{(37.48)}{=} \; -\frac{1}{\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)}\Big(\mathbf{t}\big(\theta^{-1}(t)\big)\times\Big(\mathbf{t}\big(\theta^{-1}(t)\big)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\Big)\Big)\,. \tag{37.52}$$

Como os vetores $\dot{\mathbf{x}}(t)$ e $\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)$ são ortogonais, temos que $\Big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\big(\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big)\Big\| = \big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\big\|\,\Big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\Big\|$ e, assim,

$$\big\|\mathbf{y}''\big(\theta^{-1}(t)\big)\big\| \;=\; \frac{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big\|}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\big\|^3}\,.$$

Portanto, temos para a curvatura $\boldsymbol{\kappa}\big(\theta^{-1}(t)\big) := \Big\|\mathbf{y}''\big(\theta^{-1}(t)\big)\Big\|$ a expressão

$$\boldsymbol{\kappa}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \frac{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big\|}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\big\|^3}\,. \tag{37.53}$$

Essa importante fórmula expressa a curvatura no ponto da curva parametrizado por t. Ela simplifica o cálculo da curvatura em diversas situações onde a expressão da curva em termos de um certo parâmetro t é conhecida, mas não a expressão em termos do comprimento de arco s. Uma tal situação se dá no caso tratado no Exemplo 37.2, página 2035, e no caso da elipse, tratado no Exemplo 37.3, página 2036. Fora isso, expressões muito similares para a curvatura são encontradas em variedades de dimensões superiores em Geometrias Riemannianas.

Pela definição (37.11), página 2023, temos também, para o vetor normal principal,

$$\mathbf{n}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; -\frac{1}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\big\|\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big\|}\Big(\dot{\mathbf{x}}(t)\times\big(\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big)\Big)\,. \tag{37.54}$$

Observe-se que esta expressão é problemática caso $\dot{\mathbf{x}}(t)$ e $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ sejam proporcionais um ao outro, como no caso da linha reta. Doravante assumiremos que tal não é o caso na curva considerada.

Sabemos por (4.14), página 323, que $\dot{\mathbf{x}}(t)\times\big(\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big)=\big(\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\ddot{\mathbf{x}}(t)\big)\dot{\mathbf{x}}(t)-\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\big\|^2\ddot{\mathbf{x}}(t)$. Assim, podemos escrever

$$\mathbf{n}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \frac{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\big\|}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big\|}\ddot{\mathbf{x}}(t)-\frac{\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\ddot{\mathbf{x}}(t)}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\big\|\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big\|}\dot{\mathbf{x}}(t)\;. \tag{37.55}$$

Com isso, temos

$$\mathbf{b}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \mathbf{t}\big(\theta^{-1}(t)\big)\times\mathbf{n}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \frac{1}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big\|}\,\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\;. \tag{37.56}$$

Para encontrarmos uma expressão para a torção, o mais fácil a se fazer é usar (37.20), página 2026, que nos informa que $\boldsymbol{\tau}\big(\theta^{-1}(t)\big)=-\mathbf{n}\big(\theta^{-1}(t)\big)\cdot\mathbf{b}'\big(\theta^{-1}(t)\big)$. Diferenciando-se ambos os lados de (37.56) em relação à t teremos, após cômputos simples, porém tediosos,

$$\mathbf{b}'\big(\theta^{-1}(t)\big)(\theta^{-1})'(t) \;=\; \frac{1}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big\|}\,\dot{\mathbf{x}}(t)\times\dddot{\mathbf{x}}(t)-\frac{1}{2}\frac{\big(\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big)\cdot\big(\dot{\mathbf{x}}(t)\times\dddot{\mathbf{x}}(t)\big)}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big\|^3}\,\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\;.$$

Por (37.3), página 2022, vale $(\theta^{-1})'(t)=\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\big\|$. Consequentemente,

$$\mathbf{b}'\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \frac{1}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\big\|\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big\|}\,\dot{\mathbf{x}}(t)\times\dddot{\mathbf{x}}(t)-\frac{1}{2}\frac{\big(\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big)\cdot\big(\dot{\mathbf{x}}(t)\times\dddot{\mathbf{x}}(t)\big)}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\big\|\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big\|^3}\,\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\;.$$

Tomando-se agora o produto escalar disso com $\mathbf{n}\big(\theta^{-1}(t)\big)$ dado em (37.55) vemos, após novos cômputos simples, porém tediosos, que

$$\boldsymbol{\tau}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; -\mathbf{n}\big(\theta^{-1}(t)\big)\cdot\mathbf{b}'\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\big(\ddot{\mathbf{x}}(t)\times\dddot{\mathbf{x}}(t)\big)}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big\|^2}\;. \tag{37.57}$$

• **Resumo dos resultados**

Para futura referência capturamos os resultados desta Seção. Para a tríade de Frenet, temos

$$\mathbf{t}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \frac{1}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\big\|}\dot{\mathbf{x}}(t)\;, \tag{37.58}$$

$$\mathbf{n}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; -\frac{1}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\big\|\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big\|}\Big(\dot{\mathbf{x}}(t)\times\big(\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big)\Big) \tag{37.59}$$

$$\;=\; \frac{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\big\|}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big\|}\ddot{\mathbf{x}}(t)-\frac{\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\ddot{\mathbf{x}}(t)}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\big\|\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big\|}\dot{\mathbf{x}}(t)\;, \tag{37.60}$$

$$\mathbf{b}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \frac{1}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big\|}\,\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\;. \tag{37.61}$$

Para a curvatura e a torção temos, respectivamente,

$$\boldsymbol{\kappa}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \frac{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big\|}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\big\|^3}\;, \tag{37.62}$$

$$\boldsymbol{\tau}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\big(\ddot{\mathbf{x}}(t)\times\dddot{\mathbf{x}}(t)\big)}{\big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)\big\|^2}\;. \tag{37.63}$$

37.1.4 Alguns Outros Exemplos

Exemplo 37.1 O Gráfico da Função cosh. Para $a>0$, constante, considere-se o gráfico da função $a^{-1}\cosh(at)$, $t\in\mathbb{R}$, ao qual corresponde, no plano $\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$, a curva parametrizada

$$\mathbf{x}(t) \;=\; t\,\mathbf{e}_1+a^{-1}\cosh(at)\,\mathbf{e}_2\;,\qquad\text{sendo}\qquad \dot{\mathbf{x}}(t) \;=\; \mathbf{e}_1+\operatorname{senh}(at)\,\mathbf{e}_2\;,\qquad t\in\mathbb{R}\;.$$

O correspondente parâmetro de comprimento (tomando $\mathbf{x}(0)=(0,\,1)$ como origem) é

$$s \;=\; \theta^{-1}(t) \;:=\; \int_0^t\sqrt{1+\operatorname{senh}(at)^2}dt \;=\; \int_0^t\cosh(at)dt \;=\; a^{-1}\operatorname{senh}(at)\;.$$

Portanto, $\theta(s)=a^{-1}\operatorname{argsenh}(as)$ e $\theta'(s)=\frac{1}{\sqrt{1+(as)^2}}$.

Com esse parâmetro, a curva em questão se escreve como

$$\mathbf{y}(s) \;=\; \mathbf{x}\big(\theta(s)\big) \;=\; a^{-1}\operatorname{argsenh}(as)\,\mathbf{e}_1+a^{-1}\sqrt{1+(as)^2}\,\mathbf{e}_2\;.$$

Com isso, temos

$$\mathbf{t}(s) \;:=\; \mathbf{y}'(s) \;=\; \dot{\mathbf{x}}\big(\theta(s)\big)\theta'(s) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+(as)^2}}\big(\mathbf{e}_1+as\,\mathbf{e}_2\big)\;.$$

É elementar constatar disso que $\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{t}(s)=1$, como esperado. Essa expressão fornece em qualquer ponto o vetor tangente à curva normalizado.

Temos também

$$\mathbf{y}''(s) \;=\; \frac{1}{\big(1+(as)^2\big)^{3/2}}\big(-a^2s\,\mathbf{e}_1+a\,\mathbf{e}_2\big)\;.$$

Assim, para cada s, a curvatura $\boldsymbol{\kappa}(s)$ é dada por

$$\boldsymbol{\kappa}(s) \;=\; \big\|\mathbf{y}''(s)\big\| \;=\; \frac{a}{1+(as)^2}\;.$$

Como a curva é planar, não há torção. O vetor normal principal é

$$\mathbf{n}(s) \;=\; \frac{\mathbf{y}''(s)}{\big\|\mathbf{y}''(s)\big\|} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+(as)^2}}\big(-as\,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\big)\;.$$

Novamente, é elementar constatar disso que $\mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{n}(s)=1$ e que $\mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{t}(s)=0$. O vetor binormal é dado por $\mathbf{b}(s)=\mathbf{t}(s)\times\mathbf{n}(s)=\mathbf{e}_3$, constante, como esperado de uma curva planar.

Por fim, temos os limites assintóticos $\lim_{s\to\pm\infty}\mathbf{t}(s)=\pm\mathbf{e}_2$ e $\lim_{s\to\pm\infty}\mathbf{n}(s)=\mp\mathbf{e}_1$. Deixamos ao leitor a tarefa de interpretar geometricamente esses limites. ♦

E. 37.3 *Exercício.* Obtenha o círculo osculante à cada ponto da curva acima. Use (37.12), página 2024. ✣

Exemplo 37.2 Gráfico da função t^n. Considere-se o gráfico da função t^n, $t\in\mathbb{R}$, com $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, ao qual corresponde, no plano $\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$, a curva parametrizada

$$\mathbf{x}(t) \;=\; t\,\mathbf{e}_1+t^n\,\mathbf{e}_2\;,\qquad\text{sendo}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \;=\; \mathbf{e}_1+nt^{n-1}\,\mathbf{e}_2\qquad\text{e}$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) \;=\; n(n-1)t^{n-2}\,\mathbf{e}_2\;.$$

$t\in\mathbb{R}$. Escolhendo-se a origem em $t=0$, tem-se,

$$s \;=\; \theta^{-1}(t) \;=\; \int_0^t\sqrt{1+n^2u^{2n-2}}\,du\;.$$

Exceto em alguns casos particulares, essa integral não pode ser expressa em termos de funções elementares, mas sim em termos de funções hipergeométricas. Não tentaremos calculá-la aqui, pois isso não ser necessário para nossos propósitos.

De acordo com (37.58), vale

$$\mathbf{t}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}}\big(\mathbf{e}_1+nt^{n-1}\,\mathbf{e}_2\big)$$

e, por (37.59),

$$\mathbf{n}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \left(\frac{t}{|t|}\right)^{n-2}\frac{1}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}}\big(-nt^{n-1}\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\big)\;.$$

Disso, obtém-se

$$\mathbf{b}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \mathbf{t}\big(\theta^{-1}(t)\big)\times\mathbf{n}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \left(\frac{t}{|t|}\right)^{n-2}\mathbf{e}_3\;.$$

Observe-se aqui que $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ são descontínuas como função de t em $t=0$ caso n seja ímpar, ou seja, quando o gráfico da função t^n apresente um ponto de inflexão.

Também de acordo com (37.62)

$$\boldsymbol{\kappa}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \frac{n(n-1)|t|^{n-2}}{\big(1+n^2t^{2n-2}\big)^{3/2}}\;.$$

Como a curva é planar, a torção é nula. Observe-se que curvatura $\boldsymbol{\kappa}$ anula-se em $t=0$ exceto se $n=2$, quando vale 2.

Por fim, temos os limites assintóticos $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\mathbf{t}\big(\theta^{-1}(t)\big) = (\pm1)^{n-1}\mathbf{e}_2$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\mathbf{n}\big(\theta^{-1}(t)\big) = \mp\mathbf{e}_1$ e $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\mathbf{b}\big(\theta^{-1}(t)\big) = (\pm1)^{n}\mathbf{e}_3$. Justifique! ⧫

Exemplo 37.3 A Curvatura de Elipses. Consideremos no plano $\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$ uma *elipse* centrada na origem e de semieixos $a>0$ e $b>0$ paralelos a $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, respectivamente, definida como o conjunto de todos os pontos $x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2$ com x e y sendo números reais tais que

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \;=\; 1\;.$$

Podemos parametrizar seus pontos por um ângulo t medido a partir da origem e do eixo $\mathbf{e}_1$ no sentido anti-horário. Vide Figura 37.2, página 2036.

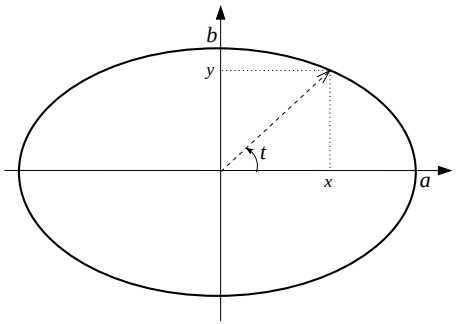

Figura 37.2: Elipse centrada na origem e de semieixos $a>0$ (na direção horizontal, que corresponde a $\mathbf{e}_1$) e $b>0$ (na direção vertical, que corresponde a $\mathbf{e}_2$). O ângulo t é medido no sentido anti-horário a partir do eixo horizontal, como indicado na figura. As coordenadas $(x,\ y)$ de um ponto da elipse podem ser parametrizadas por t, na forma $x=a\cos(t)$ e $y=b\,\mathrm{sen}(t)$.

Teremos, para essa parametrização

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= a\cos(t)\mathbf{e}_1+b\,\mathrm{sen}(t)\mathbf{e}_2\;,\\
\dot{\mathbf{x}}(t) &= -a\,\mathrm{sen}(t)\mathbf{e}_1+b\cos(t)\mathbf{e}_2\;,\\
\ddot{\mathbf{x}}(t) &= -a\cos(t)\mathbf{e}_1-b\,\mathrm{sen}(t)\mathbf{e}_2\;.
\end{aligned}$$

Se iniciarmos pelo ponto $a\mathbf{e}_1$, que corresponde ao ponto $t=0$ na parametrização acima, a medida do comprimento de arco da elipse situado entre 0 e t será

$$s \;=\; \theta^{-1}(t) \;=\; \int_0^t \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2(u)+b^2\cos^2(u)}\;du\;.$$

Infelizmente, esta integral não pode ser calculada em termos de funções elementares (exceto quando $a=b$), mas pode ser expressa em termos das assim chamadas integrais elípticas de segundo tipo. Não o faremos aqui, por não ser necessário para nossos propósitos.

Vamos expressar a curvatura em um ponto parametrizado por t usando a fórmula (37.53), página 2033. Temos,

$$\dot{\mathbf{x}}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t) \;=\; \big(ab\,\mathrm{sen}^2(t)+ab\cos^2(t)\big)\mathbf{e}_3 \;=\; ab\mathbf{e}_3 \qquad\text{e}\qquad \big\|\dot{\mathbf{x}}(t)\big\| \;=\; \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2(t)+b^2\cos^2(t)}\;.$$

Assim, por (37.53),

$$\boldsymbol{\kappa}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \frac{ab}{\big(a^2\,\mathrm{sen}^2(t)+b^2\cos^2(t)\big)^{3/2}}\;. \tag{37.64}$$

Como a curva é plana não há torção nesse caso. Observe-se que o raio de curvatura vale b^2/a e a^2/b nos pontos correspondentes a $t=0$ e $t=\pi/2$, respectivamente.

Para os vetores tangente e normal principal temos, segundo (37.48) e (37.54), respectivamente,

$$\mathbf{t}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2(t)+b^2\cos^2(t)}}\Big(-a\,\mathrm{sen}(t)\mathbf{e}_1+b\cos(t)\mathbf{e}_2\Big)\;, \tag{37.65}$$

$$\mathbf{n}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2(t)+b^2\cos^2(t)}}\Big(-b\cos(t)\mathbf{e}_1-a\,\mathrm{sen}(t)\mathbf{e}_2\Big)\;, \tag{37.66}$$

$$\mathbf{b}\big(\theta^{-1}(t)\big) \;=\; \mathbf{e}_3\;. \tag{37.67}$$

A última relação decorre da definição: $\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}$. ⧫

37.2 Superfícies Regulares em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção vamos estender a noção de curvatura, anteriormente desenvolvida para curvas no espaço, para superfícies regulares bidimensionais no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$. Se considerarmos o campo de vetores ortogonais a cada ponto da superfície vemos intuitivamente que esses vetores variam tão mais rapidamente quanto mais "curvada" a superfície for. Assim, a variação desse campo de vetores pode ser entendia como uma medida da própria curvatura. Essas ideias foram desenvolvidas por Gauss e estão na raiz de vários desenvolvimentos que se estendem além das circunstâncias aqui tratadas, as de superfícies bidimensionais no espaço tridimensional.

Para tal, apresentaremos uma série de equações estruturais da teoria de superfícies (Seção 37.2.4, página 2047), cuja relevância se estende para além do nosso presente escopo.

Na Seção 37.2.5, página 2060, apresentaremos também a noção de derivação covariante de campos vetoriais, tema já discutido na Seção 35.2, página 1892, mas aqui seguiremos uma linha menos abstrata e mais próxima à raiz geométrica dessa importante definição.

• **Brevíssima nota histórica**

Se simplificarmos longos desenvolvimentos históricos que se estendem até a Antiguidade Clássica, podemos afirmar que o estudo da Geometria Clássica de Superfícies tem dois grandes pais fundadores. O primeiro é Monge[14] e o segundo é Gauss[15]. Monge foi pioneiro no estudo geométrico de soluções de equações diferenciais parciais, assunto que desenvolveu-se em uma forte linha de pesquisa atual. Outra de suas contribuições foi sua influência motivadora sobre uma série de matemáticos e geômetras franceses, que desempenharam papéis de grande importância nos séculos XVIII e XIX. Muitos dos nomes franceses mencionados no presente capítulo foram direta ou indiretamente inspirados por ele. Sua principal contribuição talvez tenha sido a de destacar a relevância do estudo de curvas e superfícies como objeto de interesse matemático *per se*. Para Monge, porém, superfícies eram sempre "encaradas como fronteiras de corpos sólidos" [524], ou, em uma linguagem mais moderna, como mergulhos no espaço tridimensional, e seu estudo era sempre *extrínseco*, ou seja, sempre abordava superfícies em termos das relações destas com o espaço ambiente na qual se encontravam e não como objeto em si.

Uma grande e importante mudança de concepção foi trazida por Gauss. Fortemente inspirado por problemas clássicos de Geometria, mas também motivado por seus trabalhos em Geodesia (Gauss fora encarregado por cerca de dez anos de conduzir trabalhos de mensuração no reino de Hanôver com o objetivo de construção de estradas de ferro), Gauss interessou-se pelo caráter *intrínseco* de superfícies bidimensionais, dando menos ênfase à relação das mesmas com o espaço ambiente na qual se encontravam e mais em inferir propriedades que possam ser obtidas internamente, através da medição de distâncias e ângulos dentro das próprias superfícies. Essa visão tornar-se-ia decisiva para o surgimento da Geometria Riemanniana, que Gauss viu nascer ao final de sua vida na hoje famosa apresentação de Riemann[16] sobre o tema [445] (ou também [446]) e, posteriormente, com o surgimento da Teoria da Relatividade Geral.

As ideias geométricas de Gauss foram apresentadas em sua monografia *"Disquisitiones generales circa superficies curvas"* ("Investigações gerais sobre superfícies curvas"), de 1827, um dos textos mais influentes da história da Matemática [183]. Escrito em Latim, como era o costume da época, esse texto possui várias edições em Inglês e outras línguas (vide, *e.g.*, [184]). Nele encontram-se em forma pristina diversos dos desenvolvimentos que apresentaremos.

• **O espaço tangente e o tensor métrico induzido**

A noção de superfície regular foi introduzida na Seção 34.4.3, página 1861, e aqui consideraremos superfícies regulares bidimensionais orientadas em $\mathbb{R}^3$. Seja $\mathcal{S}$ uma tal superfície e seja V um aberto em $\mathcal{S}$ com uma carta local de coordenadas $\boldsymbol{\varphi} : U \to V$ que seja um homeomorfismo de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, diferenciável e com $d\boldsymbol{\varphi}$ injetora em todo U. Com uma tal função podemos rotular os pontos de $\mathcal{S}$ por $\boldsymbol{\varphi}(u,\, v)$, com $(u,\, v) \in U$. Denominaremos $\boldsymbol{\varphi}$ uma *coordenatização* ou *parametrização* local de $\mathcal{S}$ pelos pontos de U.

O espaço tangente a $\mathcal{S}$ em um ponto $p \equiv \boldsymbol{\varphi}(u,\, v)$ é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ formado por todas as combinações lineares reais dos vetores tangentes $\boldsymbol{\varphi}_u$ e $\boldsymbol{\varphi}_v$: $\mathsf{T}\mathcal{S}_p := \{\alpha\boldsymbol{\varphi}_u + \beta\boldsymbol{\varphi}_v,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}$. Denotaremos o vetores de $\mathsf{T}\mathcal{S}_p$ como $\alpha\boldsymbol{\varphi}_u + \beta\boldsymbol{\varphi}_v$ como vetores-coluna $\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right)$.

O produto escalar usual em $\mathbb{R}^3$, que denotamos por "$\cdot$", induz um produto escalar em $\mathsf{T}\mathcal{S}_p$, que denotamos por

[14] Gaspard Monge, Conde de Péluse (1746–1818).
[15] Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855).
[16] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866).

$\mathbf{g} : \mathsf{T}\mathcal{S}_p \times \mathsf{T}\mathcal{S}_p \to \mathbb{R}$, da seguinte forma:

$$\mathbf{g}\Big(\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right),\, \left(\begin{smallmatrix}\gamma\\ \delta\end{smallmatrix}\right)\Big) \;=\; \big(\alpha\boldsymbol{\varphi}_u + \beta\boldsymbol{\varphi}_v\big)\cdot\big(\gamma\boldsymbol{\varphi}_u + \delta\boldsymbol{\varphi}_v\big) \;=\; \alpha\gamma\boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_u + \big(\alpha\delta+\beta\gamma\big)\boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_v + \beta\delta\boldsymbol{\varphi}_v\cdot\boldsymbol{\varphi}_v\,. \tag{37.68}$$

Podemos expressar esse produto escalar em forma matricial como

$$\mathbf{g}\Big(\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right),\, \left(\begin{smallmatrix}\gamma\\ \delta\end{smallmatrix}\right)\Big) \;=\; \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_u & \boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_v\\ \boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_v & \boldsymbol{\varphi}_v\cdot\boldsymbol{\varphi}_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}\,. \tag{37.69}$$

A matriz simétrica 2×2 que aqui comparece será doravante denotada por

$$\mathbf{G} \;:=\; \begin{pmatrix}\boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_u & \boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_v\\ \boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_v & \boldsymbol{\varphi}_v\cdot\boldsymbol{\varphi}_v\end{pmatrix}\,. \tag{37.70}$$

Esse produto escalar comporá o que posteriormente denominaremos a *primeira forma fundamental* da superfície $\mathcal{S}$.

O produto escalar g define um tensor métrico em $\mathcal{S}$, induzido pelo produto escalar usual em $\mathbb{R}^3$. Seguindo a prática da literatura, elementos de matriz de $\mathbf{G}$ serão doravante denotados de duas formas, a saber,

$$\mathbf{G} \;\equiv\; \begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}\mathrm{E} & \mathrm{F}\\ \mathrm{F} & \mathrm{G}\end{pmatrix}\,, \qquad \text{sendo} \qquad \mathrm{E} := \boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_u\,,\quad \mathrm{F} := \boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \;\text{ e }\; \mathrm{G} := \boldsymbol{\varphi}_v\cdot\boldsymbol{\varphi}_v\,. \tag{37.71}$$

O tensor métrico contravariante é definido pela matriz inversa de $\mathbf{G}$, a qual é dada por

$$\mathbf{G}^{-1} \;=\; \begin{pmatrix}g^{11} & g^{12}\\ g^{21} & g^{22}\end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\begin{pmatrix}\mathrm{G} & -\mathrm{F}\\ -\mathrm{F} & \mathrm{E}\end{pmatrix}\,. \tag{37.72}$$

37.2.1 O Mapa de Gauss

Para o que segue, suporemos também que a superfície $\mathcal{S}$ seja orientável, no sentido dado na definição à página 1821.

Definimos a aplicação $\mathbf{N}_{\mathcal{S}} : U \to \mathsf{T}\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^3$ como a associação entre cada ponto de U ao versor normal à superfície $\mathcal{S}$ no ponto $\boldsymbol{\varphi}(u,\, v)$ dado por

$$\mathbf{N}_{\mathcal{S}}(u,\, v) \;:=\; \frac{1}{\Big\|\boldsymbol{\varphi}_u(u,\, v)\times\boldsymbol{\varphi}_v(u,\, v)\Big\|}\boldsymbol{\varphi}_u(u,\, v)\times\boldsymbol{\varphi}_v(u,\, v)\,. \tag{37.73}$$

Nosso interesse na aplicação $\mathbf{N}_{\mathcal{S}}$ reside na intuição que a forma (e portanto, a curvatura) da superfície $\mathcal{S}$ afeta como os vetores normais a $\mathcal{S}$ variam de um ponto a outro. Essa intuição será perseguida no que segue.

A aplicação $\mathbf{G}_{\mathcal{S}}$ que a cada ponto de $\mathcal{S}$ associa o correspondente vetor normal $\mathbf{N}_{\mathcal{S}}$ é denominada *mapa de Gauss*, ou *aplicação de Gauss*. Assim, para $p \in \mathcal{S}$,

$$\mathbf{G}_{\mathcal{S}}(p) \;:=\; \mathbf{N}_{\mathcal{S}}\circ\boldsymbol{\varphi}^{-1}(p)\,. \tag{37.74}$$

Como $\mathbf{G}_{\mathcal{S}}$ mapeia pontos de $\mathcal{S}$ em vetores unitários de $\mathbb{R}^3$, podemos considerar $\mathbf{G}_{\mathcal{S}}$ como uma aplicação de $\mathcal{S}$ na superfície esférica $\mathbb{S}^2$. Trata-se, portanto, de uma aplicação entre duas variedades diferenciáveis.

É um exercício relativamente simples constatar que, sob as hipóteses com as quais trabalhamos, a aplicação $\mathbf{G}_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathbb{S}^2$ é diferenciável. Adiante, nos interessaremos pela aplicação diferencial $d\mathbf{G}_{\mathcal{S}}$ da aplicação $\mathbf{G}_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathbb{S}^2$, pois ela nos levará a uma importante noção de curvatura para cada ponto de $\mathcal{S}$.

Por ora, iremos apenas provar que $\mathbf{G}_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathbb{S}^2$, definida em (37.74), é independente do sistema de coordenadas $\boldsymbol{\varphi} : U \to V$ adotado em uma vizinhança de cada ponto da superfície $\mathcal{S}$.

Considere-se uma segunda carta local de coordenadas $\boldsymbol{\varphi}' : U \to V'$, com $V \cap V' \neq \emptyset$. A função de transição $H := \boldsymbol{\varphi}'^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}$ está definida como aplicação de $U \cap \boldsymbol{\varphi}^{-1}\big(V \cap V'\big)$ em $U' \cap \boldsymbol{\varphi}'^{-1}\big(V \cap V'\big)$ e rege a mudança de coordenadas $(u,\ v) \mapsto (u',\ v')$. Conforme nossa hipótese sobre a orientabilidade de $\mathcal{S}$, assumiremos que o Jacobiano dessa transformação seja positivo[17]. Em tais pontos podemos podemos escrever, pela regra da cadeia,

$$\boldsymbol{\varphi}_u \;=\; \boldsymbol{\varphi}'_{u'}\frac{\partial u'}{\partial u} + \boldsymbol{\varphi}'_{v'}\frac{\partial v'}{\partial u} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\varphi}_v \;=\; \boldsymbol{\varphi}'_{u'}\frac{\partial u'}{\partial v} + \boldsymbol{\varphi}'_{v'}\frac{\partial v'}{\partial v}\;,$$

donde obtemos imediatamente

$$\boldsymbol{\varphi}_u \times \boldsymbol{\varphi}_v \;=\; \boldsymbol{\varphi}'_{u'} \times \boldsymbol{\varphi}'_{v'}\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}\right)\;,$$

como facilmente se verifica. O fator entre parênteses na última linha é o Jacobiano da transformação $(u,\ v) \mapsto (u',\ v')$ e é positivo, por hipótese. Assim, esse fator cancela-se em (37.73), levando-nos à conclusão que $\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(u,\ v\big) = \mathbf{N}'_{\mathcal{S}}\big(u',\ v'\big)$ e, portanto,

$$\mathbf{N}_{\mathcal{S}} \;=\; \mathbf{N}'_{\mathcal{S}} \circ \boldsymbol{\varphi}' \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}\;,$$

o que, por (37.74), implica a desejada invariância de $\mathbf{G}_{\mathcal{S}}$ em $V \cap V'$.

• **A noção de curvatura normal**

Seja $I \ni s \mapsto \mathbf{y}(s) \in \mathcal{S}$, com I sendo um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, uma curva regular parametrizada por seu comprimento de arco s. Por simplicidade, vamos considerá-la inteiramente contida em no aberto $V \subset \mathcal{S}$. Naturalmente, podemos considerá-la como uma curva regular em $\mathbb{R}^3$: $I \ni s \mapsto \mathbf{y}(s) = \boldsymbol{\varphi}\big(u(s),\ v(s)\big) \in \mathbb{R}^3$, sendo $s \mapsto \boldsymbol{\varphi}^{-1}\big(\mathbf{y}(s)\big) = \big(u(s),\ v(s)\big)$ a "imagem" dessa curva em U.

O vetor tangente à curva, $\mathbf{t}(s) := \mathbf{y}'(s)$, pertence, naturalmente, ao espaço tangente à superfície $\mathcal{S}$ no ponto $\mathbf{y}(s)$ e podemos escrevê-lo como combinação linear dos vetores $\boldsymbol{\varphi}_u\big(u(s),\ v(s)\big)$ e $\boldsymbol{\varphi}_v\big(u(s),\ v(s)\big)$.

Seja $\mathbf{n}(s) = \boldsymbol{\kappa}(s)^{-1}\mathbf{t}'(s)$ o vetor normal principal à curva em um ponto $p \equiv \boldsymbol{\varphi}\big(u(s),\ v(s)\big) \in \mathcal{S}$. Esse vetor possui uma componente na direção normal a $\mathcal{S}$ no ponto p e outra no plano tangente a $\mathcal{S}$ no ponto p. Estamos no que segue especialmente interessados na componente normal a $\mathcal{S}$, pois essa nos traz informações sobre a *curvatura* da própria superfície. A componente tangencial será relevante em nossa discussão sobre curvas geodésicas, na Seção 37.2.6, página 2068.

Escrevemos $\mathbf{t}'(s) = \mathbf{k}_n(s) + \mathbf{k}_t(s)$, com $\mathbf{k}_n := \big(\mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(u(s),\ v(s)\big)\big)\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(u(s),\ v(s)\big)$ sendo a componente de $\mathbf{t}'(s)$ na direção normal à superfície e $\mathbf{k}_t$ sendo a componente na direção tangencial à superfície. Escrevemos

$$\mathbf{k}_n(s) \;=:\; \boldsymbol{\kappa}_n(s)\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(u(s),\ v(s)\big)\;,$$

definindo assim a chamada *curvatura normal* $\boldsymbol{\kappa}_n(s)$. A componente de $\mathbf{n}(s)$ normal a $\mathcal{S}$ no ponto p é, portanto,

$$\big(\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(u(s),\ v(s)\big)\big)\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(u(s),\ v(s)\big) \;=\; \frac{\boldsymbol{\kappa}_n(s)}{\boldsymbol{\kappa}(s)}\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(u(s),\ v(s)\big)\;,$$

ou seja,

$$\frac{\boldsymbol{\kappa}_n(s)}{\boldsymbol{\kappa}(s)} \;=\; \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(u(s),\ v(s)\big)\;.$$

Como $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(u(s),\ v(s)\big)$ são ortogonais, ou seja, satisfazem $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(u(s),\ v(s)\big) = 0$, obtemos, por diferenciação

$$\mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(u(s),\ v(s)\big) + \mathbf{t}(s) \cdot \frac{d}{ds}\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(u(s),\ v(s)\big) \;=\; 0\;,$$

donde se extrai

$$\boldsymbol{\kappa}_n(s) \;=\; -\mathbf{t}(s) \cdot \frac{d}{ds}\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(u(s),\ v(s)\big) \;=\; -\mathbf{y}'(s) \cdot \left(\frac{d}{ds}\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(u(s),\ v(s)\big)\right)\;. \tag{37.75}$$

As várias definições e ideias acima estão na origem de diversos desenvolvimentos sobre as noções de curvatura em superfícies e variedades.

[17] Se não for, basta trocar o rótulo das coordenadas, $u' \leftrightarrow v'$.

37.2.2 A Primeira e a Segunda Formas Fundamentais

Consideremos, como antes, uma curva regular $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ em $\mathcal{S}$, com o parâmetro t em algum intervalo aberto adequado de $\mathbb{R}$. Se parametrizada em termos do seu comprimento de arco, a curva se expressa como $s \mapsto \mathbf{y}(s)$, sendo que identificamos $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{y}\big(s(t)\big)$ para todo t, onde, como em (37.3), página 2022,

$$s(t) \;\equiv\; \theta^{-1}(t) \;:=\; \int_a^t \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(u) \cdot \dot{\mathbf{x}}(u)}\, du\;.$$

Nosso objetivo é usar a expressão (37.75) para expressar a curvatura normal em termos do parâmetro t e de $\mathbf{x}(t)$ e suas derivadas.

O primeiro passo importante é reescrever adequadamente a relação (37.75), acima. Comecemos explicitando os fatores que ocorrem no lado direito de (37.75). Como $\mathbf{y}(s) = \boldsymbol{\varphi}\big(u(s),\ v(s)\big)$, temos $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}\big(u_c(t),\ v_c(t)\big)$, onde definimos $u_c(t) := u\big(s(t)\big)$ e $v_c(t) := v\big(s(t)\big)$. Com isso,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \;=\; \boldsymbol{\varphi}_u\big(u_c(t),\ v_c(t)\big)\,\dot{u}_c(t) + \boldsymbol{\varphi}_v\big(u_c(t),\ v_c(t)\big)\,\dot{v}_c(t) \qquad \text{e} \tag{37.76}$$

$$\mathbf{y}'(s) \;=\; \boldsymbol{\varphi}_u\big(u(s),\ v(s)\big)\,u'(s) + \boldsymbol{\varphi}_v\big(u(s),\ v(s)\big)\,v'(s)\;, \tag{37.77}$$

sendo que, pela regra da cadeia,

$$\dot{u}_c(t) \;=\; u'\big(s(t)\big)\sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}\;, \tag{37.78}$$

$$\dot{v}_c(t) \;=\; v'\big(s(t)\big)\sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}\;. \tag{37.79}$$

Vemos por (37.6), página 2022, que

$$\mathbf{y}'\big(s(t)\big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}}\dot{\mathbf{x}}(t)\;. \tag{37.80}$$

Por outro lado, tem-se

$$\left(\frac{d}{ds}\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(u(s),\ v(s)\big)\right)(s) \;=\; (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u\big(u(s),\ v(s)\big)\,u'(s) + (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v\big(u(s),\ v(s)\big)\,v'(s)\;. \tag{37.81}$$

Usando (37.78)-(37.79), segue que

$$\left(\frac{d}{ds}\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(u(s),\ v(s)\big)\right)\big(s(t)\big) \;=\; \Big[(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u\big(u_c(t),\ v_c(t)\big)\,\dot{u}_c(t) + (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v\big(u_c(s),\ v_c(s)\big)\,\dot{u}_c(t)\Big]\frac{1}{\sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}}\;. \tag{37.82}$$

Reunindo as igualdades (37.80) e (37.82), temos por (37.75),

$$\boldsymbol{\kappa}_n\big(s(t)\big) \;=\; -\frac{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \Big[(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u\big(u_c(t),\ v_c(t)\big)\,\dot{u}_c(t) + (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v\big(u_c(t),\ v_c(t)\big)\,\dot{u}_c(t)\Big]}{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}\;,$$

ou seja, usando (37.76),

$$\boldsymbol{\kappa}_n\big(s(t)\big) \;=\; -\frac{\big(\dot{u}_c(t)\big)^2\boldsymbol{\varphi}_u \cdot (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u + \big(\dot{u}_c(t)\dot{v}_c(t)\big)\Big(\boldsymbol{\varphi}_u \cdot (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v + \boldsymbol{\varphi}_v \cdot (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u\Big) + \big(\dot{v}_c(t)\big)^2\boldsymbol{\varphi}_v \cdot (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v}{\big(\dot{u}_c(t)\big)^2\boldsymbol{\varphi}_u \cdot \boldsymbol{\varphi}_u + 2\big(\dot{u}_c(t)\dot{v}_c(t)\big)\boldsymbol{\varphi}_u \cdot \boldsymbol{\varphi}_v + \big(\dot{v}_c(t)\big)^2\boldsymbol{\varphi}_v \cdot \boldsymbol{\varphi}_v}\;. \tag{37.83}$$

Acima, para não carregar as expressões, omitimos referência aos pontos $\boldsymbol{\varphi}(u,\ v) \in \mathcal{S}$ e $(u,\ v) \in U$ onde as diversas quantidades são calculadas.

Como $\boldsymbol{\varphi}_u$ e $\boldsymbol{\varphi}_v$ são vetores tangentes a $\mathcal{S}$, ambos são ortogonais a $\mathbf{N}_{\mathcal{S}}$, ou seja, satisfazem $\boldsymbol{\varphi}_u \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} = 0$ e $\boldsymbol{\varphi}_v \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} = 0$. Diferenciando ambas as identidades em relação a u e v, obtemos

$$\boldsymbol{\varphi}_u \cdot (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u \;=\; -\boldsymbol{\varphi}_{uu} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}}\;,\quad \boldsymbol{\varphi}_u \cdot (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v \;=\; -\boldsymbol{\varphi}_{uv} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}}\;,\quad \boldsymbol{\varphi}_v \cdot (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v \;=\; -\boldsymbol{\varphi}_{vv} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}}\;,\quad \boldsymbol{\varphi}_v \cdot (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u \;=\; -\boldsymbol{\varphi}_{vu} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}}\;. \tag{37.84}$$

Disso se extrai

$$\boldsymbol{\varphi}_u \cdot (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v \;=\; -\boldsymbol{\varphi}_{vu} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} \;=\; \boldsymbol{\varphi}_v \cdot (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u \,, \tag{37.85}$$

identidade que também usaremos adiante. Assim, podemos escrever

$$\boldsymbol{\kappa}_n\big(s(t)\big) \;=\; \frac{\big(\dot{u}_c(t)\big)^2 \boldsymbol{\varphi}_{uu} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} + 2\big(\dot{u}_c(t)\dot{v}_c(t)\big)\boldsymbol{\varphi}_{uv} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} + \big(\dot{v}_c(t)\big)^2 \boldsymbol{\varphi}_{vv} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}}}{\big(\dot{u}_c(t)\big)^2 \boldsymbol{\varphi}_u \cdot \boldsymbol{\varphi}_u + 2\big(\dot{u}_c(t)\dot{v}_c(t)\big)\boldsymbol{\varphi}_u \cdot \boldsymbol{\varphi}_v + \big(\dot{v}_c(t)\big)^2 \boldsymbol{\varphi}_v \cdot \boldsymbol{\varphi}_v} \,. \tag{37.86}$$

O denominador e o numerador dessa expressão recebem na literatura uma denominação especial: são chamados de *primeira e segunda formas fundamentais da superfície* $\mathcal{S}$, denotadas por I e II, respectivamente: para $(u,\ v) \in U$ e $\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ (o espaço tangente $\mathsf{T}_{(u,\,v)}U$ de U no ponto $(u,\ v)$), definimos as formas bilineares

$$\mathsf{I} \,\equiv\, \mathsf{I}\big(u,\ v,\ \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right)\big) \;:=\; \alpha^2\, \boldsymbol{\varphi}_u \cdot \boldsymbol{\varphi}_u + 2\alpha\beta\, \boldsymbol{\varphi}_u \cdot \boldsymbol{\varphi}_v + \beta^2\, \boldsymbol{\varphi}_v \cdot \boldsymbol{\varphi}_v \tag{37.87}$$

$$= \quad \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_u \cdot \boldsymbol{\varphi}_u & \boldsymbol{\varphi}_u \cdot \boldsymbol{\varphi}_v \\ \boldsymbol{\varphi}_v \cdot \boldsymbol{\varphi}_u & \boldsymbol{\varphi}_v \cdot \boldsymbol{\varphi}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \,, \tag{37.88}$$

$$\mathsf{II} \,\equiv\, \mathsf{II}\big(u,\ v,\ \left(\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right)\big) \;:=\; \alpha^2\, \boldsymbol{\varphi}_{uu} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} + 2\alpha\beta\, \boldsymbol{\varphi}_{uv} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} + \beta^2\, \boldsymbol{\varphi}_{vv} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} \tag{37.89}$$

$$= \quad \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{uu} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} & \boldsymbol{\varphi}_{uv} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} \\ \boldsymbol{\varphi}_{vu} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} & \boldsymbol{\varphi}_{vv} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \,. \tag{37.90}$$

As formas I e II são claramente formas bilineares simétricas. A forma I é positiva pois I é $\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t) \geq 0$ para uma trajetória com $\dot{u}_c(t) = \alpha$ e $\dot{v}_c(t) = \beta$ em algum ponto. e, portanto, o sinal de $\boldsymbol{\kappa}_n$ é determinado pelo sinal da forma II calculada na curva correspondente.

Vale observar que (supondo $\dot{u}_c \neq 0$), temos por (37.86)

$$\boldsymbol{\kappa}_n\big(s(t)\big) \;=\; \frac{\mathsf{II}}{\mathsf{I}} \;=\; \frac{\boldsymbol{\varphi}_{uu} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} + 2\,(\dot{v}_c/\,\dot{u}_c)\,\boldsymbol{\varphi}_{uv} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} + (\dot{v}_c/\,\dot{u}_c)^2\,\boldsymbol{\varphi}_{vv} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}}}{\boldsymbol{\varphi}_u \cdot \boldsymbol{\varphi}_u + 2\,(\dot{v}_c/\,\dot{u}_c)\,\boldsymbol{\varphi}_u \cdot \boldsymbol{\varphi}_v + (\dot{v}_c/\,\dot{u}_c)^2\,\boldsymbol{\varphi}_v \cdot \boldsymbol{\varphi}_v} \tag{37.91}$$

e similarmente para o caso $\dot{v}_c \neq 0$. Essa relação mostra que a curvatura normal em um dado ponto depende: $1^{\underline{o}}$ do ponto em questão (através da dependência com $u_c(t)$ e $v_c(t)$); $2^{\underline{o}}$ da razão $\dot{v}_c(t)/\,\dot{u}_c(t)$. Esse último fato significa que $\boldsymbol{\kappa}_n$ não depende da parametrização da curva (para uma outra parametrização t' a razão $\dot{v}_c(t)/\,\dot{u}_c(t)$ é a mesma), mas depende apenas da inclinação, no ponto em questão, da curva considerada, a curvatura normal $\boldsymbol{\kappa}_n$ sendo constante, portanto, em classes de equivalência de curvas como mesmo vetor tangente no ponto considerado.

• **A primeira forma fundamental e o tensor métrico induzido**

É agora um tanto redundante, porém, necessário, apontarmos para a associação entre a primeira forma fundamental e o tensor métrico induzido $\mathbf{g}$, apresentado em (37.68)-(37.69), página 2039, definido no espaço tangente a $\mathcal{S}$. Para um dado ponto com coordenadas u e v, temos

$$\mathsf{I} \,\equiv\, \mathsf{I}\big(u,\ v,\ \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right)\big) \;=\; \mathbf{g}\big(\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right)\big) \;=\; (\,\alpha\ \beta\,)\mathbf{G}\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right) . \tag{37.92}$$

Recordar que

$$\mathbf{G} \,\equiv\, \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{G}^{-1} \,\equiv\, \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2} \begin{pmatrix} \mathrm{G} & -\mathrm{F} \\ -\mathrm{F} & \mathrm{E} \end{pmatrix} \,. \tag{37.93}$$

• **O significado geométrico da segunda forma fundamental. A quádrica osculante**

A segunda forma fundamental pode ser reescrita de forma mais adequada introduzindo-se a matriz[18]

$$\mathbf{J} \,\equiv\, \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{f} \\ \mathrm{f} & \mathrm{g} \end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{uu} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} & \boldsymbol{\varphi}_{uv} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} \\ \boldsymbol{\varphi}_{vu} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} & \boldsymbol{\varphi}_{vv} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} \end{pmatrix} . \tag{37.94}$$

Vemos, com ela que (37.90), similarmente a (37.92), pode ser reescrita em forma matricial como

$$\mathsf{II}\,(u,\ v,\ \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right)) \;=\; (\,\alpha\ \beta\,)\mathbf{J}\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right) .$$

Para clarearmos o significado geométrico da segunda forma fundamental, tomemos um ponto genérico $p \in \mathcal{S}$ cujas coordenadas, sem perda de generalidade, são $u = v = 0$, ou seja, $p = \boldsymbol{\varphi}(0,\ 0)$. Consideremos, seguindo [519], a expansão em Taylor até segunda ordem de $\boldsymbol{\varphi}$ em torno desse ponto:

$$\boldsymbol{\varphi}(u,\ v) \;=\; \boldsymbol{\varphi}(0,\ 0) + \boldsymbol{\varphi}_u(0,\ 0)u + \boldsymbol{\varphi}_v(0,\ 0)v + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}_{uu}(0,\ 0)u^2 + \boldsymbol{\varphi}_{uv}(0,\ 0)uv + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}_{vv}(0,\ 0)v^2 + \mathcal{O}(3) \,,$$

sendo $\mathcal{O}(3)$ os termos remanescentes de terceira ordem e superiores. Os três primeiros termos $\boldsymbol{\varphi}(0,\ 0) + \boldsymbol{\varphi}_u(0,\ 0)u + \boldsymbol{\varphi}_v(0,\ 0)v$ definem o plano tangente a $\mathcal{S}$ no ponto $p = \boldsymbol{\varphi}(0,\ 0)$. Assim, os demais termos representam o desvio da superfície desse plano tangente na vizinhança de p. Consideremos, então, a projeção desse desvio na direção da normal $\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(0,\ 0\big)$ à superfície em p:

$$\rho(u,\ v) \;:=\; \Big(\boldsymbol{\varphi}(u,\ v) - \boldsymbol{\varphi}(0,\ 0)\Big) \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(0,\ 0\big) \tag{37.95}$$

$$= \quad \Big(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}_{uu}(0,\ 0)u^2 + \boldsymbol{\varphi}_{uv}(0,\ 0)uv + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}_{vv}(0,\ 0)v^2\Big) \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(0,\ 0\big) + \mathcal{O}(3) \tag{37.96}$$

$$= \quad \frac{1}{2}\Big(eu^2 + 2\mathrm{f}uv + gv^2\Big) + \mathcal{O}(3) \,, \tag{37.97}$$

Reconhecemos que os coeficientes dos termos quadráticos em u e v são precisamente os da segunda forma fundamental (comparar com (37.94)). Vemos assim que a segunda forma fundamental fornece informações sobre como a superfície se curva, até em segunda ordem nos parâmetros, em relação a um plano tangente em um dado ponto.

A *superfície quádrica*

$$\boldsymbol{\varphi}(0,\ 0) + \boldsymbol{\varphi}_u(0,\ 0)u + \boldsymbol{\varphi}_v(0,\ 0)v + \frac{1}{2}\Big(eu^2 + 2\mathrm{f}uv + gv^2\Big)\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\big(0,\ 0\big) \,, \qquad u,\ v \in \mathbb{R} \,, \tag{37.98}$$

é denominada *superfície quádrica osculante*, ou simplesmente a *quádrica osculante*, à superfície no ponto $\boldsymbol{\varphi}(0,\ 0)$ e seu significado é análogo ao do *círculo osculante*, introduzido à página 2025, em nossa discussão sobre curvas: ele representa a melhor aproximação quadrática a uma superfície em relação a um plano de tangência.

Para acrescentarmos mais informações relevantes sobre a quádrica osculante a uma superfície em um dado ponto, precisamos introduzir as noções de curvaturas principais e de curvatura Gaussiana, o que faremos, após preparativos, na Seção 37.2.3.2, página 2046 e, em particular, página 2050.

• **Nota histórica**

As noções de *primeira forma fundamental* e *segunda forma fundamental*, e essas denominações, provêm da já citada obra de Gauss [183, 184]. Especificamente, porém, a ideia subjacente à noção de *primeira forma fundamental*, ou seja, a noção de métrica em superfícies curvas, tem provavelmente muitos antecessores. A noção de tensor métrico começou a tomar forma com a célebre apresentação de Riemann de suas ideias geométricas [445], em 1868.

[18] Assim como no caso do tensor métrico, ocorrem na literatura duas notações para os elementos de matriz de $\mathbf{J}$, que são denotados como $J_{ij},\ i,\ j \in \{1,\ 2\}$ ou como e, f e g, tal como disposto em (37.94), Faremos uso de ambas as notações.

37.2.3 O Mapa de Gauss e sua Diferencial. O Operador de Forma

Façamos neste momento algumas considerações sobre o mapa de Gauss, introduzido em (37.74). Trata-se de aplicação diferenciável $\mathbf{G}_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathbb{S}^2$ entre as variedades $\mathcal{S}$ e $\mathbb{S}^2$ e, portanto, sua diferencial $d\mathbf{G}_{\mathcal{S}}$ mapeia os respectivos espaços tangentes: $d\mathbf{G}_{\mathcal{S}} : \mathsf{T}\mathcal{S} \to \mathsf{T}\mathbb{S}^2$. Essa relação, porém, pode ser encarada de outra forma mais conveniente aos propósitos que seguem. Como $\mathbf{G}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{G}_{\mathcal{S}} = 1$, segue que $\mathbf{G}_{\mathcal{S}} \cdot d\mathbf{G}_{\mathcal{S}} = 0$. Assim, para $p \in \mathcal{S}$ e $\mathrm{v} \in \mathsf{T}_p\mathcal{S}$, arbitrário, segue que $(\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p \cdot \Big((d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p \mathrm{v}\Big) = 0$. Assim, $(d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p \mathrm{v}$ é ortogonal ao vetor unitário $(\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p$, normal a $\mathcal{S}$ em p. Mas isso significa dizer que podemos encarar $(d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p \mathrm{v}$ como um elemento do espaço tangente a $\mathcal{S}$ em p e, portanto, podemos ver $(d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p$ como uma aplicação de $\mathsf{T}_p\mathcal{S}$ em si mesmo e $d\mathbf{G}_{\mathcal{S}} : \mathsf{T}\mathcal{S} \to \mathsf{T}\mathcal{S}$.

De forma análoga podemos considerar $d\mathbf{N}_{\mathcal{S}}$ como uma aplicação entre $\mathsf{T}U \simeq \mathbb{R}^2$ e $\mathsf{T}\mathcal{S}$. Se, como antes, u e v denotam coordenadas Cartesianas em U, temos

$$d\mathbf{N}_{\mathcal{S}} \;=\; \begin{pmatrix} (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u & (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v \end{pmatrix} ,$$

de sorte que se $\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right)$, com $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, é um vetor de T_pU, para algum $p \in \mathcal{S}$, temos

$$d\mathbf{N}_{\mathcal{S}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \;=\; \alpha(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u + \beta(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v \, .$$

O estudante deve notar que os vetores $(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u$ e $(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v$ são, de fato, elementos do espaço tangente à superfície no ponto considerado. Isso é uma decorrência do fato que $\mathbf{N}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{S}} = 1$, que implica $\mathbf{N}_{\mathcal{S}} \cdot (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u = 0$ e $\mathbf{N}_{\mathcal{S}} \cdot (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v = 0$, indicando que $(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u$ e $(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v$ são ortogonais a $\mathbf{N}_{\mathcal{S}}$, que é normal à superfície.

A proposição a seguir enuncia um fato de importância fundamental para o que segue:

Proposição 37.1 *Em cada ponto $p \in \mathcal{S}$ a aplicação diferencial $(d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p : \mathsf{T}_p\mathcal{S} \to \mathsf{T}_p\mathcal{S}$ é autoadjunta em relação ao produto escalar em $\mathsf{T}_p\mathcal{S}$.* □

Prova. Seja V uma vizinhança aberta de p em $\mathcal{S}$ e, como antes $\boldsymbol{\varphi} : U \to V$ uma carta local com $U \subset \mathbb{R}^2$, aberto. Assumiremos que $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(p) = (0,\ 0)$.

Seja I um intervalo aberto da reta real, com $0 \in I$. Seja $\alpha : I \to U$ uma curva regular em U e, para $t \in I$, sejam $\mathrm{a}(t) \coloneqq \boldsymbol{\varphi}\big(\alpha(t)\big)$ sua imagem em V. Vamos assumir que $\mathrm{a}(0) = p$.

Consideremos $\mathbf{G}_{\mathcal{S}}\big(\mathrm{a}(t)\big)$. Diferenciando essa expressão em t, teremos

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G}_{\mathcal{S}}\big(\mathrm{a}(t)\big) \;=\; (d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_{\mathrm{a}(t)}\dot{\mathrm{a}}(t) \;=\; (d\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_{\alpha(t)}(d\boldsymbol{\varphi})^{-1}_{\alpha(t)}\dot{\mathrm{a}}(t) \, ,$$

pois, por (37.74), $(d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p \;=\; (d\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}(p)} d(\boldsymbol{\varphi})^{-1})_p$. Agora, $(d\boldsymbol{\varphi})^{-1}_{\alpha(t)}\dot{\mathrm{a}}(t) = \dot{\alpha}(t)$ e, portanto,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G}_{\mathcal{S}}\big(\mathrm{a}(t)\big) \;=\; (d\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_{\alpha(t)}\dot{\alpha}(t) \, .$$

Com isso, obtivemos a igualdade

$$(d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_{\mathrm{a}(t)}\dot{\mathrm{a}}(t) \;=\; (d\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_{\alpha(t)}\dot{\alpha}(t) \, . \tag{37.99}$$

Consideremos as coordenadas Cartesianas u e v de U, introduzidas anteriormente. Vamos agora escolher a curva $\alpha(t) = \left(\begin{smallmatrix} u(t) \\ v(t) \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Segue imediatamente de (37.99) que, para $t = 0$,

$$(d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p\boldsymbol{\varphi}_u \;=\; (d\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_{(0,\,0)}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;=\; (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u \, , \tag{37.100}$$

com o lado direito calculado no ponto $(u,\ v) = (0,\ 0)$ de U, que omitiremos doravante. Analogamente, para a curva $\alpha(t) = \left(\begin{smallmatrix} u(t) \\ v(t) \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ t \end{smallmatrix}\right)$, temos

$$(d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p\boldsymbol{\varphi}_v \;=\; (d\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_{(0,\,0)}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \;=\; (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v \, . \tag{37.101}$$

Como já comentamos, os vetores $\boldsymbol{\varphi}_u$ e $\boldsymbol{\varphi}_v$ formam uma base em $\mathsf{T}_p\mathcal{S}$. Além disso, devido à simetria do produto escalar, valem evidentemente as relações $\boldsymbol{\varphi}_u \cdot \Big((d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p\boldsymbol{\varphi}_u\Big) = \Big((d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p\boldsymbol{\varphi}_u\Big) \cdot \boldsymbol{\varphi}_u$ e $\boldsymbol{\varphi}_v \cdot \Big((d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p\boldsymbol{\varphi}_v\Big) = \Big((d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p\boldsymbol{\varphi}_v\Big) \cdot \boldsymbol{\varphi}_v$. Assim, para provarmos que $(d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p$ é autoadjunta é suficiente mostrarmos que

$$\boldsymbol{\varphi}_v \cdot \Big((d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p\boldsymbol{\varphi}_u\Big) \;=\; \boldsymbol{\varphi}_u \cdot \Big((d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p\boldsymbol{\varphi}_v\Big) \, . \tag{37.102}$$

Agora,

$$\boldsymbol{\varphi}_v \cdot \Big((d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p\boldsymbol{\varphi}_u\Big) \overset{(37.100)}{=} \boldsymbol{\varphi}_v \cdot (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u \overset{(37.85)}{=} \boldsymbol{\varphi}_u \cdot (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v \overset{(37.101)}{=} \boldsymbol{\varphi}_u \cdot \Big((d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p\boldsymbol{\varphi}_v\Big) \, ,$$

demonstrando (37.102) e completando a prova da Proposição 37.1. ■

Na literatura, a aplicação diferencial $d\mathbf{G}_{\mathcal{S}}$ é por vezes denominada *operador de forma*[19], ou *aplicação de Weingarten*[20], nomenclatura aparentemente introduzida por Blaschke[21]. Advertimos que alguns autores definem o operador de forma como $-d\mathbf{G}_{\mathcal{S}}$. Veremos no que segue a importante relação entre o operador de forma e a segunda forma fundamental.

37.2.3.1 O Operador de Forma e a Segunda Forma Fundamental

A expressão (37.89), página 2042, para a segunda forma fundamental II pode ser reescrita de diversas formas e apresentaremos uma que a relaciona ao operador de forma $d\mathbf{G}_{\mathcal{S}}$. Usando novamente as relações (37.84), temos de (37.89)

$$\begin{aligned} \mathrm{II} \;&=\; (\dot{u}_c(t))^2\,\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\mathbf{N}_{\mathcal{S}} + 2\,(\dot{u}_c(t)\dot{v}_c(t))\,\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\mathbf{N}_{\mathcal{S}} + (\dot{v}_c(t))^2\,\boldsymbol{\varphi}_{vv}\cdot\mathbf{N}_{\mathcal{S}} \\ &=\; -\Big[(\dot{u}_c(t))^2\,\boldsymbol{\varphi}_u\cdot(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u + (\dot{u}_c(t)\dot{v}_c(t))\,\boldsymbol{\varphi}_u\cdot(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v + (\dot{u}_c(t)\dot{v}_c(t))\,\boldsymbol{\varphi}_v\cdot(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u + (\dot{u}_c(t))^2\,\boldsymbol{\varphi}_v\cdot(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v\Big] \, . \end{aligned} \tag{37.103}$$

Observemos agora que, como $\mathbf{N}_{\mathcal{S}} = \mathbf{G}_{\mathcal{S}} \circ \boldsymbol{\varphi}$ (por (37.74)), tem-se

$$(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u \;=\; \big(d\mathbf{G}_{\mathcal{S}}\big)\boldsymbol{\varphi}_u \qquad \text{e} \qquad (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v \;=\; \big(d\mathbf{G}_{\mathcal{S}}\big)\boldsymbol{\varphi}_v \, , \tag{37.104}$$

sendo $d\mathbf{G}_{\mathcal{S}} : \mathsf{T}\mathcal{S} \to \mathsf{T}\mathbb{S}^2 \simeq \mathsf{T}\mathcal{S}$ a aplicação diferencial do mapa de Gauss $\mathbf{G}_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathbb{S}^2$, introduzido anteriormente (vide (37.74), página 2039)[22]. Inserindo essas relações no lado direito de (37.103) e recordando que os vetores tangentes a $\mathcal{S}$ são dados por $\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{\varphi}_u\dot{u}_c(t) + \boldsymbol{\varphi}_v\dot{v}_c(t)$, obtemos

$$\mathrm{II} \;=\; -\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\big((d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})\dot{\mathbf{x}}(t)\big) \, . \tag{37.105}$$

Verifique! Com isso, temos de (37.91),

$$\boldsymbol{\kappa}_n\big(s(t)\big) \;=\; \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} \;=\; -\frac{\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\big((d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})\dot{\mathbf{x}}(t)\big)}{\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)} \, , \tag{37.106}$$

expressão essa que fornece, em termos do operador de forma, a curvatura normal em um ponto $p \in \mathcal{S}$ de uma curva que passa por p com vetor tangente $\dot{\mathbf{x}}$.

• **Teorema de Meusnier**

Há diversas consequências da expressão (37.106) que exploraremos adiante. Por ora, mencionemos o seguinte teorema, histórica e conceitualmente relevante, devido a Meusnier[23], que o anunciou em 1776 e publicou em 1785.

Teorema 37.1 (Teorema de Meusnier) *Curvas em $\mathcal{S}$ passando por um ponto $p \in \mathcal{S}$ e que possuam a mesma reta tangente nesse ponto têm a mesma curvatura normal em p.* □

Prova. É evidente de (37.106) que $\boldsymbol{\kappa}_n$ depende apenas dos vetores tangentes normalizados $\pm\dot{\mathbf{x}}/\|\dot{\mathbf{x}}\|$, sendo invariante pela troca de sinal. Assim, dada uma curva em $\mathcal{S}$ que passa em um determinado ponto $p \in \mathcal{S}$, a curvatura normal $\boldsymbol{\kappa}_n$ depende em p apenas da reta tangente à curva nesse ponto. ■

[19] Essa nomenclatura é esclarecida pelo fato de a "forma" de uma superfície ser intuitivamente associada à sua curvatura em cada ponto.
[20] Julius Weingarten (1836–1910).
[21] Wilhelm Johann Eugen Blaschke (1885–1962).
[22] A noção de aplicação diferencial entre variedades foi introduzida na Seção 34.2.4.1, página 1837.
[23] Jean Baptiste Marie Charles Meusnier de la Place (1754–1793).

37.2.3.2 As Curvaturas Principais. A Curvatura Gaussiana e a Curvatura Média

Vamos agora apresentar algumas das definições centrais deste capítulo: as noções de curvaturas principais, curvatura Gaussiana e curvatura média.

Como vimos, em cada ponto p da superfície $\mathcal{S}$, o operador de forma $(d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p$ é um operador simétrico no espaço tangente $\mathsf{T}_p\mathcal{S} \simeq \mathbb{R}^2$ e pode, portanto, ser visto como uma matriz simétrica 2×2. Como tal, possui dois autovetores $\boldsymbol{\kappa}_p^1$ e $\boldsymbol{\kappa}_p^2$, ambos reais, com autovetores v_p^1 e $v_p^2 \in \mathsf{T}_p\mathcal{S}$, normalizados (ou seja, tais que $v_p^1 \cdot v_p^1 = 1$ e $v_p^2 \cdot v_p^2 = 1$) que devem (devido à simetria) ser ortogonais entre si: $v_p^1 \cdot v_p^2 = 0$.

Os autovalores $\boldsymbol{\kappa}_p^1$ e $\boldsymbol{\kappa}_p^2$ são denominados *curvaturas principais* de $\mathcal{S}$ em p. As direções definidas por v_p^1 e por v_p^2 são denominadas *direções principais de curvatura* e são, como comentamos, ortogonais entre si.

A grandeza

$$\boldsymbol{\kappa}_p^G \;:=\; \det\big((d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p\big) \;=\; \boldsymbol{\kappa}_p^1\boldsymbol{\kappa}_p^2 \tag{37.107}$$

é denominada *curvatura Gaussiana* (ou *curvatura de Gauss*) de $\mathcal{S}$ em p e a grandeza

$$\boldsymbol{\kappa}_p^m \;:=\; \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big((d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p\big) \;=\; \frac{\boldsymbol{\kappa}_p^1 + \boldsymbol{\kappa}_p^2}{2} \tag{37.108}$$

é denominada *curvatura média* de $\mathcal{S}$ em p.

Essas diferentes noções de curvatura são importantes no estudo de superfícies, especialmente, como discutiremos, a curvatura Gaussiana.

Segundo a definição (37.106), página 2045, a curvatura normal de uma curva que passa por um ponto $p \in \mathcal{S}$ com vetor tangente $w \in \mathsf{T}_p\mathcal{S}$ (assumindo normalização: $w \cdot w = 1$) é $\boldsymbol{\kappa}_n \;=\; w \cdot \big((d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p w\big)$. Pelo Teorema Espectral (vide Seção 10.4, página 559), aplicado ao operador simétrico $(d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p$, podemos escrever

$$(\boldsymbol{\kappa}_n)_p \;=\; \boldsymbol{\kappa}_p^1\big(w \cdot v_p^1\big)^2 + \boldsymbol{\kappa}_p^2\big(w \cdot v_p^2\big)^2 \,. \tag{37.109}$$

Como $\big(w \cdot v_p^1\big)^2 + \big(w \cdot v_p^2\big)^2 = 1$ (devido ao fato de $\{v_p^1,\, v_p^2\}$ compor uma base ortonormal em $\mathsf{T}_p\mathcal{S}$ e w ser normalizado), vemos que $\boldsymbol{\kappa}_n$ é uma combinação linear convexa das curvaturas principais $\boldsymbol{\kappa}_p^1$ e $\boldsymbol{\kappa}_p^2$.

Concluímos disso que a curvatura normal de qualquer curva em um dado ponto p está sempre no intervalo fechado definido pelas curvaturas principais em p, ou seja, $(\boldsymbol{\kappa}_n)_p \in [\boldsymbol{\kappa}_p^1,\, \boldsymbol{\kappa}_p^2]$. Aqui assumimos sem perda de generalidade que $\boldsymbol{\kappa}_p^1 \le \boldsymbol{\kappa}_p^2$. Fora isso, vemos também por (37.109) que a curvatura normal assume seus limites mínimo e máximo quando o vetor tangente w aponta nas direções principais de curvatura, que são ortogonais.

• **Classificação de pontos segundo a curvatura Gaussiana**

A curvatura Gaussiana e as curvaturas principais permitem classificar pontos da superfície bidimensional $\mathcal{S}$. Um ponto $p \in \mathcal{S}$ é dito ser

- *Planar*, se $(d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p = 0$. Um ponto é planar se e somente se suas duas curvaturas principais são nulas;
- *Elíptico*, se $\boldsymbol{\kappa}_p^G > 0$. Um ponto é elíptico se e somente se suas duas curvaturas principais são não nulas e têm o mesmo sinal;
- *Hiperbólico*, se $\boldsymbol{\kappa}_p^G < 0$. Um ponto é hiperbólico se e somente se suas duas curvaturas principais são não nulas e têm sinais opostos;
- *Parabólico*, se $\boldsymbol{\kappa}_p^G = 0$ com $(d\mathbf{G}_{\mathcal{S}})_p \neq 0$. Um ponto é parabólico se e somente se uma de suas curvaturas principais é nula e a outra é não nula.

Os pontos de um cilindro, por exemplo, são parabólicos.

Se as curvaturas principais de um ponto $p \in \mathcal{S}$ forem iguais o ponto é dito ser um *ponto umbílico*[24]. Um ponto umbílico, portanto, ou é elíptico ou planar. Todo ponto planar é umbílico.

Todos os pontos de uma esfera são elípticos e umbílicos (com $\boldsymbol{\kappa}_p^1 = \boldsymbol{\kappa}_p^2 > 0$ para todo p na esfera). Todos os pontos de um plano são planares e, portanto, umbílicos (com $\boldsymbol{\kappa}_p^1 = \boldsymbol{\kappa}_p^2 = 0$ para todo p no plano).

[24] Do Latim *umbilicus*: umbigo.

E. 37.4 *Exercício.* Fixemos $\alpha > 0$. Mostre que todos os pontos do paraboloide $z = \alpha u^2 + v^2$, com $u,\, v \in \mathbb{R}$, são elípticos. Quais dos seus pontos são umbílicos? E no caso $\alpha = 1$? O ponto de coordenadas $u = 0$ e $v = 0$ do hiperboloide $z = u^2 - v^2$, com $u,\, v \in \mathbb{R}$, é hiperbólico. O que se pode afirmar sobre os demais pontos? ✣

E. 37.5 *Exercício.* Considere-se a superfície definida por $z = u^3 - 3uv^2$, com $u,\, v \in \mathbb{R}$. Mostre que o ponto de coordenadas $u = 0$ e $v = 0$ dessa superfície é planar e, portanto, umbílico, com ambas as curvaturas principais nulas. Mostre que todos os demais pontos são hiperbólicos. Essa superfície é denominada *sela de macaco*. ✣

E. 37.6 *Exercício.* Um toro mergulhado em $\mathbb{R}^3$ possui pontos umbílicos? ✣

37.2.4 As Equações Fundamentais da Teoria de Superfícies

Para nos aprofundarmos em aspectos teóricos da teoria das superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ vamos agora apresentar dois conjuntos de equações, denominadas *equações de Weingarten* e *equações de Gauss* que permitem expressar certas grandezas geométricas associadas a uma superfície diretamente em termos de uma parametrização que a descreva. Elas expressam as derivadas em relação aos parâmetros u e v dos vetores $\boldsymbol{\varphi}_u$, $\boldsymbol{\varphi}_v$ e $\mathbf{N}_{\mathcal{S}}$, que compõem uma base no espaço ambiente $\mathbb{R}^3$ para cada ponto de $\mathcal{S}$.

Em um certo sentido, na teoria das superfícies essas equações equivalem às Fórmulas de Frenet-Serret para curvas, apresentadas na Seção 37.1.1, página 2025. Há, porém, diferenças entre os dois conjuntos de equações, como comentaremos alhures.

Trataremos primeiramente das equações de Weingarten[25], que as apresentou em 1861[26], para em seguida tratar das equações de Gauss, que historicamente precedem as de Weingarten, tendo surgido em cerca de 1827 [183, 184].

Essas equações de Weingarten e as de Gauss serão empregadas na dedução das relações de Gauss-Codazzi e Mainardi-Codazzi, na Seção 37.2.4.3, página 2052, as quais preparam a demonstração de um importante resultado: o chamado *Theorema Egregium* de Gauss, tratado na Seção 37.2.4.4, página 2055.

Para uma apresentação da história dos temas da corrente seção, vide [98].

37.2.4.1 As Equações de Weingarten

Fixemos um ponto $p \in \mathcal{S}$, com $p = \boldsymbol{\varphi}(u_0,\, v_0)$ para algum $(u_0,\, v_0) \in U$. Sabemos que $\boldsymbol{\varphi}_u$ e $\boldsymbol{\varphi}_v$ formam uma base (não necessariamente ortonormal) em $\mathsf{T}_p\mathcal{S}$ e, por (37.104), temos nessa base

$$\big(d\mathbf{G}_{\mathcal{S}}\big)\boldsymbol{\varphi}_u \;=\; (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u \qquad \text{e} \qquad \big(d\mathbf{G}_{\mathcal{S}}\big)\boldsymbol{\varphi}_v \;=\; (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v \,. \tag{37.110}$$

Os lados direitos dessas expressões são também vetores de $\mathsf{T}_p\mathcal{S}$ e, portanto, podemos também expressá-los na base $\{\boldsymbol{\varphi}_u,\, \boldsymbol{\varphi}_v\}$. Escrevemos,

$$\begin{aligned} d\mathbf{G}_{\mathcal{S}}\boldsymbol{\varphi}_u &= (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u \;=\; c^1{}_1\boldsymbol{\varphi}_u + c^2{}_1\boldsymbol{\varphi}_v \,, \\ d\mathbf{G}_{\mathcal{S}}\boldsymbol{\varphi}_v &= (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v \;=\; c^1{}_2\boldsymbol{\varphi}_u + c^2{}_2\boldsymbol{\varphi}_v \,, \end{aligned} \tag{37.111}$$

onde $c^i{}_j$, $i,\, j \in \{1,\, 2\}$, são coeficientes a serem determinados. Podemos com isso dizer que a matriz $\left(\begin{smallmatrix} c^1{}_1 & c^1{}_2 \\ c^2{}_1 & c^2{}_2 \end{smallmatrix}\right)$ é a expressão de $d\mathbf{G}_{\mathcal{S}}$ na base $\{\boldsymbol{\varphi}_u,\, \boldsymbol{\varphi}_v\}$.

Comentário. A forma matricial dada em (37.111) merece um esclarecimento. Se, para algum $p \in \mathcal{S}$, consideramos um vetor de $\mathsf{T}_p\mathcal{S}$ da forma $\alpha\boldsymbol{\varphi}_u + b\boldsymbol{\varphi}_v$, ou seja, com componentes α e $\beta \in \mathbb{R}$ na base $\{\boldsymbol{\varphi}_u,\, \boldsymbol{\varphi}_v\}$, ou seja, um vetor representado como um vetor-coluna como $\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right)$, então, segundo as convenções de produtos de matrizes, a ação de $d\mathbf{G}_{\mathcal{S}}$ nesse vetor é dada por

$$d\mathbf{G}_{\mathcal{S}}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} c^1{}_1 & c^1{}_2 \\ c^2{}_1 & c^2{}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} c^1{}_1\alpha + c^1{}_2\alpha \\ c^2{}_1\alpha + c^2{}_2\beta \end{pmatrix} \,. \tag{37.112}$$

[25] Julius Weingarten (1836–1910).

[26] O trabalho original é: J. Weingarten. "Über eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen". Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, **59**: 382–393 (1861).

O leitor deve observar a troca $c^1{}_2 \leftrightarrow c^2{}_1$ que ocorre entre (37.111) e (37.112). É assim mesmo. Com isso vemos que a matriz $\begin{pmatrix} c^1{}_1 & c^1{}_2 \\ c^2{}_1 & c^2{}_2 \end{pmatrix}$ representa a ação do operador de forma $d\mathbf{G}_{\mathbb{S}}$ em vetores escritos na base $\{\boldsymbol{\varphi}_u, \boldsymbol{\varphi}_v\}$. ♣

Por outro lado, se considerarmos um vetor genérico do espaço tangente, expresso na forma $\alpha\boldsymbol{\varphi}_u + \beta\boldsymbol{\varphi}_v$ com $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, as expressões (37.87) e (37.105) para a primeira e segunda forma fundamentais, calculadas nesse vetor, nos fornecem

$$\begin{aligned}
\mathsf{I} &= \big(\alpha\boldsymbol{\varphi}_u + \beta\boldsymbol{\varphi}_v\big)\cdot\big(\alpha\boldsymbol{\varphi}_u + \beta\boldsymbol{\varphi}_v\big) \\
&= \alpha^2\boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_u + 2\alpha\beta\boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_v + \beta^2\boldsymbol{\varphi}_v\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \\
&\equiv \alpha^2\mathrm{E} + 2\alpha\beta\mathrm{F} + \beta^2\mathrm{G}\,, \\
\mathsf{II} &= -\big(\alpha\boldsymbol{\varphi}_u + \beta\boldsymbol{\varphi}_v\big)\cdot\Big(d\mathbf{G}_{\mathbb{S}}\big(\alpha\boldsymbol{\varphi}_u + \beta\boldsymbol{\varphi}_v\big)\Big) \\
&= -\Big[\alpha^2\boldsymbol{\varphi}_u\cdot\Big(d\mathbf{G}_{\mathbb{S}}\boldsymbol{\varphi}_u\Big) + 2\alpha\beta\boldsymbol{\varphi}_u\cdot\Big(d\mathbf{G}_{\mathbb{S}}\boldsymbol{\varphi}_v\Big) + \beta^2\boldsymbol{\varphi}_v\cdot\Big(d\mathbf{G}_{\mathbb{S}}\boldsymbol{\varphi}_v\Big)\Big] \\
&\equiv \alpha^2\mathrm{e} + 2\alpha\beta\mathrm{f} + \beta^2\mathrm{g}\,.
\end{aligned}$$

Acima, usamos a simetria de $d\mathbf{G}_{\mathbb{S}}$ e, seguindo a notação empregada na maioria dos livros-textos, denominamos os coeficientes das formas I e II por

$$\mathrm{E} \equiv \boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_u\,,\quad \mathrm{F} \equiv \boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_v\,,\quad \mathrm{G} \equiv \boldsymbol{\varphi}_v\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \tag{37.113}$$

e

$$-\mathrm{e} \equiv \boldsymbol{\varphi}_u\cdot\Big(d\mathbf{G}_{\mathbb{S}}\boldsymbol{\varphi}_u\Big) \overset{(37.110)}{=} \boldsymbol{\varphi}_u\cdot(\mathbf{N}_{\mathbb{S}})_u \overset{(37.111)}{=} c^1{}_1\mathrm{E} + c^2{}_1\mathrm{F}\,, \tag{37.114}$$

$$-\mathrm{f} \equiv \boldsymbol{\varphi}_u\cdot\Big(d\mathbf{G}_{\mathbb{S}}\boldsymbol{\varphi}_v\Big) \overset{(37.110)}{=} \boldsymbol{\varphi}_u\cdot(\mathbf{N}_{\mathbb{S}})_v \overset{(37.111)}{=} c^1{}_2\mathrm{E} + c^2{}_2\mathrm{F} \overset{*}{=} c^1{}_1\mathrm{F} + c^2{}_1\mathrm{G}\,, \tag{37.115}$$

$$-\mathrm{g} \equiv \boldsymbol{\varphi}_v\cdot\Big(d\mathbf{G}_{\mathbb{S}}\boldsymbol{\varphi}_v\Big) \overset{(37.110)}{=} \boldsymbol{\varphi}_v\cdot(\mathbf{N}_{\mathbb{S}})_v \overset{(37.111)}{=} c^1{}_2\mathrm{F} + c^2{}_2\mathrm{B}\,. \tag{37.116}$$

A igualdade indicada por $*$ decorre da identidade

$$-\mathrm{f} = \boldsymbol{\varphi}_u\cdot(\mathbf{N}_{\mathbb{S}})_v \overset{(37.85)}{=} \boldsymbol{\varphi}_v\cdot(\mathbf{N}_{\mathbb{S}})_u = c^1{}_1\mathrm{F} + c^1{}_2\mathrm{G}\,.$$

As relações (37.114)–(37.116) podem ser escritas de forma matricial:

$$-\begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{f} \\ \mathrm{f} & \mathrm{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c^1{}_1 & c^1{}_2 \\ c^2{}_1 & c^2{}_2 \end{pmatrix}\,. \tag{37.117}$$

Verifique! Assim,

$$\begin{pmatrix} c^1{}_1 & c^1{}_2 \\ c^2{}_1 & c^2{}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{f} \\ \mathrm{f} & \mathrm{g} \end{pmatrix} = \frac{-1}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\begin{pmatrix} \mathrm{G} & -\mathrm{F} \\ -\mathrm{F} & \mathrm{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{f} \\ \mathrm{f} & \mathrm{g} \end{pmatrix}\,, \tag{37.118}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} c^1{}_1 & c^1{}_2 \\ c^2{}_1 & c^2{}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\begin{pmatrix} \mathrm{fF}-\mathrm{eG} & \mathrm{gF}-\mathrm{fG} \\ \mathrm{eF}-\mathrm{fE} & \mathrm{fF}-\mathrm{gE} \end{pmatrix}\,. \tag{37.119}$$

Retornando com isso a (37.111), escrevemos

$$d\mathbf{G}_{\mathbb{S}}\boldsymbol{\varphi}_u = (\mathbf{N}_{\mathbb{S}})_u = \frac{\mathrm{fF}-\mathrm{eG}}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\boldsymbol{\varphi}_u + \frac{\mathrm{eF}-\mathrm{fE}}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\boldsymbol{\varphi}_v\,, \tag{37.120}$$

$$d\mathbf{G}_{\mathbb{S}}\boldsymbol{\varphi}_v = (\mathbf{N}_{\mathbb{S}})_v = \frac{\mathrm{gF}-\mathrm{fG}}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\boldsymbol{\varphi}_u + \frac{\mathrm{fF}-\mathrm{gE}}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\boldsymbol{\varphi}_v\,. \tag{37.121}$$

Essas relações são denominadas *equações de Weingarten*. Elas permitem expressar a ação do *operador de forma*, ou seja, das derivadas do vetor normal $\mathbf{N}_{\mathbb{S}}$, em termos diretamente da parametrização $(u,\ v) \in U$, através das duas primeiras derivadas de $\boldsymbol{\varphi}$ e de $\mathbf{N}_{\mathbb{S}}$. Para entender essas afirmações vale observar que, por (37.113), os coeficientes E, F e G dependem das primeiras derivadas de $\boldsymbol{\varphi}$, enquanto que, por (37.84),

$$\mathrm{e} = -\boldsymbol{\varphi}_u\cdot(\mathbf{N}_{\mathbb{S}})_u = \boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\mathbf{N}_{\mathbb{S}}\,,\qquad \mathrm{f} = -\boldsymbol{\varphi}_u\cdot(\mathbf{N}_{\mathbb{S}})_v = \boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\mathbf{N}_{\mathbb{S}}\,,\qquad \mathrm{g} = -\boldsymbol{\varphi}_v\cdot(\mathbf{N}_{\mathbb{S}})_v = \boldsymbol{\varphi}_{vv}\cdot\mathbf{N}_{\mathbb{S}}\,,$$

que dependem apenas das segundas derivadas de $\boldsymbol{\varphi}$ e de $\mathbf{N}_{\mathbb{S}}$.

Como já comentamos, a matriz $\begin{pmatrix} c^1{}_1 & c^1{}_2 \\ c^2{}_1 & c^2{}_2 \end{pmatrix}$ representa o operador de forma $d\mathbf{G}_{\mathbb{S}}$ na base $\{\boldsymbol{\varphi}_u, \boldsymbol{\varphi}_v\}$. Assim, a relação (37.119) expressa $d\mathbf{G}_{\mathbb{S}}$ nessa base:

$$d\mathbf{G}_{\mathbb{S}} = \frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\begin{pmatrix} \mathrm{fF}-\mathrm{eG} & \mathrm{gF}-\mathrm{fG} \\ \mathrm{eF}-\mathrm{fE} & \mathrm{fF}-\mathrm{gE} \end{pmatrix}\,. \tag{37.122}$$

Essa expressão é uma maneira alternativa (matricial) de se apresentar as equações de Weingarten.

As relações (37.117) ou (37.118) fornecerão adiante, em (37.123), uma importante expressão explícita para a curvatura Gaussiana em termos dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental.

• **A fórmula de Gauss para a curvatura Gaussiana**

A matriz $\begin{pmatrix} c^1{}_1 & c^1{}_2 \\ c^2{}_1 & c^2{}_2 \end{pmatrix}$, introduzida em (37.112), representa o operador de forma $d\mathbf{G}_{\mathbb{S}}$ na base $\{\boldsymbol{\varphi}_u,\ \boldsymbol{\varphi}_v\}$. Assim, seu determinante é o determinante de $d\mathbf{G}_{\mathbb{S}}$, o qual define a curvatura Gaussiana $\boldsymbol{\kappa}^G$ em (37.107). Com isso, tomando-se o determinante dos dois lados da igualdade (37.117) ou (37.118), obtemos

$$\boldsymbol{\kappa}^G = \frac{\mathrm{eg}-\mathrm{f}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\,, \tag{37.123}$$

relação essa que, sem surpresa, também pode ser obtida de (37.122). A importante relação (37.123), a qual, como diversas outras, recebe a denominação de *fórmula de Gauss*, expressa a curvatura Gaussiana em termos dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental. Trata-se de um importante achado de Gauss, originário das referências já citadas [183, 184], e que abriu portas para uma miríade de desenvolvimentos na Geometria.

Adiante discutiremos alguns desses desenvolvimentos.

• **A invariância da curvatura escalar por mudanças de coordenadas**

Denotemos a primeira e a segunda formas fundamentais em notação matricial:

$$\mathbf{G} \equiv \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{J} \equiv \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{f} \\ \mathrm{f} & \mathrm{g} \end{pmatrix}\,. \tag{37.124}$$

Com essas definições, podemos escrever a curvatura Gaussiana (37.123) na forma

$$\boldsymbol{\kappa}^G = \frac{\det\mathbf{J}}{\det\mathbf{G}}\,. \tag{37.125}$$

Se efetuarmos uma mudança de coordenadas $(u,\ v) \mapsto (u',\ v')$ teremos $\boldsymbol{\varphi}_{u'} = \boldsymbol{\varphi}_u\frac{\partial u}{\partial u'} + \boldsymbol{\varphi}_v\frac{\partial v}{\partial u'}$ e $\boldsymbol{\varphi}_{v'} = \boldsymbol{\varphi}_u\frac{\partial u}{\partial v'} + \boldsymbol{\varphi}_v\frac{\partial v}{\partial v'}$. Devido às relações (37.113) e às primeiras igualdades em (37.114)-(37.116), é fácil constatar que as matrizes $\mathbf{G}$ e $\mathbf{J}$ transformam-se da seguinte forma:

$$\mathbf{G}' = P^T\mathbf{G}P \qquad \text{e} \qquad \mathbf{J}' = P^T\mathbf{J}P\,, \tag{37.126}$$

onde $P := \left(\begin{smallmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{smallmatrix}\right)$. Verifique! Segue imediatamente disso que

$$\boldsymbol{\kappa}^{G'} \;=\; \frac{\det \mathbf{J}'}{\det \mathbf{G}'} \;\overset{(37.126)}{=}\; \frac{\det \mathbf{J}}{\det \mathbf{G}} \;=\; \boldsymbol{\kappa}^{G}\,, \tag{37.127}$$

o que atesta a invariância da curvatura Gaussiana por mudanças de coordenadas, um fato, ademais, intuitivo e cuja demonstração releva o significado desse conceito. Mais adiante, encontraremos no *Theorema Egregium* de Gauss outra propriedade de invariância da curvatura Gaussiana.

• **A quádrica osculante revisitada**

A qualificação de pontos da variedade como planares, elípticos, hiperbólicos ou parabólicos, vista à página 2046, reflete-se em propriedades da quádrica osculante, introduzida em (37.98), página 2043. Observe-se primeiramente que o determinante Hessiano da quádrica osculante é $\mathrm{eg} - \mathrm{f}^2$, que vem a ser também o determinante da matriz $\mathbf{J}$. Como $\mathbf{G}$ é uma matriz positiva, seu determinante também o é, que que significa que o sinal da curvatura Gaussiana em um dado ponto é definido apenas por $\mathrm{eg} - \mathrm{f}^2$, o determinante Hessiano da quádrica osculante.

Concluímos disso que se o ponto em questão é elíptico, a quádrica osculante possui um mínimo no ponto em questão. Se o ponto em questão é hiperbólico, a quádrica osculante possui um ponto de sela no ponto em questão etc.

37.2.4.2 As Equações de Gauss

Os vetores $\boldsymbol{\varphi}_{uu}$, $\boldsymbol{\varphi}_{uv}$ e $\boldsymbol{\varphi}_{vv}$ que encontramos anteriormente não são vetores do espaço tangente e, portanto, em cada ponto, podem ser escritos como combinação linear dos vetores $\boldsymbol{\varphi}_u$, $\boldsymbol{\varphi}_v$ e $\mathbf{N}_{\mathbb{S}}$. Os vetores $\boldsymbol{\varphi}_u$ e $\boldsymbol{\varphi}_v$ não são necessariamente ortogonais entre si, mas são ortogonais ao vetor normalizado $\mathbf{N}_{\mathbb{S}}$. Assim, as componentes de $\boldsymbol{\varphi}_{uu}$, $\boldsymbol{\varphi}_{uv}$ e $\boldsymbol{\varphi}_{vv}$ na direção de $\mathbf{N}_{\mathbb{S}}$ são $\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\mathbf{N}_{\mathbb{S}} = -\boldsymbol{\varphi}_u\cdot(\mathbf{N}_{\mathbb{S}})_u = \mathrm{e}$, $\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\mathbf{N}_{\mathbb{S}} = -\boldsymbol{\varphi}_u\cdot(\mathbf{N}_{\mathbb{S}})_v = \mathrm{f}$ e $\boldsymbol{\varphi}_{vv}\cdot\mathbf{N}_{\mathbb{S}} = -\boldsymbol{\varphi}_v\cdot(\mathbf{N}_{\mathbb{S}})_v = \mathrm{g}$, onde usamos (37.84) e as definições (37.114)-(37.116).

Convencionamos escrever essas combinações lineares na forma

$$\boldsymbol{\varphi}_{uu} \;=\; \Gamma^1{}_{11}\boldsymbol{\varphi}_u + \Gamma^2{}_{11}\boldsymbol{\varphi}_v + \mathrm{e}\mathbf{N}_{\mathbb{S}}\,, \tag{37.128}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{uv} \;=\; \Gamma^1{}_{12}\boldsymbol{\varphi}_u + \Gamma^2{}_{12}\boldsymbol{\varphi}_v + \mathrm{f}\mathbf{N}_{\mathbb{S}}\,, \tag{37.129}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{vv} \;=\; \Gamma^1{}_{22}\boldsymbol{\varphi}_u + \Gamma^2{}_{22}\boldsymbol{\varphi}_v + \mathrm{g}\mathbf{N}_{\mathbb{S}}\,. \tag{37.130}$$

Sim, o estudante adivinhou corretamente que a notação $\Gamma^i{}_{jk}$ para os coeficientes acima é baseada naquela empregada para os coeficientes de conexões (*símbolos de Christoffel*), tema desenvolvido no Capítulo 35, página 1878. Por ora, eles representam apenas coeficientes de uma decomposição vetorial e a relação com conexões será feita mais adiante.

Tomando-se o produto escalar de $\boldsymbol{\varphi}_{uu}$ em (37.128) com $\boldsymbol{\varphi}_u$, obtemos

$$\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u \;=\; \Gamma^1{}_{11}\boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_u + \Gamma^2{}_{11}\boldsymbol{\varphi}_v\cdot\boldsymbol{\varphi}_u \;\overset{(37.113)}{=}\; \Gamma^1{}_{11}\mathrm{E} + \Gamma^2{}_{11}\mathrm{F}\,. \tag{37.131}$$

Analogamente, tomando-se o produto escalar de $\boldsymbol{\varphi}_{uu}$ em (37.128) com $\boldsymbol{\varphi}_v$, obtemos

$$\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \;=\; \Gamma^1{}_{11}\boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_v + \Gamma^2{}_{11}\boldsymbol{\varphi}_v\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \;\overset{(37.113)}{=}\; \Gamma^1{}_{11}\mathrm{F} + \Gamma^2{}_{11}\mathrm{G}\,. \tag{37.132}$$

Tomando-se o produto escalar de $\boldsymbol{\varphi}_{uv}$ em (37.129) com $\boldsymbol{\varphi}_u$, temos ainda

$$\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u \;=\; \Gamma^1{}_{12}\boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_u + \Gamma^2{}_{12}\boldsymbol{\varphi}_v\cdot\boldsymbol{\varphi}_u \;\overset{(37.113)}{=}\; \Gamma^1{}_{12}\mathrm{E} + \Gamma^2{}_{12}\mathrm{F}\,. \tag{37.133}$$

Tomando-se o produto escalar de $\boldsymbol{\varphi}_{uv}$ em (37.129) com $\boldsymbol{\varphi}_v$, temos ainda

$$\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \;=\; \Gamma^1{}_{12}\boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_v + \Gamma^2{}_{12}\boldsymbol{\varphi}_v\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \;\overset{(37.113)}{=}\; \Gamma^1{}_{12}\mathrm{F} + \Gamma^2{}_{12}\mathrm{G}\,. \tag{37.134}$$

Tomando-se o produto escalar de $\boldsymbol{\varphi}_{vv}$ em (37.130) com $\boldsymbol{\varphi}_u$, temos

$$\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u \;=\; \Gamma^1{}_{22}\boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_u + \Gamma^2{}_{22}\boldsymbol{\varphi}_v\cdot\boldsymbol{\varphi}_u \;=\; \Gamma^1{}_{22}\mathrm{E} + \Gamma^2{}_{22}\mathrm{F}\,. \tag{37.135}$$

Por fim, tomando-se o produto escalar de $\boldsymbol{\varphi}_{vv}$ em (37.130) com $\boldsymbol{\varphi}_v$, temos ainda

$$\boldsymbol{\varphi}_{vv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \;=\; \Gamma^1{}_{22}\boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_v + \Gamma^2{}_{22}\boldsymbol{\varphi}_v\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \;\overset{(37.113)}{=}\; \Gamma^1{}_{22}\mathrm{F} + \Gamma^2{}_{22}\mathrm{G}\,. \tag{37.136}$$

Todas as relações (37.131)-(37.136) serão empregadas adiante, mas o par de equações (37.131) e (37.132) permite eliminar $\Gamma^1{}_{11}$ e $\Gamma^2{}_{11}$: escrevendo ambas em forma matricial

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u \\ \boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{11} \\ \Gamma^2{}_{11} \end{pmatrix}\,,$$

obtemos,

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{11} \\ \Gamma^2{}_{11} \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} \begin{pmatrix} \mathrm{G} & -\mathrm{F} \\ -\mathrm{F} & \mathrm{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u \\ \boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} \begin{pmatrix} \mathrm{G}\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u - \mathrm{F}\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \\ \mathrm{E}\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v - \mathrm{F}\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u \end{pmatrix}\,. \tag{37.137}$$

Procedendo de forma análoga para as equações (37.129) e (37.130), obtemos

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{12} \\ \Gamma^2{}_{12} \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} \begin{pmatrix} \mathrm{G}\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u - \mathrm{F}\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \\ \mathrm{E}\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v - \mathrm{F}\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{22} \\ \Gamma^2{}_{22} \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} \begin{pmatrix} \mathrm{G}\boldsymbol{\varphi}_{vv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u - \mathrm{F}\boldsymbol{\varphi}_{vv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \\ \mathrm{E}\boldsymbol{\varphi}_{vv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v - \mathrm{F}\boldsymbol{\varphi}_{vv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u \end{pmatrix}\,. \tag{37.138}$$

E. 37.7 *Exercício.* Mostre isso! ✣

Há ainda algumas manipulações que podem ser feitas nas soluções de (37.137) e de (37.138). Segue diretamente das definições de E, F e G que

$$\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u \;=\; \frac{1}{2}\mathrm{E}_u\,,\quad \boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u \;=\; \frac{1}{2}\mathrm{E}_v\,,\quad \boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \;=\; \mathrm{F}_u - \frac{1}{2}\mathrm{E}_v\,,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{vv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \;=\; \frac{1}{2}\mathrm{G}_v\,,\quad \boldsymbol{\varphi}_{vu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \;=\; \frac{1}{2}\mathrm{G}_u\,,\quad \boldsymbol{\varphi}_{vv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u \;=\; \mathrm{F}_v - \frac{1}{2}\mathrm{G}_u\,. \tag{37.139}$$

E. 37.8 *Exercício.* Verifique! Use fato que $\mathrm{F}_u = \boldsymbol{\varphi}_{vu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u + \boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v = \boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v + \frac{1}{2}\mathrm{E}_v$ e o fato que $\mathrm{F}_v = \boldsymbol{\varphi}_{vv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u + \boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v = \boldsymbol{\varphi}_{vv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u + \frac{1}{2}\mathrm{G}_u$. ✣

Inserindo-se as relações (37.139) em (37.137) e (37.138), obtemos, finalmente, após alguns cômputos maçantes,

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1{}_{11} &= \frac{\mathrm{G}\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u - \mathrm{F}\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} = \frac{\mathrm{GE}_u - \mathrm{F}(2\mathrm{F}_u - \mathrm{E}_v)}{2(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}\,,\\
\Gamma^2{}_{11} &= \frac{\mathrm{E}\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v - \mathrm{F}\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} = \frac{\mathrm{E}(2\mathrm{F}_u - \mathrm{E}_v) - \mathrm{FE}_u}{2(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}\,,\\
\Gamma^1{}_{12} &= \frac{\mathrm{G}\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u - \mathrm{F}\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} = \frac{\mathrm{GE}_v - \mathrm{FG}_u}{2(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}\,,\\
\Gamma^2{}_{12} &= \frac{\mathrm{E}\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v - \mathrm{F}\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} = \frac{\mathrm{EG}_u - \mathrm{FE}_v}{2(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}\,,\\
\Gamma^1{}_{22} &= \frac{\mathrm{G}\boldsymbol{\varphi}_{vv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u - \mathrm{F}\boldsymbol{\varphi}_{vv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} = \frac{\mathrm{G}(2\mathrm{F}_v - \mathrm{G}_u) - \mathrm{FG}_v}{2(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}\,,\\
\Gamma^2{}_{22} &= \frac{\mathrm{E}\boldsymbol{\varphi}_{vv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v - \mathrm{F}\boldsymbol{\varphi}_{vv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} = \frac{\mathrm{EG}_v - \mathrm{F}(2\mathrm{F}_v - \mathrm{G}_u)}{2(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}\,.
\end{aligned}
\tag{37.140}
$$

E. 37.9 *Exercício*. Verifique! ✣

Comentamos adicionalmente que, por conveniência, é costume definir

$$
\Gamma^k{}_{ji} := \Gamma^k{}_{ij} \tag{37.141}
$$

para todos i, j, $k \in \{1,\,2\}$.

As equações (37.128)-(37.130) com as soluções (37.140) são denominadas *equações de Gauss*. Um dos fatos notáveis sobre essas equações é que os lados direitos das várias igualdades em (37.140) dependem apenas dos coeficientes da primeira forma fundamental (e suas derivadas), fato que será relevante adiante.

E. 37.10 *Exercício importante*. Usando as relações (37.93), página 2042, que associam os coeficientes da primeira forma fundamental aos coeficientes (covariantes e contravariantes) do tensor métrico induzido em $\mathcal{S}$, verifique por um cálculo explícito que as relações (37.140) reproduzem precisamente a definição (35.124), página 1909, dos símbolos de Christoffel da Geometria Riemanniana que, por sua vez, representam as relações (35.133), página 1911, para os coeficientes de uma conexão de Levi-Civita. Perceba-se, porém, que foram caminhos distintos que levaram a essas expressões, pois as fórmulas (35.124) e (35.133) foram obtidas no estudo de conexões afins, o que não foi seguido no corrente capítulo. ✣

37.2.4.3 Relações de Gauss-Peterson-Mainardi-Codazzi para Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Colocando juntas as equações de Gauss (37.128)-(37.130) e de Weingarten (37.111), temos o sistema

$$
\boldsymbol{\varphi}_{uu} = \Gamma^1{}_{11}\boldsymbol{\varphi}_u + \Gamma^2{}_{11}\boldsymbol{\varphi}_v + \mathrm{e}\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\,, \tag{37.142}
$$

$$
\boldsymbol{\varphi}_{uv} = \Gamma^1{}_{12}\boldsymbol{\varphi}_u + \Gamma^2{}_{12}\boldsymbol{\varphi}_v + \mathrm{f}\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\,, \tag{37.143}
$$

$$
\boldsymbol{\varphi}_{vv} = \Gamma^1{}_{22}\boldsymbol{\varphi}_u + \Gamma^2{}_{22}\boldsymbol{\varphi}_v + \mathrm{g}\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\,, \tag{37.144}
$$

$$
(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u = c^1{}_1\boldsymbol{\varphi}_u + c^2{}_1\boldsymbol{\varphi}_v\,, \tag{37.145}
$$

$$
(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v = c^1{}_2\boldsymbol{\varphi}_u + c^2{}_2\boldsymbol{\varphi}_v\,, \tag{37.146}
$$

com os $\Gamma^k{}_{ij}$ e os $c^i{}_j$ dados em (37.140), página 2052, e (37.119), página 2048, respectivamente.

Podemos encarar (37.142)-(37.146) como um sistema de equações a derivadas parciais de primeira ordem em duas variáveis independentes (u e v) para as funções vetoriais $\boldsymbol{\varphi}_u$, $\boldsymbol{\varphi}_v$ e $\mathbf{N}_{\mathcal{S}}$. Como os vetores $\mathbf{N}_{\mathcal{S}}$ têm norma 1, trata-se de

13 equações para 8 funções incógnitas. Trata-se, de qualquer forma, de um sistema sobredeterminado de equações a derivadas parciais tal como discutido na Seção 18.7, página 1044. Condições de compatibilidade se fazem necessárias para um tal sistema tal como apresentadas naquela Seção (vide particularmente o Teorema 18.3, página 1045).

Relações de Gauss-Peterson-Mainardi-Codazzi, ou simplesmente *Relações de Gauss-Codazzi*, é o nome dado a essas condições de compatibilidade. Para nós, elas serão fundamentais na demonstração do importante *Theorema Egregium* de Gauss, adiante. Vamos agora tratar de escrevê-las explicitamente.

As condições de compatibilidade, também ditas de integrabilidade, nesse caso são:

$$
\boldsymbol{\varphi}_{uuv} = \boldsymbol{\varphi}_{uvu}\,,\quad \boldsymbol{\varphi}_{vuv} = \boldsymbol{\varphi}_{vvu} \quad \text{e} \quad (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_{uv} = (\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_{vu}\,,
$$

ou seja,

$$
\frac{\partial}{\partial v}\left[\Gamma^1{}_{11}\boldsymbol{\varphi}_u + \Gamma^2{}_{11}\boldsymbol{\varphi}_v + \mathrm{e}\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\Gamma^1{}_{12}\boldsymbol{\varphi}_u + \Gamma^2{}_{12}\boldsymbol{\varphi}_v + \mathrm{f}\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\right]\,, \tag{37.147}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial v}\left[\Gamma^1{}_{12}\boldsymbol{\varphi}_u + \Gamma^2{}_{12}\boldsymbol{\varphi}_v + \mathrm{f}\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\Gamma^1{}_{22}\boldsymbol{\varphi}_u + \Gamma^2{}_{22}\boldsymbol{\varphi}_v + \mathrm{g}\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\right] \qquad \text{e} \tag{37.148}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial v}\left[c^1{}_1\boldsymbol{\varphi}_u + c^2{}_1\boldsymbol{\varphi}_v\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[c^1{}_2\boldsymbol{\varphi}_u + c^2{}_2\boldsymbol{\varphi}_v\right]\,. \tag{37.149}
$$

O que devemos fazer agora é expandir as derivadas em u e v nas relações (37.147)-(37.149) e nelas substituir as derivadas $\boldsymbol{\varphi}_{uu}$, $\boldsymbol{\varphi}_{uv}$, $\boldsymbol{\varphi}_{vv}$ e $(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_u$, $(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_v$ pelas correspondentes expressões dadas nas equações de Gauss e Weingarten (37.142)-(37.146). Após cálculos maçantes, porém diretos, obtemos para (37.147):

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varphi}_u\left\{\frac{\partial\Gamma^1{}_{11}}{\partial v} - \frac{\partial\Gamma^1{}_{12}}{\partial u} + \Gamma^2{}_{11}\Gamma^1{}_{22} - \Gamma^2{}_{12}\Gamma^1{}_{12} + (\mathrm{e}c^1{}_2 - \mathrm{f}c^1{}_1)\right\}\\
&\quad + \boldsymbol{\varphi}_v\left\{\frac{\partial\Gamma^2{}_{11}}{\partial v} - \frac{\partial\Gamma^2{}_{12}}{\partial u} + \Gamma^1{}_{11}\Gamma^2{}_{12} + \Gamma^2{}_{11}\Gamma^2{}_{22} - \Gamma^1{}_{12}\Gamma^2{}_{11} - \left(\Gamma^2{}_{12}\right)^2 + (\mathrm{e}c^2{}_2 - \mathrm{f}c^2{}_1)\right\}\\
&\quad + \mathbf{N}_{\mathcal{S}}\left\{\frac{\partial\mathrm{e}}{\partial v} - \frac{\partial\mathrm{f}}{\partial u} + \left(\Gamma^1{}_{11} - \Gamma^2{}_{12}\right)\mathrm{f} + \Gamma^2{}_{11}\mathrm{g} - \Gamma^1{}_{12}\mathrm{e}\right\} = 0\,.
\end{aligned}
\tag{37.150}
$$

E. 37.11 *Exercício*. Verifique! ✣

Como $\boldsymbol{\varphi}_u$, $\boldsymbol{\varphi}_v$ e $\mathbf{N}_{\mathcal{S}}$ são linearmente independentes em cada ponto de $\mathcal{S}$, os coeficientes desses vetores em (37.150) devem anular-se. Fora isso, é fácil verificar por (37.119) que

$$
\mathrm{e}c^1{}_2 - \mathrm{f}c^1{}_1 = \frac{\mathrm{eg}-\mathrm{f}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\mathrm{F} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{e}c^2{}_2 - \mathrm{f}c^2{}_1 = -\frac{\mathrm{eg}-\mathrm{f}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\mathrm{E}\,.
$$

Assim, valem

$$
\frac{\partial\Gamma^1{}_{11}}{\partial v} - \frac{\partial\Gamma^1{}_{12}}{\partial u} + \Gamma^2{}_{11}\Gamma^1{}_{22} - \Gamma^2{}_{12}\Gamma^1{}_{12} + \frac{\mathrm{eg}-\mathrm{f}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\mathrm{F} = 0\,, \tag{37.151}
$$

$$
\frac{\partial\Gamma^2{}_{11}}{\partial v} - \frac{\partial\Gamma^2{}_{12}}{\partial u} + \Gamma^1{}_{11}\Gamma^2{}_{12} + \Gamma^2{}_{11}\Gamma^2{}_{22} - \Gamma^1{}_{12}\Gamma^2{}_{11} - \left(\Gamma^2{}_{12}\right)^2 - \frac{\mathrm{eg}-\mathrm{f}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\mathrm{E} = 0\,, \tag{37.152}
$$

$$
\frac{\partial\mathrm{e}}{\partial v} - \frac{\partial\mathrm{f}}{\partial u} + \left(\Gamma^1{}_{11} - \Gamma^2{}_{12}\right)\mathrm{f} + \Gamma^2{}_{11}\mathrm{g} - \Gamma^1{}_{12}\mathrm{e} = 0\,. \tag{37.153}
$$

Repetindo o mesmo procedimento para as equações (37.148), obtemos

$$\frac{\partial \Gamma^1{}_{12}}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma^1{}_{22}}{\partial u} + \left(\Gamma^1{}_{12}\right)^2 + \Gamma^2{}_{12}\Gamma^1{}_{22} - \Gamma^1{}_{22}\Gamma^1{}_{11} - \Gamma^2{}_{22}\Gamma^1{}_{12} + \frac{\mathrm{eg}-\mathrm{f}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\mathrm{G} \;=\; 0\,, \tag{37.154}$$

$$\frac{\partial \Gamma^2{}_{12}}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma^2{}_{22}}{\partial u} + \Gamma^1{}_{12}\Gamma^2{}_{12} - \Gamma^1{}_{22}\Gamma^2{}_{11} - \frac{\mathrm{eg}-\mathrm{f}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\mathrm{F} \;=\; 0\,, \tag{37.155}$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial u} + \left(\Gamma^1{}_{12} - \Gamma^2{}_{22}\right)\mathrm{f} + \Gamma^2{}_{12}\mathrm{g} - \Gamma^1{}_{22}\mathrm{e} \;=\; 0\,. \tag{37.156}$$

As relações (37.151)-(37.153) e (37.154)-(37.156) são as relações de compatibilidade procuradas e são denominadas *relações de Gauss-Peterson-Mainardi-Codazzi*[27].

As relações (37.151)-(37.152) e (37.154)-(37.155) são mais frequentemente denominadas *relações de Gauss-Codazzi*. As relações (37.153) e (37.156), especificamente, são denominadas *relações de Mainardi-Codazzi*, ou *relações de Codazzi* [524, 519]. Infelizmente não há uniformidade na literatura quanto a essas denominações.

E. 37.12 *Exercício*. Verifique as relações (37.151)-(37.153) e (37.154)-(37.156). ✣

Segundo [524], as relações (37.149), que são as relações de consistência para as equações de Weingarten (37.145)-(37.146), não fornecem nada novo além do oferecido pelas relações (37.151)-(37.153) e (37.154)-(37.156).

• **Nota sobre a nomenclatura**

Segundo historiadores (vide *e.g.*, [524] e [427]), Gauss não escreveu as relações (37.151)-(37.156) de forma explícita em [183, 184] (em 1827), mas tudo indica que elas eram do seu conhecimento. Peterson[28] teria sido o primeiro (em 1853) a torná-las explícitas [427], sendo seguido de forma independente por Mainardi[29] (em 1856) e por Codazzi[30] (em 1868-1869). Como dissemos, alguns textos usam a denominação *relações de Mainardi-Codazzi* apenas em referência às equações (37.153) e (37.156). Alguns outros autores usam a denominação *relações de Gauss-Mainardi-Codazzi* em referência a generalizações em mais dimensões.

• **Mais fórmulas de Gauss para a curvatura Gaussiana**

O leitor atento deve já ter percebido o fato de as equações (37.151), (37.152), (37.154) e (37.155) conterem um termo com o fator $\frac{\mathrm{eg}-\mathrm{f}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}$, o qual, segundo (37.123), página 2049, fornece a curvatura Gaussiana da superfície em cada um de seus pontos. Assim, se assumirmos E, G ou F não nulos (ao menos um deve sê-lo, pois a primeira forma fundamental, *i.e.*, o tensor métrico, é não nulo), valem

$$\boldsymbol{\kappa}^G \;=\; \frac{1}{\mathrm{F}}\left[\frac{\partial \Gamma^1{}_{12}}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma^1{}_{11}}{\partial v} + \Gamma^2{}_{12}\Gamma^1{}_{12} - \Gamma^2{}_{11}\Gamma^1{}_{22}\right]\,, \tag{37.157}$$

$$\boldsymbol{\kappa}^G \;=\; \frac{1}{\mathrm{E}}\left[\frac{\partial \Gamma^2{}_{11}}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma^2{}_{12}}{\partial u} + \Gamma^1{}_{11}\Gamma^2{}_{12} + \Gamma^2{}_{11}\Gamma^2{}_{22} - \Gamma^1{}_{12}\Gamma^2{}_{11} - \left(\Gamma^2{}_{12}\right)^2\right]\,, \tag{37.158}$$

$$\boldsymbol{\kappa}^G \;=\; \frac{1}{\mathrm{G}}\left[\frac{\partial \Gamma^1{}_{22}}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma^1{}_{12}}{\partial v} + \Gamma^1{}_{22}\Gamma^1{}_{11} + \Gamma^2{}_{22}\Gamma^1{}_{12} - \left(\Gamma^1{}_{12}\right)^2 - \Gamma^2{}_{12}\Gamma^1{}_{22}\right]\,, \tag{37.159}$$

$$\boldsymbol{\kappa}^G \;=\; \frac{1}{\mathrm{F}}\left[\frac{\partial \Gamma^2{}_{12}}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma^2{}_{22}}{\partial u} + \Gamma^1{}_{12}\Gamma^2{}_{12} - \Gamma^1{}_{22}\Gamma^2{}_{11}\right]\,. \tag{37.160}$$

Essas fórmulas também são denominadas *fórmulas de Gauss para a curvatura Gaussiana*. O fato notável sobre qualquer uma delas é o seguinte: tendo em mente as relações (37.140), página 2052, para os coeficientes $\Gamma^k{}_{ij}$, vemos que

[27] Gaspare Mainardi (1800–1879). Delfino Codazzi (1824–1873). Karl Mikhailovich Peterson (1828–1881).
[28] Karl Mikhailovich Peterson, "Über die Biegung der Flächen", Doctoral thesis, Dorpat University (1853).
[29] G. Mainardi, "Sulla teoria generale delle superficie". Giornale dell'Istituto Lombardo, **9**, pp. 385-398 (1856).
[30] D. Codazzi, "Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio" (Memoria terza). Annali di Matem., **2**, pp. 269-287 (1868-1869).

os lados direitos das relações (37.157)-(37.160) dependem apenas dos coeficientes da primeira forma fundamental (*i.e.*, do tensor métrico) e das suas duas primeiras derivadas.

• **O caso de coordenadas ortogonais**

Um caso de particular interesse é aquele no qual as coordenadas u e v são ortogonais, ou seja, são tais que $\boldsymbol{\varphi}_u \cdot \boldsymbol{\varphi}_v = 0$. Naturalmente, temos aqui $\mathrm{F} = 0$ e com isso as relações (37.140) se simplificam para

$$\Gamma^1{}_{11} \;=\; \frac{\mathrm{E}_u}{2\mathrm{E}}\,,\quad \Gamma^2{}_{11} \;=\; -\frac{\mathrm{E}_v}{2\mathrm{G}}\,,\quad \Gamma^1{}_{12} \;=\; \frac{\mathrm{E}_v}{2\mathrm{E}}\,,\quad \Gamma^2{}_{12} \;=\; \frac{\mathrm{G}_u}{2\mathrm{G}}\,,\quad \Gamma^1{}_{22} \;=\; -\frac{\mathrm{G}_u}{2\mathrm{E}}\,,\quad \Gamma^2{}_{22} \;=\; \frac{\mathrm{G}_v}{2\mathrm{G}}\,. \tag{37.161}$$

Com isso, (37.158) fica $\boldsymbol{\kappa}^G = \frac{-1}{2\mathrm{E}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{E}_v}{\mathrm{G}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{G}_u}{\mathrm{G}}\right) - \frac{\mathrm{E}_u\mathrm{G}_u}{2\mathrm{EG}} + \frac{\mathrm{E}_v\mathrm{G}_v}{2\mathrm{GG}} - \frac{\mathrm{E}_u\mathrm{E}_v}{2\mathrm{EG}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{G}_u}{\mathrm{G}}\right)^2\right]$ e após manipulações maçantes, porém diretas, isso pode ser escrito na forma

$$\boldsymbol{\kappa}^G \;=\; -\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{EG}}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{G}_u}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{E}_v}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\right)\right]\,. \tag{37.162}$$

E. 37.13 *Exercício*. Mostre isso! Sugestão: paciência. ✣

A expressão (37.162) é uma das diversas fórmulas obtidas por Gauss para expressar a curvatura Gaussiana. Sua grande vantagem manifesta-se no fato que o lado direito apresenta-se como um divergente nas coordenadas ortogonais u e v (lembrar que EG é, no caso, o determinante do tensor métrico), o que facilita o trabalho de calcular integrais da curvatura Gaussiana em um domínio aberto da superfície e simplifica a demonstração da versão local do Teorema de Gauss-Bonnet, com uso do Teorema de Green.

37.2.4.4 Isometrias. O *Theorema Egregium* de Gauss

A consequência mais importante das equações de Gauss-Codazzi é o chamado *Theorema Egregium* de Gauss, cuja demonstração apresentaremos agora. Para tal, é suficiente evocarmos apenas as relações (37.151)-(37.153), por exemplo na forma (37.157)-(37.159), página 2054.

O *Theorema Egregium* ("Teorema notável") de Gauss, anunciado em 1827 em [183, 184] (mas, segundo [526], conhecido por seu descobridor desde 1822), é possivelmente o resultado mais importante da Geometria Diferencial de superfícies e discutiremos seu significado após sua demonstração. Seu impacto não pode ser subestimado, pois esse teorema marcou de forma seminal o estudo de resultados intrínsecos na Geometria Diferencial, essenciais para o posterior desenvolvimento da Geometria Riemanniana e fundamentais na Teoria da Relatividade Geral.

Para a apresentação do *Theorema Egregium* faz-se necessário introduzir a importante noção de *isometria* (global ou local) entre superfícies.

• **Isometrias globais e isometrias locais**

Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R}$ duas superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$. Um difeomorfismo $\Psi : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$ é dito ser uma *isometria global*, ou simplesmente uma *isometria*, se sua diferencial preservar os produtos escalares, ou seja, se para todo $p \in \mathcal{S}$ e todos $u,\, v \in \mathsf{T}_p\mathcal{S}$ valer

$$(d\Psi_p u)\cdot(d\Psi_p v) \;=\; u \cdot v\,.$$

Isso significa que $d\Psi$ preserva a primeira forma fundamental em cada ponto de $\mathcal{S}$, ou seja, preserva os produtos escalares induzidos nos respectivos espaços tangentes.

Se existir uma isometria global $\Psi : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$, dizemos que $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R}$ são *superfícies globalmente isométricas*, ou simplesmente *superfícies isométricas*.

Menos restritiva é a definição de isometria local. Seja $q \in \mathcal{S}$ e $\mathcal{A}_q \subset \mathcal{S}$ uma vizinhança aberta de q. Dizemos que uma aplicação $\Psi : \mathcal{A}_q \to \mathcal{R}$ é uma *isometria local em* p se existir uma vizinhança aberta $\mathcal{B}_{\Psi(q)} \subset \mathcal{R}$ de $\Psi(q)$ tal que $\Psi : \mathcal{A}_q \to \mathcal{B}_{\Psi(q)}$ seja uma isometria e, portanto, seja um difeomorfismo entre $\mathcal{A}_q$ e $\mathcal{B}_{\Psi(q)}$ que preserva produtos escalares.

Se houver uma aplicação $\Psi : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$ que seja uma isometria local para todo $p \in \mathcal{S}$, dizemos que $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R}$ são *superfícies localmente isométricas*.

As definições acima demandam um esclarecimento. Claro está que duas superfícies globalmente isométricas são localmente isométricas. A sutileza (e a necessidade) das definições acima reside no fato de a recíproca não ser necessariamente verdadeira. O exemplo a seguir ilustra isso:

Exemplo 37.4 Sejam $\mathcal{S} \equiv \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{R}$ o cilindro de raio 1 em $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{R} = \left\{ \left(x^1,\, x^2,\, x^3\right) \in \mathbb{R}^3 | \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 = 1 \right\}$. Considere-se a aplicação $\Psi : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$ dada por

$$\Psi(x,\, y) \,:=\, \left(\cos x,\, \operatorname{sen} x,\, y\right),$$

para cada $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$. Essa aplicação não é um um difeomorfismo (ou sequer um homeomorfismo) por não ser sequer bijetora.

Tomemos $q \in \mathbb{R}^2$ com coordenadas $(x_0,\, y_0)$ e seja $\mathcal{A}_q \subset \mathbb{R}^2$ a faixa aberta de largura 2π centrada em q:

$$\mathcal{A}_q \,=\, \left\{ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 | \, |x - x_0| < \pi \right\}.$$

Restrita a $\mathcal{A}_q$, Ψ é bijetora em sua imagem e, em verdade, é um difeomorfismo de $\mathcal{A}_q$ em $\mathcal{B}_q \equiv \Psi\big(\mathcal{A}_q\big) \subset \mathcal{R}$, que difere do cilindro pela eliminação de uma reta vertical:

$$\Psi\big(\mathcal{A}_q\big) \equiv \mathcal{B}_q := \mathcal{R} \setminus \left\{ \big(\cos(x_0 - \pi),\, \operatorname{sen}(x_0 - \pi),\, y\big),\; y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Verifique! Tem-se também que, para qualquer $(x,\, y) \in \mathcal{A}_q$,

$$d\Psi_{(x,\, y)} \,=\, \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} x & 0 \\ \cos x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verifique! Segue imediatamente disso que se $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)$ são dois vetores arbitrários do espaço tangente $\mathsf{T}_p\mathbb{R}^2$ com $p \equiv (x,\, y) \in \mathcal{A}_q$, teremos

$$\left(d\Psi_{(x,\, y)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \cdot \left(d\Psi_{(x,\, y)} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \,=\, \begin{pmatrix} -a \operatorname{sen} x \\ a \cos x \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -c \operatorname{sen} x \\ c \cos x \\ d \end{pmatrix} \,=\, ac + bd \,=\, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

provando que Ψ é uma isometria local. Sucede, porém, que Ψ não pode ser uma isometria global, por não ser um difeomorfismo de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{R}$, variedades que não são difeomorfas, na verdade, sequer homeomorfas. ♦

• **O *Theorema Egregium* de Gauss e sua interpretação**

Podemos agora enunciar o

Teorema 37.2 (*Theorema Egregium*) *Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R}$ duas superfícies regulares. Seja $p \in \mathcal{S}$ e seja $\Psi : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$ uma isometria local em p. Então, $\boldsymbol{\kappa}^G_p = \boldsymbol{\kappa}^G_{\Psi(p)}$, ou seja, a curvatura Gaussiana é invariante por isometrias locais.* □

Prova. Seja $\boldsymbol{\varphi} : U \to \mathcal{S}$ uma parametrização de $\mathcal{S}$ em uma vizinhança aberta de p, com U suficientemente pequeno. Então, $\Psi \circ \boldsymbol{\varphi} : U \to \mathcal{R}$ é uma parametrização de $\mathcal{R}$ em uma vizinhança aberta de $\Psi(p)$. Sendo Ψ uma isometria local em torno de p, os coeficientes da primeira forma fundamental são preservados e são os mesmos em p e $\Psi(p)$, assim como nos respectivos pontos das vizinhanças $\boldsymbol{\varphi}(U)$ e $\Psi \circ \boldsymbol{\varphi}(U)$. Como a mesma parametrização nas coordenadas de U pode ser empregada em ambos os abertos de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R}$, concluímos de qualquer das fórmulas (37.157)-(37.159), página 2054, que a curvatura Gaussiana é a mesma em p e $\Psi(p)$, pois, como já comentamos, nos lados direitos delas comparecem apenas os coeficientes da primeira forma fundamental e suas duas primeiras derivadas nos parâmetros de U. ■

Como já mencionamos, Gauss descobriu esse teorema em 1827 após uma série de cômputos cujo significado é difícil interpretar hoje em dia. Ele, porém, imediatamente apercebeu-se de seu significado: ao afirmar que a curvatura Gaussiana é dependente apenas dos coeficientes da primeira forma fundamental (e, portanto, dos coeficientes do tensor métrico induzido) esse teorema afirma que essa curvatura pode ser determinada exclusivamente por medições intrínsecas de comprimentos a ângulos dentro da superfície, sem a necessidade de se particularizar a relação desta com o espaço ambiente

no qual ela se encontra. Essa descoberta pode ter surpreendido Gauss (daí a denominação "teorema notável"), mas seu significado não passou-lhe desapercebido, dando origem à concepção moderna em torno do tratamento intrínseco da Geometria Diferencial, que conduziu ao desenvolvimento da noção de variedade diferenciável, da Geometria Riemanniana e da Teoria da Relatividade Geral.

O significado e a relevância da invariância da curvatura Gaussiana por isometrias pode ser ilustrado através de um exemplo do dia-a-dia. Considere-se uma folha de papel sobre uma mesa. Pelo fato de a folha ser plana, sua curvatura Gaussiana é nula em todos os seus pontos. Tomemos agora essa folha e curvêmo-la no ar sem rasgá-la, esgarçá-la, amassá-la ou vincá-la (e sem molhá-la), de sorte que as distâncias entre seus pontos ao longo da superície do papel permaneçam as mesmas. O *Theorema Egregium* afirma que a folha de papel assim transformada continua tendo curvatura Gaussiana nula em todos os seus pontos, pois a transformação aplicada nela é uma isometria (preserva comprimentos e ângulos).

Diversas outras aplicações menos triviais do *Theorema Egregium* podem ser encontradas na literatura já citada [362, 524, 519, 19, 315] e recomendamos sua leitura ao leitor interessado em explorar suas consequências.

37.2.4.5 As Equações Fundamentais em Notação Tensorial. Relação com o Tensor de Curvatura

Para facilitar a comparação dos resultados aqui apresentados com aqueles do Capítulo 35, página 1878, ou seja, com os resultados da Geometria Riemanniana (e Pseudo-Riemanniana), vamos mostrar como as diversas fórmulas que obtivemos se deixam escrever em notação tensorial. Faremos uso de diversas noções e relações apresentadas no Capítulo 35, sobretudo as noções de tensor de curvatura de Riemann, de tensor de Ricci etc.

• **A primeira e a segunda formas fundamentais**

Recordemos, primeiramente, a identificação das componentes da primeira forma fundamental com as componentes (covariantes e contravariantes) do tensor métrico. Segundo (37.93), página 2042,

$$g_{11} \,=\, \mathrm{E}\,, \qquad g_{12} \,=\, g_{21} = \mathrm{F}\,, \qquad g_{22} \,=\, \mathrm{G}$$

$$\text{e} \qquad g^{11} \,=\, \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\,, \qquad g^{12} \,=\, g^{21} \,=\, \frac{-\mathrm{F}}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\,, \qquad g^{22} \,=\, \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\,. \tag{37.163}$$

Denotamos os coeficientes da segunda forma fundamental por J_{ij}. Especificamente, definimos

$$\mathbf{J} \,:=\, \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{f} \\ \mathrm{f} & \mathrm{g} \end{pmatrix}.$$

Em (37.126) já atestamos que as componentes g_{ij} e J_{ij} transformam-se como tensores por mudanças de coordenadas. Com essas definições, a relação (37.118) ou (37.119), página 2048, fica simplesmente,

$$c^i_{\ j} \,=\, -g^{ik} J_{kj}\,, \tag{37.164}$$

com $i,\, j \in \{1,\, 2\}$ e com uso da convenção de Einstein (soma em k, com $k = 1$ e $k = 2$). Naturalmente, isso implica

$$J_{ij} \,=\, -g_{ik} c^k_{\ j}\,,$$

que equivale à relação (37.117), página 2048.

A fórmula de Gauss (37.123), página 2049, para a curvatura Gaussiana assume a forma $\boldsymbol{\kappa}^G = \frac{\det \mathbf{J}}{\det \mathbf{G}}$, onde $\det \mathbf{J}$ e $\det \mathbf{G}$ são o determinante da matriz de elementos J_{ij} e, respectivamente, g_{ij}.

• **Os símbolos de Christoffel**

Já comentamos no Exercício E. 37.10, página 2052, que as relações (37.140), página 2052, coincidem com os símbolos de Christoffel para os coeficientes da conexão de Levi-Civita associada ao tensor métrico induzido e, portanto, por

(35.133), página 1911, tem-se

$$\Gamma^k{}_{ij} \;=\; \frac{1}{2}g^{kl}\left[\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right] \;=\; \left\{\begin{array}{c} k \\ i\,j \end{array}\right\}, \qquad i,\,j,\,k\in\{1,\,2\}\,,$$

sendo $x^1\equiv u$ e $x^2\equiv v$. Dessa forma, podemos entender que os coeficientes $\Gamma^i{}_{jk}$ são coeficientes de uma conexão afim de Levi-Civita.

E. 37.14 *Exercício*. Verifique isso usando (35.133), (37.140) e (37.163). ✣

• **As equações de Weingarten e de Gauss**

É também importante reconhecer a forma tensorial das relações Weingarten e de Gauss. As equações de Gauss (37.128)-(37.130), página 2050, se expressam como

$$\boldsymbol{\varphi}_{,ij} \;=\; \Gamma^k{}_{ij}\boldsymbol{\varphi}_{,k}+J_{ij}\mathbf{N}_{\mathcal{S}}\,, \qquad i,\,j\in\{1,\,2\}\,,$$

sendo a soma feita com k variando em $\{1,\,2\}$. Acima, usamos a notação segundo a qual $A_{,i}$ designa a derivada parcial de uma função A em relação à coordenada x^i, *i.e.* $A_{,i}\equiv\frac{\partial A}{\partial x^i}$ e analogamente para as derivadas de ordem superior.

As equações (37.111), página 2047 se expressam como $(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_{,i}=c^j{}_i\,\boldsymbol{\varphi}_{,j}$ com $i\in\{1,\,2\}$ (e sendo a soma feita com j variando em $\{1,\,2\}$) e, portanto, usando (37.164), as equações de Weingarten (37.120)-(37.121), página 2049, ficam, nessa notação,

$$(\mathbf{N}_{\mathcal{S}})_{,i} \;=\; -g^{jk}J_{ki}\,\boldsymbol{\varphi}_{,j}\,, \qquad i\in\{1,\,2\}\,,$$

sendo a soma feita com j e k variando em $\{1,\,2\}$.

É também importante reconhecer a forma tensorial das relações de Mainardi-Codazzi (37.153) e (37.156) e de Gauss-Codazzi (37.151)-(37.152) e (37.154)-(37.155).

• **As equações de Mainardi-Codazzi**

As relações de Mainardi-Codazzi (37.153) e (37.156), página 2053, assumem a forma

$$J_{ij,l}-\Gamma^k{}_{il}J_{kj} \;=\; J_{il,j}-\Gamma^k{}_{ij}J_{kl}\,. \tag{37.165}$$

E. 37.15 *Exercício*. Verifique! Talvez o mais simples a se fazer seja expandir (37.165) e constatar a identidade com as relações (37.153) e (37.156). Note-se que, devido à simetria de J_{ij} e de $\Gamma^k{}_{ij}$ em relação aos índices i e j, algumas das relações em (37.165) são triviais. ✣

E. 37.16 *Exercício*. Usando (35.89), página 1901, verifique que as relações de Mainardi-Codazzi na forma (37.165) podem ser escritas em termos de derivadas covariantes de $\mathbf{J}$ da seguinte forma:

$$J_{ij;l} \;=\; J_{il;j}\,. \tag{37.166}$$

Sugestão: acrescente o termo $-\Gamma^k{}_{lj}J_{ik}$ a ambos os lados de (37.165) e compare o resultado à expressão (35.89). ✣

• **As equações de Gauss-Codazzi e sua relação com o tensor de curvatura de Riemann**

Para tratar das equações de Gauss-Codazzi (37.151)-(37.152) e (37.154)-(37.155) é conveniente recordarmos as expressões (35.192)-(35.193), página 1924, para as componentes do tensor de curvatura de Riemann associado a conexões de Levi-Civita:

$$R^l{}_{kij} \;=\; \frac{\partial\,\Gamma^l{}_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial\,\Gamma^l{}_{ik}}{\partial x^j}+\Gamma^a{}_{jk}\Gamma^l{}_{ia}-\Gamma^a{}_{ik}\Gamma^l{}_{ja} \tag{37.167}$$

$$\;=\; \left(\Gamma^l{}_{jk}\right)_{,i}-\left(\Gamma^l{}_{ik}\right)_{,j}+\Gamma^a{}_{jk}\Gamma^l{}_{ia}-\Gamma^a{}_{ik}\Gamma^l{}_{ja}\,. \tag{37.168}$$

Tendo-as em mãos, as relações (37.151)-(37.152) e (37.154)-(37.155) correspondem a $i=2$ e $j=1$, sendo que para os diversos casos de l e k, temos:

• caso $l=1$ e $k=1$, corresponde à equação (37.151): $$R^1{}_{112} \;=\; -\frac{\mathrm{eg}-\mathrm{f}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\mathrm{F}\,, \tag{37.169}$$

• caso $l=2$ e $k=1$, corresponde à equação (37.152): $$R^2{}_{112} \;=\; \frac{\mathrm{eg}-\mathrm{f}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\mathrm{E}\,, \tag{37.170}$$

• caso $l=1$ e $k=2$, corresponde à equação (37.154): $$R^1{}_{212} \;=\; -\frac{\mathrm{eg}-\mathrm{f}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\mathrm{G}\,, \tag{37.171}$$

• caso $l=2$ e $k=2$, corresponde à equação (37.155): $$R^2{}_{212} \;=\; \frac{\mathrm{eg}-\mathrm{f}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\mathrm{F}\,. \tag{37.172}$$

Devido às propriedades de antissimetria das componentes $R^l{}_{kij}$ (vide Proposição 35.11, página 1925), especificamente, devido ao fato de valer $R^l{}_{kij}=-R^l{}_{kji}$ para todos i, j, k e l, as componentes indicadas em (37.169)-(37.172) são <u>todas</u> as componentes não trivialmente nulas de $R^l{}_{kij}$.

As relações (37.169)-(37.172) são a expressão das relações de Gauss-Codazzi em termos das componentes do tensor de curvatura de Riemann. Essas relações também podem ser expressas em termos das componentes $R_{mkij}=g_{ml}R^l{}_{kij}$. Obtemos, após cômputos simples,

$$R_{1112} \;=\; 0\,, \tag{37.173}$$

$$R_{1212} \;=\; \det\mathbf{J}\,, \tag{37.174}$$

$$R_{2112} \;=\; -\det\mathbf{J}\,, \tag{37.175}$$

$$R_{2212} \;=\; 0\,. \tag{37.176}$$

Novamente, observe-se que essas relações são compatíveis com as propriedades de simetria dos índices, expressas na Proposição 35.11, página 1925. Essas nos mostram também que, no presente caso bidimensional, apenas a componente R_{1212} é independente e é igual ao determinante da segunda forma fundamental: $\det\mathbf{J}=\mathrm{eg}-\mathrm{f}^2$.

As relações (37.169)-(37.172) assumem um caráter mais interessante se expressarmos as componentes do *tensor de Ricci*, introduzido na Seção 35.3.4, página 1929, cujas componentes se escrevem como $R_{ij}=R^l{}_{ilj}$ (vide (35.222), página 1930). Temos assim, no caso corrente:

$$R_{11} \;=\; R^1{}_{111}+R^2{}_{121} \overset{(37.170)}{=} -\frac{\mathrm{eg}-\mathrm{f}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\mathrm{E}\,, \tag{37.177}$$

$$R_{12} \;=\; R^1{}_{112}+R^2{}_{122} \overset{(37.169)}{=} -\frac{\mathrm{eg}-\mathrm{f}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\mathrm{F}\,, \tag{37.178}$$

$$R_{22} \;=\; R^1{}_{212}+R^2{}_{222} \overset{(37.154)}{=} -\frac{\mathrm{eg}-\mathrm{f}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\mathrm{G}\,, \tag{37.179}$$

sendo ainda $R_{21}=R_{12}$, devido a (35.224), página 1930. De forma mais compacta (e relevante) podemos expressar essas relações na forma

$$R_{ij} \;=\; -\frac{\mathrm{eg}-\mathrm{f}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}g_{ij} \;=\; -\boldsymbol{\kappa}^G g_{ij}\,, \qquad i,\,j\in\{1,\,2\}\,. \tag{37.180}$$

Por fim, podemos obter disso uma expressão para a chamada *curvatura escalar*, que é definida por $\mathscr{R}:=R^i{}_i=g^{ij}R_{ij}$ (vide (35.227), página 1931). Usando (37.180), temos

$$\mathscr{R} \;=\; -\boldsymbol{\kappa}^G g^{ij}g_{ij} \;=\; -2\boldsymbol{\kappa}^G\,. \tag{37.181}$$

O sinal "−" nessa expressão provém do fato (já observado alhures, vide Nota à página 1919) que, em nossa definição do tensor de curvatura Riemann, seguimos a convenção mais comummente usada na Teoria da Relatividade Geral. Para a

convenção da Geometria Riemanniana deveríamos trocar o sinal do tensor de curvatura Riemann e obteríamos $\mathscr{R} = +2\boldsymbol{\kappa}^G$. De qualquer maneira, essa relação nos mostra que, no caso considerado, a curvatura Gaussiana essencialmente coincide (a menos de um fator $\pm 1/2$) com o escalar de curvatura.

Comentamos ainda que a igualdade (37.181) é mais uma manifestação do *Theorema Egregium* de Gauss, pois a curvatura escalar $\mathscr{R}$ pode ser expressa em termos das componentes do tensor métrico e suas duas primeiras derivadas, somente, como em (35.228), página 1931. Vide também (35.194), página 1924.

Outra decorrência direta de (37.180) e (37.181) é a relação

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \mathscr{R} \;=\; 0 \,, \qquad i,\, j \in \{1,\, 2\} \,. \tag{37.182}$$

Ela expressa uma particularidade de variedades bidimensionais: a nulidade do *tensor de Einstein*, já demonstrada no Exercício E. 35.31, página 1934. Como lá indicado, essa propriedade vale também no caso pseudo-Riemanniano.

Por fim, comentamos que a igualdade (37.181) expressa também a invariância da curvatura Gaussiana por alterações dos parâmetros que coordenatizam a superfície $\mathcal{S}$ (mudanças de coordenadas), o que sabemos ser válido para a curvatura escalar $\mathscr{R}$. Essa invariância de $\boldsymbol{\kappa}^G$ já fora demonstrada em (37.127), página 2050, e é mais uma evidência da relevância dessa noção na teoria das superfícies regulares bidimensionais orientadas.

37.2.5 Derivação Covariante e seu Significado em Superfícies

Nesta seção discutimos como a noção de *derivação covariante* surge no contexto da geometria de superfícies. Essa noção foi introduzida de forma geral e abstrata na Seção 35.2, página 1892, do Capítulo 35, através da noção de *conexão afim*. Nossa ideia é fornecer uma base intuitiva para essa noção, de sorte a justificar melhor aquela definição geral.

• **Considerações preparatórias**

Como antes, seja $\mathcal{S}$ uma superfície regular orientada em $\mathbb{R}^3$ e seja $\boldsymbol{\varphi} : U \to \mathcal{S}$ um sistema de coordenadas em $\mathcal{S}$, com U sendo um aberto em $\mathbb{R}^2$. Seja V um campo vetorial diferenciável em $\mathcal{S}$ assumindo, em cada ponto, valores no respectivo espaço tangente. Assim, para cada $p \in \mathcal{S}$, tem-se $V_p \in \mathsf{T}_p\mathcal{S}$. Naturalmente, para cada $p \in \mathcal{S}$ o vetor V_p é também um elemento de $\mathbb{R}^3$ e será implicitamente considerado como tal no que segue.

Consideraremos uma carta de coordenadas locais em $\mathcal{S}$ que associa bijetivamente pontos de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ a pontos de um aberto $\boldsymbol{\varphi}(U) \subset \mathcal{S}$. Assim, para cada $(u,\, v) \in U$ denotamos por $\boldsymbol{\varphi}(u,\, v) \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$. Para $(u,\, v) \in U$ e para o correspondente ponto $\boldsymbol{\varphi}(u,\, v) \subset \mathcal{S}$ os vetores $\boldsymbol{\varphi}_u(u,\, v)$ e $\boldsymbol{\varphi}_v(u,\, v)$ compõem uma base (não necessariamente ortonormal) em $\mathsf{T}_{\boldsymbol{\varphi}(u,\, v)}\mathcal{S}$ e juntando-se ao vetor normal $\mathbf{N}_{\mathcal{S}}(u,\, v)$ constitui-se uma base em $\mathbb{R}^3$.

O campo vetorial V pode ser também considerado em termos do campo $V \circ \boldsymbol{\varphi}$ que associa a cada ponto de $(u,\, v) \in U$ um vetor $V(u,\, v) \in \mathsf{T}_{\boldsymbol{\varphi}(u,\, v)}\mathcal{S}$. Dessa forma, o campo vetorial pode ser considerado como uma função $V(u,\, v)$ assumindo valores em cada espaço tangente $\mathsf{T}_{\boldsymbol{\varphi}(u,\, v)}\mathcal{S}$.

Em cada ponto $p \in \mathcal{S}$, a derivada covariante do campo V na direção u (respectivamente, v), denotada por $\nabla_u V$ (respec., por $\nabla_v V$), é definida como a projeção no plano tangente $\mathsf{T}_p\mathcal{S}$ do vetor $\frac{\partial V}{\partial u}(p)$ (respec., $\frac{\partial V}{\partial v}(p)$). No que segue, iremos elaborar melhor essa definição.

• **Componentes contravariantes e covariantes de um vetor**

Em termos dos vetores de base $\boldsymbol{\varphi}_u(u,\, v)$ e $\boldsymbol{\varphi}_v(u,\, v)$ escrevemos

$$V(u,\, v) \;\equiv\; V^1(u,\, v)\boldsymbol{\varphi}_u(u,\, v) + V^2(u,\, v)\boldsymbol{\varphi}_v(u,\, v) \,. \tag{37.183}$$

Portanto, $V^1(u,\, v)$ e $V^2(u,\, v)$ denotam as componentes de V na base composta por $\boldsymbol{\varphi}_u(u,\, v)$ e $\boldsymbol{\varphi}_v(u,\, v)$. Essas componentes são denominadas *componentes contravariantes* do vetor $V(u,\, v)$. Com elas, podemos representar o vetor $V(u,\, v)$ como um vetor coluna $\binom{V^1(u,\, v)}{V^2(u,\, v)}$. Para o que segue é conveniente definirmos também as chamadas *componentes covariantes* de V, que denotamos por $V_1(u,\, v)$ e $V_2(u,\, v)$, definidas por

$$\begin{pmatrix} V_1(u,\, v) \\ V_2(u,\, v) \end{pmatrix} \;:=\; \mathbf{G}(u,\, v) \begin{pmatrix} V^1(u,\, v) \\ V^2(u,\, v) \end{pmatrix} \,,$$

com $\mathbf{G}$ sendo a matriz métrica, definida em (37.124), página 2049.

Tomemos dois pontos $p = \boldsymbol{\varphi}(u_0,\, v_0)$ e $q = \boldsymbol{\varphi}(u,\, v)$ com $(u_0,\, v_0)$, $(u,\, v) \in U$ que sejam "próximos" (pois nosso interesse é tomar ao final o limite $(u,\, v) \to (u_0,\, v_0)$). Vamos agora definir um procedimento com o qual o vetor $V_p \in \mathsf{T}_p\mathcal{S}$ é associado a um vetor em $\mathsf{T}_q\mathcal{S}$ (sic!).

Esse vetor, que denotaremos por $(\underline{V})_q$, consiste na projeção ortogonal de V_p sobre o plano tangente a $\mathcal{S}$ no ponto q. Assim, tudo se passa como se transportássemos o vetor V_p paralelamente a si mesmo **no espaço ambiente** $\mathbb{R}^3$ do ponto p ao ponto q e, em seguida, o projetássemos sobre o plano tangente $\mathsf{T}_q\mathcal{S}$. A Figura 37.3, página 2061, ilustra esse procedimento.

Em termos mais precisos, se escrevermos V_p em termos da base composta pelos vetores $\boldsymbol{\varphi}_u(u,\, v)$, $\boldsymbol{\varphi}_v(u,\, v)$ e o vetor normal $\mathbf{N}_{\mathcal{S}}(u,\, v)$, vetores esses associados ao ponto q, teríamos

$$V_p \;\equiv V(u_0,\, v_0) \;=\; \underline{V}^1(u,\, v)\boldsymbol{\varphi}_u(u,\, v) + \underline{V}^2(u,\, v)\boldsymbol{\varphi}_v(u,\, v) + \underline{V}^3(u,\, v)\mathbf{N}_{\mathcal{S}}(u,\, v) \,, \tag{37.184}$$

sendo $\underline{V}^k$, $k = 1,\, 2,\, 3$ as componentes de $V(u_0,\, v_0)$ na base composta pelos vetores $\boldsymbol{\varphi}_u(u,\, v)$, $\boldsymbol{\varphi}_v(u,\, v)$ e o vetor normal $\mathbf{N}_{\mathcal{S}}(u,\, v)$. Assim,

$$(\underline{V})_q \;\equiv\; \underline{V}(u,\, v) \;:=\; \underline{V}^1(u,\, v)\boldsymbol{\varphi}_u(u,\, v) + \underline{V}^2(u,\, v)\boldsymbol{\varphi}_v(u,\, v)$$

é a projeção de V_p sobre o plano tangente $\mathsf{T}_q\mathcal{S}$.

Ambos os vetores $V(u,\, v)$ e $\underline{V}(u,\, v)$, estão definidos no espaço tangente $\mathsf{T}_q\mathcal{S}$ e nosso objetivo é estudar a diferença

$$V(u,\, v) - \underline{V}(u,\, v) \;=\; \big(V^1(u,\, v) - \underline{V}^1(u,\, v)\big)\boldsymbol{\varphi}_u(u,\, v) + \big(V^2(u,\, v) - \underline{V}^2(u,\, v)\big)\boldsymbol{\varphi}_v(u,\, v) \,.$$

Essa diferença permite-nos uma comparação (em um mesmo espaço tangente) entre os vetores $V(u_0,\, v_0)$ e $V(u,\, v)$ e, assim, quantificar a taxa de variação dos mesmos, o que nos levará à definição de derivação covariante. Para tal, precisamos de expressões mais explícitas para as componentes $\underline{V}^1(u,\, v)$ e $\underline{V}^2(u,\, v)$ em termos das componentes "originais"de V_p, que são $V^1(u_0,\, v_0)$ e $V^2(u_0,\, v_0)$.

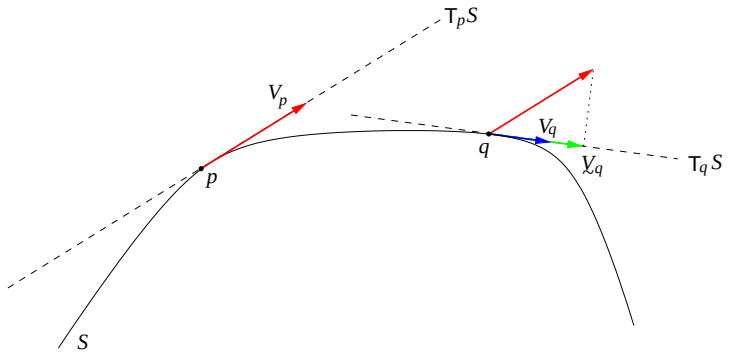

Figura 37.3: Descrição esquemática do transporte paralelo de vetores. Aqui, $\mathcal{S}$ representa uma superfície regular (no caso, uma curva regular em $\mathbb{R}^2$). Os pontos p e q são pontos distintos de $\mathcal{S}$ e as linhas tracejadas $\mathsf{T}_p\mathcal{S}$ e $\mathsf{T}_q\mathcal{S}$ representam os respectivos espaços tangentes. Um campo vetorial V assume os valores V_p em $\mathsf{T}_p\mathcal{S}$ (em vermelho) e V_q em $\mathsf{T}_q\mathcal{S}$ (em azul). O vetor V_p é então transportado paralelamente a si de p a q e projetado ortogonalmente em $\mathsf{T}_q\mathcal{S}$, resultando no vetor $\underline{V}_q$ (em verde). Na diferença $V_q - \underline{V}_q$ ambos os vetores vivem no mesmo espaço tangente $\mathsf{T}_q\mathcal{S}$, resultando em um vetor no mesmo espaço tangente $\mathsf{T}_q\mathcal{S}$, mesmo com a tomada do limite $q \to p$. O vetor obtido nesse limite é a derivada covariante do campo V.

• **Preparações para a definição de derivada covariante**

Se retornarmos a (37.184) e tomarmos o produto escalar de ambos os lados pelos vetores de base $\boldsymbol{\varphi}_u(u,\,v)$ e $\boldsymbol{\varphi}_v(u,\,v)$, obtemos, com as identificações (37.113),

$$V(u_0,\,v_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}_u(u,\,v) \;=\; \underset{\sim}{V}^1(u,\,v)\mathrm{E}(u,\,v)+\underset{\sim}{V}^2(u,\,v)\mathrm{F}(u,\,v)\,, \tag{37.185}$$

$$V(u_0,\,v_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}_v(u,\,v) \;=\; \underset{\sim}{V}^1(u,\,v)\mathrm{F}(u,\,v)+\underset{\sim}{V}^2(u,\,v)\mathrm{G}(u,\,v)\,, \tag{37.186}$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} V(u_0,\,v_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}_u(u,\,v)\\ V(u_0,\,v_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}_v(u,\,v)\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}\mathrm{E}(u,\,v) & \mathrm{F}(u,\,v)\\ \mathrm{F}(u,\,v) & \mathrm{G}(u,\,v)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underset{\sim}{V}^1(u,\,v)\\ \underset{\sim}{V}^2(u,\,v)\end{pmatrix} \;=\; \mathbf{G}(u,\,v)\begin{pmatrix}\underset{\sim}{V}^1(u,\,v)\\ \underset{\sim}{V}^2(u,\,v)\end{pmatrix}\,,$$

com $\mathbf{G}$ sendo a matriz métrica, definida em (37.124). Disso extraímos que

$$\begin{pmatrix}\underset{\sim}{V}^1(u,\,v)\\ \underset{\sim}{V}^2(u,\,v)\end{pmatrix} \;=\; \mathbf{G}(u,\,v)^{-1}\begin{pmatrix} V(u_0,\,v_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}_u(u,\,v)\\ V(u_0,\,v_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}_v(u,\,v)\end{pmatrix}\,. \tag{37.187}$$

Precisamos agora encontrar expressões adequadas para $V(u_0,\,v_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}_u(u,\,v)$ e $V(u_0,\,v_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}_v(u,\,v)$. O primeiro passo é escrever os vetores $\boldsymbol{\varphi}_u(u,\,v)$ e $\boldsymbol{\varphi}_v(u,\,v)$, que compõem uma base$\mathsf{T}_q\mathcal{S}$, em termos dos vetores $\boldsymbol{\varphi}_u(u_0,\,v_0)$ e $\boldsymbol{\varphi}_v(u_0,\,v_0)$, que compõem uma base em $\mathsf{T}_p\mathcal{S}$. Usando a expansão em série de Taylor em primeira ordem (em $u-u_0$ e $v-v_0$) para $\boldsymbol{\varphi}_u$ e $\boldsymbol{\varphi}_v$, podemos escrever

$$\boldsymbol{\varphi}_u(u,\,v) \;=\; \boldsymbol{\varphi}_u(u_0,\,v_0)+\boldsymbol{\varphi}_{uu}(u_0,\,v_0)\big(u-u_0\big)+\boldsymbol{\varphi}_{uv}(u_0,\,v_0)\big(v-v_0\big)+\mathcal{O}(2)\,, \tag{37.188}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_v(u,\,v) \;=\; \boldsymbol{\varphi}_v(u_0,\,v_0)+\boldsymbol{\varphi}_{vu}(u_0,\,v_0)\big(u-u_0\big)+\boldsymbol{\varphi}_{vv}(u_0,\,v_0)\big(v-v_0\big)+\mathcal{O}(2)\,. \tag{37.189}$$

Com (37.188) e (37.183) (no ponto $(u_0,\,v_0)$), podemos escrever

$$V(u_0,\,v_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}_u(u,\,v) \;=$$

$$\Big(V^1(u_0,\,v_0)\boldsymbol{\varphi}_u(u_0,\,v_0)+V^2(u_0,\,v_0)\boldsymbol{\varphi}_v(u_0,\,v_0)\Big)\cdot\Big(\boldsymbol{\varphi}_u(u_0,\,v_0)+\boldsymbol{\varphi}_{uu}(u_0,\,v_0)\big(u-u_0\big)+\boldsymbol{\varphi}_{uv}(u_0,\,v_0)\big(v-v_0\big)\Big)+\mathcal{O}(2)$$

$$\begin{aligned}&=\;\Big[V^1(u_0,\,v_0)\mathrm{E}(u_0,\,v_0)+V^2(u_0,\,v_0)\mathrm{F}(u_0,\,v_0)\Big]\\ &\quad+(u-u_0)\Big[V^1(u_0,\,v_0)\big(\Gamma^1{}_{11}\mathrm{E}+\Gamma^2{}_{11}\mathrm{F}\big)+V^2(u_0,\,v_0)\big(\Gamma^1{}_{11}\mathrm{F}+\Gamma^2{}_{11}\mathrm{G}\big)\Big]\\ &\quad+(v-v_0)\Big[V^1(u_0,\,v_0)\big(\Gamma^1{}_{12}\mathrm{E}+\Gamma^2{}_{12}\mathrm{F}\big)+V^2(u_0,\,v_0)\big(\Gamma^1{}_{12}\mathrm{F}+\Gamma^2{}_{12}\mathrm{G}\big)\Big]+\mathcal{O}(2)\,,\end{aligned} \tag{37.190}$$

sendo que, acima, usamos as relações (37.131), (37.132), (37.133), (37.134) e (37.135). Analogamente, com (37.189) e (37.183) (no ponto $(u_0,\,v_0)$), podemos escrever

$$V(u_0,\,v_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}_v(u,\,v) \;=$$

$$\Big(V^1(u_0,\,v_0)\boldsymbol{\varphi}_u(u_0,\,v_0)+V^2(u_0,\,v_0)\boldsymbol{\varphi}_v(u_0,\,v_0)\Big)\cdot\Big(\boldsymbol{\varphi}_v(u_0,\,v_0)+\boldsymbol{\varphi}_{vu}(u_0,\,v_0)\big(u-u_0\big)+\boldsymbol{\varphi}_{vv}(u_0,\,v_0)\big(v-v_0\big)\Big)+\mathcal{O}(2)$$

$$\begin{aligned}&=\;\Big[V^1(u_0,\,v_0)\mathrm{F}(u_0,\,v_0)+V^2(u_0,\,v_0)\mathrm{G}(u_0,\,v_0)\Big]\\ &\quad+(u-u_0)\Big[V^1(u_0,\,v_0)\big(\Gamma^1{}_{12}\mathrm{E}+\Gamma^2{}_{12}\mathrm{F}\big)+V^2(u_0,\,v_0)\big(\Gamma^1{}_{12}\mathrm{F}+\Gamma^2{}_{12}\mathrm{G}\big)\Big]\\ &\quad+(v-v_0)\Big[V^1(u_0,\,v_0)\big(\Gamma^1{}_{22}\mathrm{E}+\Gamma^2{}_{22}\mathrm{F}\big)+V^2(u_0,\,v_0)\big(\Gamma^1{}_{22}\mathrm{F}+\Gamma^2{}_{22}\mathrm{G}\big)\Big]+\mathcal{O}(2)\,.\end{aligned} \tag{37.191}$$

Acima e abaixo, omitiremos, por simplicidade, a dependência com o ponto $(u_0,\,v_0)$ das funções $\Gamma^k{}_{ij}$, E, F e G.

Novamente, é conveniente escrever (37.190) e (37.191) conjuntamente em forma matricial. Obtemos,

$$\begin{pmatrix} V(u_0,\,v_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}_u(u,\,v)\\ V(u_0,\,v_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}_v(u,\,v)\end{pmatrix} \;=\; \Big\{\mathbb{1}_2+(u-u_0)N_1+(v-v_0)N_2\Big\}\mathbf{G}(u_0,\,v_0)\begin{pmatrix}V^1(u_0,\,v_0)\\ V^2(u_0,\,v_0)\end{pmatrix}+\mathcal{O}(2)\,,$$

onde

$$N_1 \;:=\; \begin{pmatrix}\Gamma^1{}_{11} & \Gamma^2{}_{11}\\ \Gamma^1{}_{12} & \Gamma^2{}_{12}\end{pmatrix} \qquad\text{e}\qquad N_2 \;:=\; \begin{pmatrix}\Gamma^1{}_{12} & \Gamma^2{}_{12}\\ \Gamma^1{}_{22} & \Gamma^2{}_{22}\end{pmatrix}\,. \tag{37.192}$$

E. 37.17 *Exercício*. Verifique a validade dessas relações! ✣

Retornando com isso a (37.187), temos

$$\begin{pmatrix}\underset{\sim}{V}^1(u,\,v)\\ \underset{\sim}{V}^2(u,\,v)\end{pmatrix} \;=\; \mathbf{G}(u,\,v)^{-1}\Big\{\mathbb{1}_2+(u-u_0)N_1+(v-v_0)N_2\Big\}\mathbf{G}(u_0,\,v_0)\begin{pmatrix}V^1(u_0,\,v_0)\\ V^2(u_0,\,v_0)\end{pmatrix}+\mathcal{O}(2)\,. \tag{37.193}$$

Em termos das componentes *covariantes*, obtemos disso

$$\begin{pmatrix}V_1(u_0,\,v_0)\\ V_2(u_0,\,v_0)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\underset{\sim}{V}_1(u,\,v)\\ \underset{\sim}{V}_2(u,\,v)\end{pmatrix} \;=\; -\Big\{(u-u_0)N_1+(v-v_0)N_2\Big\}\begin{pmatrix}V_1(u_0,\,v_0)\\ V_2(u_0,\,v_0)\end{pmatrix}+\mathcal{O}(2) \tag{37.194}$$

e, portanto,

$$\begin{pmatrix}V_1(u,\,v)\\ V_2(u,\,v)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\underset{\sim}{V}_1(u,\,v)\\ \underset{\sim}{V}_2(u,\,v)\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}V_1(u,\,v)\\ V_2(u,\,v)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}V_1(u_0,\,v_0)\\ V_2(u_0,\,v_0)\end{pmatrix}-\Big\{(u-u_0)N_1+(v-v_0)N_2\Big\}\begin{pmatrix}V_1(u_0,\,v_0)\\ V_2(u_0,\,v_0)\end{pmatrix}+\mathcal{O}(2) \tag{37.195}$$

• **A derivada covariante**

As expressões

$$\nabla_1\begin{pmatrix}V_1(u_0,\,v_0)\\ V_2(u_0,\,v_0)\end{pmatrix} \;\equiv\; \nabla_u\begin{pmatrix}V_1(u_0,\,v_0)\\ V_2(u_0,\,v_0)\end{pmatrix} \;:=\; \lim_{u\to u_0}\lim_{v\to v_0}\frac{1}{u-u_0}\left[\begin{pmatrix}V_1(u,\,v)\\ V_2(u,\,v)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\underset{\sim}{V}_1(u,\,v)\\ \underset{\sim}{V}_2(u,\,v)\end{pmatrix}\right]\,,$$

$$\nabla_2\begin{pmatrix}V_1(u_0,\,v_0)\\ V_2(u_0,\,v_0)\end{pmatrix} \;\equiv\; \nabla_v\begin{pmatrix}V_1(u_0,\,v_0)\\ V_2(u_0,\,v_0)\end{pmatrix} \;:=\; \lim_{v\to v_0}\lim_{u\to u_0}\frac{1}{v-v_0}\left[\begin{pmatrix}V_1(u,\,v)\\ V_2(u,\,v)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\underset{\sim}{V}_1(u,\,v)\\ \underset{\sim}{V}_2(u,\,v)\end{pmatrix}\right]\,,$$

(reparar na ordem em que os limites são tomados) são denominadas *derivadas covariantes* das componentes covariantes de V em relação a u e v, respectivamente. Logo em seguida, obteremos expressões mais explícitas para as mesmas. Analogamente, as expressões

$$\nabla_1 \begin{pmatrix} V^1(u_0,\, v_0) \\ V^2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix} \;\equiv\; \nabla_u \begin{pmatrix} V^1(u_0,\, v_0) \\ V^2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix} := \lim_{u\to u_0}\lim_{v\to v_0} \frac{1}{u-u_0}\left[\begin{pmatrix} V^1(u,\, v) \\ V^2(u,\, v) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underset{\sim}{V}{}^1(u,\, v) \\ \underset{\sim}{V}{}^2(u,\, v) \end{pmatrix}\right], \quad (37.196)$$

$$\nabla_2 \begin{pmatrix} V^1(u_0,\, v_0) \\ V^2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix} \;\equiv\; \nabla_v \begin{pmatrix} V^1(u_0,\, v_0) \\ V^2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix} := \lim_{v\to v_0}\lim_{u\to u_0} \frac{1}{v-v_0}\left[\begin{pmatrix} V^1(u,\, v) \\ V^2(u,\, v) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underset{\sim}{V}{}^1(u,\, v) \\ \underset{\sim}{V}{}^2(u,\, v) \end{pmatrix}\right], \quad (37.197)$$

são denominadas *derivadas covariantes* das componentes contravariantes de V em relação a u e v, respectivamente.

Usando (37.195) e (37.192), segue disso que

$$\nabla_u \begin{pmatrix} V_1(u_0,\, v_0) \\ V_2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix} = \lim_{u\to u_0}\lim_{v\to v_0} \frac{1}{u-u_0}\left[\begin{pmatrix} V_1(u,\, v) \\ V_2(u,\, v) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_1(u_0,\, v_0) \\ V_2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix}\right] - N_1(u_0,\, v_0)\begin{pmatrix} V_1(u_0,\, v_0) \\ V_2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial u}(u_0,\, v_0) \\ \frac{\partial V_2}{\partial u}(u_0,\, v_0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{11} & \Gamma^2{}_{11} \\ \Gamma^1{}_{12} & \Gamma^2{}_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1(u_0,\, v_0) \\ V_2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix} \quad (37.198)$$

(acima, os símbolos de Christoffel são calculados em $(u_0,\, v_0)$) e, analogamente,

$$\nabla_v \begin{pmatrix} V_1(u_0,\, v_0) \\ V_2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix} = \lim_{v\to v_0}\lim_{u\to u_0} \frac{1}{v-v_0}\left[\begin{pmatrix} V_1(u,\, v) \\ V_2(u,\, v) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_1(u_0,\, v_0) \\ V_2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix}\right] - N_2(u_0,\, v_0)\begin{pmatrix} V_1(u_0,\, v_0) \\ V_2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial v}(u_0,\, v_0) \\ \frac{\partial V_2}{\partial v}(u_0,\, v_0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{12} & \Gamma^2{}_{12} \\ \Gamma^1{}_{22} & \Gamma^2{}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1(u_0,\, v_0) \\ V_2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix}. \quad (37.199)$$

Em notação tensorial, renomeando as coordenadas como $u \equiv x^1$ e $v \equiv x^2$, usando a convenção de Einstein e usando a convenção (37.141), página 2052, segundo a qual $\Gamma^k{}_{21} = \Gamma^k{}_{12}$, $k = 1,\, 2$, as expressões (37.198) e (37.199) se deixam escrever como

$$\nabla_i V_k \;=\; \frac{\partial V_k}{\partial x^i} - \Gamma^j{}_{ik} V_j\,, \qquad i,\, k \in \{1,\, 2\}\,. \quad (37.200)$$

Verifique! O leitor há de perceber que essa relação coincide com a expressão (35.88), página 1901, para o operador de derivação covariante (no caso aqui, para uma conexão de Levi-Civita) agindo nas componentes covariantes de um campo vetorial (1-formas).

• **A derivada covariante de componentes contravariantes**

As expressões para a derivada covariante das componentes contravariantes de um vetor são ligeiramente diferentes de (37.198) e (37.199) ou da sua forma tensorial (37.200), mas podem ser obtidas daquelas por um procedimento similar.

Retornando a (37.193) e escrevendo $\mathbf{G}(u,\, v) = \mathbf{G}(u_0,\, v_0) + (u-u_0)\mathbf{G}_u(u_0,\, v_0) + (v-v_0)\mathbf{G}_v(u_0,\, v_0) + \mathcal{O}(2)$, o que implica

$$\mathbf{G}(u,\, v)^{-1} \;=\; \mathbf{G}(u_0,\, v_0)^{-1} - \mathbf{G}(u_0,\, v_0)^{-1}\Big[(u-u_0)\mathbf{G}_u(u_0,\, v_0) + (v-v_0)\mathbf{G}_v(u_0,\, v_0)\Big]\mathbf{G}(u_0,\, v_0)^{-1} + \mathcal{O}(2)\,,$$

obtemos

$$\begin{pmatrix} V^1(u,\, v) \\ V^2(u,\, v) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underset{\sim}{V}{}^1(u,\, v) \\ \underset{\sim}{V}{}^2(u,\, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^1(u,\, v) \\ V^2(u,\, v) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V^1(u_0,\, v_0) \\ V^2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix}$$

$$+\; \mathbf{G}(u_0,\, v_0)^{-1}\Big[(u-u_0)\Big(\mathbf{G}_u(u_0,\, v_0) - N_1\mathbf{G}(u_0,\, v_0)\Big) + (v-v_0)\Big(\mathbf{G}_v(u_0,\, v_0) - N_2\mathbf{G}(u_0,\, v_0)\Big)\Big]\begin{pmatrix} V^1(u_0,\, v_0) \\ V^2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(2)\,. \quad (37.201)$$

Com as definições (37.196)-(37.197), obtemos

$$\nabla_u \begin{pmatrix} V^1(u_0,\, v_0) \\ V^2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V^1}{\partial u}(u_0,\, v_0) \\ \frac{\partial V^2}{\partial u}(u_0,\, v_0) \end{pmatrix} + \mathbf{G}(u_0,\, v_0)^{-1}\Big[\mathbf{G}_u(u_0,\, v_0) - N_1\mathbf{G}(u_0,\, v_0)\Big]\begin{pmatrix} V^1(u_0,\, v_0) \\ V^2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial V^1}{\partial u}(u_0,\, v_0) \\ \frac{\partial V^2}{\partial u}(u_0,\, v_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{11} & \Gamma^1{}_{12} \\ \Gamma^2{}_{11} & \Gamma^2{}_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^1(u_0,\, v_0) \\ V^2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix} \quad (37.202)$$

e

$$\nabla_v \begin{pmatrix} V^1(u_0,\, v_0) \\ V^2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V^1}{\partial v}(u_0,\, v_0) \\ \frac{\partial V^2}{\partial v}(u_0,\, v_0) \end{pmatrix} + \mathbf{G}(u_0,\, v_0)^{-1}\Big[\mathbf{G}_v(u_0,\, v_0) - N_2\mathbf{G}(u_0,\, v_0)\Big]\begin{pmatrix} V^1(u_0,\, v_0) \\ V^2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial V^1}{\partial v}(u_0,\, v_0) \\ \frac{\partial V^2}{\partial v}(u_0,\, v_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{21} & \Gamma^1{}_{22} \\ \Gamma^2{}_{21} & \Gamma^2{}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^1(u_0,\, v_0) \\ V^2(u_0,\, v_0) \end{pmatrix}. \quad (37.203)$$

Acima, fizemos uso das seguintes identidades, cuja demonstração encontra-se no Apêndice 37.A, página 2072:

$$\mathbf{G}^{-1}\Big[\mathbf{G}_u - N_1\mathbf{G}\Big] \;=\; \begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{11} & \Gamma^1{}_{12} \\ \Gamma^2{}_{11} & \Gamma^2{}_{12} \end{pmatrix} \overset{(37.192)}{=} N_1^T\,, \quad (37.204)$$

$$\mathbf{G}^{-1}\Big[\mathbf{G}_v - N_2\mathbf{G}\Big] \;=\; \begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{21} & \Gamma^1{}_{22} \\ \Gamma^2{}_{21} & \Gamma^2{}_{22} \end{pmatrix} \overset{(37.192)}{=} N_2^T\,. \quad (37.205)$$

De (37.204) e (37.205) seguem trivialmente as relações

$$\mathbf{G}_u \;=\; N_1\mathbf{G} + \mathbf{G}N_1^T\,, \quad (37.206)$$

$$\mathbf{G}_v \;=\; N_2\mathbf{G} + \mathbf{G}N_2^T\,, \quad (37.207)$$

que também empregaremos. Assim, em notação matricial, temos

$$\nabla_u \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix} \;=\; \frac{\partial}{\partial u}\begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix} + N_1^T \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix}\,, \tag{37.208}$$

$$\nabla_v \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix} \;=\; \frac{\partial}{\partial v}\begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix} + N_2^T \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix}\,. \tag{37.209}$$

Em notação tensorial, renomeando as coordenadas como $u \equiv x^1$ e $v \equiv x^2$, usando a convenção de Einstein e usando a convenção (37.141), página 2052, segundo a qual $\Gamma^k{}_{21} = \Gamma^k{}_{12}$, $k = 1,\ 2$, as expressões (37.203) e (37.203) (ou (37.208)-(37.209)) se deixam escrever como

$$\nabla_i V^k \;=\; \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + \Gamma^k{}_{ij} V^j\,, \qquad i,\ k \in \{1,\ 2\}\,. \tag{37.210}$$

Verifique! O leitor há de perceber que essa relação coincide com a expressão (35.63), página 1895, para o operador de derivação covariante (no caso aqui, para uma conexão de Levi-Civita) agindo nas componentes contravariantes de um campo vetorial.

Podemos dessa forma escrever, agora em notação vetorial (compare-se a (37.183), página 2060),

$$\nabla_i V \;=\; \nabla_i V^1 \boldsymbol{\varphi}_u + \nabla_i V^2 \boldsymbol{\varphi}_v \;=\; \left(\frac{\partial V^1}{\partial x^i} + \Gamma^1{}_{ij} V^j\right)\boldsymbol{\varphi}_u + \left(\frac{\partial V^2}{\partial x^i} + \Gamma^2{}_{ij} V^j\right)\boldsymbol{\varphi}_v\,, \qquad i \in \{1,\ 2\}\,.$$

• **A derivação covariante ∇ como uma conexão afim**

A derivação covariante apresentada acima define uma conexão afim, no sentido apresentado na Seção 35.2, página 1892: para dois campos vetoriais suaves A e B definimos $\nabla_A B := A^1 \nabla_1 B + A^2 \nabla_2 B$, com A^1 e A^2 sendo as componentes contravariantes de A. É elementar, nesse caso, verificar a validade das relações (35.55) e (35.56), página 1893.

37.2.5.1 O Transporte Paralelo ao Longo de uma Curva

Com as considerações acima podemos também definir a noção de derivação covariante ao longo de uma curva, noção introduzida no caso geral à página 1897.

Seja $c : I \ni t \mapsto c(t) \in \mathcal{S}$ uma curva diferenciável em $\mathbb{R}^3$ inteiramente contida em $\mathcal{S}$, onde I é algum intervalo de $\mathbb{R}$. Denotamos por $\big(u(t),\ v(t)\big) = \boldsymbol{\varphi}^{-1}\big(c(t)\big) \in U$ a pré-imagem da curva no espaço das coordenadas. Como sempre, vamos supor que o intervalo I seja pequeno o suficiente para que não haja autointerceptações da curva.

Seja V um campo vetorial no espaço tangente a $\mathcal{S}$ definido ao longo da imagem de c, ou seja, tal que $V(p) \in \mathsf{T}_p\mathcal{S}$ para cada p na imagem da curva c. Seja $V(t) \equiv (V \circ c)(t) = V\big(c(t)\big) \in \mathsf{T}_{c(t)}\mathcal{S}$, para todo $t \in I$.

Se $p \equiv c(t_0)$ e $q \equiv c(t)$ forem dois pontos da curva, suas imagens no espaço de coordenadas serão $\big(u(t),\, v(t)\big)$ e $\big(u(t_0),\, v(t_0)\big)$, respectivamente.

A derivada covariante de V ao longo da curva c é definida[31] como a projeção no plano tangente do vetor $\frac{dV}{dt}$. De forma totalmente similar às definições (37.196)-(37.197), temos

$$\begin{pmatrix} \frac{DV^1}{dt}\big(u(t_0),\ v(t_0)\big) \\ \frac{DV^2}{dt}\big(u(t_0),\ v(t_0)\big) \end{pmatrix} \;:=\; \lim_{t\to t_0} \frac{1}{t - t_0}\left[\begin{pmatrix} V^1\big(u(t),\ v(t)\big) \\ V^2\big(u(t),\ v(t)\big) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V^1\big(u(t_0),\ v(t_0)\big) \\ V^2\big(u(t_0),\ v(t_0)\big) \end{pmatrix}\right]\,. \tag{37.211}$$

[31] Por simplicidade tratamos apenas das derivadas das componentes contravariantes de V.

De acordo com (37.201), identificando-se $\big(u,\, v\big)$ com $\big(u(t),\, v(t)\big)$ e $\big(u_0,\, v_0\big)$ com $\big(u(t_0),\, v(t_0)\big)$, obtemos facilmente

$$\begin{pmatrix} \frac{DV^1}{dt}\big(u(t_0),\ v(t_0)\big) \\ \frac{DV^2}{dt}\big(u(t_0),\ v(t_0)\big) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{dV^1}{dt}\big(u(t_0),\ v(t_0)\big) \\ \frac{dV^2}{dt}\big(u(t_0),\ v(t_0)\big) \end{pmatrix} + \left[\frac{du}{dt}(t_0)\begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{11} & \Gamma^1{}_{12} \\ \Gamma^2{}_{11} & \Gamma^2{}_{12} \end{pmatrix} + \frac{dv}{dt}(t_0)\begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{21} & \Gamma^1{}_{22} \\ \Gamma^2{}_{21} & \Gamma^2{}_{22} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} V^1(u_0,\ v_0) \\ V^2(u_0,\ v_0) \end{pmatrix}\,,$$

sendo que, acima, empregamos as identidades (37.204)-(37.205). Como antes, os diversos coeficientes $\Gamma^i{}_{jk}$ são calculados nas coordenadas $\big(u(t_0),\ v(t_0)\big)$.

Em notação matricial isso fica (verifique!)

$$\frac{D}{dt}\begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix} \;=\; \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix} + \left[\frac{du}{dt}N_1^T + \frac{dv}{dt}N_2^T\right]\begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix}\,. \tag{37.212}$$

Novamente, podemos expressar essas relações em notação tensorial, obtendo

$$\frac{DV^k}{dt}(t_0) \;=\; \frac{dV^k}{dt}(t_0) + \frac{dx^i}{dt}(t_0) V^j(t_0)\,\Gamma^k{}_{ij}\big((u(t_0),\ v(t_0))\big)\,, \quad k \in \{1,\ 2\}\,, \tag{37.213}$$

onde novamente identificamos $x^1 \equiv u$ e $x^2 \equiv v$. O laborioso leitor há de perceber que essa expressão coincide com aquela apresentada em (35.69), página 1898, quando do tratamento geral da noção de derivação covariante. É também elementar verificar serem também válidas as relações gerais (35.67), página 1897.

Em notação vetorial, temos igualmente

$$\frac{DV}{dt} \;=\; \frac{DV^1}{dt}\boldsymbol{\varphi}_u + \frac{DV^2}{dt}\boldsymbol{\varphi}_v\,.$$

37.2.5.2 A Conexão em Superfícies é uma Conexão Métrica

Tratemos de um ponto muito relevante que não poderíamos omitir: a conexão que introduzimos em nossa definição de transporte paralelo em uma superfície é uma conexão métrica, satisfazendo a relação (35.108), página 1906, da Proposição 35.4.

Seja $t \mapsto \mathbf{c}(t)$ uma curva en $\mathcal{S}$, definida em algum intervalo aberto adequado de $\mathbb{R}$, e sejam $t \mapsto A(t)$ e $t \mapsto B(t)$ dois campos vetoriais suaves sobre a curva (de sorte que, para cada t, o vetor $A(t)$ é um vetor do espaço tangente $\mathsf{T}_{\mathbf{c}(t)}\mathcal{S}$ e o mesmo para o campo B). Seja $\big(u(t),\ v(t)\big) = \boldsymbol{\varphi}^{-1}\big(\mathbf{c}(t)\big)$ as coordenadas em U do ponto $\mathbf{c}(t)$ da curva e seja $\mathbf{G}(t) \equiv \mathbf{G}\big(\mathbf{c}(t)\big) := \mathbf{G}\Big(\boldsymbol{\varphi}\big(u(t),\ v(t)\big)\Big)$ o tensor métrico ao longo da curva.

Sejam $\left(\begin{smallmatrix} A^1 \\ A^2 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} B^1 \\ B^2 \end{smallmatrix}\right)$ as componentes contravariantes de A e B. Segundo a notação que empregamos, o produto escalar entre A e B se escreve em notação matricial como

$$A(t) \cdot B(t) \;\equiv\; g\big(A,\ B\big)(t) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} A^1(t) \\ A^2(t) \end{smallmatrix}\right)^T \mathbf{G}(t)\left(\begin{smallmatrix} B^1(t) \\ B^2(t) \end{smallmatrix}\right)\,. \tag{37.214}$$

Temos o seguinte resultado:

Proposição 37.2 *Com as definições acima, a derivada em relação ao parâmetro t do produto escalar $g(A,\ B)$ satisfaz*

$$\frac{d}{dt}\Big(g(A,\ B)\Big) \;=\; g\left(\frac{D}{dt}A,\ B\right) + g\left(A,\ \frac{D}{dt}B\right)\,, \tag{37.215}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\big(A(t)\cdot B(t)\big) \;=\; \left(\frac{DA}{dt}(t)\right)\cdot B(t) + A(t)\cdot\left(\frac{DB}{dt}(t)\right)\,.$$

Sob a luz da relação (35.108), página 1906, da Proposição 35.4, isso afirma que a conexão ∇ aqui considerada na superfície $\mathcal{S}$ é uma conexão métrica, ou Riemanniana. □

Prova. Usando (37.214) desejamos provar que

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{pmatrix}A^1(t)\\A^2(t)\end{pmatrix}^T\mathbf{G}(t)\begin{pmatrix}B^1(t)\\B^2(t)\end{pmatrix}\right] \;=\; \left[\frac{D}{dt}\begin{pmatrix}A^1\\A^2\end{pmatrix}\right]^T\mathbf{G}(t)\begin{pmatrix}B^1\\B^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}A^1(t)\\A^2(t)\end{pmatrix}^T\mathbf{G}(t)\left[\frac{D}{dt}\begin{pmatrix}B^1(t)\\B^2(t)\end{pmatrix}\right]\,. \tag{37.216}$$

Pela regra de Leibniz, vale

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\begin{pmatrix}A^1(t)\\A^2(t)\end{pmatrix}^T\mathbf{G}(t)\begin{pmatrix}B^1(t)\\B^2(t)\end{pmatrix}\right] &= \left[\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}A^1(t)\\A^2(t)\end{pmatrix}\right]^T\mathbf{G}(t)\begin{pmatrix}B^1(t)\\B^2(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}A^1(t)\\A^2(t)\end{pmatrix}^T\mathbf{G}(t)\left[\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}B^1(t)\\B^2(t)\end{pmatrix}\right]\\ &\quad + \begin{pmatrix}A^1(t)\\A^2(t)\end{pmatrix}^T\left[\frac{d}{dt}\mathbf{G}(t)\right]\begin{pmatrix}B^1(t)\\B^2(t)\end{pmatrix}\,.\end{aligned} \tag{37.217}$$

Usando (37.212), podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}A^1\\A^2\end{pmatrix} \;=\; \frac{D}{dt}\begin{pmatrix}A^1\\A^2\end{pmatrix} - \left[\frac{du}{dt}N_1^T + \frac{dv}{dt}N_2^T\right]\begin{pmatrix}A^1\\A^2\end{pmatrix} \qquad \text{e} \tag{37.218}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}B^1\\B^2\end{pmatrix} \;=\; \frac{D}{dt}\begin{pmatrix}B^1\\B^2\end{pmatrix} - \left[\frac{du}{dt}N_1^T + \frac{dv}{dt}N_2^T\right]\begin{pmatrix}B^1\\B^2\end{pmatrix}\,. \tag{37.219}$$

Além disso, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G}(t) \;=\; \frac{du}{dt}\mathbf{G}_u + \frac{dv}{dt}\mathbf{G}_v \;\overset{(37.206)-(37.207)}{=}\; \frac{du}{dt}\Big[\mathbf{G}N_1^T + N_1\mathbf{G}\Big] + \frac{dv}{dt}\Big[\mathbf{G}N_2^T + N_2\mathbf{G}\Big]\,. \tag{37.220}$$

Retornando com (37.218), (37.219) e (37.220) a (37.217) obtemos, após cancelamentos elementares (verifique!),

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{pmatrix}A^1(t)\\A^2(t)\end{pmatrix}^T\mathbf{G}(t)\begin{pmatrix}B^1(t)\\B^2(t)\end{pmatrix}\right] \;=\; \left[\frac{D}{dt}\begin{pmatrix}A^1(t)\\A^2(t)\end{pmatrix}\right]^T\mathbf{G}(t)\begin{pmatrix}B^1(t)\\B^2(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}A^1(t)\\A^2(t)\end{pmatrix}^T\mathbf{G}(t)\left[\frac{D}{dt}\begin{pmatrix}B^1(t)\\B^2(t)\end{pmatrix}\right]\,,$$

que é o que desejávamos ver estabelecido, pois isso equivale a (37.215). ■

37.2.6 A Noção de Curvatura Geodésica. Geodésicas

Aqui retomamos parcialmente a discussão de curvas regulares da Seção 37.1, página 2021, mas consideraremos curvas regulares dentro de superfícies regulares. Nossa intenção é preparar a discussão sobre a noção de geodésica e a discussão do Teorema de Gauss-Bonnet em sua versão mais simples.

A noção de curva geodésica é também apresentada com mais generalidade na Seção 35.4, página 1934.

• **A curvatura normal e a curvatura geodésica de uma curva sobre uma superfície**

Seja $\mathbf{y}(s)$, $s\in I$, uma curva regular em uma superfície regular $\mathcal{S}$, parametrizada por seu comprimemto de arco s, sendo I algum intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Naturalmente, a curva em questão é também uma curva no espaço ambiente $\mathbb{R}^3$

e seu vetor normal, segundo (37.11), página 2023, é dado por $\mathbf{n}(s) := \frac{1}{\boldsymbol{\kappa}(s)}\mathbf{y}''(s)$, sendo $\boldsymbol{\kappa}(s) := \big\|\mathbf{y}''(s)\big\|$, a curvatura no ponto $\mathbf{y}(s)$ (vide (37.10)).

Supondo a curva restrita a um aberto convenientemente "pequeno" de $\mathcal{S}$, a aplicação inversa $\boldsymbol{\varphi}^{-1}\big(\mathbf{y}(s)\big) := \big(u(s),\ v(s)\big)$ define uma curva em um aberto $U\subset\mathbb{R}^2$, o espaço das coordenadas de $\mathcal{S}$, e define uma curva, também regular, nesse espaço.

Por definição, o vetor unitário tangente à curva, $\mathbf{t}(s) := \mathbf{y}'(s)$, é um vetor do espaço tangente $\mathsf{T}_{\mathbf{y}(s)}\mathcal{S}$. Como $\mathbf{y}(s) = \boldsymbol{\varphi}\big(u(s),\ v(s)\big)$, temos

$$\mathbf{t}(s) \;:=\; \mathbf{y}'(s) \;=\; u'(s)\boldsymbol{\varphi}_u\big(u(s),\ v(s)\big) + v'(s)\boldsymbol{\varphi}_v\big(u(s),\ v(s)\big)\,.$$

Disso vemos que as componentes contravariantes de $\mathbf{t}(s)$ em $\mathsf{T}_{(\mathbf{s})}\mathcal{S}$ são

$$\big(\mathbf{t}(s)\big)^1 \;=\; u'(s) \qquad \text{e} \qquad \big(\mathbf{t}(s)\big)^2 \;=\; v'(s)\,. \tag{37.221}$$

Com isso, podemos explicitar a derivada covariante

$$\frac{D\mathbf{t}}{ds} \;=\; \frac{D\big(\mathbf{t}\big)^1}{ds}\boldsymbol{\varphi}_u + \frac{D\big(\mathbf{t}\big)^2}{ds}\boldsymbol{\varphi}_v\,, \tag{37.222}$$

sendo que, de acordo com (37.213), suas componentes contravariantes são

$$\frac{D\big(\mathbf{t}\big)^k}{ds} \;=\; \frac{d\big(\mathbf{t}\big)^k}{ds} + \frac{dx^i}{ds}\big(\mathbf{t}\big)^j\,\Gamma^k{}_{ij}\,, \quad k\in\{1,\,2\}\,, \tag{37.223}$$

onde identificamos $x^1\equiv u$ e $x^2\equiv v$. Assim, usando (37.221) no lado direito, obtemos

$$\frac{D\big(\mathbf{t}\big)^k}{ds} \;=\; \frac{d^2x^k}{ds^2} + \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\,\Gamma^k{}_{ij}\,, \quad k\in\{1,\,2\}\,, \tag{37.224}$$

Como todo vetor no espaço ambiente, $\mathbf{y}''(s)$ possui uma componente no espaço tangente à superfície $\mathcal{S}$ no ponto $\mathbf{y}(s)$, $\mathsf{T}_{\mathbf{y}(s)}\mathcal{S}$, e uma componente na direção normal à superfície, definida pelo vetor unitário $\mathbf{G}_{\mathbb{S}}\big(\mathbf{y}(s)\big)$, o mapa de Gauss, introduzido em (37.74), página 2039. O vetor unitário tangente à curva, $\mathbf{t}(s) := \mathbf{y}'(s)$, é um vetor do espaço tangente $\mathsf{T}_{\mathbf{y}(s)}\mathcal{S}$ e é normal a $\mathbf{n}(s)$. Assim, a componente de $\mathbf{y}''(s)$ no espaço tangente tem de ser ortogonal a $\mathbf{t}(s)$ e, portanto, deve apontar na direção de $\mathbf{c}(s) := \mathbf{G}_{\mathbb{S}}\big(\mathbf{y}(s)\big)\times\mathbf{t}(s)$, também um vetor unitário. Assim, podemos escrever

$$\mathbf{y}''(s) \;=\; \boldsymbol{\kappa}_n(s)\mathbf{G}_{\mathbb{S}}\big(\mathbf{y}(s)\big) + \boldsymbol{\kappa}_g(s)\mathbf{c}(s)\,. \tag{37.225}$$

Os coeficientes $\boldsymbol{\kappa}_n(s)$ e $\boldsymbol{\kappa}_g(s)$, assim definidos por essa decomposição, são denominados, respectivamente, *curvatura normal* e *curvatura geodésica* da curva $\mathbf{y}$ em s. A curvatura geodésica é também denominada *curvatura tangencial*.

A noção de curvatura normal foi introduzida à página 2040 e diversos desenvolvimentos foram apresentados nas páginas subsequentes. A nomenclatura "curvatura geodésica" será esclarecida adiante. A curvatura geodésica tem uma interpretação relevante e também desempenha um papel nas afirmações do Teorema de Gauss-Bonnet.

Antes de prosseguir com algumas elaborações sobre a curvatura geodésica, observemos que segue trivialmente de (37.225) que

$$\boldsymbol{\kappa}(s)^2 \;=\; \boldsymbol{\kappa}_n(s)^2 + \boldsymbol{\kappa}_g(s)^2\,, \tag{37.226}$$

e também que a curvatura geodésica satisfaz

$$\boldsymbol{\kappa}_g(s) \;\overset{(37.225)}{=}\; \mathbf{y}''(s)\cdot\mathbf{c}(s) \;=\; \mathbf{t}'(s)\cdot\Big(\mathbf{G}_{\mathbb{S}}\big(\mathbf{y}(s)\big)\times\mathbf{t}(s)\Big)\,.$$

• **A curvatura geodésica e o transporte paralelo de t**

Como $\mathbf{y}''(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{t}(s)$ e $\boldsymbol{\kappa}_g(s)\mathbf{c}(s)$ é a projeção dessa derivada no plano tangente $\mathsf{T}_{\mathbf{y}(s)}\mathcal{S}$, concluímos que $\boldsymbol{\kappa}_g(s)\mathbf{c}(s)$ é, segundo a definição, a derivada covariante de $\mathbf{t}(s)$ ao longo da curva $\mathbf{y}(s)$:

$$\boldsymbol{\kappa}_g(s)\mathbf{c}(s) \;=\; \frac{D\mathbf{t}}{ds}(s)\,.$$

Com isso, concluímos que a curvatura geodésica de uma curva satisfaz

$$\left|\boldsymbol{\kappa}_g(s)\right| \;=\; \left\| \frac{D\mathbf{t}}{ds}(s) \right\| \,, \tag{37.227}$$

sendo a derivação covariante tomada ao longo da curva $\mathbf{y}(s)$.

E. 37.18 *Exercício*. Usando (37.222) e (37.224) e a definição (37.227), mostre que

$$\big(\boldsymbol{\kappa}_g(s)\big)^2 \;=\; g_{kl}\left(\frac{d^2x^k}{ds^2}+\frac{dx^a}{ds}\frac{dx^b}{ds}\,\Gamma^k{}_{ab}\right)\left(\frac{d^2x^l}{ds^2}+\frac{dx^c}{ds}\frac{dx^d}{ds}\,\Gamma^l{}_{cd}\right) \,, \tag{37.228}$$

sendo g_{kl} as componentes do tensor métrico. Essa expressão explicíta a dependência da curvatura geodésica com a curva, com as componentes do tensor métrico e com os símbolos de Christoffel, apontando ainda para o fato de a curvatura geodésica ser invariante por isometrias. ✣

37.2.6.1 Curvas Geodésicas em Superfícies

Chegamos, assim, ao importante conceito de *curva geodésica*, tratado na Seção 35.4, página 1934, no contexto de geometrias Riemannianas e pseudo-Riemannianas.

Definição. Uma curva regular $s \mapsto \mathbf{y}(s)$ em uma superfície regular $\mathcal{S}$, parametrizada por seu comprimento de arco s (medido a partir de um ponto arbitrário) é dita ser uma *curva geodésica*, ou simplesmente, uma *geodésica*, se sua curvatura geodésica for identicamente nula. Por (37.227), vemos que uma curva é geodésica se e somente se satisfizer $\frac{D\mathbf{t}}{ds}(s) = 0$ para todo s, com a derivação covariante sendo tomada ao longo da própria curva $s \mapsto \mathbf{y}(s)$.

Com isso, vemos por (37.224) que uma curva $s \mapsto \mathbf{y}(s)$ é geodésica se e somente se satisfizer

$$\frac{d^2x^k}{ds^2}+\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\,\Gamma^k{}_{ij} \;=\; 0 \,, \quad k \,=\, 1,\,2 \,. \tag{37.229}$$

♠

Curvas geodésicas passando por dois pontos distintos também podem ser caracterizadas como as curvas que extremizam (minimizam ou maximizam) a distância entre esses pontos (medidas ao longo das curvas) e as equações (37.229) nada mais são que as Equações de Euler-Lagrange para o funcional de comprimento de curvas quando a curva é parametrizada pelo comprimento de arco. Vide a discussão detalhada geral apresentada na Seção 35.4.2, página 1936. As Equações de Euler-Lagrange são apresentadas no contexto da Mecânica Clássica na Seção 47.5.1, página 2780.

Notas. A palavra *geodésica* provém de *Geodesia*, área da Geofísica que se ocupa da determinação das dimensões e forma da Terra, seu campo gravitacional e sistemas de coordenadas. Gauss realizou muitos trabalhos práticos e teóricos nessa área, derivando desses estudos diversas ideias que culminariam porteriormente nas Geometrias Não Euclidianas e, em particular, na Geometria Riemanniana. Nesse contexto, Gauss dedicou-se também ao estudo de curvas geodésicas. Segundo [524], porém, foi Liouville[32] quem cunhou a expressão *curva geodésica*, em 1844. Seu estudo, entretanto, iniciou-se muito antes do séc. XIX, podendo ter suas origens traçadas ao menos até as contribuições de Johann Bernoulli[33] sobre a curva braquistócrona (vide página 2841) ao final do séc. XVII, e que levaram em seguida à formulação do problema da determinação de curvas de menor comprimento em superfícies, com contribuições de Leibniz[34] e Daniel Bernoulli[35] e, posteriormente, de Euler[36]. Vide [524], Capítulo 4, para mais referências históricas a respeito da noção de curva geodésica. Vide também [511] e [459]. A noção de curva geodésica é de importância central na Teoria da Relatividade Geral onde, no caso de geodésicas tipo-tempo, descreve o movimento em "queda livre" (i.e., sob ausência de forças externas) de um observador idealmente pontual.

A equação (37.229) é denominada *equação das geodésicas*. Segundo [524], ela teria sido primeiramente derivada por Euler em 1732 no caso particular de uma superfície definida por uma relação como $F(x,\,y,\,z) = 0$, para alguma função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (por exemplo, para a esfera de raio 1 centrada na origem teríamos $F(x,\,y,\,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$). ♣

Em uma curva geodésica tem-se, supondo-se $\mathbf{y}''(s)$ não nulo,

$$\mathbf{n}(s) \;:=\; \frac{\mathbf{y}''(s)}{\left\|\mathbf{y}''(s)\right\|} \overset{(37.225)}{=} \mathbf{G}_{\mathcal{S}}\big(\mathbf{y}(s)\big)$$

[32] Joseph Liouville (1809–1882).
[33] Johann Bernoulli (1667–1748).
[34] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716).
[35] Daniel Bernoulli (1700–1782).
[36] Leonhard Euler (1707–1783).

(pois, segundo (37.226), $\left\|\mathbf{y}''(s)\right\| := \boldsymbol{\kappa}(s) = \boldsymbol{\kappa}_n(s)$), ou seja, o vetor normal a uma curva geodésica coincide em cada ponto com o vetor normal à superfície.

Cabe ainda aqui um comentário sobre o conceito de curvatura geodésica, $\boldsymbol{\kappa}_g(s)$. Como esta se anula em curvas geodésicas, podemos dizer que $\boldsymbol{\kappa}_g(s)$ "mede" o quanto uma curva falha em ser uma geodésica. À essa noção subjaz uma intuição relevante sobre o significado de noção de curvatura geodésica. Como já comentamos, em uma curva geodésica o vetor normal coincide em cada ponto com o vetor normal à superfície. Podemos assim entender que toda a curvatura de uma curva geodésica em uma superfície provém da curvatura da superfície. Em outras palavras, uma curva geodésica em uma superfície não possui curvatura "própria" além daquela proveniente da superfície. Assim, uma curva geodésica em uma superfície é analoga a uma linha reta, digamos, em $\mathbb{R}^3$, que é uma curva geodésica e desprovida de curvatura.

Exemplo 37.5 Naturalmente, sempre podemos obter as curvas geodésicas de uma dada superfície através da resolução das equações (37.229) em coordenadas adequadas. Para muitas superfícies, esse é o único método disponível. Em casos felizes onde simetrias estejam presentes, argumentos mais simples podem ser empregados. Como exemplo, determinemos as curvas geodésicas da esfera de raio 1 centrada na origem. Nesse caso, o vetor normal $\mathbf{G}_{\mathcal{S}}\big(\mathbf{y}(s)\big)$ é simplesmente o versor radial $\hat{r}$ a cada ponto. Portanto, $\mathbf{n} = \hat{r}$. Os chamados *círculos máximos* (ou *grandes círculos*) de uma esfera são definidos como as intersecções entre a esfera e os planos que contêm a origem. Por construção, esses círculos máximos têm como vetor normal em cada ponto precisamente o versor radial $\hat{r}$. Assim, podemos identificar as curvas geodésicas da esfera com os círculos máximos. ♦

• **Comentários sobre a equação das geodésicas**

Seja $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ uma curva regular em uma superfície regular $\mathcal{S}$, parametrizada por um parâmetro genérico t, que satisfaça $\frac{D\mathbf{t}}{dt} = 0$, sendo $\mathbf{t} \equiv \dot{\mathbf{x}}$ seu vetor tangente. Assim, em coordenadas locais,

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}+\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\,\Gamma^k{}_{ij} \;=\; 0 \,, \quad k \,=\, 1,\,2 \,. \tag{37.230}$$

Pela Proposição 37.2, página 2067, segue da condição $\frac{D\mathbf{t}}{dt} = 0$ que $\frac{d}{dt}\big(\mathbf{t}(t)\cdot\mathbf{t}(t)\big) = 0$ e, portanto, $\left\|\mathbf{t}(t)\right\|$ é constante. Assim, segundo (37.3), página 2022, o parâmetro de comprimento de arco dessa curva é da forma $s = at + b$, sendo $a = \left\|\mathbf{t}(t)\right\|$, constante, e b sendo uma constante que depende da escolha da origem da curva. Vemos com isso que (37.230) também descreve uma curva geodésica e podemos, sem perda de generalidade, tomá-la como a equação das geodésicas, mesmo que tenhamos assumido que o parâmetro usado na definição original (37.229) é o comprimento de arco. Note-se, ademais, que (37.230) é invariante por transformações lineares dos parâmetros: $t \mapsto at + b$, com a e b constantes.

Outro comentário que fazemos é que a teoria das equações diferenciais ordinárias, sob as hipóteses de suavidade com que trabalhamos, garante-nos[37] a existência e a unicidade de soluções das equações das geodésicas (como problema de valor inicial), ao menos em intervalos suficientemente "pequenos" do parâmetro t. Esses fatos são discutidos na Proposição 35.15, página 1940, e no seu entorno.

►►►►►►►►►► ■ ◄◄◄◄◄◄◄◄◄◄

A teoria geral das curvas geodésicas para conexões afins é introduzida na Seção 35.4, página 1934, e remetemos o leitor àqueles desenvolvimentos.

[37] Vide Teorema de Picard-Lindelöf, Teorema 12.2, página 716, e também a generalização expressa no Teorema 26.4, página 1500.

Apêndices

37.A Demonstração das Relações (37.204) e (37.205)

Fazendo uso das diversas identidades expressas em (37.137) e (37.138), página 2051, é fácil constatar que

$$N_1 \overset{(37.192)}{:=} \begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{11} & \Gamma^2{}_{11} \\ \Gamma^1{}_{12} & \Gamma^2{}_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u & \boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \\ \boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u & \boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{G} & -\mathrm{F} \\ -\mathrm{F} & \mathrm{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u & \boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \\ \boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u & \boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \end{pmatrix} \mathbf{G}^{-1}\,.$$

Verifique! Fora isso, temos que

$$\mathbf{G}_u \overset{(37.70)}{=} \begin{pmatrix} 2\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u & \boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v + \boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_{uv} \\ \boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v + \boldsymbol{\varphi}_u\cdot\boldsymbol{\varphi}_{uv} & 2\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \end{pmatrix}.$$

Assim, é fácil verificar que

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{-1}\Big[\mathbf{G}_u - N_1\mathbf{G}\Big] &= \frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} \begin{pmatrix} \mathrm{G} & -\mathrm{F} \\ -\mathrm{F} & \mathrm{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u & \boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u \\ \boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v & \boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} \begin{pmatrix} \mathrm{G}\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u - \mathrm{F}\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v & \mathrm{G}\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u - \mathrm{F}\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v \\ \mathrm{E}\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v - \mathrm{F}\boldsymbol{\varphi}_{uu}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u & \mathrm{E}\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_v - \mathrm{F}\boldsymbol{\varphi}_{uv}\cdot\boldsymbol{\varphi}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{11} & \Gamma^1{}_{12} \\ \Gamma^2{}_{11} & \Gamma^2{}_{12} \end{pmatrix} \overset{(37.192)}{=} N_1^T\,, \end{aligned}$$

sendo que na penúltima igualdade novamente usamos as diversas identidades expressas em (37.137) e (37.138), página 2051. Isso estabeleceu (37.204). A prova de (37.205) é totalmente análoga e é deixada como exercício ao diligente leitor. ■

E. 37.19 *Exercício*. Demonstre (37.204) e (37.205) usando, porém, (35.133), página 1911. ✣

Parte VIII

Análise Funcional I. Séries e Transformadas de Fourier. Distribuições