Capítulo 40

Operadores Lineares Limitados em Espaços de Banach e de Hilbert

Sumário

40.1 Operadores Lineares em Espaços Vetoriais Normados . . . 2170
40.1.1 Espaços de Banach de Operadores . . . 2174
40.1.2 O Dual Topológico de um Espaço de Banach . . . 2178
40.1.3 O Teorema de Hahn-Banach e Algumas Consequências do Mesmo . . . 2182
40.1.4 O Teorema de Banach-Steinhaus ou Princípio de Limitação Uniforme . . . 2187
40.1.5 O Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado . . . 2188
40.2 Operadores Limitados em Espaços de Hilbert . . . 2195
40.2.1 A Noção de Operador Adjunto em Espaços de Hilbert . . . 2196
40.2.2 Operadores Autoadjuntos, Normais, Unitários, Projetores Ortogonais e Isometrias Parciais . . . 2199
40.3 Rudimentos da Teoria das Álgebras de Banach e Álgebras C* . . . 2208
40.3.1 Álgebras de Banach . . . 2208
40.3.2 Alguns Fatos Estruturais sobre Álgebras C* . . . 2211
40.3.2.1 Álgebras com Involução e a Unidade . . . 2211
40.3.3 A Inversa de Operadores Limitados . . . 2215
40.3.4 O Espectro de Operadores em Álgebras de Banach . . . 2220
40.3.5 O Operador Resolvente e Propriedades Topológicas do Espectro . . . 2221
40.3.5.1 O Teorema da Aplicação Espectral . . . 2226
40.3.6 O Raio Espectral . . . 2227
40.3.7 O Homomorfismo de Gelfand em Álgebras C* . . . 2231
40.3.8 Raízes Quadradas de Operadores em Álgebras de Banach . . . 2234
40.3.9 Elementos Positivos de Álgebras C* . . . 2236
40.3.9.1 Relação de Ordem Decorrente da Positividade em Álgebras C* . . . 2240
40.3.10 Aproximantes da Unidade em Álgebras C* . . . 2241
40.3.10.1 Cosets por Bi-Ideais em Álgebras C* . . . 2244
40.4 Álgebras de von Neumann. Um Mínimo . . . 2248
40.4.1 O Teorema do Bicomutante . . . 2250
40.5 Um Pouco sobre Estados e Representações de Álgebras C* . . . 2253
40.5.1 Morfismos Entre Álgebras C* . . . 2253
40.5.2 Representações de Álgebras C* . . . 2255
40.5.2.1 Estados em Álgebras C* e a Representação GNS . . . 2257
40.5.2.2 Estados Puros, de Mistura e a Irredutibilidade de Representações GNS . . . 2263
40.5.3 Exemplos em Álgebras de Matrizes. Construção GNS. Estados Puros e a Entropia de von Neumann . . . 2265
40.5.3.1 A Entropia de von Neumann . . . 2269
40.5.3.2 A Construção GNS em $\mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n)$ . . . 2273
40.6 O Espectro de Operadores em Espaços de Banach . . . 2276
40.6.1 O Espectro de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert . . . 2279
40.6.2 Espectro em Espaços de Banach. Alguns Exemplos e Contraexemplos . . . 2281
40.7 O Lema da Raiz Quadrada em Espaços de Hilbert . . . 2285
40.7.1 A Decomposição Polar de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert . . . 2290
40.8 Operadores Compactos em Espaços de Banach e de Hilbert . . . 2293
40.8.1 Alguns Fatos Gerais Sobre o Espectro de Operadores Compactos . . . 2302
40.8.1.1 O Teorema da Alternativa de Fredholm . . . 2304
40.8.2 O Teorema Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos . . . 2309

40.9 O Teorema Espectral para Operadores Limitados Autoadjuntos em Espaços de Hilbert 2316
40.9.1 O Cálculo Funcional Contínuo e o Homomorfismo de Gelfand . . . 2316
40.9.2 Generalizando o Cálculo Funcional Contínuo. As Medidas Espectrais . . . 2317
40.9.3 Medidas com Valores em Projeções Ortogonais . . . 2325
40.9.4 Os Projetores Espectrais e o Teorema Espectral . . . 2329
40.10 Operadores Tipo Traço e de Hilbert-Schmidt . . . 2332
40.10.1 Operadores Tipo Traço, ou Traciais . . . 2334
40.10.1.1 O Traço de um Operador Tracial . . . 2338
40.10.2 Operadores de Hilbert-Schmidt . . . 2341
40.10.3 Operadores Traciais e de Hilbert-Schmidt e os Operadores Compactos . . . 2348
40.10.4 Operadores de Hilbert-Schmidt e Operadores Integrais . . . 2350
40.10.5 O Teorema de Lidskii. Traço e Espectro de Operadores Traciais . . . 2353
40.11 O Traço Parcial . . . 2354
40.12 Exercícios Adicionais . . . 2358
APÊNDICES . . . 2360
40.A Prova do Teorema 40.19 . . . 2360
40.B Um Lema Sobre Espaços Normados Devido a F. Riesz . . . 2362

Este capítulo tenciona ser uma introdução à teoria dos operadores lineares limitados (contínuos) em espaços de Banach e de Hilbert, assim como à teoria das álgebras de Banach e C*. O assunto é de central importância em várias áreas da Física e da Matemática, desde a Mecânica Quântica e a Teoria Quântica de Campos até a Teoria das Equações a Derivadas Parciais e a Mecânica Estatística. O Capítulo 41, página 2364, é dedicado à teoria dos operadores não-limitados em espaços de Hilbert.

Na Seção 40.1 apresentamos noções básicas e demonstramos uma série de teoremas de importância fundamental para toda a teoria de operadores em espaços de Banach e de Hilbert: o Teorema BLT, o Teorema de Hahn-Banach, o Teorema de Banach-Steinhaus, o Teorema da Aplicação Aberta, o Teorema da Aplicação Inversa e o Teorema do Gráfico Fechado. Na Seção 40.2 estudamos a teoria básica de operadores em espaços de Hilbert. A Seção 40.3 é uma introdução às álgebras de Banach e às álgebras C*, com uma certa ênfase na teoria espectral dessas álgebras. Na Seção 40.5 desenvolvemos um pouco mais a teoria das álgebras C* e discutimos sua relação com álgebras de operadores em espaços de Hilbert. Na Seção 40.6 especializamos a teoria espectral para o contexto de operadores limitados agindo em espaços de Banach e de Hilbert. Na Seção 40.8 desenvolvemos a teoria dos operadores compactos em espaços de Banach e de Hilbert e obtemos resultados gerais sobre o espectro de tais operadores, o Teorema da Alternativa e Fredholm o Teorema Espectral para operadores compactos autoadjuntos em espaços de Hilbert e generalizações. A Seção 40.9 é dedicada à demonstração do Teorema Espectral para operadores limitados autoadjuntos agindo em espaços de Hilbert. A Seção 48.3, página 2757, discute a relevância desse teorema para a Física Quântica. A Seção 40.10 introduz as noções de operador tracial e de Hilbert-Schmidt em espaços de Hilbert separáveis, assim como a noção de traço de operadores traciais. Diversas propriedades e desigualdades são obtidas.

Há uma grande quantidade de livros-textos dedicados aos temas aqui desenvolvidos. Uma lista muito limitada inclui as referências [17], [20], [25], [77]–[78], [117], [121], [127], [128], [134], [65], [227], [384], [245], [268]–[271], [273], [296], [374], [412], [419], [428], [459], [496] e [548].

• **Operadores lineares**

Um *operador linear* $T : \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{W}$ é uma aplicação entre um espaço vetorial[1] $\mathrm{Dom}(T)$ (o domínio de definição de T) com valores em um espaço vetorial $\mathcal{W}$ tal que, para todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ e todo $u,\ v \in \mathrm{Dom}(T)$ tem-se

$$T(\alpha u + \beta v) \ = \ \alpha T(u) + \beta T(v)\,.$$

Note-se que isso, em particular, implica $T(0) = 0$. Como neste capítulo só falaremos de operadores lineares, vamos frequentemente omitir o qualificativo "linear" e falar apenas em *operadores*. Operadores lineares são também denominados "transformações lineares" ou "aplicações lineares".

[1] Daqui por diante sempre trataremos de espaços vetoriais sobre o corpo dos complexos.

Notação. Na teoria dos operadores lineares em espaços vetoriais é costume denotar-se $T(u)$ simplesmente por Tu. ◀

Em muitas circunstâncias $\mathrm{Dom}(T)$ é um subespaço linear de um outro espaço vetorial $\mathcal{V}$ e existe interesse em estudar extensões lineares de T a outros subespaços de $\mathcal{V}$. É importante ao estudante mentalizar desde o inicio que a especificação de um domínio é parte integrante da definição de um operador e que propriedades do mesmo dependem intrinsecamente de propriedades de seu domínio. Tal fato é de crucial relevância para o caso de operadores não-contínuos em espaços vetoriais topológicos (vide, por exemplo, Capítulo 41, página 2364, para o tratamento de operadores lineares não contínuos em espaços de Hilbert).

Na literatura, o conjunto imagem $\mathrm{Im}(T) \subset \mathcal{W}$ de um operador linear $T : \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{W}$, é mais frequentemente denotada por $\mathrm{Ran}\,(T)$ (notação essa que usaremos com maior frequência nestas notas), ou por $R(T)$, ou ainda mesmo por R_T. Aqui, o símbolo Ran provém de "range" ("alcance"). O domínio de definição de T é também mais frequentemente denotado por $D(T)$ (notação essa que usaremos com maior frequência nestas notas) ou mesmo por D_T.

Nomenclatura. Se $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, com $D(T) = \mathcal{V}$, é um operador entre espaços vetoriais $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ é comum dizer-se que T *age entre* $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$.

Neste capítulo iremos nos dedicar ao estudo de propriedades básicas de operadores lineares em espaços de Hilbert[2], especificamente, dos chamados operadores limitados. Algumas dessas propriedades podem ser estudadas em um contexto mais geral como propriedades de operadores lineares em espaços vetoriais normados ou em espaços de Banach[3], sem referência a propriedades específicas de espaços de Hilbert, ou com mais generalidade ainda, no contexto de álgebras normadas, como álgebras de Banach e álgebras C*, objetos que definiremos e estudaremos no momento apropriado.

O estudo de aplicações lineares entre espaços vetoriais é de grande importância em Matemática e na Física, em especial na Física Quântica. O maior papel, porém, é seguramente desempenhado pelas aplicações lineares entre espaços normados, das quais falaremos agora.

40.1 Operadores Lineares em Espaços Vetoriais Normados

Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois espaços vetoriais normados, cujas normas serão denotadas por $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$, respectivamente. Por exemplo $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ podem ser dois espaços de Banach ou de Hilbert, mas por ora não vamos requerer nada sobre a completeza dos mesmos.

Um dos problemas básicos da teoria dos operadores lineares entre espaços vetoriais normados é classificá-los de acordo com características que permitam associar-lhes propriedades comuns. Veremos várias dessas classificações ao longo destas notas, a mais básica, da qual trataremos a seguir, sendo a continuidade. Outras classificações que veremos, em particular no contexto de espaços de Hilbert, são a classificação de operadores em limitados ou não-limitados, fechados ou não-fechados, de fecháveis ou não-fecháveis, de operadores autoadjuntos ou não autoadjuntos, de operadores compactos ou não etc.

Os exemplos mais bem conhecidos de operadores são as matrizes, que são operadores entre espaços de dimensão finita como $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ e $\mathcal{W} = \mathbb{C}^m$. Acreditamos que os estudantes destas notas já tenham noções bem definidas sobre matrizes mas, apesar disso, ou mesmo por isso, vale advertir que iremos aqui desenvolver a teoria de operadores entre espaços vetoriais normados gerais, mesmo de dimensão infinitas e, por isso, muito da intuição que desenvolvemos sobre matrizes não é mais válida. Por exemplo, matrizes agindo entre $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$ (com as normas usuais) são sempre operadores contínuos, um fato não mais necessariamente verdadeiro para operadores lineares entre espaços vetoriais normados de dimensão infinita. Tal é a origem de boa parte da dificuldades no estudo de operadores lineares agindo entre espaços vetoriais normados em geral.

• Operadores contínuos

Se $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são dois espaços vetoriais normados ambos são espaços métricos com a métrica definida por suas normas e, portanto, são espaços topológicos métricos. Consequentemente, ao falarmos de funções entre $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ coloca-se a questão da continuidade dessas funções como funções entre dois espaços topológicos métricos. Essa questão é de grande relevância, pois em espaços vetoriais de dimensão infinita é muito frequente o aparecimento de operadores lineares não-contínuos. De fato, na Mecânica Quântica, por exemplo, quase todos os operadores com os quais tipicamente lidamos, como os operadores de posição e de momento, não são contínuos. O ponto é que, como veremos, operadores não-contínuos podem

[2] David Hilbert (1862–1943).
[3] Stefan Banach (1892–1945).

ter propriedades drasticamente diferentes das de operadores contínuos.

Como $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são dois espaços métricos, valem as definições usuais de continuidade em espaços métricos. Assim, dizemos que um operador $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é contínuo se

$$T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} Tx_n$$

para qualquer sequência convergente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{V}$. Note que, na última igualdade, o limite do lado esquerdo refere-se à topologia de $\mathcal{V}$ enquanto que o limite do lado direito refere-se à topologia de $\mathcal{W}$.

Equivalentemente (vide discussão à página 1516) um operador $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é contínuo se para todo $\epsilon > 0$ e todo $u \in \mathcal{V}$ existir $\delta(\epsilon) \equiv \delta > 0$ (eventualmente dependente de ϵ) tal que $\|Tu - Tv\|_{\mathcal{W}} \leq \epsilon$ sempre que v for tal que $\|u - v\|_{\mathcal{V}} \leq \delta$.

δ pode ser escolhido independente de u devido ao fato de T ser linear e contínuo em 0. De fato, por T ser contínuo em 0, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon,\, 0) \equiv \delta(\epsilon)$ tal que $\|Tv\|_{\mathcal{W}} \leq \epsilon$ sempre que $\|v\|_{\mathcal{V}} \leq \delta(\epsilon)$. Segue disso que, para u arbitrário, $\|Tu - Tv\|_{\mathcal{W}} = \|T(u-v)\|_{\mathcal{W}} \leq \epsilon$ sempre que $\|u - v\|_{\mathcal{V}} \leq \delta(\epsilon)$. O que isso está afirmando é que se T é linear e contínuo, então T é igualmente uniformemente contínuo.

Adiante (vide por exemplo, página 2172) veremos exemplos de operadores não-contínuos. Passemos primeiro a uma definição igualmente importante e que se mostrará equivalente à de continuidade.

• Operadores limitados

De grande importância é também a seguinte definição. Um operador $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é dito ser um *operador limitado* se existir uma constante $M > 0$ tal que para todo $u \in \mathcal{V}$ tem-se

$$\|Tu\|_{\mathcal{W}} \;\leq\; M\|u\|_{\mathcal{V}}\,.$$

Note-se que a constante M acima deve ser a mesma para todo u.

A seguinte proposição tem importância fundamental:

Proposição 40.1 *Um operador linear T agindo entre dois espaços vetoriais normados $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ é limitado se e somente se for contínuo.* □

Prova. Seja T limitado, ou seja, tal que existe $M > 0$ satisfazendo $\|Tu\|_{\mathcal{W}} \leq M\|u\|_{\mathcal{V}}$ para todo $u \in \mathcal{V}$. Seja ϵ um número positivo arbitrário e sejam u e v dois vetores de $\mathcal{V}$ tais que $\|u - v\|_{\mathcal{V}} \leq \epsilon/M$. Então,

$$\|Tu - Tv\|_{\mathcal{W}} \;=\; \big\|T(u-v)\big\|_{\mathcal{W}} \;\leq\; M\|u-v\|_{\mathcal{V}} \;\leq\; M\,\frac{\epsilon}{M} \;=\; \epsilon\,.$$

Assim, adotando-se $\delta = \epsilon/M$ vemos que T satisfaz a definição de continuidade.

Provemos a recíproca. Seja T contínuo. Então, vale que para todo $\epsilon \geq 0$ e todo $u \in \mathcal{V}$ existe $\delta > 0$ tal que $\|Tu - Tv\|_{\mathcal{W}} \leq \epsilon$ sempre que v for tal que $\|u - v\|_{\mathcal{V}} \leq \delta$. Tomemos $u = 0$ e fixemos um ϵ. Temos portanto que

$$\|Tv\|_{\mathcal{W}} \leq \epsilon$$

sempre que $\|v\|_{\mathcal{V}} \leq \delta$. Lembremos que a constante δ independe de v e que sempre podemos escolher $\delta > 0$.

Seja, então, u um vetor não-nulo arbitrário de $\mathcal{V}$ e seja

$$v \;=\; \frac{\delta}{\|u\|_{\mathcal{V}}}u$$

é claro que

$$\|v\|_{\mathcal{V}} \;=\; \left\|\frac{\delta}{\|u\|_{\mathcal{V}}}u\right\|_{\mathcal{V}} \;=\; \frac{\delta}{\|u\|_{\mathcal{V}}}\|u\|_{\mathcal{V}} \;=\; \delta\,.$$

Portanto, para esse v vale $\|Tv\|_{\mathcal{W}} \leq \epsilon$ e, então

$$\frac{\delta}{\|u\|_{\mathcal{V}}}\,\|Tu\|_{\mathcal{W}} \;=\; \left\|T\left(\frac{\delta}{\|u\|_{\mathcal{V}}}u\right)\right\|_{\mathcal{W}} \;=\; \|Tv\|_{\mathcal{W}} \;\leq\; \epsilon\,,$$

ou seja,

$$\|Tu\|_{\mathcal{W}} \;\leq\; \frac{\epsilon}{\delta}\,\|u\|_{\mathcal{V}}\,.$$

Definindo $M := \epsilon/\delta$, mostramos, então, que $\|Tu\|_{\mathcal{W}} \leq M\|u\|_{\mathcal{V}}$ para todo $u \neq 0$. Para $u = 0$ essa relação é trivialmente satisfeita e, portanto, vale para todo $u \in \mathcal{V}$, mostrando que T é limitado. ■

• **Exemplo de operador não-limitado. O funcional delta de Dirac**

Vamos a um exemplo de um operador agindo entre dois espaços vetoriais normados e que não é limitado e, portanto, não é contínuo.

Seja $\mathcal{V} = C\big([-1,\,1],\,\mathbb{C}\big)$, o conjunto de todas as funções contínuas no intervalo $[-1,\,1] \subset \mathbb{R}$ com valores complexos e adotemos como norma em $\mathcal{V}$ a norma L^2:

$$\|f\|_{\mathcal{V}} \;=\; \left[\,\int_{-1}^{1} |f(x)|^2\,dx\right]^{1/2}\,, \quad f \in C([-1,\,1],\,\mathbb{C})\,.$$

Seja $\mathcal{W} = \mathbb{C}$ e adotemos em $\mathcal{W}$ a norma usual

$$\|z\|_{\mathcal{W}} \;=\; |z|, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Seja $T_0 : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ o seguinte operador linear:

$$T_0 f \;=\; f(0)\,,$$

que associa a cada função $f \in C([-1,\,1],\,\mathbb{C})$ o seu valor no ponto 0. T_0 é denominado funcional delta de Dirac. É elementar mostrar que T_0 é linear. Mostremos que T_0, porém, não pode ser contínuo.

Para isso, seja $g(x)$ uma função de $C([-1,\,1],\,\mathbb{C})$ com a propriedade que $g(-1) = g(1) = 0$ e que $g(0) \neq 0$. Para $n \in \mathbb{N}$ defina

$$u_n(x) \;=\; \begin{cases} g(nx), & \text{para } x \in [-1/n,\,1/n]\,,\\[2ex] 0, & \text{de outra forma.}\end{cases}$$

Como g foi escolhida de modo que $g(-1) = g(1) = 0$, é fácil verificar que $u_n \in C([-1,\,1],\,\mathbb{C})$ (por quê?).

Temos que

$$\|u_n\|_{\mathcal{V}} \;=\; \left[\,\int_{-1/n}^{1/n} |g(nx)|^2\,dx\right]^{1/2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\,\int_{-1}^{1} |g(x)|^2\,dx\right]^{1/2}$$

e, portanto, $\|u_n\|_{\mathcal{V}} \to 0$ quando $n \to \infty$.

Por outro lado $T_0 u_n = u_n(0) = g(0) \neq 0$ é constante, ou seja, não depende de n. Assim, temos que

$$T_0\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) \;=\; T_0 0 \;=\; 0\,,$$

mas

$$\lim_{n\to\infty} T_0 u_n \;=\; g(0) \;\neq\; 0\,,$$

o que mostra que T_0 não pode ser contínuo nem, portanto, limitado.

É fácil verificar que T_0 também não seria contínuo se adotássemos em $\mathcal{V}$ a norma L^p (com $p \geq 1$):

$$\|f\|_{\mathcal{V}} \;=\; \left[\,\int_{-1}^{1} |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\,, \quad f \in C([-1,\,1],\,\mathbb{C})\,.$$

E. 40.1 *Exercício.* Complete os detalhes da prova dessa última afirmação. ✣

Se, porém, adotássemos em $\mathcal{V}$ a norma do supremo

$$\|f\|_{\mathcal{V}} \;=\; \sup_{x\in[-1,\,1]} |f(x)|\,,$$

então T_0 seria contínuo.

E. 40.2 *Exercício.* Complete os detalhes dessa última afirmação. ✣

Esses exemplos mostram mais uma vez que a continuidade de uma aplicação depende das topologias adotadas.

• **O espaço vetorial $\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})$**

Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois espaços vetoriais normados, cujas normas serão denotadas por $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$, respectivamente. Denotamos por $\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})$ o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$.

O conjunto $\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})$ é um espaço vetorial sobre os complexos. De fato, dados dois operadores quaisquer T e $U \in \mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})$ podemos definir o operador $\alpha T + \beta U$, com $\alpha,\,\beta \in \mathbb{C}$, como sendo o operador que associa a cada $v \in \mathcal{V}$ o vetor de $\mathcal{W}$ dado por $\alpha Tv + \beta Uv$. É trivial ver que $\alpha T + \beta U$ é também um operador linear e que também é contínuo.

Mais que isso, $\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})$ é um espaço vetorial normado, onde para cada operador T definimos sua norma operatorial $\|T\|$ como

$$\|T\| \;=\; \sup_{u\in\mathcal{V},\,u\neq 0} \frac{\|Tu\|_{\mathcal{W}}}{\|u\|_{\mathcal{V}}}\,. \tag{40.1}$$

Notemos que o lado direito de (40.1) é finito pois T é limitado.

E. 40.3 *Exercício.* Verifique que as propriedades que caracterizam uma norma são de fato satisfeitas pela definição acima. ✣

Notemos também que se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})$, então para todo $u \in \mathcal{V}$ vale que

$$\|Tu\|_{\mathcal{W}} \;\leq\; \|T\|\,\|u\|_{\mathcal{V}}\,.$$

E. 40.4 *Exercício.* Por quê? ✣

Mais adiante veremos que se $\mathcal{W}$ for um espaço de Banach, então $\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})$ também é um espaço de Banach em relação à norma definida acima. Esse fato é importante para toda a teoria dos operadores limitados em espaços de Hilbert e abre caminho para a teoria das chamadas álgebras de Banach e das chamadas álgebras C*.

• **Extensões de operadores**

Convidamos neste momento o leitor a reler a definição do conceito de extensão de funções à página 67. Esse conceito se aplica diretamente à teoria dos operadores lineares agindo entre espaços vetoriais.

Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois espaços vetoriais e $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ um operador linear agindo entre eles. Suponha que $\mathcal{V}$ seja subespaço de um espaço vetorial $\mathcal{V}'$. Uma extensão do operador T ao espaço $\mathcal{V}'$ seria um função $T' : \mathcal{V}' \to \mathcal{W}$ tal que $T'(v) = Tv$ para todo $v \in \mathcal{V}$. Se uma extensão T' de T for também um operador linear de $\mathcal{V}'$ em $\mathcal{W}$, então T' é dita ser uma *extensão linear* de T.

Como veremos no Capítulo 41, página 2364, extensões lineares desempenham um papel importante no estudo de operadores não-limitados em espaços de Hilbert.

• **Núcleo e imagem de operadores lineares**

Para fixarmos notação, introduzamos alguns conceitos de uso geral. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois espaços vetoriais e $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ um operador linear agindo entre eles. Definimos o *núcleo* de T por

$$\mathrm{Ker}\,(T) \;:=\; \big\{v \in \mathcal{V}\big|\; Tv \;=\; 0\big\}\,.$$

É elementar demonstrar que T é injetor ("um-a-um") se e somente se $\mathrm{Ker}\,(T) = \{0\}$. A imagem de $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é mais frequentemente denotada por $\mathrm{Ran}\,(T)$, ao invés de $\mathrm{Im}(T)$, e é definida por

$$\mathrm{Ran}\,(T) \;:=\; \big\{w \in \mathcal{W}\big|\; w = Tv \text{ para algum } v \in \mathcal{V}\big\}\,.$$

É um exercício elementar demonstrar que $\mathrm{Ker}\,(T)$ e $\mathrm{Ran}\,(T)$ são subespaços lineares de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, respectivamente.

No caso de espaços vetoriais normados tem-se o seguinte resultado:

Proposição 40.2 *Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois espaços vetoriais normados, com normas $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$, respectivamente, e seja $T:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ um operador linear contínuo. Então, $\mathrm{Ker}\,(T)$ é um subespaço linear fechado de $\mathcal{V}$.* □

Prova. É evidente que $\mathrm{Ker}\,(T)$ é a pré-imagem do conjunto fechado $\{0\}\subset\mathcal{W}$ e, portanto, será fechado se T for contínuo. Uma outra prova mais direta é a seguinte. Seja v_n, $n\in\mathbb{N}$, uma sequência de elementos de $\mathrm{Ker}\,(T)$ que convirja a $v\in\mathcal{V}$, isto é, $v=\lim_{n\to\infty}v_n$. Então, como T é contínuo, tem-se $Tv=T\big(\lim_{n\to\infty}v_n\big)=\lim_{n\to\infty}Tv_n=\lim_{n\to\infty}0=0$, provando que $v\in\mathrm{Ker}\,(T)$. Isso estabeleceu que $\mathrm{Ker}\,(T)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{V}$. ■

• **Isometrias entre espaços normados**

Se $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são dois espaços vetoriais normados (com normas $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$, respectivamente), dizemos que um operador $T:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ é *isométrico* (ou uma *isometria*) se valer

$$\big\|Tv\big\|_{\mathcal{W}} \;=\; \big\|v\big\|_{\mathcal{V}}$$

para todo $v\in\mathcal{V}$. É bastante evidente que vale a seguinte afirmação: se T é isométrico, então $\mathrm{Ker}\,(T)=\{0\}$. É também evidente que uma isometria $T:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ é limitada e, portanto, contínua, com $\|T\|=1$.

Se o domínio de um operador isométrico for um espaço de Banach, vale a seguinte afirmação, que usaremos no que segue:

Proposição 40.3 *Seja $\mathcal{V}$ um espaço de Banach com relação à uma norma $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ e seja $\mathcal{W}$ um espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$. Seja $T:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ um operador isométrico. Então, $\mathrm{Ran}\,(T)$ é um subespaço linear fechado de $\mathcal{W}$ e, em verdade, é um espaço de Banach com respeito à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$.* □

Prova. Seja v_n, $n\in\mathbb{N}$, uma sequência de elementos de $\mathcal{V}$ tal que Tv_n, $n\in\mathbb{N}$, converge em $\mathcal{W}$ a um elemento w, ou seja, $w=\lim_{n\to\infty}Tv_n$. Isso implica que Tv_n, $n\in\mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}$ e, portanto, para todo $\epsilon>0$ existe $N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ tal que $\big\|Tv_n-Tv_m\big\|_{\mathcal{W}}<\epsilon$ sempre que n e m forem ambos maiores que $N(\epsilon)$. Pela linearidade e isometria de T, tem-se que $\big\|Tv_n-Tv_m\big\|_{\mathcal{W}}=\big\|T(v_n-v_m)\big\|_{\mathcal{W}}=\big\|v_n-v_m\big\|_{\mathcal{V}}$. Logo, concluímos que v_n, $n\in\mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{V}$ e, como este é um espaço de Banach, concluímos que a sequência v_n, $n\in\mathbb{N}$, converge em $\mathcal{V}$, ou seja, que existe $v\in\mathcal{V}$ tal que $v=\lim_{n\to\infty}v_n$. Portanto, pela continuidade de T, temos que $w=\lim_{n\to\infty}Tv_n=T\big(\lim_{n\to\infty}v_n\big)=Tv$, provando que $w\in\mathrm{Ran}\,(T)$. Isso estabelece que $\mathrm{Ran}\,(T)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{W}$.

Suponhamos agora que w_n, $n\in\mathbb{N}$, seja uma sequência de Cauchy em $\mathrm{Ran}\,(T)$. Então, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $v_n\in\mathcal{V}$ tal que $w_n=Tv_n$. Assim, para todo $\epsilon>0$ existe $N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ tal que $\epsilon>\|w_n-w_m\|_{\mathcal{W}}=\|Tv_n-Tv_m\|_{\mathcal{W}}=\|v_n-v_m\|_{\mathcal{V}}$ sempre que n e m forem ambos maiores que $N(\epsilon)$. Isso estabelece que v_n, $n\in\mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{V}$ e, portanto, converge a $v\in\mathcal{V}$. Agora, pela propriedade de isometria, $\lim_{n\to\infty}\|Tv-w_n\|_{\mathcal{W}}=\lim_{n\to\infty}\|Tv-Tv_n\|_{\mathcal{W}}=\lim_{n\to\infty}\|v_n-v\|_{\mathcal{V}}=0$, provando que a sequência w_n, $n\in\mathbb{N}$, converge em $\mathcal{W}$ ao elemento $Tv\in\mathrm{Ran}\,(T)$. Isso estabeleceu que $\mathrm{Ran}\,(T)$ é um espaço de Banach com respeito à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$. ■

40.1.1 Espaços de Banach de Operadores

• **O Teorema BLT**

Vamos agora enunciar e demonstrar um resultado sobre extensões lineares de operadores contínuos que será frequentemente usado adiante, muitas vezes até sem menção explícita.

Muitas vezes nos é apresentado um operador limitado T agindo entre dois espaços vetoriais normados $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, sendo $\mathcal{V}$ um espaço métrico não-completo, mas $\mathcal{W}$ sendo completo. Muitas vezes é útil, conveniente ou mesmo necessário, saber se é possível estender o operador T para um completamento $\tilde{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$. Veremos mais abaixo aplicações em que tal

procedimento é útil. Será isso sempre possível? Será a extensão também contínua? E se o for, será a extensão obtida a única possível?

O teorema seguinte nos dá condições suficientes para que uma tal extensão exista e seja única, a saber, basta que $\mathcal{W}$ seja completo. Esse teorema é denominado por alguns autores de *Teorema BLT* ("bounded linear transformation"). Em verdade, trata-se parcialmente de um caso particular do Teorema 32.13, página 1626, pois operadores lineares e contínuos são uniformemente contínuos (verifique!).

Teorema 40.1 (BLT) *Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial normado, cuja norma é denotada por $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ e seja $\mathcal{W}$ um espaço vetorial normado, cuja norma é denotada por $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$. Suponha que $\mathcal{W}$ seja completo na métrica definida pela norma $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$, ou seja, suponha que $\big(\mathcal{W},\,\|\cdot\|_{\mathcal{W}}\big)$ seja um espaço de Banach. Suponhamos também que $\mathcal{V}$ seja um subespaço denso de um outro espaço vetorial normado e completo $\tilde{\mathcal{V}}$, com norma $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{V}}}$, e que a inclusão $\iota:\mathcal{V}\to\tilde{\mathcal{V}}$ seja uma isometria (ou seja, que $\|v\|_{\mathcal{V}}=\|v\|_{\tilde{\mathcal{V}}}$ para todo $v\in\mathcal{V}$).*

Então, para todo operador linear limitado $T:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$, $T\in\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})$, existe uma extensão $\tilde{T}:\tilde{\mathcal{V}}\to\mathcal{W}$ que também é um operador linear limitado, $\tilde{T}\in\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{V}},\,\mathcal{W})$, e tal que $\|\tilde{T}\|_{\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{V}},\,\mathcal{W})}=\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})}$. Fora isso, tal extensão é a única com as propriedades mencionadas. □

Comentários. No caso de funcionais lineares, encontraremos no Teorema 40.5, página 2186, uma afirmação semelhante à do Teorema 40.1 (exceto pela unicidade).

Notemos que a hipótese de $\mathcal{V}$ ser denso em $\tilde{\mathcal{V}}$ significa que para o fecho $\overline{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}\subset\tilde{\mathcal{V}}$ na topologia de $\big(\tilde{\mathcal{V}},\,\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{V}}}\big)$ tem-se $\overline{\mathcal{V}}=\tilde{\mathcal{V}}$. Assim, para cada $\tilde{v}\in\tilde{\mathcal{V}}$ existe ao menos uma sequência $v_n\in\mathcal{V}$ que converge a $\tilde{v}$: $\lim_{n\to\infty}\big\|\tilde{v}-v_n\big\|_{\tilde{\mathcal{V}}}=0$.

Um terceiro comentário relevante é que, com as devidas adaptações, $\tilde{\mathcal{V}}$ pode ser tomado como o completamento canônico de $\mathcal{V}$ na norma deste. ♣

Prova do Teorema 40.1. A demonstração consiste em construir a extensão $\tilde{T}$ e mostrar que a mesma satisfaz as propriedades mencionadas. A primeira etapa é a construção de $\tilde{T}$.

Como entendemos $\mathcal{V}$ como um subconjunto denso de $\tilde{\mathcal{V}}$, todo elemento de $\tilde{\mathcal{V}}$ é limite de uma sequência de elementos de $\mathcal{V}$. Seja então $x\in\tilde{\mathcal{V}}$ e seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $\mathcal{V}$ que converge a x. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, é uma sequência de Cauchy.

Seja $y_n=Tx_n\in\mathcal{W}$. Mostremos que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um sequência de Cauchy de elementos de $\mathcal{W}$. De fato,

$$\|y_m-y_n\|_{\mathcal{W}} \;=\; \|T(x_m-x_n)\|_{\mathcal{W}} \;\leq\; \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})}\,\|x_m-x_n\|_{\mathcal{V}} \;=\; \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})}\,\|x_m-x_n\|_{\tilde{\mathcal{V}}}\,.$$

Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\tilde{\mathcal{V}}$, o lado direito pode ser feito menor que qualquer $\epsilon>0$ dado, desde que m e n sejam grandes o suficiente, mostrando que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de fato uma sequência de Cauchy de elementos de $\mathcal{W}$. O ponto crucial é que estamos supondo que $\mathcal{W}$ seja completo e, portanto, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a um elemento de $\mathcal{W}$ que chamaremos de y. Esse é o ingrediente que nos permite definir $\tilde{T}$ como sendo a função que associa x a y:

$$\tilde{T}(x) \;:=\; y\,,$$

ou seja,

$$\tilde{T}(x) \;:=\; \lim_{n\to\infty}Tx_n\,.$$

Um ponto lógico que ainda tem de ser exibido antes de passarmos adiante é mostrar que essa definição não depende da particular sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adotada que converge a $x\in\tilde{\mathcal{V}}$. Para isso basta mostrar que se $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma outra sequência que converge a x, então $\{Tx'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ também converge ao mesmo y. A demonstração disso está nas seguintes desigualdades. Seja y' o limite de $\{Tx'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (que existe pelos mesmos argumentos acima). Então

$$\begin{aligned}
\|y-y'\|_{\mathcal{W}} &= \big\|(y-Tx_n)+T(x_n-x'_n)+(Tx'_n-y')\big\|_{\mathcal{W}}\\
&\leq \|y-Tx_n\|_{\mathcal{W}}+\big\|T(x_n-x'_n)\big\|_{\mathcal{W}}+\|Tx'_n-y'\|_{\mathcal{W}}\\
&\leq \|y-Tx_n\|_{\mathcal{W}}+\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})}\,\|x_n-x'_n\|_{\tilde{\mathcal{V}}}+\|Tx'_n-y'\|_{\mathcal{W}}.\\
&= \|y-Tx_n\|_{\mathcal{W}}+\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})}\,\big\|(x_n-x)-(x'_n-x)\big\|_{\tilde{\mathcal{V}}}+\|Tx'_n-y'\|_{\mathcal{W}}\\
&\leq \|y-Tx_n\|_{\mathcal{W}}+\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})}\,\big(\|x_n-x\|_{\tilde{\mathcal{V}}}+\|x'_n-x\|_{\tilde{\mathcal{V}}}\big)+\|Tx'_n-y'\|_{\mathcal{W}}. \qquad (40.2)
\end{aligned}$$

É fácil agora ver que, pelas hipóteses, cada um dos termos da última linha vai a zero quando $n \to \infty$, mostrando que $\|y - y'\|_{\mathcal{W}} = 0$ e que, portanto, $y = y'$.

Assim, $\tilde{T}$ está bem definido como uma função de $\tilde{\mathcal{V}}$ em $\mathcal{W}$. Temos agora que mostrar que: 1º $\tilde{T}$ é uma extensão de T; 2º $\tilde{T}$ é linear; 3º $\|\tilde{T}\|_{\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{V}},\,\mathcal{W})} = \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})}$.

Provemos 1 com a observação que cada $x \in \mathcal{V}$ é identificado em $\tilde{\mathcal{V}}$ com a sequência constante $x_n = x$.

$$\tilde{T}(x) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Tx = Tx,$$

mostrando que $\tilde{T}$ e T coincidem em $\mathcal{V}$.

Para mostrar a linearidade notemos que se $\{u_n \in \mathcal{V}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $u \in \tilde{\mathcal{V}}$ e $\{v_n \in \mathcal{V}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $v \in \tilde{\mathcal{V}}$, então $\{\alpha u_n + \beta v_n \in \mathcal{V}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\alpha u + \beta v$.

E. 40.5 *Exercício.* Se isso não é óbvio para você, complete os detalhes. ✣

Daí, segue imediatamente que

$$\tilde{T}(\alpha u + \beta v) \;=\; \lim_{n\to\infty} T(\alpha u_n + \beta v_n) \;=\; \alpha \lim_{n\to\infty} Tu_n + \beta \lim_{n\to\infty} Tv_n \;=\; \alpha\tilde{T}(u) + \beta\tilde{T}(v)\,,$$

estabelecendo a linearidade de $\tilde{T}$.

Passemos à demonstração do ponto 3. Pela continuidade da norma (vide página 2125) temos que para todo $x \in \tilde{\mathcal{V}}$ e toda sequência x_n de elementos de $\mathcal{V}$ que converge a x, vale

$$\|\tilde{T}x\|_{\mathcal{W}} \;=\; \Big\| \lim_{n\to\infty} Tx_n \Big\|_{\mathcal{W}} \;=\; \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\|_{\mathcal{W}} \;\le\; \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})} \Big(\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_{\mathcal{V}} \Big)$$

$$= \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})} \Big\| \lim_{n\to\infty} x_n \Big\|_{\mathcal{V}} \;=\; \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})}\, \|x\|_{\tilde{\mathcal{V}}}\,,$$

o que demonstra que $\tilde{T}$ é limitado e que $\|\tilde{T}\|_{\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{V}},\,\mathcal{W})} \le \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})}$.

Tem-se, porém, que, pela definição de norma operatorial,

$$\|\tilde{T}\|_{\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{V}},\,\mathcal{W})} \;=\; \sup_{u\in\tilde{\mathcal{V}},\,u\neq 0} \frac{\|\tilde{T}u\|_{\mathcal{W}}}{\|u\|_{\tilde{\mathcal{V}}}} \;\ge\; \sup_{u\in\mathcal{V},\,u\neq 0} \frac{\|\tilde{T}u\|_{\mathcal{W}}}{\|u\|_{\mathcal{V}}} \;=\; \sup_{u\in\mathcal{V},\,u\neq 0} \frac{\|Tu\|_{\mathcal{W}}}{\|u\|_{\mathcal{V}}} \;=\; \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})}\,,$$

o que demonstra que $\|\tilde{T}\|_{\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{V}},\,\mathcal{W})} \ge \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})}$, estabelecendo, assim, a igualdade $\|\tilde{T}\|_{\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{V}},\,\mathcal{W})} = \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})}$.

A unicidade decorre da observação que se $\tilde{T}' \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{V}},\,\mathcal{W})$ também estende isometricamente T, então $\tilde{T}' - \tilde{T}$ é nulo sobre $\mathcal{V}$. Se $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$ e $v_n \in \mathcal{V}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência aproximante de $\mathcal{V}$, então, pela continuidade, $\Big\|\big(\tilde{T}' - \tilde{T}\big)\tilde{v}\Big\|_{\tilde{\mathcal{V}}} = \lim_{n\to\infty} \Big\|\big(\tilde{T}' - \tilde{T}\big)v_n\Big\|_{\tilde{\mathcal{V}}} = 0$, implicando $\tilde{T}' = \tilde{T}$. ■

• Completamentos de subespaços de espaços de Hilbert com relação a outras normas

Encontraremos diversos usos do Teorema BLT, Teorema 40.1, página 2175. Um dos mais simples e relevantes, e que será evocado adiante, é expresso na seguinte afirmação:

Proposição 40.4 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert dotado de um produto escalar $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ e de uma norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ associada a esse produto escalar. Seja $\mathcal{A}$ um subespaço de $\mathcal{H}$ onde está definido um outro produto escalar $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$ cuja norma correspondente seja $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ e suponhamos que exista uma constante $C > 0$ tal que valha $\|u\|_{\mathcal{H}} \le C\|u\|_{\mathcal{A}}$ para todo $u \in \mathcal{A}$. Então, existe um subespaço linear $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{H}$ que é um completamento de $\mathcal{A}$ na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ e é um espaço de Hilbert na extensão do produto escalar $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$ a $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$.* □

Comentário. No enunciado acima, $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ não é necessariamente fechado na topologia induzida pela norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, mas pode ser denso em $\mathcal{H}$ nessa norma. ♣

Prova da Proposição 40.4. Seja $\widetilde{\mathcal{A}}$ o completamento canônico de $\mathcal{A}$ em relação à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$. Denotamos a norma em $\widetilde{\mathcal{A}}$ por $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{A}}}$. A inclusão $\iota : \mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ é evidentemente isométrica, no sentido que $\big\|\iota(u)\big\|_{\widetilde{\mathcal{A}}} = \|u\|_{\mathcal{A}}$ para todo $u \in \mathcal{A}$.

Seja $j : \mathcal{A} \to \mathcal{H}$ a inclusão $\mathcal{A} \ni u \mapsto j(u) = u \in \mathcal{H}$. Trata-se de uma aplicação linear e contínua, pois $\big\|j(u)\big\|_{\mathcal{H}} = \|u\|_{\mathcal{H}} \le C\|u\|_{\mathcal{A}}$ para todo $u \in \mathcal{A}$. O Teorema BLT, Teorema 40.1, página 2175, garante a existência de uma extensão linear $\tilde{j} : \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{H}$, igualmente contínua, e tal que $\|\tilde{j}\| = \|j\|$.

A imagem $\tilde{j}\big(\widetilde{\mathcal{A}}\big) \subset \mathcal{H}$ é um subespaço linear de $\mathcal{H}$ que denotamos por $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$. É claro que $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ é fechado na topologia da norma $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ e é um completamento de $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$ segundo essa mesma norma. O produto escalar $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ pode ser estendido por continuidade a $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, fazendo de $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ um espaço de Hilbert. ■

• $\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})$ é um espaço de Banach se $\mathcal{W}$ o for

Já vimos que se $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são espaços normados, com normas $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$, respectivamente, então $\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})$, o espaço vetorial dos operadores contínuos agindo entre $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, é também um espaço normado, com a chamada *norma operatorial*

$$\|T\| \;=\; \sup_{u\in\mathcal{V},\,u\neq 0} \frac{\|Tu\|_{\mathcal{W}}}{\|u\|_{\mathcal{V}}}, \qquad T \in \mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})\,. \tag{40.3}$$

$\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})$ é um espaço métrico na métrica definida por essa norma. Essa topologia métrica definida em $\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})$ pela norma operatorial é denominada *topologia uniforme*.

Vamos mostrar aqui o seguinte teorema, de grande importância na teoria dos operadores limitados em espaços de Hilbert e que abre caminho para a teoria das chamadas álgebras de Banach e para as chamadas álgebras C*.

Teorema 40.2 *Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial normado, cuja norma é denotada por $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ e seja $\mathcal{W}$ um espaço vetorial normado, cuja norma é denotada por $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$. Se $\mathcal{W}$ é completo, ou seja, se é um espaço de Banach, então $\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})$ é também um espaço vetorial normado completo, ou seja, é um espaço de Banach, para a norma (40.3).* □

Esse teorema pode ser entendido como uma restrição do Teorema 24.2, página 1331, a funções lineares (operadores lineares). De fato, sua demonstração segue daquele teorema se adicionarmos a prova (como faremos abaixo) que o limite uniforme de operadores lineares é novamente um operador linear.

Prova do Teorema 40.2. O que temos que mostrar é que se A_n, $n \in \mathbb{N}$, for uma sequência de Cauchy em relação à métrica definida pela norma operatorial, então A_n converge nessa métrica a um operador que também é linear e limitado, ou seja, também um elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{V},\,\mathcal{W})$. A estratégia que seguiremos, como na demonstração do Teorema BLT, é exibir um candidato a ser o limite da sequência A_n, mostrar que esse candidato é um operador linear e contínuo e, por fim, mostrar que ele é, de fato, limite dos A_n's na topologia uniforme.

Seja, então, A_n, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de Cauchy em relação à métrica definida pela norma operatorial. Portanto, para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que para todo m, $n \ge N(\epsilon)$ tem-se $\|A_m - A_n\| \le \epsilon$.

Seja $x \in \mathcal{V}$ e seja a sequência em $\mathcal{W}$ dada por

$$y_n \;=\; A_n x\,.$$

É fácil mostrar que y_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}$. De fato, se $m,\ n \ge N(\epsilon)$,

$$\|y_m - y_n\|_{\mathcal{W}} \;=\; \|A_m x - A_n x\|_{\mathcal{W}} \;=\; \|(A_m - A_n)x\|_{\mathcal{W}} \;\le\; \|(A_m - A_n)\|\,\|x\|_{\mathcal{V}} \;\le\; \epsilon\|x\|_{\mathcal{V}}\,,$$

mostrando que y_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy.

O ponto crucial é que fizemos a hipótese que $\mathcal{W}$ é um conjunto completo. Assim, a sequência y_n converge a um elemento de $\mathcal{W}$ que denominaremos y. Como cada y_n depende de x, o vetor y também depende de x, que é um vetor arbitrário de $\mathcal{V}$. Definimos, assim, $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ como sendo a função que associa cada $x \in \mathcal{V}$ ao vetor $y \in \mathcal{W}$ correspondente:

$$A(x) \;=\; y\,,$$

ou seja,

$$A(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} A_n x \;,$$

onde o limite é entendido na topologia métrica de $\mathcal{W}$ definida pela norma $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$.

Essa função A é nossa candidata a ser o limite da sequência A_n, $n \in \mathbb{N}$, na topologia uniforme. Para tal, temos de demonstrar que: 1º A é um operador linear; 2º A é um operador limitado e, portanto, um elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{V},\, \mathcal{W})$ e 3º A é o limite da sequência A_n, $n \in \mathbb{N}$, na topologia uniforme.

Prova de 1. Pela definição, para quaisquer $\alpha,\, \beta \in \mathbb{C}$ e quaisquer $u,\, v \in \mathcal{V}$,

$$A(\alpha u + \beta v) \;=\; \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha u + \beta v) \;=\; \alpha \lim_{n\to\infty} A_n u + \beta \lim_{n\to\infty} A_n v \;=\; \alpha A(u) + \beta A(v) \;,$$

provando a linearidade de A.

Prova de 2. Para provar que A é limitado (e, portanto, contínuo) precisamos antes mostrar que a sequência de números reais positivos $\|A_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

Para tal, fazemos uso da desigualdade (3.24), página 275. Temos

$$|\, \|A_m\| - \|A_n\| \,| \;\leq\; \|A_m - A_n\| \;.$$

Assim, se o lado direito é menor que ϵ para m e $n \geq N(\epsilon)$, o lado esquerdo também é, provando que $\|A_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy de números reais. Como $\mathbb{R}$ é completo, essa sequência converge a um número que chamaremos $\mathcal{A} \geq 0$.

Assim, usando a continuidade da norma (vide página 2125),

$$\|Ax\|_{\mathcal{W}} \;=\; \Big\| \lim_{n\to\infty} A_n x \Big\|_{\mathcal{W}} \;=\; \lim_{n\to\infty} \|A_n x\|_{\mathcal{W}} \;\leq\; \Big(\lim_{n\to\infty} \|A_n\|\Big)\, \|x\|_{\mathcal{V}} \;=\; \mathcal{A}\|x\|_{\mathcal{V}} \;,$$

que mostra que A é limitado e, portanto, contínuo.

Prova de 3. Acabamos de mostrar que A é um elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{V},\, \mathcal{W})$. Resta apenas mostrar que A é o limite dos A_n's na topologia uniforme.

Para qualquer n e qualquer $x \in \mathcal{V}$, tem-se pela continuidade da norma que

$$\big\|(A - A_n)x\big\|_{\mathcal{W}} \;=\; \Big\| \lim_{m\to\infty} (A_m - A_n)x \Big\|_{\mathcal{W}} \;=\; \lim_{m\to\infty} \big\|(A_m - A_n)x\big\|_{\mathcal{W}} \;\leq\; \Big(\lim_{m\to\infty} \|A_m - A_n\|\Big)\, \|x\|_{\mathcal{V}} \;.$$

Assim,

$$\|A - A_n\| \;=\; \sup_{x\in\mathcal{V},\, x\neq 0} \frac{\big\|(A - A_n)x\big\|_{\mathcal{W}}}{\|x\|_{\mathcal{V}}} \;\leq\; \lim_{m\to\infty} \|A_m - A_n\| \;.$$

Como A_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy, vale para qualquer $\epsilon > 0$ que $\|A_m - A_n\| \leq \epsilon$ sempre que m e $n \geq N(\epsilon)$. Assim, $\lim_{m\to\infty} \|A_m - A_n\| \leq \epsilon$ sempre que $n \geq N(\epsilon)$. Logo, pelo que mostramos, $\|A - A_n\| \leq \epsilon$ sempre que $n \geq N(\epsilon)$, o que diz que A é o limite dos A_n's na topologia uniforme, como queríamos provar. ∎

40.1.2 O Dual Topológico de um Espaço de Banach

Seja V um espaço vetorial sobre corpo $\mathbb{C}$. Uma aplicação $l : V \to \mathbb{C}$, definida sobre todo V, é dita ser um *funcional linear* se

$$l(\alpha x + \beta y) \;=\; \alpha l(x) + \beta l(y)$$

para todo $x,\, y \in V$ e todo $\alpha,\, \beta \in \mathbb{C}$.

O conjunto de todos os funcionais lineares de V em $\mathbb{C}$ é denominado espaço dual algébrico de V e denotado V'. O conjunto V' é feito um espaço vetorial (sobre $\mathbb{C}$), por meio da seguinte relação:

$$(\alpha l + \beta m)(x) \;=\; l(\alpha x) + m(\beta x) \;,$$

para todo l e $m \in V'$; $\alpha,\, \beta \in \mathbb{C}$ e todo $x \in V$. O vetor nulo de V' é o funcional linear que associa trivialmente todo vetor de V a zero: $l(x) = 0$, $\forall x \in V$.

Seja X um espaço de Banach. O conjunto de todos os funcionais lineares contínuos sobre X é dito ser o *dual topológico* de X. O dual topológico de X será denotado nestas notas por $X^\dagger$. Note-se que $X^\dagger \subset X'$.

Pela sua definição, podemos identificar $X^\dagger$ com o conjunto $\mathcal{B}(X,\, \mathbb{C})$. Isso leva-nos a concluir que $X^\dagger$ é igualmente um espaço normado com a norma

$$\|l\|_{X^\dagger} \;=\; \sup_{x\in X,\, x\neq 0} \frac{|l(x)|}{\|x\|_X} \;. \tag{40.4}$$

Mais que isso, o Teorema 40.2, página 2177, diz-nos que $X^\dagger$ é também um espaço de Banach em relação a essa norma. Consequentemente o espaço $(X^\dagger)^\dagger$, o dual topológico de $X^\dagger$, é igualmente um espaço de Banach, e assim por diante. $(X^\dagger)^\dagger$ é por vezes denominado o *dual (topológico) duplo* de X ou *bidual (topológico)* de X. Podemos nos perguntar qual a relação entre esses espaços.

De maneira geral podemos sempre identificar X com um subconjunto de $(X^\dagger)^\dagger$, no seguinte sentido: existe uma aplicação injetora de X em $(X^\dagger)^\dagger$. Denominemos essa aplicação $\mathcal{D} : X \to (X^\dagger)^\dagger$. Podemos defini-la da seguinte forma. Se $x \in X$ definimos $\mathcal{D}(x)$ como sendo o elemento de $(X^\dagger)^\dagger$ que a cada $l \in X^\dagger$ associa o número $l(x)$:

$$\mathcal{D}(x)(l) \;:=\; l(x) \;.$$

É fácil verificar que $\mathcal{D}$ é linear e injetora, não o faremos aqui. Que $\mathcal{D}(x)$ é contínuo segue do fato que $|\mathcal{D}(x)(l)| = |l(x)| \leq \|x\|_X\, \|l\|_{X^\dagger}$, que mostra que $\mathcal{D}(x)$ é limitado. É uma consequência do Teorema de Hahn-Banach, mais precisamente, a Proposição 40.8, página 2187, que $\mathcal{D}$ é uma isometria, ou seja,

$$\|\mathcal{D}(x)\|_{(X^\dagger)^\dagger} \;=\; \|x\|_X \;. \tag{40.5}$$

E. 40.6 *Exercício.* Prove essa afirmação usando a Proposição 40.8. Essa afirmação é um caso particular da Proposição 40.20, página 2206. ✣

• **Espaços reflexivos**

Essas observações dizem-nos que, em um certo sentido, podemos considerar X como um subconjunto de seu bidual topológico $(X^\dagger)^\dagger$, pois $\mathcal{D}(X) \subset (X^\dagger)^\dagger$. Quando estudamos o dual algébrico de espaços vetoriais (seção 2.3.2, página 198 e seguintes) demonstramos um teorema (Teorema 2.13, página 203) que afirma que o bidual algébrico de um espaço vetorial V de dimensão algébrica infinita é sempre estritamente maior que V. No caso do bidual topológico de espaços de Banach isso não é mais necessariamente verdade, pois há espaços de Banach que possuem a propriedade que $\mathcal{D}(X) = (X^\dagger)^\dagger$. Tais espaços são denominados *espaços reflexivos*.

Os espaços $L^p(\mathbb{R},\, dx)$ com $1 < p < \infty$ são reflexivos pois $(L^p(\mathbb{R},\, dx))^\dagger = L^q(\mathbb{R},\, dx)$ com $p^{-1} + q^{-1} = 1$, de onde segue facilmente que $((L^p(\mathbb{R},\, dx))^\dagger)^\dagger = L^p(\mathbb{R},\, dx)$ (por quê?). Para uma prova que $(L^p(\mathbb{R},\, dx))^\dagger = L^q(\mathbb{R},\, dx)$ vide, por exemplo, [426]. Os espaços $L^1(\mathbb{R},\, dx)$ e $L^\infty(\mathbb{R},\, dx)$ não são reflexivos. Na Proposição 40.7, página 2181, provaremos que os espaços $\ell_p(\mathbb{N})$ de sequências p-somáveis com $1 < p < \infty$ são reflexivos e que $\ell_p(\mathbb{N})^\dagger$, o dual topológico de $\ell_p(\mathbb{N})$, e o espaço $\ell_q(\mathbb{N})$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ podem ser identificados.

Um fato importante é que todos os espaços de Hilbert são reflexivos. Isso segue do Teorema da Representação de Riesz (Teorema 39.4, página 2134) e de algumas considerações simples, como mostraremos agora.

• **Espaços de Hilbert são reflexivos**

O Teorema da Representação de Riesz (Teorema 39.4, página 2134) afirma que se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert e $l \in \mathcal{H}^\dagger$ é um funcional linear contínuo agindo em $\mathcal{H}$, então existe um e somente um elemento $\psi_l \in \mathcal{H}$ tal que $l(x) = \langle \psi_l,\, x\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Vamos denominar por $\mathcal{R} : \mathcal{H}^\dagger \to \mathcal{H}$ a função que associa cada $l \in \mathcal{H}^\dagger$ a seu vetor $\psi_l \in \mathcal{H}$:

$$l(x) \;=\; \langle \mathcal{R}(l),\, x\rangle, \qquad \forall x \in \mathcal{H} \;. \tag{40.6}$$

O Teorema de Representação de Riesz diz-nos que $\mathcal{R}$ é injetora. De fato $\mathcal{R} : \mathcal{H}^\dagger \to \mathcal{H}$ é também bijetora pois é sobrejetora. Para ver isso, notemos que se $\phi \in \mathcal{H}$, então $\mathcal{H} \ni x \mapsto f(x) = \langle \phi,\, x\rangle$ define um funcional contínuo em $\mathcal{H}$ e, portanto, $\mathcal{R}(f) = \phi$, mostrando que todo elemento de $\mathcal{H}$ está na imagem de $\mathcal{R}$.

Devido às propriedades do produto escalar, $\mathcal{R}$ é uma aplicação antilinear, ou seja,

$$\mathcal{R}(\alpha l + \beta l') \;=\; \overline{\alpha}\mathcal{R}(l) + \overline{\beta}\mathcal{R}(l')$$

para todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ e todos $l,\ l' \in \mathcal{H}^\dagger$, pois devemos ter

$$(\alpha l + \beta l')(x) \ = \ \alpha l(x) + \beta l'(x)$$

e, com a antilinearidade de $\mathcal{R}$ temos de fato

$$(\alpha l + \beta l')(x) \ = \ \langle \mathcal{R}(\alpha l + \beta l'),\ x\rangle \ = \ \langle \overline{\alpha}\mathcal{R}(l) + \overline{\beta}\mathcal{R}(l'),\ x\rangle \ = \ \alpha\langle \mathcal{R}(l),\ x\rangle + \beta\langle \mathcal{R}(l'),\ x\rangle \ = \ \alpha l(x) + \beta l'(x)\ ,$$

como desejado.

Com essas observações é fácil ver que o espaço $\mathcal{H}^\dagger$ é um espaço vetorial com produto escalar, dado por

$$\langle l,\ m\rangle_{\mathcal{H}^\dagger} \ = \ \langle \mathcal{R}(m),\ \mathcal{R}(l)\rangle \ = \ m(\mathcal{R}(l))\ . \tag{40.7}$$

Repare a ordem invertida!

E. 40.7 *Exercício.* Mostre que todas as propriedades de produto escalar estão satisfeitas. ✣

Com essa definição de produto escalar podemos introduzir em $\mathcal{H}^\dagger$ uma norma, que denotaremos provisoriamente por $\|l\|_1$, dada por

$$\|l\|_1 \ = \ \sqrt{\langle \mathcal{R}(l),\ \mathcal{R}(l)\rangle} \ = \ \|\mathcal{R}(l)\|\ .$$

Para mostrar que $\mathcal{H}^\dagger$ é um espaço de Hilbert precisamos mostrar que o mesmo é completo em relação a essa norma $\|\cdot\|_1$. A chave para isso é mostrar que as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\dagger}$ (definida em (40.4)) são iguais e lembrar que pelo Teorema 40.2, página 2177, $\mathcal{H}^\dagger$ é completo em relação à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\dagger}$.

Proposição 40.5 *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{H}^\dagger$ seu espaço dual topológico. Então, a norma $\|\cdot\|_1$ definida acima e a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\dagger}$ são iguais.* □

Prova. Seja $l \in \mathcal{H}^\dagger$. Queremos provar que $\|l\|_1 = \|l\|_{\mathcal{H}^\dagger}$. Se $l = 0$ a identidade é trivial. Seja $l \neq 0$. Pela definição

$$\|l\|_{\mathcal{H}^\dagger} \ = \ \sup_{x\in\mathcal{H},\ x\neq 0} \frac{|l(x)|}{\|x\|} \ = \ \sup_{x\in\mathcal{H},\ x\neq 0} \frac{|\langle \mathcal{R}(l),\ x\rangle|}{\|x\|} \ \geq \ \frac{|\langle \mathcal{R}(l),\ \mathcal{R}(l)\rangle|}{\|\mathcal{R}(l)\|} \ = \ \|\mathcal{R}(l)\| \ = \ \|l\|_1\ .$$

Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se para $x \neq 0$

$$\frac{|\langle \mathcal{R}(l),\ x\rangle|}{\|x\|} \ \leq \ \frac{\|\mathcal{R}(l)\|\,\|x\|}{\|x\|} \ = \ \|\mathcal{R}(l)\|\ .$$

Logo,

$$\|l\|_{\mathcal{H}^\dagger} \ = \ \sup_{x\in\mathcal{H},\ x\neq 0} \frac{|l(x)|}{\|x\|} \ = \ \sup_{x\in\mathcal{H},\ x\neq 0} \frac{|\langle \mathcal{R}(l),\ x\rangle|}{\|x\|} \ \leq \ \|\mathcal{R}(l)\| \ = \ \|l\|_1\ ,$$

provando que $\|l\|_{\mathcal{H}^\dagger} = \|l\|_1$. ■

Isso diz-nos, então, que $\mathcal{H}^\dagger$ é não apenas um espaço com um produto interno, mas é completo em relação a norma definida por esse produto interno, pois essa norma coincide com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\dagger}$ em relação à qual $\mathcal{H}^\dagger$ é completo pelo Teorema 40.2, página 2177. Em resumo: $\mathcal{H}^\dagger$ é também um espaço de Hilbert!

Vamos com isso mostrar agora que $\mathcal{H}$ é reflexivo.

Proposição 40.6 *Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, então $\mathcal{D}(\mathcal{H}) = (\mathcal{H}^\dagger)^\dagger$, ou seja, todo espaço de Hilbert é reflexivo.* □

Prova. Acabamos de ver que se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, então $\mathcal{H}^\dagger$ e, consequentemente, $(\mathcal{H}^\dagger)^\dagger$ também são espaços de Hilbert.

Já vimos acima que $\mathcal{R} : \mathcal{H}^\dagger \to \mathcal{H}$ é uma aplicação antilinear bijetora. Assim, possui uma inversa $\mathcal{R}^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^\dagger$ que também é antilinear e bijetora. Como $\mathcal{H}^\dagger$ é também um espaço de Hilbert, segue pelo Teorema da Representação de Riesz (Teorema 39.4, página 2134) que também existe uma aplicação antilinear bijetora $\mathcal{S} : (\mathcal{H}^\dagger)^\dagger \to \mathcal{H}^\dagger$ com uma inversa $\mathcal{S}^{-1} : \mathcal{H}^\dagger \to (\mathcal{H}^\dagger)^\dagger$ igualmente antilinear e bijetora.

Por analogia com (40.6), vale que para todo $J \in (\mathcal{H}^\dagger)^\dagger$ e todo $l \in \mathcal{H}^\dagger$ que

$$J(l) \ = \ \langle \mathcal{S}(J),\ l\rangle_{\mathcal{H}^\dagger}\ .$$

Note que, por (40.7),

$$J(l) \ = \ \big\langle \mathcal{S}(J),\ l\big\rangle_{\mathcal{H}^\dagger} \ = \ \big\langle \mathcal{R}(l),\ \mathcal{R}\big(\mathcal{S}(J)\big)\big\rangle\ .$$

Como $\mathcal{S}^{-1}$ e $\mathcal{R}^{-1}$ são ambas antilineares e bijetoras, a composição $\mathcal{S}^{-1}\circ\mathcal{R}^{-1} : \mathcal{H} \to (\mathcal{H}^\dagger)^\dagger$ é linear (por quê?) e bijetora. Podemos verificar que $\mathcal{S}^{-1}\circ\mathcal{R}^{-1}$ é, em verdade, igual a $\mathcal{D}$ pois, para todo $l \in \mathcal{H}^\dagger$ e todo $x \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
\big(\mathcal{S}^{-1}\circ\mathcal{R}^{-1}(x)\big)(l) \ &= \ \big\langle \mathcal{S}\big(\mathcal{S}^{-1}\circ\mathcal{R}^{-1}(x)\big),\ l\big\rangle_{\mathcal{H}^\dagger} \\
&= \ \big\langle \mathcal{R}^{-1}(x),\ l\big\rangle_{\mathcal{H}^\dagger} \\
&= \ \big\langle \mathcal{R}(l),\ \mathcal{R}\big(\mathcal{R}^{-1}(x)\big)\big\rangle \\
&= \ \langle \mathcal{R}(l),\ x\rangle \\
&= \ l(x) \\
&= \ \mathcal{D}(x)(l)\ ,
\end{aligned} \tag{40.8}$$

provando que $\mathcal{S}^{-1}\circ\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{D}$. Assim, como $\mathcal{S}^{-1}\circ\mathcal{R}^{-1}$ é bijetora, $\mathcal{D}$ também o é, mostrando que $\mathcal{D}(\mathcal{H}) = (\mathcal{H}^\dagger)^\dagger$. ■

E. 40.8 *Exercício.* Você entendeu mesmo todas as passagens de (40.8)? ✣

• **Dualidade e reflexividade nos espaços $\ell_p(\mathbb{N})$ de sequências**

Os espaços de sequências p-somáveis $\ell_p(\mathbb{N})$ foram definidos na Seção 24.5.1, página 1336, onde provamos ser válida a desigualdade de Hölder:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i||b_i| \ \leq \ \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^q\right)^{1/q} \ \leq \ \|a\|_p\,\|b\|_q\ , \tag{40.9}$$

para todos $a \in \ell_p(\mathbb{N})$ e $b \in \ell_q(\mathbb{N})$ com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ e $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$. Vide (24.46) ou (24.50).

Aqui demonstraremos a seguinte afirmação:

Proposição 40.7 *Para todo $1 < p < \infty$ existe uma correspondência biunívoca e isométrica entre $\ell_p(\mathbb{N})^\dagger$, o dual topológico de $\ell_p(\mathbb{N})$, e o espaço $\ell_q(\mathbb{N})$ com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Isso implica que os espaços de Banach $\ell_p(\mathbb{N})$ com $1 < p < \infty$ são reflexivos, ou seja, vale $\ell_p(\mathbb{N}) = \big(\ell_p(\mathbb{N})^\dagger\big)^\dagger$ para todo $1 < p < \infty$.* □

Prova. Sejam daqui por diante $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$ relacionados por $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Para $a \in \ell_p(\mathbb{N})$ e $b \in \ell_q(\mathbb{N})$, a expressão

$$l_b(a) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} b_k a_k \tag{40.10}$$

define um funcional linear contínuo em $\ell_p(\mathbb{N})$ pois, pela desigualdade de Hölder (40.9) vale $|l_b(a)| \leq \|b\|_q\,\|a\|_p$, provando que l_b é limitado com $\|l_b\| \leq \|b\|_q$. Vamos agora provar que a todo elemento de $\ell_p(\mathbb{N})^\dagger$ corresponde um elemento de $\ell_q(\mathbb{N})$.

Seja e_j, $j \in \mathbb{N}$, a sequência cujo j-ésimo elemento vale 1, os demais sendo nulos: $(e_j)_i = \delta_{ij}$. É claro que para todo j vale $e_j \in \ell_p(\mathbb{N})$ para todo p e é claro também que para todo $a \in \ell_p(\mathbb{N})$ vale

$$a \ = \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\ ,$$

sendo que a convergência de $\sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ para $n \to \infty$ se dá na topologia de $\ell_p(\mathbb{N})$. Assim, se l é um funcional linear contínuo para $\ell_p(\mathbb{N})$, vale

$$l(a) \;=\; l\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right) \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k a_k \;,$$

onde $l_k := l(e_k)$.

Desejamos agora provar que a sequência l_k, $k \in \mathbb{N}$, é um elemento de $\ell_q(\mathbb{N})$. Para isso tomemos $a \in \ell_p(\mathbb{N})$ da forma

$$a_k \;=\; \begin{cases} 0 \;, & \text{se } l_k = 0 \;, \\ \overline{l_k}|l_k|^{q-2} \;, & \text{se } l_k \neq 0 \text{ e } 1 \leq k \leq N \;, \\ 0 \;, & \text{se } k > N \;, \end{cases}$$

onde $N \in \mathbb{N}$. É claro que essa sequência pertence a $\ell_p(\mathbb{N})$, pois apenas um número finito de seus elementos é não-nulo. Para tal a vale

$$l(a) \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k a_k \;=\; \sum_{k=1}^{N} l_k a_k \;=\; \sum_{k=1}^{N} |l_k|^q \;.$$

Como, por hipótese, l é um funcional linear limitado, vale $|l(a)| \leq \|l\|\,\|a\|_p$ para todo $a \in \ell_p(\mathbb{N})$. Para o a escolhido acima, tem-se

$$\|a\|_p \;=\; \left[\sum_{k=1}^{N}|a_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \;=\; \left[\sum_{k=1}^{N}|l_k|^{p(q-1)}\right]^{\frac{1}{p}} \;=\; \left[\sum_{k=1}^{N}|l_k|^q\right]^{\frac{1}{p}} \;.$$

Provamos, portanto, que

$$\left|\sum_{k=1}^{N}|l_k|^q\right| \;=\; |l(a)| \;\leq\; \|l\|\,\|a\|_p \;=\; \|l\|\left[\sum_{k=1}^{N}|l_k|^q\right]^{\frac{1}{p}} \;.$$

Isso implica

$$\left[\sum_{k=1}^{N}|l_k|^q\right]^{\frac{1}{q}} \;\leq\; \|l\| \;.$$

Como o lado direito independe de N, essa desigualdade é preservada no limite $N \to \infty$, estabelecendo que a sequência l_k é um elemento de $\ell_q(\mathbb{N})$, com norma menor ou igual a $\|l\|$.

As diversas considerações acima estabeleceram que todo funcional linear contínuo $l \in \ell_p(\mathbb{N})^\dagger$ é da forma (40.10) para algum $b \in \ell_q(\mathbb{N})$ com $\|b\|_q = \|l\|$ e que, portanto, existe uma correspondência bijetora e isométrica entre $\ell_p(\mathbb{N})^\dagger$ e $\ell_q(\mathbb{N})$. Segue facilmente disso que $\ell_p(\mathbb{N}) = \big(\ell_p(\mathbb{N})^\dagger\big)^\dagger$ para todo $1 < p < \infty$. ■

40.1.3 O Teorema de Hahn-Banach e Algumas Consequências do Mesmo

A existência de funcionais lineares em espaços vetoriais satisfazendo certas propriedades e de extensões dos mesmos é um assunto recorrente na Análise Funcional. Um papel de central importância no estudo desse tipo de questão é o Teorema de Hahn[4]-Banach[5], ao qual dedicamos a presente seção. Antes de enunciarmos esse teorema (em suas várias formas), lembremos algumas noções referentes a funcionais definidos em espaços vetoriais reais.

• **Funcionais subaditivos, sublineares e convexos**

Seja V um espaço vetorial real. Um funcional real $h : V \to \mathbb{R}$ é dito ser

1. **positivo-homogêneo** se $h(\lambda x) = \lambda h(x)$ para todo $x \in V$ e todo $\lambda \geq 0$,

[4] Hans Hahn (1879–1934).
[5] Stefan Banach (1892–1945).

2. **aditivo** se $h(x+y) = h(x) + h(y)$ para todos $x,\ y \in V$.
3. **subaditivo** se $h(x+y) \leq h(x) + h(y)$ para todos $x,\ y \in V$,
4. **supaditivo** se $h(x+y) \geq h(x) + h(y)$ para todos $x,\ y \in V$,
5. **sublinear** se for positivo-homogêneo e subaditivo,
6. **sup-linear** se for positivo-homogêneo e supaditivo,
7. **linear** se $h(\alpha x + \beta y) = \alpha h(x) + \beta h(y)$ para todos $x,\ y \in V$ e todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$,
8. **convexo**[6] se $h\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leq \alpha h(x) + (1-\alpha)h(y)$ para todos $x,\ y \in V$ e todo $\alpha \in [0,\ 1]$,
9. **côncavo** se $h\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \geq \alpha h(x) + (1-\alpha)h(y)$ para todos $x,\ y \in V$ e todo $\alpha \in [0,\ 1]$.

Se $h : V \to \mathbb{R}$ é sublinear, então é convexo, pois se $\alpha \in [0,\ 1]$, vale

$$h\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \overset{\text{subaditividade}}{\leq} h(\alpha x) + h\big((1-\alpha)y\big) \overset{\text{homogeneidade positiva}}{=} \alpha h(x) + (1-\alpha)h(y) \;.$$

Analogamente, se h é sup-linear, então é côncavo. A recíproca não é necessariamente verdadeira. Por exemplo, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x^2$ é convexo, mas não é subaditivo, nem positivo-homogêneo.

Note-se que uma seminorma (ou uma norma) em V é um funcional positivo-homogêneo e subaditivo e, portanto, é sublinear e, consequentemente, convexo.

O Teorema de Hahn-Banach, que apresentaremos a seguir, aplica-se a funcionais convexos e, portanto, abrange também os funcionais sublineares, seminormas e normas. Desde seu surgimento entre 1927 e 1929 esse teorema revelou-se rico em consequências fundamentais, algumas das quais discutiremos no contexto de espaços normados e de Banach. Como veremos, o Teorema de Hahn-Banach garante condições suficientes para a existência de extensões de funcionais lineares e tem uma versão para espaços vetoriais reais e uma generalização para espaços vetoriais complexos. Essa segunda versão é devida a Bohnenblust[7] e Sobczyk[8] e data do ano de 1938[9]. Para uma descrição histórica do Teorema de Hahn-Banach, vide [121] ou *Lawrence Naricia and Edward Beckenstein "The Hahn-Banach theorem: the life and times", Topology and its Applications* **77**, *193–211 (1997).*

• **Existência de extensões majoradas por funcionais convexos**

O seguinte lema, que desempenhará um papel decisivo na demonstração do Teorema de Hahn-Banach, ensina-nos que todo funcional linear definido em um subespaço de um espaço vetorial real e que é majorado por um funcional convexo globalmente definido, possui pelo menos uma extensão global que também é um funcional linear e também é majorado pelo mesmo funcional convexo.

Lema 40.1 *Seja V um espaço vetorial real e seja $f_1 : V_1 \to \mathbb{R}$ um funcional linear definido em V_1, um subespaço próprio de V. Suponha que exista um funcional convexo $p : V \to \mathbb{R}$ tal que $f_1(y) \leq p(y)$ para todo $y \in V_1$. Então, para cada $z \notin V_1$, não-nulo, existe um funcional linear $f_2 : V_2 \to \mathbb{R}$, definido no subespaço V_2, gerado por V_1 e por z, tal que f_2 é uma extensão de f_1 (ou seja, $f_2(y) = f_1(y)$ para todo $y \in V_1$) e satisfaz $f_2(w) \leq p(w)$ para todo $w \in V_2$.* □

Prova do Lema 40.1. Vamos tomar um vetor não-nulo $z \notin V_1$, doravante fixo, e denotar por V_2 o subespaço gerado pelos vetores de V_1 e z. Definamos $f_2 : V_2 \to \mathbb{R}$ por

$$f_2(\alpha z + y) \;:=\; \alpha F + f_1(y) \tag{40.11}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $y \in V_1$, onde F é uma constante arbitrária a ser especificada mais abaixo. Notemos que devido à linearidade de f_1

$$f_2\big((\alpha z + y) + (\alpha' z + y')\big) \;=\; f_2\big((\alpha+\alpha')z + (y+y')\big) \overset{(40.11)}{=} (\alpha+\alpha')F + f_1(y+y')$$

$$= \big(\alpha F + f_1(y)\big) + \big(\alpha' F + f_1(y')\big) \;=\; f_2(\alpha z + y) + f_2(\alpha' z + y') \;,$$

[6] A teoria das funções côncavas e convexas é estudada no Capítulo 5, página 316.
[7] Henri Frederic Bohnenblust (1906–2000).
[8] Andrew F. Sobczyk (1915–1981).
[9] H. Bohnenblust and A. Sobczyk, "Extensions of functionals on complex linear spaces", Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 91–93 (1938).

o que mostra que f_2 é aditiva. f_2 é também linear, pois $f_2\big(\beta(\alpha z+y)\big) = f_2(\beta\alpha z+\beta y) = \beta\alpha F + \beta f_1(y) = \beta f_2(\alpha z+y)$ para $\beta\in\mathbb{R}$.

É também claro (tomando $\alpha=0$) que $f_2(y)=f_1(y)$ para $y\in V_1$, o que significa que f_2 estende f_1 a V_2. Sobre a constante F notemos, tomando $y=0$, que $F=f_2(z)$, ou seja, fixar F fixa f_2 em z.

Fixaremos F impondo a condição que $f_2(w)\le p(w)$ para todo $w\in V_2$. Assim, para todo $\alpha\in\mathbb{R}$ e todo $y\in V_1$ desejamos que

$$\alpha F + f_1(y) \;\le\; p(\alpha z+y)\;. \tag{40.12}$$

Para $\alpha=0$ a relação $f_1(y)\le p(y)$ seria satisfeita por hipótese. Para $\alpha>0$ e $y\in V_1$ arbitrários, (40.12) implicaria

$$F \;\le\; \frac{1}{\alpha}p(\alpha z+y) - \frac{1}{\alpha}f_1(y)$$

e para $\alpha<0$ e $y\in V_1$ arbitrários[10],

$$F \;\ge\; \frac{1}{\alpha}p(\alpha z+y) - \frac{1}{\alpha}f_1(y)\;.$$

Reciprocamente, se ambas essas condições são satisfeitas, valerá também (40.12) para todo $\alpha\in\mathbb{R}$ e todo $y\in V_1$.

É claro que existirá um F satisfazendo ambas as condições se e somente se valer

$$\frac{1}{-\lambda}p(-\lambda z+y) - \frac{1}{-\lambda}f_1(y) \;\le\; \frac{1}{\lambda'}p(\lambda' z+y') - \frac{1}{\lambda'}f_1(y') \tag{40.13}$$

para todos $\lambda,\ \lambda'>0$ e todos $y,\ y'\in V_1$. Mas essa desigualdade é verdadeira, pois

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}f_1(y)+\frac{1}{\lambda'}f_1(y') \quad &= \quad \left(\frac{\lambda+\lambda'}{\lambda\lambda'}\right) f_1\left(\frac{\lambda'}{\lambda+\lambda'}y+\frac{\lambda}{\lambda+\lambda'}y'\right)\\
&= \quad \left(\frac{\lambda+\lambda'}{\lambda\lambda'}\right) f_1\left(\frac{\lambda'}{\lambda+\lambda'}(y-\lambda z)+\frac{\lambda}{\lambda+\lambda'}(y'+\lambda' z)\right)\\
&\overset{\text{hipótese}}{\le} \quad \left(\frac{\lambda+\lambda'}{\lambda\lambda'}\right) p\left(\frac{\lambda'}{\lambda+\lambda'}(y-\lambda z)+\frac{\lambda}{\lambda+\lambda'}(y'+\lambda' z)\right)\\
&\overset{\text{convexidade}}{\le} \quad \left(\frac{\lambda+\lambda'}{\lambda\lambda'}\right) \left[\frac{\lambda'}{\lambda+\lambda'}p(y-\lambda z)+\frac{\lambda}{\lambda+\lambda'}p(y'+\lambda' z)\right]\\
&= \quad \frac{1}{\lambda}p(y-\lambda z)+\frac{1}{\lambda'}p(y'+\lambda' z)\;,
\end{aligned}$$

o que implica (40.13). Assim, F pode ser escolhido de modo que

$$\sup_{\lambda>0,\ y\in V_1}\left[\frac{1}{-\lambda}p(-\lambda z+y)+\frac{1}{\lambda}f_1(y)\right] \;\le\; F \;\le\; \inf_{\lambda'>0,\ y'\in V_1}\left[\frac{1}{\lambda'}p(\lambda' z+y')-\frac{1}{\lambda'}f_1(y')\right]\;, \tag{40.14}$$

e (40.12) valerá, ou seja, teremos $f_2(w)\le p(w)$ para todo $w\in V_2$. ■

Note o leitor que (40.14) não-necessariamente implica uma escolha única para F, mas isso não importa, pois o Lema 40.1 não fala em unicidade, nem a mesma é esperada sob as hipóteses consideradas.

Outros *teoremas de separação*, como o acima, para regiões convexas em espaços vetoriais reais e sua relação com o Teorema de Hahn-Banach podem ser encontrados em [268].

• O Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais reais

O que fizemos com o Lema 40.1 foi estender f_1 a um funcional linear f_2 definido em um subespaço V_2 que adiciona a V_1 uma dimensão extra gerada por um vetor $z\notin V_1$ e de modo a preservar a majoração pelo funcional convexo p. Vamos

[10] A desigualdade se inverte devido ao sinal de α.

agora mostrar como esse fato implica a existência de um funcional linear definido em todo V, estendendo f_1 e também majorado por p. Esse é o conteúdo do célebre Teorema de Hahn-Banach.

O Teorema de Hahn-Banach ensina uma condição suficiente para que um funcional linear definido em um subespaço tenha uma extensão ao espaço todo. A condição é a existência de um funcional convexo que o majore. Na prática da Análise Funcional é muito importante conhecer condições sob as quais a existência de extensões globais de funcionais lineares possa ser garantida, daí a importância de teoremas de extensão, como o de Hahn-Banach. Como veremos, o mesmo conduz a resultados não-triviais, por exemplo na teoria de espaços de Banach.

Teorema 40.3 (Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais reais) *Seja V um espaço vetorial real e seja $f_1: V_1\to\mathbb{R}$ um funcional linear definido em um subespaço V_1 de V. Suponha que exista um funcional convexo $p: V\to\mathbb{R}$ tal que $f_1(y)\le p(y)$ para todo $y\in V_1$. Então, existe um funcional linear $f: V\to\mathbb{R}$ que é uma extensão de f_1 (ou seja, $f(y)=f_1(y)$ para todo $y\in V_1$) e satisfaz $f(x)\le p(x)$ para todo $x\in V$.* □

Prova do Teorema 40.3. Se $V_1=V$ não há o que demonstrar, pois podemos tomar $f=f_1$. Consideremos, então, que V_1 é um subespaço próprio de V.

Seja $\mathcal{F}_1$ a coleção de todos os funcionais lineares ℓ definidos em subespaços de V e que sejam extensões de f_1 e satisfaçam $\ell(w)\le p(w)$ para todo w pertencente a seu subespaço de definição. É claro que $f_1\in\mathcal{F}_1$ e, além disso, o Lema 40.1 ensina-nos que se V_1 é um subespaço próprio de V, então $\mathcal{F}_1$ contém elementos outros que não o próprio f_1.

Consideremos em $\mathcal{F}_1$ a relação de ordem $\ell_2\succeq\ell_1$ se ℓ_2 for uma extensão de ℓ_1. Seja $\{\ell_\alpha,\ \alpha\in\Lambda\}$ um conjunto linearmente ordenado (pela relação de ordem acima) de elementos de $\mathcal{F}_1$ e denotemos V_α o subespaço de V onde cada ℓ_α está definido. É claro que $V_\alpha\supset V_\beta$ se $\ell_\alpha\succeq\ell_\beta$, já que ℓ_α estende ℓ_β. Assim, $W:=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}V_\alpha$ será um subespaço de V e podemos definir em W um funcional ℓ_W da seguinte forma: $\ell_W(x)=\ell_\alpha(x)$ se $x\in V_\alpha$. É elementar constatar que ℓ_W é linear e é evidente pela construção que $\ell_W\succeq\ell_\alpha$ para todo $\alpha\in\Lambda$. Resumindo, provamos que todo conjunto linearmente ordenado de elementos de $\mathcal{F}_1$ possui um majorante.

Pelo Lema de Zorn (página 82), isso implica que $\mathcal{F}_1$ possui um elemento maximal f, definido em algum subespaço V' de V. Mas, em verdade, V' tem de ser igual a V, pois se assim não fosse poderíamos, como afirma o Lema 40.1, tomar um $z\notin V'$ não-nulo e construir uma extensão linear de f que seria também majorada por p, ou seja, seria um elemento de $\mathcal{F}_1$, contrariando o fato de f ser maximal.

Assim, f é um funcional linear definido em todo V que estende f_1 e é majorado por p, pois f é um elemento de $\mathcal{F}_1$. Isso completa a demonstração. ■

Vamos agora apresentar a generalização do Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais complexos.

• O Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais complexos

Teorema 40.4 (Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais complexos) *Seja V um espaço vetorial complexo e seja $f_1: V_1\to\mathbb{C}$ um funcional linear definido em um subespaço V_1 de V. Suponha que exista um funcional real $p: V\to\mathbb{R}$ satisfazendo $p(\alpha x+\beta y)\le|\alpha|p(x)+|\beta|p(y)$ para todos $x,\ y\in V$ e todos $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$ tais que $|\alpha|+|\beta|=1$ e de forma que $|f_1(y)|\le p(y)$ para todo $y\in V_1$. Então, existe um funcional linear complexo $f: V\to\mathbb{C}$ que é uma extensão de f_1 (ou seja, $f(y)=f_1(y)$ para todo $y\in V_1$) e satisfaz $|f(x)|\le p(x)$ para todo $x\in V$.* □

Prova. A prova faz uso do Teorema 40.3, como esperado. Começamos separando f_1 em suas partes real e imaginária. Definamos $g_1(y):=\text{Re}\,(f_1(y)),\ y\in V_1$. Teremos $g_1(iy)=\text{Re}\,(f_1(iy))=\text{Re}\,(if_1(y))=-\text{Im}\,(f_1(y))$, de modo que podemos escrever

$$f_1(y) \;=\; g_1(y)-ig_1(iy)\;. \tag{40.15}$$

Observemos que para $\lambda,\ \lambda'$ reais e $y,\ y'\in V_1$ arbitrários, tem-se $g_1(\lambda y+\lambda' y')=\text{Re}\,(f_1((\lambda y+\lambda' y'))=\text{Re}\,(\lambda f_1(y)+\lambda' f_1(y'))=\lambda\text{Re}\,(f_1(y))+\lambda'\text{Re}\,(f_1(y'))$, provando que $g_1: V_1\to\mathbb{R}$ é um funcional real linear. Fora isso, $g_1(y):=\text{Re}\,(f_1(y))\le|\text{Re}\,(f_1(y))|\le|f_1(y)|\le p(y)$. Estamos, portanto, sob as hipóteses do Teorema 40.3 e podemos afirmar que existe um funcional linear real $g: V\to\mathbb{R}$ que estende g_1 e satisfaz

$$g(x) \;\le\; p(x) \tag{40.16}$$

para todo $x \in V$. Isto posto, definamos, inspirados em (40.15),

$$f(x) \;:=\; g(x) - ig(ix)\,.$$

Como g é real, é evidente que

$$\mathrm{Re}\,\big(f(x)\big) \;=\; g(x) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\,\big(f(x)\big) \;=\; -g(ix)\,. \tag{40.17}$$

Vamos provar três fatos sobre f: 1) f é uma extensão de f_1; 2) f é um funcional linear complexo; 3) $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in V$.

1) Para $y \in V_1$ tem-se $f(y) = g(y) - ig(iy) = g_1(y) - ig_1(iy) \overset{(40.15)}{=} f_1(y)$, provando que f estende f_1.

2) Para provar que f é linear, provemos os seguintes passos:

   a. f é aditivo, ou seja, $f(x+x') = f(x) + f(x')$ para todos $x,\ x' \in V$. De fato, g é linear real e, portanto, aditivo, ou seja, $g(x+x') = g(x) + g(x')$ para todos $x,\ x' \in V$. Assim, $f(x+x') = g(x+x') - ig(i(x+x')) = g(x) + g(x') - ig(ix) - ig(ix') = f(x) + f(x')$, estabelecendo que f é também aditivo.

   b. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo $x \in V$. De fato, se $\lambda \in \mathbb{R}$, vale $f(\lambda x) = g(\lambda x) - ig(i\lambda x) = \lambda g(x) - \lambda i g(ix) = \lambda f(x)$, devido a g ser linear real.

   c. $f(ix) = if(x)$ para todo $x \in V$. De fato, g é linear real e, portanto, $g(-x) = -g(x)$. Assim, $f(ix) = g(ix) - ig(-x) = g(ix) + ig(x) = i(g(x) - ig(ix)) = if(x)$.

   d. Para todo $\zeta \in \mathbb{C}$ e todo $x \in V$ vale $f(\zeta x) = \zeta f(x)$. De fato, se $\lambda,\ \lambda' \in \mathbb{R}$, $f((\lambda + i\lambda')x) = f(\lambda x + i\lambda' x) \overset{\text{aditividade}}{=} f(\lambda x) + f(i\lambda' x) \overset{\text{passo b}}{=} \lambda f(x) + \lambda' f(ix) \overset{\text{passo c}}{=} \lambda f(x) + \lambda' i f(x) = (\lambda + i\lambda')f(x)$.

   e. f é linear complexa. De fato, para $\zeta,\ \zeta' \in \mathbb{C}$ e $x,\ x' \in V$ temos, juntando os fatos provados nas linhas anteriores, $f(\zeta x + \zeta' x') \overset{\text{aditividade}}{=} f(\zeta x) + f(\zeta' x') \overset{\text{passo d}}{=} \zeta f(x) + \zeta' f(x')$.

3) Uma vez estabelecido que f é um funcional linear complexo em V, resta-nos demonstrar que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in V$.

   Observemos primeiramente que do fato de $p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) + |\beta| p(y)$ para todos $x,\ y \in V$ e todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ tais que $|\alpha| + |\beta| = 1$, segue, que $p(\alpha x) = p(x)$ para todo α satisfazendo $|\alpha| = 1$ e todo $x \in V$. De fato, tomando $\beta = 0$, tem-se que da desigualdade acima que $p(\alpha x) \leq p(x)$ para todo $x \in V$ e todo $\alpha \in \mathbb{C}$ com $|\alpha| = 1$. Definindo $y = \alpha x$ e notando que $|\alpha^{-1}| = 1$, segue igualmente que $p(x) = p(\alpha^{-1} y) \leq p(y) = p(\alpha x)$, provando que $p(\alpha x) = p(x)$.

   Escrevendo $f(x) \in \mathbb{C}$ na forma polar $f(x) = |f(x)|e^{i\theta}$, com $|e^{i\theta}| = 1$, tem-se

$$|f(x)| \;=\; \mathrm{Re}\,\Big(|f(x)|\Big) \;=\; \mathrm{Re}\,\Big(e^{-i\theta} f(x)\Big) \overset{\text{linearidade}}{=} \mathrm{Re}\,\Big(f(e^{-i\theta}x)\Big) \overset{(40.17)}{=} g(e^{-i\theta}x) \overset{(40.16)}{\leq} p(e^{-i\theta}x) \;=\; p(x)\,.$$

Isso completa a demonstração do Teorema 40.4. ■

Talvez as consequências mais importantes do Teorema de Hahn-Banach dão-se no contexto de espaços vetoriais normados, como espaços de Banach, nosso próximo assunto.

• **Consequências do Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais normados**

A primeira consequência do Teorema 40.4 é que se V é um espaço vetorial normado, então todo funcional linear definido em um subespaço de V e que seja contínuo em relação à norma de V pode ser estendido isometricamente como funcional linear para todo V.

Teorema 40.5 (Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais normados) *Seja V um espaço vetorial complexo dotado de uma norma $\|\cdot\|$. Seja $f_1 : V_1 \to \mathbb{C}$ um funcional linear definido em um subespaço V_1 de V e suponhamos que f_1 seja limitado em V_1, ou seja, $|f_1(y)| \leq \|f_1\|\,\|y\|$ para todo $y \in V_1$, onde $\|f_1\| := \sup_{\substack{y\in V_1\\ y\neq 0}} \dfrac{|f_1(y)|}{\|y\|}$. Então, existe um funcional linear complexo $f : V \to \mathbb{C}$ que é uma extensão de f_1 (ou seja, $f(y) = f_1(y)$ para todo $y \in V_1$) e que é igualmente limitado, satisfazendo $\|f\| = \|f_1\|$.* □

O estudante deve notar que essa versão do Teorema de Hahn-Banach também fornece uma prova da afirmação de existência contida no Teorema BLT, Teorema 40.1, página 2175, para o caso de funcionais lineares. Para a afirmação de unicidade lá contida é preciso ainda seguir os passos lá traçados.

Prova do Teorema 40.5. Se V é um espaço vetorial complexo dotado de uma norma $\|\cdot\|$, então para todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ e todos $x,\ y \in V$ vale $\|\alpha x + \beta y\| \leq |\alpha|\,\|x\| + |\beta|\,\|y\|$. Assim, $p(x) = \|f_1\|\|x\|$ satisfaz as hipóteses do Teorema 40.4 e, pela definição de p, vale $|f_1(y)| \leq p(y)$ para todo $y \in V_1$. Pelo Teorema 40.4, existe um funcional linear f que estende f_1 e satisfaz $|f(x)| \leq \|f_1\|\|x\|$. Assim, $\|f\| = \sup_{\substack{x\in V\\ x\neq 0}} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|f_1\|$. Porém, como f estende f_1, vale $\|f\| = \sup_{\substack{x\in V\\ x\neq 0}} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{\substack{y\in V_1\\ y\neq 0}} \dfrac{|f(y)|}{\|y\|} = \sup_{\substack{y\in V_1\\ y\neq 0}} \dfrac{|f_1(y)|}{\|y\|} = \|f_1\|$, o que prova que $\|f\| = \|f_1\|$. ■

Do Teorema 40.5 obtemos o seguinte resultado, que por sua vez possui um corolário de grande importância.

Proposição 40.8 *Seja V um espaço vetorial complexo dotado de uma norma $\|\cdot\|$. Então, para cada $x_0 \in V$ existe um funcional linear limitado e não-nulo ℓ_{x_0}, definido em todo V, satisfazendo $\|\ell_{x_0}\| = 1$ e tal que $\ell_{x_0}(x_0) = \|x_0\|$.* □

Prova. Se $x_0 = 0$, tomamos ℓ_{x_0} igual a qualquer funcional limitado com norma 1 e as afirmações da proposição seguem.

Seja $x_0 \in V$ não-nulo fixo e seja $V_1 := \{\alpha x_0,\ \alpha \in \mathbb{C}\}$, um subespaço linear de V. Defina-se em V_1 o funcional linear $f_1(\alpha x_0) := \alpha \|x_0\|$. Pelo Teorema 40.5 existe um funcional linear ℓ_{x_0} definido em todo V e que estende f_1, satisfazendo $\|\ell_{x_0}\| = \|f_1\|$. Como ℓ_{x_0} estende f_1 e $x_0 \in V_1$, tem-se $\ell_{x_0}(x_0) = f_1(x_0) = \|x_0\|$. Note-se, porém, que

$$\|f_1\| \;=\; \sup_{\substack{y\in V_1\\ y\neq 0}} \frac{|f_1(y)|}{\|y\|} \;=\; \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{C}\\ \alpha\neq 0}} \frac{|f_1(\alpha x_0)|}{\|\alpha x_0\|} \;=\; \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{C}\\ \alpha\neq 0}} \frac{|\alpha\|x_0\||}{\|\alpha x_0\|} \;=\; 1\,.$$

Assim, $\|\ell_{x_0}\| = 1$. ■

A seguinte observação relevante segue de forma evidente da Proposição 40.8:

Corolário 40.1 *Se V é um espaço vetorial complexo normado, então o conjunto $V^\dagger$ de todos os funcionais lineares limitados agindo em V é não-vazio.* □

A Proposição 40.8 será usada quando estudarmos o adjunto de operadores atuando entre espaços de Banach, página 2206 e seguintes. Vide Proposição 40.20, página 2206. Uma das suas consequências mais importantes, porém, é o seguinte corolário, o qual terá implicações em desenvolvimentos que se seguirão no presente capítulo, especialmente quando estudarmos propriedades do operador resolvente e do espectro de operadores.

Corolário 40.2 *Seja V um espaço vetorial complexo dotado de uma norma $\|\cdot\|$ e denotemos por $V^\dagger$ o conjunto de todos os funcionais lineares limitados agindo em V. Se $x \in V$ é tal que $\ell(x) = 0$ para todo $\ell \in V^\dagger$, então $x = 0$.* □

Prova. Se $\ell(x) = 0$ para todo $\ell \in V^\dagger$, então, em particular, $\ell_x(x) = 0$, onde ℓ_x é o funcional cuja existência é garantida pela Proposição 40.8. Porém, $\ell_x(x) = \|x\|$, o que prova que $x = 0$. ■

40.1.4 O Teorema de Banach-Steinhaus ou Princípio de Limitação Uniforme

O seguinte teorema, devido a Banach[11] e Steinhaus[12] e apresentado em 1927[13], é um dos teoremas centrais da teoria de operadores em espaços de Banach. O mesmo é por vezes referido como *princípio de limitação uniforme*, e é uma consequência gentil do Teorema da Categoria de Baire, Teorema 32.34, página 1665.

[11] Stefan Banach (1892–1945).
[12] Hugo Dyonizy Steinhaus (1887–1972).
[13] S. Banach and H. Steinhaus. *Sur le principe de la condensation des singularités.* Fund. Math. **9**, 50–61 (1927).

Teorema 40.6 (Teorema de Banach-Steinhaus ou Princípio de Limitação Uniforme) *Seja $\mathcal{A}$ um espaço de Banach e seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial normado. Seja $\mathcal{S}$ um conjunto (não-vazio) de operadores lineares limitados de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{V}$. Suponha que para cada $x \in \mathcal{A}$ exista $M_x > 0$, finito, tal que $\|Sx\|_{\mathcal{V}} \leq M_x$ para todo $S \in \mathcal{S}$. Então, existe $M \geq 0$, finito, tal que $\|S\| \leq M$ para todo $S \in \mathcal{S}$.* □

Prova. Pela hipótese, tem-se para cada $x \in \mathcal{A}$ que o conjunto de números reais não-negativos $\{\|Sx\|_{\mathcal{V}}, \ \ S \in \mathcal{S}\}$ é um subconjunto do intervalo $[0, \ M_x]$. Como cada M_x é finito, cada um dos intervalos $[0, \ M_x]$, está contido em algum intervalo $[0, \ n]$ com $n \in \mathbb{N}$. É evidente, portanto, que $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$, onde

$$\mathcal{A}_n \ := \ \Big\{ x \in \mathcal{A} \Big| \ \|Sx\|_{\mathcal{V}} \ \leq \ n \text{ para todo } S \in \mathcal{S} \Big\} \ ,$$

pois cada $x \in \mathcal{A}$ está contido em pelo menos um $\mathcal{A}_n$. Assim, pelo Teorema da Categoria de Baire (Teorema 32.34, página 1665), existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\mathcal{A}_m}$ tem interior não-vazio: $\left(\overline{\mathcal{A}_m}\right)^0 \neq \emptyset$.

Agora, é fácil ver que cada $\mathcal{A}_n$ é um conjunto fechado em $\mathcal{A}$. De fato, pela definição, vale

$$\mathcal{A}_n \ := \ \bigcap_{S \in \mathcal{S}} \Big\{ x \in \mathcal{A} \Big| \ \|Sx\|_{\mathcal{V}} \ \leq \ n \Big\} \ . \tag{40.18}$$

Agora, para $S \in \mathcal{S}$,

$$\Big\{ x \in \mathcal{A} \Big| \ \|Sx\|_{\mathcal{V}} \ \leq \ n \Big\} \ = \ F_S^{-1}([0, \ n]) \ ,$$

onde $F_S : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ é dada por $F_S(x) = \|Sx\|_{\mathcal{V}}$. Todavia, F_S é contínua por ser a composição das funções contínuas S e $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$. Logo, como $[0, \ n]$ é fechado em $\mathbb{R}$, o conjunto $F_S^{-1}([0, \ n])$ é fechado em $\mathcal{A}$ e, por (40.18), $\mathcal{A}_n$ é fechado, por ser intersecção de fechados.

Concluímos disso que $\mathcal{A}_m$ tem interior não-vazio: $\mathcal{A}_m^0 \neq \emptyset$.

Seja $x_0 \in \mathcal{A}_m^0$. Como $\mathcal{A}_m^0$ é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que todo $x \in \mathcal{A}$ com $\|x - x_0\|_{\mathcal{A}} < \epsilon$ é um elemento de $\mathcal{A}_m^0$. Dessa forma, se $x' \in \mathcal{A}$ for tal que $\|x'\|_{\mathcal{A}} < \epsilon$, tem-se $\|(x' + x_0) - x_0\|_{\mathcal{A}} = \|x'\|_{\mathcal{A}} < \epsilon$, o que implica que $x' + x_0$ é um elemento de $\mathcal{A}_m^0$ e, portanto, de $\mathcal{A}_m$. Como x_0 e $x' + x_0$ são elementos de $\mathcal{A}_m$, valem

$$\|Sx_0\|_{\mathcal{V}} \ \leq \ m \quad \text{e} \quad \|S(x' + x_0)\|_{\mathcal{V}} \ \leq \ m \tag{40.19}$$

para todo $S \in \mathcal{S}$. Assim, para todo $S \in \mathcal{S}$ e para cada $x' \in \mathcal{A}$ com $\|x'\|_{\mathcal{A}} < \epsilon$, tem-se

$$\|Sx'\|_{\mathcal{V}} \ = \ \|S(x' + x_0) - Sx_0\|_{\mathcal{V}} \ \leq \ \|S(x' + x_0)\|_{\mathcal{V}} + \|Sx_0\|_{\mathcal{V}} \ \overset{(40.19)}{\leq} \ 2m \ .$$

Portanto, para $x \in \mathcal{A}$ não-nulo, podemos tomar $x' = \frac{\epsilon}{2\|x\|_{\mathcal{A}}} x$ e teremos $\|x'\|_{\mathcal{A}} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, de onde segue que $\left\| S\left(\frac{\epsilon}{2\|x\|_{\mathcal{A}}} x\right) \right\|_{\mathcal{V}} \leq 2m$, ou seja,

$$\|Sx\|_{\mathcal{V}} \ \leq \ \frac{4m}{\epsilon} \|x\|_{\mathcal{A}} \ ,$$

desigualdade essa que também vale para $x = 0$. Assim, provamos que $\|S\| \leq M$ com $M := \frac{4m}{\epsilon}$, que não depende de $S \in \mathcal{S}$. Isso demonstra o teorema. ■

40.1.5 O Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado

• A soma direta de dois espaços de Banach

Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois espaços vetoriais normados, cujas normas são denotadas por $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$, respectivamente. O produto Cartesiano $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ pode ser feito um espaço vetorial com as operações de soma e multiplicação por escalares (números complexos), expressa em

$$\alpha(x, \ y) + \beta(x', \ y') \ := \ \big(\alpha x + \beta x', \ \alpha y + \beta y'\big)$$

onde $x, \ x' \in \mathcal{V}$, $y, \ y' \in \mathcal{W}$ e $\alpha, \ \beta \in \mathbb{C}$ são arbitrários.

É possível introduzir em $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ uma norma e, portanto, uma topologia, usando para tal as normas $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$. Uma possível escolha é

$$\|(x, \ y)\|_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}} \ = \ \|x\|_{\mathcal{V}} + \|y\|_{\mathcal{W}},$$

$(x, \ y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$.

E. 40.9 *Exercício.* Verifique que essa expressão define de fato uma norma em $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$. ✣

E. 40.10 *Exercício.* Uma outra possível escolha de norma em $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ seria a seguinte. Sejam $A > 0$ e $B > 0$ fixos. Defina para todo $(x, \ y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$

$$\|(x, \ y)\|_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}}^{A, \ B} \ = \ A\|x\|_{\mathcal{V}} + B\|y\|_{\mathcal{W}}.$$

Mostre que $\|\cdot\|_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}}^{A, \ B}$ é uma norma em $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$. Mostre que

$$\min(A, \ B)\|(x, \ y)\|_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}} \ \leq \ \|(x, \ y)\|_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}}^{A, \ B} \ \leq \ \max(A, \ B)\|(x, \ y)\|_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}},$$

e, portanto, $\|\cdot\|_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}}^{A, \ B}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}}$ são normas equivalentes no sentido da definição de equivalência de normas da página 276. Note que duas normas equivalentes geram as mesmas topologias (por quê?). ✣

O conjunto $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ é assim um espaço vetorial normado. Um fato relevante é que se $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ forem espaços de Banach $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ também o será.

Para ver isso, consideremos uma sequência $(x_n, \ y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, em $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ que seja uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}}$. Isso significa que para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que se $m, \ n \geq N(\epsilon)$ então

$$\|(x_m, \ y_m) - (x_n, \ y_n)\|_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}} \ = \ \|(x_m - x_n, \ y_m - y_n)\|_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}} \ \leq \ \epsilon \ .$$

Mas isso significa que

$$\|x_m - x_n\|_{\mathcal{V}} + \|y_m - y_n\|_{\mathcal{W}} \ \leq \ \epsilon \ ,$$

o que implica que temos $\|x_m - x_n\|_{\mathcal{V}} \leq \epsilon$ e $\|y_m - y_n\|_{\mathcal{W}} \leq \epsilon$, ou seja, x_n e y_n, $n \in \mathbb{N}$, são duas sequências de Cauchy em seus respectivos espaços. Como $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são espaços de Banach, ambas as sequências convergem a $x \in \mathcal{V}$ e $y \in \mathcal{W}$, respectivamente. Agora é trivial ver que, por isso, $(x_n, \ y_n)$ converge a $(x, \ y)$ em $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$, pois

$$\|(x_n, \ y_n) - (x, \ y)\|_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}} = \|x_n - x\|_{\mathcal{V}} + \|y_n - y\|_{\mathcal{W}}$$

que por hipótese vai a zero quando $n \to \infty$. Isso mostra que $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ é também um espaço de Banach.

Esse espaço de Banach obtido pelo produto Cartesiano de dois espaços de Banach $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ é denominado *soma direta (topológica)* de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ e é frequentemente denotado por $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

Frequentemente usaremos $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ para nos referirmos a $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ visto como espaço topológico com a topologia gerada pela norma $\|\cdot\|_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}}$.

• O gráfico de um operador

Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois espaços vetoriais e $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ um operador linear. O *gráfico* de T, denominado por $\Gamma(T)$ é o subconjunto de $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ definido por

$$\Gamma(T) \ := \ \big\{(x, \ Tx), \ x \in \mathrm{Dom}(T)\big\} \ .$$

Nota 1. Essa definição é, na verdade, redundante. Se lembrarmos a definição de função à página 60 (e estamos adotando a definição de operador como sendo uma função naquele sentido), vemos que o conceito de gráfico de um operador coincide com o próprio conceito de operador, ou seja, como sendo uma certa subcoleção de $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$. Assim, pelas nossas definições, $\Gamma(T) = T$!. No entanto é muito comum entender-se num sentido intuitivo que um operador representa uma *transformação* entre espaços. Informalmente entendemos, por exemplo, que o operador de derivação $T = \frac{d}{dx}$ "transforma" uma função em sua derivada. Ainda que essa conceituação não possa ser feita precisa, essa é a noção que mais comummente se tem de operador, daí introduzirmos essa "nova" definição. Note-se também que essa definição corresponde precisamente à noção de gráfico de uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tão familiar dos cursos de cálculo. ♣

Nota 2. Para evitar confusões futuras, notamos aos leitores que na nossa definição de gráfico acima seguimos a convenção que $\mathcal{V}$ seja o domínio de definição de T, $\mathrm{Dom}(T) = \mathcal{V}$, e não $\mathrm{Dom}(T) \subset \mathcal{V}$. ♣

Se T é um operador linear agindo entre dois espaços de Banach $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, o conjunto $\Gamma(T)$ é um subconjunto do espaço topológico $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ e, como tal, é legítimo perguntarmos por propriedades topológicas de $\Gamma(T)$, tais como, se $\Gamma(T)$ é um conjunto fechado (ou aberto), sobre propriedades do fecho $\overline{\Gamma(T)}$ de $\Gamma(T)$ etc. Como veremos, tais perguntas são de grande importância e operadores podem mesmo ser classificados de acordo com as respostas que se dá às mesmas. Um importante resultado nesse sentido é o chamado *Teorema do Gráfico Fechado*, que demonstraremos nas próximas páginas.

• O Teorema da Aplicação Aberta

Sejam X e Y dois espaços vetoriais e seja $T : X \to Y$ um operador linear. Se $C \subset X$ denotaremos aqui por $T(C)$ a imagem de C por T, ou seja, $T(C) := \big\{y \in Y \big|\, y = T(x) \text{ para algum } x \in C\big\}$.

Neste tópico demonstraremos outro importante teorema sobre operadores contínuos entre espaços de Banach, o chamado *Teorema da Aplicação Aberta*. Esse teorema faz uso de um teorema sobre espaços métricos completos, conhecido como Teorema da Categoria de Baire, tratado à página 1665.

Como bem sabemos, funções contínuas entre espaços topológicos têm (por definição) a propriedade que as imagens inversas de conjuntos abertos são também abertos. O que o Teorema da Aplicação Aberta nos diz é que, para operadores lineares contínuos e sobrejetores agindo entre espaços de Banach, vale também a recíproca: as imagens de abertos são também abertos. Como é de se esperar esse fato também nos diz algo sobre a inversa desses operadores, a saber, na forma do Teorema da Aplicação Inversa, tratado à página 2193.

A consequência talvez mais importante do Teorema da Aplicação Aberta é o Teorema do Gráfico Fechado, Teorema 40.9, página 2193, que nos mostra (pela primeira vez) a existência de uma relação íntima entre propriedades de um operador e propriedades topológicas de seu gráfico.

Passemos ao enunciado e demonstração do Teorema da Aplicação Aberta.

Teorema 40.7 (Teorema da Aplicação Aberta) *Sejam X e Y dois espaços de Banach e seja $T : X \to Y$ um operador linear contínuo e sobrejetor. Então, se $A \subset X$ é um aberto, $T(A)$ é um aberto em Y.* □

Prova. Comecemos fixando notações. Por $B^X(r,\ x)$ denotamos a bola aberta em X centrada em $x \in X$ de raio $r > 0$. Analogamente por $B^Y(r,\ y)$ denotamos a bola aberta em Y centrada em $y \in Y$ de raio $r > 0$. Adotaremos também as notações simplificadoras: $B^X(r) \equiv B^X(r,\ 0)$ e $B^Y(r) \equiv B^Y(r,\ 0)$. Fora isso, se C é um subconjunto de X e $\lambda > 0$, denotamos por λC o conjunto $\lambda C = \{x' \in X \big|\, x' = \lambda x \text{ para algum } x \in C\}$. O mesmo se C for um subconjunto de Y.

Isto posto, vamos à demonstração. Em primeiro lugar, é claro que X pode ser escrito como a união contável de todas as bolas de raio 1, 2, 3 . . .:

$$X \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} B^X(n)\,.$$

Como T é, por hipótese, sobrejetora, temos que

$$Y \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} T\big(B^X(n)\big)\,.$$

Pelo Teorema da Categoria de Baire (página 1665) isso implica a existência de pelo menos um m tal que $\Big(\overline{T\big(B^X(m)\big)}\Big)^0 \neq \emptyset$, ou seja, $\overline{T\big(B^X(m)\big)}$ tem interior não-vazio.

É claro que, para todo $r > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ valem

$$T\big(B^X(r)\big) \;=\; \frac{r}{n} T\big(B^X(n)\big) \qquad \text{e} \qquad \overline{T\big(B^X(r)\big)} \;=\; \frac{r}{n}\overline{T\big(B^X(n)\big)}\,.$$

Portanto, concluímos que todos conjuntos $\overline{T\big(B^X(r)\big)}$ para todos $r > 0$ têm interior não-vazio.

Com isso em mãos, vamos enunciar e demonstrar o seguinte lema:

Lema 40.2 *O conjunto aberto $\Big(\overline{T\big(B^X(1)\big)}\Big)^0$ contém o vetor nulo entre seus elementos.* □

Prova do Lema 40.2. Como já sabemos, $\overline{T\big(B^X(1)\big)}$ possui um interior não-vazio. Afirmamos que $0 \in \Big(\overline{T\big(B^X(1)\big)}\Big)^0$. Para mostrar isso, tomemos $y \in \Big(\overline{T\big(B^X(1)\big)}\Big)^0$. Como y é um elemento do fecho de $T\big(B^X(1)\big)$ (pois $\Big(\overline{T\big(B^X(1)\big)}\Big)^0 \subset \overline{T\big(B^X(1)\big)}$, obviamente), e como $\Big(\overline{T\big(B^X(1)\big)}\Big)^0$ é um aberto que contém y, segue que $\Big(\overline{T\big(B^X(1)\big)}\Big)^0 \cap T\big(B^X(1)\big) \neq \emptyset$, pela Proposição 27.8, página 1437.

Seja, então, $z \in \Big(\overline{T\big(B^X(1)\big)}\Big)^0 \cap T\big(B^X(1)\big)$. Então, $z = Tx$ para algum $x \in X$ com $\|x\|_X < 1$ e, como $\Big(\overline{T\big(B^X(1)\big)}\Big)^0$ é aberto, existe pela definição de conjunto aberto em espaços métricos um $r > 0$ tal que $B^Y(r,\ z) \subset \Big(\overline{T\big(B^X(1)\big)}\Big)^0$, ou seja,

$$B^Y(r) + Tx \;\subset\; \Big(\overline{T\big(B^X(1)\big)}\Big)^0\,. \tag{40.20}$$

Aqui, $B^Y(r) + Tx$ denota o conjunto $B^Y(r)$ transladado de Tx, ou seja, $B^Y(r) + Tx := \big\{y + Tx,\ y \in B^Y(r)\big\}$.

Se escolhermos R grande o suficiente (por exemplo $R > 1 + \|x\|_X$) teremos que $B^X(1) \subset B^X(R,\ x)$ (por quê?). Isso implica $T\big(B^X(1)\big) \subset T\big(B^X(R,\ x)\big)$. Logo, $\overline{T\big(B^X(1)\big)} \subset \overline{T\big(B^X(R,\ x)\big)}$ e, portanto, $\Big(\overline{T\big(B^X(1)\big)}\Big)^0 \subset \Big(\overline{T\big(B^X(R,\ x)\big)}\Big)^0$.

Logo, retornando à (40.20), temos que

$$B^Y(r) + Tx \;\subset\; \Big(\overline{T\big(B^X(R,\ x)\big)}\Big)^0 \;=\; \Big(\overline{T\big(B^X(R)\big)}\Big)^0 + Tx,$$

ou seja,

$$B^Y(r) \;\subset\; \Big(\overline{T\big(B^X(R)\big)}\Big)^0\,.$$

Isso, porém, diz que

$$B^Y(r/R) \;\subset\; \Big(\overline{T\big(B^X(1)\big)}\Big)^0\,,$$

provando que $0 \in \Big(\overline{T\big(B^X(1)\big)}\Big)^0$, completando a prova do lema. ■

Vamos mostrar na próxima proposição uma condição que, uma vez demonstrada, implica o Teorema da Aplicação Aberta.

Proposição 40.9 *Se provarmos que $\overline{T\big(B^X(1)\big)} \subset T\big(B^X(2)\big)$, então o Teorema da Aplicação Aberta estará demonstrado.* □

Prova da Proposição 40.9. Pelo lema acima, o aberto $\Big(\overline{T\big(B^X(1)\big)}\Big)^0$ contém o vetor nulo. Então (pela definição de conjunto aberto em espaço métrico, vide página 1326), existe uma bola aberta de raio $s > 0$ (suficientemente pequeno) e centrada em 0 que está inteiramente contida em $\Big(\overline{T\big(B^X(1)\big)}\Big)^0$ e, portanto, em $\overline{T\big(B^X(1)\big)}$:

$$B^Y(s) \;\subset\; \overline{T\big(B^X(1)\big)}\,.$$

Se tivermos provado que $\overline{T\big(B^X(1)\big)} \subset T\big(B^X(2)\big)$, como a proposição sugere, então concluiríamos que

$$B^Y(s) \;\subset\; T\big(B^X(2)\big)\,,$$

ou seja, que $T\big(B^X(2)\big)$ tem interior não-vazio. Como $T\big(B^X(r)\big) = (r/2)T\big(B^X(2)\big)$, segue também que

$$B^Y(rs/2) \;\subset\; T\big(B^X(r)\big)\,,$$

mostrando que $T\big(B^X(r)\big)$ tem também interior não-vazio para qualquer $r > 0$.

Isso mostra que $T\big(B^X(r,\ x)\big) = T\big(B^X(r)\big) + Tx$ também tem interior não-nulo para todo $r > 0$ e todo $x \in X$.

Seja então $A \subset X$ um aberto em X e $T(A)$ sua imagem por T em Y. Seja um ponto genérico $y \in T(A)$ e seja $x \in A$ tal que $y = Tx$. Como A é aberto, existe r suficientemente pequeno tal que $B^X(r,\ x) \subset A$. Logo $T\big(B^X(r,\ x)\big) \subset T(A)$

e $T\big(B^X(r,\,x)\big) \ni y$. Mas, pelo dito acima, $T\big(B^X(r,\,x)\big) = T\big(B^X(r)\big) + y$ e $T\big(B^X(r)\big)$ contêm a bola $B^Y(rs/2)$. Assim, $y + B^Y(rs/2) \subset T(A)$. Como y é um elemento genérico de $T(A)$ isso mostra que para cada $y \in T(A)$ existe $r' > 0$ (a saber $r' = rs/2$) tal que a bola $B^Y(r',\,y)$ está inteiramente contida em $T(A)$. Ora, isso é a afirmativa que $T(A)$ é aberto, completando assim a demonstração da proposição. ∎

Essa proposição nos ensina que, para completarmos a demonstração do Teorema da Aplicação Aberta resta-nos apenas mostrar que $\overline{T\big(B^X(1)\big)} \subset T\big(B^X(2)\big)$, que é o que faremos agora.

Mostrar que $\overline{T\big(B^X(1)\big)} \subset T\big(B^X(2)\big)$ significa mostrar que para cada $y \in \overline{T\big(B^X(1)\big)}$ existe um $x \in X$ com $\|x\|_X < 2$ tal que $y = Tx$. O que faremos então é fixar um tal y e construir um $x \in X$ com as propriedades requeridas.

Pela caracterização de fecho de um conjunto dada na Proposição 27.8, página 1437, se

$$y \;\in\; \overline{T\big(B^X(1)\big)}\,, \tag{40.21}$$

então para todo número $r > 0$, $B^Y(r,\,y) \cap T\big(B^X(1)\big) \neq \emptyset$. Isso diz que existe x_1 com $\|x_1\|_X < 1$ tal que $\|y - Tx_1\|_Y < r$. Essa última afirmativa significa que $y - Tx_1 \in B^Y(r)$. Como r é arbitrário, podemos escolhê-lo suficientemente pequeno de modo a termos

$$B^Y(r) \;\subset\; T\big(B^X(1/2)\big)\,. \tag{40.22}$$

Isso é sempre possível, pois vimos acima que todo conjunto $T\big(B^X(a)\big)$ tem interior não-vazio para todo $a > 0$. Como, porém, $T\big(B^X(1/2)\big) \subset \overline{T\big(B^X(1/2)\big)}$, concluímos que, pela nossa escolha,

$$y - Tx_1 \;\in\; \overline{T\big(B^X(1/2)\big)}\,. \tag{40.23}$$

Comparando-se (40.23) a (40.21) vemos que podemos repetir o argumento e, para o mesmo r de (40.22), $B^Y(r/2,\,y - Tx_1) \cap T\big(B^X(1/2)\big) \neq \emptyset$. Isso diz que existe x_2 com $\|x_2\|_X < 1/2$ e tal que $\|(y - Tx_1) - Tx_2\|_Y = \|y - T(x_1 + x_2)\|_Y < r/2$, ou seja, $y - T(x_1 + x_2) \in B^Y(r/2)$. Por (40.22), $B^Y(r/2) \subset T\big(B^X(1/4)\big)$. Como, porém, $T\big(B^X(1/4)\big) \subset \overline{T\big(B^X(1/4)\big)}$, concluímos que, pela nossa escolha,

$$y - T(x_1 + x_2) \;\in\; \overline{T\big(B^X(1/4)\big)}\,. \tag{40.24}$$

Prosseguindo indutivamente concluímos que existem $x_1,\,\ldots,\,x_n \in X$ tais que $\|x_i\|_X < 1/2^{i-1}$ e

$$\Big\|y - T(x_1 + \cdots + x_n)\Big\|_Y \;<\; \frac{r}{2^{n-1}}\,. \tag{40.25}$$

É um exercício simples mostrar que, pela propriedade $\|x_i\|_X < 1/2^{i-1}$, a sequência $x_1 + \cdots + x_n$ é uma sequência de Cauchy. Como supomos que X é completo, isso diz que existe $x \in X$ tal que

$$x \;=\; \lim_{n\to\infty} (x_1 + \cdots + x_n)\,.$$

Fora isso, pela continuidade da norma, pela continuidade de T e pela propriedade (40.25), segue que

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \big\|y - T(x_1 + \cdots + x_n)\big\|_Y \;=\; \Big\|y - \lim_{n\to\infty} T(x_1 + \cdots + x_n)\Big\|_Y$$
$$= \;\Big\|y - T\Big(\lim_{n\to\infty} (x_1 + \cdots + x_n)\Big)\Big\|_Y \;=\; \|y - Tx\|_Y,$$

provando que $y = Tx$.

Agora, pela continuidade da norma,

$$\|x\|_X \;=\; \Big\|\lim_{n\to\infty} (x_1 + \cdots + x_n)\Big\|_X \;=\; \lim_{n\to\infty} \|x_1 + \cdots + x_n\|_X \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \Big(\|x_1\|_X + \cdots + \|x_n\|_X\Big)$$
$$< \;\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \;=\; 2\,, \tag{40.26}$$

A desigualdade estrita na linha acima é crucial e é esclarecida da seguinte forma. Como $\|x_j\|_X < 1/2^{j-1}$ para todo j e, em particular, $\|x_1\|_X < 1$, então existe um número $s \in (0,\,1)$ tal que também vale $s + \|x_1\|_X < 1$. Logo, podemos escrever $s + \|x_1\|_X + \cdots + \|x_n\|_X < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$. Tomando-se o limite $n \to \infty$, obtemos que

$$s + \lim_{n\to\infty} \Big(\|x_1\|_X + \cdots + \|x_n\|_X\Big) \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \;=\; 2$$

e, portanto, $\lim_{n\to\infty} \Big(\|x_1\|_X + \cdots + \|x_n\|_X\Big) \leq 2 - s < 2$, como empregamos em (40.26).

A expressão (40.26) mostrou que $\|x\|_X < 2$, ou seja, que $x \in B^X(2)$. Logo, $y \in T\big(B^X(2)\big)$. Isso completa a demonstração do Teorema da Aplicação Aberta. ∎

• O Teorema da Aplicação Inversa

Se $T : X \to Y$ é uma função bijetora entre dois conjuntos, existe uma função inversa $T^{-1} : Y \to X$. Se X e Y são espaços vetoriais e T é linear, é fácil ver que T^{-1} é também linear (*Exercício!*). O Teorema da Aplicação Aberta tem um corolário que garante que também a propriedade de continuidade pode ser estendida a T^{-1}, caso T seja contínua e X e Y dois espaços de Banach.

Teorema 40.8 (Teorema da Aplicação Inversa) *Sejam X e Y dois espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear que seja contínuo e bijetor. Então, sua inversa $T^{-1} : Y \to X$ é também contínua.* □

Prova. Se T é bijetora é, em particular, sobrejetora e portanto vale o Teorema Aplicação Aberta. Como T é bijetora, a pré-imagem por T^{-1} de um aberto A de X é precisamente o conjunto $T(A)$, que é aberto em Y pelo Teorema Aplicação Aberta. Isso estabeleceu que $T^{-1} : Y \to X$ é contínua. ∎

• O Teorema do Gráfico Fechado

Chegamos agora a um teorema importante por mostrar que propriedades de um operador se manifestam em propriedades topológicas de seu gráfico.

Teorema 40.9 (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam X e Y dois espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear. Então, T é contínuo se e somente se seu gráfico $\Gamma(T)$ for fechado como subconjunto do espaço topológico $X \oplus Y$.* □

Prova. 1. Vamos supor que T seja contínuo e mostrar que seu gráfico é fechado.

Seja $(x_n,\,Tx_n)$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de elementos de $\Gamma(T)$ e que seja convergente em $X \oplus Y$. Queremos mostrar que essa sequência converge a um elemento $(x,\,y) \in X \oplus Y$ que também é elemento de $\Gamma(T)$. Para isso devemos provar que $y = Tx$. Se $(x_n,\,Tx_n) \to (x,\,y)$, então $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ em X e $y = \lim_{n\to\infty} Tx_n$. Porém, como T é, por hipótese, contínuo, vale $y = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = Tx$, que é o que queríamos provar.

2. Vamos agora, reciprocamente, supor que $\Gamma(T)$ é fechado e mostrar que T é contínuo.

$\Gamma(T)$ é sempre um subespaço de $X \oplus Y$, pois

$$\alpha(x,\,Tx) + \beta(y,\,Ty) \;=\; \big(\alpha x + \beta y,\;\alpha Tx + \beta Ty\big) \;=\; \big(\alpha x + \beta y,\;T(\alpha x + \beta y)\big) \;\in\; \Gamma(T)\,.$$

O fato de $\Gamma(T)$ ser fechado significa, porém, que $\Gamma(T)$ é um espaço de Banach pois, pela Proposição 27.12, página 1441, todo subconjunto fechado de um espaço métrico completo é também completo.

Sejam, então, as aplicações $S_1 : \Gamma(T) \to X$ e $S_2 : \Gamma(T) \to Y$ definidas por

$$S_1\big((x,\,Tx)\big) \;=\; x \qquad \text{e} \qquad S_2\big((x,\,Tx)\big) \;=\; Tx\,.$$

É um exercício banal mostrar que S_1 e S_2 são lineares (faça). Fora isso, ambas são limitadas (e, portanto, contínuas), pois

$$\big\|S_1(x,\,Tx)\big\|_X \;=\; \|x\|_X \;\leq\; \|x\|_X + \|Tx\|_Y \;=\; \big\|(x,\,Tx)\big\|_{X\oplus Y}$$

e

$$\big\|S_2(x,\,Tx)\big\|_Y \;=\; \|Tx\|_Y \;\le\; \|x\|_X + \|Tx\|_Y \;=\; \big\|(x,\,Tx)\big\|_{X\oplus Y}\,,$$

mostrando que $\|S_1\| \le 1$ e $\|S_2\| \le 1$.

Fora isso, vale também que S_1 é bijetora. De fato, é evidente que $\mathrm{Ran}\,(S_1) = X$ (por quê?) e, fora isso, $S_1(x,\,Tx) = S_1(y,\,Ty)$ significa $x = y$ e, portanto $(x,\,Tx) = (y,\,Ty)$, o que mostra que S_1 é um-a-um.

Se S_1 é uma bijeção, então possui uma inversa $(S_1)^{-1} : X \to \Gamma(T)$ que é tal que

$$(S_1)^{-1}x \;=\; (x,\,Tx)\,.$$

Note-se assim que

$$S_2\left((S_1)^{-1}x\right) \;=\; S_2(x,\,Tx) \;=\; Tx\,,$$

ou seja, $T = S_2 \circ (S_1)^{-1}$.

Mostramos acima que S_1 é uma função linear, contínua e bijetora entre dois espaços de Banach. Ora, essas são as hipóteses do Teorema da Aplicação Inversa que, assim, nos afirma que $(S_1)^{-1}$ é contínua. S_2 é também contínua e, portanto, $T = S_2 \circ (S_1)^{-1}$ é também contínua por ser a composição de duas funções contínuas, completando a prova. ■

• **Subespaços de dimensão infinita de $C\big([0,\,1]\big)$**

Seja $C\big([0,\,1]\big)$ o conjunto das funções contínuas definidas em $[0,\,1]$ com valores em $\mathbb{R}$ e seja $C^1\big([0,\,1]\big) \subset C\big([0,\,1]\big)$ o conjunto das funções diferenciáveis com derivada contínua também definidas em $[0,\,1]$ com valores em $\mathbb{R}$.

Sabemos que o espaço normado $\big(C\big([0,\,1]\big),\;\|\cdot\|_\infty\big)$ é um espaço de Banach com relação à norma do supremo: $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}\big|f(x)\big|$ (Proposição 24.8, página 1317).

$C^1\big([0,\,1]\big)$ é um subespaço de $C\big([0,\,1]\big)$ e ambos contém subespaços fechados (na topologia definida pela norma $\|\cdot\|_\infty$) de dimensão finita, tais como os subespaços P_n, $n \in \mathbb{N}_0$, compostos pelos polinômios de grau menor ou igual a n definidos em $[0,\,1]$. $C^1\big([0,\,1]\big)$ e $C\big([0,\,1]\big)$ também possuem subespaços de dimensão infinita, como $\mathcal{P}$, a coleção de todos os polinômios definidos em $[0,\,1]$, mas $\mathcal{P}$ não é fechado.

Com uso do Teorema do Gráfico Fechado vamos demonstrar a seguinte afirmação:

Proposição 40.10 *Todo subespaço fechado do espaço de Banach $\big(C\big([0,\,1]\big),\;\|\cdot\|_\infty\big)$ que esteja contido em $C^1\big([0,\,1]\big)$ possui dimensão finita. Portanto, todo subespaço fechado de dimensão infinita de $\big(C\big([0,\,1]\big),\;\|\cdot\|_\infty\big)$ possui intersecção não vazia com $C\big([0,\,1]\big)\setminus C^1\big([0,\,1]\big)$. Assim, todo subespaço fechado de dimensão infinita de $\big(C\big([0,\,1]\big),\;\|\cdot\|_\infty\big)$ contém ao menos uma função que não é diferenciável ou possui derivada não contínua.* □

Prova. Seja X um subespaço fechado de $\big(C\big([0,\,1]\big),\;\|\cdot\|_\infty\big)$ e tal que $X \subset C^1\big([0,\,1]\big)$. Como X é fechado, $\big(X,\;\|\cdot\|_\infty\big)$ é igualmente um espaço de Banach.

Seja o operador linear $T : X \to C\big([0,\,1]\big)$ definido por $Tf := f'$. Afirmamos que o gráfico de T é fechado. De fato, $\Gamma(T) = \big\{(f,\,f'),\;f \in X\big\}$ e se $(f_n,\,f_n') \in \Gamma(T)$ é uma sequência convergente a $(f,\,g) \in X \times C\big([0,\,1]\big)$, então temos por definição que $\lim_{n\to\infty}\Big(\|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - g\|_\infty\Big) = 0$. Logo, a sequência f_n converge uniformemente a f e a sequência f_n' converge uniformemente a g. Pela Proposição 37.4, página 1942, temos que $f \in C^1\big([0,\,1]\big)$ e que $f' = g$. Além disso, como $f_n \in X$ e X é fechado, segue que $f \in X$. Logo, $(f,\,g) = (f,\,f') \in \Gamma(T)$, provando que $\Gamma(T)$ é fechado.

Pelo Teorema do Gráfico Fechado (Teorema 40.9, página 2193), isso implica que $T : X \to C^1\big([0,\,1]\big)$ é contínua e, portanto, limitada. Seja $\|T\|$ a norma do operador T e seja $N = \big\lceil\|T\|\big\rceil$, o menor número natural maior ou igual a $\|T\|$.

Para esse N defina-se agora a aplicação linear $S : X \to \mathbb{R}^{N+1}$ dada por $S(f)_a = f\left(\frac{a-1}{N}\right)$, $a = 1,\,\ldots,\,N+1$, ou seja, $S(f)$ é o vetor $(N+1)$-dimensional cuja a-ésima componente é $f\left(\frac{a-1}{N}\right)$. Afirmamos que S injetora. A prova é feita por absurdo. Seja $f \in X$ uma função não identicamente nula tal que $S(f) = 0$, ou seja, tal que $f\left(\frac{a-1}{N}\right) = 0$ para todo $a = 1,\,\ldots,\,N+1$. Como f é contínua e está definida em um intervalo compacto, existe um ponto $x_0 \in [0,\,1]$ tal que $\big|f(x_0)\big| = \|f\|_\infty$ (vide Teorema 32.16, página 1628). Como f é, por hipótese, não identicamente nula, então $f(x_0) \neq 0$, mas como f anula-se nos pontos $\frac{a-1}{N}$, segue que $\frac{a_0-1}{N} < x_0 < \frac{a_0}{N}$ para algum $a_0 = 1,\,\ldots,\,N+1$. Isso implica que

$0 < \left(x_0 - \frac{a_0-1}{N}\right) < \frac{1}{N}$ (duas desigualdades estritas, note-se). Agora, temos que

$$\|f\|_\infty \;=\; \big|f(x_0)\big| \;=\; \left|\int_{\frac{a_0-1}{N}}^{x_0} f'(s)\,ds\right| \;\le\; \int_{\frac{a_0-1}{N}}^{x_0}\big|f'(s)\big|\,ds \;\le\; \|Tf\|_\infty\left(x_0 - \frac{a_0-1}{N}\right)$$

$$< \;\|Tf\|_\infty\frac{1}{N} \;\le\; \frac{\|T\|}{N}\|f\|_\infty \;\le\; \|f\|_\infty\,,$$

já que $\|T\| \le N$. Assim, estabelecemos que $\|f\|_\infty < \|f\|_\infty$, um absurdo, que conduz à conclusão que uma tal f não pode existir. Isso mostra que $S(f) = 0$ se e somente se f for identicamente nula, provando que S é injetora.

Como $S : X \to \mathbb{R}^{N+1}$ é uma aplicação linear injetora, concluímos que X é um espaço de dimensão finita (pois $\mathbb{R}^{N+1}$ o é). Assim, estabelecemos que se o subespaço X tem dimensão infinita, ele não pode ser um subconjunto de $C^1\big([0,\,1]\big)$, completando a prova. ■

• **O Teorema de Hellinger-Toeplitz**

O Teorema do Gráfico Fechado, Teorema 40.9, página 2193, tem por corolário um teorema do qual uma importante lição pode ser extraída, o chamado Teorema de Hellinger[14]-Toeplitz[15]:

Teorema 40.10 (Teorema de Hellinger-Toeplitz) *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja A um operador linear tal que $Dom(A) = \mathcal{H}$ e tal que*

$$\langle x,\,Ay\rangle \;=\; \langle Ax,\,y\rangle \tag{40.27}$$

para todos $x,\,y \in \mathcal{H}$. Então, A é limitado. □

Prova. A prova é feita mostrando que $\Gamma(A)$ é fechado e evocando o Teorema do Gráfico Fechado, Teorema 40.9, página 2193. Suponha que $(x_n,\,Ax_n)$ converge a $(x,\,y)$ em $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. Queremos mostrar que $y = Ax$. Seja z um vetor qualquer de $\mathcal{H}$. Evocando sucessivas vezes a continuidade do produto escalar e a hipótese (40.27), temos

$$\langle z,\,y\rangle \;=\; \Big\langle z,\,\lim_{n\to\infty}Ax_n\Big\rangle \;=\; \lim_{n\to\infty}\langle z,\,Ax_n\rangle \;\overset{(40.27)}{=}\; \lim_{n\to\infty}\langle Az,\,x_n\rangle \;=\; \Big\langle Az,\,\lim_{n\to\infty}x_n\Big\rangle \;=\; \langle Az,\,x\rangle \;=\; \langle z,\,Ax\rangle\,.$$

Assim, para todo $z \in \mathcal{H}$ vale $\langle z,\,(y - Ax)\rangle = 0$, o que só é possível se $y = Ax$. ■

A lição que extraímos desse teorema é que se A não é um operador contínuo, uma relação como (40.27) não pode ser satisfeita para todos $x,\,y \in \mathcal{H}$. Isso nos obriga a uma certa cautela quando definirmos conceitos como o de operador autoadjunto para operadores não-limitados.

Uma outra demonstração, similar à acima, do Teorema de Hellinger-Toeplitz será apresentada no contexto de operadores não-limitados na forma do Teorema 41.3, página 2378. Uma generalização, também no contexto de operadores não-limitados, é a Proposição 41.3, página 2369.

40.2 Operadores Limitados em Espaços de Hilbert

• **Considerações gerais sobre operadores em espaços de Hilbert**

Vamos agora particularizar nossa discussão para o contexto de espaços de Hilbert. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Um operador linear A agindo em $\mathcal{H}$ é uma função linear definida em um domínio $\mathrm{Dom}(A)$, um subespaço de $\mathcal{H}$, assumindo valores em $\mathcal{H}$. Frequentemente denotaremos esse domínio por $D(A)$ ou ainda por D_A. A imagem de A, $\mathrm{Im}(A)$, será frequentemente denotada por $\mathrm{Ran}\,(A)$, por $R(A)$, ou por R_A.

[14] Ernst David Hellinger (1883–1950).
[15] Otto Toeplitz (1881–1940).

Na teoria de operadores em espaços de Hilbert é absolutamente fundamental lembrar que cada operador é definido em um domínio específico, pois propriedades do mesmo podem mudar se o domínio for alterado. Considere-se o exemplo do espaço de Hilbert $L^2([0,\ 1],\ dx)$, e os operadores $A_1 = -i\frac{d}{dx}$, definido no domínio $D(A_1)$ das funções contínuas e continuamente diferenciáveis do intervalo $[0,\ 1]$ e $A_2 = -i\frac{d}{dx}$, definido no domínio $D(A_2)$ das funções contínuas e continuamente diferenciáveis do intervalo $[0,\ 1]$ que se anulam em $x = 0$ e em $x = 1$. O operador A_2 é simétrico no seu domínio, ou seja, para todos $\phi,\ \psi$ no seu domínio vale $\langle \phi,\ A_2\psi\rangle = \langle A_2\phi,\ \psi\rangle$, mas o operador A_1 não tem essa propriedade.

E. 40.11 *Exercício.* Verifique as afirmativas feitas no último parágrafo usando para tal integração por partes. ✣

No caso de operadores limitados (contínuos), a situação se simplifica muito, pois, como iremos argumentar, um operador limitado sempre pode ser isometricamente estendido a todo o espaço de Hilbert.

De fato, seja A um operador linear limitado definido em um subespaço $D(A)$ de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se $D(A)$ for fechado, podemos estender A ao complemento ortogonal $D(A)^\perp$, definindo-o como zero em $D(A)^\perp$. Mais precisamente fazemos o seguinte: pelo Teorema da Decomposição Ortogonal, Teorema 39.2, página 2128, todo $x \in \mathcal{H}$ pode ser escrito como $x = y + z$ com $y \in D(A)$ e $z \in D(A)^\perp$. Definimos então A'', extensão de A, com domínio igual a todo $\mathcal{H}$ por

$$A''x \ = \ A''(y+z) \ = \ Ay\,.$$

É fácil verificar que $\|A''\| = \|A\|$.

Caso $D(A)$ não seja fechado, definimos uma extensão A' de A a seu fecho $\overline{D(A)}$ da seguinte forma. Seja $y \in \overline{D(A)}$ e y_n, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência em $D(A)$ que converge a y. Definimos

$$A'y \ = \ \lim_{n\to\infty} Ay_n\,.$$

E. 40.12 *Exercício.* Usando a continuidade mostre que o limite do lado direito sempre existe e que não depende da particular sequência y_n em $D(A)$ que converge a y. ✣

E. 40.13 *Exercício.* Mostre que $\|A'\| = \|A\|$. ✣

Como o domínio de A' é fechado, podemos proceder como antes e estender A' a todo $\mathcal{H}$.

Daqui por diante sempre consideraremos que operadores limitados têm por domínio todo o espaço de Hilbert em que agem. Para operadores não-contínuos isso não pode ser feito e questões relativas ao domínio de definição têm sempre um caráter essencial.

Notação. Denotaremos por $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2)$ o conjunto de todos os operadores limitados (e, portanto, contínuos) definidos no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$ com valores no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$. Denotaremos por $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{H},\ \mathcal{H})$ o conjunto de todos os operadores limitados (e, portanto, contínuos) agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. ◀

40.2.1 A Noção de Operador Adjunto em Espaços de Hilbert

• Formas sesquilineares bicontínuas

Este é o momento oportuno para introduzirmos a noção de forma sesquilinear bicontínua em espaços de Hilbert e estabelecermos um resultado geral sobre essa noção, o qual será evocado diversas vezes neste texto, por apresentar um método de obtenção de operadores limitados em espaços de Hilbert.

Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert. Uma aplicação $\mathcal{S} : \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 \to \mathbb{C}$ com $\mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 \ni (u,\ v) \mapsto \mathcal{S}(u,\ v) \in \mathbb{C}$ é dita ser uma *forma sesquilinear*[16] se satisfizer

$$\mathcal{S}\big(u,\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2\big) \ = \ \alpha_1\,\mathcal{S}(u,\ v_1) + \alpha_2\,\mathcal{S}(u,\ v_2) \tag{40.28}$$

$$\mathcal{S}\big(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2,\ v\big) \ = \ \overline{\alpha_1}\,\mathcal{S}(u_1,\ v) + \overline{\alpha_2}\,\mathcal{S}(u_2,\ v) \tag{40.29}$$

[16] Vide também página 267.

para todos $u,\ u_1,\ u_2 \in \mathcal{H}_2$, todos $v,\ v_1,\ v_2 \in \mathcal{H}_1$ e todos $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{C}$.

Uma forma sesquilinear $\mathcal{S} : \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 \to \mathbb{C}$ é dita ser uma *forma sesquilinear bicontínua* se existir $M > 0$ tal que $\big|S(u,\ v)\big| \le M\,\|u\|_{\mathcal{H}_2}\|v\|_{\mathcal{H}_1}$ para todos $u \in \mathcal{H}_2$ e $v \in \mathcal{H}_1$. O resultado a seguir, um corolário simples do Teorema de Representação de Riesz para espaços de Hilbert, Teorema 39.4, página 2134, revela a importância dessa noção.

Proposição 40.11 *Seja $\mathcal{S} : \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 \to \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear bicontínua. Então, existe um operador linear limitado $S : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$, único, tal que*

$$\mathcal{S}(u,\ v) \ = \ \langle Su,\ v\rangle_{\mathcal{H}_1}$$

para todos $u \in \mathcal{H}_2$ e $v \in \mathcal{H}_1$. □

Prova. Para cada $u \in \mathcal{H}_2$ fixo, a aplicação $v \mapsto \mathcal{S}(u,\ v)$ é um funcional linear contínuo em $\mathcal{H}_1$. Assim, pelo Teorema de Representação de Riesz para espaços de Hilbert, Teorema 39.4, página 2134, existe para cada $u \in \mathcal{H}_2$ um vetor $\eta_u \in \mathcal{H}_1$ tal que $\mathcal{S}(u,\ v) = \langle \eta_u,\ v\rangle_{\mathcal{H}_1}$. Seja $S : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ a aplicação (que não pressupomos ser linear) que associa u a η_u: $S(u) = \eta_u$. Escrevemos, portanto, $\mathcal{S}(u,\ v) = \langle S(u),\ v\rangle_{\mathcal{H}_1}$ para todos $u \in \mathcal{H}_2$ e $v \in \mathcal{H}_1$.

Como $\mathcal{S}$ é sesquilinear, tem-se por (40.29),

$$\big\langle S(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2),\ v\big\rangle_{\mathcal{H}_1} \stackrel{(40.29)}{=} \overline{\alpha_1}\langle S(u_1),\ v\rangle_{\mathcal{H}_1} + \overline{\alpha_2}\langle S(u_2),\ v\rangle_{\mathcal{H}_1}$$

$$= \ \big\langle \alpha_1 S(u_1),\ v\big\rangle_{\mathcal{H}_1} + \big\langle \alpha_2 S(u_2),\ v\big\rangle_{\mathcal{H}_1} \ = \ \big\langle (\alpha_1 S(u_1) + \alpha_2 S(u_2)),\ v\big\rangle_{\mathcal{H}_1}\,,$$

para todos $u_1,\ u_2, \in \mathcal{H}_2$, $v \in \mathcal{H}_1$ e $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{C}$, o que implica $S(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 S(u_1) + \alpha_2 S(u_2)$, ou seja, $S : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ é um operador linear! Pela hipótese de $\mathcal{S}$ ser bicontínua, tem-se $\|Su\|^2_{\mathcal{H}_1} = |\langle Su,\ Su\rangle_{\mathcal{H}_1}| = |\mathcal{S}(u,\ Su)| \le M\|u\|_{\mathcal{H}_2}\|Su\|_{\mathcal{H}_1}$. Para $\|Su\|_{\mathcal{H}_1} \neq 0$, isso implica (cancelando-se um fator $\|Su\|_{\mathcal{H}_1}$ de ambos os lados) que $\|Su\|_{\mathcal{H}_1} \le M\|u\|_{\mathcal{H}_2}$. Como essa última desigualdade é também trivialmente satisfeita caso $\|Su\|_{\mathcal{H}_1} = 0$, a mesma vale para todo $u \in \mathcal{H}_2$, provando que $S : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ é um operador linear e limitado: $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2,\ \mathcal{H}_1)$. A unicidade de S é de demonstração elementar. ■

• O adjunto de um operador agindo entre espaços de Hilbert

Seja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2)$ um operador linear limitado definido em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$ com valores em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$. Seja a forma sesquilinear $\mathcal{A} : \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 \to \mathbb{C}$ definida por $\mathcal{A}(y,\ x) := \langle y,\ Ax\rangle_{\mathcal{H}_2}$ para todos $y \in \mathcal{H}_2$ e $x \in \mathcal{H}_1$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\big|\mathcal{A}(y,\ x)\big| \ \le \ \|y\|_{\mathcal{H}_2}\,\|Ax\|_{\mathcal{H}_2} \ \le \ \|A\|\,\|y\|_{\mathcal{H}_2}\|x\|_{\mathcal{H}_1}\,,$$

o que mostra que $\mathcal{A}$ é uma forma sesquilinear bicontínua. Aplica-se então a Proposição 40.11, página 2197, e podemos afirmar que existe um operador linear limitado $A^* : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ tal que

$$\langle y,\ Ax\rangle_{\mathcal{H}_2} \ = \ \langle A^*y,\ x\rangle_{\mathcal{H}_1}$$

para todos $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$. O operador $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2,\ \mathcal{H}_1)$ é dito ser o *adjunto* de A. A aplicação $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2) \ni A \mapsto A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2,\ \mathcal{H}_1)$ é dita ser uma *involução* e suas propriedades básicas serão estudadas no Teorema 40.11, página 2197.

Note-se que, pela própria construção, o domínio de definição de A^* é todo $\mathcal{H}_2$, pois y é arbitrário. Advertimos que esse fato não é verdadeiro para o caso em que A não é limitado. Vamos no teorema que segue demonstrar uma série de propriedades básicas de A^*.

Teorema 40.11 *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Seja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2)$ e seja $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2,\ \mathcal{H}_1)$ seu adjunto. Então, as seguintes propriedades são válidas:*

1. $(A^*)^* = A$,
2. $\|A^*\| = \|A\|$,
3. $\|A^*A\| = \|A\|^2$. *Essa propriedade é denominada* propriedade C*.

4. *Se $A,\ B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2)$ e $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$, vale*

$$(\alpha A + \beta B)^* \ = \ \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^* \ ,$$

ou seja, a operação $*$ é uma operação antilinear de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2)$ em $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2,\ \mathcal{H}_1)$.

5. *Sejam $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_3$ três espaços de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2)$ e $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2,\ \mathcal{H}_3)$, então $(BA)^* = A^* B^*$.*

6. *O operador identidade $\mathbb{1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ satisfaz $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$.*

7. *Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2)$ tem uma inversa contínua $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2,\ \mathcal{H}_1)$, então A^* também o tem e $\big(A^{-1}\big)^* = \big(A^*\big)^{-1}$.* □

Demonstração. *Prova de $(A^*)^* = A$.* Para todos $x \in \mathcal{H}_1$ e $y \in \mathcal{H}_2$ tem-se

$$\big\langle (A^*)^* x,\ y\big\rangle_{\mathcal{H}_2} \ = \ \big\langle x,\ A^* y\big\rangle_{\mathcal{H}_1} \ = \ \overline{\big\langle A^* y,\ x\big\rangle_{\mathcal{H}_1}} \ = \ \overline{\big\langle y,\ Ax\big\rangle_{\mathcal{H}_2}} \ = \ \big\langle Ax,\ y\big\rangle_{\mathcal{H}_2} \ .$$

Assim, $\big\langle [A - (A^*)^*]x,\ y\big\rangle_{\mathcal{H}_2} = 0$ para todos $x \in \mathcal{H}_1$ e $y \in \mathcal{H}_2$, o que só é possível se $\big(A^*\big)^* = A$, como queríamos provar.

Prova de $\|A^*\| = \|A\|$. Para todo $y \in \mathcal{H}_2$ tem-se

$$\|A^* y\|^2_{\mathcal{H}_1} \ = \ \big\langle A^* y,\ A^* y\big\rangle_{\mathcal{H}_1} \ = \ \big\langle y,\ AA^* y\big\rangle_{\mathcal{H}_2} \ \leq \ \|y\|_{\mathcal{H}_2}\, \|AA^* y\|_{\mathcal{H}_2} \ \leq \ \|y\|_{\mathcal{H}_2}\, \|A\|\, \|A^* y\|_{\mathcal{H}_1} \ .$$

Para y tal que $A^* y \neq 0$, essa desigualdade diz (cancelando um fator $\|A^* y\|_{\mathcal{H}_1}$ de cada lado) que

$$\|A^* y\|_{\mathcal{H}_1} \ \leq \ \|A\|\, \|y\|_{\mathcal{H}_2} \ .$$

Esta última desigualdade é, porém, trivialmente verdadeira caso $A^* y = 0$. Portanto, a mesma vale para todo $y \in \mathcal{H}_2$. A mesma desigualdade mostra que $\|A^*\| = \sup_{y \neq 0} \|A^* y\|_{\mathcal{H}_1} / \|y\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|A\|$, ou seja,

$$\|A^*\| \ \leq \ \|A\| \ . \tag{40.30}$$

Como A^* é igualmente limitado, vale também (substituindo $A \to A^*$) que $\|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|$, que significa que $\|A\| \leq \|A^*\|$. Isso, junto com (40.30), implica $\|A^*\| = \|A\|$, como queríamos.

Prova de $\|A^* A\| = \|A\|^2$ (propriedade C).* Para todo $x \in \mathcal{H}_1$ vale

$$\|A^* Ax\|_{\mathcal{H}_1} \ \leq \ \|A^*\|\, \|Ax\|_{\mathcal{H}_2} \ \leq \ \|A^*\|\, \|A\|\, \|x\|_{\mathcal{H}_1} \ = \ \|A\|^2\, \|x\|_{\mathcal{H}_1} \ .$$

Assim,

$$\|A^* A\| \ = \ \sup_{x \neq 0} \frac{\|A^* Ax\|_{\mathcal{H}_1}}{\|x\|_{\mathcal{H}_1}} \ \leq \ \|A\|^2 \ . \tag{40.31}$$

Por outro lado, para todo $x \in \mathcal{H}_1$,

$$\|Ax\|^2_{\mathcal{H}_2} \ = \ \big\langle Ax,\ Ax\big\rangle_{\mathcal{H}_2} \ = \ \big\langle A^* Ax,\ x\big\rangle_{\mathcal{H}_1} \ \leq \ \|A^* Ax\|_{\mathcal{H}_1}\, \|x\|_{\mathcal{H}_1} \ \leq \ \|A^* A\|\, \|x\|^2_{\mathcal{H}_1} \ .$$

Assim,

$$\|A\| \ = \ \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathcal{H}_2}}{\|x\|_{\mathcal{H}_1}} \ \leq \ \|A^* A\|^{1/2} \ ,$$

provando que $\|A\|^2 \leq \|A^* A\|$. Com (40.31) isso mostra que $\|A^* A\| = \|A\|^2$, como queríamos.

A prova que $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$, assim como a prova que $(BA)^* = A^* B^*$ e que $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$ são elementares e deixadas como exercício.

Se A tem uma inversa contínua, então

$$\mathbb{1} \ = \ \mathbb{1}^* \ = \ \big(A^{-1} A\big)^* \ = \ A^* \big(A^{-1}\big)^*$$

e

$$\mathbb{1} \ = \ \mathbb{1}^* \ = \ \big(AA^{-1}\big)^* \ = \ \big(A^{-1}\big)^* A^* \ ,$$

mostrando que $\big(A^{-1}\big)^* = \big(A^*\big)^{-1}$. ■

Comentários. Consideremos por simplicidade o caso em que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$. A existência do operador adjunto A^* de um operador limitado A foi obtida acima com uso do Teorema da Representação de Riesz (via Proposição 40.11) e, nesse caso, obtemos um operador igualmente limitado e definido em todo $\mathcal{H}_1$. No caso em que A não é contínuo o argumento a ser seguido é um pouco diferente e só pode fornecer o adjunto em um domínio menor que $\mathcal{H}_1$. Há mesmo casos em que o domínio de A^* é formado apenas pelo vetor nulo!

Outra advertência importante diz respeito à propriedade $(A^*)^* = A$, demonstrada acima para operadores limitados. A mesma não é também, em geral, satisfeita para operadores não-limitados. Esse fato é mais uma causa de transtorno técnico na teoria dos operadores não-limitados.

Por fim, mencionamos que a propriedade $\|A\|^2 = \|A^* A\|$ abre caminho para a importante teoria das chamadas álgebras C*, sobre as quais falaremos adiante. ♣

E. 40.14 *Exercício.* Sejam $A,\ B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Mostre que $\|A\psi\| = \|B\psi\|$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$ se e somente se $A^* A = B^* B$. Sugestão: use a identidade de polarização, relação (3.34), página 278. ✣

40.2.2 Operadores Autoadjuntos, Normais, Unitários, Projetores Ortogonais e Isometrias Parciais

Vamos agora introduzir algumas classes de operadores de grande importância na Análise Funcional. Operadores autoadjuntos e unitários, por exemplo, ocorrem no contexto da Física Quântica e devotaremos muito espaço ao estudo de suas propriedades.

• **Núcleo e imagem de operadores limitados em um espaço de Hilbert**

Se $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são espaços de Hilbert (sobre $\mathbb{C}$) e $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ é uma aplicação linear, definimos

$$\mathrm{Ker}\,(A) \ := \ \big\{\psi \in \mathcal{H}_1 |\ A\psi \ = \ 0\big\} \ ,$$

$$\mathrm{Ran}\,(A) \ := \ \big\{\phi \in \mathcal{H}_2 |\ \phi \ = \ A\psi \text{ para algum } \psi \in \mathcal{H}_1\big\} \ .$$

Naturalmente, $\mathrm{Ker}\,(A) \subset \mathcal{H}_1$ e $\mathrm{Ran}\,(A) \subset \mathcal{H}_2$. $\mathrm{Ker}\,(A)$ é denominado *núcleo* de A e $\mathrm{Ran}\,(A)$ é denominado a *imagem* ou *alcance* (= "range") de A. É elementar provar que $\mathrm{Ker}\,(A)$ e $\mathrm{Ran}\,(A)$ são subespaços lineares de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, respectivamente. Faça-o! A seguinte proposição elementar é bastante útil:

Proposição 40.12 *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e seja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2)$. Então, valem*

$$\mathrm{Ker}\,(A) \ = \ \mathrm{Ran}\,(A^*)^{\perp} \tag{40.32}$$

e

$$\mathrm{Ker}\,(A)^{\perp} \ = \ \overline{\mathrm{Ran}\,(A^*)} \ . \tag{40.33}$$

Incidentalmente, (40.32) nos mostra (pela Proposição 39.1, página 2127) que $\mathrm{Ker}\,(A)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}_1$. □

Prova. Se $\psi \in \mathrm{Ker}\,(A)$, então $\langle A\psi,\ \phi\rangle_{\mathcal{H}_2} = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{H}_2$. Logo, $\langle \psi,\ A^*\phi\rangle_{\mathcal{H}_1} = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{H}_2$. Isso afirma que ψ é ortogonal a todo elemento de $\mathrm{Ran}\,(A^*)$ e, portanto, concluímos que $\mathrm{Ker}\,(A) \subset \mathrm{Ran}\,(A^*)^{\perp}$. Por outro lado, se $\psi \in \mathrm{Ran}\,(A^*)^{\perp}$, então $\langle \psi,\ A^*\phi\rangle_{\mathcal{H}_1} = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{H}_2$, o que implica $\langle A\psi,\ \phi\rangle_{\mathcal{H}_2} = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{H}_2$. Isso, por sua vez, significa que $A\psi = 0$, provando que $\psi \in \mathrm{Ker}\,(A)$. Isso estabeleceu que $\mathrm{Ran}\,(A^*)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}\,(A)$, provando (40.32). A relação (40.33) segue de (40.32) e da Proposição 39.2, página 2129. ■

E. 40.15 *Exercício.* Prove diretamente da definição que se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2)$, então $\mathrm{Ker}\,(A)$ é um subespaço linear fechado de $\mathcal{H}_1$. ✣

• **Operadores autoadjuntos**

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Um operador limitado $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisfaça $A = A^*$ é dito ser um *operador autoadjunto*. Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é autoadjunto vale

$$\langle x,\, Ay\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \langle Ax,\, y\rangle_{\mathcal{H}}$$

para todos $x,\ y \in \mathcal{H}$. Se A não é limitado, vimos pelo Teorema de Hellinger-Toeplitz (Teorema 40.10, página 2195) que uma relação dessas não pode ser satisfeita para todos $x,\ y \in \mathcal{H}$. Em função disso, será necessário, no contexto de operadores não-limitados, criar uma distinção entre *operadores simétricos* e *operadores autoadjuntos*.

Qualquer operador limitado B agindo em $\mathcal{H}$ pode ser escrito como soma de dois operadores autoadjuntos, a saber

$$B \;=\; \mathrm{Re}\,(B) + i\mathrm{Im}\,(B)\,,$$

onde

$$\mathrm{Re}\,(B) \;=\; \frac{1}{2}\big(B + B^*\big) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\,(B) \;=\; \frac{1}{2i}\big(B - B^*\big)\,.$$

É trivial verificar que $\mathrm{Re}\,(B)$ e $\mathrm{Im}\,(B)$ são autoadjuntos.

No contexto da Física Quântica, grandezas observáveis são representadas por operadores autoadjuntos. Tal se deve a dois fatos que serão demonstrados no que se seguirá: o espectro de operadores autoadjuntos é real e para operadores autoadjuntos vale o importante Teorema Espectral, o qual está intimamente associado à interpretação probabilística da Física Quântica.

• **Operadores normais**

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Um operador limitado $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisfaça $AA^* = A^*A$ é dito ser um *operador normal*. É trivial verificar que um operador A é normal se e somente se $\mathrm{Re}\,(A)$ e $\mathrm{Im}\,(A)$ comutarem entre si.

E. 40.16 *Exercício*. Demonstre essa última afirmação. ✣

E. 40.17 *Exercício*. Do Exercício E. 40.14, página 2199, conclua que $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é normal se e somente se $\|A\psi\| = \|A^*\psi\|$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$. ✣

• **Operadores unitários**

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Um operador limitado $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisfaça $UU^* = U^*U = \mathbb{1}$ é dito ser *operador unitário*. Todo operador unitário agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é normal e possui uma inversa limitada, a saber $U^{-1} = U^*$.

No contexto da Física Quântica, operadores unitários são importantes por estarem associados a transformações de simetria.

É possível demonstrar que qualquer elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ pode ser escrito como soma de até quatro operadores unitários. Vide Proposição 40.50, página 2239 e Proposição 40.76, página 2290.

A noção de operador unitário pode ser estendida a operadores agindo entre espaços de Hilbert distintos. Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert, cujos operadores identidade denotamos por $\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}$ e $\mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}$, respectivamente. Um operador $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\, \mathcal{H}_2)$ é dito ser unitário se $U^*U = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}$ e $UU^* = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}$.

É relevante observar que $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\, \mathcal{H}_2)$ é unitário se e somente se valerem as seguintes afirmações:

1. para todos $\psi_a,\ \psi_b \in \mathcal{H}_1$ tem-se
$$\big\langle U\psi_a,\, U\psi_b\big\rangle_{\mathcal{H}_2} \;=\; \big\langle \psi_a,\, \psi_b\big\rangle_{\mathcal{H}_1}\,; \tag{40.34}$$
2. para todos $\phi_a,\ \phi_b \in \mathcal{H}_2$ tem-se
$$\big\langle U^*\phi_a,\, U^*\phi_b\big\rangle_{\mathcal{H}_1} \;=\; \big\langle \phi_a,\, \phi_b\big\rangle_{\mathcal{H}_2}\,. \tag{40.35}$$

Isso é evidente, pois (40.34) vale para todos $\psi_a,\ \psi_b \in \mathcal{H}_1$ se e somente se $\big\langle \big(U^*U - \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}\big)\psi_a,\, \psi_b\big\rangle_{\mathcal{H}_1} = 0$ para todos $\psi_a,\ \psi_b \in \mathcal{H}_1$, o que vale se e somente se $U^*U = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}$ e, analogamente, (40.35) vale para todos $\phi_a,\ \phi_b \in \mathcal{H}_2$ se e somente se $UU^* = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}$. Devido à identidade de polarização, relação (3.34), página 278, vale também afirmar que $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\, \mathcal{H}_2)$ é unitário se e somente se

$$\big\|U\psi\big\|_{\mathcal{H}_2} \;=\; \|\psi\|_{\mathcal{H}_1} \qquad \text{e} \qquad \big\|U^*\phi\big\|_{\mathcal{H}_1} \;=\; \|\phi\|_{\mathcal{H}_2}$$

para todo $\psi \in \mathcal{H}_1$ e todo $\phi \in \mathcal{H}_2$, respectivamente.

E. 40.18 *Exercício*. Demonstre as afirmações acima. ✣

Se $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ é um operador linear e $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_1$, denotamos por $A(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}_2$ a imagem de $\mathcal{A}$ por A: $A(\mathcal{A}) = \{A\phi,\ \phi \in \mathcal{A}\}$. O seguinte resultado sobre operadores unitários será usado no que segue:

Lema 40.3 *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ unitário. Então, se $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_1$ vale $U\big(\mathcal{E}^\perp\big) = U(\mathcal{E})^\perp$.* □

Prova. $\psi \in U(\mathcal{E})^\perp$ se e somente se $0 = \langle \psi,\, U\phi\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle U^*\psi,\, \phi\rangle_{\mathcal{H}_1}$ para todo $\phi \in \mathcal{E}$, ou seja, se e somente se $U^*\psi \in \mathcal{E}^\perp$, o que se dá se e somente se $\psi \in U\big(\mathcal{E}^\perp\big)$, pois $UU^* = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}$. ■

• **Projetores e projetores ortogonais**

Um operador linear P agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é dito ser um *projetor* se $P^2 = P$ e é dito ser um *projetor ortogonal* se for um projetor e se for autoadjunto: $P = P^*$.

Nem todo projetor é ortogonal. Por exemplo, no espaço de Hilbert $\mathbb{C}^2$ com o produto escalar usual a matriz $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ é um projetor, mas não é autoadjunta. Verifique!

Em espaços de Hilbert ou de Banach de dimensão infinita, projetores não são necessariamente limitados (vide Exercício E. 40.21, página 2202), mas em espaços de Hilbert todo projetor ortogonal P é limitado e se for não nulo satisfaz $\|P\| = 1$. De fato, se $P = P^2 = P^*$, então para todo $\psi \in \mathcal{H}$ vale $\|P\psi\|^2_{\mathcal{H}} = \langle P\psi,\ P\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \psi,\ P^*P\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \psi,\ P^2\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \psi,\ P\psi\rangle_{\mathcal{H}} \le \|\psi\|_{\mathcal{H}}\|P\psi\|_{\mathcal{H}}$. Assim, $\|P\psi\|_{\mathcal{H}} \le \|\psi\|_{\mathcal{H}}$, para todo $\psi \in \mathcal{H}$, provando que $\|P\| \le 1$. Como $P \neq 0$, existe $\phi \in \mathcal{H}$ tal que $P\phi \neq 0$. Denotando $\psi \equiv P\phi$, tem-se $P\psi = \psi$. Logo, $\|P\| := \sup\limits_{\substack{\varphi\in\mathcal{H}\\ \varphi\neq 0}} \dfrac{\|P\varphi\|_{\mathcal{H}}}{\|\varphi\|_{\mathcal{H}}} \ge \dfrac{\|P\psi\|_{\mathcal{H}}}{\|\psi\|_{\mathcal{H}}} = 1$, provando que $\|P\| \ge 1$ e, portanto, que $\|P\| = 1$.

É importante observar que se P é um projetor ortogonal, então valem

$$P(\mathbb{1} - P) \;=\; (\mathbb{1} - P)P \;=\; 0\,, \tag{40.36}$$

e vale também a afirmação que $\mathbb{1} - P$ é também um projetor ortogonal, pois $(\mathbb{1} - P)^2 = \mathbb{1} - 2P + P^2 = \mathbb{1} - P$.

E. 40.19 *Exercício*. Seja P um projetor ortogonal em $\mathcal{H}$. Mostre que $\mathrm{Ran}\,(P) = \mathrm{Ran}\,(\mathbb{1} - P)^\perp$ e conclua disso (via Proposição 39.1, página 2127) que $\mathrm{Ran}\,(P)$ é subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Da Proposição 40.12, página 2199, segue disso que

$$\mathrm{Ran}\,(P) \;=\; \mathrm{Ran}\,(\mathbb{1} - P)^\perp \;=\; \mathrm{Ker}\,(\mathbb{1} - P)\,. \tag{40.37}$$

Como $\mathbb{1} - P$ é também uma projeção ortogonal, vale igualmente (trocando-se P por $\mathbb{1} - P$ na última expressão), que

$$\mathrm{Ran}\,(\mathbb{1} - P) \;=\; \mathrm{Ran}\,(P)^\perp \;=\; \mathrm{Ker}\,(P)\,. \tag{40.38}$$

De (40.37) e (40.38) extraímos também

$$\mathrm{Ker}\,(P) \;=\; \mathrm{Ker}\,(\mathbb{1} - P)^\perp\,. \tag{40.39}$$

As relações (40.37) e (40.38) podem ser também obtidas diretamente de (40.36). ✣

Um exemplo importante de projetor ortogonal é representado por projetores sobre subespaços unidimensionais gerados por vetores. Seja $v \in \mathcal{H}$ um vetor cuja norma assumiremos ser 1, ou seja, $\|v\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle v,\, v\rangle_{\mathcal{H}}} = 1$. Definimos o projetor P_v sobre o subespaço gerado por v por

$$P_v u \;:=\; \langle v,\, u\rangle_{\mathcal{H}}\, v\,,$$

para todo vetor $u \in \mathcal{H}$. Que P_v é um projetor ortogonal foi demonstrado no caso de espaços vetoriais de dimensão finita à página 554 e seguintes e como a demonstração geral é idêntica (e elementar), não iremos repeti-la aqui. Um fato crucial

sobre projetores ortogonais como P_v é o seguinte: se u e v são dois vetores ortogonais, ou seja, se $\langle u,\ v\rangle_{\mathcal{H}} = 0$, então $P_u P_v = P_v P_u = 0$. Novamente, a prova (elementar) encontra-se à página 554 e seguintes.

A definição do projetor ortogonal P_v, acima, pode ser generalizada. Seja $\mathcal{M}$ um subespaço fechado de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Pelo Teorema da Decomposição Ortogonal, Teorema 39.2, página 2128, todo vetor $\psi \in \mathcal{H}$ pode ser univocamente escrito na forma $\psi = \psi_{\mathcal{M}} + \psi_{\mathcal{M}^\perp}$, com $\psi_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$ e $\psi_{\mathcal{M}^\perp} \in \mathcal{M}^\perp$. Definimos, então, o projetor $P_{\mathcal{M}}$ sobre subespaço fechado $\mathcal{M}$ por $P_{\mathcal{M}}\psi := \psi_{\mathcal{M}}$. É elementar provar que $P_{\mathcal{M}}$, assim definido, satisfaz $(P_{\mathcal{M}})^2 = P_{\mathcal{M}}$ e $(P_{\mathcal{M}})^* = P_{\mathcal{M}}$, ou seja, é um projetor ortogonal. É também fácil provar que todo projetor ortogonal em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é da forma $P_{\mathcal{M}}$ para algum subespaço fechado $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$. Para ver isso, basta recordar (Exercício E. 40.19, página 2201) que a imagem de qualquer projetor ortogonal é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$.

E. 40.20 *Exercício.* Demonstre as afirmações do último parágrafo. ✣

E. 40.21 *Exercício.* Projetores agindo em espaços de Hilbert ou de Banach, de dimensão infinita, não são necessariamente limitados, como mostra o seguinte exemplo[17]. Seja $\mathcal{B}$ um espaço de Banach e seja $\ell : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ um funcional linear não contínuo e não-nulo definido em um domínio denso $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$. Seja $v \in \mathcal{D}$ escolhido de modo que $\ell(v) = 1$. Defina-se $P : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ por $Pu := u - \ell(u)v$, $u \in \mathcal{D}$. É fácil constatar (faça-o!) que $\mathrm{Ran}\,(P) \subset \mathcal{D}$, que $P^2 = P$ e que P projeta sobre o núcleo de ℓ (i.e., $\mathrm{Ran}\,(P) = \mathrm{Ker}\,(\ell)$). Mas P não é contínuo, pois ℓ não o é.

Uma situação concreta se dá se tomarmos um espaço de Banach $\mathcal{B} = L^p(\mathbb{R},\ dx)$, com $p > 1$, e tomarmos o funcional linear $\ell(u) = \int_{\mathbb{R}} u(x)dx$, definido em $\mathcal{D} = L^1(\mathbb{R},\ dx) \cap L^p(\mathbb{R},\ dx)$. Tomemos $(Pu)(x) := u(x) - v(x)\int_{\mathbb{R}} u(y)dy$, onde escolhemos $v \in \mathcal{D}$ com $\int_{\mathbb{R}} v(x)dx = 1$. Verifique que $P^2 = P$. Que P não é limitado vê-se tomando-se uma sequência $u_n \in \mathcal{D}$ com $\|u_n\|_{\mathcal{B}} = 1$ para todo n, mas com $\left|\int_{\mathbb{R}} u_n(x)dx\right| \to \infty$ para $n \to \infty$. Por exemplo, a sequência $u_n(x) = (2n)^{-\frac{1}{p}}\chi_{[-n,\,n]}(x)$, com $\chi_{[-n,\,n]}$ sendo a função característica (vide Seção 1.1.2.2, página 63) do intervalo $[-n,\ n]$. Verifique! Como $v(x)\int_{\mathbb{R}} u(y)dy = u(x) - (Pu)(x)$, teremos $\|v\|_{\mathcal{B}}\left|\int_{\mathbb{R}} u_n(y)dy\right| \leq \|u_n\|_{\mathcal{B}} + \|Pu_n\|_{\mathcal{B}}$ e como $\left|\int_{\mathbb{R}} u_n(x)dx\right| \to \infty$ para $n \to \infty$ e $\|u_n\|_{\mathcal{B}} = 1$ para todo n, temos $\|Pu_n\|_{\mathcal{B}} \to \infty$ para $n \to \infty$, provando que P não é limitado. ✣

• Uma proposição útil

Proposição 40.13 *Seja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e defina-se $P := A^*A$ e $Q := AA^*$. Então, P é um projetor ortogonal se e somente se Q o for.* □

Demonstração. Vamos provar que se $P := A^*A$ for um projetor ortogonal, então $Q := AA^*$ também o é. Se isso for verdade vemos com a troca $A \to A^*$ que também a recíproca é igualmente verdadeira.

É evidente que P e Q são autoadjuntos e, por hipótese, $P^2 = P$. Resta provar que $Q^2 = Q$. Observe que se $\psi \in \mathcal{H}$, então $\|P\psi\|^2_{\mathcal{H}} = \langle P\psi,\ P\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \psi,\ P^2\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \psi,\ P\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \psi,\ A^*A\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \|A\psi\|^2_{\mathcal{H}}$. Disso segue que $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(P)$. Temos, portanto, que

$$\mathrm{Ran}\left(A^*\right) \ \subset\ \overline{\mathrm{Ran}\left(A^*\right)} \ \overset{(40.33)}{=}\ \mathrm{Ker}\,(A)^\perp \ =\ \mathrm{Ker}\,(P)^\perp \ \overset{(40.39)}{=}\ \mathrm{Ker}\,(\mathbb{1} - P)\,.$$

Disso segue imediatamente que

$$(P - \mathbb{1})A^* \ =\ 0\,. \tag{40.40}$$

Agora, temos que $Q^2 - Q = AA^*AA^* - AA^* = A(P - \mathbb{1})A^* \overset{(40.40)}{=} 0$, provando que Q é um projetor e completando a prova. ■

• Isometrias e isometrias parciais

Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert. Um operador linear limitado $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ é dito ser uma *isometria*, ou um *operador isométrico*, se $\|U\psi\|_{\mathcal{H}_2} = \|\psi\|_{\mathcal{H}_1}$ para todo $\psi \in \mathcal{H}_1$, ou seja, se $\langle U\psi,\ U\psi\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \psi,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}_1}$ para todo $\psi \in \mathcal{H}_1$. A identidade de polarização (na forma (3.32), página 278 ou (3.34), página 278) permite facilmente perceber que U é uma isometria se e somente se $\langle U\psi,\ U\phi\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \psi,\ \phi\rangle_{\mathcal{H}_1}$ para todos $\psi,\ \phi \in \mathcal{H}_1$. Note-se que essa relação é verdadeira se e somente se para todos $\psi,\ \phi \in \mathcal{H}_1$ valer $\left\langle \left(U^*U - \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}\right)\psi,\ \phi\right\rangle_{\mathcal{H}_1} = 0$, ou seja, se e somente se $U^*U = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}$. Aqui, $U^* : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ é o adjunto de U.

[17] Aprendemos esse exemplo com o Prof. César Rogério de Oliveira.

É fácil extrair a seguinte consequência disso: um operador linear limitado $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ é unitário se e somente se U e U^* forem isometrias.

Exemplo 40.1 Seja $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \ell_2(\mathbb{N})$ o espaço de Hilbert das sequências de quadrado somável (introduzido nas Seções 24.5, página 1334, e 24.5.1, página 1336). O *operador de "shift"* definido por $S(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots) := (0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots)$ é uma isometria. Seu adjunto S^* é dado por $S^*(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots) := (a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots)$ e não é isométrico. É elementar constatar que $S^*S = \mathbb{1}$, mas $SS^* \neq \mathbb{1}$. ♦

Se $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2)$ possui um núcleo não-trivial, ou seja, se $\mathrm{Ker}\,(U) \neq \{0\}$, então U não pode, evidentemente, ser uma isometria. Há nesse caso, porém, uma noção útil que generaliza a de isometria.

Um operador linear limitado $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ é dito ser uma *isometria parcial* se for uma isometria quando restrita a $\mathrm{Ker}\,(U)^\perp$, ou seja, se valer $\|U\psi\|_{\mathcal{H}_2} = \|\psi\|_{\mathcal{H}_1}$ para todo $\psi \in \mathrm{Ker}\,(U)^\perp$, ou seja, se $\langle U\psi,\ U\psi\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \psi,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}_1}$ para todo $\psi \in \mathrm{Ker}\,(U)^\perp$. Novamente, evocando a identidade de polarização, é fácil perceber que U é uma isometria parcial se e somente se $\langle U\psi,\ U\phi\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \psi,\ \phi\rangle_{\mathcal{H}_1}$ para todos $\psi,\ \phi \in \mathrm{Ker}\,(U)^\perp$.

Frise-se que toda isometria é uma isometria parcial.

Sejam $P_{\mathcal{H}_1}$ o projetor ortogonal sobre $\mathrm{Ker}\,(U)^\perp$ e $\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} - P_{\mathcal{H}_1}$ o projetor ortogonal sobre $\mathrm{Ker}\,(U)$. Naturalmente, todo $\chi \in \mathcal{H}_1$ pode ser escrito na forma $\chi = P_{\mathcal{H}_1}\chi + \left(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} - P_{\mathcal{H}_1}\right)\chi$. Como $U\left(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} - P_{\mathcal{H}_1}\right) = 0$, podemos dizer que operador linear limitado $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ é uma isometria parcial se e somente se para todos $\chi,\ \xi \in \mathcal{H}_1$ valer $\langle U\chi,\ U\xi\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle P_{\mathcal{H}_1}\chi,\ P_{\mathcal{H}_1}\xi\rangle_{\mathcal{H}_1}$, ou seja, se e somente se para todos $\chi,\ \xi \in \mathcal{H}_1$ valer $\langle (U^*U - P_{\mathcal{H}_1})\chi,\ \xi\rangle_{\mathcal{H}_1} = 0$, o que vale se e somente se $U^*U = P_{\mathcal{H}_1}$.

Proposição 40.14 *Se $U \in \mathcal{B}\big(\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2\big)$ é uma isometria parcial, então valem as seguintes afirmativas:*

1. *U^*U é o projetor ortogonal sobre $\mathrm{Ker}\,(U)^\perp$.*
2. *$UU^*U = U$ e $U^*UU^* = U^*$.*
3. *$\mathrm{Ran}\,(U) = \mathrm{Ker}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} - UU^*\right)$ e, portanto, $\mathrm{Ran}\,(U)$ é fechado.*
4. *$\mathrm{Ker}\,(U^*)^\perp = \mathrm{Ran}\,(U)$.*
5. *UU^* é o projetor ortogonal sobre $\mathrm{Ran}\,(U)$.*
6. *U^* é uma isometria parcial.*
7. *$\mathrm{Ran}\,(U^*) = \mathrm{Ker}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} - U^*U\right)$ e, portanto, $\mathrm{Ran}\,(U^*)$ é fechado.*
8. *$\mathrm{Ker}\,(U)^\perp = \mathrm{Ran}\,(U^*)$.*
9. *$\|U\| = \|U^*\| = 1$.*

Já vimos acima que o item 1 equivale a U ser uma isometria parcial. Logo, devido ao item 4, os itens 5 e 6 também são equivalentes. Portanto, vale afirmar que U é uma isometria parcial se e somente se U^* o for e uma condição necessária e suficiente para tal é que $U^*U = P_{\mathcal{H}_1}$, o projetor ortogonal sobre $\mathrm{Ker}\,(U)^\perp$ ou que $UU^* = Q_{\mathcal{H}_2}$, o projetor ortogonal sobre $\mathrm{Ran}\,(U)$ (vide também Proposição 40.13, página 2202). □

Prova. *Prova de 1.* O item 1 já foi provado acima.

Prova de 2. Já vimos que se U é uma isometria parcial, então $U^*U = P_{\mathcal{H}_1}$ é o projetor ortogonal sobre $\mathrm{Ker}\,(U)^\perp$. Logo, $\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} - P_{\mathcal{H}_1}$ é o projetor sobre $\mathrm{Ker}\,(U)$ e segue que $U\left(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} - P_{\mathcal{H}_1}\right) = 0$, ou seja, $UU^*U = U$, do que se extrai também, tomando-se o adjunto de ambos os lados, que $U^*UU^* = U^*$.

Prova de 3. Seja $Q_{\mathcal{H}_2} := UU^*$. Claramente $Q_{\mathcal{H}_2}$ é autoadjunto e vale $Q^2_{\mathcal{H}_2} = (UU^*U)U^* = UU^* = Q_{\mathcal{H}_2}$. Assim, $Q_{\mathcal{H}_2}$ é um projetor ortogonal. Afirmamos que $\mathrm{Ran}\,(U) = \mathrm{Ker}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} - Q_{\mathcal{H}_2}\right)$, o que implica que $\mathrm{Ran}\,(U)$ é fechado. De fato, temos por um lado que a relação $UU^*U = U$ diz que $\left(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} - Q_{\mathcal{H}_2}\right)U = 0$, ou seja, $\mathrm{Ran}\,(U) \subset \mathrm{Ker}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} - Q_{\mathcal{H}_2}\right)$. Por outro lado, se $\psi \in \mathrm{Ker}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} - Q_{\mathcal{H}_2}\right)$, então $\left(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} - Q_{\mathcal{H}_2}\right)\psi = 0$, ou seja, $\psi = UU^*\psi$ o que implica $\psi \in \mathrm{Ran}\,(U)$ e, portanto, $\mathrm{Ker}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} - Q_{\mathcal{H}_2}\right) \subset \mathrm{Ran}\,(U)$. Assim, $\mathrm{Ran}\,(U) = \mathrm{Ker}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} - Q_{\mathcal{H}_2}\right)$, o que implica que $\mathrm{Ran}\,(U)$ é fechado. Esse último fato, ademais, já fora estabelecido na Proposição 40.3, página 2174.

Prova de 4. Como $\mathrm{Ran}\,(U)$ é fechado, (40.33) garante que $\mathrm{Ker}\,(U^*)^\perp = \mathrm{Ran}\,(U)$.

Prova de 5. Se $\psi \in \mathrm{Ker}\,(U^*)^\perp$, então $\psi \in \mathrm{Ran}\,(U)$ e, portanto, existe $\phi \in \mathrm{Ker}\,(U)^\perp$ tal que $\psi = U\phi$. Logo, $Q_{\mathcal{H}_2}\psi = Q_{\mathcal{H}_2}U\phi = \big(UU^*U\big)\phi = U\phi = \psi$. Por outro lado, se $\psi \in \mathrm{Ker}\,(U^*)$, então, evidentemente, $Q_{\mathcal{H}_2}\psi = UU^*\psi = 0$. Isso mostrou que $Q_{\mathcal{H}_2}$ é o projetor sobre $\mathrm{Ker}\,(U^*)^\perp = \mathrm{Ran}\,(U)$.

Prova de 6. Se UU^* é o projetor ortogonal sobre $\mathrm{Ker}\,(U^*)^\perp$, então para todo $\psi \in \mathrm{Ker}\,(U^*)^\perp$ teremos $\langle \psi,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \psi,\ UU^*\psi\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle U^*\psi,\ U^*\psi\rangle_{\mathcal{H}_2}$, o que significa que U^* é uma isometria parcial.

Prova de 7. Se U^* é uma isometria parcial então o item 7 segue do item 3 trocando-se U por U^*.

Prova de 8. Idem, trocando-se U por U^* no item 4.

Prova de 9. A afirmação é evidente pela definição, mas também pode ser provada da seguinte forma. Como U^*U é um projetor ortogonal, vale $\|U^*U\| = 1$. Da propriedade C* (vide Teorema 40.11, página 2197), segue que $\|U\| = 1$ e que $\|U^*\| = 1$. ■

O seguinte corolário é evidente:

Corolário 40.3 *Se $U \in \mathcal{B}\big(\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2\big)$ é uma isometria, então $U^* \in \mathcal{B}\big(\mathcal{H}_2,\ \mathcal{H}_1\big)$ é uma isometria parcial.* □

O Exemplo 40.1, página 2203, ilustra bem essa afirmação, pois é fácil ver que S^* é uma isometria parcial.

Nota. Se $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma isometria parcial, estabelecemos, das relações $UU^*U = U$ e $U^*UU^* = U^*$ (do item 2 do enunciado do Teorema 40.14, página 2203) e do fato que U^*U e UU^* são autoadjuntos, que U^* é a *pseudoinversa de Moore-Penrose* de U. A noção de pseudoinversa de Moore-Penrose é discutida no contexto de matrizes na Seção 10.9, página 607. ♣

O corolário seguinte da Proposição 40.14 é também útil.

Proposição 40.15 *Uma isometria $U \in \mathcal{B}\big(\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2\big)$ é um operador unitário se e somente se* $\mathrm{Ran}\,(U) = \mathcal{H}_2$. □

Prova. Se U é unitário, é isométrico e possui inversa e evidentemente $\mathrm{Ran}\,(U) = \mathcal{H}_2$.

Vamos supor que U é uma isometria e $\mathrm{Ran}\,(U) = \mathcal{H}_2$. Pela Proposição 40.14, temos que UU^* é o projetor sobre $\mathrm{Ran}\,(U)$. Logo $UU^* = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}$. Como U é isométrico, vale $\|U\psi\|_{\mathcal{H}_2} = \|\psi\|_{\mathcal{H}_1}$ para todo $\psi \in \mathcal{H}_1$. Logo, $\mathrm{Ker}\,(U) = \{0\}$. Pela Proposição 40.14, U^*U é o projetor sobre $\mathrm{Ker}\,(U)^\perp = \mathcal{H}_1$. Logo, $U^*U = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}$. Isso provou que $U^{-1} = U^*$ e que U é unitário. ■

• **Autovalores e autovetores de operadores limitados. Multiplicidade de um autovalor**

Um número $\lambda \in \mathbb{C}$ é dito ser um *autovalor* de um operador limitado B agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ se existir pelo menos um vetor não-nulo $\phi \in \mathcal{H}$ tal que $B\phi = \lambda\phi$. Um tal vetor é dito ser um *autovetor* de B com autovalor λ.

Em espaços de Hilbert de dimensão finita, como $\mathbb{C}^n$, todo operador, ou seja, toda matriz, possui autovalores, pois o conjunto de autovalores coincide com o conjunto de raízes do polinômio característico da matriz. Esses fatos foram estudados com detalhe no Capítulo 10, página 507, ao qual remetemos os estudantes interessados. É importante notar, porém, que em espaços de Hilbert de dimensão infinita pode ocorrer de haver operadores limitados que não possuem autovalores, um exemplo, dentre muitos, sendo o *operador de Volterra* W, tratado no Exemplo 40.10 à página 2283.

Um fato elementar sobre essas noções é o seguinte: se ϕ_1 e ϕ_2 são dois autovetores de um operador limitado B com o mesmo autovalor λ, então para quaisquer $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{C}$ o vetor $\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2$ é igualmente autovetor de B com autovalor λ. De fato, $B(\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2) = \alpha_1 B\phi_1 + \alpha_2 B\phi_2 = \lambda(\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2)$. Assim, reconhecemos que a coleção de todos os autovetores de B com autovalor λ gera um subespaço, que denotaremos por $\mathcal{M}_\lambda$, do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ em questão. Mais que isso, $\mathcal{M}_\lambda$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Isso pode ser provado com a observação que se ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de vetores de $\mathcal{M}_\lambda$ que converge a $\phi \in \mathcal{H}$, então a continuidade de B diz-nos que $B\phi = B\left(\lim_{n\to\infty}\phi_n\right) = \lim_{n\to\infty} B\phi_n = \lambda \lim_{n\to\infty}\phi_n = \lambda\phi$, provando que $\phi \in \mathcal{M}_\lambda$. Para futura referência reunimos essas observações na seguinte proposição:

Proposição 40.16 *Se B é um operador limitado agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, e $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de B, então a coleção de todos os autovetores de B com autovalor λ é um subespaço linear fechado de $\mathcal{H}$.* □

Se $\mathcal{M}_\lambda$, o subespaço gerado pelos autovetores de B com autovalor λ, tiver dimensão finita, dizemos que λ tem *degenerescência finita*. Nesse caso, define-se a *multiplicidade (geométrica)* de λ como sendo a dimensão de $\mathcal{M}_\lambda$.

• **Autovalores e autovetores de operadores autoadjuntos**

Se A é um operador limitado e autoadjunto agindo em espaços de Hilbert $\mathcal{H}$ (de dimensão finita ou não) podem ser estabelecidas certas propriedades básicas sobre seus autovalores e autovetores (caso existam), os quais estão resumidos na próxima proposição.

Proposição 40.17 *Se A é um operador limitado e autoadjunto agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então seus autovalores (se existirem) são números reais. Fora isso, os autovetores associados a autovalores distintos de A são ortogonais entre si.* □

Prova. Se λ é um autovalor de A e $v \neq 0$ um autovetor de A com autovalor λ então, como A é autoadjunto, tem-se $\langle v,\ Av\rangle_{\mathcal{H}} = \langle Av,\ v\rangle_{\mathcal{H}}$. Como v é um autovetor, o lado esquerdo vale $\lambda\langle v,\ v\rangle_{\mathcal{H}}$ e o lado direito vale $\overline{\lambda}\langle v,\ v\rangle_{\mathcal{H}}$. Dessa forma, $(\lambda - \overline{\lambda})\langle v,\ v\rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Como $v \neq 0$ isso implica $\lambda = \overline{\lambda}$, ou seja, λ é real. Sejam agora λ_1 e λ_2 dois autovalores de A, que suporemos distintos. Seja v_1 autovetor de A com autovalor λ_1 e v_2 autovetor de A com autovalor λ_2. Temos, por A ser autoadjunto, $\langle v_1,\ Av_2\rangle_{\mathcal{H}} = \langle Av_1,\ v_2\rangle_{\mathcal{H}}$. O lado esquerdo vale $\lambda_2\langle v_1,\ v_2\rangle_{\mathcal{H}}$ e o lado direito $\lambda_1\langle v_1,\ v_2\rangle_{\mathcal{H}}$ (lembrar que λ_1 é real). Assim, $(\lambda_2 - \lambda_1)\langle v_1,\ v_2\rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Como $\lambda_2 \neq \lambda_1$, segue que $\langle v_1,\ v_2\rangle_{\mathcal{H}} = 0$, que é o que se queria provar. ■

• **Autovalores e autovetores de operadores unitários**

Para operadores unitários valem afirmações análogas.

Proposição 40.18 *Se U é um operador unitário agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então seus autovalores (se existirem) são números complexos de módulo* 1. *Fora isso, os autovetores associados a autovalores distintos de U são ortogonais entre si.* □

Prova. Seja U unitário, λ um autovalor de U e $v \neq 0$ um autovetor de U com autovalor λ. Como U é unitário tem-se $\langle Uv,\ Uv\rangle_{\mathcal{H}} = \langle v,\ U^*Uv\rangle_{\mathcal{H}} = \langle v,\ v\rangle_{\mathcal{H}}$. Como v é um autovetor, o lado esquerdo vale $\overline{\lambda}\lambda\langle v,\ v\rangle_{\mathcal{H}}$. Assim, $(|\lambda|^2 - 1)\langle v,\ v\rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Como $v \neq 0$ isso implica $|\lambda| = 1$. Sejam agora λ_1 e λ_2 dois autovalores distintos de U e sejam v_1 autovetor de U com autovalor λ_1 e v_2 autovetor de U com autovalor λ_2. Temos, por U ser unitário, $\langle Uv_1,\ Uv_2\rangle_{\mathcal{H}} = \langle v_1,\ U^*Uv_2\rangle_{\mathcal{H}} = \langle v_1,\ v_2\rangle_{\mathcal{H}}$. O lado esquerdo vale $\overline{\lambda_1}\lambda_2\langle v_1,\ v_2\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\langle v_1,\ v_2\rangle_{\mathcal{H}}$ (lembre-se que λ_1 é um número complexo de módulo 1 e, portanto $\overline{\lambda_1} = \lambda_1^{-1}$). Assim, $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right)\langle v_1,\ v_2\rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Como $\lambda_2 \neq \lambda_1$, segue que $\langle v_1,\ v_2\rangle_{\mathcal{H}} = 0$, que é o que se queria provar. ■

• **Subespaços invariantes**

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $\mathcal{M}$ um subespaço de $\mathcal{H}$. Se A é um operador limitado agindo em $\mathcal{H}$, dizemos que $\mathcal{M}$ é *invariante pela ação de A* se $A\phi \in \mathcal{M}$ para todo $\phi \in \mathcal{M}$. Com essa definição vale a seguinte proposição importante.

Proposição 40.19 *Se um subespaço $\mathcal{M}$ é invariante pela ação de um operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, então $\mathcal{M}^\perp$ é invariante pela ação de A^*.* □

Prova. Se ϕ e ψ são dois vetores arbitrários tais que $\phi \in \mathcal{M}$ e $\psi \in \mathcal{M}^\perp$, então $\langle A^*\psi,\ \phi\rangle = \langle \psi,\ A\phi\rangle = 0$, pois $A\phi \in \mathcal{M}$, por hipótese. Logo, $A^*\psi$ é ortogonal a todo vetor $\phi \in \mathcal{M}$, o que equivale a dizer que $A^*\psi \in \mathcal{M}^\perp$. Como ψ é um vetor arbitrário de $\mathcal{M}^\perp$, segue que $\mathcal{M}^\perp$ é invariante por A^*. ■

O seguinte corolário evidente será repetidamente empregado.

Corolário 40.4 *Se um subespaço $\mathcal{M}$ de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é invariante pela ação de um operador autoadjunto $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, então $\mathcal{M}^\perp$ é igualmente invariante pela ação de A.* □

• **O adjunto em espaços de Banach**

Faremos aqui uma breve menção ao fato que o conceito de adjunto de operadores possui uma generalização para operadores contínuos agindo em espaços de Banach, em geral.

Seja X um espaço de Banach e $X^\dagger = \mathcal{B}(X,\,\mathbb{C})$ seu dual topológico que, como já observamos na seção 40.1.2, é um espaço de Banach com norma $\|l\|_{X^\dagger} = \sup_{x\in X,\,x\neq 0} \dfrac{|l(x)|}{\|x\|_X}$, $l \in X^\dagger$.

Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador limitado agindo entre X e Y. Definimos seu dual T' como sendo o operador $T' : Y^\dagger \to X^\dagger$ definido da seguinte forma: para $l \in Y^\dagger$, $T'l$ é o funcional linear contínuo definido de tal forma que a cada $x \in X$ associa o número complexo $l(Tx)$:

$$(T'l)(x) \;:=\; l(Tx)\,.$$

Que T' é limitado segue da desigualdade $|(T'l)(x)| = |l(Tx)| \leq \|l\|_{Y^\dagger}\|Tx\|_Y \leq \|l\|_{Y^\dagger}\|T\|\|x\|_X$, que implica

$$\|T'l\|_{X^\dagger} \;=\; \sup_{x\in X,\,x\neq 0} \frac{|(T'l)(x)|}{\|x\|_X} \;\leq\; \|T\|\,\|l\|_{Y^\dagger}\,.$$

Em particular, isso diz-nos que

$$\|T'\| \;=\; \sup_{l\in Y^\dagger,\,l\neq 0} \frac{\|T'l\|_{X^\dagger}}{\|l\|_{Y^\dagger}} \;\leq\; \|T\|\,. \tag{40.41}$$

A linearidade de T' é também fácil de constatar, pois, para quaisquer $l,\; l' \in Y^\dagger$, $\alpha,\;\beta \in \mathbb{C}$,

$$(T'(\alpha l + \beta l'))(x) \;=\; (\alpha l + \beta l')(Tx) \;=\; \alpha l(Tx) + \beta l'(Tx) \;=\; \alpha(T'l)(x) + \beta(T'l')(x) \;=\; (\alpha T'l + \beta T'l')(x)\,,$$

mostrando que $T'(\alpha l + \beta l') = \alpha T'l + \beta T'l'$.

O assim definido operador linear limitado $T' \in \mathcal{B}(Y^\dagger,\; X^\dagger)$ é denominado *adjunto* de T.

Com uso do Teorema de Hahn-Banach é possível mostrar que $\|T'\| = \|T\|$. De fato, pela Proposição 40.8, página 2187, sabemos que existe para cada $x_0 \in X$ um $l_{Tx_0} \in Y^\dagger$ com $\|l_{Tx_0}\|_{Y^\dagger} = 1$ e tal que $l_{Tx_0}(Tx_0) = \|Tx_0\|_Y$. Assim,

$$\frac{\|T'l_{Tx_0}\|_{X^\dagger}}{\|l_{Tx_0}\|_{Y^\dagger}} \;=\; \|T'l_{Tx_0}\|_{X^\dagger} \;=\; \sup_{x\in X,\,x\neq 0} \frac{|(T'l_{Tx_0})(x)|}{\|x\|_X} \;\geq\; \frac{|(T'l_{Tx_0})(x_0)|}{\|x_0\|_X} \;=\; \frac{|l_{Tx_0}(Tx_0)|}{\|x_0\|_X} \;=\; \frac{\|Tx_0\|_Y}{\|x_0\|_X}\,, \tag{40.42}$$

Isso implica que

$$\|T'\| \;=\; \sup_{l\in Y^\dagger,\,l\neq 0} \frac{\|T'l\|_{X^\dagger}}{\|l\|_{Y^\dagger}} \;\geq\; \frac{\|T'l_{Tx_0}\|_{X^\dagger}}{\|l_{Tx_0}\|_{Y^\dagger}} \overset{(40.42)}{\geq} \frac{\|Tx_0\|_Y}{\|x_0\|_X}$$

para cada $x_0 \in X$. Logo,

$$\|T'\| \;\geq\; \sup_{x_0\in X,\,x_0\neq 0} \frac{\|Tx_0\|_Y}{\|x_0\|_X} \;=:\; \|T\|\,.$$

Junto com (40.41), isso implica $\|T'\| = \|T\|$.

Para futura referência coletamos os fatos provados acima na seguinte proposição:

Proposição 40.20 *Sejam X e Y dois espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear e limitado: $T \in \mathcal{B}(X,\,Y)$. Então, $T' : Y^\dagger \to X^\dagger$, o chamado adjunto de T, definido por*

$$(T'l)(x) \;:=\; l(Tx)$$

para $l \in Y^\dagger$ e $x \in X$, é igualmente um operador linear e limitado, ou seja, $T' \in \mathcal{B}(Y^\dagger,\; X^\dagger)$ e satisfaz $\|T'\| = \|T\|$. □

No caso em que $X = Y = \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}$ é um Hilbert, há uma distinção sutil entre T' e T^*. O primeiro é uma aplicação de $\mathcal{H}^\dagger$ em $\mathcal{H}^\dagger$ enquanto que o segundo é uma aplicação de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$. A relação entre ambos é estabelecida pela aplicação $\mathcal{R} : \mathcal{H}^\dagger \to \mathcal{H}$, definida em (40.6), página 2179. Tem-se, a saber,

$$T' \;=\; \mathcal{R}^{-1}T^*\mathcal{R}\,.$$

E. 40.22 *Exercício*. Mostre isso. ✣

A aplicação $T \to T'$ é sempre linear enquanto que, no caso de espaços de Hilbert, a aplicação $T \to T^*$ é antilinear. Isso está de acordo com $T' = \mathcal{R}^{-1}T^*\mathcal{R}$, pois $\mathcal{R}^{-1}$ é também antilinear.

• **A norma de operadores autoadjuntos limitados**

Há um fato especial sobre a norma de operadores autoadjuntos limitados agindo em um espaço de Hilbert do qual faremos uso repetido no que seguirá.

Teorema 40.12 *Se T é um operador autoadjunto limitado em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então*

$$\|T\| \;=\; \sup_{\phi\in\mathcal{H},\,\phi\neq 0} \frac{\big|\langle\phi,\;T\phi\rangle\big|}{\|\phi\|^2} \;=\; \sup_{\phi\in\mathcal{H},\,\|\phi\|=1} \big|\langle\phi,\;T\phi\rangle\big|\,. \tag{40.43}$$

□

Prova. Se $x,\; y \in \mathcal{H}$, tem-se $\langle x,\;Ty\rangle = \langle Tx,\;y\rangle = \overline{\langle y,\;Tx\rangle}$. Logo,

$$\big\langle (x+y),\;T(x+y)\big\rangle \;=\; \langle x,\;Tx\rangle + \langle x,\;Ty\rangle + \langle y,\;Tx\rangle + \langle y,\;Ty\rangle \;=\; \langle x,\;Tx\rangle + 2\mathrm{Re}\big(\langle x,\;Ty\rangle\big) + \langle y,\;Ty\rangle\,,$$

e

$$\big\langle (x-y),\;T(x-y)\big\rangle \;=\; \langle x,\;Tx\rangle - \langle x,\;Ty\rangle - \langle y,\;Tx\rangle + \langle y,\;Ty\rangle \;=\; \langle x,\;Tx\rangle - 2\mathrm{Re}\big(\langle x,\;Ty\rangle\big) + \langle y,\;Ty\rangle\,.$$

Dessas duas expressões conclui-se que

$$4\mathrm{Re}\big(\langle x,\;Ty\rangle\big) \;=\; \big\langle (x+y),\;T(x+y)\big\rangle - \big\langle (x-y),\;T(x-y)\big\rangle\,. \tag{40.44}$$

Definindo-se

$$\mathcal{T} \;=\; \sup_{\phi\in\mathcal{H},\,\phi\neq 0} \frac{\big|\langle\phi,\;T\phi\rangle\big|}{\|\phi\|^2}$$

é claro que

$$\big|\langle\phi,\;T\phi\rangle\big| \;\leq\; \mathcal{T}\|\phi\|^2$$

para todo $\phi \in \mathcal{H}$. Retornando a (40.44), tem-se

$$4\Big|\mathrm{Re}\big(\langle x,\;Ty\rangle\big)\Big| \;\leq\; \Big|\big\langle (x+y),\;T(x+y)\big\rangle\Big| + \Big|\big\langle (x-y),\;T(x-y)\big\rangle\Big| \;\leq\; \mathcal{T}\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big) \;=\; 2\mathcal{T}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)\,.$$

Na última igualdade usamos a identidade do paralelogramo (3.31), página 277.

Substituindo y por λy, com $\lambda \in \mathbb{C}$ e $|\lambda| = 1$, a última desigualdade fica

$$\Big|\mathrm{Re}\big(\lambda\langle x,\;Ty\rangle\big)\Big| \;\leq\; \frac{1}{2}\mathcal{T}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)\,.$$

Podemos escolher λ de modo que $\lambda\langle x,\;Ty\rangle = |\langle x,\;Ty\rangle|$ (por quê?). Assim, ficamos com

$$\big|\langle x,\;Ty\rangle\big| \;\leq\; \frac{1}{2}\mathcal{T}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)\,.$$

Vamos provisoriamente supor que $\|Ty\| \neq 0$. Escolhendo $x = \dfrac{\|y\|}{\|Ty\|}\,Ty$, a última desigualdade fica

$$\|Ty\|\,\|y\| \;\leq\; \frac{1}{2}\mathcal{T}\big(\|y\|^2 + \|y\|^2\big) \;=\; \mathcal{T}\|y\|^2\,,$$

ou seja,

$$\|Ty\| \;\leq\; \mathcal{T}\|y\|\,.$$

Como essa desigualdade vale trivialmente caso $\|Ty\| = 0$, a mesma deve valer para todo $y \in \mathcal{H}$. Claramente isso diz que

$$\|T\| \;\leq\; \mathcal{T}\,. \tag{40.45}$$

Por outro lado, tem-se pela desigualdade de Cauchy-Schwarz que, para todo $\phi \in \mathcal{H}$,

$$\big|\langle \phi,\, T\phi\rangle\big| \;\leq\; \|\phi\|\,\|T\phi\| \;\leq\; \|T\|\,\|\phi\|^2\,.$$

Logo,

$$\mathcal{T} \;=\; \sup_{\phi\in\mathcal{H},\,\phi\neq 0} \frac{\big|\langle \phi,\, T\phi\rangle\big|}{\|\phi\|^2} \;\leq\; \|T\|\,.$$

Comparando essa desigualdade a (40.45), concluímos que $\|T\| = \mathcal{T}$, que é o que queríamos provar. ■

40.3 Rudimentos da Teoria das Álgebras de Banach e Álgebras C^*

40.3.1 Álgebras de Banach

• **Álgebras associativas**

Uma álgebra sobre o corpo dos complexos é um espaço vetorial $\mathcal{A}$ sobre o corpo $\mathbb{C}$ dotado de uma operação de produto binária "$\cdot$" dita *produto* da álgebra, de modo que as seguintes propriedades são satisfeitas

1. O produto da álgebra é distributivo em relação a soma vetorial: para todos $a,\ b$ e $c \in \mathcal{A}$ valem
$$a\cdot(b+c) \;=\; a\cdot b + a\cdot c \quad\text{e}\quad (a+b)\cdot c \;=\; a\cdot c + b\cdot c\,.$$
2. O produto por escalares comuta com o produto da álgebra e é distributivo em relação a ele: para todos $a,\ b \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ vale
$$\alpha(a\cdot b) \;=\; (\alpha a)\cdot b \;=\; a\cdot(\alpha b)\,.$$

Uma álgebra $\mathcal{A}$ é dita ser uma *álgebra comutativa* se para todos $a,\ b \in \mathcal{A}$ tivermos

$$a\cdot b \;=\; b\cdot a\,.$$

Uma álgebra é dita ser uma *álgebra associativa* se para todos $a,\ b$ e $c \in \mathcal{A}$ tivermos

$$a\cdot(b\cdot c) \;=\; (a\cdot b)\cdot c\,.$$

Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra associativa, podemos sem ambiguidade dispensar o símbolo "$\cdot$" e denotar o produto de dois de seus elementos $a,\ b \in \mathcal{A}$ simplesmente por ab.

• **Álgebras com involução**

Uma álgebra sobre o corpo dos complexos $\mathcal{A}$ é dita ter uma *involução* se existir uma operação unária $*:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, que para todo $a\in\mathcal{A}$ associa um elemento denotado por $a^*\in\mathcal{A}$, com as seguintes propriedades:

1. $(a^*)^* = a$ para todo $a\in\mathcal{A}$.
2. $(ab)^* = b^*a^*$ para todos $a,\ b\in\mathcal{A}$.
3. $(\alpha a+\beta b)^* = \overline{\alpha}a^* + \overline{\beta}b^*$ para todos $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$ e todos $a,\ b\in\mathcal{A}$.
4. Se a álgebra possuir uma unidade $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$.

Uma álgebra que possua uma involução é dita ser uma *álgebra involutiva*, uma $*$*-álgebra*, uma *álgebra* $*$, ou ainda uma *álgebra* A^*.

A operação de adjunção para operadores limitados em espaços de Hilbert é a inspiração da definição de involução. Vamos a outros exemplos. Seja $\mathcal{A} = C(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ a álgebra das funções contínuas $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ com o produto usual: $(fg)(x) = f(x)g(x)$. É fácil ver que $f\mapsto f^*$ dada por $f^*(x) = \overline{f(x)}$ define uma involução. A aplicação $f\mapsto f^*$ dada por $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ também define uma involução.

Seja $\mathcal{A} = C(\mathbb{R},\,\mathbb{C})\oplus C(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ com o produto $(f(x),\ g(x))\cdot(l(x),\ m(x)) = (f(x)l(x),\ g(x)m(x))$.

A aplicação $(f,\ g)\mapsto(f,\ g)^* = (\overline{f},\ \overline{g})$ é uma involução. A aplicação $(f,\ g)\mapsto(f,\ g)^* = (\overline{g},\ \overline{f})$ é também uma involução. A aplicação $(f(x),\ g(x))\mapsto(f(x),\ g(x))^* = (\overline{g(-x)},\ \overline{f(-x)})$ é igualmente uma involução.

E. 40.23 *Exercício*. Verifique! ✣

Seja $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, a álgebra dos operadores limitados agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e seja $d\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $d^2 = \mathbb{1}$ e $d = d^*$, onde d^* é a adjunta usual de d. Então, $\mathcal{A}\ni a\mapsto a^\dagger := d^*a^*d$ define uma involução em $\mathcal{A}$.

E. 40.24 *Exercício*. Verifique! ✣

• **$*$-morfismos entre $*$-álgebras**

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são duas álgebras involutivas (cujas involuções denotamos, por simplicidade, pelo mesmo símbolo $*$), dizemos que uma aplicação $\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ é um $*$*-morfismo* de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ se satisfizer:

1. $\pi(\alpha a+\beta b) = \alpha\pi(a)+\beta\pi(b)$ para todos $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$ e todos $a,\ b\in\mathcal{A}$.
2. $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ para todos $a,\ b\in\mathcal{A}$.
3. $\pi(a^*) = \pi(a)^*$ para todo $a\in\mathcal{A}$.

• **Álgebras associativas normadas**

Uma álgebra associativa $\mathcal{A}$ dotada (enquanto espaço vetorial) de uma norma $\|\cdot\|$ que satisfaça $\|xy\|\leq\|x\|\|y\|$ para todos $x,\ y\in\mathcal{A}$ é dita ser uma *álgebra associativa normada*. Em uma álgebra associativa é fácil constatar-se que vale para todo $n\in\mathbb{N}$ a identidade

$$x^{n+1}-y^{n+1} \;=\; \frac{1}{2}\Big((x^n+y^n)(x-y)+(x^n-y^n)(x+y)\Big)\,. \tag{40.46}$$

Disso obtém-se, para $n\in\mathbb{N}$,

$$x^{n+1}-y^{n+1} \;=\; \frac{1}{2}(x^n+y^n)(x-y)+\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{2^p}(x^{n+1-p}+y^{n+1-p})(x-y)(x+y)^{p-1}+\frac{1}{2^n}(x-y)(x+y)^n\,, \tag{40.47}$$

sendo que se $n=1$ o termo com a somatória é convencionado ser nulo.

De (40.46) é elementar demonstrar-se por indução que em uma álgebra associativa normada vale, também para todo $n\in\mathbb{N}_0$,

$$\big\|x^{n+1}-y^{n+1}\big\| \;\leq\; \big(\|x\|+\|y\|\big)^n\|x-y\|\,. \tag{40.48}$$

E. 40.25 *Exercício*. Prove as afirmações acima! ✣

Sob hipóteses adequadas sobre x e y é possível obter estimativas mais agudas que (40.48). Por exemplo, tem-se

$$\big\|x^{n+1}-y^{n+1}\big\| \;\leq\; (n+1)\|x-y\| \quad\text{se}\quad \|x\|\leq 1 \;\text{ e }\; \|y\|\leq 1\,. \tag{40.49}$$

De fato, como $\|x^k+y^k\|\leq\|x^k\|+\|y^k\|\leq\|x\|^k+\|y\|^k\leq 2$, $k\in\mathbb{N}$, e $\|x+y\|^p\leq(\|x\|+\|y\|)^p\leq 2^p$, $p\in\mathbb{N}$, obtém-se de (40.47)

$$\big\|x^{n+1}-y^{n+1}\big\| \;\leq\; \left[\sum_{q=0}^{n}\frac{\|x+y\|^q}{2^q}\right]\|x-y\| \;\leq\; (n+1)\|x-y\|\,.$$

E. 40.26 *Exercício*. Complete os detalhes. ✣

• **Álgebras de Banach**

Uma *álgebra de Banach* $\mathcal{B}$ é um espaço de Banach, portanto um espaço vetorial normado e completo em relação a essa norma, dotado de um produto associativo para o qual valha $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ para todos $x,\ y \in \mathcal{B}$. Fora isso, se a álgebra possuir uma unidade $\mathbb{1}$, requeremos também que $\|\mathbb{1}\| = 1$. Naturalmente, uma álgebra de Banach é uma álgebra associativa normada e, portanto, lá valem também (40.46) e (40.48).

Veremos facilmente logo adiante que numa álgebra de Banach a condição que $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ para todos $x,\ y \in \mathcal{B}$ conduz à implicação que a operação de produto é contínua na norma.

• **Álgebras de Banach-$*$**

Uma álgebra de Banach $\mathcal{B}$ com involução é dita ser uma *álgebra de Banach-$*$*, ou uma *$*$-álgebra de Banach*, ou ainda uma *álgebra* B*, se a involução e a norma satisfizerem $\|a\| = \|a^*\|$ para todo $a \in \mathcal{B}$.

Note-se que se A é uma álgebra B^* vale $\|a^*a\| \leq \|a^*\|\,\|a\| = \|a\|^2$

Veremos facilmente logo adiante que numa álgebra de Banach-$*$ a condição que $\|a\| = \|a^*\|$ para todo $a \in \mathcal{B}$ conduz à implicação que a operação de involução $*$ é contínua na norma.

• **Álgebras C***

Uma álgebra $\mathcal{C}$ é dita ser uma *álgebra* C* se for uma álgebra de Banach-$*$ com a propriedade adicional que $\|a^*a\| = \|a\|^2$ para todo $a \in \mathcal{C}$. Essa propriedade é denominada *propriedade* C*.

Exemplo 40.2 Em função do Teorema 40.11, página 2197, toda álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma álgebra C* com unidade. ♦

Exemplo 40.3 Mostraremos no Corolário 40.22, página 2297, que o conjunto dos operadores compactos agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é também uma álgebra C*, sem unidade caso $\mathcal{H}$ não tenha dimensão finita. ♦

O estudo de propriedades de álgebras C* é de grande importância para a compreensão da álgebra de operadores limitados em espaços de Hilbert. Adiante teremos a oportunidade de explicitar isso. Também na Física Quântica álgebras C* desempenham um papel fundamental. Vide [203] ou a discussão que segue o Teorema Espectral.

• **Continuidade de operações algébricas em álgebras de Banach**

Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra de Banach e w_n é uma sequência em $\mathcal{B}$ que converge em norma a $w \in \mathcal{B}$, então é elementar provar que para todo $v \in \mathcal{B}$ tem-se $\lim_{n\to\infty}(v + w_n) = v + \lim_{n\to\infty} w_n$. Isso estabelece que a soma é uma operação contínua em $\mathcal{B}$ na topologia induzida pela norma de $\mathcal{B}$. É igualmente fácil provar que a multiplicação por escalares é uma operação contínua em $\mathcal{B}$ na topologia induzida pela norma de $\mathcal{B}$. Provemos também que o produto (à esquerda ou à direita) é contínuo, ou seja, que $\lim_{n\to\infty}(vw_n) = v\lim_{n\to\infty} w_n$. Para tal, observemos que $vw_n = v(w_n - w) + vw$ para todo n. Assim, $\lim_{n\to\infty}(vw_n) - vw = \lim_{n\to\infty} v(w_n - w)$. Agora, $\|v(w_n - w)\| \leq \|v\|\,\|w_n - w\| \to 0$ para $n \to \infty$. Logo, $\lim_{n\to\infty} v(w_n - w) = 0$ e, portanto, $\lim_{n\to\infty}(vw_n) = vw = v\left(\lim_{n\to\infty} w_n\right)$.

Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra de Banach-$*$, então também a involução é contínua na topologia induzida pela norma de $\mathcal{B}$, como é elementar de se provar, pois se w_n é uma sequência em $\mathcal{B}$ que converge em norma a $w \in \mathcal{B}$, então $\|w_n^* - w^*\| = \|(w_n - w)^*\| = \|w_n - w\| \to 0$ para $n \to \infty$. Assim, $\left(\lim_{n\to\infty} w_n\right)^* = \lim_{n\to\infty} w_n^*$, o que estabelece a continuidade da involução.

Para futura referência, reunimos as observações acima na seguinte proposição.

Proposição 40.21 *Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra de Banach com norma $\|\cdot\|$ então as operações de soma, produto por escalares e produto (à esquerda ou à direita) são contínuas na topologia induzida pela norma. Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra de Banach-$*$ então também a involução é contínua na topologia induzida pela norma.* □

O leitor não deve aborrecer-se com a aparente trivialidade das asserções acima: há topologias em álgebras de Banach em relação às quais o produto e a involução não são contínuas! Para tais topologias todo o cuidado é necessário.

40.3.2 Alguns Fatos Estruturais sobre Álgebras C*

Nesta breve seção oferecemos alguns resultados estruturais relevantes sobre álgebras C* que serão usados adiante. O primeiro é a seguinte observação, que motivará uma definição no que segue.

Proposição 40.22 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra* C* *(não necessariamente com unidade). Então,*

$$\|a\| \;=\; \sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|ad\| \;=\; \sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|da\|\,, \tag{40.50}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ □

Prova. No caso em que $a = 0$, (40.50) é trivialmente válida. Assumamos $\|a\| > 0$. Por um lado, como $\|ad\| \leq \|a\|\,\|d\|$, tem-se $\sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|ad\| \leq \|a\|$. Por outro lado, tem-se, naturalmente, $\sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|ad\| \geq \|ad_0\|$ para qualquer d_0 com $\|d_0\| = 1$. Podemos tomar $d_0 = a^*/\|a\|$ e teremos $\sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|ad\| \geq \|aa^*\|/\|a\| = \|a\|$, pela propriedade C*. Isso provou a primeira igualdade em (40.50). A outra igualdade é provada analogamente. ■

Encaremos a C*-álgebra $\mathcal{A}$ (cuja norma, para melhor ilustração, denotaremos por $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$) com um espaço vetorial normado e seja $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ a álgebra normada das aplicações limitadas de $\mathcal{A}$ em si mesmo, com norma definida por

$$\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{A})} \;:=\; \sup_{\substack{b\in\mathcal{A}\\ b\neq 0}} \frac{\|Tb\|_{\mathcal{A}}}{\|b\|_{\mathcal{A}}}\,.$$

Do Teorema 40.2, página 2177, sabemos que $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ é uma álgebra de Banach com unidade.

Definamos as aplicações lineares $L_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e $R_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definidas por

$$L_a b \;=\; ab \qquad \text{e} \qquad R_a b \;=\; ba\,.$$

É claro que $\|L_a b\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}\|b\|_{\mathcal{A}}$ e $\|R_a b\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}\|b\|_{\mathcal{A}}$. Logo, L_a e R_a são operadores limitados (contínuos) de $\mathcal{A}$ em si mesmo, ou seja, $L_a \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ e $R_a \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$. Como tais, suas normas são dadas por

$$\|L_a\|_{\mathcal{B}(\mathcal{A})} \;=\; \sup_{\substack{b\in\mathcal{A}\\ b\neq 0}} \frac{\|L_a b\|_{\mathcal{A}}}{\|b\|_{\mathcal{A}}} \;=\; \sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|ad\| \overset{(40.50)}{=} \|a\| \quad \text{e} \quad \|R_a\|_{\mathcal{B}(\mathcal{A})} \;=\; \sup_{\substack{b\in\mathcal{A}\\ b\neq 0}} \frac{\|R_a b\|_{\mathcal{A}}}{\|b\|_{\mathcal{A}}} \;=\; \sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|da\| \overset{(40.50)}{=} \|a\|\,.$$

É também claro que $\alpha L_a + \beta L_b = L_{\alpha a+\beta b}$, que $\alpha R_a + \beta R_b = R_{\alpha a+\beta b}$, que $L_a L_{a'} = L_{aa'}$ e que $R_a R_{a'} = R_{a'a}$ para todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ e todos $a,\ a',\ b \in \mathcal{A}$. Assim, a aplicação $\mathcal{A} \ni a \mapsto L_a \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ é um homomorfismo isométrico e a aplicação $\mathcal{A} \ni a \mapsto R_a \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ é um anti-homomorfismo isométrico.

40.3.2.1 Álgebras com Involução e a Unidade

Nem toda $*$-álgebra associativa possui uma identidade, um exemplo notório no caso de álgebras C* sendo o das álgebras dos operadores compactos agindo em um espaço de Hilbert de dimensão infinita. Vide Seção 40.8, página 2293 e, em particular, o Corolário 40.22, página 2297.

No entanto, uma $*$-álgebra associativa sempre pode ser tomada como $*$-subálgebra de uma $*$-álgebra associativa com unidade.

Seja $\mathcal{A}$ uma $*$-álgebra associativa. O produto Cartesiano $\mathbb{C} \times \mathcal{A}$ pode ser transformado em uma $*$-álgebra associativa

com unidade com as seguintes operações: para $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{C}$ e $a,\ b \in \mathcal{A}$ definimos

$$\begin{aligned}(\alpha,\ a)+(\beta,\ b) &:= (\alpha+\beta,\ a+b)\,,\\ \gamma(\alpha,\ a) &:= (\gamma\alpha,\ \gamma a)\,,\\ (\alpha,\ a)(\beta,\ b) &:= \big(\alpha\beta,\ \alpha b+\beta a+ab\big)\,,\\ (\alpha,\ a)^* &:= \big(\overline{\alpha},\ a^*\big)\,.\end{aligned}$$

É um exercício simples, e fortemente recomendado ao estudante, demonstrar que produto Cartesiano $\mathbb{C}\times\mathcal{A}$ dotado da estrutura acima é uma $*$-álgebra associativa, a qual denotaremos por $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$.

Há quatro fatos importantes a se notar sobre $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$. Em primeiro lugar, $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$ possui uma unidade, a saber, $\mathbb{1} := (1,\ 0)$. Verifique! Em segundo lugar, do fato que $(0,\ a)(0,\ b) = (0,\ ab)$ e $(0,\ a)^* = (0,\ a^*)$ constatamos que $\mathcal{A}_0 := \big\{(0,\ a),\ a\in\mathcal{A}\big\} \subset \mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$ é uma $*$-subálgebra de $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$. Em terceiro lugar, a aplicação $\mathcal{A}\ni a\mapsto(0,\ a)\in\mathcal{A}_0$ é uma bijeção e, portanto, um $*$-isomorfismo entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_0$ (analogamente, a aplicação $\mathbb{C}\ni\alpha\mapsto(\alpha,\ 0)$ é também um $*$-isomorfismo). Assim, $\mathcal{A}$ pode ser $*$-isomorficamente identificada com uma subálgebra de $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$ (a saber, com $\mathcal{A}_0$) e, nesse sentido, podemos dizer que $\mathcal{A}$ está contida em uma álgebra unital que a "estende". Em quarto lugar, $\mathcal{A}_0$ é um bi-ideal de $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$. De fato, valem para todos $\alpha\in\mathbb{C}$, $a,\ b\in\mathcal{A}$

$$(\alpha,\ a)(0,\ b) \;=\; (0,\ \alpha b+ab) \;\in\; \mathcal{A}_0 \qquad\text{e}\qquad (0,\ b)(\alpha,\ a) \;=\; (0,\ \alpha b+ba) \;\in\; \mathcal{A}_0\,.$$

Para futura referência, resumamos os resultados na seguinte proposição:

Proposição 40.23 *Toda $*$-álgebra associativa $\mathcal{A}$ pode ser $*$-isomorficamente identificada com um bi-ideal de uma $*$-álgebra associativa com unidade, a saber, a álgebra $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$ definida acima.* □

No caso de $\mathcal{A}$ ser uma álgebra C* sem unidade é possível ir mais além e constituir uma norma em $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$ que faça da mesma uma álgebra C*. Esse é o conteúdo do seguinte teorema, o qual afirma que toda álgebra C* sem unidade pode ser $*$-isomorficamente e isometricamente embebida em uma álgebra C* com unidade:

Teorema 40.13 *Se $\mathcal{A}$ for uma álgebra C* sem unidade em relação à norma $\|\cdot\|$, então $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$ é uma álgebra C* (com unidade) com relação à norma*

$$\big\|(\alpha,\ a)\big\| \;:=\; \sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|\alpha d+ad\|\,. \tag{40.51}$$

O conjunto $\mathcal{A}_0 := \{(0,\ a),\ a\in\mathcal{A}\}\subset\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$ é um ideal bilateral (e, portanto, uma subálgebra) de $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$ e a aplicação $\mathcal{A}\ni a\mapsto(0,\ a)\in\mathcal{A}_0$ é $*$-isomorfismo isométrico entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_0$. □

Observação. A definição (40.51) é inspirada na primeira igualdade em (40.50). ♣

Prova do Teorema 40.13. Que $\mathcal{A}_0 := \{(0,\ a),\ a\in\mathcal{A}\}\subset\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$ é um ideal bilateral de $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$ e que a aplicação $\mathcal{A}\ni a\mapsto(0,\ a)\in\mathcal{A}_0$ é $*$-isomorfismo entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_0$ foi estabelecido na discussão que antecede o enunciado do presente teorema (vide definição da $*$-álgebra $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$). Que se trata de uma isometria segue da observação que, segundo (40.51),

$$\|(0,\ a)\| \;=\; \sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|ad\| \;\overset{(40.50)}{=}\; \|a\|\,,$$

desde que tenhamos estabelecido que (40.51) realmente define uma norma em $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$. Passemos a essa tarefa.

É evidente que $\|(\alpha,\ a)\|\geq 0$. Temos também, para $\gamma\in\mathbb{C}$,

$$\big\|\gamma(\alpha,\ a)\big\| \;=\; \big\|(\gamma\alpha,\ \gamma a)\big\| \;=\; \sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|\gamma\alpha d+\gamma ad\| \;=\; |\gamma|\sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|\alpha d+ad\| \;=\; |\gamma|\,\big\|(\alpha,\ a)\big\|\,.$$

Além disso, é válida a desigualdade triangular, pois

$$\begin{aligned}\big\|(\alpha,\ a)+(\beta,\ b)\big\| \;&=\; \big\|(\alpha+\beta,\ a+b)\big\| \;=\; \sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|(\alpha+\beta)d+(a+b)d\| \;\leq\; \sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|\alpha d+ad\|+\|\beta d+bd\|\\ &\leq\; \sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|\alpha d+ad\| + \sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|\beta d+bd\| \;=\; \big\|(\alpha,\ a)\big\|+\big\|(\beta,\ b)\big\|\,.\end{aligned}$$

Notemos também que para a unidade $(1,\ 0)$ de $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$ vale $\|(1,\ 0)\| = \sup\limits_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|1d+0\| = 1$, trivialmente.

Desejamos agora provar que $\|(\alpha,\ a)\| = 0$ se e somente se $(\alpha,\ a) = (0,\ 0)$. Vamos primeiramente supor que $\|(0,\ a)\| = 0$ mas $a\neq 0$. Tem-se $0 = \|(0,\ a)\| = \sup\limits_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|ad\|$. Portanto $0 = \|ad\|$ para todo d com $\|d\| = 1$. Podemos, porém, tomar $d = a^*/\|a^*\|$ e teremos, $0 = \|aa^*\|/\|a^*\| = \|a\|$, uma contradição. Logo, $\|(0,\ a)\| = 0$ implica $a = 0$. Seja agora $\alpha\neq 0$ e escrevamos $(\alpha,\ a) = \alpha(1,\ -a')$, onde $a' := -\alpha^{-1}a$. Vemos que $\|(\alpha,\ a)\| = |\alpha|\,\|(1,\ -a')\|$ e, portanto, $\|(\alpha,\ a)\| = 0$ se e somente se $\|(1,\ -a')\| = 0$. Agora, sabemos que, por definição, $\|(1,\ -a')\|\geq\|d-a'd\|$ para qualquer $d\in\mathcal{A}$ com $\|d\| = 1$. Logo, para tais d's, $\|d-a'd\|\leq\|(1,\ -a')\|$ e se a' é tal que $\|(1,\ -a')\| = 0$ teremos $da' = d$ para todo $d\in\mathcal{A}$ com $\|d\| = 1$. Por multiplicação por um escalar a condição $\|d\| = 1$ pode ser eliminada e temos que $da' = d$ para todo $d\in\mathcal{A}$. Tomando o adjunto, obtemos que $(a')^*d = d$ para todo $d\in\mathcal{A}$. Em particular, tomando $d = a'$, essa relação diz que $a' = (a')^*a'$, que é autoadjunto. Logo $a' = (a')^*$, de onde obtemos, relendo as expressões anteriores, que $da' = d$ e $a'd = d$ para todo $d\in\mathcal{A}$. Isso diz que a' é uma unidade de $\mathcal{A}$. Uma contradição com as hipóteses da proposição. Logo, não podemos ter $\|(1,\ -a')\| = 0$, provando que $\|(\alpha,\ a)\| > 0$ se $\alpha\neq 0$. Isso estabeleceu que $(\alpha,\ a) = 0$ se e somente se $\alpha = 0$ e $a = 0$, estabelecendo que (40.51) define uma norma.

Vamos agora demonstrar a desigualdade para a norma de um produto, ou seja, que $\|(\alpha,\ a)(\beta,\ b)\|\leq\|(\alpha,\ a)\|\,\|(\beta,\ b)\|$ para todos $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$ e $a,\ b\in\mathcal{A}$. Note-se que se $\|(\beta,\ b)\| = 0$, então $(\beta,\ b) = (0,\ 0)$ e não há o que se provar, Assumamos, portanto, que $\|(\beta,\ b)\| > 0$, o que significa dizer que existe ao menos um $d\in\mathcal{A}$ com $\|d\| = 1$ tal que $\|\beta d+bd\| > 0$. Por definição, temos que

$$\|(\alpha,\ a)(\beta,\ b)\| \;=\; \|(\alpha\beta,\ \alpha b+\beta a+ab)\| \;=\; \sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \Big\|\alpha\beta d+(\alpha b+\beta a+ab)d\Big\|\,.$$

Observe-se, agora, que se d é tal que $\|\beta d+bd\| > 0$, podemos escrever

$$\alpha\beta d+(\alpha b+\beta a+ab)d \;=\; \alpha\big(\beta d+bd\big)+a\big(\beta d+bd\big) \;=\; \big(\alpha c+ac\big)\,\|\beta d+bd\|\,,$$

onde $c := \big(\beta d+bd\big)/\|\beta d+bd\|$, para o qual tem-se, evidentemente $\|c\| = 1$. Assim,

$$\Big\|\alpha\beta d+(\alpha b+\beta a+ab)d\Big\| \;=\; \big\|\big(\alpha c+ac\big)\big\|\,\|\beta d+bd\| \;\leq\; \left(\sup_{\substack{c'\in\mathcal{A}\\ \|c'\|=1}} \big\|\big(\alpha c'+ac'\big)\big\|\right)\|\beta d+bd\| \;=\; \|(\alpha,\ a)\|\,\|\beta d+bd\|\,.$$

Logo,

$$\|(\alpha,\ a)(\beta,\ b)\| \;=\; \sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|\alpha\beta d+(\alpha b+\beta a+ab)d\| \;\leq\; \|(\alpha,\ a)\| \sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|\beta d+bd\| \;=\; \|(\alpha,\ a)\|\,\|(\beta,\ b)\|\,,$$

como queríamos provar.

Vamos agora provar a invariância da norma pela adjunção: $\|(\alpha,\ a)^*\| = \|(\alpha,\ a)\|$. Se $\|(\alpha,\ a)\| = 0$, então $(\alpha,\ a) = (0,\ 0)$ e a igualdade que desejamos provar é trivial. Assumamos, então, que $\|(\alpha,\ a)\| > 0$. Temos que $\|(\alpha,\ a)\|^2 = \sup\limits_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|\alpha d+ad\|^2$. Agora, pela propriedade C* da norma de $\mathcal{A}$, tem-se

$$\begin{aligned}\|\alpha d+ad\|^2 \;&=\; \|(\alpha d+ad)^*(\alpha d+ad)\| \;=\; \big\|d^*(|\alpha|^2d+\overline{\alpha}ad+\alpha a^*d+a^*ad)\big\|\\ &\leq\; \|d^*\|\,\big\||\alpha|^2d+\overline{\alpha}ad+\alpha a^*d+a^*ad\big\| \;=\; \big\||\alpha|^2d+\overline{\alpha}ad+\alpha a^*d+a^*ad\big\|\,,\end{aligned}$$

pois $\|d^*\| = \|d\| = 1$. Assim,

$$\|(\alpha,\ a)\|^2 \ \leq\ \sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \left\||\alpha|^2 d + \overline{\alpha}ad + \alpha a^* d + a^* ad\right\| . \tag{40.52}$$

Porém, $(\alpha,\ a)^*(\alpha,\ a) = (\overline{\alpha},\ a^*)(\alpha,\ a) = (|\alpha|^2,\ \overline{\alpha}a + \alpha a^* + a^* a)$ e reconhecemos que o lado direito de (40.52) é $\|(\alpha,\ a)^*(\alpha,\ a)\|$, provando que $\|(\alpha,\ a)\|^2 \leq \|(\alpha,\ a)^*(\alpha,\ a)\|$. Agora, pela desigualdade da norma de um produto, $\|(\alpha,\ a)^*(\alpha,\ a)\| \leq \|(\alpha,\ a)^*\|\,\|(\alpha,\ a)\|$. Logo, $\|(\alpha,\ a)\|^2 \leq \|(\alpha,\ a)^*\|\,\|(\alpha,\ a)\|$, implicando que $\|(\alpha,\ a)\| \leq \|(\alpha,\ a)^*\|$. Trocando-se $(\alpha,\ a)$ por $(\alpha,\ a)^*$ obtemos a desigualdade oposta, estabelecendo que $\|(\alpha,\ a)^*\| = \|(\alpha,\ a)\|$.

Vamos agora estabelecer a propriedade C*: $\|(\alpha,\ a)^*(\alpha,\ a)\| = \|(\alpha,\ a)\|^2$. Já vimos que $\|(\alpha,\ a)\|^2 \leq \|(\alpha,\ a)^*(\alpha,\ a)\|$. No entanto, pela desigualdade da norma de um produto e pela invariância da norma por adjunção, estabelecidas logo acima, temos também $\|(\alpha,\ a)^*(\alpha,\ a)\| \leq \|(\alpha,\ a)^*\|\,\|(\alpha,\ a)\| = \|(\alpha,\ a)\|^2$, estabelecendo a propriedade C*: $\|(\alpha,\ a)^*(\alpha,\ a)\| = \|(\alpha,\ a)\|^2$.

A última coisa que resta demonstrar é que $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$ é completa na norma acima[18]. Observemos, em primeiro lugar, que $\|(0,\ b)\| = \sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|bd\| \overset{(40.50)}{=} \|b\|$. Logo, uma sequência $(0,\ b_j)$, $j\in\mathbb{N}$, é de Cauchy na norma de $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$ se e somente se b_j, $j\in\mathbb{N}$, for uma sequência de Cauchy em $\mathcal{A}$. Em tal caso, como $\mathcal{A}$ é completo, a sequência b_j terá um ponto limite $b\in\mathcal{A}$ e é evidente que $\lim_{j\to\infty}(0,\ b_j) = (0,\ b)$.

Seja $(\alpha_j,\ a_j)$, $j\in\mathbb{N}$, uma sequência de Cauchy na norma de $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ tal que $\|(\alpha_j,\ a_j) - (\alpha_l,\ a_l)\| = \|(\alpha_j - \alpha_l,\ a_j - a_l)\| < \epsilon$ sempre que j e l forem maiores que $N(\epsilon)$. Como toda sequência de Cauchy é limitada, existe $M > 0$ tal que $\|(\alpha_j,\ a_j)\| \leq M$ para todo $j\in\mathbb{N}$.

Afirmamos que a sequência de números complexos α_j, $j\in\mathbb{N}$, é limitada. Se assim não fosse haveria uma subsequência divergente α_{j_k}, $k\in\mathbb{N}$, e podemos assumir sem perda de generalidade que todos os α_{j_k} são não-nulos. Seja, então a sequência em $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$ definida por

$$\left(1,\ \frac{1}{\alpha_{j_k}}a_{j_k}\right) \ =\ \frac{1}{\alpha_{j_k}}(\alpha_{j_k},\ a_{j_k}) .$$

Teremos $\left\|(1,\ \frac{1}{\alpha_{j_k}}a_{j_k})\right\| = \frac{1}{|\alpha_{j_k}|}\|(\alpha_{j_k},\ a_{j_k})\| < \frac{M}{|\alpha_{j_k}|}$, o que nos leva à conclusão que $\lim_{k\to\infty}(1,\ \frac{1}{\alpha_{j_k}}a_{j_k}) = (0,\ 0)$, ou seja, que $\lim_{k\to\infty}(0,\ -\frac{1}{\alpha_{j_k}}a_{j_k}) = (1,\ 0)$, absurdo.

Assim, a sequência numérica α_j, $j\in\mathbb{N}$, é limitada e, portanto, possui uma subsequência α_{j_l}, $l\in\mathbb{N}$, convergente a $\alpha\in\mathbb{C}$, sendo, portanto, uma sequência de Cauchy. Escrevamos,

$$(0,\ a_{j_l}) \ =\ (\alpha_{j_l},\ a_{j_l}) - (\alpha_{j_l},\ 0)$$

e teremos

$$\|(0,\ a_{j_l}) - (0,\ a_{j_m})\| \ \leq\ \|(\alpha_{j_l},\ a_{j_l}) - (\alpha_{j_m},\ a_{j_m})\| + \|(\alpha_{j_l},\ 0) - (\alpha_{j_m},\ 0)\| \ \leq\ \epsilon + |\alpha_{j_l} - \alpha_{j_l}| \ \leq\ 2\epsilon ,$$

para todos l e m grandes o suficiente. Estabelecemos, portanto, que $(0,\ a_{j_l})$ é uma sequência de Cauchy na norma de $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$ e, pelas considerações anteriores, a_{j_l}, $l\in\mathbb{N}$, converge em $\mathcal{A}$ a um elemento que denotaremos por a. Resta provar que $(\alpha_j,\ a_j)$, $j\in\mathbb{N}$, converge na norma de $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$ a $(\alpha,\ a)$. Isso segue da observação que

$$\|(\alpha_j,\ a_j) - (\alpha,\ a)\| \ =\ \sup_{\substack{d\in\mathcal{A}\\ \|d\|=1}} \|(\alpha_j - \alpha)d + (a_j - a)d\| \ \leq\ |\alpha_j - \alpha| + \|a_j - a\| ,$$

sendo que usamos o fato que $\|(\alpha_j - \alpha)d + (a_j - a)d\| \leq |\alpha_j - \alpha|\,\|d\| + \|a_j - a\|\,\|d\| = |\alpha_j - \alpha| + \|a_j - a\|$ consequência da desigualdade triangular e da desigualdade na norma de um produto. Como vimos, o lado direito vai a zero em uma subsequência e, como, $(\alpha_j,\ a_j)$, $j\in\mathbb{N}$, uma sequência de Cauchy na norma de $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$, concluímos que $\lim_{j\in\mathbb{N}}(\alpha_j,\ a_j) = (\alpha,\ a)$, estabelecendo a completeza de $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$. ■

E. 40.27 *Exercício.* Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C* sem unidade e, para cada $(\alpha,\ a)\in\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$, seja $T_{(\alpha,\ a)}$ a aplicação linear de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$ definida por

$$T_{(\alpha,\ a)}b \ :=\ \alpha b + ab ,$$

[18] Nesse ponto, seguimos a referência [374] com adaptações. Lamentavelmente, diversos outros textos como [77], [367], [117], [25], e mesmo clássicos como [127], apresentam demonstrações que consideramos incompletas desse ponto fundamental.

para todo $b\in\mathcal{A}$. Mostre que $T_{(\alpha,\ a)} + T_{(\beta,\ b)} = T_{(\alpha,\ a)+(\beta,\ b)}$, que $T_{(\alpha,\ a)}T_{(\beta,\ b)} = T_{(\alpha,\ a)(\beta,\ b)}$, que $T^*_{(\alpha,\ a)} = T_{(\alpha,\ a)^*}$ e que $T_{(\alpha,\ a)}\in\mathcal{B}(\mathcal{A})$, com

$$\left\|T_{(\alpha,\ a)}\right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{A})} \ =\ \|(\alpha,\ a)\| .$$

Estabeleça que $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}\ni(\alpha,\ a)\mapsto T_{(\alpha,\ a)}\in\mathcal{B}(\mathcal{A})$ é um $*$-morfismo isométrico. Usando a completeza de $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$ estabeleça que a imagem dessa aplicação em é um subespaço fechado de $\mathcal{B}(\mathcal{A})$. Alguns autores adotam as propriedades acima como definidora da álgebra $\mathbb{C}\ltimes\mathcal{A}$. ✣

40.3.3 A Inversa de Operadores Limitados

No intuito de preparar a futura discussão sobre o noção de espectro de operadores em espaços de Banach (Seção 40.6, página 2276), façamos aqui alguns comentários relativos à noção de inversa de operadores em espaços vetoriais e, em particular, em espaços de Banach.

• **Recordando alguns fatos gerais e um pouco de notação**

Se $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são espaços vetoriais e $A:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ é uma aplicação linear, definimos

$$\mathrm{Ker}\,(A) \ :=\ \{v\in\mathcal{V}|\ \ Av\ =\ 0\}\ ,$$

$$\mathrm{Ran}\,(A) \ :=\ \{w\in\mathcal{W}|\ \ w\ =\ Av \text{ para algum } v\in\mathcal{V}\}\ .$$

$\mathrm{Ker}\,(A)$ é denominado *núcleo de* A e $\mathrm{Ran}\,(A)$ é denominado a *imagem* ou *alcance* (= "range") de A. Dizemos que A possui um *núcleo trivial* se $\mathrm{Ker}\,(A) = \{0\}$. Não custa lembrar também que se $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são espaços vetoriais e $A:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ é uma aplicação linear então A é injetora se e somente se $\mathrm{Ker}\,(A) = \{0\}$ e A é sobrejetora se e somente se $\mathrm{Ran}\,(A) = \mathcal{W}$. Logo, A é bijetora se e somente se $\mathrm{Ker}\,(A) = \{0\}$ e $\mathrm{Ran}\,(A) = \mathcal{W}$. Caso A seja bijetora denotaremos, como sempre, por $A^{-1}:\mathcal{W}\to\mathcal{V}$ a aplicação inversa de A. É elementar mostrar que A^{-1} é também linear.

A seguinte proposição elementar é importante e será implicitamente empregada no que segue.

Proposição 40.24 *Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e seja $A:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ uma aplicação linear. Então, A é bijetora se e somente se existir uma aplicação linear $B:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ tal que $AB = \mathbb{1}$ e $BA = \mathbb{1}$. Se uma tal B existir, será única.*

Prova. Se A é bijetora a aplicação inversa A^{-1} faz o serviço desejado. Suponhamos agora que exista B como acima. Se A não é injetora, então existem $x,\ y\in\mathcal{V}$ distintos com $Ax = Ay$. Aplicando B à esquerda e usando $BA = \mathbb{1}$, concluímos que $x = y$, uma contradição. Se A não é sobrejetora, existe $x\in\mathcal{V}$ tal que $Ay - x\neq 0$ para todo $y\in\mathcal{V}$. Se assim é, tomemos $y = Bx$. Concluiríamos de $AB = \mathbb{1}$ que $0\neq ABx - x = x - x$, um absurdo. A unicidade de B segue da observação que se $B':\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ for também tal que $AB' = \mathbb{1}$ e $B'A = \mathbb{1}$, então aplicando B à esquerda na primeira relação e usando a associatividade teremos $B = B(AB') = (BA)B' = \mathbb{1}B' = B'$. ■

Um comentário pertinente à Proposição 40.24 é o seguinte. No espaço vetorial de dimensão finita $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$, a relação $AB = \mathbb{1}$ implica $BA = \mathbb{1}$ (A e B sendo aqui elementos de $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$). Em espaços de dimensão infinita, porém, isso não é sempre verdade e é preciso requerer tanto $AB = \mathbb{1}$ quanto $BA = \mathbb{1}$ da inversa de A. Como exemplo, considere-se o espaço vetorial $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ de todas as sequências de números complexos (vide Seção 24.5.1, página 1336). Defina-se $A:\mathfrak{S}(\mathbb{C})\to\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ e $B:\mathfrak{S}(\mathbb{C})\to\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ por

$$A(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots) \ =\ (0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots) ,$$

$$B(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots) \ =\ (a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ \ldots) .$$

Então,

$$BA(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots) \ =\ (a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots) ,$$

$$AB(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots) \ =\ (0,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots) ,$$

provando que $BA = \mathbb{1}$ mas $AB\neq\mathbb{1}$.

• **Fatos gerais sobre a inversa de operadores em $\mathcal{B}(\mathcal{X})$**

Vamos analisar as várias situações que podem ocorrer com operadores limitados agindo em um espaço de Banach $\mathcal{X}$ no que concerne a sua invertibilidade ou não invertibilidade. Naturalmente, um operador limitado $V \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ agindo em um espaço de Banach $\mathcal{X}$ pode ser bijetor ou não e, se não o for, vários subcasos são possíveis. Temos o seguinte quadro:

1. V é bijetor.
   Se $V \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ é um operador limitado e é bijetor então, pelo Teorema da Aplicação Inversa, Teorema 40.8, página 2193, V^{-1} é igualmente um elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.
2. V não é bijetor.
   Se $V \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ não é bijetor, então ou V não é injetor ou não é sobrejetor (ou ambos).
   (a) *V não é injetor.*
   Se V não é injetor, então $\operatorname{Ker}(V)$, possui pelo menos um vetor não-nulo e V^{-1} não existe enquanto operador agindo em $\operatorname{Ran}(V)$.
   (b) *V não é sobrejetor mas é injetor.*
   Se V não é sobrejetor, podem ocorrer duas coisas: ou $\operatorname{Ran}(V)$ é denso em $\mathcal{X}$ ou não é.
      i. $\operatorname{Ran}(V)$ *é denso em* $\mathcal{X}$.
      Se $\operatorname{Ran}(V)$ é denso em $\mathcal{X}$ e V é injetor, então $V : \mathcal{X} \to \operatorname{Ran}(V)$ é bijetor e, portanto, possui uma inversa $V^{-1} : \operatorname{Ran}(V) \to \mathcal{X}$. Essa inversa, porém, não pode ser limitada, como mostra o seguinte argumento. Se o fosse, V^{-1} poderia ser estendido (pelo Teorema BLT, Teorema 40.1, página 2175) por um operador limitado ao fecho de $\operatorname{Ran}(V)$, que é $\mathcal{X}$, por hipótese. Denotemos por W essa extensão. Como a imagem dessa extensão e a de V^{-1} são todo $\mathcal{X}$, essa extensão não pode ser injetora e, portanto, não é a inversa de um operador. Ocorre, porém, que pela definição de W dada pelo Teorema BLT, vale para todo $x \in \mathcal{X}$ que $Wx = \lim\limits_{\substack{y\to x \\ y\in\operatorname{Ran}(V)}} V^{-1}y$. Assim, como V é contínuo,
      $$VWx \,=\, V \lim_{\substack{y\to x \\ y\in\operatorname{Ran}(V)}} V^{-1}y \,=\, \lim_{\substack{y\to x \\ y\in\operatorname{Ran}(V)}} VV^{-1}y \,=\, \lim_{\substack{y\to x \\ y\in\operatorname{Ran}(V)}} y \,=\, x\,.$$
      Além disso, como W estende V^{-1}, a qual é definida em $\operatorname{Ran}(V)$, tem-se igualmente $WVx = V^{-1}Vx = x$ para todo $x \in \mathcal{X}$. Isso diz-nos que V é a inversa de W em todo $\mathcal{X}$, uma contradição.
      Assim, se $\operatorname{Ran}(V)$ é denso em $\mathcal{X}$ e V é injetor então $V^{-1} : \operatorname{Ran}(V) \to \mathcal{X}$ existe mas não é limitada.
      ii. $\operatorname{Ran}(V)$ *não é denso em* $\mathcal{X}$.
      Resta ainda o caso em que $\operatorname{Ran}(V)$ não é denso em $\mathcal{X}$. Aqui, podemos ter V injetora ou não. Se V não for injetora, então V possui núcleo não-trivial e V^{-1} não pode ser definida em $\operatorname{Ran}(V)$. Se V for injetora, então V não possui um autovetor não-nulo com autovalor 0 e V^{-1} pode ser definida em $\operatorname{Ran}(V)$.
   (c) *V não é sobrejetor nem injetor.*
   Aqui estamos de volta ao caso 2a e V^{-1} não existe em $\operatorname{Ran}(V)$.

Resumindo, temos as seguintes conclusões:

Teorema 40.14 *Se $V \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ é um operador limitado agindo em um espaço de Banach $\mathcal{X}$, tem-se as seguintes situações mutuamente excludentes:*

1. *V é bijetor e V^{-1} existe em todo $\mathcal{X}$ e é limitado.*
2. *V não é bijetor, e tem-se os seguintes subcasos:*
   (a) V não é injetor, $\operatorname{Ker}(V)$ é não-trivial e V^{-1} não pode ser definida em $\operatorname{Ran}(V)$.
   (b) V é injetor e não é sobrejetor, $\operatorname{Ran}(V)$ é denso em $\mathcal{X}$ e $\operatorname{Ker}(V) = \{0\}$, sendo que $V^{-1} : \operatorname{Ran}(V) \to \mathcal{X}$ existe mas não é limitada.
   (c) V é injetor e não é sobrejetor, $\operatorname{Ran}(V)$ não é denso em $\mathcal{X}$ e $\operatorname{Ker}(V) = \{0\}$, sendo que $V^{-1} : \operatorname{Ran}(V) \to \mathcal{X}$ existe, podendo ser limitada ou não. □

A proposição seguinte é também relevante e será empregada, por exemplo, quando da discussão sobre o espectro de operadores autoadjuntos em espaços de Hilbert.

Proposição 40.25 *Se $V \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ é um operador limitado agindo em um espaço de Banach $\mathcal{X}$ tal que $V^{-1} : \operatorname{Ran}(V) \to \mathcal{X}$ existe e é limitada, então $\operatorname{Ran}(V)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{X}$.* □

Prova. Seja $y_n = Vx_n$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência em $\operatorname{Ran}(V)$ que converge a $y \in \mathcal{X}$. Temos que $x_n = V^{-1}y_n$. Assim, $\|x_n - x_m\| \leq \|V^{-1}\|\,\|y_n - y_m\|$. Como y_n é uma sequência convergente, é de Cauchy e, pela última desigualdade, x_n também o é. Seja $x \in \mathcal{X}$ o limite da sequência x_n. Temos que $y - Vx = y - y_n + Vx_n - Vx$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $\|y - Vx\| \leq \|y - y_n\| + \|V\|\,\|x_n - x\|$. Agora, tomando $n \to \infty$ e lembrando que $y_n \to y$ e $x_n \to x$, concluímos que $\|y - Vx\| = 0$, ou seja, $y = Vx$, o que prova que $y \in \operatorname{Ran}(V)$. Isso demonstra que $\operatorname{Ran}(V)$ é fechado. ■

A Proposição 40.25 diz-nos que no item 2c do Teorema 40.14, $\operatorname{Ran}(V)$ será um subespaço fechado próprio de $\mathcal{X}$ caso V^{-1} seja limitada.

• **A inversa em álgebras de Banach**

Vários resultados gerais sobre a inversa de operadores podem ser estabelecidos no contexto geral de álgebras de Banach com unidade, para então particularizarem-se para álgebras como $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ ou $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, que são de álgebras Banach de operadores, com unidade, agindo em espaços de Banach ou de Hilbert. Nas páginas que seguem trataremos dessa análise geral para depois estudarmos aqueles casos particulares.

Seja doravante $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade. Um elemento $w \in \mathcal{B}$ é dito ser inversível se existir $v \in \mathcal{B}$ tal que $vw = wv = \mathbb{1}$. Se um tal v existe ele é único, como mostra o seguinte argumento elementar: se v' também satisfaz $\mathbb{1} = v'w = wv'$, então, multiplicando-se à direita por v e usando-se a associatividade, teremos $v = (v'w)v = v'(wv) = v'\mathbb{1} = v'$. Se v satisfaz $vw = wv = \mathbb{1}$, é dito ser a *inversa* ou *elemento inverso* de w e é denotado por w^{-1}.

Nunca é demais enfatizar ao estudante que, na definição de inversa acima, ambas as condições $vw = \mathbb{1}$ e $wv = \mathbb{1}$ são necessárias. Tenha-se e mente o exemplo dos operadores de *shift* do Exemplo 40.1, página 2203. Temos $S^*S = \mathbb{1}$, mas $SS^* \neq \mathbb{1}$, pois é o projetor ortogonal sobre o subespaço $\big\{(0,\ a_2,\ \ a_3,\ a_4,\ \ldots),\ a_k \in \mathbb{C},\ k \geq 2,\ \sum_{k=2}^{\infty} |a_k|^2 < \infty\big\}$. Os operadores de *shift* S e S^* não possuem inversa.

Um outro fato elementar a ser observado é que se u e v são elementos da álgebra de Banach unital $\mathcal{B}$ que tenham inversas u^{-1} e v^{-1}, respectivamente, então o produto uv também possui inversa, a saber, o elemento $v^{-1}u^{-1}$ de $\mathcal{B}$. Isso é uma consequência trivial dos fatos que $(uv)v^{-1}u^{-1} = \mathbb{1}$ e que $v^{-1}u^{-1}(uv) = \mathbb{1}$, pela associatividade do produto.

Se $\mathcal{B}$ for uma $*$-álgebra de Banach com unidade e $w \in \mathcal{B}$ é inversível então, $w^{-1}w = ww^{-1} = \mathbb{1}$ implica, tomando-se o adjunto, $w^*\left(w^{-1}\right)^* = \left(w^{-1}\right)^* w^* = \mathbb{1}$, o que significa que w^* é também inversível e vale

$$\left(w^*\right)^{-1} \,=\, \left(w^{-1}\right)^*\,. \tag{40.53}$$

Pela Proposição 40.24, acima, no caso da álgebra de Banach-$*$ $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, dos operadores lineares contínuos agindo em um espaço de Banach $\mathcal{X}$, a noção de invertibilidade acima coincide com a usual.

Vamos designar por $\operatorname{Inv}(\mathcal{B})$ o conjunto dos elementos inversíveis de uma álgebra de Banach com unidade $\mathcal{B}$. É bastante evidente que $\operatorname{Inv}(\mathcal{B})$ é um grupo com relação à operação de produto em $\mathcal{B}$. Em verdade, trata-se de um grupo contínuo como mostraremos mais adiante.

Na teoria de operadores é muito importante conhecer condições suficientes que garantam a invertibilidade de operadores. No contexto de álgebras de Banach com unidade a seguinte proposição é fundamental.

Proposição 40.26 *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade. Então, para todo $w \in \mathcal{B}$ com $\|w\| < 1$ existe $(\mathbb{1}-w)^{-1} \in \mathcal{B}$ e é dado por*

$$(\mathbb{1} - w)^{-1} \,=\, \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} w^k\,, \tag{40.54}$$

sendo que a série ao lado direito converge na norma de $\mathcal{B}$. A série em (40.54) é denominada série de Neumann[19]. □

[19] Carl Neumann (1832–1925).

Prova. Provemos primeiramente que a série de Neumann converge. Se $s_n := \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{n} w^k$, então, para $m < n$ vale $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} w^k$. Logo,

$$\|s_n - s_m\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|w^k\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|w\|^k = \|w\|^{m+1} \sum_{k=0}^{n-m-1} \|w\|^k \leq \|w\|^{m+1} \sum_{k=0}^{\infty} \|w\|^k = \frac{\|w\|^{m+1}}{1-\|w\|} .$$

A série numérica $\sum_{k=0}^{\infty} \|w\|^k$ converge a $\frac{1}{1-\|w\|}$ pois $\|w\| < 1$. Por essa mesma razão, é claro que $\|w\|^{m+1}$ pode ser feito menor que qualquer $\epsilon > 0$ prescrito, desde que m seja grande o suficiente. Isso provou que s_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy na norma de $\mathcal{B}$ e, portanto, converge. Seja, $v \in \mathcal{B}$ o seu limite. Teremos

$$wv = w + w\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} w^k\right) = w + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} w^{k+1} = w + \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} w^k + w^{n+1} - w\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} w^{n+1} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} w^k = v - \mathbb{1} ,$$

onde acima usamos a continuidade do produto em $\mathcal{B}$ (Proposição 40.21, página 2210) e o fato que $\lim_{n\to\infty} w^{n+1} = 0$, pois $\|w^{n+1}\| \leq \|w\|^{n+1} \to 0$ para $n \to \infty$, pois $\|w\| < 1$. Logo, $(\mathbb{1} - w)v = v - (v - \mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Analogamente,

$$vw = w + \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} w^k\right) w = w + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} w^{k+1} = w + \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} w^k + w^{n+1} - w\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} w^{n+1} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} w^k = v - \mathbb{1} ,$$

e concluímos que $v(\mathbb{1} - w) = v - (v - \mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Isso completa a demonstração. ■

O seguinte fato será utilizado adiante:

Proposição 40.27 *Se $\mathcal{B}$ é álgebra de Banach com unidade e u, $v \in \mathcal{B}$, então $\mathbb{1} - uv \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ se e somente se $\mathbb{1} - vu \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$.* □

Prova. Se $\mathbb{1} - uv \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ e $w = (\mathbb{1} - uv)^{-1}$, é elementar constatar que $(\mathbb{1} - vu)(\mathbb{1} + vwu) = \mathbb{1} = (\mathbb{1} + vwu)(\mathbb{1} - vu)$, pois

$$(\mathbb{1} - vu)(\mathbb{1} + vwu) = \mathbb{1} - vu + vwu - vuvwu = \mathbb{1} - vu + v\underbrace{(\mathbb{1} - uv)w}_{=\mathbb{1}}u = \mathbb{1} - vu + vu = \mathbb{1} ,$$

$$(\mathbb{1} + vwu)(\mathbb{1} - vu) = \mathbb{1} - vu + vwu - vwuvu = \mathbb{1} - vu + v\underbrace{w(\mathbb{1} - uv)}_{=\mathbb{1}}u = \mathbb{1} - vu + vu = \mathbb{1} ,$$

o que mostra que $\mathbb{1} - vu \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ com $(\mathbb{1} - vu)^{-1} = (\mathbb{1} + vwu)$. A recíproca é evidente efetuando-se a troca de u por v. ■

• **Propriedades topológicas do grupo dos operadores inversíveis**

A Proposição 40.26 tem um corolário que usaremos oportunamente, o qual afirma que elementos de uma álgebra de Banach que estejam suficientemente próximos de um elemento inversível são também inversíveis.

Corolário 40.5 *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade e seja w um elemento inversível de $\mathcal{B}$. Suponhamos que $v \in \mathcal{B}$ seja tal que $\|\mathbb{1} - vw^{-1}\| < 1$, o que ocorre, por exemplo, se $\|v - w\| < \|w^{-1}\|^{-1}$. Então, v é inversível e*

$$v^{-1} = w^{-1}\left(\mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathbb{1} - vw^{-1}\right)^k\right) ,$$

sendo a série do lado direito convergente na norma de $\mathcal{B}$. □

Prova. Tem-se $v = v - w + w = (\mathbb{1} - (w - v)w^{-1})w$. Pela Proposição 40.26, $\mathbb{1} - (w - v)w^{-1}$ será inversível se $\|(w - v)w^{-1}\| < 1$. Como $\|(w - v)w^{-1}\| \leq \|w - v\|\,\|w^{-1}\|$, isso será satisfeito se $\|v - w\| < \|w^{-1}\|^{-1}$. Teremos então, novamente pela Proposição 40.26,

$$v^{-1} = w^{-1}\big(\mathbb{1} - (w - v)w^{-1}\big)^{-1} = w^{-1}\left(\mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[(w - v)w^{-1}\big]^k\right) = w^{-1}\left(\mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\mathbb{1} - vw^{-1}\big)^k\right) .$$

■

Disso é imediato o seguinte fato:

Corolário 40.6 *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade. Então, o grupo $\mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ dos elementos inversíveis de $\mathcal{B}$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{B}$.* □

Para estabelecermos que $\mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ é também um grupo contínuo usaremos o fato descrito na proposição seguinte.

Proposição 40.28 *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade. Então, a aplicação que a cada $w \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ associa sua inversa w^{-1} é contínua na topologia da norma de $\mathcal{B}$.* □

Prova. Seja $v \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ fixado e tomemos $u \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ tal que $\|u - v\| \leq \epsilon$ com $\epsilon > 0$ escolhido pequeno o suficiente de modo que $\epsilon\|v^{-1}\| < 1$. Que tal é possível garante-nos o Corolário 40.6. É claro que $u = v + (u - v) = v(\mathbb{1} + v^{-1}(u - v))$, de maneira que $u^{-1} = \big[\mathbb{1} + v^{-1}(u - v)\big]^{-1} v^{-1}$. Logo,

$$u^{-1} - v^{-1} = \Big\{\big[\mathbb{1} + v^{-1}(u - v)\big]^{-1} - \mathbb{1}\Big\} v^{-1}.$$

Assim, como pela escolha de ϵ temos $\|v^{-1}(u - v)\| \leq \epsilon\|v^{-1}\| < 1$, podemos por (40.54) escrever

$$u^{-1} - v^{-1} = \left[\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \big[v^{-1}(u - v)\big]^m\right] v^{-1}.$$

Tem-se, então,

$$\|u^{-1} - v^{-1}\| \leq \left[\sum_{m=1}^{\infty} \|v^{-1}\|^m \,\|u - v\|^m\right] \|v^{-1}\| \leq \left[\sum_{m=1}^{\infty} \Big(\epsilon\|v^{-1}\|\Big)^m\right] \|v^{-1}\| = \frac{\epsilon\|v^{-1}\|^2}{1 - \epsilon\|v^{-1}\|} .$$

Portanto, $\|u^{-1} - v^{-1}\| \to 0$ quando $\|u - v\| \to 0$, provando a continuidade da operação de inversão. ■

Das Proposições 40.28 e 40.21 concluímos:

Proposição 40.29 *Se $\mathcal{B}$ é álgebra de Banach com unidade então $\mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ é um grupo contínuo na topologia induzida em $\mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ pela norma de $\mathcal{B}$.* □

40.3.4 O Espectro de Operadores em Álgebras de Banach

Na presente seção apresentaremos a noção de espectro de operadores em álgebras de Banach. Todos os desenvolvimentos que seguem terão importância para as seções posteriores. Façamos notar o leitor que alguns dos resultados que apresentaremos são gerais, sendo válidos em quaisquer álgebras de Banach, outros são específicos de álgebras C*. A presente seção é introdutória ao estudo do espectro de operadores agindo em espaços de Banach e de Hilbert que empreenderemos na Seção 40.6, página 2276.

• **A noção de espectro de operadores em álgebras de Banach**

Se $\mathcal{B}$ é álgebra de Banach com unidade e $u \in \mathcal{B}$, denotamos por $\rho(u)$ o chamado *conjunto resolvente* de u, definido por $\rho(u) := \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \lambda\mathbb{1} - u \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})\}$. O chamado *espectro* de u, denotado por $\sigma(u)$, é definido por

$$\sigma(u) \ := \ \Big\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \ \lambda\mathbb{1} - u \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{B})\Big\}\,,$$

ou seja, $\sigma(u) = \mathbb{C} \setminus \rho(u)$.

• **Fatos básicos sobre o espectro de operadores em álgebras de Banach e Banach-$*$**

Uma consequência imediata da Proposição 40.27 é o seguinte:

Proposição 40.30 *Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra de Banach com unidade e u, $v \in \mathcal{B}$, então $\sigma(uv) \setminus \{0\} = \sigma(vu) \setminus \{0\}$, ou seja, o espectro de uv pode diferir do de vu apenas no conjunto $\{0\}$.* □

Comentários. Vale observar que por motivos puramente conjuntivistas tem-se $\sigma(uv)\setminus\{0\} = \sigma(vu)\setminus\{0\}$ se e somente se $\sigma(uv)\cup\{0\} = \sigma(vu)\cup\{0\}$ (vide Exercício E. 1.2, página 58), forma na qual essa proposição é por vezes apresentada.

A Proposição 40.30 é verdadeira em qualquer álgebra associativa com unidade. A demonstração dessa afirmação é apresentada no Exercício E. 40.52, página 2358. ♣

Prova da Proposição 40.30. Se $\lambda \neq 0$, então $(\lambda\mathbb{1} - uv) = \lambda(\mathbb{1} - \lambda^{-1}uv)$, que pela Proposição 40.27, página 2218, é inversível se e somente se $\lambda(\mathbb{1} - \lambda^{-1}vu)$ o for. ■

O estudante poderá interessar-se em comparar a afirmação da Proposição 40.30 com a da Proposição 10.7, página 520, válida para as álgebras de matrizes quadradas $\mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$ (que também são álgebras de Banach com unidade). Como se constata daquela proposição, vale em $\mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$ o resultado mais forte que $\sigma(uv) = \sigma(vu)$. Isso é compreensível, pois se u e v são elementos de $\mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$, então uv tem um autovalor nulo se e somente se $\det(uv) = 0$ (lembrar a definição de polinômio característico de uma matriz oferecida na Seção 10.2.1, página 518). Como $\det(uv) = \det(vu)$, concluímos que uv tem autovalor nulo se o somente se vu o tiver. Essa argumentação é específica das álgebras $\mathrm{Mat}(\mathbb{C},\ n)$ e não pode ser implementada em álgebras de Banach com unidade gerais se noções como a de determinantes e polinômios característicos não estiverem presentes. Vale comparar também o que ocorre no caso de matrizes não quadradas. Vide Exercício E. 10.6, página 520.

Para álgebras de dimensão infinita a igualdade $\sigma(uv) = \sigma(vu)$ pode não ser sempre válida, um exemplo sendo dado pelos operadores de *shift* do Exemplo 40.1, página 2203. Temos $S^*S = \mathbb{1}$, mas SS^* é o projetor ortogonal sobre o subespaço $\big\{(0,\ a_2,\ \ a_3,\ a_4,\ \ldots),\ a_k \in \mathbb{C},\ k \geq 2,\ \sum_{k=2}^{\infty}|a_k|^2 < \infty\big\}$. Assim, $\sigma(S^*S) = \{1\}$, mas $\sigma(SS^*) = \{0,\ 1\}$ (vide Proposição 40.39, página 2225, sobre o espectro de projetores). A propósito, verifica-se aqui também que $\sigma(S^*S) \setminus \{0\} = \sigma(SS^*) \setminus \{0\}$, exemplificando a Proposição 40.30, página 2220.

Como veremos no Corolário 40.8, página 2221, caso u ou v possuam inversa, então $\sigma(uv) = \sigma(vu)$.

Uma consequência imediata da Proposição 40.30 é o seguinte corolário, o qual revela uma propriedade de invariância do espectro.

Corolário 40.7 *Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra de Banach com unidade e u, $v \in \mathcal{B}$ com $u \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$, então $\sigma\left(uvu^{-1}\right) = \sigma(v)$.* □

Prova. Pela Proposição 40.30, é imediato que $\sigma\left(uvu^{-1}\right) \setminus \{0\} = \sigma(v) \setminus \{0\}$. Agora, $0 \notin \rho(v)$ se e somente se $v \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$, ou seja, $0 \in \sigma(v)$ se e somente se $v \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$. Mas, $v \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ se e somente se $uvu^{-1} \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ o que, por sua vez ocorre se e somente se $0 \in \sigma(uvu^{-1})$. Logo, $0 \in \sigma(v)$ se e somente se $0 \in \sigma(uvu^{-1})$. ■

O seguinte cololário é imediato:

Corolário 40.8 *Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra de Banach com unidade e u, $v \in \mathcal{B}$ com $u \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$, então $\sigma(uv) = \sigma(vu)$.* □

Prova. Substitua-se $v \to vu$ na igualdade $\sigma\left(uvu^{-1}\right) = \sigma(v)$. ■

As duas proposições que seguem serão repetidamente empregadas adiante.

Proposição 40.31 *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade e $u \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ um elemento inversível de $\mathcal{B}$. Então, $\sigma\left(u^{-1}\right) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \lambda^{-1} \in \sigma(u)\Big\}$.* □

Prova da Proposição 40.31. Se u é inversível, então $0 \in \rho(u)$, ou seja, $0 \notin \sigma(u)$. É também claro que para $\lambda \neq 0$ $(\lambda\mathbb{1} - u) = -\lambda u\left(\lambda^{-1}\mathbb{1} - u^{-1}\right)$, o que claramente mostra que $\lambda \in \sigma(u)$ se e somente se $\lambda^{-1} \in \sigma\left(u^{-1}\right)$. ■

Proposição 40.32 *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach-$*$ com unidade e $u \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ um elemento inversível de $\mathcal{B}$. Então, $\sigma(u^*) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \overline{\lambda} \in \sigma(u)\Big\}$.* □

Prova da Proposição 40.32. $(\lambda\mathbb{1} - u)^* = \left(\overline{\lambda}\mathbb{1} - u^*\right)$. Logo, por (40.53), $\lambda \in \sigma(u)$ se e somente se $\overline{\lambda} \in \sigma(u^*)$. ■

Denotaremos $\sigma(u)^{cc} := \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \overline{\lambda} \in \sigma(u)\}$ e $\sigma(u)^{-1} := \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \lambda^{-1} \in \sigma(u)\}$. O que as Proposições 40.31 e 40.32, acima, afirmam é que $\sigma\left(u^{-1}\right) = \sigma(u)^{-1}$. e que $\sigma(u^*) = \sigma(u)^{cc}$.

• **Mais sobre o espectro do produto de operadores**

Se u e v são dois elementos de uma álgebra de Banach com unidade $\mathcal{B}$, não podemos esperar que haja uma relação simples entre $\sigma(uv)$ e $\sigma(u)\sigma(v) := \big\{\mu\nu |\ \mu \in \sigma(u),\ \nu \in \sigma(v)\big\}$. Por exemplo, se $u \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ e $v = u^{-1}$, então $\sigma(uu^{-1}) = \sigma(\mathbb{1}) = \{1\}$ e, assim, $\sigma(uu^{-1}) \subset \sigma(u)\sigma(u^{-1})$, uma inclusão própria caso $\sigma(u)$ não seja composta apenas por $\{1\}$.

No caso em que u e v não comutam, podemos ter até a inclusão oposta: $\sigma(u)\sigma(v) \subset \sigma(uv)$, como uma inclusão própria. Como exemplo, tomemos $u = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Claramente, $\sigma(u) = \sigma(v) = \{0\}$, mas $uv = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, o que implica $\sigma(uv) = \{0,\ 1\}$, o que significa que $\sigma(u)\sigma(v) \subset \sigma(uv)$ como uma inclusão própria.

No caso em que u e v comutam, é possível estabelecer que $\sigma(uv) \subset \sigma(u)\sigma(v)$. Vide, *e.g.*, [268], Proposição 3.2.10 e Exercício 3.5.24 daquele texto.

Comentário. Observe-se que a igualdade $\sigma(uv) = \sigma(u)\sigma(v)$ pode não ser verdadeira mesmo se u e v forem autoadjuntos e comutarem entre si. Por exemplo, no caso de matrizes complexas 2×2, tomemos $u = v = \sigma_j$, sendo σ_j qualquer uma das matrizes de Pauli (definidas em (2.208), página 253. Vide também Exercício E. 11.26, página 670). Teremos $uv = \mathbb{1}_2$ e $\sigma(uv) = \{1\}$, mas como $\sigma(\sigma_j) = \{-1,\ 1\}$, tem-se $\sigma(\sigma_j)\sigma(\sigma_j) = \{-1,\ 1\}$ e, portanto, $\sigma\big((\sigma_j)^2\big) \subset \sigma(\sigma_j)\sigma(\sigma_j)$, uma inclusão estrita. ♣

40.3.5 O Operador Resolvente e Propriedades Topológicas do Espectro

• **O operador resolvente**

Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade. Se um número complexo λ pertence ao conjunto resolvente de $u \in \mathcal{B}$, define-se o *operador resolvente de u calculado em* λ, denotado por $R_\lambda(u)$, por

$$R_\lambda(u) \ := \ (\lambda\mathbb{1} - u)^{-1}\,.$$

Pelas hipóteses $R_\lambda(u)$ é um elemento de $\mathcal{B}$.

Muitas propriedades de $\rho(u)$ (e, portanto de $\sigma(u)$) podem ser derivadas de propriedades de seus operadores resolventes. Por exemplo, mostraremos mais adiante que $\rho(u)$ é sempre um conjunto aberto de $\mathbb{C}$ (e, portanto, $\sigma(u)$ é sempre um conjunto fechado de $\mathbb{C}$) e mostraremos também que $\rho(u)$ nunca é igual a todo $\mathbb{C}$ (e, portanto, $\sigma(u)$ nunca é vazio).

• **Identidades satisfeitas por operadores resolventes**

Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade. Se um número complexo λ pertence ao conjunto resolvente de $u \in \mathcal{B}$, então vale, trivialmente, que $(\lambda\mathbb{1}-u)(\lambda\mathbb{1}-u)^{-1} = (\lambda\mathbb{1}-u)^{-1}(\lambda\mathbb{1}-u) = \mathbb{1}$. Expandindo-se o fator $\lambda\mathbb{1}-u$ e cancelando-se termos óbvios, obtemos dessa igualdade que

$$u(\lambda\mathbb{1}-u)^{-1} \;=\; (\lambda\mathbb{1}-u)^{-1}u \quad \text{ ou seja, que } \quad uR_\lambda(u) \;=\; R_\lambda(u)u\;. \tag{40.55}$$

Operadores resolventes satisfazem três outras identidades simples, as quais são empregadas amiúde.

Proposição 40.33 (Primeira identidade do resolvente) *Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade e $u \in \mathcal{B}$. Se λ e μ pertencem ao conjunto resolvente $\rho(u)$ de u, então*

$$R_\lambda(u) - R_\mu(u) \;=\; (\mu-\lambda)R_\lambda(u)R_\mu(u)\;. \tag{40.56}$$

Essa relação é denominada primeira identidade do resolvente. *Incidentalmente, (40.56) estabelece também a relação de comutação*

$$R_\lambda(u)R_\mu(u) \;=\; R_\mu(u)R_\lambda(u) \tag{40.57}$$

para todos $\lambda,\ \mu \in \rho(u)$. □

Prova. A prova de (40.56) segue do seguinte cômputo que dispensa esclarecimentos:

$$R_\lambda(u) \;=\; R_\lambda(u)\underbrace{(\mu\mathbb{1}-u)R_\mu(u)}_{=\mathbb{1}} \;=\; R_\lambda(u)\Big((\mu-\lambda)\mathbb{1}+(\lambda\mathbb{1}-u)\Big)R_\mu(u)$$

$$=\; (\mu-\lambda)R_\lambda(u)R_\mu(u) + \underbrace{R_\lambda(u)(\lambda\mathbb{1}-u)}_{=\mathbb{1}}R_\mu(u) \;=\; (\mu-\lambda)R_\lambda(u)R_\mu(u) + R_\mu(u)\;.$$

A relação (40.57) segue trivialmente de (40.56). ■

Proposição 40.34 (Segunda identidade do resolvente) *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade e sejam $u,\ v \in \mathcal{B}$. Se $\lambda \in \rho(u)\cap\rho(v)$, então vale*

$$R_\lambda(u) - R_\lambda(v) \;=\; R_\lambda(u)\,\big(u-v\big)\,R_\lambda(v)\;. \tag{40.58}$$

A relação (40.58) implica também que

$$R_\lambda(u) - R_\lambda(v) \;=\; R_\lambda(v)\,\big(u-v\big)\,R_\lambda(u)\;. \tag{40.59}$$

Essas relações são denominadas segunda identidade do resolvente. □

Prova. A prova de (40.58) segue do seguinte cômputo que dispensa esclarecimentos:

$$R_\lambda(u)\,\big(u-v\big)\,R_\lambda(v) \;=\; R_\lambda(u)\,\big((\lambda\mathbb{1}-v)-(\lambda\mathbb{1}-u)\big)\,R_\lambda(v) \;=\; R_\lambda(u)-R_\lambda(v)\;.$$

A relação (40.59) é obtida de (40.58) pela troca $u \leftrightarrow v$. ■

Proposição 40.35 (Terceira identidade do resolvente) *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade e sejam $u,\ v \in \mathcal{B}$. Se $\lambda \in \rho(uv)\setminus\{0\} = \rho(vu)\setminus\{0\}$ (pela Prop. 40.30, página 2220), então vale*

$$R_\lambda(uv) \;=\; \frac{1}{\lambda}\Big(\mathbb{1} + uR_\lambda(vu)v\Big)\;. \tag{40.60}$$

Essa relação é denominada terceira identidade do resolvente. □

Prova. A prova da relação (40.60) é apresentada no caso geral de álgebras associativas com unidade no Exercício E. 40.52, página 2358. ■

• **O operador resolvente e propriedades topológicas do espectro**

Estabeleceremos agora uma série de resultados sobre propriedades do operador resolvente que culminarão com a Proposição 40.38.

Lema 40.4 *Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade e $u \in \mathcal{B}$. Se μ pertence ao conjunto resolvente $\rho(u)$ de u e $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfaz $|\lambda-\mu| < \|R_\mu(u)\|^{-1}$, então λ também pertence a $\rho(u)$ e vale*

$$R_\lambda(u) \;=\; R_\mu(u)\left[\mathbb{1}+\sum_{n=1}^{\infty}(\mu-\lambda)^n\big(R_\mu(u)\big)^n\right] \;=\; \left[\mathbb{1}+\sum_{n=1}^{\infty}(\mu-\lambda)^n\big(R_\mu(u)\big)^n\right]R_\mu(u)\;. \tag{40.61}$$

□

Prova. Que as séries acima são convergentes para $|\lambda-\mu| < \|R_\mu(u)\|^{-1}$ é elementar. Portanto, ambas definem operadores de $\mathcal{B}$. A segunda igualdade em (40.61) é também evidente. Resta-nos provar que as expressões do lado direito são, de fato, iguais à inversa de $\lambda\mathbb{1}-u$. Agora,

$$(\lambda\mathbb{1}-u)R_\mu(u) \;=\; \Big((\lambda-\mu)\mathbb{1}+(\mu\mathbb{1}-u)\Big)R_\mu(u) \;=\; -(\mu-\lambda)R_\mu(u)+\mathbb{1}\;.$$

Assim,

$$(\lambda\mathbb{1}-u)R_\mu(u)\left[\mathbb{1}+\sum_{n=1}^{\infty}(\mu-\lambda)^n\big(R_\mu(u)\big)^n\right]$$

$$=\; -(\mu-\lambda)R_\mu(u)\left[\mathbb{1}+\sum_{n=1}^{\infty}(\mu-\lambda)^n\big(R_\mu(u)\big)^n\right] + \left[\mathbb{1}+\sum_{n=1}^{\infty}(\mu-\lambda)^n\big(R_\mu(u)\big)^n\right]$$

$$=\; -\sum_{n=1}^{\infty}(\mu-\lambda)^n\big(R_\mu(u)\big)^n + \left[\mathbb{1}+\sum_{n=1}^{\infty}(\mu-\lambda)^n\big(R_\mu(u)\big)^n\right] \;=\; \mathbb{1}\;.$$

A prova que

$$\left[\mathbb{1}+\sum_{n=1}^{\infty}(\mu-\lambda)^n\big(R_\mu(u)\big)^n\right]R_\mu(u)(\lambda\mathbb{1}-u) \;=\; \mathbb{1}$$

é análoga. ■

A validade da expressão (40.61) não foi adivinhada. Ela é sugerida pelas relações numéricas

$$\frac{1}{\lambda-t} \;=\; \frac{1}{\mu-t}\,\frac{1}{\Big(1-\frac{\mu-\lambda}{\mu-t}\Big)} \;=\; \frac{1}{\mu-t}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(\mu-\lambda)^n\left(\frac{1}{\mu-t}\right)^n\right]\;,$$

válidas para $\lambda,\ \mu,\ t \in \mathbb{C}$ com $|\mu-\lambda| < |\mu-t|$, $\lambda \neq t$ e $\mu \neq t$.

Proposição 40.36 *Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade e $u \in \mathcal{B}$. Então, $\rho(u)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, o que implica que $\sigma(u)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{C}$.* □

Prova. O Lema 40.4 afirma que se $\mu \in \rho(u)$, então todo $\lambda \in \mathbb{C}$ que dista de μ menos que $\|R_\mu(u)\|^{-1}$ é também um elemento de $\rho(u)$. Ora, isso está precisamente dizendo que $\rho(u)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e, portanto, $\sigma(u)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{C}$, por ser o complemento de $\rho(u)$. ■

A proposição seguinte, que será usada logo adiante, ilustra a importância da teoria das funções analíticas no estudo de propriedades de operadores em álgebras de Banach.

Proposição 40.37 *Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach e $u \in \mathcal{B}$. Então, para cada $\ell \in \mathcal{B}^\dagger$, funcional linear contínuo em $\mathcal{B}$, a função de variável complexa $f_\ell : \rho(u) \to \mathbb{C}$ dada por $f_\ell(\lambda) := \ell\big(R_\lambda(u)\big)$ é holomórfica (i.e. analítica) em cada componente conexa de $\rho(u)$.* □

Prova. Sejam $\mu \in \rho(u)$ e λ tal que $|\lambda - \mu| < \big\|R_\mu(u)\big\|^{-1}$. Tem-se por (40.61) que $\lambda \in \rho(u)$ e

$$f_\ell(\lambda) \;:=\; \ell\big(R_\lambda(u)\big) \;\stackrel{(40.61)}{=}\; \ell\left(R_\mu(u) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu-\lambda)^n \big(R_\mu(u)\big)^{n+1}\right)$$

$$\stackrel{\text{continuidade}}{=} \ell(R_\mu(u)) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu-\lambda)^n \ell\left(\big(R_\mu(u)\big)^{n+1}\right) . \quad (40.62)$$

Como

$$\left|\ell\Big(\big(R_\mu(u)\big)^{n+1}\Big)\right| \;\le\; \|\ell\| \left\|\big(R_\mu(u)\big)^{n+1}\right\| \;\le\; \|\ell\| \left\|R_\mu(u)\right\|^{n+1} ,$$

segue de $|\lambda - \mu| < \big\|R_\mu(u)\big\|^{-1}$ que a última série em (40.62) é absolutamente convergente e, portanto, define uma função holomórfica na bola aberta de raio $\big\|R_\mu(u)\big\|^{-1}$ centrada em μ, a qual pode, pelos procedimentos usuais, ser estendida analiticamente à componente conexa de $\rho(u)$ que contém μ. ■

A proposição seguinte, devida a Gelfand[20], é importante pois finalmente estabelece que o espectro de um operador contínuo em um espaço de Banach nunca é vazio.

Proposição 40.38 *Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade e $u \in \mathcal{B}$. Então, $\sigma(u)$ é um conjunto não-vazio e está contido na bola fechada de raio $\|u\|$ centrada em 0: $\big\{z \in \mathbb{C} \big|\; |z| \le \|u\|\big\}$.* □

Prova. Vamos supor que $\rho(u) = \mathbb{C}$. Então, pela Proposição 40.37, para todo ℓ funcional linear contínuo em $\mathcal{B}$ a função $f_\ell(\lambda) := \ell(R_\lambda(u))$ seria inteira, isto é, analítica em toda parte. Agora, para $|\lambda| > \|u\|$

$$R_\lambda(u) \;=\; (\lambda\mathbb{1} - u)^{-1} \;=\; \lambda^{-1}\big(\mathbb{1} - \lambda^{-1}u\big)^{-1} \;=\; \lambda^{-1}\left[\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n}\, u^n\right] , \quad (40.63)$$

de acordo com (40.54) da Proposição 40.26, página 2217, pois pela hipótese $\big\|\lambda^{-1}u\big\| < 1$. Assim,

$$\big\|R_\lambda(u)\big\| \;\le\; \frac{1}{|\lambda|}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\|u\|}{|\lambda|}\right)^n\right] \;=\; \frac{1}{|\lambda| - \|u\|} .$$

Isso mostra que $\lim_{|\lambda|\to\infty} \big\|R_\lambda(u)\big\| = 0$. Logo, como $|f_\ell(\lambda)| = \Big|\ell\big(R_\lambda(u)\big)\Big| \le \|\ell\| \, \big\|R_\lambda(u)\big\|$, segue que $\lim_{|\lambda|\to\infty} |f_\ell(\lambda)| = 0$. Com isso, concluímos que $f_\ell(\lambda)$ é uma função inteira, limitada e converge a zero no infinito. Pelo bem conhecido Teorema de Liouville[21] da Análise Complexa, isso implica que $f_\ell(\lambda)$ é identicamente nula para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Se, porém, $\ell\big(R_\lambda(u)\big)$ for nulo para cada funcional linear contínuo ℓ então, pelo Corolário 40.2, página 2187, teríamos $R_\lambda(u) = 0$, um absurdo, pois $R_\lambda(u)$ é a inversa de um operador. Assim, concluímos que $\rho(u)$ não pode ser igual a todo $\mathbb{C}$ e, portanto, $\sigma(u) \neq \emptyset$.

Pela Proposição 40.26, página 2217, a expressão (40.63) mostra que $R_\lambda(u)$ está definida para todo $|\lambda| > \|u\|$. Assim, $\big\{z \in \mathbb{C} \big|\; |z| > \|u\|\big\} \subset \rho(u)$. Logo, $\sigma(u) \subset \big\{z \in \mathbb{C} \big|\; |z| \le \|u\|\big\}$. ■

[20] Israil Moiseevic Gelfand (1913–2009).
[21] Joseph Liouville (1809–1882).

• **O espectro de projetores em álgebras de Banach com unidade**

Como ilustração de algumas das ideias expostas acima, consideremos o espectro de projetores em álgebras de Banach com unidade. Falamos um pouco sobre projetores e projetores ortogonais agindo em espaços de Hilbert à página 2201.

Em uma álgebra de Banach com unidade, $\mathcal{B}$, um elemento $p \in \mathcal{B}$ é dito ser um *projetor* se satisfizer $p^2 = p$. Como supomos que p seja um elemento de uma álgebra de Banach, tem-se implicitamente que $\|p\| < \infty$. Esse comentário é relevante, pois sabemos do Exercício E. 40.21, página 2202 que projetores *agindo* em espaços de Banach ou de Hilbert podem não ser sequer limitados.

Façamos primeiramente alguns comentários elementares sobre projetores. Note-se que $\mathbb{1}$ e $\mathbb{0}$ são projetores. É elementar verificar que se p é um projetor, então $\mathbb{1} - p$ também o é, pois $(\mathbb{1} - p)^2 = \mathbb{1} - 2p + p^2 = \mathbb{1} - p$. Um projetor possui inversa em $\mathcal{B}$ se e somente se for igual a $\mathbb{1}$, pois, se p^{-1} existe em $\mathcal{B}$, a relação $p^2 = p$ implica $p = \mathbb{1}$. Como para um projetor $p = p^2$, segue que $\|p\| = \|p^2\| \le \|p\|^2$. Portanto, $\|p\|(1 - \|p\|) \le 0$ e, consequentemente, ou $\|p\| = 0$ (em cujo caso $p = 0$), ou $\|p\| \ge 1$.

Nota. Em uma álgebra C* com unidade um projetor é dito ortogonal se $p = p^*$. Para tais projetores a propriedade C* garante que $\|p^2\| = \|p\|^2$. Assim, $p = p^2$ implica $\|p\| = \|p^2\| = \|p\|^2$ e, portanto, $\|p\|(1 - \|p\|) = 0$. Consequentemente, ou $\|p\| = 0$ (em cujo caso $p = 0$), ou $\|p\| = 1$. ♣

Exemplo 40.4 Vejamos um exemplo de um projetor não ortogonal com norma maior que 1. Considere-se a álgebra das matrizes complexas 2×2 e seja a matriz $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. É fácil constatar que $E^2 = E$ mas $E \neq E^*$ e, portanto, E é um projetor, mas não um projetor ortogonal. Seja o vetor $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$ com $\|v\| = 1$. Tem-se $Ev = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e, portanto, $\|Ev\| = \sqrt{2}$. Assim, $\|Ev\|/\|v\| = \sqrt{2}$ e, portanto, $\|E\| \ge \sqrt{2} > 1$. No Exercício E. 40.31, página 2230, mostraremos que $\|E\| = \sqrt{2}$. ♦

É fácil verificar que o operador resolvente de um projetor p é dado por

$$R_\lambda(p) \;=\; (\lambda\mathbb{1} - p)^{-1} \;=\; \frac{1}{\lambda}\mathbb{1} - \frac{1}{\lambda(1-\lambda)}p \quad (40.64)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, exceto $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$, onde o resolvente não está definido pois $-p$ e $\mathbb{1} - p$ não possuem inversa (por serem projetores). De fato, se $\lambda \notin \{0,\, 1\}$,

$$(\lambda\mathbb{1} - p)\left(\frac{1}{\lambda}\mathbb{1} - \frac{1}{\lambda(1-\lambda)}p\right) \;=\; \mathbb{1} + \left(\frac{-\lambda - (1-\lambda) + 1}{\lambda(1-\lambda)}\right) p \;=\; \mathbb{1} . \quad (40.65)$$

Observe-se que (40.64) é válida mesmo se $p = \mathbb{1}$ ou se $p = \mathbb{0}$ e observe-se também que (40.64) define um elemento de $\mathcal{B}$ caso $\lambda \notin \{0,\, 1\}$. Para $p = \mathbb{1}$ (respec., $p = \mathbb{0}$), o lado direito de (40.64) define um elemento de $\mathcal{B}$ exceto para $\lambda = 1$ (respec., $\lambda = 0$).

Concluímos disso que se p é um projetor em uma álgebra de Banach com unidade, então seu seu conjunto resolvente satisfaz $\rho(p) \supset \mathbb{C} \setminus \{0,\, 1\}$ e seu espectro $\sigma(p) \subset \{0,\, 1\}$.

É fácil constatar pela definição de operador revolvente (faça-o!) que, especificamente para o operador nulo, valem $\rho(\mathbb{0}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\sigma(\mathbb{0}) = \{0\}$, enquanto que, especificamente para o operador unidade, valem $\rho(\mathbb{1}) = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ e $\sigma(\mathbb{1}) = \{1\}$.

As afirmações recíprocas também são verdadeiras, no seguinte sentido. Caso $\sigma(p) = \{1\}$, então p possui inversa (pois existe $R_0(p) = (-p)^{-1}$) e, como $p^2 = p$, vale $p = \mathbb{1}$. Analogamente, caso $\sigma(p) = \{0\}$, então $\mathbb{1} - p$ possui inversa (pois existe $R_1(p) = (\mathbb{1} - p)^{-1}$) e, sendo $(\mathbb{1} - p)$ um projetor vale $(\mathbb{1} - p)^2 = \mathbb{1} - p$ e a existência de $(\mathbb{1} - p)^{-1}$ implica $\mathbb{1} - p = \mathbb{1}$ e, portanto, $p = 0$.

Para futura referência, reunimos essas afirmações acima provadas na seguinte proposição:

Proposição 40.39 *Em uma álgebra de Banach com unidade $\mathcal{B}$, se $p \in \mathcal{B}$ é um projetor, então $\sigma(p) \subset \{0,\, 1\}$, sendo que $\sigma(p) = \{0\}$ se e somente se $p = \mathbb{0}$ e $\sigma(p) = \{1\}$ se e somente se $p = \mathbb{1}$. Consequentemente, se $p \in \mathcal{B}$ é um projetor, então $\sigma(p) = \{0,\, 1\}$ se e somente se $p \neq \mathbb{0}$ e $p \neq \mathbb{1}$.* □

E. 40.28 *Exercício*. Este exercício é para aqueles que se sentem incomodados com o fato de a relação (40.64) para o operador resolvente ter sido demonstrada por constatação, como em (40.65), sem que se esclareça de onde (40.64) provém. Uma alternativa é usar a série de Neumann (40.54), página 2217, junto ao fato que $p^2 = p$. Faça-o! A série, de fato, fornece (40.64), mas ela somente é convergente para $|\lambda| > \|p\|$. Tendo em vista a Proposição 40.37, página 2224, que propriedades de funções meromorfas podem ser evocadas para estender (40.64) para os demais valores de $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,\, 1\}$? ✣

E. 40.29 *Exercício simples.* Usando (40.64), verifique a primeira identidade do resolvente (40.56), página 2222, para $R_\lambda(p)$, sendo p um projetor. Faça o mesmo com a segunda identidade do resolvente (40.58), página 2222, para a diferença $R_\lambda(p) - R_\lambda(q)$, sendo p e q projetores. ✣

40.3.5.1 O Teorema da Aplicação Espectral

Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade e seja um polinômio $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ definido para $z \in \mathbb{C}$. Para $u \in \mathcal{B}$ definimos o polinômio $p(u) := a_0\mathbb{1} + a_1 u + \cdots + a_n u^n \in \mathcal{B}$. O Teorema da Aplicação Espectral, que demonstraremos logo abaixo consiste na afirmação que $\sigma\big(p(u)\big) = p\big(\sigma(u)\big)$, onde

$$p\big(\sigma(u)\big) \;:=\; \big\{p(\lambda),\ \lambda \in \sigma(u)\big\}\,.$$

Para prová-lo usaremos o seguinte resultado:

Lema 40.5 *Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade e $u \in \mathcal{B}$. Então, se $\lambda \in \sigma(u)$, tem-se $(u - \lambda\mathbb{1})q(u) \notin \mathrm{Inv}\,(\mathcal{B})$ para qualquer polinômio q.* □

Prova. Seja $p(z) := (z-\lambda)q(z)$ e seja $p(u) := (u-\lambda\mathbb{1})q(u) \in \mathcal{B}$. É evidente que $q(u)$ e $p(u)$ comutam com u: $q(u)u = uq(u)$ e $p(u)u = up(u)$. Desejamos provar que $p(u) \notin \mathrm{Inv}\,(\mathcal{B})$ e, para tal, vamos supor o oposto, a saber, vamos supor que exista $w \in \mathcal{B}$ tal que $wp(u) = p(u)w = \mathbb{1}$.

Vamos primeiramente provar que w e u comutam. Seja $c := wu - uw$. Então, multiplicando-se à esquerda por $p(u)$, teremos $p(u)c = u - p(u)uw = u - up(u)w = u - u = 0$. Assim, $p(u)c = 0$ e multiplicando-se essa igualdade à esquerda por w teremos $c = 0$, estabelecendo que $wu = uw$. Naturalmente, isso implica também que $q(u)w = wq(u)$.

Agora, por hipótese, w satisfaz $p(u)w = wp(u) = \mathbb{1}$, ou seja, $(u - \lambda\mathbb{1})q(u)w = \mathbb{1}$ e $w(u - \lambda\mathbb{1})q(u) = \mathbb{1}$. Usando a comutatividade de $q(u)$ com u e com w, essa última relação pode ser reescrita como $q(u)w(u - \lambda\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Assim, estabelecemos que

$$(u - \lambda\mathbb{1})\Big(q(u)w\Big) \;=\; \mathbb{1} \qquad \text{e} \qquad \Big(q(u)w\Big)(u - \lambda\mathbb{1}) \;=\; \mathbb{1}$$

o que significa que $(u - \lambda\mathbb{1}) \in \mathrm{Inv}\,(\mathcal{B})$ com $(u - \lambda\mathbb{1})^{-1} = q(u)w$, uma contradição com a hipótese que $\lambda \in \sigma(u)$. Logo, $p(u)$ não pode ter inversa. ■

Podemos agora enunciar e demonstrar o resultado que anunciamos acima, o qual possui importância fundamental na teoria de operadores:

Teorema 40.15 (Teorema da Aplicação Espectral) *Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade e $u \in \mathcal{B}$. Então,*

$$\sigma\big(p(u)\big) \;=\; p\big(\sigma(u)\big) \;:=\; \Big\{p(\lambda),\ \lambda \in \sigma(u)\Big\} \tag{40.66}$$

para todo polinômio p. □

Prova. Vamos supor que $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ seja de grau $n \geq 1$, pois no caso de um polinômio constante a afirmativa é trivial. Naturalmente, $a_n \neq 0$.

Tomemos $\mu \in \sigma\big(p(u)\big)$, que é não-vazio, como sabemos, e sejam $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ as n raízes do polinômio $p(z) - \mu$ em $\mathbb{C}$. Então, $p(z) - \mu = a_n(z - \alpha_1)\cdots(z - \alpha_n)$, o que implica $p(u) - \mu\mathbb{1} = a_n(u - \alpha_1\mathbb{1})\cdots(u - \alpha_n\mathbb{1})$. Se nenhum dos α_i pertencesse a $\sigma(u)$ então cada fator $(u-\alpha_j\mathbb{1})$ seria inversível, assim como o produto $a_n(u-\alpha_1\mathbb{1})\cdots(u-\alpha_n\mathbb{1})$, contrariando o fato de $\mu \in \sigma\big(p(u)\big)$. Logo, algum dos α_i pertence a $\sigma(u)$. Como $p(\alpha_i) = \mu$, isso diz que $\sigma\big(p(u)\big) \subset \{p(\lambda),\ \lambda \in \sigma(u)\}$.

Provemos agora a recíproca. Já sabemos que $\sigma(u)$ é não-vazio. Para $\lambda \in \sigma(u)$ tem-se evidentemente que o polinômio $p(z) - p(\lambda)$ tem λ como raiz. Logo, $p(z) - p(\lambda) = (z - \lambda)q(z)$, onde q é um polinômio de grau $n - 1$. Portanto, $p(u) - p(\lambda)\mathbb{1} = (u - \lambda\mathbb{1})q(u)$ e como $(u - \lambda\mathbb{1})$ não é inversível, $p(u) - p(\lambda)\mathbb{1}$ também não pode sê-lo (pelo Lema 40.5, página 2226), o que diz-nos que $p(\lambda) \in \sigma(p(u))$. Isso significa que $\{p(\lambda),\ \lambda \in \sigma(u)\} \subset \sigma\big(p(u)\big)$, estabelecendo que $\sigma\big(p(u)\big) = \{p(\lambda),\ \lambda \in \sigma(u)\}$. ■

Para uma aplicação direta do Teorema 40.15 às transformadas de Fourier, vide Exemplo 40.7, página 2282.

Veremos quando tratarmos do homomorfismo de Gelfand e do Cálculo Funcional Contínuo que para operadores limitados e autoadjuntos definidos em espaços de Hilbert o Teorema da Aplicação Espectral pode ser bastante generalizado. Vide Teorema 40.40, página 2316.

40.3.6 O Raio Espectral

Pela Proposição 40.38, página 2224, sabemos que o espectro de um elemento u de uma uma álgebra de Banach com unidade $\mathcal{B}$ está contido na bola fechada de raio $\|u\|$ centrada em 0. Em muitas aplicações é importante ter-se uma noção mais precisa sobre qual a maior distância à origem 0 em que se pode encontrar um ponto do espectro de u. Os Teoremas 40.16 e 40.17, a seguir, fornecem-nos informações mais precisas sobre essa distância.

Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade e $u \in \mathcal{B}$. Definimos o *raio espectral* de u por

$$r(u) \;:=\; \sup_{\lambda\in\sigma(u)} |\lambda|\,,$$

onde, como antes, $\sigma(u) = \{\lambda \in \mathbb{C}|\ (\lambda\mathbb{1} - u)$ não é inversível$\}$. Pela Proposição 40.38, página 2224, está claro que $r(u) \leq \|u\|$.

Nosso primeiro resultado é a seguinte proposição:

Proposição 40.40 *Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra de Banach com unidade, então*

$$r(uv) \;=\; r(vu)\,,$$

para todos $u,\ v \in \mathcal{B}$. □

Prova. A afirmação é imediata pela Proposição 40.30, página 2220. ■

O seguinte teorema, devido a Beurling[22], é um dos resultados fundamentais da análise espectral de operadores e será empregado várias vezes no que segue.

Teorema 40.16 (Teorema do Raio Espectral) *Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade e $u \in \mathcal{B}$. Então,*

$$r(u) \;=\; \inf_{n\geq 1} \|u^n\|^{1/n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \|u^n\|^{1/n}\,. \tag{40.67}$$

□

Prova do Teorema 40.16.[23] É claro pela definição que $\{\lambda \in \mathbb{C}|\ |\lambda| > r(u)\}$ é uma componente conexa do conjunto resolvente de u. Assim, pela Proposição 40.37, página 2224, as funções $f_\ell(\lambda) := \ell(R_\lambda(u))$ com $\ell \in \mathcal{B}^\dagger$, funcional linear contínuo em $\mathcal{B}$, são analíticas na região $\{\lambda \in \mathbb{C}|\ |\lambda| > r(u)\}$. De acordo com fatos bem conhecidos da teoria das funções de variável complexa, isso implica que naquela região $f_\ell(\lambda)$ possui uma representação em termos de uma série de Laurent[24]:

$$f_\ell(\lambda) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \lambda^{-n}\,, \qquad |\lambda| > r(u)\,.$$

Na região $\{\lambda \in \mathbb{C}|\ |\lambda| > \|u\|\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C}|\ |\lambda| > r(u)\}$, vale $\big\|\lambda^{-1}u\big\| < 1$ e podemos escrever, usando a série de Neumann (40.54),

$$\begin{aligned} f_\ell(\lambda) \;&:=\; \ell\big(R_\lambda(u)\big) \;=\; \ell\left((\lambda\mathbb{1} - u)^{-1}\right) \;=\; \lambda^{-1}\ell\left(\left(\mathbb{1} - \lambda^{-1}u\right)^{-1}\right) \\ &=\; \lambda^{-1}\ell\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}u^n\right) \overset{\text{continuidade de }\ell}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\ell\left(u^n\right)\,\lambda^{-n-1} \end{aligned}$$

[22] Arne Carl-August Beurling (1905–1986).

[23] Seguiremos aqui a apresentação de [367], mas com alguns esclarecimentos extras. Basicamente, a vantagem dessa demonstração é o uso do Princípio de Limitação Uniforme, o que a torna mais curta e elementar, em contraste com outras exposições, como as de [77] ou de [412].

[24] Pierre Alphonse Laurent (1813–1854).

Concluímos disso que $a_n = 0$ para todo $n \leq 0$ e $a_n = \ell\left(u^{n-1}\right)$, para todo $n \geq 1$ e, portanto, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \ell\left(u^n\right) \lambda^{-n-1}$ converge para todo λ com $|\lambda| > r(u)$ e não apenas para $|\lambda| > \|u\|$. Como essa série é convergente, concluímos que para todo λ com $|\lambda| > r(u)$ devemos ter $\lim_{n\to\infty} |\ell\left(u^n\right) \lambda^{-n-1}| = 0$, o que implica que a sequência $\ell\left(u^n\right) \lambda^{-n-1}$ é limitada. Assim, provamos que para cada $\ell \in \mathcal{B}^\dagger$ existe uma constante $M_\ell > 0$ tal que $|\ell\left(u^n\right) \lambda^{-n-1}| \leq M_\ell$. Sob essas condições, o Princípio de Limitação Uniforme (ou Teorema de Banach-Steinhaus, Teorema 40.6, página 2188) garante-nos que existe $M \geq 0$, finito, tal que $\|\lambda^{-n-1} u^n\| \leq M$ para todo $n \geq 1$. Consequentemente, $\|u^n\|^{1/n} \leq M^{1/n} |\lambda|^{1+1/n}$ para todo $n \geq 1$. Disso extraímos que $\limsup_{n\to\infty} \|u^n\|^{1/n} \leq |\lambda|$. Como essa desigualdade vale para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| > r(u)$, concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty} \|u^n\|^{1/n} \;\leq\; \inf\left\{ |\lambda| \;,\; \text{com } \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } |\lambda| > r(u) \right\} \;=\; r(u) \;.$$

Vamos agora demonstrar que $r(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \|u^n\|^{1/n}$.

Pelo Teorema da Aplicação Espectral, Teorema 40.15, página 2226, sabemos que se $\lambda \in \sigma(u)$ então $\lambda^n \in \sigma(u^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, pela Proposição 40.38, página 2224, vale $|\lambda^n| \leq \|u^n\|$. Isso trivialmente diz que $|\lambda| \leq \|u^n\|^{1/n}$ para todo $\lambda \in \sigma(u)$ e todo $n \geq 1$. Portanto,

$$r(u) \;:=\; \sup_{\lambda\in\sigma(u)} |\lambda| \;\leq\; \inf_{n\geq 1} \|u^n\|^{1/n} \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \|u^n\|^{1/n} \;.$$

Logo, estabelecemos $\limsup_{n\to\infty} \|u^n\|^{1/n} \leq r(u) \leq \inf_{n\geq 1} \|u^n\|^{1/n} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u^n\|^{1/n}$, o que implica (40.67). ■

O seguinte corolário importante será empregado de diversas formas adiante, por exemplo, quando discutirmos o homomorfismo de Gelfand e o Teorema Espectral.

Teorema 40.17 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra C* com unidade e $a \in \mathcal{A}$ é um operador autoadjunto (ou seja, tal que $a = a^*$) ou normal (ou seja, tal que $aa^* = a^*a$), então*

$$r(a) \;=\; \|a\| \;. \tag{40.68}$$

Note que se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma álgebra C com unidade e, portanto, a afirmação acima aplica-se a operadores limitados autoadjuntos ou normais agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.* □

Comentário. A afirmação do Teorema 40.17 pode não ser válida para operadores não autoadjuntos ou não normais. A matriz E do Exemplo 40.4, página 2225, não é autoadjunta nem normal. Verifique! No entanto, seus autovalores são 1 e 0 (verifique isso também!) e, portanto, seu raio espectral vale 1. Sua norma, porém, é maior ou igual a $\sqrt{2} > 1$, como mostrado no Exemplo 40.4. No Exercício E. 40.31, página 2230, mostraremos que $\|E\| = \sqrt{2}$. ♣

Prova do Teorema 40.17. Em uma álgebra C* todo operador b satisfaz a propriedade C*: $\|b^*b\| = \|b\|^2$. Assim, para um operador autoadjunto a, vale $\|a^2\| = \|a\|^2$. Substituindo a nessa expressão pelo operador autoadjunto $a^{2^{n-1}}$ e utilizando-a n vezes, teremos

$$\|a^{2^n}\| = \|a^{2^{n-1}}\|^2 = \|a^{2^{n-2}}\|^{2^2} = \cdots = \|a\|^{2^n} \;. \tag{40.69}$$

Portanto,

$$r(a) \overset{(40.67)}{=} \lim_{m\to\infty} \|a^m\|^{1/m} \;=\; \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{1/2^n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \|a\| \;=\; \|a\| \;. \tag{40.70}$$

Tratemos agora do caso de operadores normais. Se $b \in \mathcal{A}$, vale pela propriedade C* $\left\|b^{2^n}\right\|^2 = \left\|\left(b^{2^n}\right)^* b^{2^n}\right\|$. Para um operador normal a, tem-se $\left(a^{2^n}\right)^* a^{2^n} = (a^*a)^{2^n}$. Logo, $\left\|a^{2^n}\right\|^2 = \left\|(a^*a)^{2^n}\right\|$. Como a^*a é autoadjunto, segue de (40.69) (substituindo lá a por a^*a) que $\left\|(a^*a)^{2^n}\right\| = \left\|a^*a\right\|^{2^n}$. Novamente pela propriedade C*, a última expressão vale $\|a\|^{2^{n+1}}$. Provamos, então, que para a normal tem-se $\left\|a^{2^n}\right\| = \|a\|^{2^n}$. Assim, aplica-se novamente (40.70), completando a prova. ■

O leitor deve, porém, ser advertido que há situações em que $r(u) < \|u\|$. Tal é o caso, por exemplo, do *operador de Volterra* W, tratado no Exercício E. 40.30, página 2229, e retomado no Exemplo 40.10 à página 2283, o qual é definido no espaço de Banach $C([0,\,1])$ por $(Wf)(x) := \int_0^x f(y)dy$, e para o qual tem-se $r(W) = 0$ mas $\|W\| = 1$.

Um operador limitado A agindo em um espaço de Banach é dito ser *quase-nilpotente* se satisfizer $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = 0$. Pelo Teorema do Raio Espectral, Teorema 40.16, página 2227, concluímos que se A é quase-nilpotente, então $\sigma(A) = \{0\}$.

E. 40.30 *Exercício*. Seja o espaço de Banach $C([0,\,1])$ dotado da norma do supremo $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,\,1]} |f(x)|$, $f \in C([0,\,1])$. Seja $W : C([0,\,1]) \to C([0,\,1])$ definido por $(Wf)(x) := \int_0^x f(y)dy$, $f \in C([0,\,1])$ o chamado *operador de Volterra*. Prove que $\left|(Wf)(x)\right| \leq \|f\|_\infty x$ para $f \in C([0,\,1])$ e todo $x \in [0,\,1]$ e, usando indução, mostre que $\left|(W^n f)(x)\right| \leq \|f\|_\infty \frac{x^n}{n!}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove disso que $\|W^n f\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{n!}$ e extraia disso que $\|W^n\| \leq \frac{1}{n!}$. Usando o fato bem conhecido (prove-o!) que $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} = 0$, obtenha $\lim_{n\to\infty} \|W^n\|^{1/n} = 0$, provando que W é um operador quase-nilpotente. Disso e do Teorema do Raio Espectral, Teorema 40.16, página 2227, concluímos que $\sigma(W) = \{0\}$.

Como vimos, $\|W\| \leq 1$, mas para a função constante igual a 1, vale $(W1)(x) = x$. Logo, $\|W1\|_\infty = 1$ e como $\|1\|_\infty = 1$, segue que $\|W\| \geq 1$, provando que $\|W\| = 1$. Concluímos que W tem um raio espectral nulo (por (40.141)), mas uma norma não-nula. Vide também Exemplo 40.10, página 2283. ♣

Os Teoremas 40.15 e 40.17 têm a seguinte consequência relevante, a qual, de forma restrita, estende o Teorema de Hamilton-Cayley para matrizes, Teorema 10.4, página 531:

Proposição 40.41 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C* com unidade e seja $a \in \mathcal{A}$ um operador autoadjunto. Suponhamos que o espectro de a seja um subconjunto finito de $\mathbb{R}$, ou seja, $\sigma(a) = \{\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Seja $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o polinômio definido por $P(x) := (x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n)$. Então, $P(a) = 0$.* □

Prova. Como P é real, $P(a)$ é autoadjunto. Pelas hipóteses temos que $P\big(\sigma(a)\big) = \{0\}$. Do Teorema 40.15 segue que $\sigma\big(P(a)\big) = \{0\}$ e, portanto, $r\big(P(a)\big) = 0$. Do Teorema 40.17 segue que $\big\|P(a)\big\| = 0$, completando a prova. ■

Corolário 40.9 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C* com unidade e seja $a \in \mathcal{A}$ um operador autoadjunto tal que $\sigma(a) \subset \{-1,\,1\}$. Então $a^2 = \mathbb{1}$.* □

Prova. Isso é uma consequência imediata da Proposição 40.41, pois aqui $P(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$. ■

Dentre as consequências mais profundas do Teorema 40.17 encontram-se a proposição e o corolário seguintes.

Proposição 40.42 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra C* com unidade, então*

$$\|a\| \;=\; \sqrt{r(a^*a)} \;=\; \sqrt{r(aa^*)} \tag{40.71}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. □

Prova. Pela propriedade C* (página 2210) vale $\|a\|^2 = \|a^*a\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Agora, a^*a é autoadjunto e, pelo Teorema 40.17, página 2228, $r(a^*a) = \|a^*a\|$. Para a segunda igualdade em (40.71), basta substituir $a \to a^*$ e recordar que $\|a^*\| = \|a\|$. Ou usar a Proposição 40.40, página 2227. ■

Corolário 40.10 *Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra-$*$ que é uma álgebra C* em relação a uma norma $\|\cdot\|_1$ e também em relação a uma norma $\|\cdot\|_2$, então essas normas são iguais.* □

Prova. Seja $a \in \mathcal{B}$. Pela Proposição 40.42, tem-se $\|a\|_1^2 = r(a^*a) = \|a\|_2^2$. ■

A razão de a Proposição 40.42 ser importante é a seguinte. O espectro de um operador a é definido em termos puramente algébricos (existência ou não da inversa de $\lambda\mathbb{1} - a$) e, portanto, o raio espectral $r(a)$ também o é. A igualdade $\|a\| = \sqrt{r(a^*a)}$ revela que em álgebras C* a norma operatorial, um objeto de natureza topológica, é determinado por um objeto de natureza algébrica, o raio espectral. Assim, uma álgebra C* é uma álgebra que vem, por assim, dizer, imbuída de sua própria topologia. O Teorema 40.17 tem várias outras implicações estruturais sobre álgebras C*. Vide a discussão de [77] ou [367].

Outra razão da importância da Proposição 40.42 e que ela, em certos casos, facilita a determinação da norma de certos operadores específicos. O seguinte exercício elementar ilustra isso.

E. 40.31 *Exercício.* Considere novamente a matriz E do Exemplo 40.4, página 2225. Constate que $E^*E = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e que os autovalores de E^*E são 0 e 2. A Proposição 40.42 informa, portanto, que $\|E\| = \sqrt{2}$. ✣

• **O espectro de operadores unitários e de operadores autoadjuntos em álgebras** C*

Um elemento u de uma álgebra-$*$ com unidade é dito ser *unitário* se $u^{-1} = u^*$, ou seja, se $u^*u = uu^* = \mathbb{1}$.

As duas proposições que seguem são importantes por permitirem localizar com mais precisão o espectro de operadores unitários ou autoadjuntos.

Proposição 40.43 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra* C* *com unidade seja $u \in \mathcal{A}$, unitário. Então, $\sigma(u) \subset S^1 := \{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda| = 1\}$.* □

Prova. Se u é unitário, pela propriedade C*, $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|\mathbb{1}\| = 1$, ou seja, $\|u\| = 1$. Além disso, por ser unitário, u é normal (pois $u^*u = uu^* = \mathbb{1}$). Assim, pelo Teorema 40.17, $r(u) = \|u\| = 1$. Isso mostra que $\sigma(u)$ é um subconjunto fechado do disco unitário centrado em 0: $\overline{D_1} := \{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda| \leq 1\}$. Pelas Proposições 40.31 e 40.32, tem-se $\sigma(u) = \sigma\left(u^*\right)^{cc} = \sigma\left(u^{-1}\right)^{cc} = \left(\sigma(u)^{-1}\right)^{cc}$. Agora, os únicos subconjuntos de $\overline{D_1}$ invariantes por inversão e conjugação complexa são subconjuntos de S^1. ■

Proposição 40.44 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra* C* *com unidade seja $a \in \mathcal{A}$, autoadjunto. Então, $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Mais precisamente, $\sigma(a)$ é um subconjunto compacto de $[-\|a\|,\ \|a\|]$.* □

Há diversas demonstrações dessa importante proposição. A que apresentamos abaixo é inspirada na da referência [77] (mas não idêntica à mesma) e faz uso de poucos recursos da teoria. A demonstração de [367], por exemplo, merece ser comparada. Mais adiante, Teorema 40.29, página 2280, apresentaremos uma outra demonstração para operadores limitados autoadjuntos agindo em espaços de Hilbert.

Prova da Proposição 40.44. Se $a = 0$ não há o que demonstrar. Seja então $a \neq 0$ e sejam $p > 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, sendo que a parte imaginária de λ é não-nula. Se $|\lambda| > \|a\|$ então já sabemos que $\lambda \notin \sigma(a)$, de modo que é suficiente considerarmos $|\lambda| \leq \|a\|$. Se escolhermos $p < \|a\|^{-1}$, a norma dos operadores $\pm ipa$ será $p\|a\| < 1$ e pela Proposição 40.26, página 2217, os operadores $\mathbb{1} \pm ipa$ são inversíveis. Além disso, com essas escolhas $p < \|a\|^{-1} < |\lambda|^{-1}$, de modo que $1 \pm ip\lambda \neq 0$. Temos, assim,

$$\begin{aligned}
\lambda\mathbb{1} - a &= \left(\frac{2ip\lambda}{2ip}\right)\mathbb{1} - \left(\frac{2ip}{2ip}\right)a \\
&= \left(\frac{\left[(1+ip\lambda) - (1-ip\lambda)\right]}{2ip}\right)\mathbb{1} - \left(\frac{ip\left[(1-ip\lambda) + (1+ip\lambda)\right]}{2ip}\right)a \\
&= \left(\frac{1}{2ip}\right)\Big[(1+ip\lambda)(\mathbb{1}-ipa) - (1-ip\lambda)\,(\mathbb{1}+ipa)\Big] \\
&= \left(\frac{1-ip\lambda}{2ip}\right)\left[\left(\frac{1+ip\lambda}{1-ip\lambda}\right)(\mathbb{1}-ipa) - (\mathbb{1}+ipa)\right] \\
&= \left(\frac{1-ip\lambda}{2ip}\right)\left[\left(\frac{1+ip\lambda}{1-ip\lambda}\right)\mathbb{1} - (\mathbb{1}+ipa)(\mathbb{1}-ipa)^{-1}\right](\mathbb{1}-ipa)\,. \qquad (40.72)
\end{aligned}$$

A invertibilidade de $\mathbb{1} \pm ipa$ é garantida com a escolha $0 < p < \|a\|^{-1}$. De (40.72) concluímos que $\lambda\mathbb{1} - a$ terá inversa se

$$v := \left(\frac{1+ip\lambda}{1-ip\lambda}\right)\mathbb{1} - (\mathbb{1}+ipa)(\mathbb{1}-ipa)^{-1}$$

for inversível. Mostraremos que tal é o caso provando que $u := (\mathbb{1}+ipa)(\mathbb{1}-ipa)^{-1}$ é unitário e que $\frac{1+ip\lambda}{1-ip\lambda}$ é um número complexo de módulo diferente de 1. Para provar que u é unitário, fazemos o seguinte desenvolvimento: como

$(\mathbb{1}+ipa)^{-1}(\mathbb{1}+ipa) = \mathbb{1} = (\mathbb{1}+ipa)(\mathbb{1}+ipa)^{-1}$, fica evidente que $(\mathbb{1}+ipa)^{-1}$ e a comutam. Logo,

$$u^{-1} = \left((\mathbb{1}+ipa)(\mathbb{1}-ipa)^{-1}\right)^{-1} = (\mathbb{1}-ipa)(\mathbb{1}+ipa)^{-1} \overset{\text{comutativ.}}{=} (\mathbb{1}+ipa)^{-1}(\mathbb{1}-ipa)$$

$$\overset{a=a^*}{=} \left((\mathbb{1}-ipa)^*\right)^{-1}(\mathbb{1}+ipa)^* = \left((\mathbb{1}+ipa)(\mathbb{1}-ipa)^{-1}\right)^* = u^*\,,$$

provando que u é unitário. Escrevendo $\lambda = x + iy$ com $x,\ y \in \mathbb{R}$, teremos

$$\left|\frac{1+ip\lambda}{1-ip\lambda}\right|^2 = \frac{(1-py)^2+(px)^2}{(1+py)^2+(px)^2} \neq 1 \quad \text{se } y \neq 0\,.$$

Como u é unitário e seu espectro é formado por números complexos de módulo 1 (Proposição 40.43), concluímos que v é inversível e, por (40.72), $\lambda\mathbb{1} - a$ também o é com

$$(\lambda\mathbb{1} - a)^{-1} = \left(\frac{2ip}{1-ip\lambda}\right)(\mathbb{1}-ipa)^{-1}v^{-1}\,.$$

Assim, provamos que $\lambda\mathbb{1} - a$ tem inversa para todo λ com parte imaginária não-nula. Portanto, todo número complexo com parte imaginária não-nula está no conjunto resolvente de a, $\rho(a)$. Logo, $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Como $r(a) = \|a\|$, concluímos que $\sigma(a) \subset [-\|a\|,\ \|a\|]$. Que $\sigma(a)$ é fechado foi provado na Proposição 40.36, página 2223. ■

*

A noção de espectro será estudada mais detalhadamente adiante no contexto de operadores limitados agindo em espaços de Banach e, especialmente, de Hilbert. Em tais casos uma classificação mais detalhada dos tipos de espectro é possível. Vide Seção 40.6, página 2276.

40.3.7 O Homomorfismo de Gelfand em Álgebras C*

Esta seção é dedicada à demonstração de um fato central da teoria das álgebras C*, o qual reflete-se também na teoria dos operadores limitados agindo em espaços de Hilbert. A afirmação é que se a é um elemento autoadjunto de uma álgebra C* com unidade $\mathcal{A}$, então existe um homomorfismo ϕ_a entre a álgebra $C(\sigma(a))$ das funções contínuas definidas no espectro de a e a álgebra $\mathcal{A}$. Esse homomorfismo é denominado *homomorfismo de Gelfand*[25].

A existência do homomorfismo de Gelfand e suas propriedades são consequência, basicamente de duas coisas: do Teorema de Weierstrass (Teorema 37.18, página 1992), que garante a possibilidade de aproximar uniformemente funções contínuas definidas em um conjunto compacto da reta real (como o espectro de um operador autoadjunto de uma álgebras C* com unidade) por polinômios, e da proposição que segue, a qual garante que para todo polinômio p e todo elemento autoadjunto a de uma álgebra C* com unidade $\mathcal{A}$, a aplicação $p : \sigma(a) \to \mathcal{A}$ é isométrica.

Proposição 40.45 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra* C* *com unidade e seja $a \in \mathcal{A}$ um elemento autoadjunto de $\mathcal{A}$ (isto é, $a^* = a$). Seja também $p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ um polinômio em $x \in \mathbb{C}$. Então, o espectro de $p(a)$ é a imagem por p do espectro de a, ou seja,*

$$\sigma\big(p(a)\big) = \big\{p(\lambda),\ \lambda \in \sigma(a)\big\} =: p\big(\sigma(a)\big)\,. \qquad (40.73)$$

Fora isso, $\|p(a)\| = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |p(\lambda)| =: \|p\|_\infty$. □

Prova. O fato que $\sigma(p(a)) = \{p(\lambda),\ \lambda \in \sigma(a)\}$ foi estabelecido no Teorema 40.15, página 2226. Para determinar $\|p(a)\|$ lembremos que pela propriedade C* vale $\left\|p(a)\right\|^2 = \left\|p(a)^*p(a)\right\|$. Agora,

$$p(a)^*p(a) = \left(\sum_{k=0}^{n} b_k a^k\right)^* \left(\sum_{l=0}^{n} b_l a^l\right) \overset{a=a^*}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \overline{b_k} a^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} b_l a^l\right) = \sum_{k,\,l=0}^{n} \overline{b_k} b_l\, a^{k+l} = (\overline{p}p)(a)\,,$$

[25] Israil Moiseevic Gelfand (1913–2009).

onde $\overline{p}p$ é o polinômio de grau $2n$ definido para $x \in \mathbb{R}$ por

$$(\overline{p}p)(x) \;:=\; \overline{p(x)}p(x) \;=\; \sum_{k,\,l=0}^{n} \overline{b_k} b_l \, x^{k+l} \,.$$

Como $p(a)^* p(a) = (\overline{p}p)(a)$ é autoadjunto, aplica-se o Teorema 40.17, página 2228, e tem-se

$$\big\|p(a)^*p(a)\big\| \;=\; \big\|(\overline{p}p)(a)\big\| \overset{(40.68)}{=} r\big((\overline{p}p)(a)\big) \overset{\text{definição}}{=} \sup_{\mu\in\,\sigma\left((\overline{p}p)(a)\right)} |\mu| \overset{(40.66)}{=} \sup_{\mu\in\left\{(\overline{p}p)(\lambda),\,\lambda\in\sigma(a)\right\}} |\mu|$$

$$= \sup_{\lambda\in\sigma(a)} \big|(\overline{p}p)(\lambda)\big| \;=\; \sup_{\lambda\in\sigma(a)} \Big|\overline{p(\lambda)}p(\lambda)\Big| \;=\; \sup_{\lambda\in\sigma(a)} \big|p(\lambda)\big|^2 \;=\; \left(\sup_{\lambda\in\sigma(a)} \big|p(\lambda)\big|\right)^2 \,,$$

estabelecendo o que queríamos. ■

Corolário 40.11 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C* com unidade e seja $a \in \mathcal{A}$ um elemento autoadjunto (isto é, satisfazendo $a^* = a$) ou normal (isto é, satisfazendo $a^*a = aa^*$). Então, vale*

$$\big\|a^n\big\| \;=\; \|a\|^n \tag{40.74}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Prova. Consideremos primeiro a autoadjunto Tomando o polinômio $p(a) = a^n$, a Proposição 40.45, página 2231, diz-nos que $\big\|a^n\big\| = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda^n| = \Big(\sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda|\Big)^n = r(a)^n \overset{(40.68)}{=} \|a\|^n$.

Seja agora a normal, ou seja, satisfazendo $a^*a = aa^*$. Temos, pela propriedade C* (página 2210), $\big\|a^n\big\|^2 = \big\|(a^n)^*a^n\big\| = \big\|(a^*)^n a^n\big\| = \big\|(a^*a)^n\big\|$, sendo que na última passagem usamos a propriedade de a^* e a comutarem. Agora, a^*a é autoadjunta e, portanto, pelo resultado anterior, vale $\big\|(a^*a)^n\big\| = \big\|a^*a\big\|^n = \|a\|^{2n}$, onde, na última passagem, novamente usamos a propriedade C*. Isso provou que $\big\|a^n\big\|^2 = \|a\|^{2n}$, como desejávamos estabelecer. ■

Seja agora o espaço de Banach $C(\sigma(a))$ da funções complexas contínuas definidas no espectro de a dotado da norma $\|f\|_\infty := \sup_{\lambda\in\sigma(a)} \big|f(\lambda)\big|$ e seja $P(\sigma(a))$ o subespaço de $C(\sigma(a))$ formado por polinômios. Sabemos pelo Teorema de Weierstrass (Teorema 37.18, página 1992) que $P(\sigma(a))$ é denso em $C\big(\sigma(a)\big)$. Vimos também na Proposição 40.45 que a aplicação $\phi_a \equiv \phi : P\big(\sigma(a)\big) \to \mathcal{A}$ dada por $\phi(p) = p(a)$ satisfaz $\big\|\phi(p)\big\| = \|p\|_\infty$. Ora, isso diz-nos que ϕ é limitada e, pelo Teorema BLT, Teorema 40.1, página 2175, pode ser estendida unicamente e isometricamente ao fecho de $P\big(\sigma(a)\big)$ que é $C\big(\sigma(a)\big)$. Essa extensão também será denotada por ϕ. Assim, para toda $f \in C\big(\sigma(a)\big)$ podemos definir $\phi(f)$ como limite em norma de operadores $\phi(p)$, com p sendo polinômios que convergem a f na norma $\|\cdot\|_\infty$.

Denotaremos também sugestivamente $\phi(f)$, para $f \in C\big(\sigma(a)\big)$, por $f(a)$. Tem-se os seguintes fatos sobre $\phi(f)$.

Teorema 40.18 (O Homomorfismo de Gelfand em Álgebras C*) *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C* com unidade, seja $a \in \mathcal{A}$ autoadjunto e seja $\phi_a \equiv \phi : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$ definida acima. Para todo polinômio p vale $\phi(p) = p(a)$. Como vimos, pelo Teorema BLT, Teorema 40.1, página 2175, tem-se $\|\phi(f)\| = \|f\|_\infty$ para toda $f \in C\big(\sigma(a)\big)$. Fora isso, valem as seguintes afirmações:*

1. *A aplicação ϕ é um $*$-homomorfismo algébrico, ou seja,*

$$\phi(\alpha f + \beta g) \;=\; \alpha\phi(f) + \beta\phi(g)\,, \qquad \phi(fg) \;=\; \phi(f)\phi(g)\,, \qquad \phi(f)^* \;=\; \phi\big(\overline{f}\big)\,, \qquad \phi(1) \;=\; \mathbb{1}\,, \tag{40.75}$$

   para todas $f,\ g \in C\big(\sigma(a)\big)$ e todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$. Como $fg = gf$, segue de (40.75) que $\phi(f)\phi(g) = \phi(g)\phi(f)$ para todas $f,\ g \in C\big(\sigma(a)\big)$.

2. *Se $f \geq 0$ tem-se $\sigma\big(\phi(f)\big) \subset [0,\ \infty)$.*

3. *Se $f_n \in C\big(\sigma(a)\big)$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência que converge na norma $\|\cdot\|_\infty$ a uma função $f \in C\big(\sigma(a)\big)$ então $\phi(f_n)$ converge a $\phi(f)$ na norma de $\mathcal{A}$. Reciprocamente, se $\phi(f_n)$ converge na norma de $\mathcal{A}$, então existe $f \in C\big(\sigma(a)\big)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \phi(f_n) = \phi(f)$. Isso diz-nos que $\big\{\phi(f),\ f \in C\big(\sigma(a)\big)\big\}$ é fechada na norma de $\mathcal{A}$. Com a propriedade do item 1, isso significa que $\big\{\phi(f),\ f \in C\big(\sigma(A)\big)\big\}$ é uma subálgebra C* Abeliana com unidade de $\mathcal{A}$.*

4. *$\sigma\big(\phi(f)\big) = \big\{f(\lambda),\ \lambda \in \sigma(a)\big\} =: f\big(\sigma(a)\big)$ para toda $f \in C\big(\sigma(a)\big)$.* □

O $*$-homomorfismo $\phi : C\big(\sigma(a)\big) \to \mathcal{A}$ é por vezes denominado *homomorfismo de Gelfand*.

Prova do Teorema 40.18.

Prova do item 1. A aplicação $\phi : C\big(\sigma(a)\big) \to \mathcal{A}$ é limitada e, portanto, contínua. As propriedades (40.75), que caracterizam ϕ como um $*$-homomorfismo algébrico, são triviais de se verificar no subespaço denso $P\big(\sigma(a)\big)$ e daí se estendem facilmente a todo $C\big(\sigma(a)\big)$ por continuidade.

Prova do item 2. Se $f \geq 0$ então $f = g^2$ para alguma g real e contínua. Logo, pela propriedade de homomorfismo em (40.75) vale $\phi(f) = \phi\big(g^2\big) = \phi(g)^2$. Também por (40.75), $\phi(g)$ é autoadjunto e, portanto, pelo Teorema 40.15, página 2226, o espectro de $\phi(g)^2$ é um subconjunto de $[0,\ \infty)$.

Prova do item 3. Tem-se $\big\|\phi(f_n) - \phi(f)\big\| = \big\|\phi(f - f_n)\big\| = \|f - f_n\|_\infty$. Logo, se $\|f - f_n\|_\infty \to 0$, segue $\big\|\phi(f_n) - \phi(f)\big\| \to 0$. Reciprocamente, se $\phi(f_n)$ converge na norma de $\mathcal{A}$, segue que $\phi(f_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{A}$. Assim, como $\big\|\phi(f_n) - \phi(f_m)\big\| = \|f_n - f_m\|_\infty$, a sequência f_n é de Cauchy em $C\big(\sigma(a)\big)$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Como $C\big(\sigma(a)\big)$ é completo em relação a essa norma, existe $f \in C\big(\sigma(a)\big)$ à qual f_n converge e, portanto, $\lim_{n\to\infty} \phi(f_n) = \phi(f)$.

Prova do item 4. Se λ não pertence à imagem de $\sigma(a)$ por f então $r := \frac{1}{(f-\lambda)}$ é contínua e, portanto, $\phi(r)$ está bem definida e vale $\phi(r)\phi(f - \lambda) = \phi(f - \lambda)\phi(r) = \mathbb{1}$, pelas propriedades de homomorfismo, provando que $\phi(f) - \lambda\mathbb{1}$ é inversível e que, portanto, $\lambda \in \rho(\phi(f))$, o conjunto resolvente de $\phi(f)$. Isso estabeleceu que o complemento da imagem de f, $\mathbb{C} \setminus \big\{f(\lambda),\ \lambda \in \sigma(a)\big\}$, é um subconjunto de $\rho\big(\phi(f)\big)$. Logo, $\sigma\big(\phi(f)\big) \subset \big\{f(\lambda),\ \lambda \in \sigma(a)\big\}$. Vamos agora demonstrar a inclusão oposta. Seja $\mu \in \big\{f(\lambda),\ \lambda \in \sigma(a)\big\}$, ou seja, $\mu = f(\lambda_0)$ para algum $\lambda_0 \in \sigma(a)$ e vamos supor que $\mu \in \rho\big(\phi(f)\big)$, ou seja, que $F := \phi(f) - f(\lambda_0)\mathbb{1}$ é inversível. Seja agora $P := \phi(p) - p(\lambda_0)\mathbb{1}$ para algum polinômio p tal que $\|f - p\|_\infty < \epsilon$. Teremos, $F - P = \phi(f - p) - \big(f(\lambda_0) - p(\lambda_0)\big)\mathbb{1}$ e, assim,

$$\|F - P\| \;\leq\; \big\|\phi(f - p)\big\| + \big|f(\lambda_0) - p(\lambda_0)\big|\,\|\mathbb{1}\| \;=\; \|f - p\|_\infty + \big|f(\lambda_0) - p(\lambda_0)\big| \;\leq\; 2\|f - p\|_\infty \;<\; 2\epsilon\,.$$

Agora, pelo Corolário 40.5, página 2219, se escolhermos esse ϵ pequeno o suficiente tal que $\|F - P\| < \|F^{-1}\|^{-1}$, então P será inversível em $\mathcal{A}$, o que implica $p(\lambda_0) \notin \sigma\big(\phi(p)\big)$ com $\lambda_0 \in \sigma(a)$. Isso contraria (40.73). Logo, devemos ter $\mu \notin \rho\big(\phi(f)\big)$, ou seja, $\mu \in \sigma\big(\phi(f)\big)$, o que prova $\big\{f(\lambda),\ \lambda \in \sigma(a)\big\} \subset \sigma\big(\phi(f)\big)$, estabelecendo a igualdade desses dois conjuntos. Isso completa a prova do Teorema 40.18 ■

Comentamos que a identificação $\sigma\big(\phi(f)\big) = \big\{f(\lambda),\ \lambda \in \sigma(a)\big\}$ não contraria o fato de $\sigma\big(\phi(f)\big)$ ser fechado, pois a imagem de um conjunto compacto (no caso, $\sigma(a)$) por uma função contínua (no caso, f) é sempre um conjunto compacto (ou seja, fechado e limitado). Vide Teorema 32.5, página 1614.

• **A noção de álgebra C* gerada por um conjunto de operadores**

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $\big\{\mathcal{A}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\big\}$ uma família não vazia de subálgebras C* de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por definição, todas as álgebras $\mathcal{A}_\lambda$ são fechadas na topologia uniforme de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (definida pela norma operatorial) por serem completas. Logo, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ é também fechada na topologia uniforme e, portanto, é também uma subálgebra C* de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (que é uma subálgebra e que satisfaz a propriedade C* são fatos evidentes).

Se $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um conjunto não-vazio de elementos operadores limitados agindo em $\mathcal{H}$, denotamos por $\mathrm{C}^*[\mathcal{B}]$ a intersecção de todas as álgebras C* que contém $\mathcal{B}$. A álgebra C* assim definida, $\mathrm{C}^*[\mathcal{B}]$, é a "menor" álgebra C* que contém $\mathcal{B}$ e é denominada a *álgebra C* gerada por* $\mathcal{B}$. Note-se que $\mathrm{C}^*[\mathcal{B}]$ contém os elementos de $\mathcal{B}$, seus adjuntos e todos os polinômios compostos pelos mesmos.

Se A é um operador autoadjunto limitado agindo em $\mathcal{H}$, a álgebra C* gerada por $\{\mathbb{1},\ A\}$, ou seja, $\mathrm{C}^*\big[\{\mathbb{1},\ A\}\big]$, coincide com a imagem do homomorfismo de Gelfand $\phi : C\big(\sigma(A)\big) \to \mathcal{B}(\mathcal{A})$, ou seja, com o fecho na topologia uniforme de todos os polinômios em A e $\mathbb{1}$. Denotaremos $\mathrm{C}^*\big[\{\mathbb{1},\ A\}\big]$ simplesmente por $\mathrm{C}^*[A]$.

40.3.8 Raízes Quadradas de Operadores em Álgebras de Banach

Na teoria dos operadores é muito importante definir condições sob as quais se possa associar uma raiz quadrada a certos tipos de operadores. Esta seção é dedicada ao assunto e apresentaremos inicialmente alguns resultados gerais, para o contexto de álgebras de Banach ou de Banach-$*$, e ao final especializaremo-nos em operadores autoadjuntos em álgebras C* ou agindo em espaços de Hilbert. Algumas das demonstrações abaixo são um tanto técnicas e sua leitura pode ser dispensada em uma primeira visita. Começamos com o seguinte resultado.

Teorema 40.19 *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade e $w \in \mathcal{B}$ tal que $\|w\| \leq 1$. Então existe $y \in \mathcal{B}$ tal que $y^2 = \mathbb{1} - w$. Esse y é dado por*

$$y \,:=\, \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n \,:=\, \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n w^n \,, \tag{40.76}$$

sendo que o limite em (40.76) converge na norma de $\mathcal{B}$ e onde

$$c_0 \,=\, 1, \qquad c_1 \,=\, -\frac{1}{2}, \qquad e \qquad c_n \,=\, -\frac{(2n-3)!!}{2^n n!} \,=\, -\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}, \;\; n>1\,, \tag{40.77}$$

são os coeficientes da expansão em série de Taylor em torno de $z_0 = 0$ da função $f(z) = \sqrt{1-z}$, analítica no disco unitário aberto $D_1 = \{z \in \mathbb{C} |\; |z|<1\}$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Se $\mathcal{B}$ for uma álgebra de Banach-$*$ unital e w for autoadjunto, então y dado em (40.76) é igualmente autoadjunto. □

Destacamos o fato que o enunciado acima fala de $\|w\| \leq 1$ e não apenas $\|w\| < 1$. Isso será importante mais adiante. Por ser um tanto técnica, a demonstração do Teorema 40.19 é apresentada no Apêndice 40.A, página 2360. Nossa demonstração é inspirada na (mas não idêntica à) de [412]. [26]

Corolário 40.12 *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach-$*$ com unidade. Se $x \in \mathcal{B}$ é tal que $\|x\| \leq 1$ então existe $y \in \mathcal{B}$ autoadjunto ($y^* = y$) tal que $\mathbb{1} - x^*x = y^*y = y^2$.* □

Prova. Seja $w = x^*x$. Tem-se $\|w\| = \|x^*x\| \leq \|x^*\|\,\|x\| = \|x\|^2 \leq 1$. Podemos, portanto, aplicar o Teorema 40.19, acima. Fora isso, nesse caso $s_n = \sum_{n=0}^{N} c_n (x^*x)^n$ são todos autoadjuntos pois $(x^*x)^* = x^*x$ e os c_n's são reais. Assim, $y = \lim_{N\to\infty} s_N$ é também autoadjunto (por quê?). Logo, pelo que vimos $y^*y = y^2 = \mathbb{1} - x^*x$, o que queríamos provar. ■

Corolário 40.13 *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade. Seja $w \in \mathcal{B}$ tal que $\|\mathbb{1} - w\| \leq 1$. Então, existe $y \in \mathcal{B}$ tal que $y^2 = w$, a saber*

$$y \,:=\, \sum_{n=0}^{\infty} c_n \big(\mathbb{1} - w\big)^n \,, \tag{40.78}$$

com os c_n's definidos em (40.77). Se $\mathcal{B}$ for também uma álgebra de Banach-$*$ e w for autoadjunto então y dado em (40.78) é igualmente autoadjunto. □

Prova. O operador $\mathbb{1} - w$ satisfaz as condições do Teorema 40.19, página 2234. Logo, pelo mesmo teorema, o elemento $y \in \mathcal{B}$ dado em (40.78) é tal que $y^2 = \mathbb{1} - (\mathbb{1} - w) = w$. Se $\mathcal{B}$ for também uma álgebra de Banach-$*$ e w for autoadjunto, então y dado em (40.78) é também autoadjunto, pois as constantes c_n são reais e pois a operação de involução $*$ é contínua na norma. ■

[26] É instrutivo compará-la à de [77] (Teorema 2.2.10) para álgebras C*.

Corolário 40.14 *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade. Seja $v \in \mathcal{B}$, $v \neq 0$, tal que $\left\|\mathbb{1} - \frac{v}{\|v\|}\right\| \leq 1$. Então, existe ao menos um $y \in \mathcal{B}$ tal que $y^2 = v$, a saber,*

$$y \,:=\, \|v\|^{1/2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\mathbb{1} - \frac{v}{\|v\|}\right)^n\right] \,, \tag{40.79}$$

com os c_n's definidos em (40.77). Se $\mathcal{B}$ for também uma álgebra de Banach-$*$ e v for autoadjunto, então y dado em (40.79) é igualmente autoadjunto. □

Prova. O operador $\frac{v}{\|v\|}$ satisfaz as condições do corolário anterior. Logo, um existe $y_0 \in \mathcal{B}$ tal que $y_0^2 = \mathbb{1} - \left(\mathbb{1} - \frac{v}{\|v\|}\right) = \frac{v}{\|v\|}$, a saber $y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\mathbb{1} - \frac{v}{\|v\|}\right)^n$. Portanto $y = \|v\|^{1/2} y_0$ é tal que $y^2 = v$. Se $\mathcal{B}$ for também uma álgebra de Banach-$*$ e w for autoadjunto, então y dado em (40.79) é também autoadjunto, pois as constantes c_n são reais e pois a operação de involução $*$ é contínua na norma. ■

Proposição 40.46 *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade e denotemos por $\overline{\mathcal{B}_1} \subset \mathcal{B}$ a bola fechada de raio 1 centrada em 0: $\overline{\mathcal{B}_1} := \{v \in \mathcal{B},\; \|v\| \leq 1\}$. Seguindo o Teorema 40.19, página 2234, seja para cada $v \in \overline{\mathcal{B}_1}$ o elemento $y(v) \in \mathcal{B}$ dado por*

$$y(v) = \lim_{N\to\infty} p_N(v)\,, \qquad \textit{com} \qquad p_N(v) \,:=\, \sum_{n=0}^{N} c_n v^n \,,$$

com c_n dados em (40.77), para o qual vale $y(v)^2 = \mathbb{1} - v$. Seja $w \in \overline{\mathcal{B}_1}$ seja $W := \{w_m \in \overline{\mathcal{B}_1}\,, m \in \mathbb{N}\}$ uma sequência tal que $\lim_{m\to\infty} \|w_m - w\| = 0$. Então, $\lim_{m\to\infty} \|y(w_m) - y(w)\| = 0$. Com isso, estamos afirmando que a aplicação $\overline{\mathcal{B}_1} \ni v \mapsto y(v)$ é contínua na topologia uniforme de $\mathcal{B}$. □

Prova. Para todos $N \in \mathbb{N}$ e $v \in \overline{\mathcal{B}_1}$, vale

$$\big\|y(v) - p_N(v)\big\| \;\leq\; \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|\,\|v\| \;\leq\; \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|\,.$$

Em (40.A.1), página 2360, estabelecemos que $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \leq 2$ e, portanto, para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| \leq \epsilon$ sempre que $N \geq N(\epsilon)$. Logo, para todo $\epsilon > 0$ e para todo $v \in \overline{\mathcal{B}_1}$ existe $N(\epsilon)$, independente de v, tal que $\big\|y(v) - p_N(v)\big\| \leq \epsilon$ sempre que $N \geq N(\epsilon)$.

Para todo $N \in \mathbb{N}$ e todo $w_m \in W$ vale

$$\big\|p_N(w) - p_N(w_m)\big\| \;\leq\; \sum_{n=0}^{N} |c_n|\,\|w^n - w_m^n\| \overset{(40.49)}{\leq} \left[\sum_{n=0}^{N} |c_n|(n+1)\right] \|w - w_m\|$$

$$\leq\; (N+1)\left[\sum_{n=0}^{N} |c_n|\right] \|w - w_m\| \overset{(40.A.1)}{\leq} 2(N+1)\|w - w_m\|\,.$$

Como $\|w_m - w\| \to 0$, existe para cada $\epsilon > 0$ um $M(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|w - w_m\| \leq \epsilon$ para todo $m \geq M(\epsilon)$. Assim, para cada $\epsilon > 0$, teremos

$$\|y(w) - y(w_m)\| \;\leq\; \|y(w) - p_{N(\epsilon)}(w)\| + \|y(w_m) - p_{N(\epsilon)}(w_m)\| + \big|p_{N(\epsilon)}(w) - p_{N(\epsilon)}(w_m)\| \;\leq\; 2\epsilon + 2(N(\epsilon)+1)\|w - w_m\| \;\leq\; 4\epsilon$$

para todo $w \in \overline{\mathcal{B}_1}$ e $w_m \in W$, desde que $m \geq M\big(\epsilon/(N(\epsilon)+1)\big)$. ■

* ** *

O Corolário 40.14 tem uma consequência para álgebras C*: todo elemento de uma álgebra C* que tenha espectro positivo tem uma raiz quadrada. Isso será demonstrado no que segue.

40.3.9 Elementos Positivos de Álgebras C*

Um elemento autoadjunto v de uma álgebra C* $\mathcal{A}$ é dito ser *positivo* se satisfazer $\sigma(v) \subset [0,\ \infty)$, ou seja, $\sigma(v) \subset [0,\ \|v\|]$. A proposição seguinte estabelece um fato básico sobre elementos positivos em álgebras C* o qual será repetidamente empregado no que segue.

Proposição 40.47 *Se a e b são elementos autoadjuntos e positivos de uma álgebra C* com unidade e tais que $a+b=0$ então $a=0$ e $b=0$.* □

Prova. Se $\sigma(a) \subset [0,\ \infty)$ então, pelo Teorema da Aplicação Espectral, Teorema 40.15, página 2226, vale que $\sigma(-a) \subset (-\infty,\ 0]$. Logo, se $b=-a$ tem-se $\sigma(b) \subset (-\infty,\ 0]$. Se b é positivo (ou seja, se $\sigma(b) \subset [0,\ \infty)$, isso implica que $\sigma(b)=\{0\}$. Logo $r(b)=0$ e pelo Teorema 40.17, concluímos que $\|b\|=0$. Assim, $a=-b=0$. ■

O leitor deve ser advertido que as afirmações da última proposição não são necessariamente válidas em álgebras de Banach que não sejam álgebras C*. A seguinte proposição estabelece algumas condições equivalentes à positividade.

Proposição 40.48 *Se v é um elemento autoadjunto não-nulo de uma álgebra C* com unidade $\mathcal{A}$, são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. $\sigma(v) \subset \big[0,\ \|v\|\big]$.
2. $\Big\|\mathbb{1} - \frac{v}{\|v\|}\Big\| \leq 1$.
3. *Existe $y \in \mathcal{A}$ autoadjunto tal que $y^2 = v$.*

O operador y do item 3 não é único pois $-y$, por exemplo, tem a mesma propriedade. Porém, existe um <u>único</u> y_p autoadjunto com espectro positivo, tal que $y_p^2 = v$. Esse elemento positivo y_p será também denotado por $\sqrt{v}$. □

Mais adiante (Teorema 40.21) provaremos o importante fato que em álgebras C*, elementos da forma x^*x são positivos.

Prova da Proposição 40.48.

$1 \to 2$ Pelo Teorema da Aplicação Espectral, Teorema 40.15, página 2226, e pelas hipóteses sobre o espectro de v, tem-se $\sigma\left(\mathbb{1} - \frac{v}{\|v\|}\right) = \left\{1 - \frac{\lambda}{\|v\|},\ \lambda \in \sigma(v)\right\} \subset \left\{1 - \frac{\lambda}{\|v\|},\ \lambda \in \big[0,\ \|v\|\big]\right\} = [0,\ 1]$. Assim, pelo Teorema 40.17, página 2228, $\Big\|\mathbb{1} - \frac{v}{\|v\|}\Big\| = r\left(\mathbb{1} - \frac{v}{\|v\|}\right) \leq 1$.

$2 \to 3$ A existência de tal y segue do Corolário 40.14.

$3 \to 1$ Como y é autoadjunto vale, pela propriedade C*, $\|y\|^2 = \big\|y^2\big\| = \|v\|$. A afirmação do item 1 segue do Teorema da Aplicação Espectral, Teorema 40.15, página 2226.

Podemos encontrar um y_p autoadjunto com espectro positivo e tal que $y_p^2 = v$ usando o Homomorfismo de Gelfand ϕ_v (Teorema 40.18, página 2232) da seguinte forma. Como $\sigma(v) \subset \big[0,\ \|v\|\big]$, a função $f \in C\big(\sigma(v)\big) \to \mathbb{R}$ dada por $f(\lambda) = \lambda,\ \lambda \in \sigma(v)$, é contínua e positiva, assim como $\sqrt{f}$. Assim, pelo Teorema 40.18, $y_p := \phi_v\big(\sqrt{f}\big)$ satisfaz $y_p^2 = \phi_v\big(\sqrt{f}\big)^2 = \phi_v(f) = v$. Pelo item 2 daquele Teorema, vemos que $\sigma(y_p) \subset [0,\ \infty)$.

Para provar a unicidade do elemento positivo y_p usaremos o seguinte lema, ademais de interesse por si só.

Lema 40.6 *Se a e b são dois elementos autoadjuntos positivos de uma álgebra C* com unidade $\mathcal{A}$ tais que $ab = ba$ então ab é também autoadjunto positivo.* □

Prova. Se a e b são positivos, o homomorfismo de Gelfand fornece dois operadores autoadjuntos positivos c_p e d_p tais que $c_p^2 = a$ e $d_p^2 = b$. Pela construção do homomorfismo de Gelfand, c_p é o limite em norma de polinômios em a e d_p é o limite em norma de polinômios em b. Como a e b comutam, esses aproximantes polinomiais também comutam

e, portanto $c_p d_p = d_p c_p$. Assim, $ab = (c_p)^2(d_p)^2 = (c_p d_p)^2$, que é autoadjunto positivo, pelo Teorema da Aplicação Espectral, Teorema 40.15, página 2226. ■

Para demonstrar a unicidade de y_p, comecemos lembrando que y_p é obtido pelo homomorfismo de Gelfand e, portanto, é um limite em norma de polinômios em v. Assim, se b é um operador qualquer que comuta com v, então b comuta com y_p. Vamos supor que b seja também positivo e tal que $b^2 = v$. Como $b^3 = b(b^2) = (b^2)b$ segue que $bv = vb$. Assim, b e y_p também comutam. Teremos assim,

$$0 \;=\; (v-v)(y_p-b) \;=\; \big(y_p^2 - b^2\big)(y_p-b) \;\overset{by_p=y_pb}{=}\; (y_p-b)(y_p+b)(y_p-b)$$

$$= \; (y_p-b)y_p(y_p-b) + (y_p-b)b(y_p-b) \;\overset{by_p=y_pb}{=}\; (y_p-b)^2 y_p + (y_p-b)^2 b\,.$$

Pelo Lema 40.6, ambos $(y_p-b)^2 y_p$ e $(y_p-b)^2 b$ são positivos e, portanto, pela Proposição 40.47, concluímos que $(y_p-b)^2 y_p = 0$ e $(y_p-b)^2 b = 0$. Subtraindo um do outro, obtemos $(y_p-b)^3 = 0$, o que trivialmente implica $(y_p-b)^4 = 0$. Agora, como $y_p - b$ é autoadjunto obtemos, aplicando duas vezes a propriedade C* da norma: $\|y_p-b\|^4 = \big\|(y_p-b)^2\big\|^2 = \big\|(y_p-b)^4\big\| = 0$, provando que $y_p = b$. Isso estabeleceu a unicidade desejada e completou a prova da Proposição 40.48. ■

Corolário 40.15 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C* com unidade e $b \in \mathcal{A}$, autoadjunto e tal que $\|b\| \leq 1$. Então, existe um elemento autoadjunto e positivo $y_p \in \mathcal{A}$ tal que $y_p^2 = \mathbb{1} - b$. Esse elemento será denotado por $\sqrt{\mathbb{1} - b}$.* □

Prova. Seja $w := \mathbb{1} - b$. Naturalmente, $\|1 - w\| = \|b\| \leq 1$. Logo, pelo Corolário 40.13, página 2234, existe um elemento autoadjunto $y \in \mathcal{A}$ tal que $y^2 = w$. Pelo Teorema 40.48, página 2236, existe y_p autoadjunto e positivo, único, tal que $y_p^2 = w$. ■

Vemos que um elemento autoadjunto v de uma álgebra C* com unidade $\mathcal{A}$ é positivo se satisfizer quaisquer das condições equivalentes da Proposição 40.48, acima. Mais adiante provaremos o importante fato que em álgebras C*, elementos da forma x^*x são positivos. O primeiro passo nessa direção é o seguinte teorema de decomposição.

Proposição 40.49 *Todo elemento autoadjunto a de $\mathcal{A}$, uma álgebra C* com unidade, pode ser escrito na forma $a = a_+ - a_-$, onde $a_\pm$ são autoadjuntos e positivos, comutam com a e satisfazem $a_+a_- = a_-a_+ = 0$.* □

Prova. Sejam as funções reais $f_+(\lambda) := \frac{1}{2}\big(|\lambda| + \lambda\big)$ e $f_-(\lambda) := \frac{1}{2}\big(|\lambda| - \lambda\big)$. Ambas são contínuas, positivas, satisfazem $f_+f_- = 0$ e $\lambda = f_+(\lambda) - f_-(\lambda)$. Usando o homomorfismo de Gelfand ϕ_a, definimos $a_+ := \phi_a(f_+)$ e $a_- := \phi_a(f_-)$. Pelo Teorema 40.18, esses operadores têm as propriedades desejadas. ■

Vamos denotar por $\mathcal{A}_+$ o conjunto de todos os elementos autoadjuntos positivos de uma álgebra C* com unidade $\mathcal{A}$. O seguinte teorema resume as propriedades geométricas e topológicas mais importantes de $\mathcal{A}_+$.

Teorema 40.20 *O conjunto $\mathcal{A}_+$, formado por todos os elementos autoadjuntos positivos de uma álgebra C* com unidade $\mathcal{A}$, é um cone convexo e fechado (na topologia da norma de $\mathcal{A}$) e tem a propriedade $\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}$ (ou seja, é um cone* saliente. *Para a nomenclatura, vide Seção 26.2, página 1407).* □

Prova. A afirmação que $\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}$ é um mero refraseamento da Proposição 40.47. Se a é positivo e autoadjunto então, pelo Teorema da Aplicação Espectral, Teorema 40.15, página 2226, λa também o é para todo $\lambda \geq 0$. Isso provou que $\mathcal{A}_+$ é um cone. Provemos agora que $\mathcal{A}_+$ é convexo.

Provemos primeiramente que se $a \in \mathcal{A}_+$, então para todo $p \geq \|a\|$ vale $\big\|\mathbb{1} - p^{-1}a\big\| \leq 1$. De fato, o Teorema da Aplicação Espectral, Teorema 40.15, diz-nos que $\sigma\big(\mathbb{1} - p^{-1}a\big) = \big\{1 - \lambda/p,\ \lambda \in \sigma(a)\big\} \subset \big\{1 - \lambda/p,\ \lambda \in \big[0,\ \|a\|\big]\big\} = \Big[1 - \frac{\|a\|}{p},\ 1\Big] \subset [0,\ 1]$. Isso provou que $r\big(\mathbb{1} - p^{-1}a\big) \leq 1$ e, pelo Teorema 40.17, página 2228, segue que $\big\|\mathbb{1} - p^{-1}a\big\| \leq 1$.

Sejam agora $a,\ b \in \mathcal{A}_+$ e considere-se a combinação linear convexa $\lambda a + (1-\lambda)b$ com $\lambda \in [0,\ 1]$. Para provar que $\lambda a + (1-\lambda)b \in \mathcal{A}_+$, tomemos $P > \max\{\|a\|,\ \|b\|\}$ e escrevamos

$$\begin{aligned}\Big\|\mathbb{1} - P^{-1}\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big)\Big\| &= \Big\|\lambda\left(\mathbb{1} - P^{-1}a\right) + (1-\lambda)\left(\mathbb{1} - P^{-1}b\right)\Big\| \\ &\leq \lambda\left\|\mathbb{1} - P^{-1}a\right\| + (1-\lambda)\left\|\mathbb{1} - P^{-1}b\right\| \\ &\leq \lambda + (1-\lambda) \ = \ 1\,,\end{aligned}$$

a última desigualdade sendo consequência do comentário do parágrafo acima pois, pela escolha, $P > \|a\|$ e $P > \|b\|$. Isso implica que o espectro de $\mathbb{1} - P^{-1}\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big)$ está em $[-1,\ 1]$ e, portanto, o espectro de $P^{-1}\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big)$ está em $[0,\ 2]$. Assim, $\sigma\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \subset [0,\ 2P]$, provando que $\lambda a + (1-\lambda)b$ é positivo.

Resta-nos provar que $\mathcal{A}_+$ é fechado. Seja $a_n \in \mathcal{A}_+$ uma sequência de elementos de $\mathcal{A}_+$ que converge em norma a $a \in \mathcal{A}$. Desejamos provar que $a \in \mathcal{A}_+$. Tomemos $a \neq 0$, pois se $a = 0$ não há o que provar, pois $0 \in \mathcal{A}_+$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que todos os a_n são não-nulos. Como cada a_n é positivo, vale pelo item 2 da Proposição 40.48 $\left\|\mathbb{1} - \frac{a_n}{\|a_n\|}\right\| \leq 1$, ou seja, $\big\|\|a_n\|\mathbb{1} - a_n\big\| \leq \|a_n\|$. Pela continuidade da norma, $a_n \to a$ implica $\|a_n\| \to \|a\|$. Logo,

$$\Big\|\|a\|\mathbb{1} - a\Big\| \ = \ \lim_{n\to\infty}\Big\|\|a_n\|\mathbb{1} - a_n\Big\| \ \leq \ \lim_{n\to\infty}\|a_n\| \ = \ \|a\|\,.$$

Isso provou que $\left\|\mathbb{1} - \frac{a}{\|a\|}\right\| \leq 1$ e, portanto, $a \in \mathcal{A}_+$. ■

Corolário 40.16 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra* C* *com unidade. Se $a,\ b \in \mathcal{A}_+$ então $a + b \in \mathcal{A}_+$.* □

Prova. $a + b = 2(\frac{a+b}{2})$. Agora, $\frac{a+b}{2} \in \mathcal{A}_+$ pois é uma combinação linear convexa de elementos de $\mathcal{A}_+$, que é convexo. Logo, $2(\frac{a+b}{2}) \in \mathcal{A}_+$, pois $\mathcal{A}_+$ é um cone. ■

Corolário 40.17 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra* C* *com unidade. Se para algum $z \in \mathcal{A}$ valer $-z^*z \in \mathcal{A}_+$, então $z = 0$.* □

Prova. Pela Proposição 40.30, página 2220, $\sigma(z^*z) \setminus \{0\} = \sigma(zz^*) \setminus \{0\}$. Assim, se $-z^*z$ é autoadjunto e positivo, $-zz^*$ também o é. Logo, pelo Corolário 40.16, $-z^*z - zz^*$ é autoadjunto e positivo.

Definamos $x := (z + z^*)/2$ e $y := (z - z^*)/(2i)$. Tem-se que

$$-\mathcal{A}_+ \ni -(-z^*z - zz^*) = 2x^2 + 2y^2\,.$$

Como x e y são autoadjuntos $2x^2$ e $2y^2$ são positivos e, pelo Corolário 40.16, $2x^2 + 2y^2$ também o é. Assim, provamos que $2x^2 + 2y^2 \in \mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+)$. Pelo Teorema 40.20, isso implica $2x^2 + 2y^2 = 0$ e, pela Proposição 40.47, segue que $x^2 = 0$ e $y^2 = 0$. Pela propriedade C* da norma, segue que $\|x\|^2 = \|x^2\| = 0$, provando que $x = 0$. Analogamente prova-se que $y = 0$. Como $z = x + iy$, segue que $z = 0$. ■

Chegamos agora ao resultado mais importante a respeito de elementos autoadjuntos positivos em álgebras C*.

Teorema 40.21 *Em uma uma álgebra* C* *com unidade $\mathcal{A}$ todo elemento da forma x^*x é positivo. Pelo item 3 da Proposição 40.48, concluímos que uma condição necessária e suficiente para que um elemento autoadjunto $v \in \mathcal{A}$ seja positivo é que exista $x \in \mathcal{A}$ tal que $v = x^*x$.* □

Prova. Seja $a = x^*x$, que obviamente é autoadjunto. Pela Proposição 40.49, podemos escrever $a = a_+ - a_-$ onde $a_\pm$ são autoadjuntos e positivos, comutam com a e satisfazem $a_+a_- = a_-a_+ = 0$. Tudo o que queremos é provar que $a_- = 0$. Seja $w = xa_-$. Temos que $-w^*w = -a_-x^*xa_- = -a_-(a_+ - a_-)a_- = (a_-)^3$. Como a_- é positivo, $(a_-)^3$ também o é (pelo Teorema 40.15, página 2226). Logo, $-w^*w$ é positivo. Pelo Corolário 40.17, isso implica $w = 0$, ou seja, $xa_- = 0$.

Multiplicando à esquerda por x^*, teremos $0 = x^*xa_- = (a_+ - a_-)a_- = -(a_-)^2$. Como a_- é autoadjunto, a propriedade C* da norma implica $\|a_-\|^2 = \big\|(a_-)^2\big\| = 0$. Assim, $x^*x = a_+$, que é positivo por construção. ■

A seguinte consequência dos resultados acima é uma afirmação curiosa e útil, estendendo um resultado análogo válido para matrizes (Proposição 10.28, página 559).

Proposição 40.50 *Todo elemento autoadjunto a de uma álgebra* C* *com unidade $\mathcal{A}$ pode ser escrito como combinação linear de até dois elementos unitários: $a = \frac{\|a\|}{2}\big(u_+ + u_-\big)$, com $u_\pm \in \mathcal{A}$ unitários.*

Todo elemento b de uma álgebra C* *com unidade $\mathcal{A}$ pode ser escrito como combinação linear de até quatro elementos unitários: $b = \sum_{k=1}^{4}\beta_l u_k$, sendo cada $u_k \in \mathcal{A}$ unitário e $|\beta_k| \leq \|b\|/2$ para todo k.* □

Prova. Seja $a \in \mathcal{A}$ autoadjunto. Se $a = 0$ não há o que provar e, portanto, tomemos $a \neq 0$. Pela propriedade C*, $\|a^2\| = \|a\|^2$ e, portanto, $\|a\|^{-2}a^2$ tem norma 1. Pelo Corolário 40.15, página 2237, existe $\sqrt{\mathbb{1} - \|a\|^{-2}a^2}$, um elemento positivo e autoadjunto de $\mathcal{A}$ cujo quadrado é $\mathbb{1} - \|a\|^{-2}a^2$.

Naturalmente, podemos escrever

$$a \ = \ \frac{\|a\|}{2}\left(\|a\|^{-1}a + i\sqrt{\mathbb{1} - \|a\|^{-2}a^2}\right) + \frac{\|a\|}{2}\left(\|a\|^{-1}a - i\sqrt{\mathbb{1} - \|a\|^{-2}a^2}\right)\,.$$

Afirmamos agora que os operadores $u_\pm := \|a\|^{-1}a \pm i\sqrt{\mathbb{1} - \|a\|^{-2}a^2}$ são unitários. De fato, temos $u_\pm^* = u_\mp$ e, portanto,

$$u_\pm^*u_\pm \ = \ \left(\|a\|^{-1}a \mp i\sqrt{\mathbb{1} - \|a\|^{-2}a^2}\right)\left(\|a\|^{-1}a \pm i\sqrt{\mathbb{1} - \|a\|^{-2}a^2}\right) \ = \ \|a\|^{-2}a^2 + \mathbb{1} - \|a\|^{-2}a^2 \ = \ \mathbb{1}$$

e, analogamente, verifica-se que $u_\pm u_\pm^* = \mathbb{1}$. Isso estabeleceu que todo elemento autoadjunto é uma combinação linear de dois unitários.

Agora, todo elemento $b \in \mathcal{A}$ pode ser escrito como combinação linear de dois elementos autoadjuntos, a saber, na forma, $b = a_1 + ia_2$, onde $a_1 = \frac{1}{2}\big(b + b^*\big)$ e $a_2 = \frac{1}{2i}\big(b - b^*\big)$, ambos autoadjuntos. Logo, todo elemento de $\mathcal{A}$ é obtido por uma combinação linear de quatro elementos unitários. Pelo que vimos acima, o coeficientes serão $\frac{\|a_1\|}{2} = \frac{1}{2}\left\|\frac{1}{2}\big(b + b^*\big)\right\| \leq \frac{\|b\|}{2}$ e $\frac{\|a_2\|}{2} = \frac{1}{2}\left\|\frac{1}{2i}\big(b - b^*\big)\right\| \leq \frac{\|b\|}{2}$. ■

O seguinte corolário do Teorema 40.17, página 2228, e da Proposição 40.48, página, será usado mais adiante:

Corolário 40.18 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra* C* *com unidade e $a \in \mathcal{A}$, então $\|a\|^2 \in \sigma(a^*a)$.* □

Prova.. Sabemos que a^*a é positivo, que $\sigma(a^*a)$ é fechado e que $\sigma(a^*a) \subset \big[0,\ \|a^*a\|\big]$ (Proposição 40.48, página 2236). Suponhamos que exista $0 \leq M < \|a^*a\| = \|a\|^2$ tal que $\sigma(a^*a) \subset [0,\ M]$. Então, pelo Teorema 40.17, página 2228, valeria $\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \sup\{|\mu|,\ \mu \in \sigma(a^*a)\} \leq \sup\{|\mu|,\ \mu \in [0,\ M]\} = M < \|a\|^2$, um absurdo. ■

• **A identidade de polarização para operadores**

Sejam a e b elementos de uma $*$-álgebra. Então, vale a *identidade de polarização para operadores*:

$$b^*a \ = \ \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k\big(a + i^kb\big)^*\big(a + i^kb\big)\,. \tag{40.80}$$

Para a demonstração, basta expandir-se o lado direito. Se a álgebra em questão possuir uma unidade, segue trivialmente também que

$$a \ = \ \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k\big(a + i^k\mathbb{1}\big)^*\big(a + i^k\mathbb{1}\big)\,. \tag{40.81}$$

No caso de uma álgebra C* com unidade essa relação diz-nos que todo elemento pode ser escrito como combinação linear de quatro elementos positivos.

40.3.9.1 Relação de Ordem Decorrente da Positividade em Álgebras C*

• **Uma relação de ordem em álgebras C* decorrente da noção de positividade**

A noção de positividade em álgebras C*, discutida acima, permite definir uma relação de ordem no conjunto dos elementos autoadjuntos de uma álgebra C* $\mathcal{A}$: se a, b são elementos autoadjuntos de $\mathcal{A}$ dizemos que $a \geq b$ se $a - b \in \mathcal{A}_+$.

E. 40.32 *Exercício fácil.* Prove que se trata, de fato, de uma relação de ordem entre os elementos autoadjuntos de $\mathcal{A}$. Relações de ordem foram introduzidas na Seção 1.1.2.9, página 75. *Sugestões:* A reflexividade é óbvia e para a transitividade, escreva $a - c = (a - b) + (b - c)$ e use o Corolário 40.16, página 2238. ✣

Dizemos que $a \leq b$ se $a - b \in -\mathcal{A}_+$, ou seja, se $b \geq a$. Note-se que se $a \geq b$ e $a \leq b$, então $a = b$ pois, como vimos (Teorema 40.20, página 2237), $\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}$. Escrevemos também que $a > b$ caso $a \geq b$ mas $a \neq b$ (e analogamente para $a < b$).

Lembremos que em uma álgebra com involução $\mathcal{A}$, uma *transformação de congruência* é uma transformação do tipo $\mathcal{A} \ni a \mapsto c^*ac \in \mathcal{A}$ para algum $c \in \mathcal{A}$ fixo. Em uma álgebra C* a relação de ordem definida acima é preservada por transformações de congruência. Isso é o conteúdo da proposição elementar que segue:

Proposição 40.51 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C* com unidade e sejam a e b elementos autoadjuntos de $\mathcal{A}$ tais que $a \geq b$. Então,*

$$c^*ac \;\geq\; c^*bc \tag{40.82}$$

para todo $c \in \mathcal{A}$. □

Prova. Se $a \geq b$, então $a - b$ é positivo e, portanto (pelo Teorema 40.21, página 2238), existe $d \in \mathcal{A}$ tal que $a - b = d^*d$. Logo, $c^*(a - b)c = c^*d^*dc = (dc)^*(dc) \in \mathcal{A}_+$, provando que $c^*ac \geq c^*bc$. ■

A relação de ordem definida acima conduz a alguns resultados não-triviais, como os expressos na proposição que segue (de [77]), os quais usaremos de diversas formas adiante.

Proposição 40.52 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C* com unidade e sejam a e b elementos autoadjuntos de $\mathcal{A}$. Então, valem os seguintes resultados:*

1. *Se $a \geq 0$, então $\|a\|\mathbb{1} \geq a \geq 0$.*
2. *Se $a \geq b \geq 0$, então $\|a\| \geq \|b\|$.*
3. *Se $a \geq 0$, então $a\|a\| \geq a^2 \geq 0$.* □

Prova. (De [77]). Pela definição de positividade, se $a \geq 0$, então $\sigma(a) \subset [0,\ \|a\|]$. Logo, pelo Teorema da Aplicação Espectral, Teorema 40.15, página 2226, $\sigma\big(\|a\|\mathbb{1} - a\big) = \big\{\|a\| - \lambda,\ \lambda \in \sigma(a)\big\} \subset \big\{\|a\| - \lambda,\ \lambda \in [0,\ \|a\|]\big\} = [0,\ \|a\|]$, provando que $\|a\|\mathbb{1} - a \geq 0$, ou seja, estabelecendo o item 1.

Se $a \geq b \geq 0$, então segue do item 1 e da transitividade da relação de ordem que $\|a\|\mathbb{1} \geq a \geq b \geq 0$. Agora, a relação $\|a\|\mathbb{1} \geq b$ e o Teorema da Aplicação Espectral implicam que $[0,\ \infty) \supset \sigma\big(\|a\|\mathbb{1} - b\big) = \big\{\|a\| - \lambda,\ \lambda \in \sigma(b)\big\}\big\}$. Porém, isso só é possível se $\|a\| \geq \sup\{\lambda,\ \lambda \in \sigma(b)\} = \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in \sigma(b)\} =: r(b) = \|b\|$. Na antepenúltima igualdade usamos a positividade de b, na penúltima igualdade usamos a definição do raio espectral e na última usamos o Teorema 40.17, página 2228. Isso demonstrou o item 2.

Se $a \geq 0$, então temos, novamente pelo Teorema da Aplicação Espectral, que

$$\sigma\left(\left(a - \frac{\|a\|}{2}\mathbb{1}\right)^2\right) \;=\; \left\{\left(\lambda - \frac{\|a\|}{2}\right)^2,\ \lambda \in \sigma(a)\right\} \;\subset\; \left\{\left(\lambda - \frac{\|a\|}{2}\right)^2,\ \lambda \in \big[0,\ \|a\|\big]\right\} \;\subset\; \big[0,\ \|a\|^2/4\big]\ .$$

Logo, $r\left(\left(a - \frac{\|a\|}{2}\mathbb{1}\right)^2\right) \leq \frac{\|a\|^2}{4}$, implicando, pelo Teorema 40.17, página 2228, que $\left\|\left(a - \frac{\|a\|}{2}\mathbb{1}\right)^2\right\| \leq \frac{\|a\|^2}{4}$. Portanto, pelo item 1, $\frac{\|a\|^2}{4}\mathbb{1} \geq \left(a - \frac{\|a\|}{2}\mathbb{1}\right)^2$. Expandindo o lado direito, obtemos $0 \geq a^2 - a\|a\|$, provando o item 3. ■

• **Resolventes, positividade e relações de ordem**

A seguinte afirmação elementar será usada diversas vezes adiante:

Proposição 40.53 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C* com unidade e sejam $a \in \mathcal{A}_+$ e $x \in [0,\ \infty)$. Então, $\mathbb{1} + xa \in \mathrm{Inv}\,(\mathcal{A})$ e $(\mathbb{1} + xa)^{-1} \in \mathcal{A}_+$.* □

Prova. Como $a \in \mathcal{A}_+$, seu conjunto resolvente contém $(-\infty,\ 0)$, o que estabelece que $\mathbb{1} + xa \in \mathrm{Inv}\,(\mathcal{A})$. Pela Proposição 40.31, página 2221, e pelo Teorema da Aplicação Espectral, Teorema 40.15, página 2226, tem-se $\sigma\big((\mathbb{1}+xa)^{-1}\big) = \big\{\frac{1}{\lambda},\ \lambda \in \sigma\big(\mathbb{1} + xa\big)\big\} \;=\; \big\{\frac{1}{1+x\mu},\ \mu \in \sigma(a)\big\} \subset (0,\ \infty)$, provando que $(\mathbb{1} + xa)^{-1} \in \mathcal{A}_+$. ■

O seguinte resultado sobre relações de ordem e resolventes será usado logo adiante quando da discussão sobre aproximantes da unidade na Seção 40.3.10, página 2241.

Proposição 40.54 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C* com unidade e sejam a e b elementos autoadjuntos de $\mathcal{A}$ com $a \geq b \geq 0$. Então, para todo $x \in [0,\ \infty)$ tem-se*

$$(x\mathbb{1} + b)^{-1} \;\geq\; (x\mathbb{1} + a)^{-1} \;\geq\; 0 \tag{40.83}$$

□

Prova. É evidente pelo Teorema da Aplicação Espectral, Teorema 40.15, página 2226, que $x\mathbb{1} + a$ e $x\mathbb{1} + b$ são elementos de $\mathcal{A}_+$. Que $x\mathbb{1} + a$ e $x\mathbb{1} + b$ são elementos de $\mathrm{Inv}\,(\mathcal{A})$ foi visto na Proposição 40.53, página 2241, que estabelece também que $(x\mathbb{1} + a)^{-1} \geq 0$ e $(x\mathbb{1} + b)^{-1} \geq 0$. Esses resultados sobre positividade garantem, pela Proposição 40.48, página 2236, a existência das raízes quadradas $(x\mathbb{1} + b)^{1/2}$ e $(x\mathbb{1} + b)^{-1/2}$, ambas elementos de $\mathcal{A}_+$.

É também evidente que $x\mathbb{1} + a \geq x\mathbb{1} + b$ e dessa desigualdade, pela Proposição 40.51, página 2240, (adotando-se $c = (x\mathbb{1} + b)^{-1/2} = c^*$ em (40.82)), tem-se que

$$(x\mathbb{1} + b)^{-1/2}(x\mathbb{1} + a)(x\mathbb{1} + b)^{-1/2} \;\geq\; \mathbb{1}\ .$$

O elemento $y := (x\mathbb{1} + b)^{-1/2}(x\mathbb{1} + a)(x\mathbb{1} + b)^{-1/2}$ é autoadjunto, inversível com $y^{-1} = (x\mathbb{1} + b)^{1/2}(x\mathbb{1} + a)^{-1}(x\mathbb{1} + b)^{1/2}$ e (como vimos), $y \geq \mathbb{1}$. Logo, $\sigma(y) \subset [1,\ \infty)$ o que implica, pela Proposição 40.31, página 2221, que $\sigma\big(y^{-1}\big) \subset (0,\ 1]$. Logo, $y^{-1} \leq \mathbb{1}$, ou seja,

$$\mathbb{1} \;\geq\; (x\mathbb{1} + b)^{1/2}(x\mathbb{1} + a)^{-1}(x\mathbb{1} + b)^{1/2}\ .$$

Aplicando-se novamente a Proposição 40.51, página 2240, adotando-se outra vez $c = (x\mathbb{1} + b)^{-1/2} = c^*$ em (40.82), concluímos da última desigualdade que

$$(x\mathbb{1} + b)^{-1} \;\geq\; (x\mathbb{1} + a)^{-1}\ ,$$

como desejávamos estabelecer. ■

40.3.10 Aproximantes da Unidade em Álgebras C*

Já comentamos anteriormente que há álgebras C* de interesse que não possuem uma unidade, tal como a álgebra dos operadores compactos em um espaço de Hilbert de dimensão infinita (vide Seção 40.8, página 2293 e, em particular, o Corolário 40.22, página 2297). Como vimos no Teorema 40.13, página 2212, toda álgebra C* sem unidade pode ser $*$-isomorficamente e isometricamente incluída em uma álgebra C* com unidade. Para certos propósitos, porém, essa extensão da álgebra a uma álgebra unital não é útil e é preferível operar dentro da própria álgebra.

Para esse propósito, é útil estabelecer que toda álgebra C* possui um objeto que substitui a unidade: os chamados *aproximantes da unidade*. Seu uso é relevante, por exemplo, na discussão sobre *cosets* por bi-ideais em álgebras C*, tal como desenvolveremos na Seção 40.3.10.1, página 2244.

Seguiremos proximamente [77], mas um tratamento próximo, ou mesmo idêntico, pode ser encontrado em muitos outros textos (vide, por ex., [117] ou [367]).

Notemos que toda álgebra C* $\mathcal{A}$ possui ao menos um ideal à direita[27], a saber a própria álgebra $\mathcal{A}$. Notemos também que um ideal à direita $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ sempre possui elementos positivos, pois se $b \in \mathcal{I}$ tem-se evidentemente que $bb^* \in \mathcal{I}$, sendo que $bb^* = \big(b^*\big)^* \big(b^*\big)$ é evidentemente um elemento positivo de $\mathcal{A}$.

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C* não necessariamente dotada de uma unidade e seja $\mathcal{I}$ um ideal à direita de $\mathcal{A}$. Seja Λ um conjunto dirigido[28] por uma relação de pré-ordenamento, que denotamos por $\succ$. Uma rede[29] $\Lambda \ni \lambda \mapsto e_\lambda \in \mathcal{I}$ é dita ser um *aproximante da unidade na álgebra $\mathcal{A}$ por elementos de um ideal à direita* (ou *aproximante da identidade na álgebra $\mathcal{A}$ por elementos de um ideal à direita*) se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. $e_\lambda \in \mathcal{A}_+$ para todo $\lambda \in \Lambda$.
2. $\|e_\lambda\| \leq 1$ para todo $\lambda \in \Lambda$.
3. $e_\lambda \geq e_{\lambda'}$ sempre que $\lambda \succ \lambda'$.
4. $\lim_\lambda \big\|a - e_\lambda a\big\| = 0$ para todo $a \in \mathcal{I}$.

Se $\mathcal{I} = \mathcal{A}$ dizemos que $\Lambda \ni \lambda \mapsto e_\lambda \in \mathcal{A}$ são *aproximantes da unidade da álgebra* C* $\mathcal{A}$ (ou *aproximantes da identidade da álgebra* C* $\mathcal{A}$).

Comentários. 1. No item 4, o símbolo $\lim_\lambda$ indica o limite de redes, tal como definido na Seção 30.3. Lembrar que em um espaço Hausdorff o limite de redes é único, se existir (Proposição 30.5, página 1510). 2. A afirmação do mesmo item 4 é a razão da nomenclatura "aproximantes da unidade", para designar a rede $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Para ideais à esquerda temos a mesma definição, apenas trocando o item 4 por $\lim_\lambda \|a - ae_\lambda\| = 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$. ♣

A definição acima é não vazia: o Teorema que segue afirma que sempre podemos encontrar aproximantes da unidade em ideais à direita de álgebras C* com unidade. No Corolário 40.19, página 2243, mostramos que toda álgebras C* (com unidade ou não) possui aproximantes da unidade.

Teorema 40.22 *Se $\mathcal{I}$ é um ideal à direita de uma álgebra* C* *com unidade $\mathcal{A}$, então existem em $\mathcal{I}$ aproximantes da unidade.* □

Prova do Teorema 40.22. Seja $\mathfrak{I}$ a coleção de todos os subconjuntos finitos de $\mathcal{I}$. $\mathfrak{I}$ tem um pré-ordenamento natural, a saber, o pré-ordenamento definido pela inclusão de conjuntos: se $\alpha,\ \beta \in \mathfrak{I}$, dizemos que $\alpha \succ \beta$ se $\alpha \supset \beta$.

Para $\alpha \in \mathfrak{I}$ denotamos por $|\alpha| \in \mathbb{N}_0$ o número de elementos de α. Assim, $\alpha \in \mathfrak{I}$ é da forma $\alpha = \{j_1,\ \ldots,\ j_{|\alpha|}\}$, com $j_a \in \mathcal{I}$ para todo $a = 1,\ \ldots,\ |\alpha|$. Seguindo [77], definamos para $\alpha = \{j_1,\ \ldots,\ j_{|\alpha|}\} \in \mathfrak{I}$,

$$f_\alpha \ := \ \sum_{a=1}^{|\alpha|} j_a j_a^* \, .$$

É evidente que $f_\alpha \in \mathcal{I}$ (pois cada $j_a j_a^* \in \mathcal{I}$). É evidente também que $j_a j_a^* \in \mathcal{A}_+$ e (pelo Corolário 40.16, página 2238) que $f_\alpha \in \mathcal{A}_+$. Logo, $\sigma(f_\alpha) \subset [0,\ \infty)$ e, portanto, $x\mathbb{1} + f_\alpha$ possui inversa para todo número real positivo x. Consequentemente, definamos também

$$e_\alpha \ := \ |\alpha| f_\alpha \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1} \, .$$

Por (40.55) tem-se, evidentemente,

$$e_\alpha \ := \ |\alpha| f_\alpha \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1} \ = \ \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1} |\alpha| f_\alpha \ = \ \mathbb{1} - \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1} \, , \tag{40.84}$$

a última igualdade sendo obtida somando-se e subtraindo-se $\mathbb{1}$ ao fator $|\alpha| f_\alpha$.

Afirmamos que $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{I}}$ são aproximantes da unidade. Notemos em primeiro lugar que $e_\alpha \in \mathcal{I}$ pois, como já observamos, $f_\alpha \in \mathcal{I}$ e e_α é obtido de f_α multiplicando-o à direta por um elemento de $\mathcal{A}$ (o elemento $|\alpha|\big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1}$).

Em segundo lugar, recordemos que, pela Proposição 40.53, página 2241, tem-se $\big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1} \in \mathcal{A}_+$. Como $f_\alpha \in \mathcal{A}_+$, segue disso e do Lema 40.6, página 2236, que $e_\alpha \in \mathcal{A}_+$.

[27] As noções de ideais e bi-ideais de anéis e álgebras foram introduzidas na Seção 2.4.1, página 229, onde suas propriedades básicas foram discutidas.

[28] A noção de conjunto dirigido foi introduzida à página 78.

[29] A noção de rede em um espaço topológico foi introduzida na Seção 30.3, página 1508.

Em terceiro lugar, o fato que $\big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1} \in \mathcal{A}_+$ implica que $\mathbb{1} - e_\alpha \in \mathcal{A}_+$, ou seja, que $\mathbb{1} \geq e_\alpha$. Logo, pelo item 2 da Proposição 40.52, página 2240, vale $1 \geq \|e_\alpha\|$.

Em quarto lugar, por (40.84), tem-se para quaisquer $\alpha,\ \beta \in \mathfrak{I}$ que

$$e_\alpha - e_\beta \ = \ \big(\mathbb{1} + |\beta| f_\beta\big)^{-1} - \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1} \, .$$

Agora, sejam α e β tais que $\alpha \succ \beta$, ou seja $\alpha \supset \beta$, e escrevamos $\beta = \big\{j_1,\ \ldots,\ j_{|\beta|}\big\}$ e $\alpha = \big\{j_1,\ \ldots,\ j_{|\beta|},\ j_{|\beta|+1},\ \ldots,\ j_{|\alpha|}\big\}$. Então, $f_\alpha \geq f_\beta$, pois

$$f_\alpha - f_\beta \ = \ \sum_{c=|\beta|+1}^{|\alpha|} j_c j_c^* \ \geq \ 0 \, .$$

Logo, pela Proposição 40.54, página 2241, segue que $e_\alpha - e_\beta \geq 0$, ou seja, $e_\alpha \geq e_\beta$.

Por fim, seja $a \in \mathcal{I}$. Teremos[30]

$$(a - e_\alpha a)(a - e_\alpha a)^* \ = \ (\mathbb{1} - e_\alpha)^* aa^* (\mathbb{1} - e_\alpha) \ \stackrel{(40.84)}{=} \ \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1} aa^* \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1} \, .$$

Agora, $\{a\} \in \mathfrak{I}$ e para $\alpha \succ \{a\}$ valerá $f_\alpha \geq aa^*$. Logo, para tais α's teremos, pela Proposição 40.51, página 2240, (adotando-se $c = \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1} = c^*$ em (40.82))

$$\begin{aligned}
(a - e_\alpha a)(a - e_\alpha a)^* \ &= \ \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1} aa^* \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1} \\
&\leq \ \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1} f_\alpha \ \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1} \\
&= \ \frac{1}{|\alpha|}\big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1} \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big) \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1} - \frac{1}{|\alpha|}\big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-2} \\
&= \ \frac{1}{|\alpha|}\Big[\mathbb{1} - \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1}\Big] \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1} \, .
\end{aligned}$$

Pelo item 2 da Proposição 40.52, página 2240, segue que

$$\big\|a - e_\alpha a\big\|^2 \ = \ \big\|(a - e_\alpha a)(a - e_\alpha a)^*\big\| \ \leq \ \frac{1}{|\alpha|} \|g_\alpha\| \ , \tag{40.85}$$

onde $g_\alpha := \Big[\mathbb{1} - \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1}\Big] \big(\mathbb{1} + |\alpha| f_\alpha\big)^{-1}$. Agora, g_α é autoadjunto e como $f_\alpha \geq 0$, segue da Proposição 40.31, página 2221, e do Teorema da Aplicação Espectral, Teorema 40.15, página 2226, que

$$\sigma\left(g_\alpha\right) \ = \ \left\{\left[1 - \frac{1}{1 + |\alpha| x}\right] \frac{1}{1 + |\alpha| x},\ x \in \sigma(f_\alpha)\right\} \ = \ \left\{\frac{|\alpha| x}{(1 + |\alpha| x)^2},\ x \in \sigma(f_\alpha)\right\} \ \subset \ \left\{\frac{|\alpha| x}{(1 + |\alpha| x)^2},\ x \in [0,\ \infty)\right\} \, .$$

Em $[0,\ \infty)$, a função real $g(x) := \frac{|\alpha| x}{(1+|\alpha| x)^2}$ é não-negativa e assume um máximo absoluto em $x_0 = |\alpha|^{-1}$, o qual vale $g(x_0) = 1/4$ (verifique essas afirmações!). Logo, $\sigma(g_\alpha) \subset [0,\ 1/4]$. Pelo Teorema 40.17, página 2228, segue que $\|g_\alpha\| \leq 1/4$ e de (40.85) concluímos que

$$\big\|a - e_\alpha a\big\|^2 \ \leq \ \frac{1}{4|\alpha|} \, .$$

Logo, $\lim_\alpha \big\|a - e_\alpha a\big\|^2 = 0$, como queríamos demonstrar. ■

Corolário 40.19 *Toda álgebra* C* $\mathcal{A}$ *(mesmo as que não possuem unidade) possui aproximantes da unidade.* □

[30] A partir daqui nossa demonstração é distinta da de [77] e do restante da literatura.

Prova. Se $\mathcal{A}$ possui unidade isso foi estabelecido no Teorema 40.22, página 2242, recordando que $\mathcal{A}$ é (trivialmente) um ideal bilateral de si mesmo. Se $\mathcal{A}$ não possui unidade, o Teorema 40.13, página 2212, estabelece que $\mathcal{A}$ é $*$-isomorficamente e isometricamente equivalente a um ideal bilateral de uma álgebra C* com unidade. Usando esse isomorfismo e evocando o Teorema 40.22, concluímos que $\mathcal{A}$ possui aproximantes da unidade. ■

O seguinte fato elementar será usado adiante:

Lema 40.7 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C* com unidade (que denotamos por $\mathbb{1}$). Seja $\mathcal{I}$ um ideal à direita de $\mathcal{A}$ e sejam $\{e_\lambda \in \mathcal{I},\ \lambda \in \Lambda\}$ aproximantes da unidade em $\mathcal{A}$ por elementos de $\mathcal{I}$. Então,*

$$\|\mathbb{1} - e_\lambda\| \ \leq\ 1\ . \tag{40.86}$$

□

Prova. Sabemos que cada e_λ é autoadjunto, que $e_\lambda \geq 0$ e que $\|e_\lambda\| \leq 1$. Logo, pelo Teorema 40.17, página 2228, tem-se $\sigma(e_\lambda) \subset [0,\ 1]$. Como $\mathbb{1} - e_\lambda$ é autoadjunto, segue do mesmo Teorema e do Teorema da Aplicação Espectral, Teorema 40.15, página 2226, que

$$\|\mathbb{1} - e_\lambda\| = r(\mathbb{1} - e_\lambda) \ =\ \sup\{|\alpha|,\ \alpha \in \sigma(\mathbb{1} - e_\lambda)\} \ =\ \sup\{|1-\mu|,\ \mu \in \sigma(e_\lambda)\} \ \leq\ \sup\{|1-\mu|,\ \mu \in [0,\ 1]\} \ =\ 1\ ,$$

como desejávamos estabelecer. ■

40.3.10.1 Cosets por Bi-Ideais em Álgebras C*

Sejam $\mathcal{A}$ uma $*$-álgebra associativa e seja $\mathcal{I}$ um bi-ideal de $\mathcal{A}$. Podemos definir em $\mathcal{A}$ uma relação de equivalência declarando que dois de seus elementos a e b são equivalentes, $a \sim b$ se $a - b \in \mathcal{I}$. Denotamos a classe de equivalência de um elemento $a \in \mathcal{A}$ por $[a] := \{a + l,\ l \in \mathcal{I}\}$. O conjunto de tais classes de equivalência, o chamado *coset* de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{I}$, é denotado por $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. A teoria desses ideais e suas classes de equivalência foi desenvolvida para anéis e álgebras nas Seções 2.4.1 e 2.4.1.2, às páginas 229 e 229, respectivamente. Como é lá discutido, $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ é dotado de uma estrutura de álgebra associativa, definindo-se combinações lineares e produtos por $\alpha[a] + \beta[b] = [\alpha a + \beta b]$ e $[a][b] = [ab]$, para todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ e $a,\ b \in \mathcal{A}$. O vetor nulo $[0]$ de $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ é a classe de equivalência dos elementos de $\mathcal{I}$.

No caso de $\mathcal{A}$ ser uma $*$-álgebra, dizemos que um bi-ideal $\mathcal{I}$ é um *bi-ideal autoadjunto*, ou um *$*$-bi-ideal*, se $b \in \mathcal{I}$ implica $b^* \in \mathcal{I}$ para todo $b \in \mathcal{I}$. Se $\mathcal{I}$ é um $*$-bi-ideal podemos fazer de $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ uma $*$-álgebra, se a operação de adjunção for definida por $[a]^* := [a^*]$.

E. 40.33 *Exercício.* Mostre que essa operação de adjunção está bem definida mas classes $[a] \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$ (ou seja, que é independente do representante a tomado em $[a]$) e que, de fato, satisfaz as propriedades de uma adjunção na álgebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. ✣

Nesta seção estamos interessados na situação em que $\mathcal{A}$ é uma álgebra C* e nela a condição de $\mathcal{I}$ é um $*$-bi-ideal pode ser obtida de uma hipótese mais útil, pois vale a seguinte afirmação:

Proposição 40.55 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra C* e $\mathcal{I}$ é um bi-ideal fechado de $\mathcal{A}$ (na topologia definida pela norma de $\mathcal{A}$), então $\mathcal{I}$ é um $*$-bi-ideal de $\mathcal{A}$. Portanto, $\mathcal{I}$ é uma subálgebra C* de $\mathcal{A}$.* □

Prova. Desejamos provar que se $l \in \mathcal{I}$, então $l^* \in \mathcal{I}$. Pelo Teorema 40.22, página 2242, existem em $\mathcal{I}$ aproximantes da unidade, $\{e_\lambda \in \mathcal{I},\ \lambda \in \Lambda\}$, com Λ sendo um conjunto dirigido por uma relação de ordem $\succ$, para os quais vale $\lim_\lambda \|l - e_\lambda l\| = 0$, para todo $l \in \mathcal{I}$, ou seja, $l = \lim_\lambda e_\lambda l$. Pela invariância da norma pela operação de adjunção e pelo fato de os e_λ's serem autoadjuntos, segue que $\lim_\lambda \|l^* - l^* e_\lambda\| = 0$, ou seja, $l^* = \lim_\lambda l^* e_\lambda$. Agora, cada e_λ é um elemento de $\mathcal{I}$, que é um bi-ideal de $\mathcal{A}$. Logo $l^* e_\lambda \in \mathcal{I}$ para todo $\mathcal{I}$. Como $\mathcal{I}$ é fechado, $\lim_\lambda l^* e_\lambda$ é também um elemento de $\mathcal{I}$ e, portanto, $l^* \in \mathcal{I}$. ■

Definamos a aplicação $\mathcal{A}/\mathcal{I} \to [0,\ \infty)$ dada por

$$\big\|[a]\big\| \ :=\ \inf\big\{\|a + l\|,\ l \in \mathcal{I}\big\}\ .$$

É bastante evidente que $\big\|[a]\big\|$, definida acima, independe do particular representante a da classe de equivalência de $[a]$. Logo adiante (Teorema 40.23, página 2246) provaremos o importante fato que, no caso de $\mathcal{A}$ ser uma álgebra C* e $\mathcal{I}$ ser um bi-ideal fechado de $\mathcal{A}$, então $\big\|[a]\big\|$ define uma norma em $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ que faz desse *coset* uma álgebra C*. Para tal, faremos uso do seguinte resultado técnico:

Lema 40.8 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra C*, $\mathcal{I}$ é um bi-ideal fechado de $\mathcal{A}$ (na topologia definida pela norma de $\mathcal{A}$) e sejam $\{e_\lambda \in \mathcal{I},\ \lambda \in \Lambda\}$, aproximantes da unidade em $\mathcal{I}$, com Λ sendo um conjunto dirigido por uma relação de ordem $\succ$. Então, vale*

$$\big\|[a]^*\big\| \ =\ \big\|[a]\big\|$$

assim como

$$\big\|[a]\big\| \ =\ \lim_\lambda \|a - e_\lambda a\| \ =\ \lim_\lambda \|a - a e_\lambda\| \tag{40.87}$$

par todo $a \in \mathcal{A}$. □

Prova. É claro que

$$\big\|[a]^*\big\| \ =\ \big\|[a^*]\big\| \ =\ \inf\big\{\|a^* + l\|,\ l \in \mathcal{I}\big\} \ =\ \inf\big\{\|a + l\|,\ l \in \mathcal{I}\big\} \ =\ \big\|[a]\big\|\ ,$$

pois a norma de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{I}$ são invariantes pela adjunção.

Para provar (40.87), vamos primeiramente considerar o caso em que $\mathcal{A}$ possui uma unidade $\mathbb{1}$.

Seja $a \in \mathcal{A}$. Pela definição do ínfimo, existe para cada $\epsilon > 0$ um elemento $l_\epsilon \in \mathcal{I}$ tal que $\|a + l_\epsilon\| \leq \big\|[a]\big\| + \epsilon$. Pela definição do limite $\lim_\lambda$, existe para cada $\epsilon > 0$ um elemento $\lambda\epsilon \in \Lambda$ tal que $\|l_\epsilon - e_{\lambda_\epsilon} l_\epsilon\| \leq \epsilon$. Agora

$$a - e_{\lambda_\epsilon} a \ =\ (a + l_\epsilon) - (l_\epsilon - e_{\lambda_\epsilon} l_\epsilon) - e_{\lambda_\epsilon}(l_\epsilon + a) \ =\ (\mathbb{1} - e_{\lambda_\epsilon})(a + l_\epsilon) - (l_\epsilon - e_{\lambda_\epsilon} l_\epsilon)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\|a - e_{\lambda_\epsilon} a\| \ &\leq\ \big\|(\mathbb{1} - e_{\lambda_\epsilon})(a + l_\epsilon)\big\| + \|l_\epsilon - e_{\lambda_\epsilon} l_\epsilon\| \ \leq\ \|\mathbb{1} - e_{\lambda_\epsilon}\|\,\|a + l_\epsilon\| + \|l_\epsilon - e_{\lambda_\epsilon} l_\epsilon\| \\ &\leq\ \|\mathbb{1} - e_{\lambda_\epsilon}\|\Big(\big\|[a]\big\| + \epsilon\Big) + \epsilon \ \overset{(40.86)}{\leq}\ \big\|[a]\big\| + 2\epsilon\ ,\end{aligned}$$

ou seja, $\|a - e_{\lambda_\epsilon} a\| \leq \big\|[a]\big\| + 2\epsilon$. Por outro lado, como $-e_{\lambda_\epsilon} a \in \mathcal{I}$, tem-se $\big\|[a]\big\| \leq \|a - e_{\lambda_\epsilon} a\|$ (pela definição de ínfimo). Portanto, estabelecemos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\lambda_\epsilon \in \Lambda$ tal que $\big\|[a]\big\| \ \leq\ \|a - e_{\lambda_\epsilon} a\| \ \leq\ \big\|[a]\big\| + 2\epsilon$, o que significa que $\big\|[a]\big\| = \lim_\lambda \|a - e_\lambda a\|$.

Como $\big\|[a]\big\| = \big\|[a]^*\big\| = \big\|[a^*]\big\|$, temos também $\big\|[a]\big\| = \lim_\lambda \|a^* - e_\lambda a^*\| = \lim_\lambda \|a - a e_\lambda\|$. pois a norma de $\mathcal{A}$ é invariante por adjunção e os e_λ's são autoadjuntos. Isso demonstrou (40.87) para o caso em que $\mathcal{A}$ possui unidade.

O caso em que $\mathcal{A}$ não possui unidade é análogo, mas alguns poucos cuidados são necessários. Começando estendendo $\mathcal{A}$ à álgebra C* com unidade $\mathbb{C} \ltimes \mathcal{A}$ introduzida na Seção 40.3.2.1, página 2211. Pelo Teorema 40.13, página 2212, $\mathbb{C} \ltimes \mathcal{A}$ é uma álgebra C* para a norma dada em (40.51).

Afirmamos que $\mathbb{C} \ltimes \mathcal{I} := \{(0,\ l),\ l \in \mathcal{I}\}$ é um bi-ideal fechado de $\mathbb{C} \ltimes \mathcal{A}$. Que é um bi-ideal atestam os fatos que $(\alpha,\ a)(0,\ l) = (0,\ \alpha l + a l) \in \mathbb{C} \ltimes \mathcal{I}$ e que $(0,\ l)(\alpha,\ a) = (0,\ \alpha l + l a) \in \mathbb{C} \ltimes \mathcal{I}$ para todo $(\alpha,\ a) \in \mathbb{C} \ltimes \mathcal{A}$. Que é fechado decorre da observação que $\|(0,\ a)\| = \|a\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$, e do fato de $\mathcal{I}$ ser fechado em $\mathcal{A}$.

Como $\mathbb{C} \ltimes \mathcal{A}$ é uma álgebra C* unital, o Teorema 40.22, página 2242 garante a existência em $\mathbb{C} \ltimes \mathcal{A}$ de aproximantes da unidade $\{(0,\ e_\lambda),\ \lambda \in \Lambda\}$ em $\mathbb{C} \ltimes \mathcal{I}$, com Λ sendo algum conjunto dirigido segundo uma relação de ordem $\succ$. Afirmamos que $\{e_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ são aproximantes da unidade em $\mathcal{I}$. Isso é estabelecido nos quatro passos que seguem: *1.* se $(0,\ e_\lambda) \in (\mathbb{C} \ltimes \mathcal{A})_+$, então é da forma $(0,\ e_\lambda) = (\beta,\ b)^*(\beta,\ b)$ para algum $(\beta,\ b) \in \mathbb{C} \ltimes \mathcal{A}$. Então, $(\beta,\ b)^*(\beta,\ b) = (\overline{\beta},\ b^*)(\beta,\ b) = (|\beta|^2,\ \overline{\beta} b + \beta b^* + b^* b) = (0,\ e_\lambda)$, implicando que $\beta = 0$ e $b^* b = e_\lambda$, o que, por sua vez, garante que $e_\lambda \in \mathcal{A}_+$. *2.* $\|e_\lambda\| = \|(0,\ e_\lambda)\| \leq 1$, implica que $\|e_\lambda\| \leq 1$. *3.* Se $\lambda \succ \lambda'$ $(0,\ e_\lambda - e_{\lambda'}) = (0,\ e_\lambda) - (0,\ e_{\lambda'}) \geq 0$. O argumento usado no item *1* implica que $e_\lambda - e_{\lambda'}$ é da forma $b^* b$ para algum $b \in \mathcal{A}$ e, portanto, $e_\lambda - e_{\lambda'} \geq 0$. *4.* Para $l \in \mathcal{I}$, tem-se $(0,\ l) \in \mathbb{C} \ltimes \mathcal{I}$ e, portanto, $\lim_\lambda \|l - e_\lambda l\| = \lim_\lambda \|(0,\ l - e_\lambda l)\| = \lim_\lambda \|(0,\ l) - (0,\ e_\lambda)(0,\ l)\| = 0$.

Com isso e do fato que $\|(0,\, a)\| = \|a\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$, segue do resultado já obtido para álgebras unitais que que

$$\lim_\lambda \|a - e_\lambda a\| \;=\; \lim_\lambda \|(0,\, a - e_\lambda a)\| \;=\; \lim_\lambda \|(0,\, a) - (0,\, e_\lambda)(0,\, a)\| \;=\; \big\|[(0,\, a)]\big\|$$

e, analogamente, $\lim_\lambda \|a - a e_\lambda\| = \big\|[(0,\, a)]\big\|$. Sucede, porém que

$$\big\|[(0,\, a)]\big\| \;=\; \inf\Big\{\|(0,\, a)+(0,\, l)\|,\, (0,\, l) \in \mathbb{C}\ltimes\mathcal{I}\Big\} \;=\; \inf\Big\{\|(0,\, a+l)\|,\, l \in \mathcal{I}\Big\} \;=\; \inf\Big\{\|a+l\|,\, l \in \mathcal{I}\Big\} \;=\; \big\|[a]\big\|\,, \tag{40.88}$$

completando a demonstração. ■

Chegamos agora ao resultado mais relevante da corrente discussão: se $\mathcal{A}$ for uma álgebra C* e $\mathcal{I}$ um bi-ideal fechado de $\mathcal{A}$, podemos definir em $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ uma norma que faz desse *coset* uma álgebra C*. Esse é o conteúdo do teorema que segue.

Teorema 40.23 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C* e seja $\mathcal{I}$ um bi-ideal fechado de $\mathcal{A}$. Considere-se a $*$-álgebra associativa $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ munida das operações acima delineadas. Então, $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ é uma álgebra C* com respeito à norma*

$$\big\|[a]\big\| \;:=\; \inf\big\{\|a+l\|,\, l \in \mathcal{I}\big\}\,. \tag{40.89}$$

□

Prova. É bastante evidente que $\big\|[a]\big\|$, definida em (40.89), independe do particular elemento da classe de equivalência de $a \in \mathcal{A}$. Desejamos provar que (40.89) define uma norma operatorial e que essa norma satisfaz propriedade C*. Por fim, temos que provar que $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ é completo nessa norma.

Como $0 \in \mathcal{I}$, é claro que $\big\|[0]\big\| = 0$. Se $\big\|[a]\big\| = 0$, então $\inf\big\{\|a+l\|,\, l \in \mathcal{I}\big\} = 0$ e é possível encontrar uma sequência $l_m \in \mathcal{I}$, $m \in \mathbb{N}$, tal que $\|a + l_m\| < 1/m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Assim, teremos $\|l_n - l_m\| = \|(l_m + a) - (a + l_n)\| \leq \|l_m + a\| + \|l_n + a\| < 1/m + 1/n$, mostrando que $l_m \in \mathcal{I}$, $m \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{I}$. Como $\mathcal{I}$ é fechado, essa sequência converge a um elemento $l \in \mathcal{I}$. Porém, $\|a + l\| = \|(a + l_m) - (l_m - l)\| \leq \|a + l_m\| + \|l_m - l\|$ que converge a zero quando $m \to \infty$. Logo, $\|a + l\| = 0$ e $a = -l \in \mathcal{I}$, estabelecendo que $[a] = [0]$.

A relação $\big\|[\alpha a]\big\| = |\alpha|\,\big\|[a]\big\|$ é elementar e a desigualdade triangular segue da observação que

$$\big\|[a] + [b]\big\| \;=\; \big\|[a+b]\big\| \;=\; \inf\big\{\|a+b+l\|,\, l \in \mathcal{I}\big\} \;=\; \inf\big\{\|a+b+2l\|,\, l \in \mathcal{I}\big\}$$

$$\leq\; \inf\big\{\|a+l\| + \|b+l\|,\, l \in \mathcal{I}\big\} \;\leq\; \inf\big\{\|a+l\|,\, l \in \mathcal{I}\big\} + \inf\big\{\|b+l\|,\, l \in \mathcal{I}\big\} \;=\; \big\|[a]\big\| + \big\|[b]\big\|\,.$$

Que $\big\|[a]^*\big\| = \big\|[a]\big\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$ foi estabelecido no Lema 40.8, página 2245.

Provemos agora a validade da desigualdade de produto da norma: $\|[a][b]\| \leq \|[a]\|\,\|[b]\|$. Temos que $\|[a][b]\| = \|[ab]\| = \inf\{\|ab+l\|,\, l \in \mathcal{I}\}$. Note-se que se l e l' são elementos de $\mathcal{I}$, então $(a+l)(b+l') = ab + (al' + lb + ll')$, sendo que termo entre parênteses é um elemento de $\mathcal{I}$, por $\mathcal{I}$ ser um ideal bilateral. Logo,

$$\inf\big\{\|ab+l\|,\, l \in \mathcal{I}\big\} \;\leq\; \inf\big\{\|(a+l)(b+l')\|,\, l,\, l' \in \mathcal{I}\big\} \;\leq\; \inf\big\{\|a+l\|\,\|b+l'\|,\, l,\, l' \in \mathcal{I}\big\}$$

$$\leq\; \inf\big\{\|a+l\|,\, l \in \mathcal{I}\big\}\inf\big\{|b+l'\|,\, l' \in \mathcal{I}\big\} \;=\; \big\|[a]\big\|\,\big\|[b]\big\|\,.$$

Os fatos acima demonstram que (40.89) define uma norma em $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Passemos agora à demonstração de completeza[31]. Seja $[a_j]$, $j \in \mathbb{N}$, uma sequência em $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Então, pela definição de ínfimo, existe para cada $m,\, n \in \mathbb{N}$, e para cada $p \in \mathbb{N}$ um elemento $l(m,\, n,\, p) \in \mathcal{I}$ tal que

$$\|a_m - a_n + l(m,\, n,\, p)\| \;\leq\; \big\|[a_m] - [a_n]\big\| + \frac{1}{2^{p+1}}\,.$$

[31] Novamente, trata-se de uma demonstração raramente detalhada na literatura.

Suponhamos agora que $[a_j]$, $j \in \mathbb{N}$, seja uma sequência de Cauchy. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|[a_m] - [a_n]\| < \epsilon$ sempre que $m > N(\epsilon)$ e $n > N(\epsilon)$. Assim, podemos encontrar uma subsequência $[a_{j_k}]$, $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$\big\|[a_{j_l}] - [a_{j_k}]\big\| \;\leq\; \frac{1}{2^{k+1}}$$

para todo $l > k$. Consequentemente, sempre que $l > k$ e para todo $p \in \mathbb{N}$, vale que

$$\|a_{j_l} - a_{j_k} + l(j_l,\, j_k,\, p)\| \;\leq\; \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{p+1}}\,.$$

Defina-se

$$l_m \;:=\; \sum_{p=1}^{m} l(j_p,\, j_{p-1},\, p) \qquad \text{e} \qquad b_m \;:=\; a_{j_m} + l_m\,,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Note-se que $l_m \in \mathcal{I}$ e, *ipso facto*, que $b_m \in [a_{j_m}]$. Teremos, para $m > n$,

$$b_m - b_n \;=\; \sum_{q=n+1}^{m} \big(b_q - b_{q-1}\big) \;=\; \sum_{q=n+1}^{m} \big(a_{j_q} - a_{j_{q-1}} + l(j_q,\, j_{q-1},\, q)\big)$$

e, portanto,

$$\|b_m - b_n\| \;\leq\; \sum_{q=n+1}^{m} \big\|a_{j_q} - a_{j_{q-1}} + l(j_q,\, j_{q-1},\, q)\big\| \;\leq\; \sum_{q=n+1}^{m} \frac{1}{2^q} \;\leq\; \sum_{q=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^q} \;=\; \frac{1}{2^n}\,.$$

Isso estabelece que b_m, $m \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{A}$ e, pela completeza de $\mathcal{A}$, converge a um elemento $b \in \mathcal{A}$. Vamos agora provar que $[a_m]$, $m \in \mathbb{N}$ converge a $[b]$. Para tal é suficiente considerarmos a subsequência $[a_{j_m}]$, $m \in \mathbb{N}$. Como $b_m \in [a_{j_m}]$, temos $[a_{j_m}] - [b] = [b_m] - [b] = [b_m - b]$. Logo,

$$\big\|[a_{j_m}] - [b]\big\| \;=\; \big\|[b_m - b]\big\| \;=\; \inf\big\{\|b_m - b + l\|,\, l \in \mathcal{I}\big\} \;\leq\; \|b_m - b\|$$

que converge a zero quando $m \to \infty$. Logo, $\lim_{m\to\infty} [a_{j_m}] = [b] \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$, demonstrando a completeza desejada.

Passemos agora à demonstração da propriedade C*, para a qual faremos uso dos aproximantes da unidade. Observemos que, pela desigualdade da norma de um produto e pela invariância da norma pela adjunção, segue que $\big\|[a]^*[a]\big\| \leq \big\|[a]\big\|^2$ e, portanto, é suficiente demonstrarmos que $\big\|[a]\big\|^2 \leq \big\|[a]^*[a]\big\|$. Novamente trataremos em separado os casos em que $\mathcal{A}$ possui ou não unidade.

Se $\mathcal{A}$ possui unidade $\mathbb{1}$, escrevemos, para $a \in \mathcal{A}$,

$$\big\|[a]\big\|^2 \overset{(40.87)}{=} \lim_\lambda \big\|a - a e_\lambda\big\|^2 \;=\; \lim_\lambda \Big\|a(\mathbb{1} - e_\lambda)\Big\|^2$$

$$\overset{\text{prop. C*}}{=} \lim_\lambda \Big\|(\mathbb{1} - e_\lambda)a^*a(\mathbb{1} - e_\lambda)\Big\|$$

$$= \lim_\lambda \Big\|(\mathbb{1} - e_\lambda)(a^*a + l)(\mathbb{1} - e_\lambda) - (\mathbb{1} - e_\lambda)l(\mathbb{1} - e_\lambda)\Big\|$$

$$\leq \lim_\lambda \Big(\Big\|(\mathbb{1} - e_\lambda)(a^*a + l)(\mathbb{1} - e_\lambda)\Big\| + \Big\|(\mathbb{1} - e_\lambda)l(\mathbb{1} - e_\lambda)\Big\|\Big)\,,$$

onde, acima, escolhemos $l \in \mathcal{I}$, arbitrário. Por (40.86), temos $\|\mathbb{1} - e_\lambda\| \leq 1$. Logo,

$$\Big\|(\mathbb{1} - e_\lambda)(a^*a + l)(\mathbb{1} - e_\lambda)\Big\| \;\leq\; \big\|\mathbb{1} - e_\lambda\big\|^2\,\big\|a^*a + l\big\| \;\leq\; \big\|a^*a + l\big\| \;\leq \sup_{l' \in \mathcal{I}} \big\|a^*a + l'\big\| \;=\; \big\|[a^*a]\big\|\,.$$

Além disso,

$$\Big\|(\mathbb{1} - e_\lambda)l(\mathbb{1} - e_\lambda)\Big\| \;\leq\; \big\|\mathbb{1} - e_\lambda\big\|\,\big\|l(\mathbb{1} - e_\lambda)\big\| \;\leq\; \big\|l - l e_\lambda\big\|\,,$$

Assim,

$$\big\|[a]\big\|^2 \;\leq\; \lim_\lambda \big\|[a^*a]\big\| + \lim_\lambda \big\|l - l e_\lambda\big\| \;\overset{(40.87)}{=}\; \big\|[a]^*[a]\big\| + \big\|[l]\big\| \;=\; \big\|[a]^*[a]\big\|\,,$$

pois $l \in \mathcal{I}$ e, portanto, $[l] = [0]$. Estabelecemos, assim, que $\big\|[a]\big\|^2 \leq \big\|[a]^*[a]\big\|$, o que completa a demonstração da propriedade C^* no caso em que $\mathcal{A}$ é unital.

Se $\mathcal{A}$ não possuir unidade, passamos à álgebra C^* $\mathbb{C} \ltimes \mathcal{A}$ que possui unidade dada por $(1,\ 0)$. Vimos na prova do Lema 40.8, página 2245, que $\mathbb{C} \ltimes \mathcal{I}$ é um bi-ideal fechado de $\mathbb{C} \ltimes \mathcal{A}$ e que se $\{(0,\ e_\lambda),\ \lambda \in \Lambda\}$ forem aproximantes da unidade em $\mathbb{C} \ltimes \mathcal{I}$, então $\{e_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ são aproximantes da unidade em $\mathcal{I}$. Sabemos que $\|a\| = \|(0,\ a)\|$ e vimos em (40.88) que $\big\|[(0,\ a)]\big\| = \big\|[a]\big\|$.

De posse desses resultados, escrevemos, para $a \in \mathcal{A}$,

$$
\begin{aligned}
\big\|[a]\big\|^2 \;=\; \big\|[(0,\ a)]\big\|^2 \;&\overset{(40.87)}{=}\; \lim_\lambda \big\|(0,\ a) - (0,\ a)(0,\ e_\lambda)\big\|^2 \;=\; \lim_\lambda \Big\|(0,\ a)(1,\ -e_\lambda)\Big\|^2 \\
&\overset{\text{prop. } \mathrm{C}^*}{=}\; \lim_\lambda \Big\|(1,\ -e_\lambda)(0,\ a)^*(0,\ a)(1,\ -e_\lambda)\Big\| \\
&=\; \lim_\lambda \Big\|(1,\ -e_\lambda)(0,\ a^*a)(1,\ -e_\lambda)\Big\| \\
&=\; \lim_\lambda \Big\|(1,\ -e_\lambda)(0,\ a^*a + l)(1,\ -e_\lambda) - (1,\ -e_\lambda)(0,\ l)(1,\ -e_\lambda)\Big\| \\
&\leq\; \lim_\lambda \Big(\Big\|(1,\ -e_\lambda)(0,\ a^*a + l)(1,\ -e_\lambda)\Big\| + \Big\|(1,\ -e_\lambda)(0,\ l)(1,\ -e_\lambda)\Big\|\Big)\ ,
\end{aligned}
$$

onde, acima, escolhemos $l \in \mathcal{I}$, arbitrário. Por (40.86), temos $\|(1,\ -e_\lambda)\| = \|(1,\ 0) - (0,\ e_\lambda)\| \leq 1$. Logo,

$$
\Big\|(1,\ -e_\lambda)(0,\ a^*a + l)(1,\ -e_\lambda)\Big\| \;\leq\; \big\|(1,\ -e_\lambda)\big\|^2\, \big\|(0,\ a^*a + l)\big\| \;\leq\; \big\|a^*a + l\big\| \;\leq\; \sup_{l' \in \mathcal{I}} \big\|a^*a + l'\big\| \;=\; \big\|[a^*a]\big\|\ .
$$

Além disso,

$$
\Big\|(1,\ -e_\lambda)(0,\ l)(1,\ -e_\lambda)\Big\| \;\leq\; \big\|(1,\ -e_\lambda)\big\|\, \big\|(0,\ l)(1,\ -e_\lambda)\big\| \;\leq\; \big\|(0,\ l)(1,\ -e_\lambda)\big\| \;=\; \big\|(0,\ l) - (0,\ l)(0,\ e_\lambda)\big\|\ ,
$$

Assim,

$$
\big\|[a]\big\|^2 \;\leq\; \lim_\lambda \big\|[a^*a]\big\| + \lim_\lambda \big\|(0,\ l) - (0,\ l)(0,\ -e_\lambda)\big\| \;\overset{(40.87)}{=}\; \big\|[a]^*[a]\big\| + \|[l]\| \;=\; \big\|[a]^*[a]\big\|\ ,
$$

pois $l \in \mathcal{I}$ e, portanto, $[l] = [0]$. Estabelecemos que $\big\|[a]\big\|^2 \leq \big\|[a]^*[a]\big\|$, o que completa a demonstração da propriedade C^* no caso em que $\mathcal{A}$ não tem unidade. ∎

40.4 Álgebras de von Neumann. Um Mínimo

A teoria das álgebras de von Neumann é um dos capítulos mais importantes da Álgebra de Operadores (vide, e.g., [77], [78] e [496]), com reflexos de grande importância na Física Quântica (vide, e.g., [203], [20] ou [146]). Nesta breve seção, porém, restringimo-nos a apresentar apenas os resultados mais elementares sobre a mesma dos quais faremos uso alhures neste texto.

• **Comutantes**

Vamos a uma importante definição de natureza algébrica. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $\mathcal{M}$ um subconjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Definimos o *comutante* de $\mathcal{M}$, denotado por $\mathcal{M}'$, como sendo o conjunto de todos os elementos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que comutam com cada elemento de $\mathcal{M}$:

$$
\mathcal{M}' \;:=\; \big\{b \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ \ ab = ba \text{ para todo } a \in \mathcal{M}\big\}\ .
$$

É elementar constatar-se que $\mathcal{M}'$ é uma subálgebra unital de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Mais que isso, $\mathcal{M}'$ é uma subálgebra de Banach de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Isso se constata pelo seguinte argumento. Seja b_j, $j \in \mathbb{N}$, uma sequência de elementos de $\mathcal{M}'$ que converge (na topologia da norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$) a um elemento $b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Para cada $a \in \mathcal{M}$ e todo $j \in \mathbb{N}$ vale $ba - ab = (b - b_j)a - a(b - b_j)$, pois $b_j a = a b_j$. Logo, $\|ba - ab\| \leq 2\|b - b_j\|\, \|a\|$, que converge a 0 quando $j \to \infty$, estabelecendo que $ba = ab$, ou seja, que $b \in \mathcal{M}'$.

Se $\mathcal{M}$ for um conjunto autoadjunto (i.e., se $a \in \mathcal{M}$ implica $a^* \in \mathcal{M}$), então $\mathcal{M}'$ é uma $*$-subálgebra unital de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e, portanto, é uma subálgebra C^* de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

É importante ainda observar que se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são dois subconjuntos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisfazendo $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, então $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}'$, como facilmente se constata pela definição de comutante.

Denotamos por $\mathcal{M}''$ o comutante de $\mathcal{M}'$: $\mathcal{M}'' := (\mathcal{M}')'$. $\mathcal{M}''$ é dito ser o *bicomutante* de $\mathcal{M}$, ou o *duplo comutante* de $\mathcal{M}$. É evidente pela definição de comutante que $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}''$.

E. 40.34 *Exercício.* Demonstre todas as afirmações feitas acima. ✣

Da última observação segue que $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})''$, o que, evidentemente, implica $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})''$.

Denotemos por $\mathbb{C}\mathbb{1}$ a $*$-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ composta por múltiplos da identidade: $\mathbb{C}\mathbb{1} := \{\lambda\mathbb{1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Afirmamos que $\mathcal{B}(\mathcal{H})' = \mathbb{C}\mathbb{1}$. Há diversas provas desse fato elementar e aqui apresentamos uma que usa um mínimo de recursos. Se $b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})'$, então $b^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})'$, pois $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é autoadjunto. Assim, b e b^* comutam com todos os projetores ortogonais P_ϕ, definidos para $\phi \in \mathcal{H}$ com $\|\phi\| = 1$ por $P_\phi\psi = \langle \phi,\ \psi\rangle\phi$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Teremos, portanto, $\langle \phi,\ \psi\rangle b\phi = bP_\phi\psi = P_\phi b\psi = \langle \phi,\ b\psi\rangle\phi$. Logo, tomando $\psi = \phi$, obtemos $b\phi = \langle \phi,\ b\phi\rangle\phi$. Analogamente, concluímos que $b^*\phi = \langle \phi,\ b^*\phi\rangle\phi$. Afirmamos que $\langle \phi,\ b\phi\rangle$ é constante, ou seja, não depende de ϕ no conjunto dos vetores unitários de $\mathcal{H}$. No caso em que $\mathcal{H}$ é unidimensional, isso é evidente. No caso geral, se ϕ' é outro vetor unitário, temos, por um lado $\langle \phi',\ b\phi\rangle = \langle \phi,\ b\phi\rangle\, \langle \phi',\ \phi\rangle$ e, por outro lado

$$
\langle \phi',\ b\phi\rangle \;=\; \langle b^*\phi',\ \phi\rangle \;=\; \overline{\langle \phi',\ b^*\phi'\rangle}\langle \phi',\ \phi\rangle \;=\; \langle \phi',\ b\phi'\rangle\langle \phi',\ \phi\rangle\ .
$$

Isso mostra que, caso $\langle \phi',\ \phi\rangle \neq 0$, temos $\langle \phi,\ b\phi\rangle = \langle \phi',\ b\phi'\rangle$. Porém, se $\langle \phi',\ \phi\rangle = 0$, podemos considerar o vetor $\phi'' := (\phi + \phi')/\sqrt{2}$ com $\|\phi''\| = 1$, e teremos $\langle \phi'',\ \phi\rangle \neq 0$ e $\langle \phi'',\ \phi'\rangle \neq 0$, o que nos permite inferir, pelo que já foi demonstrado, que $\langle \phi,\ b\phi\rangle = \langle \phi'',\ b\phi''\rangle = \langle \phi',\ b\phi'\rangle$. Assim, concluímos que $\langle \phi,\ b\phi\rangle$ é uma constante $\beta \in \mathbb{C}$ independente de ϕ e, portanto, $b\phi = \beta\phi$ para todo ϕ unitário, provando que $(\mathcal{B}(\mathcal{H}))' = \mathbb{C}\mathbb{1}$.

Façamos agora uma observação trivial, mas importante. $(\mathcal{M}')''$ é, por definição, igual a $\big((\mathcal{M}')'\big)'$ que, evidentemente, é igual a $(\mathcal{M}'')'$. Assim, estabelecemos que $(\mathcal{M}')'' = (\mathcal{M}'')'$. Denotamos $(\mathcal{M}')''$ por $\mathcal{M}'''$, o *triplo comutante* de $\mathcal{M}$. Por $\mathcal{M}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, denota-se o n-ésimo comutante de $\mathcal{M}$ (com a convenção $\mathcal{M}^{(0)} = \mathcal{M}$) e é claro pelo que observamos acima que $\big(\mathcal{M}^{(n)}\big)^{(m)} = \mathcal{M}^{(n+m)}$ para todos $m,\ n \in \mathbb{N}_0$.

Vamos agora provar que $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'''$. Sabemos que $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}''$, o que implica, tomando-se o comutante de ambos os lados, que $\mathcal{M}''' \subset \mathcal{M}'$. Por outro lado, sabemos $\mathcal{M}' \subset (\mathcal{M}')'' \equiv \mathcal{M}'''$. Assim, $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'''$, como desejávamos provar. Desse fato elementar segue a validade das seguintes cadeias de relações de continência e igualdade, validas para qualquer $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$
\mathcal{M} \;\subset\; \mathcal{M}'' \;=\; \mathcal{M}^{(4)} \;=\; \mathcal{M}^{(6)} \;=\; \mathcal{M}^{(8)} \;=\; \cdots\ ,
$$

$$
\mathcal{M}' \;=\; \mathcal{M}''' \;=\; \mathcal{M}^{(5)} \;=\; \mathcal{M}^{(7)} \;=\; \mathcal{M}^{(9)} \;=\; \cdots\ .
$$

E. 40.35 *Exercício.* Demonstre todas as afirmações feitas acima. ✣

As observações acima nos conduzem à seguinte definição: uma $*$-subálgebra de $\mathcal{M}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é dita ser uma *álgebra de von Neumann*[32] agindo em $\mathcal{H}$ se $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$.

Observe-se que, pela definição, toda álgebra de von-Neumann agindo em $\mathcal{H}$ é uma subálgebra C^* de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e é unital (exceto no caso trivial em que $\mathcal{M} = \{0\}$).

Uma álgebra de von-Neumann é dita ser um *fator* se $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \mathbb{C}\mathbb{1}$.

Como vimos acima, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma álgebra de von-Neumann agindo em $\mathcal{H}$ e é também um fator, pois $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{B}(\mathcal{H})' = \mathcal{B}(\mathcal{H}) \cap \mathbb{C}\mathbb{1} = \mathbb{C}\mathbb{1}$. É também elementar agora constatar que $\mathbb{C}\mathbb{1}$ é uma álgebra de von Neumann e é um fator.

[32] János von Neumann (1903–1957). Von Neumann também adotou os nomes de Johann von Neumann e John von Neumann.

Uma outra observação relevante que devemos fazer é a seguinte. Seja $\{\mathcal{M}_\lambda \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ \lambda \in \Lambda\}$ uma família não vazia de subconjuntos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Tem-se $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}_\lambda \subset \mathcal{M}_\mu$ para todo $\mu \in \Lambda$. Logo, $\mathcal{M}'_\mu \subset \big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}_\lambda\big)'$ e, disso, segue também que $\big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}_\lambda\big)'' \subset \mathcal{M}''_\mu$. Como isso vale para todo $\mu \in \Lambda$, segue que $\big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}_\lambda\big)'' \subset \bigcap_{\mu\in\Lambda} \mathcal{M}''_\mu$. Logo, valem as seguintes relações de continência:

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}_\lambda \ \subset\ \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}_\lambda\right)'' \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}''_\lambda\,. \tag{40.90}$$

Se $\{\mathcal{M}_\lambda \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ \lambda \in \Lambda\}$ for uma família de $*$-subálgebras agindo em $\mathcal{H}$, é elementar constatar que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}_\lambda$ é igualmente uma $*$-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Se $\{\mathcal{M}_\lambda \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ \lambda \in \Lambda\}$ for uma família de álgebras de von Neumann agindo em $\mathcal{H}$, (ou seja, se $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}''_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$), então $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}_\lambda$ é igualmente de álgebra de von Neumann agindo em $\mathcal{H}$, pois (40.90) garante-nos que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}_\lambda = \big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}_\lambda\big)''$. Em resumo, a intersecção de uma família arbitrária de álgebras de von Neumann agindo em um mesmo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é também uma álgebra de von Neumann agindo em $\mathcal{H}$.

Todo $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ está contido em ao menos uma álgebra de von Neumann, a saber $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Definimos $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$, a *álgebra de von Neumann gerada pelo conjunto* $\mathcal{N}$, como sendo a intersecção de todas as álgebras de von Neumann que contém $\mathcal{N}$. No sentido dessa definição, podemos dizer que $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ é a "menor" álgebra de von Neumann que contém $\mathcal{N}$.

40.4.1 O Teorema do Bicomutante

• **Comutantes e a topologia operatorial fraca**

Na Seção 32.4.1, página 1650, especialmente nos Exemplos 32.12 e 32.13, páginas 1651 e 1652, respectivamente, foram introduzidas as noções de topologias operatoriais fraca e forte em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Vamos aqui fazer uso importante das mesmas. Começamos com uma observação sobre propriedades topológicas de comutantes.

Seja $\mathcal{N} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e seja $\mathcal{N}'$ seu comutante. Então, $\mathcal{N}'$ é fracamente fechado. Para ver isso, considere-se Λ um conjunto dirigido e uma rede $\Lambda \ni \lambda \mapsto A'_\lambda \in \mathcal{N}'$ que convirja fracamente a um elemento $A' \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ou seja, tem-se $\lim_\lambda \langle x,\ (A'\lambda - A'y\rangle = 0$. Queremos provar que $A' \in \mathcal{N}'$. Para tal, tomemos $B \in \mathcal{N}$ e consideremos o comutador $BA' - A'B$. É claro que $BA' - A'B = B(A' - A'_\lambda) - (A' - A'_\lambda)B$ para todo $\lambda \in \Lambda$, pois $A'_\lambda \in \mathcal{N}'$. Logo, para todos $x,\ y \in \mathcal{H}$ valerá

$$\langle x,\ \big(BA' - A'B\big)y\rangle \ =\ \langle x,\ \big(B(A' - A'_\lambda) - (A' - A'_\lambda)B\big)y\rangle \ =\ \langle B^*x,\ (A' - A'_\lambda)y\rangle - \langle x,\ (A' - A'_\lambda)By\rangle\,.$$

O lado esquerdo da cadeia de igualdades acima independe de λ. Porém, $\lim_\lambda \langle B^*x,\ (A'-A'_\lambda)y\rangle = \lim_\lambda \langle x,\ (A'-A'_\lambda)By\rangle = 0$. Logo, provamos que $\langle x,\ (BA' - A'B)y\rangle = 0$ para todos $x,\ y \in \mathcal{H}$, provando que $BA' = A'B$. Como B é um elemento arbitrário de $\mathcal{N}$, segue que $A' \in \mathcal{N}'$, provando que $\mathcal{N}'$ é fracamente fechado.

Pelos comentários do Exemplo 32.13, página 1652, isso implica que $\mathcal{N}'$ é também fortemente fechado, o que, aliás, pode ser provado diretamente como fizemos acima para mostrar que $\mathcal{N}'$ é fracamente fechado.

Para futura referência reunimos o que acabamos de mostrar na seguinte

Proposição 40.56 *Se $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ então seu comutante $\mathcal{N}'$ é fraca e fortemente fechado.* □

• **Álgebras de operadores não-degeneradas**

Se $\mathcal{J} \subset \mathcal{H}$ denotamos por $\mathrm{span}\,(\mathcal{J})$ a chamada varredura linear de $\mathcal{J}$ (para a definição, vide (39.48), página 2144). Trata-se do menor subespaço linear de $\mathcal{H}$ que contém $\mathcal{J}$.

Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma álgebra e $\mathcal{J} \subset \mathcal{H}$, denotamos por $\mathcal{A}\mathcal{J}$ o conjunto $\mathcal{A}\mathcal{J} := \{a\psi,\ a \in \mathcal{A},\ \psi \in \mathcal{J}\} \subset \mathcal{H}$.

Note-se que se $\psi \in \mathcal{H}$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, então $\mathrm{span}\,\big(\mathcal{A}\{\psi\}\big) = \mathcal{A}\{\psi\}$. Denotaremos $\mathcal{A}\{\psi\}$ simplesmente por $\mathcal{A}\psi$.

Recordemos ainda que se $\mathcal{J} \subset \mathcal{H}$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, então

$$(\mathcal{A}\mathcal{J})^\perp \ =\ \big(\mathrm{span}\,(\mathcal{A}\mathcal{J})\big)^\perp\,. \tag{40.91}$$

Isso segue do seguinte. Por um lado, $\mathcal{A}\mathcal{J} \subset \mathrm{span}\,(\mathcal{A}\mathcal{J})$, o que implica $\big(\mathrm{span}\,(\mathcal{A}\mathcal{J})\big)^\perp \subset (\mathcal{A}\mathcal{J})^\perp$. Por outro lado, tem-se $(\mathcal{A}\mathcal{J})^\perp \subset \big(\mathrm{span}\,(\mathcal{A}\mathcal{J})\big)^\perp$, pois $\psi \in (\mathcal{A}\mathcal{J})^\perp$, então $\psi \in \big(\mathrm{span}\,(\mathcal{A}\mathcal{J})\big)^\perp$, pois $\mathrm{span}\,(\mathcal{A}\mathcal{J})$ contém apenas combinações lineares finitas de elementos de $\mathcal{A}\mathcal{J}$.

Uma álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é dita ser uma *álgebra de operadores não-degenerada* se $\overline{\mathrm{span}\,\big(\mathcal{A}\mathcal{H}\big)} = \mathcal{H}$. Assim, uma álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é não degenerada se e somente se $\mathrm{span}\,\big(\mathcal{A}\mathcal{H}\big)$ for denso em $\mathcal{H}$ o que, por (40.91), ocorre se e somente se $(\mathcal{A}\mathcal{H})^\perp = \{0\}$.

Seja $\mathcal{A}$ autoadjunta e seja $\psi \in \mathcal{H}$. Então, para todo $\phi \in \mathcal{H}$, vale $\langle \psi,\ a^*\phi\rangle = \langle a\psi,\ \phi\rangle$. Vemos disso que $a\psi = 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$ se e somente se $\psi \in \big(\mathcal{A}\mathcal{H}\big)^\perp$. Assim, $\mathcal{A}$ é não-degenerada (isto é, $\big(\mathcal{A}\mathcal{H}\big)^\perp = \{0\}$) se e somente se $a\psi = 0$ para todo $a \in \mathcal{H}$ implicar $\psi = 0$. Em resumo, provamos a seguinte afirmação:

Lema 40.9 *Uma álgebra autoadjunta $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é não-degenerada se e somente se $\mathcal{A}\psi = \{0\}$ implicar $\psi = 0$.* □

Esse lema revela também que toda álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, autoadjunta e que contenha a unidade de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (i.e., que possui uma unidade) é não-degenerada.

Uma álgebra que não seja não-degenerada é dita ser degenerada.

• **O Teorema do Bicomutante**

Chegamos agora a um importante teorema, devido a von Neumann[33]:

Teorema 40.24 (Teorema do Bicomutante) *Seja $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma álgebra autoadjunta e não-degenerada. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

(a) $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ (ou seja, $\mathcal{M}$ é uma álgebra de von Neumann).

(b) $\mathcal{M}$ é fracamente fechada.

(c) $\mathcal{M}$ é fortemente fechada. □

A demonstração que apresentaremos segue proximamente a de [496] (que segue [25]), com algumas elucidações. Antes da demonstração, façamos alguns

Comentários. Como já observamos, se $\mathcal{M}$ contiver a unidade de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ a condição de não-degenerescência é dispensável.

O Teorema do Bicomutante informa-nos que se uma álgebra autoadjunta e não-degenerada $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ for forte ou fracamente fechada, então ela contém a unidade $\mathbb{1}_\mathcal{H}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, pois a condição $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ implica que $\mathbb{1}_\mathcal{H} \in \mathcal{M}$.

Sobre o papel da condição de não-degenerescência nas hipóteses do teorema faremos mais alguns comentários após sua demonstração.

O ponto de destaque do Teorema do Bicomutante é a associação de uma propriedade puramente algébrica, ser igual ao seu bicomutante, a uma propriedade puramente topológica, ser fraca ou fortemente fechado. Esse fato por si revela que álgebras de von Neumann são um objeto matematicamente especial.

Uma álgebra de operadores em $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que seja autoadjunta e fechada na topologia uniforme (definida pela norma operatorial) é uma álgebra C*, mas não necessariamente uma álgebra de von Neumann.

Para que uma álgebra autoadjunta e não-degenerada seja de von Neumann é também necessário e suficiente que a mesma seja fechada em outras topologias além das topologias operatoriais fraca ou forte, como as topologias $*$-forte, σ-fraca a $\sigma*$-fraca, σ-forte ou $\sigma*$-forte. Para um tratamento completo desses casos, vide *e.g.* [77]. ♣

Demonstração do Teorema 40.24. Que (a) implica (b) e (c) segue simplesmente da Proposição 40.56, página 2250. Que (b) implica (c) é fato bem sabido (vide comentários do Exemplo 32.13, página 1652). O ponto não-trivial é mostrar que (c) implica (a). O que trataremos de fazer agora.

É suficiente provarmos que $\mathcal{M}'' \subset \mathcal{M}$. Assumindo que $\mathcal{M}$ seja fortemente fechada, desejamos provar que para cada $a'' \in \mathcal{M}''$ e todo conjunto fortemente aberto A que o contém vale $A \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$ (vide Proposição 27.8, página 1437). Naturalmente, é suficiente supor que os conjuntos fortemente abertos A sejam elementos de uma base da topologia operatorial forte (para a noção de base de uma topologia, vide página 1429), os quais foram caracterizados no Exemplo 32.13, página 1652. Contemplando aquela caracterização, percebe-se que para provarmos que $\mathcal{M}'' \subset \mathcal{M}$, é suficiente estabelecermos o seguinte:

> Para cada $a'' \in \mathcal{M}''$, $N \in \mathbb{N}$, $r_j > 0,\ j = 1,\ \ldots,\ N$ e $\psi_j \in \mathcal{H},\ j = 1,\ \ldots,\ N$, existe $a \in \mathcal{M}$ tal que $\big\|a''\psi_j - a\psi_j\big\| < r_j$ para todos $j = 1,\ \ldots,\ N$.

[33] J. von Neumann, "Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren", Math. Ann., **102** 370–427 (1929).

A prova será feita primeiramente no caso em que $N = 1$ e depois generalizada para $N > 1$.

Prova caso $N = 1$. Desejamos provar que se $a'' \in \mathcal{M}''$, $r > 0$ e $\psi \in \mathcal{H}$, então existe $a \in \mathcal{M}$ tal que $\big\|a''\psi - a\psi\big\| < r$.

Como $\mathcal{M}$ é autoadjunta, tem-se, como já observamos, $\overline{\text{span}\,(\mathcal{M})\psi} = \overline{\mathcal{M}\psi}$. Além disso, $\overline{\text{span}\,(\mathcal{M})\overline{\mathcal{M}\psi}} = \overline{\mathcal{M}\psi}$ é um espaço linear fechado de $\mathcal{H}$. Observemos primeiramente que $\mathcal{M}\overline{\mathcal{M}\psi} \subset \overline{\mathcal{M}\psi}$. De fato, se $\varphi \in \overline{\text{span}\,(\mathcal{M})\psi}$, então para todo $\epsilon > 0$ existe um elemento $c \in \mathcal{M}$ tal que $\|\varphi - c\psi\| < \epsilon$. Mas isso implica que para todo $b \in \mathcal{M}$ tem-se $\|b\varphi - bc\psi\| < \|b\|\epsilon$, provando que $b\varphi \in \overline{\mathcal{M}\psi}$ e, portanto, que $\mathcal{M}\overline{\mathcal{M}\psi} \subset \overline{\mathcal{M}\psi}$.

Denotemos por P projetor ortogonal sobre $\overline{\mathcal{M}\psi}$ e provemos que $P \in \mathcal{M}'$. O fato que $\mathcal{M}\overline{\mathcal{M}\psi} \subset \overline{\mathcal{M}\psi}$ significa que $aP = PaP$ para todo $a \in \mathcal{M}$. Tomando-se o adjunto, temos $Pa^* = Pa^*P$ para todo $a \in \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ é autoadjunta, isso significa que $Pa = PaP$ para todo $a \in \mathcal{M}$. Assim, temos que $aP = PaP = Pa$ para todo $a \in \mathcal{M}$, provando que $P \in \mathcal{M}'$.

Com isso, para o elemento $a'' \in \mathcal{M}''$ que estamos considerando vale, evidentemente, $a''P = Pa''$, o que implica que $a''\overline{\mathcal{M}\psi} \subset \overline{\mathcal{M}\psi}$. Se provarmos que $\psi \in \overline{\mathcal{M}\psi}$, seguirá disso que $a''\psi \in \overline{\mathcal{M}\psi}$ e, portanto, que para cada $r > 0$ haverá $a \in \mathcal{M}$ tal que $\|a''\psi - a\psi\| < r$, como desejamos mostrar.

Provemos, pois, que $\psi \in \overline{\mathcal{M}\psi}$. Para todo $b \in \mathcal{M}$ tem-se, evidentemente, $b\psi \in \overline{\mathcal{M}\psi}$. Logo, $Pb\psi = b\psi$, ou seja, $(P - \mathbb{1})b\psi = 0$. Como $P \in \mathcal{M}'$, isso estabeleceu que $b(P - \mathbb{1})\psi = 0$ para todo $b \in \mathcal{M}$, ou seja, que $\mathcal{M}(P - \mathbb{1})\psi = \{0\}$. Como $\mathcal{M}$ é autoadjunta e não-degenerada, isso implica (pelo Lema 40.9, página 2251) que $(P - \mathbb{1})\psi = 0$, ou seja, que $\psi = P\psi \in \overline{\mathcal{M}\psi}$, como queríamos demonstrar, completando a prova desejada para o caso $N = 1$.

Prova caso $N > 1$. O que faremos é montar o problema de tal forma que o caso $N > 1$ possa ser obtido do caso $N = 1$. Fixemos $N > 1$. Tomando $r := \min\{r_1, \ldots, r_N\}$ é suficiente provarmos que existe $a \in \mathcal{M}$ tal que $\|a''\psi_j - a\psi_j\| < r$ para todo $j = 1, \ldots, N$.

Sejam $\mathcal{H}^N := \underbrace{\mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}}_{N \text{ vezes}}$ e $\mathcal{M}^N := \underbrace{\mathcal{M} \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}}_{N \text{ vezes}}$. Definamos $\widetilde{\mathcal{M}^N} := \left\{ \underbrace{a \oplus \cdots \oplus a}_{N \text{ vezes}},\ a \in \mathcal{M} \right\}$. É evidente que $\widetilde{\mathcal{M}^N}$ é uma subálgebra autoadjunta de $\mathcal{M}^N$.

Afirmamos que $\widetilde{\mathcal{M}^N}$ é não-degenerada. Isso segue da observação que se $\Psi \equiv \psi_1 \oplus \cdots \oplus \psi_N \in \mathcal{H}^N$ então $\widetilde{\mathcal{M}^N}\Psi = \{a\psi_1 \oplus \cdots \oplus a\psi_N,\ a \in \mathcal{M}\}$. Logo, $\widetilde{\mathcal{M}^N}\Psi = \{0\}$ se e somente se para cada $j = 1, \ldots, N$ tivermos $a\psi_j = 0$ para todo $a \in \mathcal{M}$, ou seja, se e somente se $\mathcal{M}\psi_j = \{0\}$ para cada $j = 1, \ldots, N$, o que se dá se e somente se $\psi_1 = \cdots = \psi_N = 0$, pois $\mathcal{M}$ é não-degenerada. Assim, $\widetilde{\mathcal{M}^N}\Psi = \{0\}$ se e somente se $\Psi = 0$, provando que $\widetilde{\mathcal{M}^N}$ é não-degenerada.

Afirmamos outrossim que $\widetilde{\mathcal{M}^N}$ é fortemente fechada. Isso é trivial de se provar, pois se uma rede $\Lambda \ni \lambda \mapsto a_\lambda \oplus \cdots \oplus a_\lambda \in \widetilde{\mathcal{M}^N}$ é fortemente convergente, então para todo $\psi_1 \oplus \cdots \oplus \psi_N \in \mathcal{H}^N$ teremos que $\Lambda \ni \lambda \mapsto a_\lambda\psi_1 \oplus \cdots \oplus a_\lambda\psi_N \in \mathcal{H}^N$ será convergente. Logo, cada termo $a_\lambda\psi_j$, $j = 1, \ldots, N$, será convergente a $a\psi_j$ para algum $a \in \mathcal{M}$, pois $\mathcal{M}$ é fortemente fechada, provando que $a_\lambda\psi_1 \oplus \cdots \oplus a_\lambda\psi_N$ converge a $a\psi_1 \oplus \cdots \oplus a\psi_N$ e, portanto, $a_\lambda \oplus \cdots \oplus a_\lambda$ converge fortemente a $a \oplus \cdots \oplus a \in \widetilde{\mathcal{M}^N}$, provando que $\widetilde{\mathcal{M}^N}$ é fortemente fechada.

Seja um elemento de $\big(\mathcal{M}^N\big)''$ da forma $A'' := \underbrace{a'' \oplus \cdots \oplus a''}_{N \text{ vezes}}$. A validade da tese para o caso $N = 1$ permite-nos afirmar que existe $A := a \oplus \cdots \oplus a \in \widetilde{\mathcal{M}^N}$ tal que $\Big\|A''\Psi - A\Psi\Big\|_{\mathcal{H}^N} < r$. Logo, $\|a''\psi_j - a\psi_j\| < r \leq r_j$ para cada $j = 1, \ldots, N$, completando a prova. ∎

Façamos um comentário para elucidar a importância da condição de não-degeneresc̈ência no Teorema do Bicomutante, Teorema 40.24. Vamos supor que $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ seja uma álgebra de von Neumann não-degenerada agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, sendo, portanto, fraca e fortemente fechada. Seja $\mathcal{H}_0$ um outro espaço de Hilbert e considere-se a soma direta $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_0$. Podemos fazer agir nesse espaço uma extensão de $\mathcal{M}$ dada por $\mathcal{M} \oplus \{0\}$. É claro que $\mathcal{M} \oplus \{0\}$ é autoadjunta, mas ela é degenerada, pois $\big(\mathcal{M} \oplus \{0\}\big)0 \oplus \phi = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{H}_0$ que seja não-nulo. É fácil ver, porém, que $\mathcal{M} \oplus \{0\}$ é também fraca e fortemente fechada. Agora, não é difícil ver que $\big(\mathcal{M} \oplus \{0\}\big)' = \mathcal{M}' \oplus \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ e que $\big(\mathcal{M} \oplus \{0\}\big)'' = \big(\mathcal{M}' \oplus \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)\big)' = \mathcal{M} \oplus \mathbb{C}\mathbb{1}_{\mathcal{H}_0} \neq \mathcal{M} \oplus \{0\}$. Logo, $\mathcal{M} \oplus \{0\}$ não é igual a seu bicomutante, ainda que seja fraca e fortemente fechada.

• **A álgebra de von Neumann gerada por um operador limitado autoadjunto**

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja um operador limitado e autoadjunto $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Já introduzimos à página 2233 a álgebra C* gerada por $\{\mathbb{1},\ A\}$, que denotamos por $\text{C}^*[\{\mathbb{1},\ A\}]$, e já mencionamos que a mesma coincide com o fecho na topologia uniforme de todos os polinômios em A e $\mathbb{1}$.

Como toda rede de operadores que converge uniformemente também converge fraca e fortemente, concluímos que $\text{C}^*[\{\mathbb{1},\ A\}]$ é um subconjunto da álgebra de von Neumann gerada por A, $\mathcal{M}[\{\mathbb{1},\ A\}] = \mathcal{M}[\{A\}]$. Assim, $\text{C}^*[A] \subset \mathcal{M}[\{A\}]$.

Esse comentário será útil quando falarmos mais adiante sobre a decomposição polar de operadores limitados.

40.5 Um Pouco sobre Estados e Representações de Álgebras C*

Conforme a definição que apresentamos em páginas anteriores, uma álgebra normada $\mathcal{C}$ é dita ser uma álgebra C* se for uma álgebra de Banach-$*$ com relação a uma certa norma $\|\cdot\|$ e com a propriedade adicional que $\|a^*a\| = \|a\|^2$ para todo $a \in \mathcal{C}$. Álgebras C* têm, como teremos a oportunidade de ver, uma relação íntima com a teoria de operadores em espaços de Hilbert, até mesmo por que a álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dos operadores limitados agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um exemplo básico de álgebra C*. Por abstraírem e generalizarem várias das propriedades de álgebras de operadores agindo em espaços de Hilbert, álgebras C* desempenham também um papel importante na Física Quântica. Vamos nesta seção discutir algumas das suas propriedades mais básicas.

40.5.1 Morfismos Entre Álgebras C*

• **Propriedades de $*$-morfismos entre álgebras C***

À página 2209 definimos a noção de $*$-morfismo entre duas álgebras de involução. No caso de álgebras C* tem-se o seguinte resultado básico (extraído de [77]):

Proposição 40.57 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas álgebras C* (cujas involuções e normas denotamos, por simplicidade, pelo mesmos símbolos $*$ e $\|\cdot\|$, respectivamente) e seja $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um $*$-morfismo. Então, π preserva a positividade, ou seja, leva elementos positivos de $\mathcal{A}$ em elementos positivos de $\mathcal{B}$. Além disso, π é contínua com $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$.* □

Prova. Pelo Teorema 40.21, página 2238, $a \in \mathcal{A}$ é positivo se e somente se for da forma $a = b^*b$ para algum $b \in \mathcal{A}$. Logo, como π é um $*$-morfismo, vale $\pi(a) = \pi(b^*b) = \pi(b)^*\pi(b) \geq 0$. Isso estabelece que π preserva a positividade.

Pelo item 3 da Proposição 40.52, página 2240, temos para todo $a \in \mathcal{A}$ que $a^*a\|a^*a\| \geq \big(a^*a\big)^2$. Como π respeita a positividade, segue que $\|a^*a\|\pi(a^*a) \geq \pi\Big(\big(a^*a\big)^2\Big)$. Pelo fato de π ser um morfismo e pela propriedade C*, isso diz que

$$\pi\big(a^*a\big)^2 \ \leq\ \|a\|^2\pi(a^*a)\ .$$

Pelo item 2 da Proposição 40.52, isso implica que $\Big\|\pi\big(a^*a\big)^2\Big\| \leq \Big\|\|a\|^2\pi(a^*a)\Big\|$, ou seja,

$$\Big\|\pi\big(a^*a\big)^2\Big\| \ \leq\ \|a\|^2\big\|\pi(a^*a)\big\|\ . \tag{40.92}$$

Assim, usando repetidamente a propriedade C* para a norma em $\mathcal{B}$, segue que

$$\|\pi(a)\|^4 \ =\ \big\|\pi(a)^*\pi(a)\big\|^2 \ =\ \|\pi(a^*a)\|^2 \ =\ \big\|\pi(a^*a)^*\pi(a^*a)\big\| \ =\ \big\|\pi(a^*a)^2\big\|$$

$$\overset{(40.92)}{\leq}\ \ \|a\|^2\|\pi(a^*a)\| \ =\ \|a\|^2\|\pi(a)^*\pi(a)\| \ =\ \|a\|^2\|\pi(a)\|^2\ .$$

Isso garante que $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$, provando que π é contínua e completando a demonstração. ∎

• **$*$-isomorfismos entre álgebras C***

Um $*$-morfismo $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre duas álgebras C* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é dito ser um *$*$-isomorfismo* se for bijetor (e, portanto, inversível). Afirmamos que a inversa $\pi^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ é um $*$-morfismo. Sejam, por exemplo, b e b' elementos de $\mathcal{B}$ e sejam

a e a' os (univocamente definidos) elementos de $\mathcal{A}$ tais que $\pi(a) = b$ e $\pi(a') = b'$. Então, $\pi^{-1}\big(bb'\big) = \pi^{-1}\big(\pi(a)\pi(a')\big) = \pi^{-1}\big(\pi(aa')\big) = aa' = \pi^{-1}(b)\pi^{-1}(b')$. Analogamente se prova (faça-o!) que $\pi^{-1}(\alpha b + \beta b') = \alpha\pi^{-1}(b) + \beta\pi^{-1}(b')$ para todos α, $\beta \in \mathbb{C}$ e que $\pi^{-1}(b^*) = \pi^{-1}(b)^*$.

Como π^{-1} é um $*$-morfismo, valem para ele as conclusões da Proposição 40.57, página 2253: π^{-1} preserva a positividade, é contínuo e satisfaz $\big\|\pi^{-1}(b)\big\| \leq \|b\|$ para todo $b \in \mathcal{B}$. Essa última relação, porém, implica (escrevendo-se $b = \pi(a)$) $\|a\| \leq \|\pi(a)\|$, o que é válido para todo $a \in \mathcal{A}$. Da proposição 40.57 concluímos que $\|\pi(a)\| = \|a\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$ e, portanto, $\|\pi^{-1}(b)\| = \|b\|$ para todo $b \in \mathcal{B}$.

Para futura referência, reunimos essas conclusões na seguinte proposição:

Proposição 40.58 *Se $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um $*$-isomorfismo entre duas álgebras C^* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, então $\pi^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ é igualmente um $*$-isomorfismo e valem $\|\pi(a)\| = \|a\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$ e $\|\pi^{-1}(b)\| = \|b\|$ para todo $b \in \mathcal{B}$. Portanto, π e π^{-1} são isometrias.* □

• **Propriedades do núcleo de um $*$-morfismo entre álgebras C^***

Definimos o núcleo e a imagem de um $*$-morfismo $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ da maneira usual:

$$\mathrm{Ker}\,(\pi) \;:=\; \big\{a \in \mathcal{A}\big|\; \pi(a) = 0\big\}\,,$$

$$\mathrm{Ran}\,(\pi) \;:=\; \big\{b \in \mathcal{B}\big|\; b = \pi(a) \text{ para algum } a \in \mathcal{A}\big\}\,.$$

Um fato relevante a se mencionar é que se $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um $*$-morfismo entre duas álgebras C^*, então $\mathrm{Ker}\,(\pi)$ é um bi-ideal de $\mathcal{A}$, ou seja, para todo $a \in \mathcal{A}$ e todo $b \in \mathrm{Ker}\,(\pi)$ tem-se que $ab \in \mathrm{Ker}\,(\pi)$ e $ba \in \mathrm{Ker}\,(\pi)$. De fato, para tais a e b valem $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b) = 0$ e $\pi(ba) = \pi(b)\pi(a) = 0$, pois $\pi(b) = 0$, por hipótese. Pela Proposição 40.2, página 2174, $\mathrm{Ker}\,(\pi)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{A}$ e, portanto, $\mathrm{Ker}\,(\pi)$ é um bi-ideal fechado de $\mathcal{A}$.

Do Teorema 40.23, página 2246, concluímos que o *coset* $\mathcal{A}/\mathrm{Ker}\,(\pi)$ é uma álgebra C^*. Sejam $[a]$, com $a \in \mathcal{A}$, os elementos de $\mathcal{A}/\mathrm{Ker}\,(\pi)$ e defina-se $\tilde{\pi} : \mathcal{A}/\mathrm{Ker}\,(\pi) \to \mathcal{B}$ por

$$\tilde{\pi}\big([a]\big) \;:=\; \pi(a)\,.$$

É elementar constatar que $\tilde{\pi}$ está bem definida enquanto aplicação de $\mathcal{A}/\mathrm{Ker}\,(\pi)$, pois se a' a a são elementos da classe $[a]$, então $\pi(a) = \pi(a')$, já que a e a' diferem por um elemento do bi-ideal $\mathrm{Ker}\,(\pi)$. Um ponto importante é que $\tilde{\pi}$ é um $*$-morfismo entre as álgebras C^* $\mathcal{A}/\mathrm{Ker}\,(\pi)$ e $\mathcal{B}$. De fato, é fácil constatar que para todos α, $\beta \in \mathbb{C}$ e a, $b \in \mathcal{A}$, vale

$$\tilde{\pi}\big(\alpha[a] + \beta[b]\big) \;=\; \tilde{\pi}\big([\alpha a + \beta b]\big) \;=\; \pi\big(\alpha a + \beta b\big) \;=\; \alpha\pi(a) + \beta\pi(b) \;=\; \alpha\tilde{\pi}\big([a]\big) + \beta\tilde{\pi}\big([b]\big)\,,$$

assim como vale

$$\tilde{\pi}\big([a]\,[b]\big) \;=\; \tilde{\pi}\big([ab]\big) \;=\; \pi(ab) \;=\; \pi(a)\pi(b) \;=\; \tilde{\pi}\big([a]\big)\tilde{\pi}\big([b]\big)$$

e, por fim, que vale

$$\tilde{\pi}\big([a]^*\big) \;=\; \tilde{\pi}\big([a^*]\big) \;=\; \pi\big(a^*\big) \;=\; \pi(a)^* \;=\; \tilde{\pi}\big([a]\big)^*\,.$$

Note-se também que $\mathrm{Ker}\,\big(\tilde{\pi}\big) = \big\{[0]\big\}$, pois $\tilde{\pi}\big([a]\big) = 0$ se e somente se $\pi(a) = 0$, ou seja, se e somente se $a \in \mathrm{Ker}\,(\pi)$, isto é, se e somente se $[a] = [0]$.

É importante observar agora que $\tilde{\pi}$ é bijetor já que é sobrejetor (por construção) e injetor, pois $\mathrm{Ker}\,\big(\tilde{\pi}\big) = \big\{[0]\big\}$, também por construção. Assim, concluímos que $\tilde{\pi}$ é um $*$-isomorfismo entre as álgebras C^* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}/\mathrm{Ker}\,(\pi)$. Pela Proposição 40.58, página 2254, segue também que $\tilde{\pi}$ é uma isometria: $\big\|\tilde{\pi}\big([a]\big)\big\| = \big\|[a]\big\|$ para todo $[a] \in \mathcal{A}/\mathrm{Ker}\,(\pi)$.

Para futura referência, reunimos essas conclusões na seguinte proposição:

Proposição 40.59 *Se $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um $*$-morfismo entre duas álgebras C^* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, então $\tilde{\pi} : \mathcal{A}/\mathrm{Ker}\,(\pi) \to \mathcal{B}$ definido por $\tilde{\pi}\big([a]\big) = \pi(a)$ é um $*$-isomorfismo isométrico, com $\big\|\tilde{\pi}\big([a]\big)\big\| = \big\|[a]\big\|$ para todo $[a] \in \mathcal{A}/\mathrm{Ker}\,(\pi)$.* □

O seguinte corolário é igualmente relevante:

Corolário 40.20 *Se $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um $*$-morfismo entre duas álgebras C^* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, então $\mathrm{Ran}\,(\pi)$ é uma álgebra C^*.* □

Prova. Seja $\chi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathrm{Ker}\,(\pi)$ a chamada aplicação quociente, definida por $\chi(a) := [a]$. É evidente que χ é sobrejetora e contínua, com $\|\chi(a)\| = \big\|[a]\big\| = \inf\big\{\|a+b\|,\; b \in \mathrm{Ker}\,(\pi)\big\} \leq \|a\|$. É também claro que $\pi = \tilde{\pi} \circ \chi$. Como χ é sobrejetora, segue que $\mathrm{Ran}\,(\pi) = \mathrm{Ran}\,\big(\tilde{\pi}\big)$. O lado direito é a imagem de uma isometria (pela Proposição 40.59, página 2254). Portanto, pela Proposição 40.3, página 2174, $\mathrm{Ran}\,(\pi)$ é um espaço de Banach. Como para todo a, $b \in \mathcal{A}$ valem trivialmente as relações $\pi(a)\pi(b) = \pi(ab) \in \mathrm{Ran}\,(\pi)$, $\pi(a)^* = \pi(a^*) \in \mathrm{Ran}\,(\pi)$, $\|\pi(a)^*\| = \|\pi(a)\|$ e $\big\|\pi(a)^*\pi(a)\big\| = \big\|\pi(a)\big\|^2$ (pois $\mathrm{Ran}\,(\pi) \subset \mathcal{B}$), concluímos que $\mathrm{Ran}\,(\pi)$ é uma álgebra C^*. ■

• **$*$-morfismos fiéis de álgebras C^***

Um $*$-morfismo $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre duas álgebras C^* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é dito ser um *$*$-morfismo fiel* se $\mathrm{Ker}\,(\pi) = \{0\}$, ou seja, se π for injetor. A proposição que segue (adaptada de [77]) lista condições necessárias e suficientes para que um $*$-morfismo seja fiel.

Proposição 40.60 *Se $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um $*$-morfismo entre duas álgebras C^* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ (cujas normas, por simplicidade, denotamos pelo mesmo símbolo $\|\cdot\|$), então são equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) *π é fiel.*

(ii) *$\|\pi(a)\| = \|a\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$.*

(iii) *$\pi(a) > 0$ sempre que $a > 0$.* □

Prova. (Adaptada de [77]).

(i) implica (ii). Se π for fiel, será injetivo e existirá a inversa $\pi^{-1} : \mathrm{Ran}\,(\pi) \to \mathcal{A}$. Vimos no Corolário 40.20, página 2255, que $\mathrm{Ran}\,(\pi)$ é uma álgebra C^*. Logo, π será um $*$-isomorfismo entre as álgebras C^* $\mathcal{A}$ e $\mathrm{Ran}\,(\pi) \subset \mathcal{B}$ e pela Proposição 40.58, página 2254, valerá $\|\pi(a)\| = \|a\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

(ii) implica (iii). Como π é um $*$-morfismo, se $a > 0$ tem-se $\pi(a) \geq 0$ (Proposição 40.57, página 2253). Mas se $a > 0$, então $a \neq 0$ e, evidentemente, $\|a\| > 0$. Portanto, por (ii), $\|\pi(a)\| > 0$. Mas isso significa que $\pi(a) \neq 0$ e, portanto, $\pi(a) \geq 0$.

(iii) implica (i). Vamos supor que exista $a \neq 0$ tal que $\pi(a) = 0$. Então, $\pi(a^*a) = \pi(a^*)\pi(a) = 0$. Mas a^*a não é nulo pois, pela propriedade C^*, $\|a^*a\| = \|a\|^2 > 0$. Logo, $a^*a > 0$ e, portanto, por (iii) teríamos $\pi(a^*a) > 0$, uma contradição. Logo, $\mathrm{Ker}\,(\pi) = \{0\}$, mostrando que π é fiel. ■

40.5.2 Representações de Álgebras C^*

Uma *$*$-representação π de uma álgebra* C^* $\mathcal{A}$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é, por definição, um $*$-morfismo de $\mathcal{A}$ na álgebra C^* dos operadores limitados em $\mathcal{H}$: $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Com um certo abuso de linguagem, uma $*$-representação de uma álgebra C^* é, por vezes, denominada simplesmente uma *representação* da álgebra C^* em questão.

Para representações de álgebras C^* valem, portanto, as mesmas definições e resultados gerais listados na Seção 40.5.1, página 2253.

• **Representações cíclicas de álgebras C^***

Uma representação π de uma álgebra C^* $\mathcal{A}$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é dita ser uma *representação cíclica* se existir $\Omega \in \mathcal{H}$ tal que $\{\pi(a)\Omega,\; a \in \mathcal{A}\}$ for um conjunto denso em $\mathcal{H}$. Um tal vetor Ω é dito ser um *vetor cíclico* para a representação π. Logo adiante exibiremos como construir representações cíclicas de álgebras C^* a partir de estados (construção GNS).

• **Irredutibilidade**

A noção de comutante de um conjunto $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é intimamente ligada á noção de irredutibilidade, que agora introduziremos. Trata-se de uma noção de importância em Álgebra e na Teoria de Representações de Grupos.

Um subespaço $\mathcal{H}_0$ de $\mathcal{H}$ é dito ser um *subespaço invariante pela ação de* $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, se $a\phi \in \mathcal{H}_0$ para todo $a \in \mathcal{M}$ e todo $\phi \in \mathcal{H}_0$. Denotamos isso por $\mathcal{M}\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$. Se $\mathcal{H}_0$ é um subespaço invariante pela ação de $\mathcal{M}$ dizemos também que $\mathcal{H}_0$ é um *subespaço invariante de* $\mathcal{M}$.

Todo $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ possui ao menos dois subespaços invariantes (ditos triviais): $\{0\}$ e $\mathcal{H}$.

$\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é dito ser *conjunto algebricamente irredutível de operadores* se não possuir subespaços invariantes que não sejam os triviais.

$\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é dito ser *conjunto topologicamente irredutível de operadores* se não possuir subespaços fechados invariantes que não sejam os triviais.

A noção de irredutibilidade topológica é mais relevante que a de irredutibilidade algébrica e, por isso, adotaremos o costume de dizer que $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um *conjunto irredutível de operadores* se for um *conjunto topologicamente irredutível de operadores*.

$\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é dito ser (algebricamente, topologicamente, respect.) *redutível* se não for (algebricamente, topologicamente, respect.) irredutível.

Em nosso contexto o resultado de central interesse é o conteúdo da seguinte proposição (cujo enunciado e demonstração retiramos de [77], com correções):

Proposição 40.61 *Seja $\mathcal{M}$ uma $*$-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e (e vamos excluir os casos em que $\mathcal{M} = \{0\}$ e $\mathcal{H} = \mathbb{C}$). Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

(1) $\mathcal{M}' = \mathbb{C}\mathbb{1}$.

(2) $\mathcal{M}$ *é irredutível.*

(3) Todo $\psi \in \mathcal{H}$ *não-nulo é cíclico por* $\mathcal{M}$. □

Prova. (1) ⇒ (2). Se $\mathcal{M}$ não é irredutível então existe um subespaço fechado não-trivial $\mathcal{H}_0$ de $\mathcal{H}$ que é invariante pela ação de $\mathcal{M}$. Seja P_0 o projetor ortogonal sobre $\mathcal{H}_0$. Para todo $\psi \in \mathcal{H}$ valerá, portanto, $aP_0\psi = P_0aP_0\psi$. Assim, tem-se $aP_0 = P_0aP_0$ para todo $a \in \mathcal{M}$ e como $\mathcal{M}$ é autoadjunto (por ser uma $*$-álgebra), tem-se também $a^*P_0 = P_0a^*P_0$ para todo $a \in \mathcal{M}$. Tomando o adjunto dessa última igualdade, obtemos $P_0a = P_0aP_0$. Logo, concluímos que $aP_0 = P_0a\,(= P_0aP_0)$ para todo $a \in \mathcal{M}$. Portanto, $P_0 \in \mathcal{M}'$. Como P_0 é um projetor ortogonal sobre um subespaço não-trivial, ele não pode ser múltiplo da unidade, contrariando a hipótese que $\mathcal{M}' = \mathbb{C}\mathbb{1}$.

(2) ⇒ (3). Vamos supor que haja ϕ não-nulo em $\mathcal{M}$ que não seja cíclico por $\mathcal{M}$. Então, o subespaço $\mathcal{M}\phi := \{a\phi,\ a \in \mathcal{M}\}$ não é denso em $\mathcal{H}$ e, portanto, $(\mathcal{M}\phi)^\perp \neq \{0\}$. Temos também que $(\mathcal{M}\phi)^\perp \neq \mathcal{H}$, pois se $(\mathcal{M}\phi)^\perp = \mathcal{H}$, teríamos $\mathcal{M}\phi = \{0\}$, o que significa dizer que o subespaço unidimensional gerado por ϕ, ou seja, $\{\lambda\phi,\ \lambda \in \mathbb{C}\}$, é invariante por $\mathcal{M}$, contrariando a hipótese de irredutibilidade.

Agora, para todo $\chi \in (\mathcal{M}\phi)^\perp$ e para todo $a,\ b \in \mathcal{M}$, tem-se $\langle b\chi,\ a\phi\rangle = \langle \chi,\ b^*a\phi\rangle = 0$, pois, $a^*b\phi \in \mathcal{M}\phi$ (já que $\mathcal{M}$ é uma $*$-álgebra). Portanto, $(\mathcal{M}\phi)^\perp$ é invariante pela ação de $\mathcal{M}$, contrariando a hipótese que $\mathcal{M}$ não tem subespaços invariantes fechados não-triviais.

(3) ⇒ (1). Tomemos um elemento $T \in \mathcal{M}'$. Então, $T^* \in \mathcal{M}'$, assim como $S := T + T^*$ é também elemento de $\mathcal{M}'$. O elemento S é autoadjunto e seja P um de seus projetores espectrais (vide Teorema 40.45, página 2329). Sabemos da Proposição 40.92, página 2331, que P é um elemento da álgebra de von Neumann gerada por S e, portanto, $P \in \mathcal{M}'$ (lembrar que $\mathcal{M}'$ é uma álgebra de von Neumann, pois $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'''$).

Seja $\phi \in \mathrm{Ran}\,(P)$, $\phi \neq 0$. Então, existe $\psi \in \mathcal{H}$ não-nulo tal que $\phi = P\psi$. Se $A \in \mathcal{M}$ teremos $A\phi = AP\psi = PA\psi \in \mathrm{Ran}\,(P)$. Agora, pela hipótese, $\{A\phi,\ A \in \mathcal{M}\}$ é denso em $\mathcal{H}$. Logo, $\mathrm{Ran}\,(P) = \mathcal{H}$, ou seja, $P = \mathbb{1}$. Logo, $S = x\mathbb{1}$ para algum $x \in \mathbb{R}$ e concluímos que todo elemento autoadjunto de $\mathcal{M}'$ é um múltiplo real da identidade. Como todo $T \in \mathcal{M}'$ pode ser escrito como combinação linear de dois elementos autoadjuntos, a saber, na forma $T = (T+T^*)/2 + i(T-T^*)/(2i)$, concluímos que todo $T \in \mathcal{M}'$ é da forma $T = \lambda\mathbb{1}$, com $\lambda \in \mathbb{C}$, provando (1). ■

• **Representações redutíveis e irredutíveis de álgebras** C^*

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C^* e seja π uma representação de $\mathcal{A}$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Dizemos que π é *irredutível* (ou que age irredutivelmente em $\mathcal{H}$) se o conjunto $\pi(\mathcal{A}) := \big\{\pi(a),\ a \in \mathcal{A}\big\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ for um conjunto topologicamente irredutível de operadores em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, ou seja, se os únicos subespaços fechados invariantes por $\pi(\mathcal{A})$ em $\mathcal{H}$ forem $\{0\}$ e $\mathcal{H}$. Uma representação que não seja irredutível é dita ser *redutível*.

Como $\pi(\mathcal{A})$ é uma $*$-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, vale aqui, evidentemente, o conteúdo da Proposição 40.61, página 2256: π é irredutível se e somente se $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}\mathbb{1}$, o que se dá se e somente se todo $\psi \in \mathcal{H}$ não-nulo for cíclico por $\pi(\mathcal{A})$.

Mais adiante, estabeleceremos, para as chamadas representações GNS, uma importante conexão entre as noções de irredutibilidade e pureza de estados.

40.5.2.1 Estados em Álgebras C^* e a Representação GNS

• **Funcionais lineares em álgebras** C^*

Se $\mathcal{C}$ é uma álgebra C^*, uma aplicação $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ é dita ser um funcional linear se $\phi(\alpha a + \beta b) = \alpha\phi(a) + \beta\phi(b)$ para todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ e todos $a,\ b \in \mathcal{C}$. Como toda álgebra C^* é um espaço de Banach vale também a afirmação que um funcional linear ϕ é contínuo se e somente se for limitado, ou seja, se existir $M \geq 0$ tal que $\|\phi(a)\| \leq M\|a\|$ para todo $a \in \mathcal{C}$. Se um funcional linear ϕ é limitado sua norma é definida por $\|\phi\| = \sup_{a\in\mathcal{C},\ a\neq 0} \frac{|\phi(a)|}{\|a\|}$. Claramente vale também aqui a afirmação que o conjunto dos funcionais lineares limitados é um espaço de Banach em relação à essa norma.

Um funcional linear ϕ é dito ser positivo se $\phi(a^*a) \geq 0$ para todo $a \in \mathcal{C}$. Funcionais lineares positivos desempenham um importante papel na teoria das álgebras C^*.

Se ϕ é um funcional linear positivo de uma álgebra C^*, $\mathcal{C}$, podemos definir em $\mathcal{C}$ uma forma sesquilinear positiva (para a definição, vide página 267) dada por

$$\langle a,\ b\rangle \ = \ \phi(a^*b), \qquad a,\ b \in \mathcal{C}\ .$$

E. 40.36 *Exercício*. Verifique que isso é de fato uma forma sesquilinear positiva em $\mathcal{C}$. ✣

Pelo Teorema 3.1, página 268, valem para qualquer funcional linear positivo ϕ as seguintes propriedades:

$$\phi(a^*b) \ = \ \overline{\phi(b^*a)} \tag{40.93}$$

e

$$|\phi(a^*b)|^2 \ \leq \ \phi(a^*a)\phi(b^*b)\ , \tag{40.94}$$

denominada desigualdade de Cauchy-Schwarz. De (40.93) é possível provar que para qualquer funcional linear positivo ϕ vale

$$\phi(a^*) \ = \ \overline{\phi(a)}$$

para todo $a \in \mathcal{C}$. A prova é trivial no caso de a álgebra ter uma identidade (tome-se $b = \mathbb{1}$ em (40.93)). Para o caso geral a demonstração faz uso de aproximantes da identidade. Vide as referências [77], [117] ou [25].

• **Funcionais lineares positivos e continuidade**

Um importante resultado sobre funcionais lineares positivos é a seguinte equivalência:

Teorema 40.25 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C^* com unidade. Um funcional linear $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ é positivo se e somente se for contínuo (e, portanto, limitado) e satisfizer $\|\phi\| = \phi(\mathbb{1})$.* □

Esse teorema possui um análogo para o caso de álgebras C^* sem unidade. A demonstração para esse caso geral (com uso de aproximantes da identidade) pode ser encontrada, por exemplo, nas referências [77], [117] ou [25].

Prova do Teorema 40.25. *Parte I.* Se ϕ é um funcional linear positivo, então ϕ é limitado e $\|\phi\| = \phi(\mathbb{1})$.

Notemos primeiramente que se ϕ é um funcional linear positivo em uma álgebra com unidade então $\phi(\mathbb{1}) \geq 0$, pois $\phi(\mathbb{1}) = \phi(\mathbb{1}^*\mathbb{1}) \geq 0$, já que ϕ é positivo.

Seja $x \in \mathcal{C}$ com a propriedade que $\|x\| \leq 1$. Então, o Corolário 40.12, página 2234, diz-nos que existe um elemento $y \in \mathcal{C}$ tal que $\mathbb{1} - x^*x = y^*y$. Se ϕ é um funcional linear positivo, tem-se então que $\phi(\mathbb{1} - x^*x) = \phi(y^*y) \geq 0$, ou seja,

$$0 \ \leq \ \phi(x^*x) \ \leq \ \phi(\mathbb{1})\ . \tag{40.95}$$

Por outro lado, vale que

$$|\phi(x)|^2 \;=\; |\phi(\mathbb{1}^*x)|^2 \;\leq\; \phi(\mathbb{1}^*\mathbb{1})\phi(x^*x) \;=\; \phi(\mathbb{1})\phi(x^*x) \;\leq\; \phi(\mathbb{1})^2\,,$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz (40.94) na primeira desigualdade e (40.95) na última desigualdade. Se a é um elemento não-nulo arbitrário de $\mathcal{C}$ então $x = \dfrac{a}{\|a\|}$ é tal que $\|x\| = 1$ e, por isso, vale pela relação que acabamos de provar:

$$\left|\phi\left(\frac{a}{\|a\|}\right)\right|^2 \;\leq\; \phi(\mathbb{1})^2\,,$$

o que implica $|\phi(a)| \leq \phi(\mathbb{1})\|a\|$, para todo $a \neq 0$. Como essa relação vale trivialmente para $a = 0$, vale para todo $a \in \mathcal{C}$, provando que ϕ é limitado.

Mostremos agora que $\|\phi\| = \phi(\mathbb{1})$ para qualquer funcional linear positivo ϕ. Notemos primeiramente que $\phi(\mathbb{1}) \leq \|\phi\|\,\|\mathbb{1}\|$, ou seja,

$$\phi(\mathbb{1}) \leq \|\phi\|\,. \tag{40.96}$$

Agora, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (40.94) temos

$$|\phi(a)|^2 \;=\; |\phi(\mathbb{1}^*a)|^2 \;\leq\; \phi(\mathbb{1})\,\phi(a^*a) \;\leq\; \phi(\mathbb{1})\|\phi\|\,\|a^*a\| \;=\; \phi(\mathbb{1})\,\|\phi\|\,\|a\|^2\,,$$

o que implica

$$\|\phi\|^2 \;=\; \sup_{a\neq 0}\frac{|\phi(a)|^2}{\|a\|^2} \;\leq\; \phi(\mathbb{1})\|\phi\|\,,$$

que diz-nos que $\|\phi\| \leq \phi(\mathbb{1})$. Junto com (40.96), isso implica $\|\phi\| = \phi(\mathbb{1})$, como queríamos.

Parte II. Se ϕ é limitado e $\|\phi\| = \phi(\mathbb{1})$, então ϕ é positivo.

Vamos supor que $\|\phi\| > 0$, pois se $\|\phi\| = 0$ não há o que se demonstrar. Como ϕ é limitado tem-se, naturalmente, $|\phi(c)| \leq \|\phi\|\,\|c\|$ para todo $c \in \mathcal{A}$.

Seja $a \in \mathcal{A}$, autoadjunto, ou seja, tal que $a = a^*$. Afirmamos que $\phi(a) \in \mathbb{R}$. Se $a = 0$ isso é evidente e, portanto, consideramos $a \neq 0$. Escrevamos $\phi(a) = x + iy$, com $x,\ y \in \mathbb{R}$. Desejamos provar que $y = 0$. Para $t \in \mathbb{R}$ temos $\phi\big(a + it\mathbb{1}\big) = x + i\big(y + t\phi(\mathbb{1})\big) = x + i\big(y + t\|\phi\|\big)$. Pelo Teorema da Aplicação Espectral, Teorema 40.15, página 2226, temos $\sigma\big(a+it\mathbb{1}\big) = \{\lambda + it,\ \lambda \in \sigma(a)\} \subset \big\{u + it,\ u \in \big[-\|a\|,\ \|a\|\big]\big\}$, pois a é autoadjunto. Agora, $a + it\mathbb{1}$ é um operador normal (comuta com seu adjunto). Logo, pelo Teorema 40.17, página 2228, vale

$$\|a + it\mathbb{1}\| \;=\; r(a + it\mathbb{1}) \;=\; \sup\big\{|\lambda + it|,\ \lambda \in \sigma(a)\big\} \;\leq\; \sup\Big\{|u + it|,\ u \in \big[-\|a\|,\ \|a\|\big]\Big\} \;=\; \sqrt{\|a\|^2 + t^2}\,.$$

Agora, $\big|\phi\big(a + it\mathbb{1}\big)\big|^2 = \big|x + i\big(y + t\|\phi\|\big)\big|^2 = x^2 + \big(y + t\|\phi\|\big)^2$ implica que $\big|y + t\|\phi\|\big| \leq \big|\phi\big(a + it\mathbb{1}\big)\big|$. Assim,

$$\big(y + t\|\phi\|\big)^2 \;\leq\; \big|\phi\big(a + it\mathbb{1}\big)\big|^2 \;\leq\; \|\phi\|^2\,\|a + it\mathbb{1}\|^2 \;\leq\; \|\phi\|^2\,\big(\|a\|^2 + t^2\big)\,.$$

Expandindo $\big(y + t\|\phi\|\big)^2$, isso diz-nos que

$$y^2 + 2t\|\phi\|y \;\leq\; \|\phi\|^2\|a\|^2\,.$$

Como essa desigualdade deve ser válida para todo $t \in \mathbb{R}$, devemos forçosamente ter $y = 0$, como desejávamos mostrar, pois doutra forma, a mesma seria violada para t grande o suficiente (a saber, para $t > \big(|\phi\|^2\|a\|^2 - y^2\big)/\big(2\|\phi\|y\big)$).

Concluímos, assim, que $\phi(a) \in \mathbb{R}$ se a for autoadjunto e com esse fato vamos completar a demonstração de positividade de ϕ.

Se $a \neq 0$ for um operador positivo, teremos, novamente pelo Teorema da Aplicação Espectral, $\sigma\Big(\mathbb{1} - \frac{1}{\|a\|}a\Big) = \Big\{1 - \frac{1}{\|a\|}\lambda,\ \lambda \in \sigma(a)\Big\} \subset \Big\{1 - \frac{1}{\|a\|}u,\ u \in \big[0,\ \|a\|\big]\Big\}$. Novamente pelo Teorema 40.17, página 2228, teremos

$$\left\|\mathbb{1} - \frac{1}{\|a\|}a\right\| \;=\; r\left(\mathbb{1} - \frac{1}{\|a\|}a\right) \;\leq\; \sup\left\{\left|1 - \frac{1}{\|a\|}u\right|,\ u \in \big[0,\ \|a\|\big]\right\} \;=\; 1\,.$$

Seja $b \in \mathcal{A}$ com $b \neq 0$. O operador b^*b é positivo e, pelo dito acima,

$$\left\|\mathbb{1} - \frac{1}{\|b^*b\|}b^*b\right\| \;\leq\; 1\,.$$

Logo,

$$\left|\phi(\mathbb{1}) - \frac{\phi\big(b^*b\big)}{\|b^*b\|}\right| \;=\; \left|\phi\left(\mathbb{1} - \frac{1}{\|b^*b\|}b^*b\right)\right| \;\leq\; \|\phi\|\,\left\|\mathbb{1} - \frac{1}{\|b^*b\|}b^*b\right\| \;\leq\; \|\phi\|\,.$$

Portanto, como $\|\phi\| = \phi(\mathbb{1})$, e $\phi\big(b^*b\big)$ é real, essa desigualdade afirma que

$$-\phi(\mathbb{1}) \;\leq\; \phi(\mathbb{1}) - \frac{\phi\big(b^*b\big)}{\|b^*b\|} \;\leq\; \phi(\mathbb{1})\,,$$

o que garante que $\phi\big(b^*b\big) \geq 0$. Como isso (evidentemente) também vale se $b = 0$, fica estabelecida a positividade de ϕ. ■

• **Estados em álgebras C***

Um funcional linear positivo ω de uma álgebra C* é dito ser um *estado* se for normalizado de forma que $\|\omega\| = 1$. Se a álgebra tiver uma unidade isso equivale a dizer que $\omega(\mathbb{1}) = 1$ (pelo Teorema 40.25, página 2257).

Uma pequena mas importante observação é que a coleção de todos os estados em uma álgebra C* $\mathcal{A}$ é um conjunto convexo. De fato, é elementar constatar que se ω_1 e ω_2 são estados em $\mathcal{A}$, então para todo $\lambda \in [0,\ 1]$ tem-se que $\lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2$ é igualmente um estado em $\mathcal{A}$.

E. 40.37 *Exercício*. Verifique a validade dessa afirmação. ✣

Estados desempenham um papel da maior importância na teoria das álgebras C* e suas aplicações em Física pois, como teremos a oportunidade de discutir, estados de álgebras C* estão intimamente ligados a estados físicos de sistemas quânticos (daí a escolha do nome "estado").

Por ora, e já no intuito de preparar essa discussão, mostremos uma construção importante que pode ser feita com estados de uma álgebra C*, a chamada construção GNS, que consiste em um procedimento canônico de obtenção de representações de álgebras C* em espaços de Hilbert, algo de suma relevância para as aplicações de álgebras C* na Física Quântica.

• **Existência de estados**

A definição de estado, acima, deixa ainda aberta a questão da existência de estados não-triviais (i.e., não-nulos) em álgebras C*. No caso de álgebras C* unitais isso é garantido pela seguinte proposição, a qual possui interesse por si só:

Proposição 40.62 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra* C* *com unidade. Então, para cada $a \in \mathcal{A}$ existe um estado ω_a sobre $\mathcal{A}$ com a propriedade que $\omega_a(a^*a) = \|a\|^2$.* □

Essa proposição é também válida para álgebras C* sem unidade. Para a demonstração nesse caso, vide e.g., [77].

Prova da Proposição 40.62. Seja $a \in \mathcal{A}$ e seja $V_1 := \{\alpha\mathbb{1} + \beta a^*a,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}\}$. É evidente que V_1 é um subespaço linear de $\mathcal{A}$. Defina-se $\phi_a : V_1 \to \mathbb{C}$ por

$$\phi_a\big(\alpha\mathbb{1} + \beta a^*a\big) \;:=\; \alpha + \beta\|a^*a\| \;=\; \alpha + \beta\|a\|^2\,.$$

É evidente que ϕ_a é um funcional linear em V_1. Provemos que ϕ_a é limitado.

Os elementos de $\mathcal{A}$ que são da forma $\alpha\mathbb{1} + \beta a^*a$ são todos normais (comutam com seus adjuntos). Logo, o Teorema 40.17, página 2228, garante que

$$\big\|\alpha\mathbb{1} + \beta a^*a\big\| \;=\; r\big(\alpha\mathbb{1} + \beta a^*a\big) \;=\; \sup\big\{|\alpha\mathbb{1} + \beta\lambda|,\ \lambda \in \sigma(a^*a)\big\} \;\geq\; \big|\alpha\mathbb{1} + \beta\|a\|^2\big|\,. \tag{40.97}$$

A última desigualdade decorre do Corolário 40.18, página 2239. Assim, temos que

$$\Big|\phi_a\big(\alpha\mathbb{1} + \beta a^*a\big)\Big| \;\leq\; \big|\alpha + \beta\|a^*a\|\big| \overset{(40.97)}{\leq} \big\|\alpha\mathbb{1} + \beta a^*a\big\|\,,$$

o que estabelece que $\|\phi_a\| \leq 1$. Sucede, porém, que $\phi_a(\mathbb{1}) = 1$, pela definição. Logo, $\|\phi_a\| = 1 = \phi_a(\mathbb{1})$.

Pelo Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais normados, Teorema 40.5, página 2186, existe um funcional linear $\omega_a : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ que estende ϕ_a, é limitado e satisfaz $\|\omega_a\| = \|\phi_a\| = 1$. Como ω_a estende ϕ_a, vale $\omega_a(\mathbb{1}) = \phi_a(\mathbb{1}) = 1$.

Logo, ω_a é contínuo e satisfaz $\|\omega_a\| = \omega_a(\mathbb{1})$. Pelo Teorema 40.25, página 2257, ω_a é também positivo e, portanto, é um estado em $\mathcal{A}$. Por fim, como ω_a estende ϕ_a, vale também $\omega_a(a^*a) = \phi_a(a^*a) = \|a\|^2$, como queríamos estabelecer. ■

• **Vetores cíclicos**

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{S}$ um conjunto de operadores limitados agindo em $\mathcal{H}$. Um vetor $\Omega \in \mathcal{H}$ é dito ser um *vetor cíclico para o conjunto* $\mathcal{S}$ se o conjunto de vetores $\{A\Omega,\ A \in \mathcal{S}\}$ for um conjunto denso em $\mathcal{H}$.

• **A representação GNS**

Vamos agora apresentar um dos resultados fundamentais da teria das álgebras C*, o qual estabelece um método de construção de representações de uma álgebra C* a partir de um estado na mesma álgebra. Essa construção canônica é denominada *construção GNS*, em honra a Gelfand[34], Naimark[35] e Segal[36], que a desenvolveram nos anos 1940. A representação obtida é denominada *representação GNS*.

Teorema 40.26 (Representação GNS) *Seja ω um estado de uma álgebra* C* *que denotaremos por $\mathcal{C}$. É possível com esses ingredientes construir um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\omega$ e uma representação π_ω da álgebra $\mathcal{C}$ por operadores limitados agindo em $\mathcal{H}_\omega$ tal que $\pi_\omega(a^*) = \pi_\omega(a)^*$ para todo $a \in \mathcal{C}$ (uma representação com essa propriedade é dita ser uma* representação-$*$*). Fora isso, se a álgebra $\mathcal{C}$ possuir uma unidade então existe em $\mathcal{H}_\omega$ um vetor Ω com a propriedade que $\omega(a) = \langle \Omega,\ \pi_\omega(a)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_\omega}$. Esse vetor Ω é um vetor cíclico para a representação π_ω, ou seja, $\{\pi_\omega(a)\Omega,\ a \in \mathcal{C}\}$ é um conjunto denso em $\mathcal{H}_\omega$.* □

A tripla $(\mathcal{H}_\omega,\ \pi_\omega,\ \Omega_\omega)$, composta pelo espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\omega$, pela representação π_ω e pelo vetor $\Omega_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ é frequentemente denominada *tripla GNS* associada ao par $(\mathcal{A},\ \omega)$, composto pela álgebra C* $\mathcal{A}$ e o estado ω sobre $\mathcal{A}$.

Prova do Teorema 40.26. A ideia da demonstração é usar o fato que $\mathcal{C}$ é um espaço vetorial e tentar transformar $\mathcal{C}$ em um espaço de Hilbert, definindo primeiramente em $\mathcal{C}$ um produto escalar.

Podemos, usando o estado ω, definir em $\mathcal{C}$ uma forma sesquilinear positiva por $\langle a,\ b\rangle := \omega(a^*b)$ com $a,\ b \in \mathcal{C}$. Sucede, porém, que pode haver elementos não-nulos n da álgebra para os quais $\omega(n^*n) = 0$. Para esses elementos teríamos $\langle n,\ n\rangle = 0$ com $n \neq 0$. Isso diz-nos que a forma sesquilinear positiva acima não é, em geral, um produto escalar e, portanto, essa tentativa ingênua de fazer de $\mathcal{C}$ um espaço de Hilbert em geral falha. Há, no entanto, um procedimento que permite contornar esse problema, o qual passaremos a descrever. Esse procedimento já foi, aliás, discutido no tópico sobre "Formas Sesquilineares Positivas e Produtos Escalares", página 271.

Vamos olhar mais de perto o conjunto dos elementos n da álgebra com a propriedade acima. Denominemos

$$\mathcal{N} \ = \ \big\{n \in \mathcal{C} |\ \ \omega(n^*n) \ = \ 0\big\} \ . \tag{40.98}$$

Vamos mostrar os seguintes três fatos sobre $\mathcal{N}$:

1. Tem-se que
$$\mathcal{N} \ = \ \Big\{n \in \mathcal{C} |\ \ \omega(b^*n) = 0 \text{ para todo } b \in \mathcal{C}\Big\} \ .$$
2. $\mathcal{N}$ é um subespaço linear fechado de $\mathcal{C}$.
3. $\mathcal{N}$ é um ideal à esquerda de $\mathcal{C}$, ou seja, para cada $n \in \mathcal{N}$ vale que $an \in \mathcal{N}$ para todo $a \in \mathcal{C}$.

Prova de 1. Seja $\mathcal{N}_1 \ = \ \Big\{n \in \mathcal{C} |\ \ \omega(b^*n) = 0 \text{ para todo } b \in \mathcal{C}\Big\}$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se que

$$\big|\omega(b^*n)\big|^2 \ \leq \ \omega(b^*b)\omega(n^*n) \ .$$

Assim, se $n \in \mathcal{N}$ vale que $\omega(b^*n) = 0$ para todo $b \in \mathcal{C}$. Logo $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_1$. Agora, se $n' \in \mathcal{N}_1$ então $\omega(b^*n') = 0$ para todo b, em particular para $b = n'$, ou seja, $\omega\big((n')^*n'\big) = 0$, ou seja, $n' \in \mathcal{N}$, provando que $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$. Logo, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1$.

[34] Israil Moiseevic Gelfand (1913–2009).
[35] Mark Aronovich Naimark (1909–1978). Seu sobrenome é por vezes grafado como *Neumark*.
[36] Irving Ezra Segal (1918–1998).

Prova de 2. Sejam $m,\ n \in \mathcal{N}$ e $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$. Então, para qualquer $b \in \mathcal{C}$ valem $\omega(b^*m) = \omega(b^*n) = 0$. Logo,

$$\omega(b^*(\alpha m + \beta n)) \ = \ \alpha\omega(b^*m) + \beta\omega(b^*n) \ = \ 0 \ ,$$

mostrando que $\alpha m + \beta n \in \mathcal{N}$. Seja $n_i,\ i \in \mathbb{N}$, uma sequência em $\mathcal{N}$ que converge a um elemento $n \in \mathcal{C}$. Pela continuidade de ω (lembre-se que ω é um funcional linear positivo e, portanto, contínuo), vale para todo $b \in \mathcal{C}$

$$\omega(b^*n) \ = \ \lim_{i\to\infty} \omega(b^*n_i) \ = \ \lim_{i\to\infty} 0 \ = \ 0 \ ,$$

provando que $\mathcal{N}$ é fechado.

Prova de 3. Sejam $n \in \mathcal{N},\ a,\ b \in \mathcal{C}$. Temos que $\omega(b^*(an)) = \omega((a^*b)^*n) = 0$ (por quê?). Assim, para todo $b \in \mathcal{C}$ vimos que $\omega(b^*(an)) = 0$, o que prova que $an \in \mathcal{N}$ para todo $a \in \mathcal{C}$ e todo $n \in \mathcal{N}$, ou seja, $\mathcal{N}$ é um ideal à esquerda de $\mathcal{C}$.

Uma vez provadas essas três propriedades de $\mathcal{N}$, vamos retomar a construção do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\omega$. Como $\mathcal{N}$ é um subespaço de $\mathcal{C}$, podemos construir o subespaço quociente $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ pela construção delineada na seção 2.3.3, página 205. O espaço $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ é formado pelas classes de equivalência $[a] = \{a+n,\ n \in \mathcal{N}\}$, $a \in \mathcal{C}$ e tem por vetor nulo $[0] = \{n,\ n \in \mathcal{N}\} = \mathcal{N}$.

Seguindo a ideia anterior, definimos em $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ a forma sesquilinear positiva dada por

$$\langle [a],\ [b]\rangle \ = \ \omega(a^*b) \ .$$

Notemos que essa expressão é bem-definida, no sentido que o lado direito não depende do representante tomado nas classes. Assim, se substituíssemos a por $a + n$ com $n \in \mathcal{N}$, o lado direito ficaria

$$\omega\big((a+n)^*b\big) \ = \ \omega(a^*b) + \omega(n^*b) \ = \ \omega(a^*b) \ ,$$

pois $\omega(n^*b) = \overline{\omega(b^*n)} = 0$. Analogamente $\omega(a^*(b+n)) = \omega(a^*b)$. Notemos também que $\langle [a],\ [b]\rangle$ é agora um produto escalar, pois $\langle [a],\ [a]\rangle = \omega(a^*a)$ que é zero se e somente se $a \in \mathcal{N}$, em cujo caso teríamos $[a] = [0]$ (por quê?).

O espaço $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ é assim um espaço vetorial dotado de um produto escalar. Normalmente $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ não é completo em relação à norma induzida por esse produto escalar, mas podemos considerar seu completamento canônico $\widetilde{\mathcal{C}/\mathcal{N}}$ (vide página 1320) que é completo e, portanto, é um espaço de Hilbert. Esse é o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\omega$ do enunciado do teorema: $\mathcal{H}_\omega = \widetilde{\mathcal{C}/\mathcal{N}}$.

Passemos agora à construção da representação π_ω da álgebra $\mathcal{C}$. Pela construção do completamento canônico podemos considerar $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ como um subconjunto denso de $\mathcal{H}_\omega = \widetilde{\mathcal{C}/\mathcal{N}}$. Para $a \in \mathcal{C}$, definamos $\pi_\omega(a)$ em $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ da seguinte forma:

$$\pi_\omega(a)[z] \ = \ [az] \ , \tag{40.99}$$

$z \in \mathcal{C}$.

Há uma série de coisas a se provar sobre essa definição. Primeiro notemos que a expressão (40.99) é bem definida no sentido que independe do elemento z tomado na classe. Isso se deve ao fato de $\mathcal{N}$ ser um ideal à esquerda da álgebra $\mathcal{C}$. Assim, se trocássemos z por $z + n$ com $n \in \mathcal{N}$ teríamos $a(z+n) = az + an$ e como $an \in \mathcal{N}$, segue que $[a(z+n)] = [az]$.

É também evidente pela definição (40.99) que em $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ tem-se para todo $[z] \in \mathcal{C}/\mathcal{N}$ que

$$\pi_\omega(\alpha a + \beta b)[z] \ = \ \alpha\pi_\omega(a)[z] + \beta\pi_\omega(b)[z] \tag{40.100}$$

e

$$\pi_\omega(a)\pi_\omega(b)[z] \ = \ \pi_\omega(ab)[z] \ , \tag{40.101}$$

para todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ e todos $a,\ b \in \mathcal{C}$. Notemos que (40.100) e (40.101) dizem que π_ω é uma representação de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}/\mathcal{N}$. Mais abaixo vamos mostrar que essas relações são válidas não apenas no conjunto denso $\mathcal{C}/\mathcal{N}$, mas em todo $\mathcal{H}_\omega$.

Vamos agora mostrar que para cada $a \in \mathcal{C}$, $\pi_\omega(a)$ é um operador limitado agindo em $\mathcal{C}/\mathcal{N}$. Para $[z] \in \mathcal{C}/\mathcal{N}$, $[z] \neq [0]$, vale

$$\big\|\pi_\omega(a)[z]\big\|^2 \ = \ \big\|[az]\big\|^2 \ = \ \langle [az],\ [az]\rangle \ = \ \omega\big((az)^*(az)\big) \ = \ \omega\big(z^*(a^*a)z\big)$$

$$= \ \frac{\omega\big(z^*(a^*a)z\big)}{\omega(z^*z)}\omega(z^*z) \ = \ \frac{\omega\big(z^*(a^*a)z\big)}{\omega(z^*z)}\,\|[z]\|^2 \ . \tag{40.102}$$

Tem-se, porém, que

$$\phi(a) \;:=\; \frac{\omega(z^*az)}{\omega(z^*z)} \tag{40.103}$$

é um estado em $\mathcal{C}$. De fato, ϕ é positivo, pois

$$\phi(c^*c) \;=\; \frac{\omega\big(z^*(c^*c)z\big)}{\omega(z^*z)} \;=\; \frac{\omega\big((cz)^*(cz)\big)}{\omega(z^*z)} \;\geq\; 0$$

pois ω é positivo. Fora isso $\phi(\mathbb{1}) = 1$, como facilmente se vê. Assim, tem-se $\|\phi\| = 1$ e, portanto, $|\phi(c)| \leq \|\phi\|\,\|c\| \leq \|c\|$ para todo $c \in \mathcal{C}$. Retornando à (40.102), tem-se

$$\big\|\pi_\omega(a)[z]\big\|^2 \;=\; \phi(a^*a)\,\big\|[z]\big\|^2 \;\leq\; \|\phi\|\,\big\|a^*a\big\|\,\big\|[z]\big\|^2 \;=\; \|a^*a\|\,\big\|[z]\big\|^2 \;=\; \|a\|^2\,\big\|[z]\big\|^2\,,$$

donde concluímos que em $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ vale

$$\|\pi_\omega(a)\| \;\leq\; \|a\|\,.$$

Isso provou que $\pi_\omega(a)$ é um operador limitado agindo no subespaço denso $\mathcal{C}/\mathcal{N}$. Podemos então evocar o Teorema BLT (página 2175) e dizer que $\pi_\omega(a)$ tem uma extensão única para todo $\mathcal{H}_\omega$, que também denotaremos por $\pi_\omega(a)$, com a mesma norma operatorial. Portanto, vale também para essa extensão que $\|\pi_\omega(a)\| \leq \|a\|$.

Pela continuidade de $\pi_\omega(a)$ é fácil ver que as relações (40.100) e (40.101) valem para todo $\mathcal{H}_\omega$, ou seja,

$$\pi_\omega(\alpha a + \beta b) \;=\; \alpha\pi_\omega(a) + \beta\pi_\omega(b) \tag{40.104}$$

e

$$\pi_\omega(a)\pi_\omega(b) \;=\; \pi_\omega(ab)\,, \tag{40.105}$$

provando que π_ω é uma representação da álgebra por operadores limitados em $\mathcal{H}_\omega$.

Falta-nos mostrar ainda que $\pi_\omega(a^*) = \pi_\omega(a)^*$ para todo $a \in \mathcal{C}$. Notemos que para $[x],\ [y] \in \mathcal{C}/\mathcal{N}$ vale

$$\big\langle [x],\, \pi_\omega(a^*)[y]\big\rangle \;=\; \big\langle [x],\, [a^*y]\big\rangle \;=\; \omega(x^*a^*y) \;=\; \omega\big((ax)^*y\big)$$

$$= \;\big\langle [ax],\, [y]\big\rangle \;=\; \big\langle \pi_\omega(a)[x],\, [y]\big\rangle \;=\; \big\langle [x],\, \pi_\omega(a)^*[y]\big\rangle\,, \tag{40.106}$$

provando que em $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ vale $\pi_\omega(a^*) = \pi_\omega(a)^*$. Por continuidade essa relação pode ser estendida para todo $\mathcal{H}_\omega$, mostrando que π_ω é uma representação-$*$ de $\mathcal{C}$.

Se $\mathcal{C}$ tem uma unidade, seja $\Omega_\omega := [\mathbb{1}]$ e calculemos $\big\langle \Omega_\omega,\, \pi_\omega(a)\Omega_\omega\big\rangle$:

$$\big\langle \Omega_\omega,\, \pi_\omega(a)\Omega_\omega\big\rangle \;=\; \big\langle [\mathbb{1}],\, \pi_\omega(a)[\mathbb{1}]\big\rangle \;=\; \big\langle [\mathbb{1}],\, [a\mathbb{1}]\big\rangle \;=\; \big\langle [\mathbb{1}],\, [a]\big\rangle \;=\; \omega(\mathbb{1}^*a) \;=\; \omega(a)\,.$$

Assim, vemos que o vetor Ω_ω, em um certo sentido "representa" o estado ω em $\mathcal{H}_\omega$, pois $\omega(a) = \langle\Omega_\omega,\ \pi_\omega(a)\Omega_\omega\rangle$ para todo $a \in \mathcal{C}$.

Que Ω_ω á um vetor cíclico para a representação π_ω é elementar pois, $\{\pi_\omega(a)\Omega_\omega,\ a \in \mathcal{C}\} \;=\; \{[a],\ a \in \mathcal{C}\} \;=\; \mathcal{C}/\mathcal{N}$ e $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ é obviamente denso em $\mathcal{H}_\omega = \widetilde{\mathcal{C}/\mathcal{N}}$. Isso completa a demonstração do teorema. ∎

Na Seção 40.5.3, página 2265, mostramos, entre outras coisas, como se realiza a construção GNS em um caso concreto simples: o caso de álgebras de matrizes agindo em um espaço vetorial de dimensão finita.

Proposição 40.63 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C^* com unidade. Então, para cada $a \in \mathcal{A}$ existe uma representação π^a de $\mathcal{A}$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}^a$ tal que $\|\pi^a(a)\| = \|a\|$.* □

Prova. Para $a \in \mathcal{A}$ seja ω_a o estado em $\mathcal{A}$ cuja existência foi estabelecida na Proposição 40.62, página 2259, e que possui a propriedade $\omega_a\big(a^*a\big) = \|a^*a\|$. Seja $(\mathcal{H}^a,\ \pi^a,\ \Omega^a) \equiv (\mathcal{H}_{\omega_a},\ \pi_{\omega_a},\ \Omega_{\omega_a})$ a correspondente tripla GNS. Teremos

$$\|a\|^2 \;=\; \|a^*a\| \;=\; \omega_a\big(a^*a\big) \;=\; \big\langle \Omega_{\omega_a},\, \pi_{\omega_a}\big(a^*a\big)\Omega_{\omega_a}\big\rangle_{\mathcal{H}_{\omega_a}} \;=\; \Big\|\pi_{\omega_a}\big(a\big)\Omega_{\omega_a}\Big\|^2_{\mathcal{H}_{\omega_a}} \;\leq\; \big\|\pi_{\omega_a}\big(a\big)\big\|^2 \;\leq\; \|a\|^2\,,$$

sendo que, na última desigualdade, usamos simplesmente a Proposição 40.57, página 2253. As linhas acima implicam $\big\|\pi_{\omega_a}\big(a\big)\big\|^2 = \|a\|^2$, como desejado. ∎

40.5.2.2 Estados Puros, de Mistura e a Irredutibilidade de Representações GNS

• **Estados puros e de mistura**

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C^* e denotemos por $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ o conjunto de todos os estados sobre $\mathcal{A}$.

Já observamos anteriormente que $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ é um conjunto convexo: se ω_1 e ω_2 são estados sobre $\mathcal{A}$ então $\lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2$ também o é para todo $\lambda \in [0,\ 1]$.

Definição. Um estado $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})$ é dito ser um *estado de mistura* se existirem $\lambda \in (0,\ 1)$ e $\omega_1,\ \omega_2 \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})$ com $\omega_1 \neq \omega$ e $\omega_2 \neq \omega$ tais que $\omega = \lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2$. ♠

Definição. Um estado $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})$ é dito ser um *estado puro* se não for um estado de mistura. ♠

O conjunto de estados puros sobre $\mathcal{A}$ é denotado aqui por $\mathfrak{P}(\mathcal{A})$. Estados puros possuem um significado especial por serem, em um certo sentido, os "tijolos" sobre os quais todos os demais estados podem ser construídos. Os mesmos representam, em um certo sentido, estados com conteúdo de "informação" maximal e trataremos de explicar o significado dessa afirmação e justificá-la nos exemplos explícitos discutidos na Seção 40.5.3, página 2265.

Por ora, limitamo-nos a apresentar a importante relação entre a pureza de um estado e a irredutibilidade da correspondente representação GNS. Esse é o conteúdo do teorema que segue. Após sua demonstração discutiremos brevemente sua relevância.

Teorema 40.27 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C^* com unidade, seja ω um estado em $\mathcal{A}$ e $(\mathcal{H}_\omega,\ \pi_\omega,\ \Omega_\omega)$ a correspondente tripla GNS. Então, π_ω é uma representação irredutível de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{H}_\omega$ se e somente se ω for puro.* □

Prova. Seguimos proximamente [25].

Parte I. Provemos que se ω é puro, então π_ω é irredutível.

Para provar que π_ω é irredutível é suficiente (pela Proposição 40.61, página 2256) estabelecer que $\pi_\omega(\mathcal{A})' = \mathbb{C}\mathbb{1}$.

Repetindo um argumento já usado, se $T \in \pi_\omega(\mathcal{A})'$, então $T^* \in \pi_\omega(\mathcal{A})'$ assim como $T + T^* \in \pi_\omega(\mathcal{A})'$. Como $\pi_\omega(\mathcal{A})'$ é uma álgebra de von Neumann, os projetores espectrais do operador autoadjunto $T + T^*$ são também elementos de $\pi_\omega(\mathcal{A})'$. Se tivéssemos $\pi_\omega(\mathcal{A})' \neq \mathbb{C}\mathbb{1}$ haveria, portanto, projetores ortogonais em $\pi_\omega(\mathcal{A})'$ outros que não 0 ou $\mathbb{1}$.

Vamos supor, por absurdo, que $\pi_\omega(\mathcal{A})' \neq \mathbb{C}\mathbb{1}$ e, portanto, que exista um projetor ortogonal $E \in \pi_\omega(\mathcal{A})'$ distinto de 0 e de $\mathbb{1}$.

Afirmamos que $E\Omega_\omega \neq 0$. Se tivéssemos $E\Omega_\omega = 0$, valeria $0 = \pi_\omega(a)E\Omega_\omega = E\pi_\omega(a)\Omega_\omega$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Como $\{\pi_\omega(a)\Omega_\omega,\ a \in \mathcal{A}\}$ é denso em $\mathcal{H}_\omega$ teríamos $E = 0$, uma contradição.

Afirmamos também que $(\mathbb{1} - E)\Omega_\omega \neq 0$. Se tivéssemos $(\mathbb{1} - E)\Omega_\omega = 0$, valeria $0 = \pi_\omega(a)((\mathbb{1} - E))\Omega_\omega = ((\mathbb{1} - E))\pi_\omega(a)\Omega_\omega$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Como $\{\pi_\omega(a)\Omega_\omega,\ a \in \mathcal{A}\}$ é denso em $\mathcal{H}_\omega$ teríamos $(\mathbb{1} - E) = 0$, uma contradição.

Assim, valem $E\Omega_\omega \neq 0$ e $(\mathbb{1} - E)\Omega_\omega \neq 0$. Seja

$$t \;:=\; \|E\Omega_\omega\|^2_{\mathcal{H}_\omega} \;=\; \big\langle \Omega_\omega,\ E\Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega}\,.$$

Afirmamos que $t \in (0,\ 1)$. É evidente que $t \geq 0$ e que $\|E\Omega_\omega\|^2_{\mathcal{H}_\omega} \leq 1$. O caso $t = 0$ está excluído pois $E\Omega_\omega \neq 0$. O caso $t = 1$ está também excluído, pois $1 - t = \big\langle \Omega_\omega,\ (\mathbb{1} - E)\Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} = \|(\mathbb{1} - E)\Omega_\omega\|^2_{\mathcal{H}_\omega} \neq 0$.

Defina-se $g_1,\ g_2 : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ como sendo os funcionais lineares dados por

$$g_1(a) \;:=\; \frac{1}{t}\big\langle E\Omega_\omega,\ \pi_\omega(a)\Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega}\,,$$

$$g_2(a) \;:=\; \frac{1}{1-t}\big\langle (\mathbb{1} - E)\Omega_\omega,\ \pi_\omega(a)\Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega}\,,$$

$a \in \mathcal{A}$. Afirmamos que g_1 e g_2 são estados em $\mathcal{A}$. Consideremos primeiramente o caso de g_1. Temos que $g_1(\mathbb{1}) = \frac{1}{t}\big\langle E\Omega_\omega,\ \Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} = 1$, pela definição de t. Fora isso, usando os fatos que $E \in \pi_\omega(\mathcal{A})'$, que $E^2 = E$ e que $E^* = E$, vale

para todo $a \in \mathcal{A}$

$$g_1(a^*a) \;=\; \frac{1}{t}\big\langle E\Omega_\omega,\; \pi_\omega(a^*a)\Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} \;=\; \big\langle E\pi_\omega(a)\Omega_\omega,\; E\pi_\omega(a)\Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} \;=\; \big\|E\pi_\omega(a)\Omega_\omega\big\|^2_{\mathcal{H}_\omega} \;\geq\; 0\,.$$

Assim, g_1 é positivo e, portanto, contínuo (pelo Teorema 40.25, página 2257), provando que g_1 é um estado. Para g_2 a prova é análoga: $g_2(\mathbb{1}) = \frac{1}{1-t}\big\langle(\mathbb{1}-E)\Omega_\omega,\; \Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} = \frac{1-t}{1-t} = 1$ e, além disso, vale para todo $a \in \mathcal{A}$

$$g_2(a^*a) \;=\; \frac{1}{1-t}\big\langle(\mathbb{1}-E)\Omega_\omega,\; \pi_\omega(a^*a)\Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} \;=\; \big\langle(\mathbb{1}-E)\pi_\omega(a)\Omega_\omega,\; (\mathbb{1}-E)\pi_\omega(a)\Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} \;=\; \big\|(\mathbb{1}-E)\pi_\omega(a)\Omega_\omega\big\|^2_{\mathcal{H}_\omega} \;\geq\; 0\,,$$

estabelecendo a positividade de g_2 e, portanto, que o mesmo é também um estado.

O ponto crucial da argumentação, porém, é que, pela definição de g_1 e g_2, vale para todo $a \in \mathcal{A}$ que

$$\omega(a) \;=\; \big\langle\Omega_\omega,\; \pi_\omega(a)\Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} \;=\; \big\langle E\Omega_\omega,\; \pi_\omega(a)\Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} + \big\langle(\mathbb{1}-E)\Omega_\omega,\; \pi_\omega(a)\Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} \;=\; tg_1(a) + (1-t)g_2(a)\,,$$

o que afirma que ω é um estado de mistura (por ser combinação linear convexa de dois outros estados $g1$ e g_2, com $t \in (0,\,1)$). Isso é uma contradição com a hipótese que ω é puro. Assim, a hipótese de que existam projetores ortogonais em $\pi_\omega(\mathcal{A})'$ outros que não 0 e $\mathbb{1}$ é falsa, o que implica que a hipótese que $\pi_\omega(\mathcal{A})' \neq \mathbb{C}\mathbb{1}$ é falsa.

Parte II. Provemos que se π_ω é irredutível, então ω é puro.

Vamos supor por absurdo que ω seja um estado de mistura e que existam $\lambda \in (0,\;1)$ e estados ω_1 e ω_2 tais que $\omega(a) = \lambda\omega_1(a) + (1-\lambda)\omega_2(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Considere-se o subespaço $\mathcal{D}_\omega := \{\pi_\omega(a)\Omega_\omega,\; a \in \mathcal{A}\}$, que é denso em $\mathcal{H}_\omega$, e considere-se a aplicação $\mathcal{S} : \mathcal{D}_\omega \times \mathcal{D}_\omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$\mathcal{S}\big(\pi_\omega(a)\Omega_\omega,\; \pi_\omega(b)\Omega_\omega\big) \;:=\; \lambda\omega_1\big(a^*b\big)\,.$$

Antes de prosseguirmos, observemos que essa expressão está bem definida enquanto função de $\mathcal{D}_\omega \times \mathcal{D}_\omega$ em $\mathbb{C}$. Mais precisamente, provemos que se a e a' são elementos de $\mathcal{A}$ tais que $\pi_\omega(a)\Omega_\omega = \pi_\omega(a')\Omega_\omega$, então $\omega_1\big(a^*b\big) = \omega_1\big((a')^*b\big)$ e que se b e b' são elementos de $\mathcal{A}$ tais que $\pi_\omega(b)\Omega_\omega = \pi_\omega(b')\Omega_\omega$, então $\omega_1\big(a^*b\big) = \omega_1\big(a^*b'\big)$. O segundo caso segue do primeiro se recordarmos que $\omega_1\big(a^*b\big) = \overline{\omega_1\big(b^*a\big)}$.

Se a e a' são elementos de $\mathcal{A}$ tais que $\pi_\omega(a)\Omega_\omega = \pi_\omega(a')\Omega_\omega$, então $0 = \|\pi_\omega(a-a')\Omega_\omega\|^2_{\mathcal{H}_\omega} = \omega\big((a-a')^*(a-a')\big)$. Portanto, $0 = \lambda\omega_1\big((a-a')^*(a-a')\big) + (1-\lambda)\omega_2\big((a-a')^*(a-a')\big)$. Devido à positividade de ω_1 e de ω_2 e ao fato que $\lambda \in (0,\;1)$, isso implica que $\omega_1\big((a-a')^*(a-a')\big) = 0$. Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, vale para todo $b \in \mathcal{A}$ que

$$\big|\omega_1\big((a-a')^*b\big)\big|^2 \;\leq\; \omega_1\big((a-a')^*(a-a')\big)\omega_1\big(b^*b\big) \;=0\,,$$

ou seja, tem-se

$$\omega_1\big(a^*b\big) \;=\; \omega_1\big((a')^*b\big)$$

como desejado.

É elementar constatar que $\mathcal{S}$ é uma forma sesquilinear em $\mathcal{D}_\omega$. Além disso, $\mathcal{S}$ é uma forma sesquilinear bicontínua, pois

$$\Big|\mathcal{S}\big(\pi_\omega(a)\Omega_\omega,\; \pi_\omega(b)\Omega_\omega\big)\Big|^2 \;=\; \Big|\lambda\omega_1\big(a^*b\big)\Big|^2 \;\leq\; \Big|\lambda\omega_1\big(a^*a\big)\Big|\,\Big|\lambda\omega_1\big(b^*b\big)\Big|$$

$$\leq\; \Big|\omega\big(a^*a\big)\Big|\,\Big|\omega\big(b^*b\big)\Big| \;=\; \Big\|\pi_\omega(a)\Omega_\omega\Big\|^2_{\mathcal{H}_\omega}\Big\|\pi_\omega(b)\Omega_\omega\Big\|^2_{\mathcal{H}_\omega}$$

para todos $a,\; b \in \mathcal{A}$. Na primeira desigualdade acima usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para ω_1. Na segunda, desigualdade usamos que $\omega(c^*c) = \lambda\omega_1\big(c^*c\big) + (1-\lambda)\omega_2\big(c^*c\big) \geq \lambda\omega_1\big(c^*c\big)$ para todo $c \in \mathcal{A}$, devido à não-negatividade de todos os termos e fatores envolvidos.

Esses fatos têm duas consequências: primeiro, podemos estender $\mathcal{S}$ a uma forma sesquilinear bicontínua definida em todo $\mathcal{H}_\omega$ (pois $\mathcal{D}_\omega$ é denso em $\mathcal{H}_\omega$); segundo, podemos evocar a Proposição 40.11, página 2197, e afirmar que existe $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ tal que

$$\mathcal{S}\big(\pi_\omega(a)\Omega_\omega,\; \pi_\omega(b)\Omega_\omega\big) \;=\; \big\langle S\pi_\omega(a)\Omega_\omega,\; \pi_\omega(b)\Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega}$$

para todos $a,\; b \in \mathcal{A}$, ou seja, tal que

$$\lambda\omega_1\big(a^*b\big) \;=\; \big\langle S\pi_\omega(a)\Omega_\omega,\; \pi_\omega(b)\Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega}$$

para todos $a,\; b \in \mathcal{A}$.

Afirmamos que $S \in \pi_\omega(\mathcal{A})'$. De fato, vale trivialmente para todos $a,\; b,\; c \in \mathcal{A}$ que $\omega_1\big(a^*(c^*b)\big) = \omega_1\big((ca)^*b\big)\big)$. Logo,

$$\big\langle S\pi_\omega(a)\Omega_\omega,\; \pi_\omega(c^*)\pi_\omega(b)\Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} \;=\; \big\langle S\pi_\omega(c)\pi_\omega(a)\Omega_\omega,\; \pi_\omega(b)\Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega}\,,$$

ou seja,

$$\Big\langle\big(\pi_\omega(c)S - S\pi_\omega(c)\big)\pi_\omega(a)\Omega_\omega,\; \pi_\omega(b)\Omega_\omega\Big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} \;=\; 0$$

para todos $a,\; b,\; c \in \mathcal{A}$. Evocando novamente o fato que $\mathcal{D}_\omega$ é denso em $\mathcal{H}_\omega$, isso implica que $S\pi_\omega(c) = \pi_\omega(c)S$ para todo $c \in \mathcal{A}$, o que equivale a dizer que $S \in \pi_\omega(\mathcal{A})'$.

Agora, da hipótese que π_ω é irredutível segue que $\pi_\omega(\mathcal{A})' = \mathbb{C}\mathbb{1}$. Logo, existe $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $S = \mu\mathbb{1}$. Isso significa que

$$\lambda\omega_1\big(a^*b\big) \;=\; \overline{\mu}\big\langle\pi_\omega(a)\Omega_\omega,\; \pi_\omega(b)\Omega_\omega\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} \;=\; \overline{\mu}\omega\big(a^*b\big)$$

para todos $a,\; b \in \mathcal{A}$. Tomando-se $a = b = \mathbb{1}$ segue disso que $\overline{\mu} = \lambda$ e como $\lambda \neq 0$ obtemos também (tomando apenas $a = \mathbb{1}$) que $\omega_1\big(b\big) = \omega\big(b\big)$ para todo $b \in \mathcal{A}$. Logo, $\omega = \omega_1$ o que contradiz a hipótese que ω é uma mistura dos estados ω_1 e ω_2, implicando que ω é um estado puro. ■

Decorre da intuição adquirida na Mecânica Estatística Quântica que um estado de mistura representa um sistema composto de diferentes fases. O que o Teorema 40.27 nos diz é essa composição reflete-se em nível algébrico na redutibilidade da correspondente representação GNS.

40.5.3 Exemplos em Álgebras de Matrizes. Construção GNS. Estados Puros e a Entropia de von Neumann

O Teorema 40.11, página 2197, diz-nos que para um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ o conjunto $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dos operadores lineares agindo em $\mathcal{H}$ é uma álgebra C*. Para o caso em que $\mathcal{H}$ é o espaço de dimensão finita $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ coincide com a álgebra $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\; n)$ das matrizes $n \times n$ com entradas complexas. Nesta seção ilustraremos várias das ideias acima no caso simples da álgebra C* unital $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\; n)$.

Se $M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\; n)$ é uma matriz cujos elementos são M_{ij}, $i,\; j \in \{1,\;\ldots,\;n\}$, a operação de adjunção em $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\; n)$ é dada por $(M^*)_{ij} = \overline{M_{ji}}$. Define-se o traço de $M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\; n)$ (vide Seção 10.2.3, página 523) por

$$\mathrm{Tr}(M) \;=\; \sum_{i=1}^{n} M_{ii}\,.$$

Note-se que $\overline{\mathrm{Tr}(M)} = \mathrm{Tr}(M^*)$ para toda matriz $M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\; n)$. É bem sabido (vide Seção 10.2.3) que para duas matrizes quaisquer M e $N \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\; n)$ vale a chamada propriedade cíclica do traço: $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$. Fora isso, tem-se que

$$\mathrm{Tr}(M^*M) \;=\; \sum_{i=1}^{n}(M^*M)_{ii} \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(M^*)_{ik}M_{ki} \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{M_{ki}}M_{ki} \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|M_{ki}|^2\,,$$

o que diz-nos que

$$\mathrm{Tr}(M^*M) \;\geq\; 0 \tag{40.107}$$

para qualquer matriz M. Note-se também que se M é tal que $\mathrm{Tr}(M^*M) = 0$ então

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|M_{ki}|^2 \;=\; 0\,,$$

o que só é possível se $M_{ij} = 0$ para todos i e j, ou seja,

$$\mathrm{Tr}(M^*M) \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; M \;=\; 0\,. \tag{40.108}$$

Mat $(n,\ \mathbb{C})$ é um espaço vetorial e podemos definir no mesmo um produto escalar dado por

$$\langle A,\ B\rangle_2 \ =\ \mathrm{Tr}(A^*B)\ . \tag{40.109}$$

Por (40.107) e (40.108) segue que $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ é de fato um produto escalar.

E. 40.38 *Exercício.* Mostre que Mat $(n,\ \mathbb{C})$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar de (40.109). ✣

• **Matrizes densidade**

Uma matriz $\rho \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ que seja autoadjunta, positiva (i.e., com autovalores não negativos) e satisfaça $\mathrm{Tr}\rho = 1$ é dita ser uma *matriz densidade*. A noção de matriz densidade foi independentemente introduzida na Física Quântica por Landau[37] e por von Neumann[38].

O conjunto das matrizes densidade é convexo: se $\rho_1,\ \ldots,\ \rho_m \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ são matrizes densidade, então combinações lineares convexas $\sum_{a=1}^m \lambda_a\rho_a$ são também matrizes densidade para quaisquer $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m \in [0,\ 1]$ tais que $\sum_{a=1}^m \lambda_a = 1$.

E. 40.39 *Exercício fácil.* Constate a veracidade dessa afirmação. ✣

Outra observação relevante é que se $\rho \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ é uma matriz densidade e $U \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ é uma matriz unitária, então $U^*\rho U$ é também uma matriz densidade.

E. 40.40 *Exercício fácil.* Constate a veracidade dessa afirmação. ✣

Por ser autoadjunta, toda matriz densidade possui uma representação espectral (vide o Teorema Espectral para matrizes autoadjuntas, Teorema 10.15, página 555):

$$\rho \ =\ \sum_{k=1}^n \varrho_k P_k\ ,$$

onde $\{\varrho_1,\ \ldots,\ \varrho_n\}$ é o conjunto de autovalores reais (não necessariamente distintos) de ρ e P_k os projetores espectrais nos correspondentes subespaços unidimensionais de autovetores (mutuamente ortogonais) de ρ com autovalores ϱ_k. Sabemos do Teorema Espectral para matrizes autoadjuntas, Teorema 10.15, que cada P_k satisfaz $P_k = P_k^*$ e que $P_kP_l = \delta_{kl}P_k$, sendo que $\sum_{k=1}^n P_k = \mathbb{1}$.

A condição de positividade implica que $\varrho_k \geq 0$ para todo k e a condição $\mathrm{Tr}\rho = 1$ implica que $\sum_{k=1}^n \varrho_k = 1$.

• **Estados em** Mat $(\mathbb{C},\ n)$

A proposição que segue mostra a forma geral dos estados em $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$.

Proposição 40.64 *Todo estado ω em $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ é da forma*

$$\omega(A) \ =\ \mathrm{Tr}(\rho A)\ ,$$

onde $\rho \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ é uma matriz densidade. A associação $\omega \leftrightarrow \rho$ é unívoca e, por isso, podemos identificar o conjuntos de estados em Mat $(\mathbb{C},\ n)$ *com o conjunto das matrizes densidade em* Mat $(\mathbb{C},\ n)$. □

Prova. Mat $(\mathbb{C},\ n)$ é um espaço vetorial de dimensão finita e, portanto, todas as normas nele definidas são equivalentes (Teorema 3.2 , página 276. Para a demonstração, vide Apêndice 3.A, página 296). Considere-se em Mat $(\mathbb{C},\ n)$ o produto escalar (40.109). A norma induzida por esse produto escalar é $\|A\|_2^2 = \mathrm{Tr}(A^*A)$, para $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$, e é equivalente à norma operatorial de $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ (para a qual $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma álgebra C*). Assim, todo funcional linear contínuo em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é contínuo em ambas as normas.

Seja $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \omega(A) \in \mathbb{C}$ um estado em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Como ω é um funcional linear contínuo em Mat $(\mathbb{C},\ n)$ e Mat $(\mathbb{C},\ n)$ é um espaço de Hilbert para o produto escalar $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_2$, então o Teorema da Representação de Riesz, Teorema 39.4, página 2134, garante que ω é da forma

$$\omega(A) \ =\ \mathrm{Tr}(\rho^*A)\ ,$$

[37] Lev Davidovich Landau (1908–1968).
[38] John von Neumann (1903–1957).

para algum $\rho \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$. Como $\omega(\mathbb{1}) = 1$, segue que $\mathrm{Tr}(\rho^*) = 1$. Como ω é positivo, segue de (40.93) que $\mathrm{Tr}(\rho^*A^*B) = \overline{\mathrm{Tr}(\rho^*B^*A)}$. Mas $\overline{\mathrm{Tr}(M)} = \mathrm{Tr}(M^*)$ para toda matriz $M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$. Logo,

$$\mathrm{Tr}\big(\rho^*A^*B\big) \ =\ \mathrm{Tr}\big(A^*B\rho\big) \ =\ \mathrm{Tr}\big(\rho A^*B\big)\ ,$$

sendo que na última igualdade usamos a propriedade cíclica do traço. Logo, tomando $A = \mathbb{1}$, provamos que para toda $B \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ tem-se $\mathrm{Tr}(\rho^*B) = \mathrm{Tr}(\rho B)$. Assim, $\langle(\rho-\rho^*),\ B\rangle_2 = \mathrm{Tr}\big((\rho^*-\rho)B\big) = 0$, para toda $B \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ o que implica $\rho = \rho^*$.

Como ρ é autoadjunta, ρ admite uma representação espectral: $\rho = \sum_{k=1}^n \varrho_k P_k$, onde ϱ_k são os autovalores de ρ e P_k os correspondentes projetores espectrais. Cada P_k é um projetor ortonormal projetando no subespaço unidimensional gerado pelo autovetor de ρ de autovalor ϱ_k. Pela positividade de ω temos

$$0 \ \leq\ \omega(A^*A) \ =\ \mathrm{Tr}(\rho A^*A) \ =\ \sum_{k=1}^n \varrho_k \mathrm{Tr}(P_kA^*A)$$

novamente para todo $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$. Tomando $A = P_j$, teremos $\mathrm{Tr}(P_kA^*A) = \mathrm{Tr}(P_kP_j) = \delta_{ij}\mathrm{Tr}(P_j) = \delta_{ij}$ e concluímos que $\varrho_j \geq 0$. Como isso vale para todo $j = 1,\ \ldots,\ n$, concluímos que ρ é uma matriz positiva.

Se ρ e ρ' são duas matrizes densidade tais que $\mathrm{Tr}(\rho A) = \mathrm{Tr}(\rho' A)$ para toda $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$, então $0 = \mathrm{Tr}\big((\rho-\rho')A\big) = \langle(\rho-\rho'),\ A\rangle_2$ para toda $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$, o que implica que $\rho = \rho'$, estabelecendo a unicidade da associação entre estados e matrizes densidade em Mat $(\mathbb{C},\ n)$. ■

Denominamos $\omega_\rho(A) = \mathrm{Tr}(\rho A)$, $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$, o estado associado à matriz densidade $\rho \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$. Devido à unicidade da associação entre estados e matrizes densidade em Mat $(\mathbb{C},\ n)$, muitas vezes, com um certo abuso de linguagem, nos referimos a uma matriz densidade como sendo um estado.

• **Interpretação probabilística dos estados**

Seja $\rho \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ uma matriz densidade e seja $\omega_\rho(A) = \mathrm{Tr}(\rho A)$, $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$, o estado a ela associado. Seja $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ uma matriz autoadjunta e seja

$$A \ =\ \sum_{k=1}^n \alpha_k Q_k$$

sua decomposição espectral, com α_k sendo os autovalores de A e Q_k os correspondentes projetores espectrais. Sabemos que $\alpha_k \in \mathbb{R}$ e que $\sum_{k=1}^n Q_k = \mathbb{1}$. Temos

$$\omega_\rho(A) \ =\ \mathrm{Tr}(\rho A) \ =\ \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathrm{Tr}(\rho Q_k) \ =\ \sum_{k=1}^n \alpha_k\, \mathcal{P}_k^{\rho,\,A}\ ,$$

onde definimos $\mathcal{P}_k^{\rho,\,A} := \mathrm{Tr}(\rho Q_k)$, $k = 1,\ \ldots,\ n$. Como $Q_k = Q_k^*Q_k$, tem-se

$$\mathcal{P}_k^{\rho,\,A} \ :=\ \mathrm{Tr}(\rho Q_k) \ =\ \mathrm{Tr}(\rho Q_k^*Q_k) \ =\ \omega_\rho\big(Q_k^*Q_k\big) \ \geq\ 0\ ,$$

devido à positividade de ω_ρ. Fora isso,

$$\sum_{k=1}^n \mathcal{P}_k^{\rho,\,A} \ =\ \sum_{k=1}^n \mathrm{Tr}(\rho Q_k) \ =\ \mathrm{Tr}\left(\rho\left(\sum_{k=1}^n Q_k\right)\right) \ =\ \mathrm{Tr}(\rho\mathbb{1}) \ =\ 1\ .$$

Assim, os números $\mathcal{P}_k^{\rho,\,A}$ são não negativos e somam 1, podendo, assim, ser interpretados como uma distribuição de probabilidades em $\{1,\ \ldots,\ n\}$ ou, mais adequadamente, no espectro de A: $\sigma(A) = \{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n\}$. Com isso, a igualdade

$$\omega_\rho(A) \ =\ \sum_{k=1}^n \alpha_k\, \mathcal{P}_k^{\rho,\,A}$$

obtida acima pode ser interpretada como uma média no espectro de A ponderada pela distribuição de probabilidades definida pelos números $\mathcal{P}_k^{\rho,\,A}$.

Como vemos, a todo estado existe associada uma tal distribuição de probabilidades. Essa interpretação de $\omega_\rho(A)$ como uma média no espectro de A (no caso de A ser autoadjunto) segundo uma certa distribuição de probabilidades (dependente de ρ e também de A) possui uma forte ressonância com a chamada *interpretação probabilística da Física Quântica*.

• **Estados e "informação"**

A associação entre estados e distribuições de probabilidades no espectro de operadores autoadjuntos permite também uma associação informal com a noção de "informação"[39] pois, falando em termos muito gerais, quanto mais concentrada for uma distribuição de probabilidades em um espaço de eventos, mais informação está contida nos mesmos. Ilustremos isso em um exemplo simples. Suponhamos que desejemos transmitir a uma outra pessoa a informação de que uma determinada grandeza assume um valor específico no conjunto $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, digamos, o valor 4, e para tal possamos apenas transmitir àquele indivíduo um dado de seis lados numerados de 1 a 6, informando àquela pessoa que ela deve inferir o valor que desejamos informar repetindo sucessivamente lançamentos desse dado e constatando qual o valor que ocorre mais frequentemente. Naturalmente, se usarmos dados não viciados, para os quais todas as faces são equiprováveis, o receptor do dado não será capaz de extrair do mesmo a informação desejada: o número 4. Se, porém, o dado for viciado e a face 4 ocorrer com frequência muito maior que as demais, a informação poderá ser eficientemente transmitida.

Uma questão importante, portanto, é a de saber quais estados apresentam maior conteúdo de "informação", no sentido vago de acima. São os estados puros, os quais estudaremos com mais detalhe no que segue para o caso das álgebras $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$.

As teorias da "Informação Quântica" e da "Comunicação Quântica" têm recebido atenção crescente em tempos recentes, devido a avanços teóricos, experimentais e perspectivas de aplicações tecnológicas (criptografia e computação quânticas), mas alguns de seus fundamentos são tão antigos quanto a própria Mecânica Quântica. Para um texto introdutório sobre esses temas pós-modernos da Física Quântica, vide [39].

• **Estados puros e de mistura em** $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$

Afirmamos que estados da forma $\omega(A) = \mathrm{Tr}(PA)$, com P sendo um projetor ortogonal em um subespaço unidimensional são estados puros na álgebra $\mathrm{C}^*\ \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ e, em verdade, são os únicos estados puros sobre $\mathcal{A}$.

Seja $\psi \in \mathcal{H}$ com $\|\psi\| = 1$ e denotemos por $[\psi]$ o subespaço de $\mathcal{H}$ gerado por ψ: $[\psi] := \{\alpha\psi,\ \alpha \in \mathbb{C}\}$. Seja $P \equiv P_\psi$ o projetor ortonormal sobre $[\psi]$: $P\varphi = \langle\psi,\ \varphi\rangle\psi$. Se $A \mapsto \mathrm{Tr}(PA)$ fosse um estado de mistura, haveria $\lambda \in (0,\ 1)$ e $\rho_1,\ \rho_2 \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$, autoadjuntas, positivas com $\mathrm{Tr}\rho_1 = \mathrm{Tr}\rho_2 = 1$ tais que

$$\mathrm{Tr}(PA) \ = \ \lambda\mathrm{Tr}(\rho_1 A) + (1-\lambda)\mathrm{Tr}(\rho_2 A)$$

para todo $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$. Isso implica que $\mathrm{Tr}\big((P - \lambda\rho_1 - (1-\lambda)\rho_2)A\big) = 0$ para todo $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ o que implica $P = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$ (para ver isso, tome-se $A = P - \lambda\rho_1 - (1-\lambda)\rho_2$).

Seja $\phi \in [\psi]^\perp$. Temos $P\phi = 0$ e, portanto,

$$0 \ = \lambda\langle\phi,\ \rho_1\phi\rangle + (1-\lambda)\langle\phi,\ \rho_2\phi\rangle \ = \ \lambda\big\|\rho_1^{1/2}\phi\big\|^2 + (1-\lambda)\big\|\rho_2^{1/2}\phi\big\|^2 \ .$$

Como $\lambda \in (0,\ 1)$, segue que $\rho_1^{1/2}\phi = 0$ e $\rho_2^{1/2}\phi = 0$. Portanto, tem-se também $\rho_1\phi = 0$ e $\rho_2\phi = 0$. Assim, tanto ρ_1 quanto ρ_2 anulam-se no subespaço $[\psi]^\perp$. Para $\phi \in [\psi]^\perp$ vale também $\langle\phi,\ \rho_j\psi\rangle = \langle\rho_j\phi,\ \psi\rangle = 0$, $j = 1,\ 2$, mostrando que $\rho_j\psi \in \big([\psi]^\perp\big)^\perp = [\psi]$, ou seja, mostrando que ρ_1 e ρ_2 tem $[\psi]$ como subespaço invariante. Logo, $\rho_j\psi = \alpha_j\psi$, $j = 1,\ 2$, mas como $\mathrm{Tr}\rho_j = 1$, concluímos que $\alpha_j = 1$ e que ρ_1 e ρ_2 são iguais ao projetor ortogonal sobre ψ, ou seja, $\rho_1 = \rho_2 = P$, contradizendo a hipótese de que P é um estado de mistura. Logo, P é puro.

Seja agora $A \mapsto \mathrm{Tr}(\rho A)$ um estado puro. Como ρ é autoadjunto, possui uma representação espectral da forma $\rho = \sum_{k=1}^n \varrho_k P_k$, onde cada ϱ_k é um autovalor de ρ e P_k o projetor ortonormal sobre o correspondente autovetor normalizado ψ_k. Como ρ é positivo, tem-se $\varrho_k \geq 0$ para todo k. Fora isso, $\sum_{k=1}^n \varrho_k = \mathrm{Tr}\rho = 1$. Claro está que

$$\omega_\rho(A) \ = \ \sum_{k=1}^n \varrho_k \mathrm{Tr}(P_k A) \ . \tag{40.110}$$

[39] Não faremos nenhuma tentativa de definir o que se entende por "informação" ou "desinformação", preferindo que o leitor siga as ideias intuitivas por trás das mesmas.

Agora, para cada k, a aplicação $\mathcal{A} \ni A \mapsto \mathrm{Tr}(P_k A)$ é também um estado em A. Assim, se houver ao menos dois ϱ_k's não-nulos, o estado ω_ρ será um estado de mistura, já que a combinação linear em (40.110) é uma combinação convexa de estados. Portanto, estabelecemos que $A \mapsto \mathrm{Tr}(\rho A)$ é um estado puro se e somente se ρ for o projetor ortonormal sobre um subespaço unidimensional de $\mathcal{H}$.

Estados puros são interpretados como de "informação" maximal. No que segue, assentaremos essa interpretação analisando dois objetos e seu comportamento em relação a estados puros ou de mistura: a variância de estados e a Entropia de von Neumann de estados.

• **Variância de estados**

Seja $\rho \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ uma matriz densidade e $\omega_\rho(A) = \mathrm{Tr}(\rho A)$ o estado a ela associado. Define-se a *variância* de $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ no estado definido por ρ por

$$\mathrm{Var}_\rho(A) \ := \ \omega_\rho\big(A^2\big) - \omega_\rho(A)^2 \ = \ \omega_\rho\Big(\big(A - \omega_\rho(A)\mathbb{1}\big)^2\Big) \ .$$

Consideremos $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ autoadjunta. Se nos fiarmos na interpretação probabilística de ω_ρ, podemos interpretar $\mathrm{Var}_\rho(A) = \omega_\rho\big(A^2\big) - \omega_\rho(A)^2$ como uma medida do desvio médio (quadrático) de A de seu valor médio $\omega_\rho(A)$.

Fixemos $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$, autoadjunta, e consideremos ρ da forma $\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$, com $\rho_1,\ \rho_2$ sendo matrizes densidade e $\lambda \in [0,\ 1]$. Um cômputo simples mostra que

$$\omega_{\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2}(A) \ = \ \lambda\omega_{\rho_1}(A) + (1-\lambda)\omega_{\rho_2}(A)$$

e que

$$\mathrm{Var}_{\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2}(A) \ = \ \lambda\mathrm{Var}_{\rho_1}(A) + (1-\lambda)\mathrm{Var}_{\rho_2}(A) + \lambda(1-\lambda)\big[\omega_{\rho_1}(A) - \omega_{\rho_2}(A)\big]^2 \ .$$

Disso concluímos que

$$\mathrm{Var}_{\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2}(A) \ \geq \ \lambda\mathrm{Var}_{\rho_1}(A) + (1-\lambda)\mathrm{Var}_{\rho_2}(A) \ \geq \ \min\big\{\mathrm{Var}_{\rho_1}(A)\,, \mathrm{Var}_{\rho_2}(A)\big\} \ .$$

Segue disso que se ρ é um estado de mistura, a variância de A é maior que a dos estados puros que o compõem. Isso reforça a ideia de estados puros como possuidores de informação maximal: nos mesmos os desvios da distribuição de A em torno do seu valor médio é inferior ao de estados de mistura.

40.5.3.1 A Entropia de von Neumann

Considere-se a função $s : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$s(x) \ := \ \begin{cases} 0 \ , & \text{se } x = 0 \ , \\ -x\ln(x) \ , & \text{se } x \in (0,\ 1] \ . \end{cases} \tag{40.111}$$

Seu gráfico é exibido na Figura 40.1, página 2270. Tem-se $s(x) > 0$ para todo $x \in (0,\ 1)$, sendo ainda que $s(0) = s(1) = 0$. É importante notar também que s é uma função contínua em $[0,\ 1]$, diferenciável em $(0,\ 1]$ e côncava[40] em $[0,\ 1]$, pois $s''(x) = -x^{-1} < 0$ para $x \in (0,\ 1]$. Assim, para cada $p \in \mathbb{N}$ vale

$$s\left(\sum_{b=1}^p \lambda_b\, x_b\right) \ \geq \ \sum_{b=1}^p \lambda_b\, s\,(x_b) \tag{40.112}$$

para todos $x_1,\ \ldots,\ x_p \in [0,\ 1]$ e todos $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_p \in [0,\ 1]$ com $\sum_{b=1}^p \lambda_b = 1$.

Seja uma matriz densidade $\rho \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ e seja $\rho = \sum_{k=1}^n \varrho_k P_k$ sua representação espectral, onde cada ϱ_k é um autovalor de ρ e P_k o projetor ortonormal sobre o correspondente autovetor normalizado ψ_k, sendo $\sum_{k=1}^n \varrho_k = 1$. Defina-se $s(\rho) \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ por

$$s(\rho) \ := \ \sum_{k=1}^n s(\varrho_k) P_k \ .$$

[40] A teoria das funções côncavas e convexas é estudada no Capítulo 5, página 316.

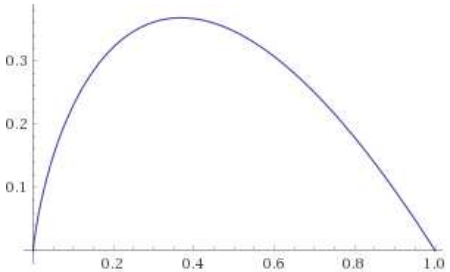

Figura 40.1: Gráfico da função s definida em (40.111). O máximo dessa função ocorre no ponto $x = 1/e$ e nele a função s vale $1/e$.

A *Entropia de von Neumann* de ρ é definida por

$$S(\rho) \,:=\, \mathrm{Tr}\big(s(\rho)\big)\,.$$

Como $\mathrm{Tr}P_j = 1$ para todo j, é claro que

$$S(\rho) \,=\, \sum_{k=1}^{n} s\big(\varrho_k\big)\,. \tag{40.113}$$

A noção de *Entropia de von Neumann* foi introduzida por aquele autor no livro clássico [377]. Seu propósito original era o estudo de propriedades estatísticas de sistemas quânticos e, em particular, o estudo da Mecânica Estatística Quântica, seguindo ideias anteriores de Gibbs[41] sobre a Mecânica Estatística Clássica. No que segue estudaremos as propriedades básicas de $S(\rho)$.

De (40.113) vê-se imediatamente que se $U \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\, n)$ é uma matriz unitária, então

$$S\big(U^*\rho U\big) \,=\, S(\rho)\,,$$

pois transformações unitárias preservam o espectro.

A Entropia de von Neumann é interpretada como uma medida do grau de "desinformação" associado a uma matriz densidade e ao estado associado à mesma. Essa ideia é apoiada nos fatos que descrevemos no teorema que segue, o qual possui uma importância fundamental para a Entropia de von Neumann:

Teorema 40.28 *Para $m \in \mathbb{N}$, sejam $\rho_1,\, \ldots,\, \rho_m \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\, n)$ matrizes densidade. Então,*

$$S\left(\sum_{a=1}^{m} \lambda_a \rho_a\right) \,\geq\, \sum_{a=1}^{m} \lambda_a S\left(\rho_a\right) \tag{40.114}$$

para todos $\lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_m \in [0,\, 1]$ tais que $\displaystyle\sum_{a=1}^{m} \lambda_a = 1$. Essa propriedade é denominada concavidade da Entropia de von Neumann. *Para toda matriz densidade $\rho \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\, n)$ vale*

$$0 \,\leq\, S(\rho) \,\leq\, \ln n\,.$$

$S(\rho)$ anula-se se e somente se o estado associado a ρ for puro e $S(\rho)$ assume seu valor máximo, $\ln n$, quando e somente quando a matriz densidade for dada por $\overline{\rho} := \frac{1}{n}\mathbb{1}$. □

[41] Josiah Willard Gibbs (1839–1903).

Para a prova do Teorema 40.28 fazemos uso do seguinte resultado, de interesse por si só:

Lema 40.10 *Seja $\tilde{\rho} \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\, n)$ uma matriz densidade e seja $\{e_1,\, \ldots,\, e_n\}$ uma base ortonormal qualquer em $\mathbb{C}^n$. Então, vale*

$$\sum_{j=1}^{n} s\Big(\big\langle e_j,\, \tilde{\rho} e_j\big\rangle\Big) \,\geq\, S(\tilde{\rho})\,, \tag{40.115}$$

onde $\langle \cdot,\, \cdot \rangle$ denota o produto escalar usual em $\mathbb{C}^n$. □

Prova do Lema 40.10. Seja $\tilde{\rho} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\varrho}_k \tilde{P}_k$ a representação espectral de $\tilde{\rho}$, com $\tilde{\varrho}_k$ sendo seus autovalores, satisfazendo $\sum_{j=1}^{n} \tilde{\varrho}_k = 1$. Temos $s\big(\tilde{\rho}\big) = \sum_{j=1}^{n} s\big(\tilde{\varrho}_k\big)\tilde{P}_k$ e podemos escrever, pela definição de traço,

$$S(\tilde{\rho}) \,=\, \sum_{j=1}^{n} \big\langle e_j,\, s(\tilde{\rho}) e_j\big\rangle \,=\, \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} s\big(\tilde{\varrho}_k\big)\big\langle e_j,\, \tilde{P}_k e_j\big\rangle\,. \tag{40.116}$$

Lembremos agora que $\sum_{k=1}^{n} \tilde{P}_k = \mathbb{1}$. Logo, $\sum_{k=1}^{n} \big\langle e_j,\, \tilde{P}_k e_j\big\rangle = \|e_j\|^2 = 1$. Como $\big\langle e_j,\, \tilde{P}_k e_j\big\rangle = \|\tilde{P}_k e_j\|^2 \geq 0$, concluímos que a combinação linear $\sum_{k=1}^{n} s\big(\tilde{\varrho}_k\big)\big\langle e_j,\, \tilde{P}_k e_j\big\rangle$ que ocorre no lado direito de (40.116) é uma combinação linear convexa. Logo, por (40.112), segue que

$$S(\tilde{\rho}) \,\leq\, \sum_{j=1}^{n} s\left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{\varrho}_k \big\langle e_j,\, \tilde{P}_k e_j\big\rangle\right) \,=\, \sum_{j=1}^{n} s\Big(\big\langle e_j,\, \tilde{\rho} e_j\big\rangle\Big)\,,$$

como queríamos mostrar. ■

Passemos agora à

Prova do Teorema 40.28. Seja a matriz densidade definida por

$$\rho \,:=\, \sum_{a=1}^{m} \lambda_a \rho_a$$

e seja $\rho = \sum_{k=1}^{n} \rho_k P_k$ sua representação espectral, com os ρ_k's sendo os autovalores de ρ, satisfazendo $\sum_{k=1}^{n} \rho_k = 1$. Sejam ψ_k os correspondentes autovetores normalizados, de sorte que $\|\psi_k\| = 1$, $\rho\psi_k = \varrho_k\psi_k$ com $\{\psi_1,\, \ldots,\, \psi_n\}$ sendo uma base ortonormal em $\mathbb{C}^n$. Temos,

$$\begin{aligned}
S\left(\sum_{a=1}^{m} \lambda_a \rho_a\right) \,=\, S(\rho) \,=\, \sum_{k=1}^{n} s\big(\varrho_k\big) \,&=\, \sum_{k=1}^{n} s\Big(\big\langle \psi_k,\, \rho\psi_k\big\rangle\Big) \\
&=\, \sum_{k=1}^{n} s\left(\left\langle \psi_k,\, \left(\sum_{a=1}^{m} \lambda_a \rho_a\right)\psi_k\right\rangle\right) \\
&=\, \sum_{k=1}^{n} s\left(\sum_{a=1}^{m} \lambda_a \left\langle \psi_k,\, \rho_a\psi_k\right\rangle\right) \\
&\overset{(40.112)}{\geq}\, \sum_{k=1}^{n}\sum_{a=1}^{m} \lambda_a s\big(\big\langle \psi_k,\, \rho_a\psi_k\big\rangle\big) \\
&=\, \sum_{a=1}^{m} \lambda_a \sum_{k=1}^{n} s\big(\big\langle \psi_k,\, \rho_a\psi_k\big\rangle\big) \\
&\overset{(40.115)}{\geq}\, \sum_{a=1}^{m} \lambda_a S(\rho_a)\,.
\end{aligned}$$

Isso demonstrou a concavidade de $S(\rho)$.

Como $s(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,\ 1]$, tem-se que $S(\rho) \geq 0$ para toda matriz densidade ρ. Perguntemo-nos quando $S(\rho) = 0$. Como $s\big(\varrho_k\big) \geq 0$, concluímos que $S(\rho) = 0$ se e somente se $s\big(\varrho_k\big) = 0$ para todo $k = 1,\ \ldots,\ n$. Mas a função $s(x)$ só se anula em $x = 0$ ou $x = 1$. Como $\sum_{k=1}^n \varrho_k = 1$, concluímos que $S(\rho) = 0$ se e somente um e somente um ϱ_k for igual a 1 (e os demais forem nulos), ou seja, se e somente se ρ for o projetor ortogonal sobre um subespaço unidimensional. Assim, $S(\rho) = 0$ se e somente se o estado associado a ρ (isto é $A \mapsto \mathrm{Tr}(\rho A)$) for puro.

Que $\overline{\rho} := \frac{1}{n}\mathbb{1}$ é uma matriz densidade é evidente e é fácil ver que $S\big(\overline{\rho}\big) = \ln n$, já que os autovalores de $\overline{\rho}$ são todos iguais a $1/n$. Provemos que $S(\rho)$ assume seu valor máximo quando (e somente quando) $\rho = \overline{\rho} := \frac{1}{n}\mathbb{1}$.

Seja $\rho \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ uma matriz densidade e ϱ_k seus autovalores, que suporemos não-nulos. Seja, como antes, $\rho = \sum_{k=1} \varrho_k P_k$ sua representação espectral. Fixando os projetores espectrais P_k, $S(\rho)$ é uma função das n variáveis $\varrho_1,\ \ldots,\ \varrho_n$ sujeitas à condição subsidiária $\sum_{k=1}^n \varrho_k = 1$. Para a determinação dos pontos extremais (máximos, mínimos, pontos de sela) de $S(\rho) \equiv S(\varrho_1,\ \ldots,\ \varrho_n) = \sum_{k=1}^n s\big(\varrho_k\big)$ aplica-se o método dos multiplicadores de Lagrange (vide, e.g. [108]) segundo o qual procuramos as soluções simultâneas em $\varrho_1,\ \ldots,\ \varrho_n$ e λ do sistema de equações

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_j} S(\varrho_1,\ \ldots,\ \varrho_n) + \lambda \frac{\partial}{\partial \varrho_j}\left(\sum_{k=1}^n \varrho_k - 1\right) \;=\; 0, \quad j = 1,\ \ldots,\ n, \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^n \varrho_k - 1 \;=\; 0\,.$$

Como $s'(x) = -\ln x - 1$, essas equações escrevem-se como

$$\ln \varrho_j \;=\; \lambda - 1\,, \quad j = 1,\ \ldots,\ n, \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^n \varrho_k - 1 \;=\; 0\,.$$

A solução desse sistema é trivial e fornece $\varrho_j = 1/n$ para todo $j = 1,\ \ldots,\ n$ (note-se também que $1/n \in [0,\ 1]$, como se deseja). Portanto, $S(\varrho_1,\ \ldots,\ \varrho_n)$ possui um ponto extremal (máximo, mínimo, ponto de sela) quando todos os autovalores de ρ forem iguais a $1/n$, o que, por sua vez, implica que ρ deve ser $n^{-1}\mathbb{1} =: \overline{\rho}$, para o qual temos $S\big(\overline{\rho}\big) = \ln n$. Como $S(\rho)$ é côncava, esse é um ponto de máximo. Como o resultado independe dos projetores espectrais adotados esse deve ser o ponto de máximo absoluto de $S(\rho)$ em todo o conjunto de matrizes densidade. ■

A Entropia de von Neumann possui outras propriedades importantes, como aquela expressa na proposição que segue:

Proposição 40.65 *Para $m,\ n \in \mathbb{N}$, sejam $\rho^A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ m)$ e $\rho^B \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ duas matrizes densidade. Então, para a matriz densidade dada pelo produto tensorial $\rho_A \otimes \rho_B$ vale*

$$S\Big(\rho^A \otimes \rho^B\Big) \;=\; S\big(\rho^A\big) + S\big(\rho^B\big)\,. \tag{40.117}$$

Essa propriedade é denominada aditividade da Entropia de von Neumann. □

Prova. Observamos primeiramente que

$$s(xy) \;=\; xs(y) + ys(x) \tag{40.118}$$

para todos $x,\ y \in [0,\ 1]$. Verifique!

Sejam ϱ_i^A, $i = \{1,\ \ldots,\ m\}$, os autovalores (não necessariamente distintos) de ρ^A e ϱ_j^B, $j = \{1,\ \ldots,\ n\}$, os autovalores (não necessariamente distintos) de ρ^B. Os autovalores de $\rho^A \otimes \rho^B$ são produtos de autovalores de ρ^A e de ρ^B. Assim, por (40.113), teremos

$$S\Big(\rho^A \otimes \rho^B\Big) \overset{(40.113)}{=} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n s\Big(\varrho_i^A \varrho_j^B\Big) \overset{(40.118)}{=} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m \varrho_i^A\right)}_{=1} \left(\sum_{j=1}^n s\Big(\varrho_j^B\Big)\right) + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \varrho_j^B\right)}_{=1} \left(\sum_{i=1}^m s\Big(\varrho_i^A\Big)\right) \;=\; S(\rho^B) + S\big(\rho^A\big)\,,$$

como queríamos provar. ■

A propriedade de concavidade (40.114) é de grande importância na Termodinâmica e está na raiz da denominação de $S(\rho)$ como *Entropia* de von Neumann. Na mesma linha, a propriedade de aditividade (40.117) expressa a ideia que a

Entropia de von Neumann de um sistema composto por sistemas independentes é a soma das Entropias de von Neumann das partes componentes, outra noção cara à Termodinâmica.

O Teorema 40.28 apresenta fatos que vão ao encontro da interpretação da Entropia de von Neumann como medida do grau de "desinformação" presente em um estado e que estados puros são estados com conteúdo de "informação" maximal. Por um lado, a propriedade de concavidade (40.114) diz-nos que a Entropia de von Neumann de uma combinação convexa de estados é maior que a mesma combinação convexa das Entropia de von Neumann desses estados, indicando que essa Entropia aumenta quando, por assim dizer, aumentamos o grau de mistura de um estado. Por outro lado, $S(\rho)$ é não-negativa, mas anula-se, como vimos, nos estados puros e, em contraste, assume seu máximo valor na matriz densidade $n^{-1}\mathbb{1}$, a única matriz densidade em $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ que é invariante por todas as transformações unitárias e cujos autovalores são todos iguais, privilegiando uniformemente todas as direções em $\mathbb{C}^n$, sendo, portanto, desprovida de conteúdo de informação.

E. 40.41 *Exercício. A Entropia de von Neumann de um sistema quântico de dois níveis.* Mostre que toda matriz complexa 2×2, autoadjunta e de traço igual a 1 pode ser escrita como

$$\rho \;\equiv\; \rho(a,\ b,\ c) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1+c}{2} & \frac{a-ib}{2} \\ \frac{a+ib}{2} & \frac{1-c}{2} \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2}\Big(\mathbb{1} + a\sigma_1 + b\sigma_2 + c\sigma_3\Big)\,,$$

com $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ e onde σ_1, σ_2 e σ_3 são as chamadas *matrizes de Pauli* (definidas em (2.208), página 253. Vide também Exercício E. 11.26, página 670). Mostre que os autovalores dessa matriz são

$$\varrho_1 \;=\; \frac{1+r}{2} \qquad \text{e} \qquad \varrho_2 \;=\; \frac{1-r}{2}\,,$$

onde $r \equiv \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Portanto, uma condição necessária e suficiente para que ρ seja positiva (i.e., tenha autovalores não negativos) é que tenhamos $0 \leq r \leq 1$. Mostre também que $\rho^2 = \rho$ se e somente se $r = 1$.

Os fatos descritos acima têm seguinte interpretação. A matriz densidade ρ de um sistema quântico de dois níveis é uma matriz complexa 2×2 que seja autoadjunta, tenha traço igual a 1 e tenha autovalores não negativos. Como vimos, uma tal matriz é parametrizada (univocamente!) por um vetor real de três componentes $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$ contido na esfera tridimensional fechada de raio 1 centrada na origem: $\big\{(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq 1\big\}$. Essa esfera é denominada *esfera de Bloch*[42] e o vetor $(a,\ b,\ c)$ que parametriza ρ é denominado *vetor de Bloch*. Quando esse vetor está na superfície dessa esfera (ou seja, quando $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$), a correspondente matriz ρ é um projetor ortogonal (pois lá tem-se $\rho^2 = \rho$ e ρ é autoadjunta) e, portanto, corresponde a um estado puro. Quanto esse vetor está no interior dessa esfera, (ou seja, quando $0 \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} < 1$) a matriz densidade ρ representa um estado de mistura.

Mostre que para $\lambda \in [0,\ 1]$ e para dois vetores quaisquer da esfera de Bloch $(a,\ b,\ c)$ e $(a',\ b',\ c')$, vale

$$\lambda\rho(a,\ b,\ c) + (1-\lambda)\rho(a',\ b',\ c') \;=\; \rho\Big(\lambda(a,\ b,\ c) + (1-\lambda)(a',\ b',\ c')\Big)\,.$$

A convexidade da esfera de Bloch reflete precisamente, portanto, a convexidade das matrizes densidade de um sistema de dois níveis.

Mostre que a entropia de von Neumann de $\rho \equiv \rho(a,\ b,\ c)$ é dada para $0 \leq r < 1$ por

$$S(\rho) \;\equiv\; S\big(\rho(a,\ b,\ c)\big) \;=\; -\frac{1+r}{2}\ln\left(\frac{1+r}{2}\right) - \frac{1-r}{2}\ln\left(\frac{1-r}{2}\right)\,,$$

com $r \equiv \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Usando essa expressão, mostre que $\lim_{r\to 1} S(\rho) = 0$ e que $S(\rho)$ vale $\ln 2$ quando $r = 0$. Também usando essa expressão, mostre que esses são, respectivamente, os valores mínimo e máximo de $S(\rho)$ na esfera de Bloch. ✣

40.5.3.2 A Construção GNS em $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$

Vamos agora discutir como a construção GNS pode ser concretamente realizada em $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$.

Seja $\rho \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ uma matriz densidade com autovalores ϱ_k, $k = 1,\ \ldots,\ n$. Como ρ é autoadjunta, ρ pode ser diagonalizada por uma transformação unitária, ou seja, existe uma matriz $V \in \mathrm{Mat}\,(n,\ \mathbb{C})$ unitária ($V^*V = VV^* = \mathbb{1}$)

[42] Felix Bloch (1905–1983).

tal que $V^*\rho V$ é a matriz diagonal

$$V^*\rho V \;=\; D_\rho \;=\; \begin{pmatrix} \varrho_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varrho_n \end{pmatrix} .$$

Podemos definir uma matriz $\rho^{1/2}$ da seguinte forma: $\rho^{1/2} := V D_\rho^{1/2} V^*$, onde

$$D_\rho^{1/2} \;=\; \begin{pmatrix} \sqrt{\varrho_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\varrho_n} \end{pmatrix} .$$

É fácil ver que

$$\rho^{1/2}\rho^{1/2} \;=\; \big(VD_\rho^{1/2}V^*\big)\big(VD_\rho^{1/2}V^*\big) \;=\; V\big(D_\rho^{1/2}\big)^2V^* \;=\; VD_\rho V^* \;=\; \rho\,.$$

Para futuros propósitos vamos definir também P_ρ, o projetor ortogonal sobre o subespaço fechado $\mathrm{Ran}\,(\rho^{1/2})$: se $\mathbb{C}^n \ni u = v + w$, com $v \in \mathrm{Ran}\,(\rho^{1/2})$ e $w \in (\mathrm{Ran}\,(\rho^{1/2}))^\perp$ então

$$P_\rho u \;=\; v\,. \tag{40.119}$$

É fácil mostrar que P_ρ é autoadjunto e satisfaz $\big(P_\rho\big)^2 = P_\rho$ (mostre!). Fora isso, é óbvio pela definição que $P_\rho\rho^{1/2} = \rho^{1/2}$. Como $\rho^{1/2}$ é autoadjunto, concluímos que

$$\rho^{1/2} \;=\; \big(\rho^{1/2}\big)^* \;=\; \big(P_\rho\rho^{1/2}\big)^* \;=\; \rho^{1/2}P_\rho\,,$$

o que mostra que

$$P_\rho\rho^{1/2} \;=\; \rho^{1/2}P_\rho \;=\; \rho^{1/2}\,.$$

Isso tem por consequência que

$$P_\rho\rho P_\rho \;=\; \big(P_\rho\rho^{1/2}\big)\rho^{1/2}P_\rho \;=\; \rho^{1/2}\rho^{1/2} \;=\; \rho\,. \tag{40.120}$$

Usaremos isso adiante.

Construção GNS. Uma primeira tentativa

Seja

$$\mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C}) \ni A \mapsto \omega_\rho(A) \;=\; \mathrm{Tr}(\rho A)$$

o estado em $\mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})$ associado à matriz densidade ρ.

Já observamos que $\mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar (40.109). Denotemos esse espaço de Hilbert por $\mathcal{H}_M$.

Definimos uma representação π da álgebra $\mathbb{C}^*\,\mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})$ no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_M$ da seguinte forma:

$$\pi(A)B \;=\; AB\,,$$

para matrizes A e $B \in \mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})$. É trivial verificar que π assim definida é uma representação da álgebra $\mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})$ em $\mathcal{H}_M$.

Definindo-se

$$\Omega_\rho \;:=\; \rho^{1/2} \;\in \mathcal{H}_M\,,$$

tem-se

$$\begin{aligned}\langle\Omega_\rho,\,\pi(A)\Omega_\rho\rangle_2 \;&=\; \langle\rho^{1/2},\,\pi(A)\rho^{1/2}\rangle_2 \;=\; \langle\rho^{1/2},\,A\rho^{1/2}\rangle_2 \;=\; \mathrm{Tr}\big((\rho^{1/2})^*A\rho^{1/2}\big)\\ &=\; \mathrm{Tr}\big(\rho^{1/2}A\rho^{1/2}\big) \;=\; \mathrm{Tr}\big(\rho^{1/2}\rho^{1/2}A\big) \;=\; \mathrm{Tr}\big(\rho A\big) \;=\; \omega_\rho(A)\,.\end{aligned} \tag{40.121}$$

Vemos assim que o vetor $\Omega_\rho = \rho^{1/2}$ "representa" o estado ω_ρ em $\mathcal{H}_M$.

Um problema com essa construção é o seguinte. Pelas hipóteses assumidas não é sempre verdade que ρ e $\rho^{1/2}$ são inversíveis. Consequentemente, não podemos garantir que Ω_ρ seja um vetor cíclico para a representação π, pois se $\rho^{1/2}$ não for inversível nem toda a matriz pode ser escrita da forma $\pi(A)\rho^{1/2} = A\rho^{1/2}$, para algum $A \in \mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})$ (por que?). Assim, caso ρ não possua inversa, a construção apresentada acima não coincide com a construção GNS.

A Construção GNS

A alternativa correta é começar definindo em $\mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})$ uma forma sesquilinear positiva dada agora por

$$\langle A,\,B\rangle_\rho \;=\; \omega_\rho(A^*B) \;=\; \mathrm{Tr}(\rho A^*B)\,. \tag{40.122}$$

Que $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_\rho$ é uma forma sesquilinear é claro. Que é positiva segue da positividade de ω_ρ.

Como $\langle A,\,A\rangle_\rho \;=\; \mathrm{Tr}\big((A\rho^{1/2})^*A\rho^{1/2}\big)$, o conjunto $\mathcal{N}$ de (40.98) vem a ser agora

$$\mathcal{N} \;=\; \big\{N \in \mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})|\;\; N\rho^{1/2} = 0\big\}\,,$$

ou seja,

$$\mathcal{N} \;=\; \big\{N \in \mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})|\;\; \mathrm{Ker}\,(N) \supset \mathrm{Ran}\,(\rho^{1/2})\big\}\,.$$

Observe-se de passagem que se $\rho^{1/2}$ não for inversível, $\mathcal{N}$ pode ter outros elementos além da matriz nula e $\mathrm{Ran}\,(\rho^{1/2})$ é um subespaço próprio de $\mathbb{C}^n$. Se P_ρ, definido em (40.119), é o projetor ortogonal sobre $\mathrm{Ran}\,(\rho^{1/2})$, então $\mathrm{Ran}\,(P_\rho) = \mathrm{Ran}\,(\rho^{1/2})$ e temos também

$$\mathcal{N} \;=\; \big\{N \in \mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})|\;\; \mathrm{Ker}\,(N) \supset \mathrm{Ran}\,(P_\rho)\big\} \;=\; \big\{N \in \mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})|\;\; NP_\rho = 0\big\}\,.$$

Sejam as classes de equivalência $[A] = \{A + N,\quad N \in \mathcal{N}\}$, $A \in \mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})$, definidas pela relação de equivalência $A \sim B \Leftrightarrow A - B \in \mathcal{N}$. Afirmamos que $A \sim B$ se e somente se $AP_\rho = BP_\rho$. De fato, se $A \sim B$, então $A - B = N \in \mathcal{N}$ e, portanto, $(A - B)P_\rho = 0$. Por outro lado, se $AP_\rho = BP_\rho$, então $(A - B)P_\rho = 0$, significando que $A - B \in \mathcal{N}$ e, portanto, que $A \sim B$. Além disso, afirmamos que $AP_\rho \in [A]$. De fato, $(AP_\rho - A)P_\rho = AP_\rho - AP_\rho = 0$, provando que $AP_\rho - A \in \mathcal{N}$, ou seja, que $AP_\rho \sim A$. Podemos, assim, identificar $\mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})/\mathcal{N}$ com o subconjunto de $\mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})$ formado pelas matrizes da forma AP_ρ com $A \in \mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})$:

$$\mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})/\mathcal{N} \;\equiv\; \big\{AP_\rho,\;\; A \in \mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})\big\}\,.$$

Como no caso da construção geral, definimos em $\mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})/\mathcal{N}$ um produto escalar por

$$\begin{aligned}\langle AP_\rho,\,BP_\rho\rangle_\rho \;&=\; \omega_\rho\big((AP_\rho)^*BP_\rho\big) \;=\; \omega_\rho\big(P_\rho^*A^*BP_\rho\big) \;=\; \omega_\rho\big(P_\rho A^*BP_\rho\big)\\ &=\; \mathrm{Tr}(\rho P_\rho A^*BP_\rho) \;=\; \mathrm{Tr}\big((P_\rho\rho P_\rho)A^*B\big) \;=\; \mathrm{Tr}(\rho A^*B) \;=\; \omega_\rho(A^*B)\,.\end{aligned} \tag{40.123}$$

Acima usamos (40.120).

É um exercício simples (faça!) mostrar que $\mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})/\mathcal{N}$ é um espaço de Hilbert com esse produto escalar.

Definimos uma representação π_ρ de $\mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})$ agindo em $\mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})/\mathcal{N}$ por

$$\pi_\rho(A)BP_\rho \;=\; (AB)P_\rho\,,$$

$A,\;B \in \mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})$.

Note-se também que $\mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})/\mathcal{N} \ni \mathbb{1}P_\rho = P_\rho$. É evidente que

$$\big\{\pi_\rho(A)P_\rho,\;\; A \in \mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})\big\} \;=\; \big\{AP_\rho,\;\; A \in \mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})\big\} \;=\; \mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})/\mathcal{N}\,,$$

mostrando que $P_\rho \in \mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})/\mathcal{N}$ é um vetor cíclico para a representação π_ρ.

Definindo-se

$$\Omega_\rho \;:=\; \mathbb{1}P_\rho \;=\; P_\rho \;\;\in \mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})/\mathcal{N}\,,$$

teremos

$$\begin{aligned}\langle\Omega_\rho,\,\pi_\rho(A)\Omega_\rho\rangle_\rho \;&=\; \langle P_\rho,\,AP_\rho\rangle_\rho \;=\; \omega_\rho(P_\rho^*AP_\rho) \;=\; \mathrm{Tr}(\rho P_\rho AP_\rho)\\ &=\; \mathrm{Tr}\big((P_\rho\rho P_\rho)A\big) \;=\; \mathrm{Tr}(\rho A) \;=\; \omega_\rho(A)\,,\end{aligned} \tag{40.124}$$

onde usamos novamente (40.120). Vemos assim que o vetor Ω_ρ "representa" o estado ω_ρ em $\mathrm{Mat}\,(n,\,\mathbb{C})/\mathcal{N}$.

40.6 O Espectro de Operadores em Espaços de Banach

A noção de espectro é de grande importância tanto no estudo de propriedades estruturais de operadores quanto em aplicações. Na Física Quântica sua relevância manifesta-se já nos seus fundamentos, pois é um postulado básico que os valores obtidos em mensurações individuais de um observável são elementos do espectro do operador autoadjunto a ele associado. Nessa seção trataremos de definir o conceito de espectro de modo preciso e geral. O estudo do espectro de operadores tem uma de suas culminações no teorema espectral, do qual trataremos com detalhe mais adiante em diversos casos de interesse.

Comecemos com uma advertência. Muitos estudantes, especialmente de Física, têm a noção preconcebida (oriunda de maus cursos e/ou de imprecisões matemáticas de alguns (muitos) livros-texto introdutórios de Mecânica Quântica) que o espectro de um operador coincide com o conjunto de seus autovalores. Essa noção é incorreta. Como discutiremos, o espectro de um operador é, em geral, maior que o conjunto de seus autovalores. Há, de fato, certos tipos de operadores cujo espectro coincide com o conjunto de autovalores (tal é o caso de matrizes agindo em espaços de dimensão finita, ou de operadores compactos autoadjuntos), mas tais situações são especiais. Há mesmo operadores (veremos exemplos) que não possuem autovalores, mas têm um espectro não-trivial. Lamentavelmente, tal noção incorreta é a fonte de muitos mal-entendidos (nem sempre inconsequentes!) entre a comunidade de físicos e a de matemáticos e isso é mais uma razão para sugerirmos um estudo cuidadoso da noção de espectro.

• **O conjunto resolvente e o espectro de um operador**

Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Banach e seja $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$ um operador limitado agindo em $\mathfrak{X}$. Dizemos que um número complexo $\lambda \in \mathbb{C}$ é um elemento do *conjunto resolvente* de T se o operador $\lambda\mathbb{1} - T$ for bijetor como aplicação de $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{X}$. Estamos no caso 1 do Teorema 40.14, página 2216, e, pelo Teorema da Aplicação Inversa, Teorema 40.8, página 2193, isso implica que $(\lambda\mathbb{1} - T)^{-1}$ é um operador limitado de $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{X}$, ou seja, um elemento de $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$.

Assim, definimos o *conjunto resolvente* de $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$, denotado por $\rho(T)$, por

$$\rho(T) \,:=\, \Big\{\lambda \in \mathbb{C} |\; \lambda\mathbb{1} - T \text{ é bijetor}\Big\} \,.$$

Dizemos que um número complexo $\lambda \in \mathbb{C}$ é um elemento do *espectro* de T se λ **não** for um elemento do conjunto resolvente de T, ou seja, se $\lambda\mathbb{1} - T$ **não** for bijetor como aplicação de $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{X}$.

Assim, definimos o *espectro* de $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$, denotado por $\sigma(T)$, por

$$\sigma(T) \,:=\, \mathbb{C} \setminus \rho(T) \,,$$

ou seja,

$$\sigma(T) \,:=\, \Big\{\lambda \in \mathbb{C} |\; \lambda\mathbb{1} - T \text{ não é bijetor}\Big\} \,.$$

Para $\lambda \in \rho(T)$ o operador $(\lambda\mathbb{1} - T)^{-1}$ é denominado *operador resolvente* de T calculado em λ (mais detalhes sobre esse operador adiante).

Nota. A razão da nomenclatura acima é a seguinte: em muitas aplicações (como no caso de certas equações integrais) interessa-nos *resolver* equações do tipo $(\lambda\mathbb{1} - T)\psi = \phi$ para todo ϕ elemento de um espaço de Banach $\mathfrak{X}$. Isso só é possível se $\lambda\mathbb{1} - T$ for bijetor, em cujo caso a solução é $\psi = (\lambda\mathbb{1} - T)^{-1}\phi$. O operador $(\lambda\mathbb{1} - T)^{-1}$ é por isso denominado *operador resolvente* e o conjunto de λ's para os quais o operador resolvente existe é denominado *conjunto resolvente*. ♣

• **Tipos de espectro. O espectros pontual, contínuo e residual**

Um ponto de central importância na análise de propriedades de operadores é classificar seu espectro de acordo com certas categorias. Há várias classificações que correspondem a vários tipos de espectro (não-necessariamente disjuntos, como conjuntos): o espectro pontual, o espectro residual, o espectro contínuo, o espectro absolutamente contínuo, o espectro singular contínuo, o espectro essencial, o espectro transiente, o espectro recorrente e possivelmente outros. Trataremos de alguns desses tipos de espectro nestas Notas, começando aqui pela classificação do espectro de operadores agindo em espaços de Banach em espectro pontual, contínuo e residual.

Se $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$ é um operador limitado agindo em um espaço de Banach $\mathfrak{X}$ e λ é um elemento de $\sigma(T)$, então $\lambda\mathbb{1} - T$ não é bijetor. Estamos no caso 2 do Teorema 40.14, página 2216, o qual quebra-se em três casos mutuamente exclusivos:

Caso a. O operador $\lambda\mathbb{1} - T$ não é injetor, e $(\lambda\mathbb{1} - T)^{-1}$ não pode ser definida na imagem de $\lambda\mathbb{1} - T$, pois $\mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbb{1} - T)$ é não-trivial, ou seja, existe $v \neq 0$ com $Tv = \lambda v$. Isso diz-nos que λ é autovalor de T e conduz à seguinte definição:

Denotamos por $\sigma_p(T)$ o conjunto de todos os autovalores de T:

$$\sigma_p(T) \,:=\, \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \big|\; \exists\, x \in \mathfrak{X},\; x \neq 0,\; \text{tal que } Tx \,=\, \lambda x\Big\} \,.$$

$\sigma_p(T)$ é denominado *espectro pontual* de T, ou *espectro discreto* de T ou ainda *espectro de autovalores* de T. Claro está que $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$. É importante frisar que esses dois conjuntos podem não ser coincidentes e que se pode ter $\sigma_p(T) = \emptyset$. Veremos exemplos mais abaixo.

Caso b. O operador $\lambda\mathbb{1} - T$ é injetor, $\mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbb{1} - T)$ é composto apenas pelo vetor nulo (e, portanto, λ **não** é autovalor de T). Fora isso $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - T)$ é um subconjunto próprio, não fechado, mas denso de $\mathfrak{X}$. Com isso, $(\lambda\mathbb{1} - T)^{-1}$ existe agindo em $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - T)$ mas, devido à Proposição 40.25, página 2217, não pode ser limitada. Isso conduz à seguinte definição:

Denotamos por $\sigma_c(T)$ o conjunto de todos os $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que λ não é um autovalor de T, $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - T)$ é subconjunto próprio denso de $\mathfrak{X}$ e a inversa $(\lambda\mathbb{1} - T)^{-1}$ existe agindo em $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - T)$, não podendo, porém ser limitada. $\sigma_c(T)$ é denominado *espectro contínuo* de T[43].

Por fim, temos o

Caso c. O operador $\lambda\mathbb{1} - T$ é injetor, $\mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbb{1} - T)$ é composto apenas pelo vetor nulo (e, portanto, λ **não** é autovalor de T). Porém, $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - T)$ não é denso em $\mathfrak{X}$ e $(\lambda\mathbb{1} - T)^{-1}$ existe agindo em $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - T)$, podendo ser limitada ou não. Isso conduz à seguinte definição:

Denotamos por $\sigma_r(T)$ o conjunto de todos os $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que λ não é um autovalor de T, $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - T)$ não é denso em $\mathfrak{X}$ e $(\lambda\mathbb{1} - T)^{-1}$ existe agindo em $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - T)$, podendo ser limitada ou não. $\sigma_r(T)$ é denominado *espectro residual* de T.

Podemos resumir as definições acima da seguinte forma: para $\mathfrak{X}$, um espaço de Banach, e $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$,

$$\begin{aligned}
\sigma_p(T) \;&:=\; \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \big|\; \mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbb{1} - T) \neq \{0\}\Big\} && \text{(espectro pontual)},\\
\sigma_c(T) \;&:=\; \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \big|\; \mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbb{1} - T) = \{0\} \;\text{ e } \mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - T) \text{ é subconjunto próprio denso de } \mathfrak{X}\Big\} && \text{(espectro contínuo)},\\
\sigma_r(T) \;&:=\; \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \big|\; \mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbb{1} - T) = \{0\} \;\text{ e } \mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - T) \text{ não é denso em } \mathfrak{X}\Big\} && \text{(espectro residual)}.
\end{aligned}$$

Está claro pelas definições acima que

$$\sigma(T) \;=\; \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \,, \tag{40.125}$$

sendo a união acima uma união disjunta. Os vários tipos de espectro descritos acima serão ilustrados em exemplos apresentados mais abaixo (Seção 40.6.2, página 2281), aos quais o leitor poderá passar agora, se o desejar, mas para a uma melhor compreensão dos mesmos precisamos antes de alguns resultados gerais da teoria espectral.

• **O operador resolvente e propriedades topológicas do espectro**

Se um número complexo λ pertence ao conjunto resolvente de $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$, define-se o *operador resolvente de T calculado em λ*, denotado por $R_\lambda(T)$, por

$$R_\lambda(T) \,:=\, (\lambda\mathbb{1} - T)^{-1} \,.$$

Pelas hipóteses $R_\lambda(T)$ é bijetor para todo $\lambda \in \rho(T)$ e é um elemento de $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ (pelo Teorema da Aplicação Inversa, Teorema 40.8, página 2193).

Muitas propriedades de $\rho(T)$ (e, portanto de $\sigma(T)$) podem ser derivadas de propriedades de seus operadores resolventes. Por exemplo, mostraremos mais adiante que $\rho(T)$ é sempre um conjunto aberto de $\mathbb{C}$ (e, portanto, $\sigma(T)$ é sempre um conjunto fechado de $\mathbb{C}$) e mostraremos também que $\rho(T)$ nunca é igual a todo $\mathbb{C}$ (e, portanto, $\sigma(T)$ nunca é vazio).

Recordemos dois resultados sobre resolventes.

[43] Vale aqui advertir o estudante que alguns textos, como [412], [419] e [273], adotam uma definição diferente de espectro contínuo. Nossa definição segue textos como [548], [296] e outros.

Proposição 40.66 (Primeira identidade do resolvente) *Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$. Se λ e μ pertencem ao conjunto resolvente $\rho(T)$ de T, então*

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) \;=\; (\mu-\lambda) R_\lambda(T) R_\mu(T)\,. \tag{40.126}$$

□

Proposição 40.67 (Segunda identidade do resolvente) *Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Banach e sejam T, $U \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$. Se $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(U)$, então vale*

$$R_\lambda(T) - R_\lambda(U) \;=\; R_\lambda(T)\,\big(T-U\big)\,R_\lambda(U)\,. \tag{40.127}$$

Essa relação é denominada segunda identidade do resolvente. *A relação (40.127) implica também que*

$$R_\lambda(T) - R_\lambda(U) \;=\; R_\lambda(U)\,\big(T-U\big)\,R_\lambda(T)\,. \tag{40.128}$$

□

As demonstrações das duas proposições acima são idênticas àquelas da Proposição 40.33, página 2222, e da Proposição 40.34, página 2222, respectivamente.

Iremos agora estabelecer uma série de resultados sobre propriedades do operador resolvente que culminarão com a Proposição 40.70. Todos são essencialmente casos particulares de resultados demonstrados acima no caso geral de álgebras de Banach com unidade.

Lema 40.11 *Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$. Se λ e μ pertencem ao conjunto resolvente $\rho(T)$ de T e $|\lambda-\mu| < \|R_\mu(T)\|^{-1}$, então*

$$R_\lambda(T) \;=\; R_\mu(T)\left[\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu-\lambda)^n \left(R_\mu(T)\right)^n\right] \;=\; \left[\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu-\lambda)^n \left(R_\mu(T)\right)^n\right] R_\mu(T)\,. \tag{40.129}$$

□

O lema acima é um caso particular do Lema 40.4, página 2223, para álgebras de Banach com unidade gerais, e por isso sua demonstração é dispensada.

Proposição 40.68 *Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$. Então, $\rho(T)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, o que implica que $\sigma(T)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{C}$.* □

Novamente, a proposição acima é um caso particular da Proposição 40.36, página 2223, para álgebras de Banach com unidade gerais e, por isso, sua demonstração é dispensada. A Proposição que segue é o análogo da Proposição 40.37, página 2224, mas suas demonstrações diferem por um ligeiro detalhe.

Proposição 40.69 *Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$. Então, para cada $x \in \mathfrak{X}$ e para cada $\ell \in \mathfrak{X}^\dagger$, funcional linear contínuo em $\mathfrak{X}$, a função de variável complexa $f_{x,\ell} : \rho(T) \to \mathbb{C}$ dada por $f_{x,\ell}(\lambda) := \ell\big(R_\lambda(T)x\big)$ é holomórfica (i.e. analítica) em cada componente conexa de $\rho(T)$.* □

Prova. Seja $\mu \in \rho(T)$ e λ tal que $|\lambda-\mu| < \big\|R_\mu(T)\big\|^{-1}$. Tem-se por (40.129) que $\lambda \in \rho(T)$ e

$$f_{x,\ell}(\lambda) \;:=\; \ell\big(R_\lambda(T)x\big) \;\stackrel{(40.129)}{=}\; \ell\left(\left(R_\mu(T) + \sum_{n=1}^{\infty}(\mu-\lambda)^n \big(R_\mu(T)\big)^{n+1}\right)x\right)$$

$$\stackrel{\text{continuidade}}{=}\; \ell\big(R_\mu(T)x\big) + \sum_{n=1}^{\infty}(\mu-\lambda)^n \ell\Big(\big(R_\mu(T)\big)^{n+1}x\Big)\,. \tag{40.130}$$

Como

$$\Big|\ell\Big(\big(R_\mu(T)\big)^{n+1}x\Big)\Big| \;\le\; \|\ell\|\,\Big\|\big(R_\mu(T)\big)^{n+1}x\Big\| \;\le\; \|\ell\|\,\big\|R_\mu(T)\big\|^{n+1}\,\|x\|$$

segue de $|\lambda-\mu| < \|R_\mu(T)\|^{-1}$ que a última série em (40.130) é absolutamente convergente e, portanto, define uma função holomórfica na bola aberta de raio $\|R_\mu(T)\|^{-1}$ centrada em μ, a qual pode, pelos procedimentos usuais, ser estendida analiticamente à componente conexa de $\rho(T)$ que contém μ. ■

A proposição seguinte é importante, pois finalmente estabelece que o espectro de um operador contínuo em um espaço de Banach nunca é vazio. Trata-se essencialmente de um caso particular da Proposição 40.38 da página 2224, com a ligeira diferença que na demonstração substituímos as funções f_ℓ pelas funções $f_{x,\ell}$ definidas acima.

Proposição 40.70 *Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$. Então, $\sigma(T)$ é um conjunto não-vazio e está contido na bola fechada de raio $\|T\|$ centrada em 0: $\{z \in \mathbb{C}\,|\,|z| \le \|T\|\}$.* □

Prova. Vamos supor que $\rho(T) = \mathbb{C}$. Então, pela Proposição 40.69, para todo $x \in \mathfrak{X}$ e para todo ℓ funcional linear contínuo em $\mathfrak{X}$ a função $f_{x,\ell}(\lambda) := \ell(R_\lambda(T)x)$ seria inteira, isto é, analítica em toda parte. Agora, para $|\lambda| > \|T\|$

$$R_\lambda(T) \;=\; (\lambda\mathbb{1}-T)^{-1} \;=\; \lambda^{-1}(\mathbb{1}-\lambda^{-1}T)^{-1} \;=\; \lambda^{-1}\left[\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}T^n\right]\,, \tag{40.131}$$

de acordo com (40.54) da Proposição 40.26, página 2217, pois pela hipótese $\|\lambda^{-1}T\| < 1$. Assim,

$$\|R_\lambda(T)\| \;\le\; \frac{1}{|\lambda|}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\|T\|}{|\lambda|}\right)^n\right] \;=\; \frac{1}{|\lambda|-\|T\|}\,.$$

Isso mostra que $\lim_{|\lambda|\to\infty}\big\|R_\lambda(T)\big\| = 0$. Logo, como $|f_{x,\ell}(\lambda)| = \Big|\ell\big(R_\lambda(T)x\big)\Big| \le \|\ell\|\,\big\|R_\lambda(T)\big\|\,\|x\|$, segue que $\lim_{|\lambda|\to\infty}|f_{x,\ell}(\lambda)| = 0$. Com isso, concluímos que $f_{x,\ell}(\lambda)$ é uma função inteira, limitada e converge a zero no infinito. Pelo bem conhecido Teorema de Liouville[44] da Análise Complexa, isso implica que $f_{x,\ell}(\lambda)$ é identicamente nula para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Se, porém, $\ell\big(R_\lambda(T)x\big)$ for nulo para cada funcional linear contínuo ℓ então, pelo Corolário 40.2, página 2187, teríamos $R_\lambda(T)x = 0$ para todo $x \in \mathfrak{X}$, um absurdo, pois $R_\lambda(T)$ é a inversa de um operador. Assim concluímos que $\rho(T)$ não pode ser igual a todo $\mathbb{C}$ e, portanto, $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Pela Proposição 40.26, página 2217, a expressão (40.131) mostra que $R_\lambda(T)$ está definida para todo $|\lambda| > \|T\|$. Assim, $\{z \in \mathbb{C}\,|\,|z| > \|T\|\} \subset \rho(T)$. Logo, $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C}\,|\,|z| \le \|T\|\}$. ■

40.6.1 O Espectro de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert

Vamos a partir de agora especializar nossa discussão para operadores agindo em espaços de Hilbert. Para apresentarmos nossos próximos resultados, vamos introduzir a seguinte notação: se $S \subset \mathbb{C}$ denotamos por S^{cc} o conjunto dos elementos complexo-conjugados de S: $S^{cc} := \{z \in \mathbb{C}\,|\,\overline{z} \in S\}$.

Se T é um operador limitado agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então pelo item 7 do Teorema 40.11, página 2197 temos que se $\lambda \in \rho(T)$, vale $((\lambda\mathbb{1}-T)^*)^{-1} = ((\lambda\mathbb{1}-T)^{-1})^*$, o que significa que $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$ e $R_\lambda(T)^* = R_{\overline{\lambda}}(T^*)$. Provamos então o seguinte:

Proposição 40.71 *Se T é um operador limitado agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então $R_\lambda(T)^* = R_{\overline{\lambda}}(T^*)$ para todo $\lambda \in \rho(T)$, o que implica $\rho(T^*) = \rho(T)^{cc}$ e $\sigma(T^*) = \sigma(T)^{cc}$.* □

• **O espectro residual e o pontual em um espaço de Hilbert**

A próxima proposição detalha um pouco mais a relação estabelecida na Proposição 40.71 entre $\sigma(T)$ e $\sigma(T^*)$. Dela extrairemos a informação importante que operadores autoadjuntos agindo em espaços de Hilbert não têm espectro residual.

[44] Joseph Liouville (1809–1882).

Proposição 40.72 *Se T é um operador limitado agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então*

1. $\sigma_r(T) \subset \sigma_p(T^*)^{cc}$.
2. $\sigma_p(T) \subset \sigma_p(T^*)^{cc} \cup \sigma_r(T^*)^{cc}$. □

Prova. Se $\lambda \in \sigma_r(T)$ então $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - T)$ não é denso em $\mathcal{H}$. Então, existe $\phi \in \mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - T)^{\perp}$ não-nulo. Portanto, $\langle \phi,\ (\lambda\mathbb{1} - T)\psi\rangle = 0$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Isso diz que $\langle(\overline{\lambda}\mathbb{1} - T^*)\phi,\ \psi\rangle = 0$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$, o que implica $(\overline{\lambda}\mathbb{1} - T^*)\phi = 0$ e, portanto, ϕ é um autovetor de T^* com autovalor $\overline{\lambda}$. Assim, $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. Isso provou o item 1.

Se $\lambda \in \sigma_p(T)$, então $\mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbb{1} - T)$ é um subespaço não-trivial de $\mathcal{H}$ formado pelos autovetores de T com autovalor λ. Isso naturalmente implica que $\langle(\overline{\lambda}\mathbb{1} - T^*)\psi,\ \phi\rangle = \langle\psi,\ (\lambda\mathbb{1} - T)\phi\rangle = 0$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$ e todo $\phi \in \mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbb{1} - T)$. Portanto, $\mathrm{Ran}\,(\overline{\lambda}\mathbb{1} - T^*)$ é um subconjunto de $\mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbb{1} - T)^{\perp}$. Caso $\overline{\lambda}$ não seja um autovalor de T^*, ou seja, caso $\mathrm{Ker}\,(\overline{\lambda}\mathbb{1} - T^*) = \{0\}$, então isso diz-nos que $\overline{\lambda} \in \sigma_r(T^*)$ (vide a definição de espectro residual à página 2277). Assim, ou $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$ ou $\overline{\lambda} \in \sigma_r(T^*)$ e, portanto, $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$. Isso provou o item 2. ■

A proposição acima pode ser generalizada para espaços de Banach, mas não trataremos disso aqui. Ainda no contexto de espaços de Hilbert temos o seguinte corolário importante que afirma que o espectro de um operador autoadjunto é apenas a união do espectro pontual com o contínuo.

Corolário 40.21 *Se A é um operador limitado e autoadjunto agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então seu espectro residual é vazio.* □

Prova. Pela Proposição 40.72, página 2280, temos $\sigma_r(A) \subset \sigma_p(A)$, pois $A = A^*$ e pois $\sigma_p(A)^{cc} = \sigma_p(A)$, já que na Proposição 40.17, página 2205, provamos que o espectro pontual de um operador autoadjunto agindo em um espaço de Hilbert é real. Agora, pela definição, os espectros residual e pontual são disjuntos. Logo, $\sigma_r(A) = \emptyset$. ■

• **O espectro de operadores autoadjuntos em espaços de Hilbert é real**

Devido a sua importância no contexto da Física Quântica, existe um particular interesse nas propriedades espectrais de operadores autoadjuntos (limitados ou não) agindo em espaços de Hilbert. Na Proposição 40.17, página 2205, já provamos que o espectro pontual de tais operadores é um subconjunto da reta real. O mesmo vale para o espectro completo, como vemos no próximo teorema.

Teorema 40.29 *Se A é um operador limitado e autoadjunto agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então seu espectro é um subconjunto fechado da reta real, mais precisamente, é um subconjunto fechado de $[-\|A\|,\ \|A\|]$.* □

Prova. Esse teorema é um caso particular da Proposição 40.44, página 2230. Apresentamos uma segunda demonstração que usa a estrutura do espaço de Hilbert.

Seja $z \in \mathbb{C}$ escrito na forma $z = x + iy$, com $x,\ y \in \mathbb{R}$. Se considerarmos o operador $A_z := z\mathbb{1} - A$, é fácil verificar que

$$\|A_z\psi\|^2 \ = \ |y|^2\|\psi\|^2 + \|(x\mathbb{1} - A)\psi\|^2\,. \tag{40.132}$$

De fato,

$$\|A_z\psi\|^2 \ = \ \Big\langle iy\psi + (x\mathbb{1} - A)\psi,\ \ iy\psi + (x\mathbb{1} - A)\psi\Big\rangle$$

$$= \ |y|^2\|\psi\|^2 + \|(x\mathbb{1} - A)\psi\|^2 \underbrace{-iy\big\langle\psi,\ (x\mathbb{1} - A)\psi\big\rangle + iy\big\langle(x\mathbb{1} - A)\psi,\ \psi\big\rangle}_{=0 \text{ pois } (x\mathbb{1} - A) \text{ é autoadjunto}}\,.$$

De (40.132), concluímos que

$$\|A_z\psi\| \ \geq \ |y|\,\|\psi\| \tag{40.133}$$

e que (trocando $y \to -y$)

$$\|A_{\overline{z}}\psi\| \ \geq \ |y|\,\|\psi\| \tag{40.134}$$

para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Assim, vemos que se $y \neq 0$, então $A_z\psi$ é nulo se e somente se $\psi = 0$, ou seja, $\mathrm{Ker}\,(A_z) = \{0\}$ e A_z é injetora como aplicação de $\mathcal{H}$ em $\mathrm{Ran}\,(A_z)$. Portanto, existe $A_z^{-1} : \mathrm{Ran}\,(A_z) \to \mathcal{H}$. Mostremos que essa aplicação é limitada. Seja $\phi \in \mathrm{Ran}\,(A_z)$ e escrevamos $\phi = A_z\psi$ para algum $\psi \in \mathcal{H}$. Teremos por (40.133) que $\|\phi\| \geq |y|\,\|A_z^{-1}\phi\|$, de onde concluímos que $\|A_z^{-1}\| \leq |y|^{-1}$, o que prova que A_z^{-1} é limitada. Com isso, podemos evocar a Proposição 40.25, página 2217, e afirmar que $\mathrm{Ran}\,(A_z)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$ (caso $y \neq 0$).

Vamos agora supor que o subespaço fechado $\mathrm{Ran}\,(A_z)$ seja diferente de $\mathcal{H}$. Então, para cada $\chi \in \mathrm{Ran}\,(A_z)^{\perp}$ não-nulo teremos $\langle\chi,\ A_z\psi\rangle = 0$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Como $A_z^* = A_{\overline{z}}$, segue que $\langle A_{\overline{z}}\chi,\ \psi\rangle = 0$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$, o que implica $A_{\overline{z}}\chi = 0$. Ora, isso contraria (40.134), que vale para todo $\psi \in \mathcal{H}$, pois supomos χ não-nulo.

Logo, concluímos que $\mathrm{Ran}\,(A_z) = \mathcal{H}$ e como A_z é injetora, concluímos que $A_z^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ existe, sendo limitada pelo que vimos acima com $\|A_z^{-1}\| \leq |y|^{-1}$. É claro que $A_z^{-1} = R_z(A)$, o operador resolvente de A. Assim, estabelecemos que se $y \neq 0$ então $z = x + iy \in \rho(A)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, provando que $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Que $\sigma(A)$ é fechado e que $\sigma(A) \subset [-\|A\|,\ \|A\|]$ segue das Proposições 40.68 e 40.70. ■

40.6.2 Espectro em Espaços de Banach. Alguns Exemplos e Contraexemplos

Vamos agora ilustrar diversas das ideias e definições acima com alguns exemplos ilustrativos e instrutivos.

Exemplo 40.5 No caso em que $\mathcal{X}$ é o espaço de Hilbert de dimensão finita $\mathbb{C}^n$, temos $\mathcal{B}(X) = \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$, o conjunto das matrizes complexas $n \times n$. Nesse caso, se M é uma matriz complexa $n \times n$, $\sigma(M)$ é o conjunto de todos os números complexos tais que a matriz $\lambda\mathbb{1} - M$ não tem inversa. Ora, é bem sabido que uma matriz é não-inversível se e somente se seu determinante for nulo (vide Teorema 10.1, página 512). Logo, $\sigma(M) = \{\lambda \in \mathbb{C}|\ \det(\lambda\mathbb{1} - M) = 0\}$, ou seja, $\sigma(M)$ coincide com o conjunto das raízes do polinômio característico de M: $p_M(x) = \det(x\mathbb{1} - M)$, o qual, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, possui n raízes não necessariamente distintas no plano complexo. Assim, $\sigma(M)$ não é vazio (o que veremos ser verdade também para qualquer operador em um espaço de Banach). Se uma matriz $K \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ não possui inversa, sabe-se por um argumento geral que existe pelo menos um vetor não-nulo $v \in \mathbb{C}^n$ tal que $Kv = 0$ (vide Corolário 10.1 à página 511). Disso concluímos que se $\lambda \in \sigma(M)$ para uma matriz $M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ então existe $v \in \mathbb{C}^n$ não-nulo tal que $(\lambda\mathbb{1} - M)v = 0$, ou seja, $Mv = \lambda v$. Isso significa que λ é um autovalor de M (e v um autovetor de M com autovalor λ). Portanto, em $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{C},\ n)$ o espectro coincide com o conjunto de autovalores. ♦

No caso de espaços de Banach de dimensão infinita, o fato de um operador K não ser bijetor **não** necessariamente implica que exista um vetor não-nulo v tal que $Kv = 0$. Daí, no caso de espaços de Banach gerais, o espectro de um operador **não** necessariamente coincide com o conjunto de seus autovalores, ainda que a recíproca seja verdadeira: todo autovalor λ de um operador T é um elemento de seu espectro, já que $(\lambda\mathbb{1} - T)$ não é bijetora, pois tanto o vetor nulo 0 quanto um autovetor v não-nulo de T com autovalor λ são mapeados no vetor nulo 0. Veremos vários exemplos adiante mas, por ora, ilustremos isso com o seguinte.

Exemplo 40.6 Seja $C([a,\ b])$ o conjunto de todas as funções complexas contínuas definidas no intervalo $[a,\ b]$. Dotado da norma do supremo, $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,\ b]}|f(x)|$, $C([a,\ b])$ é, como já observamos anteriormente, um espaço de Banach, que denotaremos por $\mathcal{X}$. Seja $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ o operador $(Tf)(x) := xf(x)$, definido para toda função contínua f. Se T possuísse um autovetor não-nulo g com autovalor λ, valeria $(Tg)(x) = xg(x) = \lambda g(x)$ e teríamos $(\lambda - x)g(x) = 0$ para todo $x \in [a,\ b]$. Ora, isso é impossível se g é contínua e não-nula. Logo, T não tem autovalores. No entanto, $\big((\lambda\mathbb{1} - T)f\big)(x) = (\lambda - x)f(x)$ e disso vemos que $\lambda\mathbb{1} - T$ é bijetora em $\mathcal{X}$ se e somente se $\lambda \notin [a,\ b]$, pois uma função da forma $\frac{1}{\lambda - x}g(x)$ é um elemento de $C([a,\ b])$ para qualquer $g \in C([a,\ b])$ se e somente se $\lambda \notin [a,\ b]$. Concluímos disso que $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus [a,\ b]$ e que $\sigma(T) = [a,\ b]$. Esse operador T tem, portanto, um espectro não-trivial, mas não tem autovalores.

Como observamos, o conjunto $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - T) = \Big\{(\lambda - x)f(x),\ f \in C([a,\ b])\Big\}$ só não coincide com $C([a,\ b])$ se $\lambda \in [a,\ b]$. Porém, no caso em que $\lambda \in [a,\ b]$ tem-se que $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - T)$ é um subconjunto do subespaço $C_\lambda := \big\{h \in C([a,\ b])|\ h(\lambda) = 0\big\} \subset C([a,\ b])$. Entretanto, C_λ não é denso em $C([a,\ b])$, pois para todo $f \in C([a,\ b])$ e todo $h \in C_\lambda$, teremos $\|f - h\|_\infty \geq \big|f(\lambda)\big|$, mostrando que as funções de $C\big([a,\ b]\big)$ que não se anulam em λ não podem ser aproximadas na norma $\|\cdot\|_\infty$ por elementos de C_λ. Isso demonstra que $\sigma_c(T) = \emptyset$ e $\sigma_r(T) = [a,\ b]$. ♦

E. 40.42 *Exercício.* Se considerarmos o mesmo operador T agindo em $L^2\big([a,\,b]\,dx\big)$, teremos também $\sigma(T)=[a,\,b]$, mas valerá $\sigma_c(T)=[a,\,b]$ e $\sigma_r(T)=\emptyset$! Prove isso! O que acontece nos espaços de Banach $L^p\big([a,\,b]\,dx\big)$, $p\geq 1$? ✣

Exemplo 40.7 O Teorema da Aplicação Espectral, Teorema 40.15, tem uma aplicação direta na teoria das transformadas de Fourier em $\mathbb{R}^n$. Sabemos da discussão da Seção 38.2.2, página 2041, que a transformada de Fourier $\mathcal{F}$ é um operador unitário agindo no espaço de Hilbert $\mathcal{H}\equiv L^2(\mathbb{R}^n,\,d^nx)$. Assim, $\mathcal{F}$ é elemento da álgebra de Banach com unidade dos operadores limitados agindo em $\mathcal{H}$, ou seja, $\mathcal{F}\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Naquela mesma seção é também estabelecido que $\mathcal{F}$ satisfaz a relação algébrica $\mathcal{F}^4=\mathbb{1}$ (vide Teorema 38.3, página 2036). Logo, para o polinômio $p(z)=z^4$ vale, pelo Teorema da Aplicação Espectral, que $p\big(\sigma(\mathcal{F})\big)=\sigma\big(\mathcal{F}^4\big)=\sigma(\mathbb{1})=\{1\}$. Portanto, constatamos que $\sigma(\mathcal{F})$ consiste em raízes quárticas da unidade: $\sigma(\mathcal{F})\subset\{q\in\mathbb{C}|\,q^4=1\}=\{-1,\,+1,\,-i,\,+i\}$. Em (38.137), página 2047, estabelecemos que os elementos de $\{-1,\,+1,\,-i,\,+i\}$ são autovalores de $\mathcal{F}$. Logo,

$$\sigma(\mathcal{F})\;=\;\sigma_p(\mathcal{F})\;=\;\{-1,\,+1,\,-i,\,+i\}\qquad\text{e}\qquad\sigma_c(\mathcal{F})\;=\;\sigma_r(\mathcal{F})\;=\;\emptyset\,.$$

Para outras conclusões, vide ainda o Exercício E. 38.35, página 2046, e a discussão que se lhe segue. ♦

Exemplo 40.8 Seja $\mathcal{H}=\ell_2(\mathbb{N})$, o espaço de Hilbert das sequências de quadrado somável (introduzido nas Seções 24.5, página 1334, e 24.5.1, página 1336) e considere-se o seguinte operador definido no espaço de Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$:

$$S(a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,\ldots)\;:=\;(0,\,a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,\ldots)\,. \tag{40.135}$$

S é denominado *operador de "shift"*, ou *operador de deslocamento*. É um exercício elementar constatar que sua adjunta S^* é dada por

$$S^*(a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,\ldots)\;:=\;(a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,a_6,\,\ldots)\,. \tag{40.136}$$

É também elementar provar que $\|S\|=\|S^*\|=1$. Assim, pela Proposição 40.70, página 2279, $\sigma(S)$ e $\sigma(S^*)$ estão contidos na bola fechada de raio 1 centrada em 0.

Provemos que S não tem autovalores. Para tal, suponhamos por contradição que existam $(a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,\ldots)\in\ell_2(\mathbb{N})$ e $\lambda\in\mathbb{C}$ tais que $S(a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,\ldots)=\lambda(a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,\ldots)$. Isso significa que

$$\lambda(a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,\ldots)\;=\;(0,\,a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,\ldots)\,.$$

Se $\lambda=0$, isso implica que todos os a_j's são nulos. Se $\lambda\neq 0$, temos $\lambda a_1=0$, $\lambda a_2=a_1$, $\lambda a_3=a_2$ etc., Mas a primeira relação implica $a_1=0$, o que faz com que a segunda relação implique $a_2=0$ etc., e novamente temos que os a_j's são todos nulos. Assim, S só possui autovetores nulos, ou seja, não possui autovalores: $\sigma_p(S)=\emptyset$. Pelo item 1 da Proposição 40.72, página 2280, isso implica $\sigma_r(S^*)=\emptyset$.

Procuremos agora saber se S^* possui autovalores. Seja $(a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,\ldots)\in\ell_2(\mathbb{N})$ e $\lambda\in\mathbb{C}$ tais que

$$S^*(a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,\ldots)\;=\;\lambda(a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,\ldots)\,.$$

Isso significa que

$$\lambda(a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,\ldots)\;=\;(a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,a_6,\,\ldots)\,,$$

o que implica $a_2=\lambda a_1$, $a_3=\lambda a_2$, $a_4=\lambda a_3$, ou seja, $a_n=\lambda^{n-1}a_1$. Assim, os autovetores serão da forma

$$a_1(1,\,\lambda,\,\lambda^2,\,\lambda^3,\,\lambda^4,\,\ldots)\,.$$

Uma tal sequência é um elemento de $\ell_2(\mathbb{N})$ se e somente se $|\lambda|<1$. Concluímos que o espectro pontual de S^* é não-vazio e é igual ao disco aberto de raio 1 em $\mathbb{C}$ centrado em 0: $\sigma_p(S^*)=\{\lambda\in\mathbb{C}|\,|\lambda|<1\}$.

Vamos agora mostrar que espectro residual de S é não-vazio. Para $\lambda\in\mathbb{C}$ com $|\lambda|<1$, seja $v_{\overline{\lambda}}$ o autovetor de S^* com autovalor $\overline{\lambda}$ dado por $v_{\overline{\lambda}}=(1,\,\overline{\lambda},\,\overline{\lambda^2},\,\overline{\lambda^3},\,\overline{\lambda^4},\,\ldots)$. Temos $S^*v_{\overline{\lambda}}=\overline{\lambda}v_{\overline{\lambda}}$. Para todo $x\in\ell_2(\mathbb{N})$ teremos

$$\langle v_{\overline{\lambda}},\,(\lambda\mathbb{1}-S)x\rangle_{\ell_2(\mathbb{N})}\;=\;\langle(\overline{\lambda}\mathbb{1}-S^*)v_{\overline{\lambda}},\,x\rangle_{\ell_2(\mathbb{N})}\;=\;0\,.$$

Disso concluímos que para todo $x\in\ell_2(\mathbb{N})$ o vetor $(\lambda\mathbb{1}-S)x$ pertence ao subespaço ortogonal ao vetor $v_{\overline{\lambda}}$. Assim, $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1}-S)$ não é denso em $\ell_2(\mathbb{N})$ para nenhum $|\lambda|<1$ e, consequentemente $\{\lambda\in\mathbb{C}|\,|\lambda|<1\}\subset\sigma_r(S)$. Agora, pelo item 1 da Proposição 40.72, página 2280, tem-se também $\sigma_r(S)\subset\sigma_p(S^*)^{cc}=\{\lambda\in\mathbb{C}|\,|\lambda|<1\}$. Logo, $\sigma_r(S)=\{\lambda\in\mathbb{C}|\,|\lambda|<1\}$.

Concluímos até agora que $\sigma_p(S)=\emptyset$, $\sigma_r(S)=\{\lambda\in\mathbb{C}|\,|\lambda|<1\}$, $\sigma_p(S^*)=\{\lambda\in\mathbb{C}|\,|\lambda|<1\}$ e $\sigma_r(S^*)=\emptyset$ (pelo item 1 da Proposição 40.72, página 2280, dado que $\sigma_p(S)=\emptyset$). Como $\sigma(S)$ é fechado, contido em $\{\lambda\in\mathbb{C}|\,|\lambda|\leq 1\}$ e contém $\sigma_r(S)=\{\lambda\in\mathbb{C}|\,|\lambda|<1\}$, concluímos que $\sigma(S)=\{\lambda\in\mathbb{C}|\,|\lambda|\leq 1\}$. Analogamente, $\sigma(S^*)=\{\lambda\in\mathbb{C}|\,|\lambda|\leq 1\}$. Como a união (40.125) é disjunta, concluímos que $\sigma_c(S)=\sigma_c(S^*)=\{\lambda\in\mathbb{C}|\,|\lambda|=1\}$. Temos, finalmente, o seguinte quadro:

$$\sigma(S)\;=\;\big\{\lambda\in\mathbb{C}\big|\,|\lambda|\leq 1\big\}\,,\quad\sigma_p(S)\;=\;\emptyset\,,\qquad\sigma_c(S)\;=\;\big\{\lambda\in\mathbb{C}\big|\,|\lambda|=1\big\}\,,\quad\sigma_r(S)\;=\;\big\{\lambda\in\mathbb{C}\big|\,|\lambda|<1\big\}\,,$$

$$\sigma(S^*)\;=\;\big\{\lambda\in\mathbb{C}\big|\,|\lambda|\leq 1\big\}\,,\quad\sigma_p(S^*)\;=\;\big\{\lambda\in\mathbb{C}\big|\,|\lambda|<1\big\}\,,\quad\sigma_c(S^*)\;=\;\big\{\lambda\in\mathbb{C}\big|\,|\lambda|=1\big\}\,,\quad\sigma_r(S^*)\;=\;\emptyset\,.$$

♦

Exemplo 40.9 *(Extraído de [412]).* Seja $\mathfrak{X}=\ell_\infty(\mathbb{N})$, o espaço de Banach das sequências limitadas e considere-se o seguinte operador definido em $\ell_\infty(\mathbb{N})$:

$$T'(a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,\ldots)\;:=\;(0,\,a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,\ldots)\,.$$

T' é denominado *operador de "shift"* (mas note-se que difere de S, definido acima, pois aquele era definido apenas em $\ell_2(\mathbb{N})$). De maneira análoga ao que fizemos acima para o operador S, mostra-se que T' não possui autovalores: $\sigma_p(T')=\emptyset$.

Vamos mostrar agora que todo $\lambda\in\mathbb{C}$ com $|\lambda|=1$ pertence ao espectro residual de T'. Sejam $a=\{a_n\}$ e $b=\{b_n\}$ duas sequências de $\ell_\infty(\mathbb{N})$ tais que $a=(\lambda\mathbb{1}-T')b$. Isso significa que

$$(a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,\ldots)\;=\;(\lambda b_1,\,\lambda b_2-b_1,\,\lambda b_3-b_2,\,\lambda b_4-b_3,\,\lambda b_5-b_4,\,\ldots)\,.$$

Assim, teremos $a_1=\lambda b_1$, $a_2=\lambda b_2-b_1$, $a_3=\lambda b_3-b_2$, $a_4=\lambda b_4-b_3$ etc. Como $|\lambda|=1$, tem-se $\lambda^{-1}=\overline{\lambda}$ e essas relações implicam

$$b_n\;=\;\big(\overline{\lambda}\big)^{n+1}\sum_{m=1}^{n}\lambda^m a_m\,, \tag{40.137}$$

como facilmente se constata. Se $c\in\ell_\infty(\mathbb{N})$, tem-se para qualquer $n\in\mathbb{N}$ que

$$\|c-a\|_\infty\;=\;\sup_{m\in\mathbb{N}}|c_m-a_m|\;\geq\;|c_n-a_n|\;=\;\big|\lambda^n(c_n-a_n)\big|\;=\;\big|\lambda^n c_n-\lambda^n a_n\big|$$

$$\geq\;\big|\mathrm{Re}\,(\lambda^n c_n-\lambda^n a_n)\big|\;\geq\;\mathrm{Re}\,(\lambda^n c_n-\lambda^n a_n)\;=\;\mathrm{Re}\,(\lambda^n c_n)-\mathrm{Re}\,(\lambda^n a_n)\,,$$

onde, acima, usamos que $|\lambda^n|=1$ pois $|\lambda|=1$ e que $|z|\geq|\mathrm{Re}\,(z)|\geq\mathrm{Re}\,(z)$ para qualquer $z\in\mathbb{C}$. Concluímos disso que

$$\mathrm{Re}\,(\lambda^n a_n)\;\geq\;\mathrm{Re}\,(\lambda^n c_n)-\|c-a\|_\infty\,. \tag{40.138}$$

Vamos agora tomar c_n da forma $c_n=\big(\overline{\lambda}\big)^n$ e seja $a\in\ell_\infty(\mathbb{N})$ contido na bola aberta de raio $1/2$ centrada em c, ou seja, $\|c-a\|_\infty<1/2$. Por (40.138), teremos que $\mathrm{Re}\,(\lambda^n a_n)\geq 1-1/2=1/2$. Dessa forma, vemos que se b é tal que $a=(\lambda\mathbb{1}-T')b$ então, por (40.137), teremos $\lambda^{n+1}b_n=\sum_{m=1}^{n}\lambda^m a_m$, o que implica

$$|b_n|\;=\;\big|\lambda^{n+1}b_n\big|\;\geq\;\big|\mathrm{Re}\,\big(\lambda^{n+1}b_n\big)\big|\;\geq\;\mathrm{Re}\,\big(\lambda^{n+1}b_n\big)\;\overset{(40.137)}{=}\;\mathrm{Re}\left(\sum_{m=1}^{n}\lambda^m a_m\right)\;=\;\sum_{m=1}^{n}\mathrm{Re}\,(\lambda^m a_m)\;\geq\;\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2}\;=\;\frac{n}{2}\,.$$

Agora, a relação $|b_n|\geq n/2$ não pode ser satisfeita se b é uma sequência limitada (ou seja, um elemento de $\ell_\infty(\mathbb{N})$). Concluímos que a bola aberta de raio $1/2$ centrada no elemento $c\in\ell_\infty(\mathbb{N})$ dado por $c_n=\big(\overline{\lambda}\big)^n$ não pode estar na imagem de $\lambda\mathbb{1}-T'$ e, portanto, a imagem de $\ell_\infty(\mathbb{N})$ por esse operador não é densa em $\ell_\infty(\mathbb{N})$. Concluímos, assim, que $\sigma_r(T')$ contém o círculo unitário $\{\lambda\in\mathbb{C}|\,|\lambda|=1\}$. É possível provar (vide [412]) que $\sigma_r(T')=\{\lambda\in\mathbb{C}|\,|\lambda|\leq 1\}$. ♦

Exemplo 40.10 Denotemos por W o operador de Volterra[45] definido por $(Wf)(x):=\int_a^x f(y)\,dy$, agindo no espaço de Banach $C([a,\,b])$ das funções contínuas do intervalo compacto $[a,\,b]\subset\mathbb{R}$ dotado da norma do supremo, $\|f\|_\infty:=\sup_{x\in[a,\,b]}|f(x)|$, $f\in C([a,\,b])$. Esse operador já foi discutido no Exercício E. 40.30, página 2229. Veremos à página 2300 que esse operador é um exemplo de um operador compacto, mas isso não será usado aqui.

Vamos provar que esse operador de Volterra não tem autovalores. Suponhamos que exista $\lambda\in\mathbb{C}$ e uma função $g\in C([a,\,b])$ não-nula tais que $Wg=\lambda g$, ou seja, $\int_a^x g(y)\,dy=\lambda g(x)$. Essa igualdade indica que g é diferenciável e tem-se $g(x)=\lambda g'(x)$ para todo $x\in[a,\,b]$. Para $\lambda=0$ sairia disso que $g(x)=0$ para todo $x\in[a,\,b]$, situação que já descartamos. Se $\lambda\neq 0$ a equação diferencial $g'(x)=\lambda^{-1}g(x)$ tem como solução $g(x)=g(a)e^{\lambda^{-1}(x-a)}$. Porém, de $g(x)=\lambda^{-1}\int_a^x g(y)\,dy$ vemos que $g(a)=0$ e novamente teríamos $g(x)=0$ para todo $x\in[a,\,b]$.

Assim, o operador $(Wf)(x)=\int_a^x f(y)\,dy$ agindo em $C([a,\,b])$ é um exemplo de operador agindo em um espaço de Banach que não possui autovalores. Como todo operador agindo em um espaço de Banach, W tem um espectro não-vazio mas, como vimos, seu espectro pontual é vazio. Vamos agora provar que $\sigma(W)=\{0\}$. Para $\lambda\neq 0$, seja f diferenciável e seja $g\in\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1}-W)$ tal que $(\lambda\mathbb{1}-W)f=g$, ou seja, $g(x)=\lambda f(x)-\int_a^x f(y)dy$, o que implica $g(a)=\lambda f(a)$. Como f é diferenciável, g também o é e tem-se $g'=\lambda f'-f$. A solução dessa equação diferencial para f com a condição $f(a)=g(a)/\lambda$ é

$$f(x)\;=\;\frac{1}{\lambda}g(x)+\frac{1}{\lambda^2}e^{\frac{x}{\lambda}}\int_a^x e^{-\frac{y}{\lambda}}g(y)\,dy\,, \tag{40.139}$$

[45] Vito Volterra (1860–1940).

como facilmente se mostra. Definindo o operador de multiplicação $E_\lambda : C([a,\ b]) \to C([a,\ b])$ por $(E_\lambda h)(x) := e^{-\frac{x}{\lambda}} h(x)$ a expressão (40.139) está dizendo-nos que para $\lambda \neq 0$, o operador $(\lambda\mathbb{1} - W)^{-1}$, restrito ao espaço $C^1([a,\ b])$ das funções contínuas e diferenciáveis (como a função g acima), é dado por

$$(\lambda\mathbb{1} - W)^{-1} \restriction_{C^1([a,\ b])} \;=\; \frac{1}{\lambda}\mathbb{1} + \frac{1}{\lambda^2} E_\lambda^{-1} W E_\lambda \;, \tag{40.140}$$

sendo que, evidentemente, $E_\lambda^{-1} = E_{-\lambda}$. O operador ao lado direito em (40.140) é limitado e $C^1([a,\ b])$ é denso em $C([a,\ b])$. Logo, $(\lambda\mathbb{1} - W)^{-1}$ existe em toda parte, valendo, portanto, para o operador resolvente $R_\lambda(W)$ a expressão

$$R_\lambda(W) \;=\; \frac{1}{\lambda}\mathbb{1} + \frac{1}{\lambda^2} E_\lambda^{-1} W E_\lambda \;, \qquad \forall \lambda \neq 0 \;,$$

provando que se $\lambda \neq 0$ então λ é um elemento do conjunto resolvente de W: $\lambda \in \rho(W)$. Isso estabeleceu que $\rho(W) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e que $\sigma(W) = \{0\}$ (fato já provado com outros recursos no Exercício E. 40.30, página 2229).

No caso $\lambda = 0$ a imagem de $\lambda\mathbb{1} - W = -W$ é o conjunto C_a das funções diferenciáveis em $[a,\ b]$ que se anulam em a. Porém, C_a não é denso em $C([a,\ b])$, pois se $f \in C([a,\ b])$ e $h \in C_a$, então $\|f - h\|_\infty \geq |f(a)|$, revelando que nem todo elemento de $C([a,\ b])$ pode ser aproximado por elementos de C_a. Logo, $\{0\}$ pertence ao espectro residual $\sigma_r(W)$ e não ao espectro contínuo $\sigma_c(W)$, o qual, consequentemente, deve ser vazio. Resumindo,

$$\sigma(W) \;=\; \{0\}, \qquad \sigma_p(W) \;=\; \emptyset, \qquad \sigma_c(W) \;=\; \emptyset \quad \text{e} \quad \sigma_r(W) \;=\; \{0\} \,. \tag{40.141}$$

Notemos, por fim que $|(Wf)(x)| \leq \|f\|_\infty (x - a)$ e, portanto $\|W\| \leq b - a$. Para a função constante igual a 1, vale $(W1)(x) = x - a$. Logo $\|W1\|_\infty = b - a$ e como $\|1\|_\infty = 1$, segue que $\|W\| \geq b - a$, provando que $\|W\| = b - a$. Concluímos que W tem um raio espectral nulo (por (40.141)), mas uma norma não-nula. ⧫

Exemplo 40.11 Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo separável e $\{\phi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ uma base ortonormal completa em $\mathcal{H}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja P_k o projetor ortogonal sobre ϕ_k, de sorte que para cada $x \in \mathcal{H}$ tenha-se $P_k x = \langle \phi_k,\ x\rangle_{\mathbb{C}} \phi_k$.

Seja F um subconjunto infinito fechado de $[0,\ 1]$ tal que $1 \in F$ e tal que F possua um subconjunto infinito contável $\mathbb{D}_F$ denso em F e com[46] $1 \in \mathbb{D}_F$. O conjunto $\mathbb{D}_F$ é contável e seja $\mathbb{D}_F = \{r_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ uma contagem de $\mathbb{D}_F$ (isso significa que a aplicação $r : \mathbb{N} \to \mathbb{D}_F$ dada por $\mathbb{N} \ni n \mapsto r_n \in \mathbb{D}_F$ é bijetora). Defina-se o operador linear A por $A := \sum_{k=1}^{\infty} r_k P_k$, ou seja,

$$Ax \;:=\; \sum_{k=1}^{\infty} r_k \langle \phi_k,\ x\rangle_{\mathbb{C}} \phi_k \;.$$

É claro que o domínio de definição de A é todo $\mathcal{H}$, pois $\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} r_k \langle \phi_k,\ x\rangle_{\mathbb{C}} \phi_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |r_k|^2 \big|\langle \phi_k,\ x\rangle_{\mathbb{C}}\big|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \big|\langle \phi_k,\ x\rangle_{\mathbb{C}}\big|^2 = \|x\|^2 < \infty$, onde usamos o fato que $0 \leq r_k \leq 1$. Isso implica que A está definido para todo $x \in \mathcal{H}$ e implica também que $\|A\| \leq 1$. Em verdade, vale $\|A\| = 1$, pois se $m \in \mathbb{N}$ é tal que $r_m = 1$ (isso é sempre possível, pois $1 \in \mathbb{D}_F$ e $1 \in F$, por hipótese), então $A\phi_m = \phi_m$.

Como os r_k's são reais, é elementar ver que A é autoadjunto: $A = A^*$.

É também claro que os elementos de $\mathbb{D}_F$ são autovalores de A, pois para cada $k \in \mathbb{N}$ vale $A\phi_k = r_k \phi_k$. É fácil ver que $\sigma_p(A) = \mathbb{D}_F$, pois se $\lambda \in [0,\ 1] \setminus \mathbb{D}_F$ é tal que existe $u \in \mathcal{H}$ é tal que $Au = \lambda u$, então valerá $0 = \sum_{k=1}^{\infty} (r_k - \lambda)\langle \phi_k,\ u\rangle_{\mathbb{C}} \phi_k$. Disso segue que para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se $(r_k - \lambda)\langle \phi_k,\ u\rangle_{\mathbb{C}} = 0$. Como $r_k - \lambda \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (pois $\lambda \in [0,\ 1] \setminus \mathbb{D}_F$), segue que $\langle \phi_k,\ u\rangle_{\mathbb{C}} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, implicando $u = 0$.

Do exposto acima concluímos que $\mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbb{1} - A) = \{0\}$ se e somente se $\lambda \in [0,\ 1] \setminus \mathbb{D}_F$. Para tais λ's temos, por (40.33), que $\overline{\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - A)} = \mathcal{H}$, ou seja, que $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - A)$ é denso em $\mathcal{H}$. Estudemos em qual caso $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - A)$ é subconjunto próprio de $\mathcal{H}$. Para $\lambda \in [0,\ 1] \setminus \mathbb{D}_F$ há dois casos a considerar.

Caso $\lambda \in [0,\ 1] \setminus F$. Se $\lambda \notin \overline{\mathbb{D}_F} = F$, então existe $\delta > 0$ tal que $|\lambda - r_k| > \delta$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $y \in \mathcal{H}$ defina-se $x := \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - r_k)^{-1} P_k y = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - r_k)^{-1} \langle \phi_k,\ y\rangle_{\mathbb{C}} \phi_k$. A soma à direita é convergente em $\mathcal{H}$ (e portanto define um vetor nesse espaço), pois $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda - r_k|^{-2} \big|\langle \phi_k,\ y\rangle_{\mathbb{C}}\big|^2 \leq \delta^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \big|\langle \phi_k,\ y\rangle_{\mathbb{C}}\big|^2 = \delta^{-2}\|y\|^2$. Agora, como $\big(\lambda\mathbb{1} - A\big)\phi_k = (\lambda - r_k)\phi_k$ para todo k, tem-se

$$\big(\lambda\mathbb{1} - A\big)x \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda - r_k)^{-1} \langle \phi_k,\ y\rangle_{\mathbb{C}} \big(\lambda\mathbb{1} - A\big)\phi_k \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \langle \phi_k,\ y\rangle_{\mathbb{C}} \phi_k \;=\; y \;,$$

estabelecendo que $y \in \mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - A)$ e, consequentemente, que $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - A) = \mathcal{H}$.

[46] As condições $1 \in F$ e $1 \in \mathbb{D}_F$ não são essenciais e são postas aqui por mera comodidade.

Temos, portanto, que se $\lambda \in [0,\ 1] \setminus F$, então $\mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbb{1} - A) = \{0\}$ e $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - A) = \mathcal{H}$, estabelecendo que $(\lambda\mathbb{1} - A) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é bijetor. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, Teorema 40.8, página 2193, a aplicação inversa $(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}$ é também contínua e, portanto, limitada. Assim, $\sigma(A) \subset F$. Com mais generalidade, temos também que $\sigma_c(A) \subset \sigma(A) \subset F$.

Caso $\lambda \in F \setminus \mathbb{D}_F$. Por hipótese $\overline{\mathbb{D}_F} = F$. Como $\lambda \in F$, então existem subsequências em $\mathbb{D}_F$ que convergem a λ. Em particular, é possível encontrar uma subsequência $\{r_{n_k},\ k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{D}_F$ tal que $0 < \big|\lambda - r_{n_k}\big| < 1/k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Seja $y = \sum_{k=1}^{\infty} \big|\lambda - r_{n_k}\big| \phi_{n_k}$. Trata-se de um elemento de $\mathcal{H}$ pois $\sum_{k=1}^{\infty} \big|\lambda - r_{n_k}\big|^2 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$. Se valer $y \in \mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - A)$, então $y = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda - r_j)\langle \phi_j,\ x\rangle_{\mathbb{C}} \phi_j$ para algum $x \in \mathcal{H}$, e teríamos $(\lambda - r_j)\langle \phi_j,\ x\rangle_{\mathbb{C}} = \big|\lambda - r_{n_k}\big|$, caso $j = n_k$ e $(\lambda - r_j)\langle \phi_j,\ x\rangle_{\mathbb{C}} = 0$ para j's que não sejam iguais a nenhum dos n_k's. Como, por hipótese, $(\lambda - r_j) \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, concluímos que $\langle \phi_j,\ x\rangle_{\mathbb{C}} = 0$ quando j não é nenhum dos n_k's e que $|\lambda - r_{n_k}|\big|\langle \phi_{n_k},\ x\rangle_{\mathbb{C}}\big| = |\lambda - r_{n_k}|$ para todo $k \in \mathbb{N}$, o que implica que $\big|\langle \phi_{n_k},\ x\rangle_{\mathbb{C}}\big| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Mas isso significa que $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \big|\langle \phi_{n_k},\ x\rangle_{\mathbb{C}}\big|^2$ e que essa série diverge, provando que x não existe enquanto elemento de $\mathcal{H}$. Assim, y não pode ser elemento de $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - A)$ e, portanto, $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - A)$ é denso em $\mathcal{H}$, mas é um subconjunto próprio de $\mathcal{H}$.

Isso estabeleceu que se $\lambda \in F \setminus \mathbb{D}_F$, então $\lambda \in \sigma_c(A)$, ou seja, que $F \setminus \mathbb{D}_F \subset \sigma_c(A)$. Agora, $\sigma_c(A) \subset \sigma(A) \subset F$ e $\sigma_p(A) = \mathbb{D}_F$. Como $\sigma_c(A)$ e $\sigma_p(A)$ são disjuntos, concluímos o seguinte:

$$\sigma_p(A) \;=\; \mathbb{D}_F, \quad \sigma_c(A) \;=\; F \setminus \mathbb{D}_F \quad \text{e} \quad \sigma(A) \;=\; \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \;=\; F \,.$$

Mencionemos alguns casos particulares de interesse.

1º $F = [0,\ 1]$ e $\mathbb{D}_F = \mathbb{Q} \cap [0,\ 1] \equiv \mathbb{Q}_1$, em cujo caso teremos $\sigma_p(A) = \mathbb{Q}_1$ (os racionais no intervalo $[0,\ 1]$), $\sigma_c(A) = [0,\ 1] \setminus \mathbb{Q}_1$ (os irracionais no intervalo $[0,\ 1]$) e $\sigma(A) = [0,\ 1]$.

2º $F = C_{1/3}$, o conjunto de Cantor ternário $C_{1/3}$ do intervalo $[0,\ 1]$ (apresentado e discutido na Seção 29.3, página 1483) e $\mathbb{D}_{C_{1/3}} = \mathbb{Q} \cap C_{1/3}$. O conjunto $C_{1/3}$ é fechado e o conjunto $\mathbb{Q} \cap C_{1/3}$ é denso em $C_{1/3}$, pois $C_{1/3}$ é composto por todos os elementos do intervalo $[0,\ 1]$ cuja representação na base 3 envolve apenas os dígitos 0 ou 2 (vide Proposição 29.10, página 1484). Portanto, todo elemento de $C_{1/3}$ pode ser aproximado por um número racional contendo finitos dígitos iguais a 2 e os demais nulos, sendo que tais racionais também são elementos de $C_{1/3}$, Assim, $\sigma_p(A) = \mathbb{Q} \cap C_{1/3}$, $\sigma_c(A) = C_{1/3} \setminus \mathbb{Q}$ e $\sigma(A) = C_{1/3}$.

3º O mesmo que o caso anterior com F sendo um conjunto de Cantor em $[0,\ 1]$ com medida de Lebesgue não-nula.

Os exemplos acima exibem casos simples de operadores autoadjuntos limitados cujo espectro é "exótico", como operadores que possuem espectro pontual denso ou que tenham espectro dado por um conjunto de Cantor, mesmo com medida de Lebesgue não-nula. No caso de operadores de Schrödinger, de interesse na Mecânica Quântica não-relativista, a existência de tais operadores tem sido muito estudada, assim como suas propriedades físicas. Vide *e.g.*, [113], [413] ou [415]. ⧫

40.7 O Lema da Raiz Quadrada em Espaços de Hilbert

Os resultados da Seção 40.3.8, página 2234, estabeleceram algumas condições suficientes para que um elemento de uma álgebra de Banach com unidade possua uma raiz quadrada. Na Proposição 40.48, página 2236, vimos que elementos autoadjuntos e positivos (i.e., com espectro positivo) de uma álgebra C* com unidade sempre possuem raízes quadradas autoadjuntas e positivas.

Vamos agora particularizar essa análise para operadores autoadjuntos agindo em espaços de Hilbert. O resultado que obtemos é o Lema da Raiz Quadrada, a seguir. Devemos informar o leitor que esse Lema pode ser também demonstrado por outros meios, a saber, por meio do Teorema Espectral para operadores autoadjuntos agindo em espaços de Hilbert (vide Seção 40.8.2, página 2309). A análise abaixo tem, porém, certas vantagens, por exemplo, por permitir demonstrar de modo relativamente simples que a raiz quadrada de um operador compacto e positivo é também um operador compacto.

• **Positividade de operadores em espaços de Hilbert**

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Recordemos que em uma álgebra com unidade, como $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, um elemento A é dito ser positivo se for autoadjunto e se $\sigma(A) \subset [0,\ \infty)$. Vamos começar estabelecendo condições equivalentes à positividade para operadores limitados agindo em espaços de Hilbert.

Proposição 40.73 *Seja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A \neq 0$. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

(a) Para todo $\psi \in \mathcal{H}$ vale $\langle \psi,\ A\psi\rangle \geq 0$.

(b) A é autoadjunto e positivo, ou seja $A = A^*$ e $\sigma(A) \subset [0,\ \infty)$.

(c) A é autoadjunto e $\left\| \mathbb{1} - \frac{1}{\|A\|} A \right\| \leq 1$.

(d) A é autoadjunto e existe C autoadjunto tal que $A = C^2$. □

Observação. Chamamos a atenção do estudante para o detalhe que o item *(a)* é o único onde não se supõe que A seja autoadjunta. ♣

Prova da Proposição 40.73. Vamos estabelecer as equivalências acima com alguma redundância.

A equivalência de (b), (c) e (d) foi estabelecida na Proposição 40.48, página 2236, no contexto mais geral de álgebras C* com unidade, como $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

$(b) \Rightarrow (a)$. Se A é autoadjunto e positivo, então o Teorema 40.21, página 2238, garante que existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $A = B^*B$. Logo, $\langle \psi,\ A\psi \rangle = \|B\psi\|^2 \geq 0$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$.

$(a) \Rightarrow (b)$. Suponhamos agora que $\langle \psi,\ A\psi \rangle \geq 0$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Provemos que A é autoadjunto. Evidentemente, $\langle \psi,\ A\psi \rangle$ é real para todo $\psi \in \mathcal{H}$ (por ser não-negativo). Agora, pela identidade de polarização nas formas (3.34) e (3.35) (página 278), temos para todos $\phi,\ \phi' \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
\langle A\phi',\ \phi \rangle &= \overline{\langle \phi,\ A\phi' \rangle} \\
&\overset{(3.34)}{=} \overline{\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} i^{-n} \Big\langle (\phi + i^n \phi'),\ A(\phi + i^n \phi') \Big\rangle} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} i^{+n} \Big\langle (\phi + i^n \phi'),\ A(\phi + i^n \phi') \Big\rangle \\
&= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} i^{+n} \Big\langle (i^{-n}\phi + \phi'),\ A(i^{-n}\phi + \phi') \Big\rangle \\
&\overset{(3.35)}{=} \langle \phi',\ A\phi \rangle \,,
\end{aligned}$$

mostrando que A é autoadjunto. Resta provar que $\sigma(A) \subset [0,\ \infty)$. Para todo $\lambda < 0$ e todo $\psi \in \mathcal{H}$ temos

$$\begin{aligned}
\big\| (\lambda\mathbb{1} - A)\psi \big\|^2 \;&=\; \big\langle \psi,\ (\lambda\mathbb{1} - A)(\lambda\mathbb{1} - A)\psi \big\rangle \;=\; \lambda^2 \|\psi\|^2 - \lambda\big(\langle \psi,\ A\psi \rangle + \langle A\psi,\ \psi \rangle \big) + \|A\psi\|^2 \\
&=\; \lambda^2 \|\psi\|^2 + 2|\lambda| \langle \psi,\ A\psi \rangle + \|A\psi\|^2 \;\geq\; \lambda^2 \|\psi\|^2 \,,
\end{aligned}$$

o que implica que $\mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbb{1} - A) = \{0\}$ e, portanto, que $\lambda\mathbb{1} - A$ é injetor. Logo, $\lambda\mathbb{1} - A$ é invertível como operador de $\mathcal{H}$ em $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - A)$. Como A é autoadjunto, seu espectro residual é vazio (Corolário 40.21, página 2280) e, assim, $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - A)$ é denso em $\mathcal{H}$. Mas se $\psi' \in \mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - A)$, a desigualdade acima afirma que $\big\| (\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}\psi' \big\|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} \big\| \psi' \big\|^2$ e, portanto, pelo Teorema BLT (Teorema 40.1, página 2175) $(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}$ pode ser estendido como operador limitado ao fecho de $\mathrm{Ran}\,(\lambda\mathbb{1} - A)$, que é $\mathcal{H}$. Isso afirma que $\lambda \notin \sigma(A)$ e, como A é autoadjunto, segue que $\sigma(A) \subset [0,\ \infty)$.

$(a) \Rightarrow (c)$. Evocando-se o Teorema 40.12, página 2207, tem-se que

$$\left\| \mathbb{1} - \frac{A}{\|A\|} \right\| \;=\; \sup_{\phi \in \mathcal{H},\ \|\phi\| = 1} \left| \left\langle \phi,\ \left(\mathbb{1} - \frac{A}{\|A\|} \right) \phi \right\rangle \right| \;=\; \sup_{\phi \in \mathcal{H},\ \|\phi\| = 1} \left| 1 - \frac{\langle \phi,\ A\phi \rangle}{\|A\|} \right| \;\leq\; 1$$

pois, pela hipótese e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$0 \;\leq\; \frac{\langle \phi,\ A\phi \rangle}{\|A\|} \;\leq\; 1$$

para $\|\phi\| = 1$.

$(c) \Rightarrow (a)$. Pela hipótese e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se para $\phi \in \mathcal{H}$ com $\|\phi\| = 1$ que

$$\left| \left\langle \phi,\ \left(\mathbb{1} - \frac{A}{\|A\|} \right) \phi \right\rangle \right| \;\leq\; 1 \,.$$

Consequentemente, como A é autoadjunta, e $\langle \phi,\ A\phi \rangle$ é real, vale

$$-1 \;\leq\; \left\langle \phi,\ \left(\mathbb{1} - \frac{A}{\|A\|} \right) \phi \right\rangle \;\leq\; 1 \,,$$

ou seja, $-1 \leq 1 - \frac{1}{\|A\|} \langle \phi,\ A\phi \rangle \leq 1$. A segunda desigualdade equivale a $\frac{1}{\|A\|} \langle \phi,\ A\phi \rangle \geq 0$, como queríamos provar. ■

• **O Lema da Raiz Quadrada em espaços de Hilbert**

Segundo a discussão da Proposição 40.48, página 2236, e da Proposição 40.73, página 2285, se A é um elemento autoadjunto positivo da álgebra C* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, então A possui uma (única) raiz quadrada autoadjunta e positiva, que denotamos por $\sqrt{A}$. A Proposição 40.48 evoca o homomorfismo de Gelfand. De forma reconhecidamente redundante, vamos apresentar uma outra prova específica para espaços de Hilbert dessa afirmação, com a qual obtemos uma representação em termos de uma série convergente para $\sqrt{A}$, no espírito do que foi feito na Seção 40.3.8, página 2234. A vantagem dessa representação em série será apreciada mais adiante: ela permite provar mais facilmente que a raiz quadrada de um operador autoadjunto, positivo e compacto é igualmente compacto.

Teorema 40.30 (Lema da Raiz Quadrada) *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo e seja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ não-nulo tal que $\langle \phi,\ A\phi \rangle \geq 0$ para todo $\phi \in \mathcal{H}$. Então, A é autoadjunto e positivo e existe um único $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjunto e positivo tal que $B^2 = A$. Frequentemente denotaremos B por $\sqrt{A}$ e temos,*

$$\sqrt{A} \;=\; \|A\|^{1/2} \left(\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\mathbb{1} - \|A\|^{-1} A \right)^n \right) \,, \tag{40.142}$$

sendo que os coeficientes c_n são reais e foram definidos em (40.77), página 2234.

A expressão (40.142) mostra-nos que $\sqrt{A}$ é o limite na topologia uniforme (definida pela norma operatorial) de polinômios em A e, portanto, é um elemento da álgebra C gerada por A e da álgebra de von Neumann gerada por A (essas noções foram definidas às páginas 2233 e 2252, respectivamente).* □

Prova. Que A é autoadjunto e positivo foi provado na Proposição 40.73, página 2285. Essa Proposição estabeleceu também que $\left\| \mathbb{1} - \frac{A}{\|A\|} \right\| \leq 1$ assim como estabeleceu que

$$0 \;\leq\; \frac{\langle \phi,\ A\phi \rangle}{\|A\|} \;\leq\; 1 \tag{40.143}$$

para $\|\phi\| = 1$.

Evocando o Corolário 40.14, página 2235, e pela prova do Teorema 40.19, página 2234, existe $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisfazendo $B^2 = A$, a saber,

$$B \;=\; \|A\|^{1/2} \left(\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\mathbb{1} - A' \right)^n \right) \,, \tag{40.144}$$

com $A' := \frac{A}{\|A\|}$, sendo que os coeficientes c_n foram definidos em (40.77), página 2234. Essa expressão mostra que B é autoadjunto (pois é o limite em norma de uma sequência de operadores autoadjuntos). Como a soma é convergente em norma, tem-se pela continuidade do produto escalar que

$$\langle \phi,\ B\phi \rangle \;=\; \|A\|^{1/2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left\langle \phi,\ (\mathbb{1} - A')^n \phi \right\rangle \right) \,, \tag{40.145}$$

para $\phi \in \mathcal{H}$ com $\|\phi\| = 1$.

Vamos mostrar agora que $0 \leq \langle \phi,\, (\mathbb{1}-A')^n\phi\rangle \leq 1$. De fato, se n é par, $n=2m$, temos

$$\langle \phi,\, (\mathbb{1}-A')^n\phi\rangle \;=\; \langle (\mathbb{1}-A')^m\phi,\, (\mathbb{1}-A')^m\phi\rangle \;=\; \big\|(\mathbb{1}-A')^m\phi\big\|^2 \;\geq\; 0.$$

Se n é ímpar, $n=2m+1$, temos

$$\langle \phi,\, (\mathbb{1}-A')^n\phi\rangle \;=\; \langle \psi,\, (\mathbb{1}-A')\psi\rangle \;=\; \left(1-\left\langle \frac{\psi}{\|\psi\|},\, A'\frac{\psi}{\|\psi\|}\right\rangle\right)\|\psi\|^2 \;\geq\; 0,$$

por (40.143), onde $\psi=(\mathbb{1}-A')^m\phi$. Assim,

$$0 \;\leq\; \langle \phi,\, (\mathbb{1}-A')^n\phi\rangle \;\leq\; \big\|(\mathbb{1}-A')^n\big\| \;=\; \big\|(\mathbb{1}-A')\big\|^n \;\leq\; 1\,.$$

Retornando à (40.145) e lembrando que $c_n\leq 0$ para $n\geq 1$, tem-se

$$\langle \phi,\, B\phi\rangle \;\geq\; \|A\|^{1/2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\right) \;=\; \|A\|^{1/2}\sqrt{1-1} \;=\; 0\,.$$

Isso mostra que B é positivo.

Vamos agora provar[47] a unicidade de B. Comecemos notando que se T é um operador que comuta com A, então T comuta com B, devido ao fato de o lado direito de (40.144) ser convergente em norma.

E. 40.43 *Exercício.* Justifique! ✣

Seja então B' autoadjunto e positivo tal que $(B')^2=A$. Então $(B')^3=B'A=AB'$, mostrando que B' e A comutam. Assim B e B' também comutam (por (40.144)). Usando essa comutatividade, tem-se

$$0 \;=\; (A-A)(B-B') \;=\; \big(B^2-(B')^2\big)(B-B') \;=\; (B-B')(B+B')(B-B') \;=\; B_1+B_2\,,$$

onde $B_1=(B-B')B(B-B')$ e $B_2=(B-B')B'(B-B')$. Sucede, porém, que para todo $\psi\in\mathcal{H}$,

$$\langle \psi,\, B_1\psi\rangle \;=\; \big\langle (B-B')\psi,\, B(B-B')\psi\big\rangle \;\geq\; 0$$

pela positividade de B e, analogamente,

$$\langle \psi,\, B_2\psi\rangle \;=\; \big\langle (B-B')\psi,\, B'(B-B')\psi\big\rangle \;\geq\; 0$$

pela suposta positividade de B'. Como $B_1+B_2=0$, segue que $B_1=B_2=0$. Assim,

$$0 \;=\; B_1-B_2 \;=\; (B-B')B(B-B')-(B-B')B'(B-B') \;=\; (B-B')\big(B(B-B')-B'(B-B')\big) \;=\; (B-B')^3\,.$$

Logo, usando duas vezes a propriedade C* da norma, tem-se

$$0 \;=\; \big\|(B-B')^4\big\| \;=\; \Big\|\big((B-B')^2\big)^*(B-B')^2\Big\| \;=\; \Big\|\big(B-B'\big)^2\Big\|^2 \;=\; \big\|(B-B')^*(B-B')\big\|^2 \;=\; \big\|B-B'\big\|^4\,,$$

o que prova que $\|B-B'\|=0$, ou seja, que $B=B'$. ■

• A raiz quadrada de um operador positivo e a unidade

Vimos em (40.142) que se A é um operador limitado não-nulo, autoadjunto e positivo agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ então

$$\sqrt{A} \;:=\; \|A\|^{1/2}\left[\mathbb{1}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(\mathbb{1}-\frac{A}{\|A\|}\right)^n\right]\,, \tag{40.146}$$

[47] Seguiremos basicamente [412].

é igualmente autoadjunto e positivo e satisfaz $(\sqrt{A})^2=A$. Claramente,

$$\sqrt{A} \;:=\; \lim_{N\to\infty}\|A\|^{1/2}\left[\mathbb{1}+\sum_{n=1}^{N}c_n\left(\mathbb{1}-\frac{A}{\|A\|}\right)^n\right]$$

$$:=\; \lim_{N\to\infty}\|A\|^{1/2}\left[1+\sum_{n=1}^{N}c_n\right]\mathbb{1}+\lim_{N\to\infty}\|A\|^{1/2}\left[\sum_{n=1}^{N}c_n\sum_{p=1}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}\left(\frac{A}{\|A\|}\right)^p\right]\,.$$

Como $c_0=1$, temos $1+\sum_{n=1}^{N}c_n \;=\; \sum_{n=0}^{N}c_n$. Tem-se para qualquer $N\geq 1$ que

$$\sum_{n=0}^{N}c_n \;=\; \lim_{t\to 1_-}\sum_{n=0}^{N}c_nt^n \;=\; \lim_{t\to 1_-}\sqrt{1-t}-\lim_{t\to 1_-}\sum_{n=N+1}^{\infty}c_nt^n \;=\; -\lim_{t\to 1_-}\sum_{n=N+1}^{\infty}c_nt^n\,.$$

Note-se agora que, por (40.A.1), a série $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ converge absolutamente e, portanto, temos para qualquer $\epsilon>0$ que $\sum_{n=N+1}^{\infty}|c_n|\leq\epsilon$ para todo N grande o suficiente. Assim, para $|t|<1$, $\big|\sum_{n=N+1}^{\infty}c_nt^n\big|\leq\sum_{n=N+1}^{\infty}|c_n|\leq\epsilon$, para todo N grande o suficiente. Logo,

$$\left|\sum_{n=0}^{N}c_n\right| \;=\; \left|\lim_{t\to 1_-}\sum_{n=N+1}^{\infty}c_nt^n\right| \;=\; \lim_{t\to 1_-}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}c_nt^n\right| \;\leq\; \epsilon.$$

Tomando $\epsilon\to 0$, concluímos que $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}c_n=0$ e daí segue que

$$\sqrt{A} \;=\; \lim_{N\to\infty}\|A\|^{1/2}\left[\sum_{n=1}^{N}c_n\sum_{p=1}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}\left(\frac{A}{\|A\|}\right)^p\right]\,. \tag{40.147}$$

ou seja,

$$\sqrt{A} \;=\; \lim_{N\to\infty}P_N(A)\,, \tag{40.148}$$

onde $P_N(A)$ é o polinômio em A dado por

$$P_N(A) \;:=\; \sum_{p=1}^{N}p_{N,\,p}\,\|A\|^{1/2-p}\,A^p\,, \qquad \text{onde} \qquad p_{N,\,p} \;:=\; \sum_{n=p}^{N}(-1)^p\binom{n}{p}c_n\,. \tag{40.149}$$

O interessante nas expressões (40.147)-(40.149) é que cada $P_N(A)$ não contém nenhum termo proporcional à unidade $\mathbb{1}$ (a soma em (40.149) começa em $p=1$). Esse fato será relevante quando discutirmos a raiz quadrada de operadores compactos e positivos.

A Proposição 40.46 página 2235, traz-nos a seguinte conclusão.

Proposição 40.74 *Seja $\mathcal{A}_+\subset\mathcal{B}(\mathcal{H})$ a coleção de todos os elementos autoadjuntos, não-nulos e positivos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Então, a aplicação $\mathcal{A}_+\ni A\mapsto\sqrt{A}$ dada em (40.146) é contínua na topologia uniforme de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, ou seja, se $A\in\mathcal{A}_+$ e $\{A_m\in\mathcal{A}_+,\, m\in\mathbb{N}\}$ é uma sequência tal que $\lim_{m\to\infty}\|A-A_m\|=0$, então $\lim_{m\to\infty}\|\sqrt{A_m}-\sqrt{A}\|=0$.* □

Prova. Da desigualdade (3.24), página 275, sabemos que se $\lim_{m\to\infty}\|A_m-A\|=0$, então $\lim_{m\to\infty}\big|\,\|A_m\|-\|A\|\,\big|=0$. Assim, a sequência $m\to\|A_m\|$ é limitada superior e inferiormente, sendo que vale também $\lim_{m\to\infty}\left|\frac{1}{\|A_m\|}-\frac{1}{\|A\|}\right|=0$. Agora,

$$\left(\mathbb{1}-\frac{1}{\|A\|}A\right)-\left(\mathbb{1}-\frac{1}{\|A_m\|}A_m\right) \;=\; \frac{1}{\|A\|}(A_m-A)+\left(\frac{1}{\|A_m\|}-\frac{1}{\|A\|}\right)A_m\,,$$

o que implica $\lim_{m\to\infty}\left\|\left(\mathbb{1}-\frac{1}{\|A\|}A\right)-\left(\mathbb{1}-\frac{1}{\|A_m\|}A_m\right)\right\|=0$. Usando-se (40.146) o resto da prova é obtido imitando-se a demonstração da Proposição 40.46, página 2235. ■

• **O módulo de um operador de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$**

Para $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ defina-se

$$|A| \;:=\; \sqrt{A^*A}\,. \tag{40.150}$$

Por analogia com os números complexos esse operador é dito ser o *módulo* de A. O operador $|A|$ é limitado, autoadjunto e positivo e unicamente definido por essas propriedades e por $|A|^2=A^*A$ (Teorema 40.30, página 2287). Sua relevância será manifesta no Teorema 40.31, página 2290.

E. 40.44 *Exercício*. Prove a seguinte afirmação: $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é normal se e somente se $|A|=|A^*|$. ✣

O exercício a seguir contém uma afirmação elementar mas relevante:

E. 40.45 *Exercício*. Mostre que se $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é autoadjunto e positivo, então $|A|=A$. *Sugestão*: use o fato evidente que $|A|^2=A^2$ mais a unicidade garantida no Teorema 40.30, página 2287. ✣

De volta ao caso geral, vale a seguinte afirmação:

Proposição 40.75 *A aplicação $\mathcal{B}(\mathcal{H})\ni A\mapsto|A|:=\sqrt{A^*A}$ é contínua na topologia uniforme de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, ou seja, se $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $\{A_m\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),\ m\in\mathbb{N}\}$ é uma sequência tal que $\lim_{m\to\infty}\|A_m-A\|=0$, então $\lim_{m\to\infty}\big\|\,|A|-|A_m|\,\big\|=0$.* □

Prova. Da desigualdade (3.24), página 275, sabemos que $\lim_{m\to\infty}\|A_m\|=\|A\|$. Além disso, $A_m^*A_m-A^*A=A_m^*(A_m-A)+(A_m-A)^*A$, o que implica que $\lim_{m\to\infty}\big\|A_m^*A_m-A^*A\big\|=0$. O resto da prova é imediato pela Proposição 40.74, página 2289. ■

• **Operadores como soma finita de unitários**

A seguinte afirmativa é imediata pela Proposição 40.50, página 2239, e a escrevemos aqui para referência futura.

Proposição 40.76 *Todo operador limitado autoadjunto A agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ pode ser escrito como combinação linear de até dois elementos unitários: $A=\frac{\|A\|}{2}\big(U_++U_-\big)$, com $U_\pm$ unitários.*

Todo operador limitado B agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ pode ser escrito como combinação linear de até quatro operadores unitários: $B=\sum_{k=1}^4\beta_kU_k$, sendo cada U_k unitário e $|\beta_k|\le\|B\|/2$ para todo k. □

40.7.1 A Decomposição Polar de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert

É um fato elementar que todo número complexo z pode ser representado na forma polar $z=e^{i\theta}\rho$ com $\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, x e y sendo as partes real e imaginária de z, respectivamente. No caso de operadores limitados agindo em espaços de Hilbert há uma relação semelhante que discutiremos agora.

Teorema 40.31 (A Decomposição Polar de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert) *Seja $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador limitado agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, A pode ser escrito na forma $A=U|A|$, denominada* decomposição polar de A, *onde $|A|:=\sqrt{A^*A}$ (vide (40.150)) e $U\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma isometria parcial a qual satisfaz $\mathrm{Ran}\,(U)=\overline{\mathrm{Ran}\,(A)}$ e é unicamente determinada pela condição $\mathrm{Ker}\,(U)=\mathrm{Ker}\,(A)$. Valem as relações $\Big(\overline{\mathrm{Ran}\,\big(|A|\big)}\Big)^{\perp}=\mathrm{Ran}\,\big(|A|\big)^{\perp}=\mathrm{Ker}\,\big(|A|\big)=\mathrm{Ker}\,(A)$ e valem ainda as seguintes afirmações:*

$$|A| \;=\; U^*A \;=\; A^*U\,, \tag{40.151}$$

$$U^*U \;=\; P \qquad e \tag{40.152}$$

$$UU^* \;=\; Q\,, \tag{40.153}$$

onde P é o projetor ortogonal sobre o subespaço fechado $\mathrm{Ker}\,(A)^{\perp}=\overline{\mathrm{Ran}\,\big(|A|\big)}=\mathrm{Ker}\,(U)^{\perp}$ e onde Q é o projetor ortogonal sobre o subespaço fechado $\overline{\mathrm{Ran}\,(A)}=\mathrm{Ran}\,(U)$.

Por fim, se $A=U|A|$ é a decomposição polar de A, então a decomposição polar de A^* é dada por $A^*=U^*\big|A^*\big|$ sendo que vale

$$\big|A^*\big| \;=\; U|A|U^*\,. \tag{40.154}$$

Portanto, vale

$$A \;=\; U|A| \;=\; |A^*|U\,, \qquad \textit{ou seja,} \qquad A \;=\; U\sqrt{A^*A} \;=\; \sqrt{AA^*}\,U\,. \tag{40.155}$$

Tem-se, ainda,

$$AA^* \;=\; U\big(A^*A\big)U^*\,. \tag{40.156}$$

□

Prova. Comecemos observando que

$$\big\||A|\psi\big\| \;=\; \big\|A\psi\big\|\,, \qquad \forall\,\psi\in\mathcal{H}\,, \tag{40.157}$$

pois

$$\big\||A|\psi\big\|^2 \;=\; \big\langle|A|\psi,\ |A|\psi\big\rangle_{\mathcal{H}}=\big\langle\psi,\ |A|^2\psi\big\rangle_{\mathcal{H}}=\big\langle\psi,\ A^*A\psi\big\rangle_{\mathcal{H}}=\big\langle A\psi,\ A\psi\big\rangle_{\mathcal{H}}=\big\|A\psi\big\|^2\,.$$

O fato que $\big\||A|\psi\big\|=\|A\psi\|$ implica, obviamente, que $|A|\psi=0$ se e somente se $A\psi=0$, ou seja,

$$\mathrm{Ker}\,\big(|A|\big) \;=\; \mathrm{Ker}\,(A)\,. \tag{40.158}$$

Podemos então definir uma função bijetora $U:\mathrm{Ran}\,\big(|A|\big)\to\mathrm{Ran}\,(A)$ por

$$U\big(|A|\psi\big) \;:=\; A\psi\,, \qquad \forall\,\psi\in\mathcal{H}\,. \tag{40.159}$$

O próximo passo é mostrar que U é linear. De fato, para $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$ e $\psi,\ \phi\in\mathcal{H}$, arbitrários, tem-se

$$U\Big(\alpha|A|\psi+\beta|A|\phi\Big) \;=\; U\Big(|A|(\alpha\psi+\beta\phi)\Big) \;\overset{(40.159)}{=}\; A(\alpha\psi+\beta\phi) \;=\; \alpha A\psi+\beta A\phi \;\overset{(40.159)}{=}\; \alpha U\big(|A|\psi\big)+\beta U\big(|A|\phi\big)\,,$$

o que prova a linearidade de U. Passamos, assim, a escrever (40.159) como $U|A|\psi:=A\psi$, o que incidentalmente mostra que $A=U|A|$, pois $\psi\in\mathcal{H}$ é arbitrário. A relação (40.157) diz-nos que $\big\|U|A|\psi\big\|=\big\||A|\psi\big\|$ e, portanto, a norma de U, restrito a $\mathrm{Ran}\,\big(|A|\big)$, é igual a 1.

Sabemos que o completamento de $\mathrm{Ran}\,(A)$ é o seu fecho $\overline{\mathrm{Ran}\,(A)}$ e podemos considerar U como uma aplicação de $\mathrm{Ran}\,\big(|A|\big)$ em $\overline{\mathrm{Ran}\,(A)}$. Pelo Teorema BLT (Teorema 40.1, página 2175), U possui uma extensão única ao completamento de $\mathrm{Ran}\,\big(|A|\big)$, que é $\overline{\mathrm{Ran}\,\big(|A|\big)}$, sendo que essa extensão também tem norma 1. Para evitar sobrecarregar a notação denotamos essa extensão também por U, valendo $U:\overline{\mathrm{Ran}\,\big(|A|\big)}\to\overline{\mathrm{Ran}\,(A)}$. Como $\|U\|=1$, U é uma isometria.

Notemos agora que $\Big(\overline{\mathrm{Ran}\,\big(|A|\big)}\Big)^{\perp}=\mathrm{Ran}\,\big(|A|\big)^{\perp}$ (vide Proposição 39.2, página 2129). Agora, $\phi\in\mathrm{Ran}\,\big(|A|\big)^{\perp}$ se e somente se $\big\langle\phi,\ |A|\psi\big\rangle_{\mathcal{H}}=0$ para todo $\psi\in\mathcal{H}$. Como $|A|$ é autoadjunto, isso implica que $\phi\in\mathrm{Ran}\,\big(|A|\big)^{\perp}$ se e somente se $\big\langle|A|\phi,\ \psi\big\rangle_{\mathcal{H}}=0$ para todo $\psi\in\mathcal{H}$. Logo, $\phi\in\mathrm{Ran}\,\big(|A|\big)^{\perp}$ se e somente se $|A|\phi=0$ e, por (40.157), se e somente se $A\phi=0$. Assim, concluímos que

$$\Big(\overline{\mathrm{Ran}\,\big(|A|\big)}\Big)^{\perp} \;=\; \mathrm{Ran}\,\big(|A|\big)^{\perp} \;=\; \mathrm{Ker}\,\big(|A|\big) \;\overset{(40.158)}{=}\; \mathrm{Ker}\,(A)\,. \tag{40.160}$$

Vamos agora estender U para todo $\mathcal{H}$ declarando U como o operador nulo quando age em $\overline{\mathrm{Ran}\left(|A|\right)}^{\perp}$. Especificamente, lembremos pelo Teorema da Decomposição Ortogonal (Teorema 39.2, página 2128), que todo $\xi \in \mathcal{H}$ pode ser escrito na forma $\xi = \xi_1 + \xi_2$ com $\xi_1 \in \overline{\mathrm{Ran}\left(|A|\right)}$ e $\xi_2 \in \overline{\mathrm{Ran}\left(|A|\right)}^{\perp}$. Assim, para cada $\xi \in \mathcal{H}$ definimos $U\xi := U\xi_1$, impondo, portanto que $\mathrm{Ker}\,(U) = \overline{\mathrm{Ran}\left(|A|\right)}^{\perp} \overset{(40.160)}{=} \mathrm{Ker}\,(A)$. Novamente, denotamos essa extensão também por U e note-se que para essa extensão continua valendo $A = U|A|$.

Das considerações acima concluímos que U é uma isometria parcial (vide definição à página 2202), pois é uma isometria quando restrita a $\mathrm{Ker}\,(U)^{\perp} = \overline{\mathrm{Ran}\left(|A|\right)}$. Da Proposição 40.14, página 2203, concluímos que U^* é igualmente uma isometria parcial e valem as relações, $U^*U = P$, o projetor ortogonal sobre $\mathrm{Ker}\,(U)^{\perp} = \mathrm{Ker}\,(A)^{\perp} = \overline{\mathrm{Ran}\left(|A|\right)}$, e $UU^* = Q$, o projetor ortogonal sobre $\mathrm{Ran}\,(U) = \overline{\mathrm{Ran}\,(A)}$. Disso segue que $U^*A = U^*U|A| = P|A| = |A|$ e como $|A|$ é autoadjunto, segue também que $U^*A = A^*U$.

Provemos agora a unicidade. Seja V uma isometria parcial tal que $A = V|A|$ e $\mathrm{Ker}\,(V) = \mathrm{Ker}\,(A)$. É evidente que para todo $\psi \in \mathcal{H}$ vale $0 = A\psi - A\psi = V|A|\psi - U|A|\psi$, o que prova que $V = U$ em $\mathrm{Ran}\left(|A|\right)$ e, consequentemente, em $\overline{\mathrm{Ran}\left(|A|\right)}$, pois U e V são limitados. Como V e U são nulos em $\overline{\mathrm{Ran}\left(|A|\right)}^{\perp} = \mathrm{Ker}\,(A)$, concluímos que $V = U$ em toda parte.

Por fim, se $A = U|A|$, vale $A^* = |A|U^* = P|A|U^* = U^*\big(U|A|U^*\big)$, pois P projeta sobre $\overline{\mathrm{Ran}\left(|A|\right)} \supset \mathrm{Ran}\left(|A|\right)$. Como $U|A|U^* = \big(|A|^{1/2}U^*\big)^*\big(|A|^{1/2}U^*\big)$ é claramente positivo, para estabelecermos que $\big|A^*\big| = U|A|U^*$ é suficiente provarmos que os quadrados de ambos são iguais. Agora, $\big(U|A|U^*\big)^2 = U|A|U^*U|A|U^* = U|A|P|A|U^* = \big(U|A|\big)\big(|A|U^*\big) = AA^* = \big|A^*\big|^2$. Da unicidade da decomposição polar, concluímos que $A^* = U^*\big|A^*\big|$ com $\big|A^*\big| = U|A|U^*$ é a decomposição polar de A^*. Tomando-se adjunto de $A^* = U^*\big|A^*\big|$, obtemos $A = |A^*|U$, estabelecendo (40.155). Por fim, como $A = U|A|$, vale $A^* = |A|U^*$ e, portanto, $AA^* = U|A|^2U^* = U\big(A^*A\big)U^*$, provando (40.156). ∎

Proposição 40.77 *Seja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador limitado agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e seja $A = U|A|$ sua decomposição polar. Então, $|A|$ e U são elementos da álgebra de von Neumann gerada por A, que denotamos por $\mathcal{M}[A]$.*

Prova. No enunciado do Teorema 40.30, página 2287, mencionamos que $|A| := \sqrt{A^*A}$ é um elemento da álgebra C* gerada por A^*A e, portanto, da álgebra C* gerada por A (essas noções foram definidas às páginas 2233 e 2252, respectivamente). Assim, $|A|$ é elemento da álgebra de von Neumann gerada por A (se uma rede de operadores converge na topologia uniforme, também converge na topologia operatorial forte e álgebras de von Neumann são fortemente fechadas, pelo Teorema do Bicomutante, Teorema 40.24, página 2251).

Para provarmos que $U \in \mathcal{M}[A]$ provaremos que U comuta com todo elemento de $\mathcal{M}[A]'$, ou seja, que $U \in \mathcal{M}[A]'' = \mathcal{M}[A]$. Seja $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $VA = AV$ e $VA^* = A^*V$. Isso implica que $V|A| = |A|V$, pois sabemos do Teorema 40.30, página 2287, que $|A| := \sqrt{A^*A}$ é o limite uniforme de polinômios em A^*A. Note-se que $V|A| = |A|V$ implica, tomando-se o adjunto de ambos os lados da igualdade, que $V^*|A| = |A|V^*$.

Isso implica que $\mathrm{Ran}\left(|A|\right)$ e $\mathrm{Ran}\left(|A|\right)^{\perp}$ são invariantes por V: $V\mathrm{Ran}\left(|A|\right) \subset \mathrm{Ran}\left(|A|\right)$ e $V\Big(\mathrm{Ran}\left(|A|\right)^{\perp}\Big) \subset \mathrm{Ran}\left(|A|\right)^{\perp}$. De fato, se $\psi = |A|\phi$ para algum $\psi \in \mathcal{H}$, então $V\psi = V|A|\phi = |A|V\phi \in \mathrm{Ran}\left(|A|\right)$ e se ψ é tal que $\langle \psi,\ |A|\phi\rangle = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{H}$, então $\langle V\psi,\ |A|\phi\rangle = \langle \psi,\ V^*|A|\phi\rangle = \langle \psi,\ |A|V^*\phi\rangle = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{H}$, o que significa que se $\psi \in \mathrm{Ran}\left(|A|\right)^{\perp}$, então $V\psi \in \mathrm{Ran}\left(|A|\right)^{\perp}$.

Do Teorema 40.31, página 2290, sabemos que $\mathrm{Ran}\left(|A|\right)^{\perp} = \mathrm{Ker}\left(|A|\right)$. Logo, provamos que $V\mathrm{Ker}\left(|A|\right) \subset \mathrm{Ker}\left(|A|\right)$. Também do Teorema 40.31, sabemos que $\mathrm{Ker}\,(U) = \mathrm{Ker}\left(|A|\right) = \mathrm{Ker}\,(A)$. Portanto, para provarmos que $VU = UV$ é suficiente provarmos que $VU\psi = UV\psi$ para todos os vetores $\psi \in \mathrm{Ran}\left(|A|\right)$, pois se $\phi \in \mathrm{Ran}\left(|A|\right)^{\perp} = \mathrm{Ker}\left(|A|\right) = \mathrm{Ker}\,(U)$, teremos $VU\phi = 0$ e $UV\phi = 0$, já que ϕ e $V\phi$ são elementos de $\mathrm{Ker}\,(U)$.

Assim resta-nos provar que para todo $\varphi \in \mathcal{H}$ vale $(UV - VU)|A|\varphi = 0$. Agora, pelas relações de comutação e pela decomposição polar, tem-se $UV|A| = U|A|V = AV$ e $VU|A| = VA$. Logo, $(UV - VU)|A|\varphi = (AV - VA)\varphi = 0$.

Isso provou que U comuta com todos os elementos de comutam com A e com A^*. É elementar extrair disso que U comuta com todos os elementos de $\mathcal{M}[A]'$ e, portanto, $U \in \mathcal{M}[A]'' = \mathcal{M}[A]$. ∎

40.8 Operadores Compactos em Espaços de Banach e de Hilbert

Nesta seção introduziremos a importante noção de operador compacto. Em um sentido a ser precisado, operadores compactos agindo entre espaços de Hilbert de dimensão infinita são aqueles cujas características mais se aproximam das de matrizes. Para eles vale também a forma mais simples do Teorema Espectral, que apresentamos no contexto de matrizes na Seção 10.4, página 536. Historicamente o estudo de propriedades de operadores compactos deu inicio à Análise Funcional, por meio do estudo empreendido entre 1904 e 1910 por Hilbert e colaboradores (notadamente Schmidt[48]) da chamada equação integral de Fredholm, a qual surge no tratamento do problema de Sturm-Liouville (vide Capítulo 19, página 1027, em particular a Seção 19.3.2, página 1049). Esses trabalhos levaram à introdução do própria noção de espaço de Hilbert e à primeira versão do Teorema Espectral para operadores autoadjuntos compactos agindo em espaços de Hilbert.

• **Operadores de posto finito**

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois espaços de Banach e seja $M : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um operador linear limitado. Dizemos que M é um *operador de posto finito* se a imagem de $\mathcal{A}$ por M estiver contida em um subespaço de dimensão finita de $\mathcal{B}$. Assim, se M é de posto finito, existe um conjunto de, digamos, N vetores linearmente independentes $b_1,\ \ldots,\ b_N$ em $\mathcal{B}$ tais que $Mx = \beta_1(x)b_1 + \cdots + \beta_N(x)b_N$ para todo $x \in \mathcal{A}$, onde $\beta_1(x),\ \ldots,\ \beta_N(x) \in \mathbb{C}$ dependem de x. Como M é linear, é claro que cada β_k é um funcional linear em $\mathcal{A}$. Como M é contínuo, vale

$$\sum_{k=1}^{N} \lim_{\|x-y\|_{\mathcal{A}}\to 0} \beta_k(x-y)b_k \;=\; \lim_{\|x-y\|_{\mathcal{A}}\to 0} \sum_{k=1}^{N} \beta_k(x-y)b_k \;=\; \lim_{\|x-y\|_{\mathcal{A}}\to 0} M(x-y) \;=\; 0\,,$$

o que implica $\lim_{\|x-y\|_{\mathcal{A}}\to 0} \beta_k(x-y) = 0$, ou seja, cada β_k é um funcional linear contínuo (e, portanto, limitado) de $\mathcal{A}$ em $\mathbb{C}$. Assim, existe $B > 0$ tal que $|\beta_k(x)| \leq B\|x\|_{\mathcal{A}}$ para todo $k = 1,\ \ldots,\ N$.

Dessa forma, vemos que se x_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência limitada de vetores em $\mathcal{A}$ (ou seja, existe $X > 0$ tal que $\|x_n\|_{\mathcal{A}} \leq X$ para todo $n \in \mathbb{N}$) então $|\beta_k(x_n)| \leq BX$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo k. Assim,

$$\|Mx_n\|_{\mathcal{B}} \;=\; \left\|\sum_{k=1}^{N} \beta_k(x_n)b_k\right\|_{\mathcal{B}} \;\leq\; \sum_{k=1}^{N} |\beta_k(x_n)|\,\|b_k\|_{\mathcal{B}} \;\leq\; BX\sum_{k=1}^{N} \|b_k\|_{\mathcal{B}}\ .$$

Isso diz-nos que todos os vetores da sequência Mx_n estão contidos na bola fechada centrada em 0 e de raio $BX(\|b_1\|_{\mathcal{B}} + \cdots + \|b_N\|_{\mathcal{B}})$ do subespaço de dimensão finita gerado por $b_1,\ \ldots,\ b_N$. Assim, pelo bem conhecido Teorema de Bolzano[49]-Weierstrass[50] (vide Teorema 32.7, página 1616 e, mais importante, o Teorema 32.15, página 1628), a sequência Mx_n, possui pelo menos uma subsequência convergente.

Essa propriedade, válida para operadores de posto finito, inspira a definição de operadores compactos.

• **Operadores compactos**

Um operador linear limitado C agindo entre dois espaços de Banach $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é dito ser um *operador compacto* se para toda sequência limitada $x_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, a sequência Cx_n em $\mathcal{B}$ possui pelo menos uma subsequência convergente. Das considerações acima, concluímos:

Proposição 40.78 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois espaços de Banach e seja $M : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um operador linear de posto finito. Então, M é compacto.* □

A denominação "operador compacto" provém da seguinte propriedade equivalente: um operador C agindo entre dois espaços de Banach $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é compacto (seguindo a definição acima) se e somente se o fecho em $\mathcal{B}$ da imagem por C de qualquer conjunto limitado em $\mathcal{A}$ é compacto (na topologia de $\mathcal{B}$). Essa equivalência é uma consequência de propriedades

[48] Erhard Schmidt (1876–1959).
[49] Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848).
[50] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897).

bem-conhecidas de conjuntos compactos em espaços métricos e a prova é deixada como exercício. Essa propriedade pode ser tomada como definição alternativa da noção de operador compacto e assim é feito em alguns textos.

Como vimos, operadores de posto finito são compactos, mas a recíproca não é verdadeira em dimensão infinita. Porém, a seguinte proposição é imediata das observações acima.

Proposição 40.79 *Todo operador linear agindo entre dois espaços de Banach de dimensão finita $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é compacto.* □

Dentre os exemplos mais importantes de operadores compactos estão os operadores integrais de Fredholm e de Volterra, discutidos às páginas 2299 e 2300, respectivamente, os quais surgem na teoria das equações diferenciais e integrais (em particular, no chamado problema de Sturm-Liouville, introduzido no Capítulo 19, página 1027) e suas aplicações. Para estudá-los, no entanto, precisamos desenvolver um pouco a teoria geral.

• Operadores compactos e sequências fracamente convergentes

Com o uso do Princípio de Limitação Uniforme, Teorema 40.6, página 2188, podemos estabelecer o seguinte resultado fundamental sobre operadores compactos.

Teorema 40.32 *Seja $C : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um operador compacto agindo entre dois espaços de Banach $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Seja $x_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de vetores de $\mathcal{A}$ e suponha que exista $x \in \mathcal{A}$ tal que $\ell(x_n) \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, seja uma sequência convergente a $\ell(x)$ para todo funcional linear contínuo $\ell : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ (i.e., x_n é* fracamente convergente *a x). Então, $Cx_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$ converge em norma a Cx em $\mathcal{B}$.* □

Prova. Denotemos por $\mathcal{A}^\dagger$ o dual topológico de $\mathcal{A}$ (i.e., $\mathcal{A}^\dagger$ é o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos de $\mathcal{A}$). O Teorema 40.2, página 2177, diz-nos que $\mathcal{A}^\dagger$ é igualmente um espaço de Banach com a norma definida em (40.4), página 2179.

Para $z \in \mathcal{A}$, definamos a aplicação $\hat{z} : \mathcal{A}^\dagger \to \mathbb{C}$ dada por $\hat{z}(\ell) = \ell(z)$. Como $|\hat{z}(\ell)| = |\ell(z)| \leq \|\ell\|_{\mathcal{A}^\dagger}\|z\|_{\mathcal{A}}$ (pois ℓ é um funcional linear contínuo), segue que $\hat{z}$ é um funcional linear contínuo em $\mathcal{A}^\dagger$. Por (40.5), vale $\|\hat{z}\| = \|z\|_{\mathcal{A}}$.

Pelas hipóteses, para cada $\ell \in \mathcal{A}^\dagger$ a sequência numérica $\ell(x_n)$ converge a $\ell(x) \in \mathbb{C}$. Daí, $|\ell(x_n)|$ é limitada, ou seja, existe $M_\ell > 0$ tal que $|\ell(x_n)| \leq M_\ell$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para a sequência $x_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, de vetores de $\mathcal{A}$ do enunciado, vamos denotar por $\mathcal{S} := \big\{\widehat{x_n} : \mathcal{A}^\dagger \to \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}\big\}$ o correspondente conjunto de operadores lineares e limitados de $\mathcal{A}^\dagger$ em $\mathbb{C}$, com $\widehat{x_n}(\ell) := \ell(x_n)$ para todo $\ell \in \mathcal{A}^\dagger$. Agora, para cada $\ell \in \mathcal{A}^\dagger$ vale que $|\widehat{x_n}(\ell)| \leq M_\ell$ para todo $\widehat{x_n} \in \mathcal{S}$. Estamos, portanto, sob as condições do Princípio de Limitação Uniforme, Teorema 40.6, página 2188, e podemos afirmar que existe $M > 0$ tal que $\|\widehat{x_n}\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e, portanto, $\|x_n\|_{\mathcal{A}} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sejam agora definidos em $\mathcal{B}$ a sequência $y_n := Cx_n$, $n \in \mathbb{N}$, e o vetor $y := Cx$. Para cada $\ell \in \mathcal{B}^\dagger$ vale

$$\ell(y_n) - \ell(y) \;=\; \ell(y_n - y) \;=\; \ell\big(C(x_n - x)\big) \;=\; (\ell \circ C)(x_n - x)\,.$$

Todavia, $\ell \circ C$ é um elemento de $\mathcal{A}^\dagger$ pois é linear e contínuo (sendo a composição de duas aplicações contínuas). Logo, pelas hipóteses, $\ell \circ C(x_n)$ converge a $\ell \circ C(x)$, o que implica que $\ell(y_n)$ converge a $\ell(y)$.

Desejamos provar que y_n converge a y na norma de $\mathcal{B}$. Vamos supor, por absurdo, que isso não ocorra. Então, existe algum $\epsilon > 0$ tal que

$$\|y_{n_j} - y\|_{\mathcal{B}} \;>\; \epsilon \tag{40.161}$$

para todos y_{n_j} de uma subsequência de y_n. Agora, $y_{n_j} = Cx_{n_j}$ e como $\|x_{n_j}\|_{\mathcal{A}} \leq M$ para todo j e C é compacto, $\{y_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em norma em $\mathcal{B}$. Vamos denotar essa subsequência por y'_k, $k \in \mathbb{N}$, e seja $y' \in \mathcal{B}$ o seu limite. É certo por (40.161) que $y' \neq y$. Agora, Como $\|y'_k - y'\|_{\mathcal{B}}$ converge a 0 quando $k \to \infty$, segue que

$$\lim_{k\to\infty} \big|\ell(y'_k) - \ell(y')\big| \;\leq\; \lim_{k\to\infty} \|\ell\|\,\big\|y'_k - y'\big\|_{\mathcal{B}} \;=\; 0\,.$$

Vimos acima, porém, que $\ell(y_n)$ converge a $\ell(y)$. Como y'_k é uma subsequência de y_n, então $\ell(y'_k)$ deve também convergir a $\ell(y)$. Assim provamos que $\ell(y' - y) = 0$ para todo $\ell \in \mathcal{A}^\dagger$, o que implica $y' = y$, uma contradição. ■

• Propriedades algébricas de operadores compactos

As seguintes proposições revelam propriedades algébricas importantes dos operadores compactos.

Proposição 40.80 *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dois espaços de Banach e sejam A, $B : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ dois operadores compactos. Então, para todos α, $\beta \in \mathbb{C}$ o operador $\alpha A + \beta B$ é igualmente compacto.* □

Prova. Seja x_n uma sequência limitada de vetores em $\mathcal{X}$. Então, existe uma subsequência x_{n_j} de x_n tal que a sequência Ax_{n_j} converge em norma em $\mathcal{Y}$, pois A é compacto. É elementar constatar que isso implica que αAx_{n_j} também converge em norma em $\mathcal{Y}$. Como a sequência x_{n_j} é (obviamente) limitada, ela possui uma subsequência $x_{n_{j_k}}$ tal que $\beta Bx_{n_{j_k}}$ converge em norma em $\mathcal{Y}$. Daí, é elementar constatar que $(\alpha A + \beta B)x_{n_{j_k}}$ converge em norma em $\mathcal{Y}$, completando a prova. ■

A proposição acima mostra que o conjunto de operadores compactos agindo entre dois espaços de Banach $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ é um espaço linear. Tem-se também o seguinte:

Proposição 40.81 *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$ três espaços de Banach e sejam $A : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ e $B : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ dois operadores limitados. Então, se A ou B for compacto (ou ambos o forem) o produto $AB : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ é compacto.* □

Prova. Seja x_n uma sequência limitada em $\mathcal{X}$, ou seja, existe $M > 0$ tal que $\|x_n\|_{\mathcal{X}} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, Bx_n é uma sequência limitada em $\mathcal{Y}$ (pois B é limitado e $\|Bx_n\|_{\mathcal{Y}} \leq \|B\|\,\|x_n\|_{\mathcal{X}} \leq \|B\|M$). Logo, se A for compacto, ABx_n possui uma subsequência convergente na norma de $\mathcal{Z}$ e, portanto, o produto AB é compacto. Se por outro lado B for compacto, então Bx_n possui uma subsequência Bx_{n_j} convergente. Por ser convergente, Bx_{n_j} é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{Y}$, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar k e l grandes o suficiente tais que $\|B(x_{n_k} - x_{n_l})\|_{\mathcal{Y}} \leq \epsilon$. Logo, $\|AB(x_{n_k} - x_{n_l})\|_{\mathcal{Z}} \leq \|A\|\|B(x_{n_k} - x_{n_l})\|_{\mathcal{Y}} \leq \|A\|\epsilon$, provando que ABx_{n_j} é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{Z}$ e, portanto, converge, o que novamente estabelece que o produto AB é compacto. ■

A seguinte consequência é imediata:

Proposição 40.82 *Se $\mathcal{X}$ é um espaço de Banach o conjunto dos operadores compactos de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{X}$ forma uma álgebra, que denotaremos por $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. A álgebra $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ é uma subálgebra da álgebra de todos os operadores limitados agindo em $\mathcal{X}$, $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, é um ideal à esquerda e à direita de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.* □

A seguinte proposição é igualmente relevante no contexto de espaços de Hilbert.

Proposição 40.83 *Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert e $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é compacto então A^* é igualmente compacto.* □

Prova. Seja x_m uma sequência limitada de vetores em $\mathcal{H}$, ou seja, existe $M > 0$ tal que $\|x_n\|_{\mathcal{H}} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que

$$\big\|A^*(x_n - x_m)\big\|^2_{\mathcal{H}} \;=\; \big\langle A^*(x_n - x_m),\, A^*(x_n - x_m)\big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big\langle (x_n - x_m),\, AA^*(x_n - x_m)\big\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|x_n - x_m\|_{\mathcal{H}}\,\big\|AA^*(x_n - x_m)\big\|_{\mathcal{H}} \;\leq\; 2M\big\|AA^*(x_n - x_m)\big\|_{\mathcal{H}}\,,$$

pois $\|(x_n - x_m)\|_{\mathcal{H}} \leq \|x_n\|_{\mathcal{H}} + \|x_m\|_{\mathcal{H}} \leq 2M$. Como A é compacto, AA^* também o é (Proposição 40.81, acima). Logo AA^*x_n possui uma subsequência $AA^*x_{n_j}$ convergente em norma, que, portanto, é de Cauchy. Assim, para qualquer $\epsilon > 0$ podemos encontrar k e l grandes o suficiente tais que $\big\|AA^*(x_{n_k} - x_{n_l})\big\|_{\mathcal{H}} \leq \epsilon$. Logo, $\big\|A^*(x_{n_k} - x_{n_l})\big\|^2_{\mathcal{H}} \leq 2M\epsilon$, provando que $A^*x_{n_j}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, converge. ■

• Limite em norma de operadores compactos

A seguinte proposição revela uma propriedade topológica importante dos operadores compactos.

Proposição 40.84 *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dois espaços de Banach e seja $C_n : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de operadores compactos. Vamos supor que C_n converge na norma de $\mathcal{B}(\mathcal{X},\ \mathcal{Y})$ a um operador limitado $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\ \mathcal{Y})$, ou seja,*

$\|C - C_n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X},\,\mathcal{Y})} \to 0$ *quando* $n \to \infty$. *Então* C *é compacto. Isso revela que o conjunto dos operadores compactos é fechado na topologia uniforme de* $\mathcal{B}(\mathcal{X},\,\mathcal{Y})$. □

Prova. Seja $x_n^0 \in \mathcal{X}$ uma sequência limitada de vetores qualquer. Que $x_n^0 \in \mathcal{X}$ é limitada significa que existe $M > 0$ tal que $\|x_n^0\|_{\mathcal{X}} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned}\left\|C(x_n^0 - x_m^0)\right\|_{\mathcal{Y}} \;&=\; \left\|(C - C_k)(x_n^0 - x_m^0) + C_k(x_n^0 - x_m^0)\right\|_{\mathcal{Y}} \\ &\leq\; \left\|(C - C_k)(x_n^0 - x_m^0)\right\|_{\mathcal{Y}} + \left\|C_k(x_n^0 - x_m^0)\right\|_{\mathcal{Y}} \\ &\leq\; \|C - C_k\|\,\|x_n^0 - x_m^0\|_{\mathcal{X}} + \left\|C_k(x_n^0 - x_m^0)\right\|_{\mathcal{Y}} \,. \quad (40.162)\end{aligned}$$

Seja $\epsilon_n,\ n \in \mathbb{N}$, uma sequência de números positivos que converge a zero e tal que $\epsilon_b < \epsilon_a$ se $b > a$ (sem perda de generalidade, podemos tomar $\epsilon_n = 1/n,\ n \geq 1$). Como por hipótese $\|C - C_n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X},\,\mathcal{Y})} \to 0$ quando $n \to \infty$ podemos escolher k_1 grande o suficiente de forma que $\|C - C_{k_1}\| < \epsilon_1$. Fixemos um tal k_1. Como $\|x_n^0\|_{\mathcal{X}} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vale também que $\|x_n^0 - x_m^0\|_{\mathcal{X}} \leq \|x_n^0\|_{\mathcal{X}} + \|x_m^0\|_{\mathcal{X}} \leq 2M$. Logo, por (40.162),

$$\|C(x_n^0 - x_m^0)\|_{\mathcal{Y}} \;\leq\; 2M\epsilon_1 + \left\|C_{k_1}(x_n^0 - x_m^0)\right\|_{\mathcal{Y}} \,.$$

Como C_k é compacto, existe uma subsequência $x_j^1 = x_{n_j}^0,\ j \in \mathbb{N}$, da sequência x_n^0 tal que $C_{k_1}x_j^1$ converge em norma para $j \to \infty$ e, portanto, é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{Y}$, Assim, existe $N_1 \equiv N(\epsilon_1) \in \mathbb{N}$ tal que, se $l \geq N_1$ e $m \geq N_1$, então $\left\|C_{k_1}(x_l^1 - x_m^1)\right\|_{\mathcal{Y}} \leq \epsilon_1$. Disso concluímos que

$$\left\|C(x_l^1 - x_m^1)\right\|_{\mathcal{Y}} \;\leq\; (2M+1)\epsilon_1 \,,$$

para todos $l \geq N_1$ e $m \geq N_1$.

Notemos que a sequência x_n^1 é fixada por ϵ_1. Podemos, porém, proceder indutivamente construindo uma subsequência x_n^2 da sequência x_n^1 e assim sucessivamente da seguinte forma. Para o elemento ϵ_a da sequência dos ϵ's, tomamos k_a tal que C_{k_a} satisfaz $\|C - C_{k_a}\| < \epsilon_a$. Por uma aplicação da mesma desigualdade que conduziu a (40.162), concluímos que

$$\|C(x_n^{a-1} - x_m^{a-1})\|_{\mathcal{Y}} \;\leq\; 2M\epsilon_a + \|C_{k_a}(x_n^{a-1} - x_m^{a-1})\|_{\mathcal{Y}} \,.$$

Como C_{k_a} é compacto, existe uma subsequência $x_j^a = x_{n_j}^{a-1},\ j \in \mathbb{N}$, da sequência x_n^{a-1} tal que $C_{k_a}x_j^a$ converge em norma para $j \to \infty$ e, portanto, é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{Y}$, Assim, existe $N_a \equiv N(\epsilon_a) \in \mathbb{N}$ tal que, se $l \geq N_a$ e $m \geq N_a$, então $\left\|C_{k_a}(x_l^a - x_m^a)\right\|_{\mathcal{Y}} \leq \epsilon_a$. Disso concluímos que

$$\|C(x_l^a - x_m^a)\|_{\mathcal{Y}} \;\leq\; (2M+1)\epsilon_a \,, \qquad (40.163)$$

para todos $l \geq N_a$ e $m \geq N_a$.

Daqui por diante escolheremos a sequência de inteiros $N_a,\ a \in \mathbb{N}$ como sendo uma sequência crescente, ou seja, tomamos $N_b > N_a$ caso $b > a$ (ou seja $\epsilon_b < \epsilon_a$). Uma tal escolha é sempre possível (por quê?).

Para cada $a \geq 1$ a subsequência $x_n^a,\ n \in \mathbb{N}$, é uma subsequência de $x_n^{a-1},\ n \in \mathbb{N}$, e todas são subsequências de $x_n^0,\ n \in \mathbb{N}$. Definamos agora a sequência $u_a := x_{N_a}^a,\ a \in \mathbb{N}$, também subsequência de $x_n^0,\ n \in \mathbb{N}$. Tomemos $b > a$. Como $x_n^b,\ n \in \mathbb{N}$, é uma subsequência de $x_n^a,\ n \in \mathbb{N}$, teremos que $u_b = x_{N_b}^b = x_l^a$ para algum $l \geq N_b > N_a$ (justifique por que $l \geq N_b$ lembrando que $x_n^b,\ n \in \mathbb{N}$, é uma subsequência de $x_n^a,\ n \in \mathbb{N}$). Assim, com o uso de (40.163), obtemos

$$\left\|C(u_b - u_a)\right\|_{\mathcal{Y}} \;=\; \left\|C(x_l^a - x_{N_a}^a)\right\|_{\mathcal{Y}} \;\leq\; (2M+1)\epsilon_a \,,$$

pois $l > N_a$. Agora, como $\epsilon_a \to 0$ para $a \to \infty$, existe para cada $\epsilon > 0$ um a tal que $(2M+1)\epsilon_a < \epsilon$. Para tal a valerá $\left\|C(u_b - u_a)\right\|_{\mathcal{Y}} < \epsilon$ para qualquer $b > a$. Isso está nos dizendo que a sequência $Cu_n,\ n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{Y}$ e, portanto, converge em norma, pois $\mathcal{Y}$ é um espaço de Banach. Como $u_n,\ n \in \mathbb{N}$, é uma subsequência de uma sequência limitada arbitrária $x_n^0,\ n \in \mathbb{N}$, isso provou que C é compacto. ■

Um importante corolário imediato é o seguinte:

Corolário 40.22 *O conjunto de todos os operadores compactos agindo em um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *forma uma álgebra* C* *(sem unidade, se* $\mathcal{H}$ *não for de dimensão finita!) em relação à norma de* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$*, a involução sendo dada pela adjunção* $A \to A^*$. □

Prova. Que o conjunto de todos os operadores compactos agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ forma uma álgebra com involução dada pela adjunção $A \to A^*$ foi provado nas Proposições 40.80-40.83, acima. A Proposição 40.84 estabeleceu que o conjunto de todos os operadores compactos agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um subespaço linear fechado de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e portanto, é completo. As demais propriedades, como a propriedade C*, são consequência do Teorema 40.11, página 2197, já que os operadores compactos agindo em $\mathcal{H}$ são elementos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. O operador unidade não é compacto, pois nem toda sequência limitada tem uma subsequência convergente em norma, exceto se $\mathcal{H}$ possuir dimensão finita. ■

No caso de espaços de Hilbert separáveis é possível provar um resultado mais específico.

• **Operadores compactos em espaços de Hilbert separáveis**

Vamos agora nos especializar em operadores compactos agindo em espaços de Hilbert separáveis. Veremos que o Teorema 40.32, página 2294 tem uma importante consequência nesse caso que aponta na direção de uma generalização do Teorema Espectral para operadores compactos (agindo em espaços de Hilbert separáveis).

Teorema 40.33 *Seja* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert separável e seja* $C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *compacto. Seja* $\{\psi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *uma base ortonormal completa em* $\mathcal{H}$*. Então,*

$$C \;=\; \lim_{N\to\infty} C_N \,,$$

o limite se dando na topologia uniforme de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *(a da norma operatorial), onde, para* $N \in \mathbb{N}$*,* $N \geq 1$*, definimos os operadores*

$$C_N\psi \;:=\; \sum_{k=1}^{N} \langle\psi_k,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}}\, C\psi_k$$

para todo $\psi \in \mathcal{H}$. □

Prova. Defina-se, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$\mu_n \;:=\; \sup_{\phi\in P_n^{\perp},\ \|\phi\|_{\mathcal{H}}=1} \|C\phi\|_{\mathcal{H}} \,,$$

onde $P_n := [\psi_1,\ \ldots,\ \psi_n]$ é o subespaço de dimensão finita gerado pelos vetores $\psi_1,\ \ldots,\ \psi_n$. É evidente pela definição que μ_n é monotonamente decrescente. Como $\mu_n \geq 0$ para todo n, a sequência não-crescente μ_n deve convergir a um $\mu \geq 0$.

Vamos provar que, em verdade, $\mu = 0$. Comecemos observando que em cada conjunto $\Xi_n := \left\{\phi \in P_n^{\perp},\ \|\phi\|_{\mathcal{H}} = 1\right\}$ sempre podemos encontrar pelo menos um vetor ξ tal $\|C\xi\| \geq \mu/2$. Se assim não fosse, teríamos $\|C\xi\| < \mu/2$ para <u>todo</u> $\xi \in \Xi_n$, o que é absurdo, pois isso implica que $\mu_n < \mu/2$ mas μ_n é uma sequência decrescente convergindo a μ.

Escolhamos então para cada n um vetor ξ_n com $\|C\xi_n\| \geq \mu/2$. Como $\|\xi_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ e $\xi_n \in P_n^{\perp}$ e como $\{\psi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal completa em $\mathcal{H}$, segue facilmente que

$$\lim_{n\to\infty} \langle y,\ \xi_n\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; 0$$

para todo $y \in \mathcal{H}$ (justifique!). Pelo Teorema da Representação de Riesz, Teorema 39.4, página 2134, isso está dizendo-nos que $\lim_{n\to\infty} \ell(\xi_n) = 0$ para todo funcional linear contínuo ℓ de $\mathcal{H}$. Agora, pelo Teorema 40.32, página 2294, isso implica que $C\xi_n$ converge a zero em norma. Assim, como $\mu/2 \leq \|C\xi_n\|_{\mathcal{H}}$ para todo n, segue que $\mu = 0$, como queríamos mostrar.

A implicação importante desse fato é a seguinte. Para quaisquer $\psi \in \mathcal{H}$ e $N \in \mathbb{N}$, teremos

$$C\psi - C_N\psi \;=\; C\left(\psi - \sum_{n=1}^{N} \langle\psi_n,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}}\ \psi_n\right) \;=\; C\left(\lim_{M\to\infty} \sum_{n=N+1}^{M} \langle\psi_n,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}}\ \psi_n\right) \;=\; C\mathcal{P}_N^{\perp}\psi \,,$$

onde $\mathcal{P}_N^{\perp}$ é o projetor ortogonal sobre $P_N^{\perp}$. Logo,

$$\|C - C_N\| \;=\; \sup_{\psi\in\mathcal{H},\ \|\psi\|_{\mathcal{H}}=1} \left\|C\mathcal{P}_N^{\perp}\psi\right\|_{\mathcal{H}} \;=\; \sup_{\psi\in P_N^{\perp},\ \|\psi\|_{\mathcal{H}}=1} \|C\psi\|_{\mathcal{H}} \;=\; \mu_N \,,$$

de onde concluímos que

$$\lim_{N\to\infty} \|C - C_N\| \;=\; \lim_{N\to\infty} \mu_N \;=\; \mu \;=\; 0\,.$$

Isso completa a demonstração. ■

No teorema acima é interessante observar que os operadores C_N são de posto finito e, portanto, compactos. Concluímos, assim, que todo operador compacto agindo em um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$ pode ser aproximado na norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ por operadores de posto finito. Comentamos, porém, que a restrição a espaços de Hilbert separáveis pode ser eliminada. Isso será provado no Teorema 40.39, página 2314. Uma questão que permaneceu em aberto por muito tempo foi saber se essa propriedade se estenderia a operadores compactos agindo em espaços de Banach. Essa questão foi respondida negativamente por P. Enflo[51] em 1973[52], o qual exibiu um exemplo de um operador compacto em um espaço de Banach que não se deixa aproximar em norma por operadores de posto finito.

• **Um exemplo de operador compacto a se ter em mente**

Seja λ_n, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de números complexos que converge a zero, ou seja, $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0$. Sejam também ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$, e ψ_n, $n \in \mathbb{N}$, dois conjuntos ortonormais de vetores em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, que suporemos ser de dimensão infinita, mas não necessariamente separável. Temos, então, $\langle \phi_n,\ \phi_m\rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{n,\,m}$ e $\langle \psi_n,\ \psi_m\rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{n,\,m}$ para todos m e $n \in \mathbb{N}$.

Pretendemos provar que a sequência de operadores de posto finito definidos para cada $N \in \mathbb{N}$ por

$$Q_N\xi \;:=\; \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle \phi_n,\ \xi\rangle_{\mathcal{H}}\, \psi_n\,, \qquad \forall\, \xi \in \mathcal{H}\,,$$

é uma sequência de Cauchy na norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. De fato, se $\xi \in \mathcal{H}$, tem-se, para $M < N$,

$$\begin{aligned}
\big\|(Q_N - Q_M)\xi\big\|^2 \;&=\; \left\| \sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n \langle \phi_n,\ \xi\rangle_{\mathcal{H}}\, \psi_n \right\|^2 \\
&=\; \left\langle \sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n \langle \phi_n,\ \xi\rangle_{\mathcal{H}}\, \psi_n,\ \sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n \langle \phi_n,\ \xi\rangle_{\mathcal{H}}\, \psi_n \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&=\; \sum_{n'=M+1}^{N} \sum_{n=M+1}^{N} \overline{\lambda_{n'}}\, \lambda_n\, \overline{\langle \phi_{n'},\ \xi\rangle_{\mathcal{H}}}\, \langle \phi_n,\ \xi\rangle_{\mathcal{H}}\, \underbrace{\langle \psi_{n'},\ \psi_n\rangle_{\mathcal{H}}}_{=\,\delta n,\,n'} \\
&=\; \sum_{n=M+1}^{N} |\lambda_n|^2\, |\langle \phi_n,\ \xi\rangle_{\mathcal{H}}|^2 \\
&\leq\; \left(\max_{m\in\{M+1,\,...,\,N\}} |\lambda_m|^2 \right) \sum_{n=M+1}^{N} |\langle \phi_n,\ \xi\rangle_{\mathcal{H}}|^2 \\
&\overset{(39.40)}{\leq}\; \left(\max_{m\in\{M+1,\,...,\,N\}} |\lambda_m|^2 \right) \|\xi\|^2\,.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\big\|Q_N - Q_M\big\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \;\leq\; \max_{m\in\{M+1,\,...,\,N\}} |\lambda_m|^2\,.$$

Agora, como por hipótese, $|\lambda_n| \to 0$ para $n \to \infty$, segue que $\max_{m\in\{M+1,\,...,\,N\}} |\lambda_m|^2$ pode ser feito menor que qualquer $\epsilon > 0$ dado, desde que M (e, portanto, N, pois $M < N$) seja grande o suficiente. Isso provou que Q_N, $N \in \mathbb{N}$, é uma

[51] Per Enflo (1944–).
[52] P. Enflo, "A counterexample to the approximation property in Banach spaces", Acta Math. **130**, 309-317 (1973).

sequência de Cauchy na norma operatorial de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Como $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um espaço de Banach, concluímos que Q_N converge quando $N \to \infty$ para um operador $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Como Q é o limite em norma de uma sequência de operadores compactos (os operadores Q_N são compactos por serem de posto finito), concluímos pela Proposição 40.84, página 2296, que Q é igualmente compacto. Escrevemos,

$$Q \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \phi_n,\ \cdot\,\rangle_{\mathcal{H}}\, \psi_n\,. \tag{40.164}$$

Antes de mudarmos de assunto, façamos um breve comentário sobre a expressão (40.164) que elucidará um ponto que virá mais adiante. Como todos os números complexos, os λ_n têm a forma polar $\lambda_n = |\lambda_n| e^{i\alpha_n}$, onde $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Na expressão (40.164) as fases $e^{i\alpha_n}$ podem ser absorvidas nos vetores ψ_n, sem que os mesmos deixem de formar um conjunto ortonormal. Assim, genericamente, operadores compactos como (40.164) podem ser escritos como

$$Q \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n\, \langle \phi_n,\ \cdot\,\rangle_{\mathcal{H}}\, \psi_n\,. \tag{40.165}$$

onde μ_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de números *reais não-negativos* que converge a zero e ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$, e ψ_n, $n \in \mathbb{N}$, são conjuntos ortonormais de vetores do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Veremos mais adiante que esse exemplo não é gratuito: em verdade, todo operador compacto agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ pode ser representado na forma (40.165) para alguma uma sequência μ_n, $n \in \mathbb{N}$, de números *reais não-negativos* que converge a zero, e para certos ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$, e ψ_n, $n \in \mathbb{N}$, conjuntos ortonormais de vetores de $\mathcal{H}$. Vide Teorema 40.39, página 2314.

O leitor deve cuidadosamente comparar as afirmações feitas acima com as do Teorema 40.33.

• **A raiz quadrada de um operador compacto, autoadjunto e positivo**

Se C é um operador não-nulo, compacto e positivo agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, vimos em (40.147)-(40.149), página 2289, que

$$\sqrt{C} \;=\; \lim_{N\to\infty} \sum_{p=1}^{N} \left(\sum_{n=p}^{N} (-1)^p\, c_n \binom{n}{p} \|C\|^{1/2-p} \right) C^p\,, \tag{40.166}$$

sendo os c_n's definidos em (40.77). O lado direito é o limite em norma de um polinômio em C com coeficientes reais e que não contém nenhum termo proporcional à unidade $\mathbb{1}$. Como C é compacto e um tal polinômio em C é igualmente compacto (Proposição 40.82), concluímos pela Proposição 40.84, que $\sqrt{C}$ é também compacto. Como discutido no Lema da Raiz Quadrada, Teorema 40.30, página 2287, $\sqrt{C}$ é também autoadjunto e positivo.

Se A é um operador compacto (não necessariamente autoadjunto), então A^*A é compacto (pela Proposição 40.81, página 2295), autoadjunto (pois $(A^*A)^* = A^*A$) e positivo (pois $\langle x,\ A^*Ax\rangle = \langle Ax,\ Ax\rangle = \|Ax\| \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$). Logo, $|A| := \sqrt{A^*A}$ é compacto, autoadjunto e positivo. Para futura referência, coletamos os resultados discutidos acima na seguinte proposição.

Proposição 40.85 *Se C é um operador compacto, autoadjunto e positivo agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então $\sqrt{C}$ é igualmente compacto e autoadjunto e positivo. Se A é compacto, então $|A| := \sqrt{A^*A}$ é compacto, autoadjunto e positivo.* □

• **O operador integral de Fredholm**

Seja o intervalo compacto $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$ e seja $k : [a,\ b] \times [a,\ b] \to \mathbb{R}$ uma função fixada contínua de duas variáveis. Para $f \in C([a,\ b])$, uma função contínua (real ou complexa) definida em $[a,\ b]$, seja

$$(Kf)(x) \;:=\; \int_a^b k(x,\ y) f(y)\, dy\,.$$

É bastante claro que K é um operador linear mapeando funções contínuas em $[a,\ b]$ em funções contínuas em $[a,\ b]$, ou seja, $K : C([a,\ b]) \to C([a,\ b])$. Isso pois k foi suposta ser contínua nas duas variáveis. O espaço vetorial $C([a,\ b])$ é um

espaço de Banach com a norma no supremo: $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,\,b]}|f(x)|$. Não é difícil de se ver que K é limitado nessa norma, pois

$$|(Kf)(x)| \;\le\; \int_a^b |k(x,\,y)||f(y)|\,dy \;\le\; \left(\int_a^b |k(x,\,y)|\,dy\right)\left(\sup_{y'\in[a,\,b]}|f(y')|\right) \;=\; \left(\int_a^b |k(x,\,y)|\,dy\right)\|f\|_\infty$$

e, portanto, $\|Kf\|_\infty \le M\|f\|_\infty$, onde $M = (b-a)\sup_{x,\,y\in[a,\,b]}|k(x,\,y)| < \infty$, devido à continuidade de k.

O operador K é denominado *operador integral de Fredholm*[53] e surge no problema de Sturm-Liouville, como discutido no Capítulo 19, página 1027. Um fato muito relevante para o problema de Sturm-Liouville é que K é um operador compacto, enquanto operador agindo em $C([a,\,b])$. As consequências desse para o problema de Sturm-Liouville foram discutidas no Capítulo 19 e seguem de outros resultados gerais sobre operadores compactos que discutiremos nas próximas seções.

Mostraremos que K é compacto usando dois tipos de argumento, ambos instrutivos, o primeiro sendo mais elementar.

I. Se $p_n(x,\,y) := \sum_{k,\,l=0}^{n} p_{n,\,k,\,l}\,x^k\,y^l$ é um polinômio de grau n nas variáveis x e y, então $P_n : C([a,\,b]) \to C([a,\,b])$ definido por

$$(P_nf)(x) \;:=\; \int_a^b p_n(x,\,y)\,f(y)\,dy \;=\; \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{n} p_{n,\,k,\,l}\int_a^b y^l\,f(y)\,dy\right)x^k$$

é claramente um operador de posto finito (os monômios x^k são elementos de $C([a,\,b])$) e, portanto, é compacto. Se $k(x,\,y)$ é contínua no retângulo compacto $[a,\,b]\times[a,\,b]$ então, pelo Teorema de Weierstrass (vide Teorema 37.5, página 1955 ou vide o Teorema de Stone-Weierstrass, Teorema 37.16, página 1989), k pode ser uniformemente aproximada por polinômios em x e y. É fácil ver daí (exercício!) que isso implica que K é aproximada na norma de $\mathcal{B}(C([a,\,b]))$ por operadores de posto finito como P_n acima. Assim, pela Proposição 40.84, página 2296, K é compacto como operador agindo em $C([a,\,b])$.

II. Para um certo $\mathcal{N} > 0$, seja $B_\mathcal{N} \subset C\big([a,\,b]\big)$ a bola de raio $\mathcal{N}$ centrada em 0: $B_\mathcal{N} := \Big\{f \in C\big([a,\,b]\big),\ \|f\|_\infty < \mathcal{N}\Big\}$. Se f é uma função qualquer de $B_\mathcal{N}$, teremos que $(Kf)(x) - (Kf)(x') = \int_a^b \big(k(x,\,y) - k(x',\,y)\big)f(y)dy$. Logo, $\big|(Kf)(x) - (Kf)(x')\big| \le \|f\|_\infty \int_a^b |k(x,\,y) - k(x',\,y)|dy \le \mathcal{N}(b-a)\sup_{y\in[a,\,b]}\big|k(x,\,y) - k(x',\,y)\big|$. Como k é contínua, podemos para todo $\epsilon' > 0$ encontrar $\delta' > 0$ tal que $\big|k(x,\,y) - k(x',\,y)\big| < \epsilon'$ sempre que $|x - x'| < \delta'$. Esse $\delta'(\epsilon')$ depende apenas de ϵ', pois pode ser escolhido independente de x, x' e y, já que k é contínua em um compacto. Assim, concluímos que para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta(\epsilon) > 0$, a saber, $\delta(\epsilon) = \delta'\left(\frac{\epsilon}{(b-a)\mathcal{N}}\right)$ tal que $|(Kf)(x) - (Kf)(x')| < \epsilon$ sempre que $|x - x'| < \delta(\epsilon)$. O fato de δ não depender de x nem de x' nem de f significa que o conjunto de funções $\{Kf,\ f \in B_\mathcal{N}\}$ é o que se denomina ser um *conjunto equicontínuo de funções*. Por um teorema clássico de Análise conhecido como Teorema de Ascoli, discutido na Seção 32.3.4, página 1630 (vide Teoremas 32.18 e 32.19, páginas 1632 e 1634, respectivamente), sabe-se que toda sequência de funções equicontínuas e equilimitadas definidas em um compacto possui pelo menos uma subsequência convergente na norma do supremo. Assim, se f_n é uma sequência de funções em $B_\mathcal{N}$, a sequência Kf_n tem pelo menos subsequência convergente na norma do supremo. Ora, isso precisamente afirma que K é compacto.

• **O operador integral de Volterra**

Um outro operador importante em equações diferenciais e integrais é o chamado *operador integral de Volterra*[54], ou simplesmente *operador de Volterra*:

$$(Vf)(x) \;:=\; \int_a^x k(x,\,y)f(y)\,dy\,,$$

definido para f contínua no intervalo $[a,\,b]$ onde, como no caso do operador integral de Fredholm, k é uma função fixa contínua no retângulo $[a,\,b]\times[a,\,b]$. É fácil ver que V é um operador linear mapeando o espaço de Banach $C([a,\,b])$ em si mesmo. Podemos escrever

$$(Vf)(x) \;=\; \int_a^b v(x,\,y)f(y)\,dy\,,$$

[53] Erik Ivar Fredholm (1866–1927).
[54] Vito Volterra (1860–1940).

com $v(x,\,y) = k(x,\,y)\chi_{[a,\,x]}(y)$, onde

$$\chi_{[a,\,x]}(y) \;:=\; \begin{cases} 1\,, & \text{se } y \in [a,\,x]\,,\\ 0\,, & \text{se } y \notin [a,\,x]\,. \end{cases}$$

Como v é limitada no retângulo $[a,\,b]\times[a,\,b]$, é fácil mostrar, repetindo o que fizemos para o operador integral de Fredholm, que V é um operador limitado agindo em $C([a,\,b])$. Porém, como v não é contínua (pois $\chi_{[a,\,x]}$ não o é), não podemos repetir os argumentos que conduziram-nos à conclusão que o operador integral de Fredholm é compacto. No entanto, os operadores de Volterra são compactos, como mostra o seguinte argumento.

Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos o operador integral de Fredholm definido por

$$(V_nf)(x) \;=\; \int_a^b v_n(x,\,y)f(y)\,dy\,, \qquad \text{onde} \qquad v_n(x,\,y) \;:=\; k(x,\,y)\,e^{-n\left(|x-y|-(x-y)\right)}\,.$$

Vemos que se $a \le y \le x$ então $v_n(x,\,y) = k(x,\,y) = v(x,\,y)$. Se, porém, $x < y \le b$, teremos $\lim_{n\to\infty} v_n(x,\,y) = 0$, que é quanto vale v na mesma região. Assim, vemos ao menos intuitivamente que $V_n \to V$ quando $n \to \infty$. Vamos provar que essa convergência se dá na norma de $\mathcal{B}\Big(C\big([a,\,b]\big)\Big)$. Como os V_n são compactos (por serem operadores integrais de Fredholm), isso implica que V é compacto pela Proposição 40.84, página 2296. Observemos, então, que para $f \in C\big([a,\,b]\big)$, vale

$$(Vf)(x) - (V_nf)(x) \;=\; \int_a^b \big(v(x,\,y) - v_n(x,\,y)\big)\,f(y)\,dy$$

$$=\; \int_x^b \big(v(x,\,y) - v_n(x,\,y)\big)\,f(y)\,dy \;=\; -\int_x^b k(x,\,y)e^{-n\left(|x-y|-(x-y)\right)}\,f(y)\,dy\,.$$

Logo,

$$\Big|\big((V-V_n)f\big)(x)\Big| \;\le\; \left(\sup_{x,\,y\in[a,\,b]}\big|k(x,\,y)\big|\right)\|f\|_\infty \int_x^b e^{-n\left(|x-y|-(x-y)\right)}\,dy\,.$$

Agora,

$$\int_x^b e^{-n\left(|x-y|-(x-y)\right)}\,dy \;\overset{y'=y-x}{=}\; \int_0^{b-x} e^{-n(|y'|+y')}\,dy' \;=\; \int_0^{b-x} e^{-2ny'}\,dy' \;=\; \frac{1-e^{-2n(b-x)}}{2n}\,.$$

Dessa forma,

$$\big\|(V-V_n)f\big\|_\infty \;\le\; \left(\sup_{x,\,y\in[a,\,b]}\big|k(x,\,y)\big|\right)\frac{1-e^{-2n(b-a)}}{2n}\,\|f\|_\infty\,,$$

e, portanto,

$$\|V-V_n\| \;\le\; \left(\sup_{x,\,y\in[a,\,b]}\big|k(x,\,y)\big|\right)\frac{1-e^{-2n(b-a)}}{2n}\,,$$

provando que $\lim_{n\to\infty}\|V-V_n\| = 0$. Isso demonstrou que os operadores de Volterra são compactos.

Um caso interessante é aquele em que $k(x,\,y) \equiv 1$. Denotemos por W o correspondente operador de Volterra: $(Wf)(x) = \int_a^x f(y)\,dy$. Esse operador já foi discutido no Exercício E. 40.30, página 2229, e no Exemplo 40.10, página 2283, onde provamos que W tem raio espectral nulo (apesar de ter norma não-nula) e provamos que seu espectro consiste em apenas um ponto, a saber, $\sigma(W) = \{0\}$, apesar de seu espectro pontual (de autovalores) ser vazio e de W ser compacto.

*

Notemos, por fim, que tanto os operadores integrais de Fredholm quando os de Volterra são limitados e definidos em $C([a,\,b])$, que é um conjunto denso em espaços de Hilbert do tipo $L^2\big([a,\,b],\,r(x)dx\big)$ com r positiva e contínua. Assim, pelo Teorema BLT, Teorema 40.1, página 2175, esses operadores podem ser estendidos a operadores compactos agindo nesses espaços de Hilbert.

E. 40.46 *Exercício.* Considere o operador $C : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ definido para cada $a = \big(a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, a_5,\, \ldots\big) \in \ell_2(\mathbb{N})$ por

$$Ca \;:=\; \Big(0,\, a_1,\, \frac{a_2}{2},\, \frac{a_3}{3},\, \frac{a_4}{4},\, \ldots\Big)\;,$$

ou seja, a k-ésima componente $(Ca)_k$ de Ca é 0 se $k = 1$ e $a_{k-1}/(k-1)$ se $k \neq 1$. Prove que C é compacto, que não é autoadjunto e que não possui autovalores.

Sugestões. Talvez a forma mais rápida de provar que C é compacto seja mostrando que C é um operador de Hilbert-Schmidt. Vide Seção 40.10.2, página 2341. Outra maneira mais pedestre é provar que C pode ser aproximado em norma por operadores de posto finito. De fato, considere para cada $n \in \mathbb{N}$ o operador de posto finito $C_n : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ dado por

$$C_n\, a \;:=\; \Big(0,\, a_1,\, \frac{a_2}{2},\, \frac{a_3}{3},\, \ldots,\, \frac{a_n}{n},\, 0,\, 0,\, \ldots\Big)\;,$$

ou seja, a k-ésima componente $(C_n\, a)_k$ de $C_n\, a$ é 0 se $k = 1$ ou se $k \geq n+2$ e $a_{k-1}/(k-1)$ se $2 \leq k \leq n+1$. Mostre que

$$Ca - C_n\, a \;=\; \Big(\underbrace{0,\;\ldots,\;0}_{n+1\text{vezes}},\;\frac{a_{n+1}}{n+1},\;\frac{a_{n+2}}{n+2},\;\ldots\Big)$$

e conclua que $\big\|(C - C_n)a\big\| \leq \|a\|/(n+1)$, o que implica que $\big\|C - C_n\big\| \leq 1/(n+1)$ e, portanto, que C é o limite uniforme de operadores de posto finito. ✣

40.8.1 Alguns Fatos Gerais Sobre o Espectro de Operadores Compactos

Vamos agora estudar propriedades gerais do espectro de operadores compactos agindo em espaços de Banach. São essas propriedades que fazem dos operadores compactos objetos de especial interesse. Na Seção 40.8.2, página 2309, retomaremos a discussão especializando-a ao importante caso de operadores compactos autoadjuntos agindo em espaços de Hilbert. Aqui, um de nossos resultados mais expressivos é o célebre Teorema da Alternativa de Fredholm, ao qual dedicamos a Seção 40.8.1.1, página 2304. Esse teorema possui importantes aplicações à teoria das equações integrais.

• **Autovalores de operadores compactos**

O teorema a seguir coleta as propriedades gerais mais relevantes do espectro de autovalores (ou espectro pontual) de operadores compactos agindo em espaços de Banach. A relação entre o espectro e o espectro de autovalores de operadores compactos será estabelecida no Teorema da Alternativa de Fredholm, Teorema 40.35, página 2308.

Teorema 40.34 *Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach e seja $C : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ um operador compacto. Denotemos por $\sigma_p(C)$, o conjunto de todos os autovalores de C. Então, valem as seguintes afirmações:*

I. *$\sigma_p(C) \subset \big\{z \in \mathbb{C}\big|\; |z| \leq \|C\|\big\}$, a bola fechada de raio $\|C\|$ centrada em 0.*

II. *$\sigma_p(C)$ é um conjunto contável (eventualmente finito ou mesmo vazio).*

III. *O único possível ponto de acumulação de $\sigma_p(C)$ é o ponto 0.*

IV. *Cada autovalor não-nulo de C é finitamente degenerado, ou seja, o subespaço de seus autovetores tem dimensão finita.* □

Comentários. É claro que $\sigma_p(C)$ é finito quando C for de posto finito. No entanto, $\sigma_p(C)$ pode ser até mesmo vazio, mesmo se C não for de posto finito. Isso é ilustrado no exemplo do operador de Volterra W, tratado no Exemplo 40.10 à página 2283. Outro exemplo é discutido no Exercício E. 40.46, página 2302. No Teorema 40.36, página 2309, trataremos do caso específico em que $\mathcal{X}$ é um espaço de Hilbert e C é autoadjunto e lá veremos que, nesse caso, $\sigma_p(C)$ é sempre não-vazio e é um conjunto infinito (e, portanto, enumerável) se e somente se C não for de posto finito. Como dissemos acima, essa última afirmação não é necessariamente verdadeira no caso de operadores compactos em espaços de Banach ou de operadores compactos não autoadjuntos em espaços de Hilbert, como ilustra o já mencionado Exercício E. 40.46 da página 2302. ♣

Prova do item **I**. O item **I** decorre de fatos já demonstrados: $\sigma_p(C) \subset \sigma(C) \subset \big\{z \in \mathbb{C}\big|\; |z| \leq \|C\|\big\}$. Vide Proposição 40.70, página 2279.

Prova dos itens **II** e **III**. Seja $R > 0$. Vamos primeiramente provar que $\Gamma_R := \big\{\lambda \in \sigma_p(C)\big|\; |\lambda| \geq R\big\}$ é um conjunto finito. Trata-se claramente da coleção de todos os autovalores de C cujo módulo é ao menos R.

A prova é feita por absurdo. Assumamos que Γ_R possua infinitos elementos e tomemos uma sequência $\lambda_n \in \Gamma_R$, $n \in \mathbb{N}$, de sorte que os elementos da mesma sejam todos distintos: $\lambda_m \neq \lambda_n$ se $m \neq n$. Seja $y_n \in \mathcal{X}$ um autovetor correspondente a λ_n, ou seja, tal que $Cy_n = \lambda_n y_n$. Claro é que cada conjunto finito $\{y_1,\, \ldots,\, y_m\}$ é composto por vetores linearmente independentes. Para cada $m \in \mathbb{N}$, defina-se $Y_m := \big[y_1,\, \ldots,\, y_m\big]$, o subespaço gerado por $\{y_1,\, \ldots,\, y_m\}$. Claro está que cada Y_m é um subespaço de dimensão m (finita, portanto) de $\mathcal{X}$, e que é um subespaço fechado. Além disso, Y_m é um subespaço próprio de Y_n caso $m < n$.

Invocando o Lema de Riesz, Lema 40.23, página 2363, podemos afirmar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in Y_n$ tal que $\|x_n\| = 1$ e $\inf_{x \in Y_{n-1}} \|x_n - x\| \geq 1/2$. Com essa sequência construiremos a contradição desejada.

É claro se $x \in Y_n$, então x pode ser escrito de modo único na forma de uma combinação linear dos elementos de $\{y_1,\, \ldots,\, y_n\}$:

$$x \;=\; \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n\;.$$

Para um tal $x \in Y_n$, temos que

$$(C - \lambda_n \mathbb{1})x \;=\; \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)y_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)y_{n-1}\;,$$

pois $(C - \lambda_n \mathbb{1})y_n = 0$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ vale a afirmação

$$(C - \lambda_n \mathbb{1})x \in Y_{n-1} \quad \text{sempre que } x \in Y_n\;. \tag{40.167}$$

Como C é compacto e $\|x_n\| = 1$, a sequência Cx_n, $n \in \mathbb{N}$, deve ter ao menos uma subsequência convergente. Analisemos se isso é possível.

Tomemos $m < n$, com o que vale $Y_m \subset Y_{n-1}$. Como $\lambda_m \neq 0$ (pois $|\lambda_m| \geq R > 0$) podemos escrever, para $m < n$,

$$Cx_n - Cx_m \;=\; \lambda_n x_n - \Big(Cx_m - \big(C - \lambda_n\big)x_n\Big) \;=\; \lambda_n\big[x_n - \tilde{x}\big]\;,$$

onde

$$\tilde{x} \;:=\; \frac{1}{\lambda_n}\Big(Cx_m - \big(C - \lambda_n\big)x_n\Big)\;.$$

Sabemos de (40.167) que $\big(C - \lambda_n\big)x_n \in Y_{n-1}$, pois $x_n \in Y_n$. Além disso, $Cx_m = \big(C - \lambda_m\big)x_m + \lambda_m x_m \in Y_m$, pois $x_m \in Y_m$ e (novamente por (40.167)) $\big(C - \lambda_m\big)x_m \in Y_{m-1} \subset Y_m$. Logo, concluímos que $\tilde{x} \in Y_{n-1}$, . Segue disso que

$$\big\|Cx_n - Cx_m\big\| \;=\; |\lambda_n|\,\big\|x_n - \tilde{x}\big\| \;\geq\; \frac{R}{2}$$

já que $|\lambda_n| \geq R$ e que $\big\|x_n - \tilde{x}\big\| \geq \frac{1}{2}$, pois $\tilde{x} \in Y_{n-1}$.

Como m e n são arbitrários (exceto pelo fato que $m < n$) a desigualdade $\big\|Cx_n - Cx_m\big\| \geq \frac{R}{2}$ mostra que a sequência Cx_n, $n \in \mathbb{N}$, não pode ter uma subsequência convergente, uma contradição com a compacidade de C.

Isso estabeleceu que Γ_R é um conjunto finito para cada $R > 0$. Uma consequência imediata é que $\sigma_p(C)$ é no máximo um conjunto contável, pois claro é que $\sigma_p(C) \setminus \{0\} = \bigcup_{R>0,\, R \in \mathbb{Q}} \Gamma_R$, uma união contável de um conjunto finito. É também claro disso que 0 é o único ponto de acumulação possível de $\sigma_p(C)$.

Prova do item **IV**. A demonstração é análoga à do item II. Seja $\lambda \in \sigma_p(C) \setminus \{0\}$, um autovalor não-nulo infinitamente degenerado de C, se tal houver. Sejam y_n, $n \in \mathbb{N}$, uma coleção contável de autovetores correspondentes: $Cy_n = \lambda y_n$. Sem perda de generalidade podemos assumir que cada conjunto finito $\{y_1,\, \ldots,\, y_m\}$ é composto por vetores linearmente independentes. Para cada $m \in \mathbb{N}$, defina-se $Y_m := \big[y_1,\, \ldots,\, y_m\big]$, o subespaço gerado por $\{y_1,\, \ldots,\, y_m\}$. Claro está que cada Y_m é um subespaço de dimensão m (finita, portanto) de $\mathcal{X}$, que é um subespaço fechado e que Y_m é um subespaço próprio de Y_n caso $m < n$.

Invocando o Lema de Riesz, Lema 40.23, página 2363, podemos afirmar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in Y_n$ tal que $\|x_n\| = 1$ e $\inf_{x \in Y_{n-1}} \|x_n - x\| \geq 1/2$. Com essa sequência construiremos a contradição desejada.

É evidente que $Cx_n = \lambda x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomemos $m < n$, com o que vale $Y_m \subset Y_{n-1}$. Teremos $Cx_n - Cx_m = \lambda(x_n - x_m)$ e, portanto $\|Cx_n - Cx_m\| = |\lambda|\,\|x_m - x_m\| \geq |\lambda|/2$, dado que $x_m \in Y_m \subset Y_{n-1}$.

Como m e n são arbitrários (exceto pelo fato que $m < n$) a desigualdade $\|Cx_n - Cx_m\| \geq \frac{|\lambda|}{2}$ com $\lambda \neq 0$ mostra que a sequência Cx_n, $n \in \mathbb{N}$, não pode ter uma subsequência convergente, uma contradição com a compacidade de C. Portanto, λ não pode ser infinitamente degenerado. ■

Nota. O estudante deve notar a utilidade do Lema de Riesz, Lema 40.23, página 2363, na estratégia da demonstração acima ao observar como o mesmo foi usado na prova dos itens II e IV. Em espaços de Hilbert, se C é autoadjunto, podemos garantir que autovetores y_n distintos são ortonormais e que, portanto $\|y_n - y_m\| = \sqrt{2}$ se $m \neq n$. No caso de espaços de Banach, tal garantia de que os autovetores são uniformemente distanciados não é imediata. Com uso das sequências x_n, porém, cuja existência é garantida pelo Lema 40.23, página 2363, obtemos um substituto ainda utilizável. ♣

40.8.1.1 O Teorema da Alternativa de Fredholm

O *Teorema da Alternativa de Fredholm* foi historicamente enunciado no contexto de equações integrais, por Fredholm[55], e depois generalizado por diversos autores, como Hilbert, Schmidt e, notadamente, por F. Riesz[56], para o contexto geral de operadores compactos em espaços de Banach. É essa versão geral que apresentaremos aqui. Esse importante teorema possui diversos enunciados e consequências e é também o ponto de partida de uma área da Análise Funcional dedicada ao estudo dos chamados *operadores de Fredholm* (vide, e.g., [367]), de grande relevância no estudo de operadores diferenciais elípticos, um tema cuja importância estende-se à Geometria Diferencial ("Teorema do Índice de Atiyah[57]-Singer[58]").

Uma das consequências básicas do Teorema da Alternativa de Fredholm é a seguinte informação: se K for um operador compacto agindo em um espaço de Banach, então, excetuando eventualmente o 0, todos os elementos de seu espectro são autovalores, ou seja, $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$.

Como dissemos, tencionamos apresentar uma demonstração geral, válida para operadores compactos agindo em espaços de Banach. Demonstrações restritas a operadores compactos agindo em espaços de Hilbert (autoadjuntos ou não) são mais simples e diretas e podem ser encontradas em diversos textos. Recomendamos particularmente as demonstrações de [412] e [55].

A estratégia de demonstração que seguiremos é extraída com diversas adaptações de [419], o qual segue a estratégia original de F. Riesz[59]. Antes de enunciarmos e demonstrarmos o Teorema da Alternativa de Fredholm precisamos de diversos resultados preparatórios, os quais são de interesse por si só (especialmente pois os mesmos são relevantes à teoria dos chamados *operadores de Fredholm*).

• **Alguns resultados preparatórios. I**

Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach e $C : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ um operador compacto. Para $n \in \mathbb{N}$, defina-se $\mathsf{K}_n := \mathrm{Ker}\big((\mathbb{1} - C)^n\big)$ e defina-se também $\mathsf{K}_0 := \{0\}$. É claro que $\mathsf{K}_n \subset \mathsf{K}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, pois se $x \in \mathcal{X}$ é tal que $(\mathbb{1} - C)^n x = 0$, então evidentemente $(\mathbb{1} - C)^{n+1} x = 0$. Afirmamos que cada K_n é um subespaço de dimensão finita (e, portanto, fechado) de $\mathcal{X}$. Para tal, observemos que, pelo binômio de Newton, temos $(\mathbb{1} - C)^n = \mathbb{1} - C^{(n)}$, onde

$$C^{(n)} \;:=\; -\sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} (-1)^p C^p \,. \tag{40.168}$$

Pelas Proposições 40.81 e 40.82, página 2295, $C^{(n)}$ é compacto. Logo, $\mathrm{Ker}\big((\mathbb{1} - C)^n\big)$ coincide com $\mathrm{Ker}\big(\mathbb{1} - C^{(n)}\big)$, que é o subespaço dos autovetores de $C^{(n)}$ com autovalor 1. Do item IV do Teorema 40.34, página 2302, concluímos que cada K_n tem dimensão finita.

Já comentamos que $\mathsf{K}_n \subset \mathsf{K}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Se K_n for um subespaço *próprio* de K_{n+1} (ou seja, se $\mathsf{K}_{n+1} \setminus \mathsf{K}_n \neq \emptyset$) denotamos esse fato por $\mathsf{K}_n \subsetneq \mathsf{K}_{n+1}$.

[55] Erik Ivar Fredholm (1866–1927). Os trabalhos de Fredholm que deram origem a boa parte dos problemas aqui tratados e de alguns dos resultados aqui obtidos datam dos anos de 1900 e 1903 e são os seguintes: I. Fredholm, "Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet", Kong. Vetenkaps-Akademiens Förh. Stockholm 39–46 (1900); I. Fredholm, "Sur une classe d'equations fonctionelles", Acta Math. **27**, 365–390 (1903).

[56] Frigyes Riesz (1880–1956).

[57] Sir Michael Francis Atiyah (1929–2019).

[58] Isadore Manuel Singer (1924–).

[59] A referência original é: F. Riesz, "Über lineare Funktionalgleichungen", Acta Math. **41**, 71–98 (1918). [121] qualifica esse artigo como "um dos mais bem escritos de todos os tempos".

Vamos agora demonstrar a seguinte afirmação: se para $n \in \mathbb{N}$ valer $\mathsf{K}_n \subsetneq \mathsf{K}_{n+1}$, então $\mathsf{K}_{n-1} \subsetneq \mathsf{K}_n$. De fato, seja $x \in \mathsf{K}_{n+1} \setminus \mathsf{K}_n$. Então, $(\mathbb{1} - C)^{n+1} x = 0$, mas $(\mathbb{1} - C)^n x \neq 0$. Logo, $y := (\mathbb{1} - C)x$ satisfaz $(\mathbb{1} - C)^n y = 0$, mas $(\mathbb{1} - C)^{n-1} y \neq 0$, ou seja, $y \in \mathsf{K}_n \setminus \mathsf{K}_{n-1}$. Note que esse argumento também vale caso $n = 1$.

A afirmação do último parágrafo possui a seguinte implicação evidente: se existir $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $\mathsf{K}_{n_0} = \mathsf{K}_{n_0+1}$ então $\mathsf{K}_{n_0} = \mathsf{K}_m$ para todo $m \geq n_0$. A questão que agora se coloca é saber se existe um tal n_0 e a resposta no caso de C ser compacto é afirmativa!

Se um tal n_0 não existisse valeria $\mathsf{K}_n \subsetneq \mathsf{K}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Como cada K_n é um subespaço fechado, podemos mais uma vez evocar o Lema de Riesz, Lema 40.23, página 2363, e obter uma sequência x_n, $n \in \mathbb{N}$, com as seguintes propriedades: $x_n \in \mathsf{K}_n$, $\|x_n\| = 1$ e $\inf_{y \in \mathsf{K}_{n-1}} \|x_n - y\| \geq 1/2$. (Note-se que no caso $n = 1$ a afirmação $\inf_{y \in \mathsf{K}_0} \|x_1 - y\| \geq 1/2$ segue de $\|x_1\| = 1$). Tomemos $m < n$, arbitrários. Temos que

$$Cx_n - Cx_m \;=\; x_n - \tilde{x}\,, \qquad \text{onde} \qquad \tilde{x} \;:=\; Cx_m - \big(C - \mathbb{1}\big)x_n\,.$$

Afirmamos que $\tilde{x} \in \mathsf{K}_{n-1}$. De fato,

$$(\mathbb{1} - C)^{n-1}\tilde{x} \;=\; C(\mathbb{1} - C)^{n-1}x_m - \big(C - \mathbb{1}\big)^n x_n \;=\; 0\,,$$

pois $\big(C - \mathbb{1}\big)^n x_n = 0$, já que $x_n \in \mathsf{K}_n$ e pois $(\mathbb{1} - C)^{n-1}x_m = (\mathbb{1} - C)^{n-1-m}(\mathbb{1} - C)^m x_m = 0$, pois $x_m \in \mathsf{K}_m$ e $n - 1 - m \geq 0$. Com isso, vemos que

$$\|Cx_n - Cx_m\| \;=\; \big\|x_n - \tilde{x}\big\| \;\geq\; \inf_{y \in \mathsf{K}_{n-1}} \|x_n - y\| \;\geq\; 1/2\,.$$

Isso mostra que a sequência Cx_n, $n \in \mathbb{N}$, não possui nenhuma subsequência convergente. Como $\|x_n\| = 1$ para todo n, esse fato contradiz a compacidade de C. A conclusão disso é que deve existir $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $\mathsf{K}_{n_0} = \mathsf{K}_m$ para todo $m \geq n_0$.

Para futura referência, reunimos nossos resultados acima na seguinte proposição:

Proposição 40.86 *Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach e $C : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ um operador compacto. Para $n \in \mathbb{N}$, defina-se $\mathsf{K}_n := \mathrm{Ker}\big((\mathbb{1} - C)^n\big)$ e defina-se também $\mathsf{K}_0 := \{0\}$. Então, cada K_n, $n \in \mathbb{N}_0$, é um subespaço de dimensão finita (e, portanto, fechado) de $\mathcal{X}$. Tem-se também que $\mathsf{K}_n \subset \mathsf{K}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Por fim, existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $\mathsf{K}_m \subsetneq \mathsf{K}_{m+1}$ para todo $m < n_0$, mas $\mathsf{K}_m = \mathsf{K}_{m+1}$ para todo $m \geq n_0$. Tem-se, portanto, a sequência de inclusões*

$$\{0\} \;\equiv\; \mathsf{K}_0 \;\subsetneq\; \cdots \;\subsetneq\; \mathsf{K}_{n_0} \;=\; \mathsf{K}_{n_0+1} \;=\; \mathsf{K}_{n_0+2} \;=\; \cdots \quad .$$

Aqui, $\mathsf{K}_a \subsetneq \mathsf{K}_b$ significa que K_a é um subespaço próprio de K_b. □

• **Alguns resultados preparatórios. II. Um lema devido a Riesz**

O lema que apresentamos a seguir desempenha um papel central na teoria dos operadores compactos e, como outros, resultados sobre tais operadores, é originário dos trabalhos já citados de F. Riesz.

Lema 40.12 *Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach e $C : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ um operador compacto. Então,* $\mathrm{Ran}\,(\mathbb{1} - C)$ *é um subespaço fechado de $\mathcal{X}$.* □

Prova. Seja $y_n = (\mathbb{1} - C)x_n$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência em $\mathrm{Ran}\,(\mathbb{1} - C)$ que convirja a $y \in \mathcal{X}$. Desejamos provar que $y \in \mathrm{Ran}\,(\mathbb{1} - C)$. Se $y = 0$ não há o que provar e, portanto, podemos considerar apenas o caso $y \neq 0$. Nessa situação, podemos sem perda de generalidade assumir que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $x_n \notin \mathsf{K}_1 := \mathrm{Ker}\,(\mathbb{1} - C)$.

Seja Y_n o subespaço gerado por K_1 e por x_n. Pelo Lema de Riesz, Lema 40.23, página 2363, podemos encontrar $\tilde{x}_n \in Y_n \setminus \mathsf{K}_1$ tal que $\big\|\tilde{x}_n\big\| = 1$ e $\inf_{y \in \mathsf{K}_1} \big\|\tilde{x}_n - y\big\| \geq 1/2$. Podemos assim escrever $x_n = \alpha_n \tilde{x}_n + k_n$, com $\alpha_n \neq 0$ e para algum $k_n \in \mathsf{K}_1$. Com isso, temos $y_n = (\mathbb{1} - C)\big(\alpha_n \tilde{x}_n\big)$.

Afirmamos que a sequência $|\alpha_n|$, $n \in \mathbb{N}$, é limitada, ou seja, que existe $M > 0$ tal que $|\alpha_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos supor que tal não fosse o caso e que houvesse uma subsequência α_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, com $|\alpha_{n_k}| \to \infty$ para $k \to \infty$. Tomemos $z_k := \tilde{x}_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Temos que

$$(\mathbb{1} - C)z_k \;=\; (\mathbb{1} - C)\tilde{x}_{n_k} \;=\; \frac{1}{\alpha_{n_k}} y_{n_k} \;\stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow}\; 0\,, \tag{40.169}$$

pois y_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, é convergente (por ser subsequência de uma sequência convergente) e pois $|\alpha_{n_k}| \to \infty$. Como $\|z_k\| = 1$ para todo k, a sequência Cz_k, $k \in \mathbb{N}$, possui uma subsequência convergente Cz_{k_j}, $j \in \mathbb{N}$. Agora, como

$$z_{k_j} \;=\; (\mathbb{1} - C)z_{k_j} + Cz_{k_j} \,,$$

vemos que a sequência z_{k_j}, $j \in \mathbb{N}$, é igualmente convergente, pois $(\mathbb{1} - C)z_{k_j} \to 0$ (por (40.169)). Seja $z := \lim_{j\to\infty} z_{k_j}$. Temos que $(\mathbb{1} - C)z = (\mathbb{1} - C)\big(\lim_{j\to\infty} z_{k_j}\big) = \lim_{j\to\infty}(\mathbb{1} - C)z_{k_j} = 0$, como vimos. Logo, $z \in \mathsf{K}_1$. Portanto, teríamos que $0 = \lim\limits_{j\to\infty} \|z_{k_j} - z\|$, ou seja, $0 = \lim\limits_{j\to\infty} \Big\|\tilde{x}_{n_{k_j}} - z\Big\|$. Isso, porém, é impossível, pois $z \in \mathsf{K}_1$ e $\inf\limits_{y\in\mathsf{K}_1} \big\|\tilde{x}_n - y\big\| \geq 1/2$ para todo n.

Assim, estabelecemos que existe $M > 0$ tal que $|\alpha_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Naturalmente, isso implica que a sequência $\alpha_n\tilde{x}_n$ é igualmente limitada (a saber, $\big\|\alpha_n\tilde{x}_n\big\| \leq M$ para todo n). Logo, a sequência $C\big(\alpha_n\tilde{x}_n\big)$ possui uma subsequência $C\big(\alpha_{n_a}\tilde{x}_{n_a}\big)$, $a \in \mathbb{N}$, convergente em $\mathcal{X}$. Consequentemente, como

$$\alpha_{n_a}\tilde{x}_{n_a} \;=\; C\big(\alpha_{n_a}\tilde{x}_{n_a}\big) + (\mathbb{1} - C)\big(\alpha_{n_a}\tilde{x}_{n_a}\big) \,, \tag{40.170}$$

vemos que a sequência $\alpha_{n_a}\tilde{x}_{n_a}$, $a \in \mathbb{N}$, também converge em $\mathcal{X}$, pois $\lim\limits_{a\to\infty} \alpha_{n_a} C\tilde{x}_{n_a}$ existe e $\lim\limits_{a\to\infty}(\mathbb{1} - C)\big(\alpha_{n_a}\tilde{x}_{n_a}\big) = \lim\limits_{a\to\infty}(\mathbb{1} - C)x_{n_a} = y$.

Denotando $\lim\limits_{a\to\infty} \alpha_{n_a}\tilde{x}_{n_a}$ por w, a mesma expressão (40.170) diz-nos, então, que $w = Cw + y$, ou seja, $y = (\mathbb{1} - C)w$, provando que $y \in \operatorname{Ran}(\mathbb{1} - C)$, como desejávamos estabelecer. ■

• Alguns resultados preparatórios. III

Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach e $C : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ um operador compacto. Para $n \in \mathbb{N}$, defina-se $\mathsf{R}_n := \operatorname{Ran}\big((\mathbb{1} - C)^n\big)$ e defina-se também $\mathsf{R}_0 := \mathcal{X}$. É fácil ver que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ vale $\mathsf{R}_n \supset \mathsf{R}_{n+1}$. Para $n = 0$ isso é evidente. Para $n \in \mathbb{N}$ temos que se $y \in \operatorname{Ran}\big((\mathbb{1} - C)^{n+1}\big)$, então y é da forma $y = (\mathbb{1} - C)^{n+1}x$ para algum $x \in \mathcal{X}$ e, portanto, $y = (\mathbb{1} - C)^n\tilde{x}$ com $\tilde{x} = (\mathbb{1} - C)x$, o que mostra que $y \in \operatorname{Ran}\big((\mathbb{1} - C)^n\big)$. Como $(\mathbb{1} - C)^n = \mathbb{1} - C^{(n)}$ com $C^{(n)}$ (dado em (40.168)) sendo compacto, concluímos do Lema 40.12, página 2305, que cada R_n é um subespaço fechado de $\mathcal{X}$.

Em analogia com o que fizemos acima quando estudamos os subespaços K_m, vamos agora estudar quando e se podemos ter $\mathsf{R}_m = \mathsf{R}_{m+1}$ para algum m e que implicações uma tal igualdade possui.

Para $A \subset \mathcal{X}$, denotemos por $(\mathbb{1} - C)A$ o conjunto $(\mathbb{1} - C)A := \big\{(\mathbb{1} - C)x,\; x \in A\big\}$. Para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$, temos $\mathsf{R}_{n+1} := \{(\mathbb{1} - C)^{n+1}x,\; x \in \mathcal{X}\} = \{(\mathbb{1} - C)y,\; y \in \mathsf{R}_n\} = (\mathbb{1} - C)\mathsf{R}_n$. Assim, se existir $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $\mathsf{R}_m = \mathsf{R}_{m+1}$, teremos $\mathsf{R}_{m+2} = (\mathbb{1} - C)\mathsf{R}_{m+1} = (\mathbb{1} - C)\mathsf{R}_m = \mathsf{R}_{m+1}$. Portanto, estabelecemos que se $\mathsf{R}_m = \mathsf{R}_{m+1}$ para algum $m \in \mathbb{N}_0$, então $\mathsf{R}_m = \mathsf{R}_{m+1} = \mathsf{R}_{m+2}$. Por indução, concluímos que se $\mathsf{R}_m = \mathsf{R}_{m+1}$ para algum $m \in \mathbb{N}_0$, então $\mathsf{R}_m = \mathsf{R}_n$ para todo $n \geq m$.

Afirmamos agora que, de fato, existe $m_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $\mathsf{R}_{m_0} = \mathsf{R}_{m_0+1}$. Se tal não fosse o caso, teríamos $\mathsf{R}_n \supsetneq \mathsf{R}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, ou seja, $\mathsf{R}_n \supset \mathsf{R}_{n+1}$ mas $\mathsf{R}_n \setminus \mathsf{R}_{n+1} \neq \emptyset$. Como cada R_n é um subespaço fechado de $\mathcal{X}$, evocando novamente o Lema de Riesz, Lema 40.23, página 2363, podemos construir uma sequência x_n, $n \in \mathbb{N}_0$, com as seguintes propriedades: para todo $n \in \mathbb{N}_0$ valem $x_n \in \mathsf{R}_n$, $\|x_n\| = 1$ e $\inf_{y\in\mathsf{R}_{n+1}} \|x_n - y\| \geq 1/2$. Agora, para essa sequência, teríamos, para todos $n > m$,

$$Cx_m - Cx_n \;=\; x_m - \tilde{x} \,, \qquad \text{com} \qquad \tilde{x} \;:=\; (\mathbb{1} - C)x_m - (\mathbb{1} - C)x_n + x_n \,.$$

Porém, vemos facilmente que $\tilde{x} \in \mathsf{R}_{m+1}$, pois $(\mathbb{1} - C)x_m \in \mathsf{R}_{m+1}$ (já que $x_m \in \mathsf{R}_m$), pois $(\mathbb{1} - C)x_n \in \mathsf{R}_{n+1} \subset \mathsf{R}_{m+1}$ e pois $x_n \in \mathsf{R}_n \subset \mathsf{R}_{m+1}$. Com isso, teremos que $\|Cx_m - Cx_n\| = \big\|x_m - \tilde{x}\big\| \geq \inf_{y\in\mathsf{R}_{m+1}} \|x_m - y\| \geq 1/2$. O fato que $\|Cx_m - Cx_n\| \geq 1/2$ implica que a sequência Cx_j, $j \in \mathbb{N}$, não pode possuir nenhuma subsequência convergente, contrariando o fato de que C é compacto e que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Estabelecemos, portanto, que existe $m_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $\mathsf{R}_{m_0} = \mathsf{R}_{m_0+1}$ e, portanto, tal que $\mathsf{R}_{m_0} = \mathsf{R}_n$ para todo $n \geq m_0$.

Para futura referência, reunimos esses resultados acima na seguinte proposição:

Proposição 40.87 *Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach e $C : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ um operador compacto. Para $n \in \mathbb{N}$, defina-se $\mathsf{R}_n := \operatorname{Ran}\big((\mathbb{1} - C)^n\big)$ e defina-se também $\mathsf{R}_0 := \mathcal{X}$. Cada R_n, $n \in \mathbb{N}_0$, é um subespaço fechado de $\mathcal{X}$. Tem-se também que $\mathsf{R}_n \supset \mathsf{R}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Por fim, existe $m_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $\mathsf{R}_m \supsetneq \mathsf{R}_{m+1}$ para todo $m < m_0$, mas $\mathsf{R}_m = \mathsf{R}_{m+1}$ para todo $m \geq m_0$. Tem-se, portanto, a sequência de inclusões*

$$\mathcal{X} \;\equiv\; \mathsf{R}_0 \;\supsetneq\; \cdots \;\supsetneq\; \mathsf{R}_{m_0} \;=\; \mathsf{R}_{m_0+1} \;=\; \mathsf{R}_{m_0+2} \;=\; \cdots \quad .$$

Aqui, $\mathsf{R}_a \supsetneq \mathsf{R}_b$ significa que R_b é um subespaço próprio de R_a. □

Logo abaixo, na Proposição 40.88, provaremos que, para um mesmo operador compacto, o índice m_0, acima, coincide com o índice n_0 introduzido na Proposição 40.86.

• Alguns resultados preparatórios. IV

Nosso próximo passo será provar que os índices n_0 e m_0 que surgem nas Proposições 40.86 e 40.87 são iguais. Para isso faremos uso do seguinte resultado:

Lema 40.13 *Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach e $C : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ um operador compacto. Com as definições acima, tem-se, para todo $k \in \mathbb{N}$, que $\mathsf{K}_k \cap \mathsf{R}_{m_0} = \{0\}$, ou seja, que $\operatorname{Ker}\big((\mathbb{1} - C)^k\big) \cap \operatorname{Ran}\big((\mathbb{1} - C)^{m_0}\big) = \{0\}$.* □

Prova. Seja $x \in \operatorname{Ran}\big((\mathbb{1} - C)^{m_0}\big) \equiv \mathsf{R}_{m_0}$ tal que $(\mathbb{1} - C)x = 0$. Vamos supor que $x \neq 0$ e chegar a uma contradição. Como $x \in \mathsf{R}_{m_0}$ e $\mathsf{R}_{m_0} = \mathsf{R}_{m_0+j}$ para todo $j \geq 0$, então para cada $j \in \mathbb{N}_0$ existe $y_j \in \mathcal{X}$ tal que $x = (\mathbb{1} - C)^{m_0+j}y_j$. Note-se que cada y_j satisfaz $(\mathbb{1} - C)^{m_0+j+1}y_j = 0$, pois $(\mathbb{1} - C)x = 0$. Assim, y_j satisfaz $(\mathbb{1} - C)^{m_0+j}y_j \neq 0$ mas $(\mathbb{1} - C)^{m_0+j+1}y_j = 0$, ou seja, $y_j \notin \mathsf{K}_{m_0+j}$ mas $y_j \in \mathsf{K}_{m_0+j+1}$. Agora, para j escolhido tal que $m_0 + j \geq n_0$, isso é um absurdo, pois sabemos da Proposição 40.87 que em tal caso devemos ter $\mathsf{K}_{m_0+j} = \mathsf{K}_{m_0+j+1}$. Logo, $x = 0$ e, portanto, $\operatorname{Ker}(\mathbb{1} - C) \cap \operatorname{Ran}\big((\mathbb{1} - C)^{m_0}\big) = \{0\}$, ou seja, $\mathsf{K}_1 \cap \mathsf{R}_{m_0} = \{0\}$.

Se para $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 2$ tivermos $z \in \mathsf{K}_k \cap \mathsf{R}_{m_0}$, então $0 = (1 - C)^k z = (1 - C)(1 - C)^{k-1}z$. Logo, $(1 - C)^{k-1}z \in \mathsf{K}_1$. Porém, como $z \in \mathsf{R}_{m_0}$, vale também $(1 - C)^{k-1}z \in \mathsf{R}_{k-1+m_0} = \mathsf{R}_{m_0}$. Pelo que concluímos acima, devemos ter $(1 - C)^{k-1}z = 0$, ou seja, $z \in \mathsf{K}_{k-1} \cap \mathsf{R}_{m_0}$. Por indução finita, ou seja, repetindo o argumento um número finito de vezes, concluiremos que $z \in \mathsf{K}_1 \cap \mathsf{R}_{m_0}$ e, portanto, que $z = 0$. Assim, estabelecemos que $\mathsf{K}_k \cap \mathsf{R}_{m_0} = \{0\}$. ■

O Lema 40.13 possui a seguinte consequência que complementa as Proposições 40.86 e 40.87:

Proposição 40.88 *Para um mesmo operador compacto, os índices $n_0 \in \mathbb{N}_0$ e $m_0 \in \mathbb{N}_0$ que surgem nas Proposições 40.86 e 40.87, respectivamente, são iguais.* □

Prova. Se $x \in \mathsf{K}_{m_0+1}$, então $0 = (1 - C)^{m_0+1}x = (1 - C)(1 - C)^{m_0}x$. Logo, $(1 - C)^{m_0}x \in \mathsf{K}_1$. Porém, é claro que $(1 - C)^{m_0}x \in \mathsf{R}_{m_0}$. Logo, pelo Lema 40.13, $(1 - C)^{m_0}x = 0$, ou seja, $x \in \mathsf{K}_{m_0}$. Isso informa-nos que $\mathsf{K}_{m_0+1} \subset \mathsf{K}_{m_0}$ e, como em geral tem-se $\mathsf{K}_{m_0} \subset \mathsf{K}_{m_0+1}$, segue que $\mathsf{K}_{m_0} = \mathsf{K}_{m_0+1}$. Pela definição de n_0 isso implica que $m_0 \geq n_0$.

A desigualdade $m_0 \geq n_0$ implica, em particular, que se $m_0 = 0$, então $n_0 = 0$, demonstrando a afirmação que se deseja provar nesse caso. Consideremos, então, que $m_0 \geq 1$ e seja $x \in \mathsf{R}_{m_0-1} \setminus \mathsf{R}_{m_0}$ (lembrar que, pela definição de m_0, esse conjunto é não-vazio). Então, podemos escrever $x = (1 - C)^{m_0-1}y$ para algum $y \in \mathcal{X}$. É evidente disso que $(1 - C)x = (1 - C)^{m_0}y$.

Como $(\mathbb{1} - C)x \in \mathsf{R}_{m_0} = \mathsf{R}_{2m_0} = (\mathbb{1} - C)^{m_0}\mathsf{R}_{m_0}$, segue que existe $y' \in \mathsf{R}_{m_0}$ tal que $(\mathbb{1} - C)x = (\mathbb{1} - C)^{m_0}y'$. Logo, $(\mathbb{1} - C)^{m_0}\big(y - y'\big) = 0$, ou seja, $y - y' \in \mathsf{K}_{m_0}$. Coloquemos a questão: será que $y - y' \in \mathsf{K}_{m_0-1}$? Tem-se que $(\mathbb{1} - C)^{m_0-1}\big(y - y'\big) = x - (\mathbb{1} - C)^{m_0-1}y'$, mas isso não pode anular-se, pois, como $y' \in \mathsf{R}_{m_0}$, vale $(\mathbb{1} - C)^{m_0-1}y' \in \mathsf{R}_{2m_0-1} = \mathsf{R}_{m_0}$, enquanto que $x \notin \mathsf{R}_{m_0}$, já que escolhemos $x \in \mathsf{R}_{m_0-1} \setminus \mathsf{R}_{m_0}$. Isso implica que $y - y' \notin \mathsf{K}_{m_0-1}$. Assim, concluímos que $\mathsf{K}_{m_0} \setminus \mathsf{K}_{m_0-1} \neq \emptyset$, ou seja, $\mathsf{K}_{m_0-1} \subsetneq \mathsf{K}_{m_0}$. Pela definição de n_0, isso informa-nos que $m_0 \leq n_0$.

Como já estabelecemos que $m_0 \geq n_0$ e que $m_0 \leq n_0$, concluímos que $m_0 = n_0$. ■

Concluímos essas preparações com mais uma conclusão importante sobre os índices $n_0 = m_0$:

Proposição 40.89 *Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach e $C : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ um operador compacto. Então, $\mathcal{X} \simeq \mathsf{K}_{m_0} \oplus \mathsf{R}_{m_0}$, ou seja, cada $x \in \mathcal{X}$ pode ser escrito de forma única como $x = y + z$, com $y \in \mathsf{K}_{m_0} \equiv \operatorname{Ker}\big((\mathbb{1} - C)^{m_0}\big)$ e $z \in \mathsf{R}_{m_0} \equiv \operatorname{Ran}\big((\mathbb{1} - C)^{m_0}\big)$. O índice $m_0 \in \mathbb{N}_0$ encontra-se definido na Proposição 40.87 e, segundo a Proposição 40.88, coincide com o índice n_0 definido na Proposição 40.86.* □

Prova. Seja $x \in \mathcal{X}$. Como $(\mathbb{1} - C)^{m_0}x \in \mathsf{R}_{m_0}$ e $\mathsf{R}_{m_0} = \mathsf{R}_{2m_0}$, existe $x' \in \mathcal{X}$ tal que $(\mathbb{1} - C)^{m_0}x = (\mathbb{1} - C)^{2m_0}x'$. Definindo-se $z := (\mathbb{1} - C)^{m_0}x'$ é claro que $z \in \mathsf{R}_{m_0}$ e que $(\mathbb{1} - C)^{m_0}x = (\mathbb{1} - C)^{m_0}z$, ou seja, $(\mathbb{1} - C)^{m_0}\big(x - z\big) = 0$. Isso

informa-nos que $x - z \in \mathsf{K}_{m_0}$. Definindo-se $y := x - z$ podemos trivialmente escrever $x = y + z$, sendo que $y \in \mathsf{K}_{m_0}$ e $z \in \mathsf{R}_{m_0}$.

Para estabelecer a unicidade, sejam $y' \in \mathsf{K}_{m_0}$ e $z' \in \mathsf{R}_{m_0}$ tais que $x = y' + z'$. Segue que $y - y' = z' - z$. Naturalmente, tem-se $y - y' \in \mathsf{K}_{m_0}$ e $z' - z \in \mathsf{R}_{m_0}$ e, portanto, $y - y'$ e $z' - z$ são elementos de $\mathsf{K}_{m_0} \cap \mathsf{R}_{m_0}$. Pelo Lema 40.13, isso implica que $y - y' = 0$ e que $z' - z = 0$. ■

• **O Teorema da Alternativa de Fredholm**

Chegamos agora ao objetivo almejado na seção corrente:

Teorema 40.35 (Teorema da Alternativa de Fredholm) *Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach e $K : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ um operador compacto e seja $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Então, ou $\lambda\mathbb{1} - K$ possui uma inversa limitada ou λ é um autovalor de K, ou seja, ou λ pertence ao conjunto resolvente $\rho(K)$ ou ao espectro pontual $\sigma_p(K)$ de K.*

Como acima tomamos $\lambda \neq 0$, isso está dizendo que $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$, ou seja, exceto eventualmente por 0, o espectro de um operador compacto é constituído apenas por autovalores. □

Prova. Como $\lambda \neq 0$, defina-se $C := \lambda^{-1}K$. É claro que $C : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ é compacto e a ele aplicam-se nossos resultados anteriores. Notemos também que $(\lambda\mathbb{1} - K) = \lambda(\mathbb{1} - C)$.

Consideremos os índices n_0 e m_0 introduzidos para o operador compacto C nas Proposições 40.86 e 40.87, os quais são iguais, segundo a Proposição 40.88. Como $m_0 \in \mathbb{N}_0$, há duas possibilidades a se considerar: $m_0 = 0$ e $m_0 \geq 1$. Cada um desses casos corresponderá a uma das alternativas do enunciado.

Caso $m_0 = 0$. Nesse caso, temos $\{0\} = \mathsf{K}_m$ e $\mathcal{X} = \mathsf{R}_m$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$, pelas Proposições 40.86, 40.87 e 40.88. Em particular, o fato que $\operatorname{Ker}(\mathbb{1} - C) = \{0\}$ implica que $\mathbb{1} - C$ é injetora e o fato que $\operatorname{Ran}(\mathbb{1} - C) = \mathcal{X}$ significa que $\mathbb{1} - C$ é sobrejetora. Assim, $(\mathbb{1} - C)$ é bijetora e, portanto, existe a inversa $(\mathbb{1} - C)^{-1} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ a qual, pelo Teorema da Aplicação Inversa, Teorema 40.8, página 2193, é igualmente contínua e, portanto, limitada.

Portanto, $(\lambda\mathbb{1} - K)^{-1}$ existe e é limitada, sendo dada por $(\lambda\mathbb{1} - K)^{-1} = \lambda^{-1}(\mathbb{1} - C)^{-1}$. Isso significa que $\lambda \in \rho(K)$, o conjunto resolvente de K.

Caso $m_0 \geq 1$. Nesse caso, tem-se pela Proposições 40.86 que $\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker}(\mathbb{1} - C)$, o que nos informa que C possui 1 como autovalor. Logo, λ é um autovalor de K e $\operatorname{Ker}(\mathbb{1} - C)$ é o subespaço dos autovetores correspondentes. Evidentemente, como existem vetores não-nulos em $\operatorname{Ker}(\mathbb{1} - C)$, os operadores $\mathbb{1} - C : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ e $\lambda\mathbb{1} - K : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ não possuem inversa (pelo menos por não serem injetores). ■

• **O Teorema da Alternativa de Fredholm e equações integrais**

O Teorema da Alternativa de Fredholm, Teorema 40.35, pode ser refraseado em termos mais frequentemente empregados no contexto de equações integrais. Essa é, alias, a forma como o Teorema da Alternativa de Fredholm fora originalmente formulado:

Corolário 40.23 (Alternativa de Fredholm. Versão II) *Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach e $K : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ um operador compacto. Sejam $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $f \in \mathcal{X}$, fixos. Consideremos o problema de determinar $g \in \mathcal{X}$ tal que*

$$g \;=\; f + \lambda^{-1}Kg\,. \tag{40.171}$$

Então, ou a equação inomogênea (40.171) possui solução única $g \in \mathcal{X}$, a saber, $g = \lambda(\lambda\mathbb{1} - K)^{-1}f$, ou a equação homogênea

$$Kg \;=\; \lambda g \tag{40.172}$$

possui um número finito de soluções não-nulas linearmente independentes em $\mathcal{X}$. Nesse caso, equação inomogênea (40.171) possui solução se e somente se $f \in \operatorname{Ran}(\lambda\mathbb{1} - K)$, a qual é não-única e dada por $g = \lambda f_0 + u$ com $f_0 \in \mathcal{X}$ tal que $(\lambda\mathbb{1} - K)f_0 = f$ e u um elemento arbitrário de $\operatorname{Ker}(\lambda\mathbb{1} - K)$. □

Prova. A equação (40.171) se reescreve na forma $(\lambda\mathbb{1} - K)g = \lambda f$. Logo, se $(\lambda\mathbb{1} - K)^{-1}$ existir, teremos a solução única $g = \lambda(\lambda\mathbb{1} - K)^{-1}f$. Se, porém, $(\lambda\mathbb{1} - K)^{-1}$ não existir, o Teorema da Alternativa de Fredholm, Teorema 40.35, diz-nos

que λ é um autovalor de K e, portanto, a equação homogênea (40.172) possui solução não-nula, a saber, no subespaço dos autovetores de K com autovalor λ, o qual, como informado no Teorema 40.34, página 2302, é um subespaço de dimensão finita de $\mathcal{X}$.

Nessa segunda situação, (40.171) evidentemente não terá solução caso $f \notin \operatorname{Ran}(\lambda\mathbb{1} - K)$ mas, caso $f \in \operatorname{Ran}(\lambda\mathbb{1} - K)$ e f_0 for tal que $(\lambda\mathbb{1} - K)f_0 = f$, então $g = \lambda f_0 + u$ com $u \in \operatorname{Ker}(\lambda\mathbb{1} - K)$, arbitrário, satisfaz (40.171). ■

Exemplo 40.12 Vamos a um exemplo ilustrativo de aplicação do Corolário 40.23, o qual corresponde à situação na qual a Alternativa de Fredholm foi originalmente formulada: a das equações integrais de Fredholm lineares.

Para $a,\ b \in \mathbb{R}$ com $-\infty < a < b < \infty$, considere-se o espaço de Banach $\mathcal{X} = C\big([a,\ b],\ \mathbb{C}\big)$, das funções contínuas a valores complexos definidas em $[a,\ b]$, dotado da norma do supremo $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,\,b]} |f(x)|$. Seja $k : [a,\ b] \times [a,\ b] \to \mathbb{C}$ uma função contínua dada e defina-se $K : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ por $(Kh)(x) := \displaystyle\int_a^b k(x,\ y)h(y)\,dy$ para $h \in \mathcal{X}$. Já comentamos alhures que K é compacto (vide página 2299).

Tomemos $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\lambda \neq 0$ e $f \in \mathcal{X}$, ambos fixos. A equação (40.171) é, nesse caso, a equação integral

$$g(x) \;=\; f(x) + \frac{1}{\lambda}\int_a^b k(x,\ y)g(y)\,dy\,. \tag{40.173}$$

Assim, o Corolário 40.23 diz-nos que ou a equação integral inomogênea (40.173) possui solução única ou a equação homogênea

$$\int_a^b k(x,\ y)g(y)\,dy \;=\; \lambda g(x) \tag{40.174}$$

possui um número finito de soluções não-nulas linearmente independentes em $\mathcal{X}$. Nesse caso, (40.173) possui solução não-única se e somente se existir $f_0 \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) = \lambda f_0(x) - \displaystyle\int_a^b k(x,\ y)f_0(y)\,dy$. Se tal for o caso, as soluções de (40.173) serão da forma $g(x) = \lambda f_0(x) + u(x)$, onde u é uma solução arbitrária em $\mathcal{X}$ da equação homogênea (40.174).

A função k é denominada *núcleo da equação integral* (40.173) ou (40.174). A equação (40.174) é denominada *equação integral de Fredholm linear de primeiro tipo*, enquanto que a equação (40.173) é denominada *equação integral de Fredholm linear de segundo tipo*. Vide também Seção 20.1.

O Exemplo acima discutido possui aplicações diretas ao *problema de Sturm-Liouville*. Vide Capítulo 19, página 1027 e, particularmente, a Seção 19.3.2, página 1049. ♦

40.8.2 O Teorema Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos

Vamos na presente seção demonstrar a versão do Teorema Espectral para operadores compactos autoadjuntos agindo em um espaço de Hilbert, generalizando em parte o teorema espectral provado para matrizes na Seção 10.4, página 536.

Faremos implicitamente uso, em tudo o que segue, da Proposição 40.17, página 2205, que estabelece que os autovalores de um operador autoadjunto são reais e que para tais operadores os autovetores de autovalores distintos são ortogonais entre si. Também faremos uso, por vezes sem menção, da principal conclusão do Teorema da Alternativa de Fredholm, Teorema 40.35, página 2308: todos os elementos não-nulos do espectro de um operador compacto são autovalores.

Historicamente, a maioria dos resultados que apresentaremos sobre propriedades espectrais de operadores compactos autoadjuntos são fruto de trabalhos de Hilbert, Schmidt, Riesz e Schauder, realizados na primeira década do século XX. Alguns dos teoremas abaixo são por vezes denominados *Teorema de Hilbert-Schmidt* ou *Teorema de Riesz-Schauder*, mas isso é feito de forma inconsistente na literatura, de modo que preferimos não adotar essa nomenclatura. Vide comentário à página 2314.

• **Autovalores de operadores compactos autoadjuntos**

O teorema a seguir tem um papel central a desempenhar na demonstração do teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos, por garantir que os mesmos sempre possuem pelo menos um autovalor. Uma parte de seu conteúdo já foi estabelecido no Teorema 40.34, página 2302.

Teorema 40.36 *Seja C um operador compacto e autoadjunto agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e denotemos por $\sigma(C)$ o espectro de C e por $\sigma_p(C)$ o conjunto de todos os autovalores de C. Então, valem as seguintes afirmações:*

I. 1. $\sigma(C)\setminus\{0\}=\sigma_p(C)\setminus\{0\}$.

2. *Para $C\neq 0$ tem-se $\sigma_p(C)\setminus\{0\}\neq\emptyset$, pois $\big\{-\|C\|,\ \|C\|\big\}\cap\sigma_p(C)\neq\emptyset$, isto é, ou $\|C\|$ ou $-\|C\|$ ou ambos é autovalor de C.*

II. 1. $\sigma_p(C)\subset\Big[-\|C\|,\ \|C\|\Big]$.

2. *Cada autovalor não-nulo de C tem degenerescência finita, ou seja, o subespaço de seus autovetores tem dimensão finita.*

3. *$\sigma_p(C)$ é um conjunto infinito, exceto se C for de posto finito.*

4. *Se C não for de posto finito, 0 será o único ponto de acumulação de $\sigma_p(C)$.*

5. *Se C não for de posto finito, $\sigma_p(C)$ é enumerável (i.e., infinito e contável). Portanto, $\sigma_p(C)$ é enumerável se e somente se C não for de posto finito.* □

Comentários. Enfatizamos que o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, no enunciado acima, não é necessariamente separável. Um outro comentário concerne ao caso de operadores compactos não-autoadjuntos. Se C é um operador compacto não-autoadjunto, pode-se provar (vide Teorema 40.34, página 2302) que o conjunto de seus autovalores não-nulos é também contável e se acumula no máximo em zero, mas pode ser vazio (mesmo que C seja de posto finito), o que não ocorre no caso de operadores compactos autoadjuntos (parte **I** do enunciado acima). Um exemplo é operador de Volterra W, tratado no Exemplo 40.10 à página 2283. Outro exemplo é discutido no Exercício E. 40.46, página 2302.

Comentamos também que se C não for de posto finito pode ou não valer que $0\in\sigma_p(C)$, mas é sempre verdade que $0\in\sigma(C)$, pois 0 é um ponto de acumulação de C. ♣

Prova do Teorema 40.36. Suporemos $C\neq 0$, de outra forma não há o que demonstrar. Provaremos separadamente as partes **I** e **II**.

Prova da parte I. A afirmação que $\sigma(C)\setminus\{0\}=\sigma_p(C)\setminus\{0\}$ foi provada no Teorema 40.35, página 2308. Como C é autoadjunto, vale $\|C\|=\sup_{\psi\in\mathcal{H},\,\|\psi\|=1}|\langle\psi,\,C\psi\rangle|$ (Teorema 40.12, página 2207). Logo, existe uma sequência $\psi_n,\ n\in\mathbb{N}$, de vetores em $\mathcal{H}$ com $\|\psi_n\|=1$ tal que $\|C\|=\lim_{n\to\infty}|\langle\psi_n,\,C\psi_n\rangle|$ (justifique!). Como $C=C^*$, $\langle\psi_n,\,C\psi_n\rangle$ é um número real. Dessa forma, como o módulo de $\langle\psi_n,\,C\psi_n\rangle$ converge a $\|C\|$, $\langle\psi_n,\,C\psi_n\rangle$ deve ter uma subsequência que converge a $\|C\|$ ou uma subsequência que converge a $-\|C\|$ (ou ambas). Para evitar sobrecarregar a notação, também denotaremos essa subsequência por $\langle\psi_n,\,C\psi_n\rangle$, a qual convergirá para $c=\pm\|C\|$, conforme o caso. Agora, usando o fato que c é real, que $c^2=\|C\|^2$ e que $C=C^*$, teremos

$$\big\|C\psi_n-c\psi_n\big\|^2 \;=\; \Big\langle C\psi_n-c\psi_n,\,C\psi_n-c\psi_n\Big\rangle \;=\; \|C\psi_n\|^2+c^2\underbrace{\|\psi_n\|^2}_{=1}-2c\langle\psi_n,\,C\psi_n\rangle$$

$$\leq\ \underbrace{\|C\|^2}_{=c^2}\underbrace{\|\psi_n\|^2}_{=1}+c^2-2c\langle\psi_n,\,C\psi_n\rangle \;=\; 2c\big(c-\langle\psi_n,\,C\psi_n\rangle\big)\ .$$

Como $\lim_{n\to\infty}\langle\psi_n,\,C\psi_n\rangle=c$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\,(C\psi_n-c\psi_n)\;=\;0\ . \tag{40.175}$$

Como ψ_n é uma sequência limitada e C é compacto, a sequência $C\psi_n$ possui uma subsequência $C\psi_{n_j}$ convergente, ou seja, existe $\psi\in\mathcal{H}$ tal que $\lim_{j\to\infty}C\psi_{n_j}=\psi$. A expressão (40.175) está, então, dizendo-nos que

$$\psi\;=\;\lim_{j\to\infty}C\psi_{n_j}\;=\;c\lim_{j\to\infty}\psi_{n_j}\ . \tag{40.176}$$

Assim,

$$C\psi\ \overset{(40.176)}{=}\ C\left(c\lim_{j\to\infty}\psi_{n_j}\right)\ \overset{C\text{ é linear}}{=}\ cC\left(\lim_{j\to\infty}\psi_{n_j}\right)\ \overset{C\text{ é contínuo}}{=}\ c\lim_{j\to\infty}C\psi_{n_j}\ \overset{(40.176)}{=}\ c\psi\ .$$

Logo, se $\psi\neq 0$, ψ é um autovetor de C com autovalor $c=+\|C\|$ ou $c=-\|C\|$. Agora, ver que $\psi\neq 0$ é fácil, pois, por (40.176)

$$\|\psi\|\;=\;\left\|c\lim_{j\to\infty}\psi_{n_j}\right\|\;=\;|c|\lim_{j\to\infty}\underbrace{\|\psi_{n_j}\|}_{=1}\;=\;|c|\;=\;\|C\|\;\neq\;0\ .$$

Isso completa a prova da parte **I**.

Prova da parte II.

II.1. Se λ é um autovalor de C existe um autovetor (não-nulo) $\phi\in\mathcal{H}$ de C: $C\phi=\lambda\phi$. Podemos escolher ϕ de modo que $\|\phi\|=1$. Isso implica $|\lambda|=\|\lambda\phi\|=\|C\phi\|\leq\|C\|\,\|\phi\|=\|C\|$. Logo, como $\lambda\in\mathbb{R}$ (pois C é autoadjunto), segue que $\lambda\in\Big[-\|C\|,\ \|C\|\Big]$.

II.2. Vamos supor que λ seja um autovalor de C e que seja infinitamente degenerado[60]. Isso significa que o subespaço $\mathcal{M}_\lambda$ gerado pelos autovetores de C com autovalor λ tem dimensão infinita. Podemos escolher em $\mathcal{M}_\lambda$ um conjunto ortonormal de vetores ϕ^n, $n\in\mathbb{N}$. Como $\langle\phi^n,\,\phi^m\rangle=\delta_{n,\,m}$, segue que para $m\neq n$, $\|\phi^n-\phi^m\|^2=\big\langle(\phi^n-\phi^m),\,(\phi^n-\phi^m)\big\rangle=2$. Logo, também para $m\neq n$,

$$\big\|C\phi^n-C\phi^m\big\|^2\;=\;\big\|\lambda\phi^n-\lambda\phi^m\big\|^2\;=\;|\lambda|^2\big\|\phi^n-\phi^m\big\|^2\;=\;2|\lambda|^2\ .$$

Assim, se $\lambda\neq 0$, vemos que $C\phi^n$, $n\in\mathbb{N}$, não é uma sequência de Cauchy, assim como nenhuma de suas subsequências. Isso contraria a hipótese que C é compacto. Essa contradição leva-nos a excluir a possibilidade de λ ser infinitamente degenerado, exceto se $\lambda=0$.

II.3. Vamos supor que $\sigma_p(C)$ seja um conjunto finito. Pelo item *II.2* o subespaço gerado por todos os autovetores de C com autovalor não-nulo é de dimensão finita e, portanto, é fechado. Vamos denotá-lo por $\mathcal{M}$. É bastante claro que $\mathcal{M}$ é um subespaço invariante por C (justifique!). Assim, pelo Corolário 40.4, página 2205, $\mathcal{M}^\perp$ é igualmente um subespaço fechado que é invariante por C.

Vamos denotar por P o projetor ortogonal sobre $\mathcal{M}$ e por $P^\perp=\mathbb{1}-P$ o projetor ortogonal sobre $\mathcal{M}^\perp$. Tem-se para todo $\xi\in\mathcal{H}$

$$CP^\perp\xi\;=\;\mathbb{1}CP^\perp\xi\;=\;\big(P+P^\perp\big)CP^\perp\xi\;=\;PCP^\perp\xi+P^\perp CP^\perp\xi\;=\;P^\perp CP^\perp\xi\ ,$$

pois $PCP^\perp\xi=0$, já que $CP^\perp\xi\in\mathcal{M}^\perp$ (pois $P^\perp\xi\in\mathcal{M}^\perp$ e $\mathcal{M}^\perp$ é invariante por C). Isso significa que

$$P^\perp CP^\perp=CP^\perp\ . \tag{40.177}$$

Como C e $P^\perp$ são autoadjuntos, também obtém-se da última igualdade que

$$P^\perp C\;=\;\big(CP^\perp\big)^*\;=\;\big(P^\perp CP^\perp\big)^*\;=\;P^\perp CP^\perp\;=\;CP^\perp\ ,$$

mas não usaremos isso.

Observemos agora que $P^\perp CP^\perp$ é compacto (pela Proposição 40.81, página 2295) e autoadjunto. Assim, pela parte **I**, existe $\varphi\in\mathcal{H}$, $\varphi\neq 0$, tal que $P^\perp CP^\perp\varphi=\pm\big\|P^\perp CP^\perp\big\|\varphi$. Essa igualdade diz-nos que $\varphi\in\mathcal{M}^\perp$, pois $P^\perp(CP^\perp\varphi)\in\mathcal{M}^\perp$, devido ao fator $P^\perp$ à esquerda. Se assim for, então $P^\perp\varphi=\varphi$ e, portanto, $P^\perp CP^\perp\varphi=P^\perp C\varphi=C\varphi$, a última igualdade seguindo do fato que C mantém $\mathcal{M}^\perp$ invariante. Estabelecemos, assim, que $C\varphi=\pm\big\|P^\perp CP^\perp\big\|\varphi$.

Agora, se $\big\|P^\perp CP^\perp\big\|\neq 0$, então φ seria um autovetor de C com autovalor não-nulo, o que significa que $\varphi\in\mathcal{M}$, pela definição de $\mathcal{M}$. Ora, se $\varphi\neq 0$, isso não é possível, pois o único vetor que $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^\perp$ têm em comum é o vetor nulo. Concluímos daí que $\big\|P^\perp CP^\perp\big\|=0$, ou seja, $P^\perp CP^\perp=0$. Logo, por (40.177), $CP^\perp=0$. Isso, por sua vez, diz-nos que para todo $\psi\in\mathcal{M}^\perp$ vale $C\psi=CP^\perp\psi=0$.

Assim, concluímos que C aniquila todo o subespaço $\mathcal{M}^\perp$, ou seja, que $\mathcal{M}^\perp$ é constituído por autovetores de C com autovalor zero. Pelo Teorema da Decomposição Ortogonal, Teorema 39.2, página 2128, todo vetor $\psi\in\mathcal{H}$ pode ser escrito na forma $\psi=\psi_{\mathcal{M}}+\psi_{\mathcal{M}^\perp}$, com $\psi_{\mathcal{M}}\in\mathcal{M}$ e $\psi_{\mathcal{M}^\perp}\in\mathcal{M}^\perp$. Logo, $C\psi=C\psi_{\mathcal{M}}\in\mathcal{M}$, pois $\mathcal{M}$ é invariante por C. Como $\mathcal{M}$ é de dimensão finita, o fato que $C\psi\in\mathcal{M}$ para todo $\psi\in\mathcal{H}$ está precisamente dizendo-nos que C é de posto finito.

É também fácil de se ver que se C é de posto finito então C tem um conjunto finito de autovalores. Isso completa o que queríamos provar.

II.4. Se C não é de posto finito, vimos no item *II.3* que $\sigma_p(C)$ não é um conjunto finito. Como, pelo item *II.1*, $\sigma_p(C)$ está contido no intervalo fechado e limitado (ou seja, compacto) $\Big[-\|C\|,\ \|C\|\Big]$, $\sigma_p(C)$ deve possuir pelo menos um ponto de acumulação (Teorema de Bolzano-Weierstrass, Teorema 32.7, página 1616 e Teorema 32.15, página 1628)). Seja x_0 um desses pontos de acumulação de $\sigma_p(C)$ e vamos supor que $x_0\neq 0$. Como x_0 é um ponto de acumulação de $\sigma_p(C)$, temos em cada intervalo aberto $(x_0-\epsilon,\ x_0+\epsilon)$, com $\epsilon>0$, infinitos autovalores de C. Tomemos ϵ pequeno o suficiente de modo que $0\notin(x_0-\epsilon,\ x_0+\epsilon)$, ou seja, tomemos $\epsilon>0$ mas tal que $|x_0|>\epsilon$. Tomemos também uma coleção contável

[60] Aqui supomos implicitamente que $\mathcal{H}$ não tem dimensão finita, senão não haveria o que demonstrar

λ_n, $n \in \mathbb{N}$, de autovalores distintos de C contidos no intervalo $(x_0 - \epsilon,\ x_0 + \epsilon)$. É claro que $|\lambda_n| > |x_0| - \epsilon$ para todo n. Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, um autovetor ϕ_n de C com autovalor λ_n e com $\|\phi_n\| = 1$. Como os autovalores são distintos, vale $\langle \phi_n,\ \phi_m\rangle = \delta_{n,\,m}$. Assim, para $n \neq m$,

$$\|C\phi_n - C\phi_m\|^2 \ = \ \|\lambda_n\phi_n - \lambda_m\phi_m\|^2 \ = \ \big\langle (\lambda_n\phi_n - \lambda_m\phi_m),\ (\lambda_n\phi_n - \lambda_m\phi_m)\big\rangle \ = \ |\lambda_n|^2 + |\lambda_m|^2 \ > \ 2\big(|x_0| - \epsilon\big)^2 \, .$$

Como $2\big(|x_0| - \epsilon\big)^2$ não depende de m e n, isso está dizendo-nos que $C\phi_n$, $n \in \mathbb{N}$, não é uma sequência de Cauchy, assim como nenhuma de suas subsequências. Isso contraria o fato de C ser compacto. Logo, $x_0 \neq 0$ não pode ser ponto de acumulação de autovalores de C. Como pelo menos um ponto de acumulação deve existir, esse deve ser o ponto $x_0 = 0$.

II.5. Tomemos em $\Big[-\|C\|,\ \|C\|\Big]$ um intervalo fechado $[a,\ b]$ que não contém 0. Se $[a,\ b]$ contivesse infinitos autovalores de C, então haveria em $[a,\ b]$ um ponto de acumulação de tais autovalores, o que já vimos ser impossível. Assim $[a,\ b] \cap \sigma_p(C)$ é um conjunto finito. Portanto, conjuntos como $\Big[-\|C\|,\ -\frac{\|C\|}{n}\Big] \cap \sigma_p(C)$ e $\Big[\frac{\|C\|}{n},\ \|C\|\Big] \cap \sigma_p(C)$ são finitos para todo $n \in \mathbb{N}$. Como

$$\sigma_p(C) \setminus \{0\} \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left[-\|C\|,\ -\frac{\|C\|}{n}\right] \cup \left[\frac{\|C\|}{n},\ \|C\|\right] \right) \cap \sigma_p(C) \, ,$$

concluímos que o lado direito é uma união contável de conjuntos contáveis (finitos). Logo, $\sigma_p(C) \setminus \{0\}$ é contável e, portanto, $\sigma_p(C)$ é contável. A afirmação que $\sigma_p(C)$ é enumerável se e somente se C não for de posto finito segue disso e do item II.3.

Isso completa a prova da parte **II**. ■

Estamos agora prontos para abordar o Teorema Espectral para operadores compactos e autoadjuntos.

• O Teorema Espectral para operadores compactos autoadjuntos

Para o enunciar o Teorema Espectral para operadores compactos autoadjuntos e para simplificar sua demonstração precisamos acertar algumas convenções.

Se C é um operador compacto e autoadjunto agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, vimos no Teorema 40.36 que o conjunto de seus autovalores é contável (e até mesmo finito, caso C seja de posto finito) e cada autovalor não-nulo é finitamente degenerado. Vamos denotar por λ_n, $n \in \mathbb{N}$, o conjunto dos autovalores não-nulos, *convencionando que se um autovalor λ tem multiplicidade k então ele aparece k, vezes seguidas na contagem*, de forma que tenhamos, digamos, $\lambda_m = \cdots = \lambda_{m+k-1} = \lambda$. Com isso, a sequência λ_n, $n \in \mathbb{N}$, contém cada autovalor repetido o número de vezes correspondente à sua multiplicidade. Podemos convencionar também que os autovalores são ordenados de tal forma que $|\lambda_k| \leq |\lambda_l|$ para todo $k \geq l$, ou seja, de forma que a sequência $|\lambda_n|$, $n \in \mathbb{N}$ seja não-crescente. Sabemos que autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais entre si. O subespaço $\mathcal{M}_\lambda$ gerado pelos autovetores de autovalor λ tem dimensão k, a multiplicidade de λ. Com isso, podemos encontrar em $\mathcal{M}_\lambda$ um conjunto ortonormal de k autovetores $\phi_m,\ \ldots,\ \phi_{m+k-1}$. Constituímos dessa forma um conjunto ortonormal ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$, de autovetores de C, cada qual com autovalor λ_n: $C\phi_n = \lambda_n\phi_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos denotar por P_n o projetor ortogonal relativo a cada autovetor ϕ_n: para todo $\psi \in \mathcal{H}$ vale $P_n\psi := \langle \phi_n,\ \psi\rangle\, \phi_n$.

Caso C seja de posto finito, então as sequências λ_n, $n \in \mathbb{N}$, ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$ e P_n, $n \in \mathbb{N}$ são, em verdade, sequências finitas. Lembramos também que caso C não seja de posto finito, então 0 é o único ponto de acumulação da sequência λ_n, $n \in \mathbb{N}$ (novamente pelo Teorema 40.36), o que implica $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, fato que usaremos adiante.

Com essas convenções e com essa notação, temos o seguinte:

Teorema 40.37 (Teorema Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos) *Seja C um operador compacto e autoadjunto agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, a sequência de operadores de posto finito $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n P_n$, $N \in \mathbb{N}$, converge a C na norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Assim, para todo $\psi \in \mathcal{H}$ tem-se*

$$C\psi \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n\psi \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \phi_n,\ \psi\rangle\, \phi_n \, . \tag{40.178}$$

□

Comentários. Enfatizamos que o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, no enunciado acima, não é necessariamente separável.

Como $C\phi_n = \lambda_n\phi_n$, a expressão (40.178) significa também que para todo $\psi \in \mathcal{H}$, $C\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\ \psi\rangle\, C\phi_n$. Compare-se isso às afirmações do Teorema 40.33, página 2297. ♣

Prova do Teorema 40.37. Seja $\mathcal{P}_m \equiv [\phi_1,\ \ldots,\ \phi_m]$, $m \in \mathbb{N}$ o subespaço de $\mathcal{H}$ gerado pelos autovetores ortonormais $\phi_1,\ \ldots,\ \phi_m$ de C. Por ser de dimensão finita, cada $\mathcal{P}_m$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Para cada $N \in \mathbb{N}$ defina-se

$$K_N \ := \ C - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n P_n \, .$$

Caso $\|K_M\| = 0$ para algum $M \in \mathbb{N}$, então $C = \sum_{n=1}^{M} \lambda_n P_n$ e a prova está completa. Caso $\|K_N\| \neq 0$ para todo $N \in \mathbb{N}$, procedemos da seguinte forma.

Como os vetores ϕ_n formam um conjunto ortonormal, vale $P_i\phi_j = \langle \phi_i,\ \phi_j\rangle_{\mathcal{H}}\phi_i = \delta_{i,\,j}\phi_i$. Logo, se $1 \leq l \leq N$, tem-se

$$K_N\phi_l \ = \ C\phi_l - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n P_n\phi_l \ = \ \lambda_l\phi_l - \lambda_l\phi_l \ = \ 0 \, ,$$

o que significa dizer que K_N aniquila o subespaço $\mathcal{P}_N$.

Os P_j's são autoadjuntos e compactos (por serem de posto finito) e, portanto, cada K_N é também compacto e autoadjunto. O Teorema 40.36, página 2309, garante, então, que K_N possui um autovalor igual a $\|K_N\|$ ou a $-\|K_N\|$. Seja ψ um autovetor não-nulo correspondente. Teremos $K_N\psi = c_N\psi$ onde $c_N = \|K_N\|$ ou $c_N = -\|K_N\|$. Como K_N aniquila o subespaço $\mathcal{P}_N$, essa igualdade e a hipótese que $c_N \neq 0$ implicam que $\psi \in (\mathcal{P}_N)^\perp$.

Para ver isso, lembremos que pelo Teorema da Decomposição Ortogonal, Teorema 39.2, página 2128, podemos escrever $\psi = \chi + \xi$, onde $\chi \in \mathcal{P}_N$ e $\xi \in (\mathcal{P}_N)^\perp$. Como K_N é autoadjunto e aniquila todo vetor de $\mathcal{P}_N$, vale $\langle \chi,\ K_N\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle K_N\chi,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Como, $K_N\psi = c_N\psi$, isso diz-nos que $0 = c_N\langle \chi,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}} = c_N\langle \chi,\ \chi\rangle_{\mathcal{H}} = c_N\|\chi\|^2$, provando que $\chi = 0$ e que $\psi = \xi \in (\mathcal{P}_N)^\perp$.

Agora, o fato que $\psi \in (\mathcal{P}_N)^\perp$ implica $P_n\psi = 0$ para todo $1 \leq n \leq N$. Logo, $K_N\psi = C\psi$ e a igualdade $K_N\psi = c_N\psi$ significa $C\psi = c_N\psi$, ou seja, $\|K_N\|$ ou $-\|K_N\|$ é um autovalor de C.

Quando definimos a sequência λ_n, $n \in \mathbb{N}$, convencionamos colocar consecutivamente autovalores de multiplicidade repetida e ordená-los de modo que $|\lambda_n|$, $n \in \mathbb{N}$ seja uma sequência não-crescente. Isso implica que se $c_N = \pm\|K_N\|$ é um autovalor de C cujo autovetor não pertence a $\mathcal{P}_n$, então temos $|c_N| \leq |\lambda_N|$, ou seja, $\|K_N\| \leq |\lambda_N|$. Agora, também pelo Teorema 40.36, $\lim_{N\to\infty} |\lambda_N| = 0$, o que implica $\lim_{N\to\infty} \|K_N\| = 0$. Isso é precisamente o que queríamos provar. ■

• Base ortonormal completa de autovetores de um operador compacto autoadjunto

Seja C um operador compacto e autoadjunto agindo em um espaço de Hilbert (não necessariamente separável) $\mathcal{H}$. Seja $\mathcal{B}_1 = \{\phi_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, como acima, um conjunto ortonormal contável de autovetores de C com autovalores não-nulos. Seja $\mathcal{T}$ o fecho do subespaço gerado pelos vetores ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$. É fácil de ver que se $\psi \in \mathcal{T}^\perp$, então $\psi \in \mathrm{Ker}\,(C)$. De fato, para todo $\psi \in \mathcal{T}^\perp$ vale $\langle \phi_n,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ para todo n e, por (40.178), isso implica $C\psi = 0$. Vemos, portanto, que $\mathcal{H}$ é uma soma direta dos subespaços fechados $\mathcal{T}$ e $\mathrm{Ker}\,(C)$. Como $\mathrm{Ker}\,(C)$ é fechado, é um espaço de Hilbert e, portanto, possui uma base ortonormal completa (não necessariamente contável) $\mathcal{B}_0$. Todos os vetores dessa base são autovetores de C com autovalor nulo. O conjunto $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$ será, portanto, uma base ortogonal completa em $\mathcal{H}$, formada por autovalores (nulos ou não) de C. Concluímos, então, a prova do seguinte importante teorema:

Teorema 40.38 *Seja C um operador compacto e autoadjunto agindo em um espaço de Hilbert (não necessariamente separável) $\mathcal{H}$. Então, $\mathcal{H}$ decompõe-se em uma soma direta de subespaços ortogonais*

$$\mathcal{H} \ = \ \mathcal{H}_0 \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k \right) \, ,$$

onde $\mathcal{H}_0 := \mathrm{Ker}\,(C)$ é o subespaço dos autovetores de C com autovalor 0 e $\mathcal{H}_k := \mathrm{Ker}\,(\lambda_k\mathbb{1} - C)$ é o subespaço dos autovetores de C com autovalor λ_k. Cada $\mathcal{H}_k$ com $k \geq 1$ tem dimensão finita e $\mathcal{H}_0$ pode ter dimensão infinita. Por conseguinte, $\mathcal{H}$ possui uma base ortonormal completa formada por autovetores (com autovalores nulos ou não) de C. □

Esse teorema pode também ser demonstrado sem evocar-se o Teorema Espectral. Para tal, considere-se o subespaço fechado $\mathcal{A}$ de $\mathcal{H}$ formado pela soma direta de $\mathcal{T}$ e $\mathrm{Ker}\,(C)$. Ou seja, $\mathcal{A}$ é o subespaço fechado gerado por todos os autovetores de C (com autovalores nulos ou não). Como $\mathcal{A}$ é mantido invariante por C, então $\mathcal{A}^\perp$ também o é (Corolário 40.4, página 2205). Se $P^\perp$ é o projetor ortogonal sobre $\mathcal{A}^\perp$, então o fato de $\mathcal{A}^\perp$ ser invariante por C significa $CP^\perp = P^\perp CP^\perp$. Agora, $P^\perp CP^\perp$ é obviamente compacto e autoadjunto (Proposição 40.81, página 2295). Vamos supor que $\big\|P^\perp CP^\perp\big\| \neq 0$. Pelo Teorema 40.36, existirá $\phi \in \mathcal{H}$, $\phi \neq 0$, tal que $P^\perp CP^\perp\phi = c\phi$, onde $c = \pm\big\|P^\perp CP^\perp\big\|$. Essa expressão implica $\phi \in \mathcal{A}^\perp$ (devido ao fator $P^\perp$ do lado esquerdo). Assim, ela afirma que $C\phi = c\phi$. Mas isso diz-nos que ϕ é autovalor de C, o que só é possível se $\phi \in \mathcal{A}$. Logo $\big\|P^\perp CP^\perp\big\| = 0$, mas isso, por sua vez, implica $CP^\perp = 0$, pois $CP^\perp = P^\perp CP^\perp$. Logo, para todo $\psi \in \mathcal{A}^\perp$ teremos $C\psi = CP^\perp\psi = 0$, o que implica $\psi \in \mathrm{Ker}\,(C)$. Agora, $\mathrm{Ker}\,(C) \subset \mathcal{A}$ e o único vetor que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^\perp$ têm em comum é o vetor nulo. Provamos então que se $\psi \in \mathcal{A}^\perp$ então $\psi = 0$, ou seja $\mathcal{A} = \mathcal{H}$. Pela definição, isso diz precisamente que o conjunto ortonormal $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$, que gera $\mathcal{A}$, é uma base ortonormal completa em $\mathcal{H}$, encerrando novamente a prova.

Comentário. Os Teoremas 40.36 e 40.38 foram demonstrados por Hilbert[61], Schmidt[62], Riesz[63] e Schauder[64]. O Teorema Espectral para operadores compactos autoadjuntos foi provado por Hilbert em 1906, sendo o restante da teoria (re)elaborado pelos demais autores por volta de 1908. Esses trabalhos são os marcos iniciais da Análise Funcional. Para mais detalhes históricos desses importantes desenvolvimentos, vide [121]. ♣

• O caso de operadores compactos não-autoadjuntos

O Teorema Espectral demonstrado acima para operadores compactos e autoadjuntos pode ser, como veremos, estendido em um certo sentido para operadores compactos não-autoadjuntos. Já observamos, porém, que nem todo operador compacto em espaços de dimensão infinita possui autovalores. Assim, esperamos alguma diferença em relação ao caso autoadjunto, pois na decomposição espectral (40.178) são os autovalores λ_n de C que comparecem. A observação crucial vem do fato que $|C| := \sqrt{C^*C}$ é compacto e autoadjunto (Proposição 40.85, página 2299) e, pelo Teorema 40.36, página 2309, possui autovalores, valendo inclusive o Teorema 40.37.

Seja C um operador compacto mas não necessariamente autoadjunto e seja $C = U|C|$ sua decomposição polar (Teorema 40.31, página 2290). Pela Proposição 40.85, página 2299, sabemos que $|C|$ é compacto, autoadjunto e positivo. Podemos, pelo Teorema Espectral para operadores compactos e autoadjuntos, Teorema 40.37, página 2312, escrever

$$|C| \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle \phi_n,\, \cdot\,\rangle\, \phi_n \;, \tag{40.179}$$

onde μ_n são os autovalores positivos de $|C|$ (os quais são positivos pois $|C|$ é um operador positivo) e ϕ_n os correspondentes autovetores normalizados. Usando a decomposição polar $C = U|C|$, temos então

$$C \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle \phi_n,\, \cdot\,\rangle\, U\phi_n \;.$$

Lembremos que, pelo Teorema da Decomposição Polar (Teorema 40.31, página 2290), $\mathrm{Ker}\,(U) = \mathrm{Ker}\,\big(|C|\big) = \mathrm{Ker}\,(C)$, de modo que $U\phi_n \neq 0$, pois $\mu_n > 0$. Se definirmos $\psi_n := U\phi_n$, teremos $\langle \psi_n,\, \psi_m\rangle = \langle U\phi_n,\, U\phi_m\rangle = \langle \phi_n,\, \phi_m\rangle = \delta_{m,n}$, a segunda igualdade decorrendo do fato de U ser uma isometria parcial (e do fato que $U\phi_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Isso mostra que os vetores ψ_n, tal como os vetores ϕ_n, formam um conjunto ortonormal.

Em resumo, o que concluímos desses comentários é o seguinte:

Teorema 40.39 (Representação Canônica de Operadores Compactos) *Seja C um operador compacto agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, existem números positivos μ_n, $n \in \mathbb{N}$ (denominados* valores singulares *do operador C) e conjuntos ortonormais ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$, e ψ_n, $n \in \mathbb{N}$, em $\mathcal{H}$ tais que*

$$C \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle \phi_n,\, \cdot\,\rangle\, \psi_n \;, \tag{40.180}$$

a convergência da série de operadores do lado esquerdo se dando na norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Se C for de posto finito, a soma

[61] David Hilbert (1862–1943).
[62] Erhard Schmidt (1876–1959).
[63] Frigyes Riesz (1880–1956).
[64] Juliusz Pawel Schauder (1899–1943). Schauder foi tragicamente assassinado pela Gestapo.

acima será finita. Assim, para todo $\chi \in \mathcal{H}$ podemos escrever

$$C\chi \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle \phi_n,\, \chi\rangle\, \psi_n \;, \tag{40.181}$$

A representação (40.180), ou (40.181), é denominada representação canônica do operador compacto C. □

Nota. Definindo os operadores lineares e limitados $Q_n\chi := \langle \phi_n,\, \chi\rangle\psi_n$, $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever (40.180) na forma

$$C \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n Q_n \;.$$

Note-se que os operadores Q_n são compactos (por serem de posto finito) e satisfazem $Q_n^2 = \langle \phi_n,\, \psi_n\rangle Q_n$ (verifique!) e geralmente não são, portanto, projetores, nem sequer são autoadjuntos, exceto se $\phi_n = \psi_n$. ♣

A expressão (40.180) está também dizendo-nos que todo operador compacto C agindo em um espaço de Hilbert pode ser aproximado em norma por operadores de posto finito. Isso generaliza o Teorema 40.33, página 2297, pois aqui não precisamos supor que $\mathcal{H}$ seja separável.

A decomposição (40.180) generaliza para operadores compactos em espaço de Hilbert a decomposição em valores singulares para matrizes, a qual foi apresentada na Seção 10.8.2, página 587.

• Valores singulares de um operador compacto

Os números μ_n que comparecem em (40.180) e (40.181) são denominados *valores singulares* do operador compacto C. Vemos que trata-se dos autovalores de $|C|$. O operador C não necessariamente tem autovalores mas sempre tem valores singulares e, por isso, há que se fazer a distinção entre ambos os conceitos.

E. 40.47 *Exercício*. Mostre que a representação canônica do operador compacto não-autoadjunto $C : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ definido no Exercício E. 40.46, página 2302, é

$$Ca \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, \langle \mathbf{e}_k,\, a\rangle\, \mathbf{e}_{k+1} \;,$$

para $a \in \ell_2(\mathbb{N})$, onde $\mathbf{e}_k \in \ell_2(\mathbb{N})$ é o vetor cuja l-ésima componente $\big(\mathbf{e}_k\big)_l$ é dada por $\big(\mathbf{e}_k\big)_l = \delta_{k,\,l}$. ✣

• Operadores nucleares

Já comentamos à página 2298 que nem todo operador compacto agindo em espaços de Banach pode ser aproximado por operadores de posto finito. Para espaços de Hilbert, porém, isso é verdade, como atesta a expressão (40.181). No entanto, essa mesma expressão motiva uma importante definição que apresentaremos e discutiremos brevemente aqui: a de *operadores nucleares*, noção introduzida por Grothendieck[65].

Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dois espaços de Banach. Um operador limitado $N : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é dito ser um *operador nuclear* se existirem constantes $\mu_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, com $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$, funcionais lineares contínuos $l_n \in \mathcal{X}^\dagger$ com $\|l_n\|_{\mathcal{X}^\dagger} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e vetores $y_n \in \mathcal{Y}$ com $\|y_n\|_{\mathcal{Y}} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tais que

$$Nx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n\, l_n(x)\, y_n \;, \tag{40.182}$$

para todo $x \in \mathcal{X}$.

A condição $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$, é incluída por ser suficiente para garantir convergência do lado direito da expressão (40.182). Pela expressão (40.181), vemos que um operador compacto em um espaço de Hilbert é nuclear se e somente se a sequência de seus valores singulares for somável.

E. 40.48 *Exercício-exemplo*. Seja ψ_n, $n \in \mathbb{N}$, um conjunto ortonormal de vetores em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e seja P_n o projetor ortogonal sobre ψ_n. O operador

$$C \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P_n$$

é compacto (vide o exemplo da equação (40.164)) mas não é nuclear. Justifique essas afirmações. ✣

[65] Alexander Grothendieck (1928–2014).

Como exercício, deixamos ao leitor demonstrar as seguintes afirmações, válidas no contexto geral de espaços de Banach: *1.* todo operador de posto finito é nuclear (isso é evidente, aliás); *2.* todo operador nuclear é compacto; *3.* toda combinação linear de dois operadores nucleares é novamente um operador nuclear; *4.* o produto (à direita ou à esquerda) de um operador nuclear por um operador contínuo é novamente um operador nuclear. Vide [548].

40.9 O Teorema Espectral para Operadores Limitados Autoadjuntos em Espaços de Hilbert

Na presente seção trataremos do Teorema Espectral para operadores limitados autoadjuntos agindo em espaços de Hilbert em suas diversas formas. Seguiremos proximamente [412], mas completaremos várias lacunas daquela exposição.

40.9.1 O Cálculo Funcional Contínuo e o Homomorfismo de Gelfand

Começamos com uma definição elementar. Se $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ é um polinômio em $x \in \mathbb{C}$, e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ sendo um espaço de Hilbert, define-se $p(T) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ por $p(T) := a_0\mathbb{1} + \sum_{k=1}^{n} a_k T^k$. Convencionando que $T^0 = \mathbb{1}$, podemos escrever também $p(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$.

O seguinte lema resume alguns fatos fundamentais a respeito de polinômios de operadores autoadjuntos em espaços de Hilbert e é um caso particular da Proposição 40.45, página 2231, dispensando demonstração.

Lema 40.14 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador limitado e autoadjunto. Seja também $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ um polinômio em $x \in \mathbb{C}$. Então, o espectro de $p(A)$ é a imagem por p do espectro de A, ou seja,*

$$\sigma\big(p(A)\big) \;=\; \big\{p(\lambda),\; \lambda \in \sigma(A)\big\} \;=:\; p\big(\sigma(A)\big)\,. \tag{40.183}$$

Fora isso, $\big\|p(A)\big\| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} \big|p(\lambda)\big|$. □

Seja agora o espaço de Banach $C\big(\sigma(A)\big)$ da funções complexas contínuas definidas no espectro de A dotado da norma $\|f\|_\infty := \sup_{\lambda\in\sigma(A)} \big|f(\lambda)\big|$ e seja $P\big(\sigma(A)\big)$ o subespaço de $C\big(\sigma(A)\big)$ formado por polinômios. Sabemos pelo Teorema de Weierstrass (Teorema 37.18, página 1992) que $P\big(\sigma(A)\big)$ é denso em $C\big(\sigma(A)\big)$. Vimos também no Lema 40.14 que a aplicação $\phi_A \equiv \phi : P\big(\sigma(A)\big) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dada por $\phi(p) = p(A)$ satisfaz $\big\|\phi(p)\big\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|p\|_\infty$. Ora, isso diz-nos que ϕ é limitada e, pelo Teorema BLT, Teorema 40.1, página 2175, pode ser estendida unicamente e isometricamente ao fecho de $P\big(\sigma(A)\big)$ que é $C\big(\sigma(A)\big)$. Essa extensão também será denotada por ϕ. Assim, para toda $f \in C\big(\sigma(A)\big)$ podemos definir $\phi(f)$ como limite em norma de operadores $\phi(p)$, com p sendo polinômios que convergem a f na norma $\|\cdot\|_\infty$.

Denotaremos também sugestivamente $\phi(f)$, para $f \in C\big(\sigma(A)\big)$, por $f(A)$. Tem-se os seguintes fatos sobre $\phi(f)$ (vide [412]).

Teorema 40.40 (Cálculo Funcional Contínuo) *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, seja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjunto e seja $\phi_A \equiv \phi : C\big(\sigma(A)\big) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definida acima. Para todo polinômio p vale $\phi(p) = p(A)$. Como vimos, pelo Teorema BLT, Teorema 40.1, página 2175, tem-se $\big\|\phi(f)\big\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|f\|_\infty$ para toda $f \in C\big(\sigma(A)\big)$. Fora isso, valem as seguintes afirmações:*

1. *A aplicação ϕ é um $*$-homomorfismo algébrico, ou seja,*

$$\phi(\alpha f + \beta g) \;=\; \alpha\phi(f) + \beta\phi(g)\,, \qquad \phi(fg) \;=\; \phi(f)\phi(g)\,, \qquad \phi(f)^* \;=\; \phi(\overline{f})\,, \qquad \phi(1) \;=\; \mathbb{1}\,, \tag{40.184}$$

   para todas $f,\; g \in C(\sigma(A))$ e todos $\alpha,\; \beta \in \mathbb{C}$. Como $fg = gf$, segue de (40.184) que $\phi(f)\phi(g) = \phi(g)\phi(f)$ para todas $f,\; g \in C(\sigma(A))$.

2. *Se $f \geq 0$ tem-se também $\phi(f) \geq 0$.*

3. *Se $f_n \in C\big(\sigma(A)\big)$, $n \in \mathbb{N}$ é uma sequência de converge na norma $\|\cdot\|_\infty$ a uma função $f \in C\big(\sigma(A)\big)$ então $\phi(f_n)$ converge a $\phi(f)$ na norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Reciprocamente, se $\phi(f_n)$ converge na norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, então existe $f \in C\big(\sigma(A)\big)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \phi(f_n) = \phi(f)$. Isso diz-nos que $\big\{\phi(f),\; f \in C\big(\sigma(A)\big)\big\}$ é fechada na norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Com a propriedade do item 1, isso significa que $\big\{\phi(f),\; f \in C\big(\sigma(A)\big)\big\}$ é uma álgebra C^* Abeliana com unidade.*

4. *Se $\varphi \in \mathcal{H}$ é um autovetor de A com autovalor λ_0, então $\phi(f)\varphi = f(\lambda_0)\varphi$. Mais genericamente, vale $\sigma\big(\phi(f)\big) = \big\{f(\lambda),\; \lambda \in \sigma(A)\big\}$.* □

O $*$-homomorfismo $\phi : C\big(\sigma(A)\big) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é por vezes denominado *homomorfismo de Gelfand*[66].

Prova do Teorema 40.40. A demonstração desse teorema segue muito proximamente a demonstração do Teorema 40.18, página 2232 e, de fato, quase todas as asserções acima são casos particulares daquele teorema pois $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma álgebra C^* com unidade. Para facilitar a leitor e destacar algumas poucas especificidades, apresentamos a demonstração com detalhe.

Prova do item 1. A aplicação ϕ é limitada e, portanto, contínua. As propriedades (40.184), que caracterizam ϕ como um $*$-homomorfismo algébrico, são triviais de se verificar no subespaço denso $P(\sigma(A))$ e daí se estendem facilmente a todo $C(\sigma(A))$ por continuidade.

Prova do item 2. Se $f \geq 0$ então $f = g^2$ para alguma g real e contínua. Logo, pela propriedade de homomorfismo $\phi(f) = \phi\big(g^2\big) = \phi(g)\phi(g) = \phi(g)^*\phi(g)$, que é um operador positivo.

Prova do item 3. Tem-se $\big\|\phi(f_n)-\phi(f)\big\| = \big\|\phi(f-f_n)\big\| = \|f-f_n\|_\infty$. Logo, se $\|f-f_n\|_\infty \to 0$, segue $\big\|\phi(f_n)-\phi(f)\big\| \to 0$. Reciprocamente, se $\phi(f_n)$ converge na norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, segue que $\phi(f_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Assim, como $\big\|\phi(f_n) - \phi(f_m)\big\| = \|f_n - f_m\|_\infty$, a sequência f_n é de Cauchy em $C(\sigma(A))$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Como $C\big(\sigma(A)\big)$ é completo em relação a essa norma, existe $f \in C\big(\sigma(A)\big)$ à qual f_n converge e, portanto, $\lim_{n\to\infty} \phi(f_n) = \phi(f)$.

Prova do item 4. Para provar que $\phi(f)\varphi = f(\lambda_0)\varphi$ caso $A\varphi = \lambda_0\varphi$, notemos em primeiro lugar que para qualquer polinômio p vale, claramente, $\phi(p)\varphi = p(\lambda_0)\varphi$. Se tomarmos uma sequência de polinômios p que converge a f na norma $\|\cdot\|_\infty$ teremos o resultado desejado por continuidade.

Se λ não pertence à imagem de $\sigma(A)$ por f então $r := \frac{1}{(f-\lambda)}$ é contínua e, portanto, $\phi(r)$ está bem definida e vale $\phi(r)\phi(f-\lambda) = \phi(f-\lambda)\phi(r) = \mathbb{1}$, pelas propriedades de homomorfismo, provando que $\phi(f) - \lambda\mathbb{1}$ é bijetora com inversa limitada e que, portanto, $\lambda \in \rho(\phi(f))$, o conjunto resolvente de $\phi(f)$. Isso estabeleceu que o complemento da imagem de f, $\mathbb{C} \setminus \big\{f(\lambda),\; \lambda \in \sigma(A)\big\}$, é um subconjunto de $\rho\big(\phi(f)\big)$. Logo, $\sigma\big(\phi(f)\big) \subset \big\{f(\lambda),\; \lambda \in \sigma(A)\big\}$. Vamos agora demonstrar a inclusão oposta. Seja $\mu \in \big\{f(\lambda),\; \lambda \in \sigma(A)\big\}$, ou seja, $\mu = f(\lambda_0)$ para algum $\lambda_0 \in \sigma(A)$ e vamos supor que $\mu \in \rho\big(\phi(f)\big)$, ou seja, que $F := \phi(f) - f(\lambda_0)\mathbb{1}$ é bijetora. Seja agora $P := \phi(p) - p(\lambda_0)\mathbb{1}$ para algum polinômio p tal que $\|f-p\|_\infty < \epsilon$. Teremos, $F - P = \phi(f-p) - \big(f(\lambda_0) - p(\lambda_0)\big)\mathbb{1}$ e, assim,

$$\|F-P\| \;\leq\; \big\|\phi(f-p)\big\| + \big|f(\lambda_0) - p(\lambda_0)\big|\,\|\mathbb{1}\| \;=\; \|f-p\|_\infty + \big|f(\lambda_0) - p(\lambda_0)\big| \;\leq\; 2\|f-p\|_\infty \;<\; 2\epsilon\,.$$

Agora, pelo Corolário 40.5, página 2219, se escolhermos esse ϵ pequeno o suficiente tal que $\|F-P\| < \big\|F^{-1}\big\|^{-1}$, então P será inversível em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, o que implica $p(\lambda_0) \notin \sigma\big(\phi(p)\big)$ com $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Isso contraria (40.183). Logo, devemos ter $\mu \notin \rho\big(\phi(f)\big)$, ou seja, $\mu \in \sigma\big(\phi(f)\big)$, o que prova $\big\{f(\lambda),\; \lambda \in \sigma(A)\big\} \subset \sigma\big(\phi(f)\big)$, estabelecendo a igualdade desses dois conjuntos. Isso completa a prova do Teorema 40.40 ■

Comentamos que a identificação $\sigma\big(\phi(f)\big) = \big\{f(\lambda),\; \lambda \in \sigma(A)\big\}$ não contraria o fato de $\sigma\big(\phi(f)\big)$ ser fechado, pois a imagem de um conjunto compacto (no caso, $\sigma(A)$) por uma função contínua (no caso, f) é sempre um conjunto compacto (ou seja, fechado e limitado).

40.9.2 Generalizando o Cálculo Funcional Contínuo. As Medidas Espectrais

Seja daqui por diante A um operador autoadjunto limitado fixo, definido em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

[66] Israil Moiseevic Gelfand (1913–2009).

O Teorema 40.40 é muito importante por permitir definir objetos como $f(A)$ para uma função contínua f definida no espectro de um operador autoadjunto A agindo em um espaço de Hilbert. Sucede, porém, que é possível fazer ainda mais e definir $f(A)$ mesmo para certas funções f que não sejam contínuas. A necessidade de um tal resultado não é meramente um capricho matemático, mas é importante para alcançarmos um resultado mais profundo, a saber, a versão por projetores espectrais do teorema espectral da qual falaremos mais abaixo.

Nosso ponto de partida é a seguinte observação. Seja $\psi \in \mathcal{H}$ e seja $f \in C\big(\sigma(A)\big)$. Então, a aplicação $f \mapsto \langle \psi,\ f(A)\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \psi,\ \phi(f)\psi\rangle_{\mathcal{H}}$ é claramente um funcional linear definido em $C(\sigma(A))$. Fora isso, para todo $f \in C(\sigma(A))$ vale

$$|\langle \psi,\ \phi(f)\psi\rangle_{\mathcal{H}}| \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|\phi(f)\|\,\|\psi\|^2 \;=\; \|f\|_\infty\,\|\psi\|^2\,,$$

provando que a aplicação $C\big(\sigma(A)\big) \ni f \mapsto \langle \psi,\ \phi(f)\psi\rangle_{\mathcal{H}}$ é limitada e, portanto, contínua. Além disso, se $f \geq 0$, vimos pelo Teorema 40.40 que $\phi(f)$ é um operador positivo. Isso significa que $\langle \psi,\ \phi(f)\psi\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Por fim, se $f \equiv 1$, segue que $\phi(f) = \mathbb{1}$ e $\langle \psi,\ \phi(f)\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \|\psi\|^2 < \infty$.

Em resumo, provamos que para $\psi \in \mathcal{H}$ com a aplicação $C\big(\sigma(A)\big) \ni f \mapsto \langle \psi,\ \phi(f)\psi\rangle_{\mathcal{H}}$ é um funcional linear contínuo, positivo. Esses fatos aparentemente inocentes têm uma consequência profunda e altamente não-trivial. Um clássico teorema de Análise conhecido como Teorema da Representação de Riesz[67] afirma que

Teorema 40.41 (Teorema da Representação de Riesz ou Teorema de Riesz-Markov) *Seja X um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff e seja $C_c(X)$ o espaço das funções contínuas definidas em X que tenham suporte compacto. Então, se $l : C_c(X) \to \mathbb{C}$ é um funcional linear positivo em $C_c(X)$, existe uma (única) medida positiva μ sobre uma σ-álgebra $\mathcal{M}$ que contém a σ-álgebra de Borel de X tal que*

$$l(f) \;=\; \int_X f\,d\mu\,.$$

para toda $f \in C_c(X)$. A medida μ e a σ-álgebra $\mathcal{M}$ satisfazem $\mu(K) < \infty$ para todo compacto $K \subset X$ e é regular, ou seja

$$\mu(E) \;=\; \inf\{\mu(V),\ E \subset V,\ V \text{ aberto}\} \tag{40.185}$$

para todo $E \in \mathcal{M}$ e

$$\mu(E) \;=\; \sup\{\mu(K),\ K \subset E,\ K \text{ compacto}\} \tag{40.186}$$

para todo $E \in \mathcal{M}$ com $\mu(E) < \infty$. Por fim, o espaço de medida produzido por $\mathcal{M}$ e μ é completo, ou seja, se $E \in \mathcal{M}$ é tal que $\mu(E) = 0$ então todo subconjunto de E pertence a $\mathcal{M}$. □

O enunciado do teorema acima foi extraído de [427], onde sua demonstração pode também ser encontrada[68]. Vide também [206] ou [426]. Alguns autores (por ex., [426]) referem-se a esse teorema como "Teorema de Riesz-Markov"[69].

Em nosso caso, $X = \sigma(A)$ não é apenas localmente compacto, mas compacto e, portanto, $C_c(X) = C\big(\sigma(A)\big)$. Podemos, então, escrever

$$\big\langle \psi\,, f(A)\psi\big\rangle \;=\; \int_{\sigma(A)} f\,d\mu_{\psi,\,A} \tag{40.187}$$

para toda $f \in C\big(\sigma(A)\big)$, onde denotamos a medida em $\sigma(A)$, cuja existência é garantida pelo Teorema 40.41, por $\mu_{\psi,\,A}$ para lembrar sua dependência em ψ e A.

A medida $\mu_{\psi,\,A}$ é denominada *medida espectral do operador A associada ao vetor $\psi \in \mathcal{H}$.*

No que se segue, estudaremos várias propriedades dessa medida. Por exemplo, provaremos no item 4 do Teorema 40.43, abaixo, que se $\varphi \in \mathcal{H}$, com $\|\varphi\| = 1$, é um autovetor de A com autovalor λ_0, então a medida $\mu_{\varphi,\,A}$ é a medida de Dirac centrada em λ_0.

E. 40.49 *Exercício.* Mostre que $\mu_{\alpha\psi,\,A} = |\alpha|^2\mu_{\psi,\,A}$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. ✣

[67] Frigyes Riesz (1880–1956).

[68] Teorema 2.14 da edição [427].

[69] Andrei Andreyevich Markov (1903–1979). O pai desse Markov, que tinha o mesmo nome que o filho e viveu entre 1856 e 1922, foi também um matemático célebre e foi o inventor das cadeias de Markov da teoria dos processos estocásticos, entre outras coisas. O trabalho do segundo Markov contendo o teorema que citamos sobre funcionais lineares é: A. Markov, "On mean values and exterior densities", Mat. Sbornik N.S. 4 (46) 165–191 (1938). Para mais referências históricas, vide [426].

A importância da relação (40.187) para nossa tarefa de estender o cálculo funcional para funções não-contínuas é a seguinte. Apesar de a função f em (40.187) ser contínua, o lado direito está bem definido para qualquer função Boreliana limitada, ou seja, se $g : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ é Boreliana e limitada então $\int_{\sigma(A)} g\,d\mu_{\psi,\,A}$ está bem definida. A questão é: existe um operador $g(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\big\langle \psi\,, g(A)\psi\big\rangle = \int_{\sigma(A)} g\,d\mu_{\psi,\,A}$? Mostraremos que, de fato, um tal operador pode ser definido por essa relação. A ideia é explorar identidade de polarização para definir o que seria o equivalente aos produtos escalares gerais $\big\langle \psi\,, g(A)\phi\big\rangle$ e mostrar que esse equivalente é uma forma sesquilinear e bicontínua (em ψ e $\phi \in \mathcal{H}$), o que, pela Proposição 40.11, página 2197, permite definir o operador limitado $g(A)$.

• **A construção do operador $g(A)$**

No que segue, $B_l\big(\sigma(A)\big)$ designará o conjunto de todas as funções complexas Borelianas e limitadas definidas em $\sigma(A)$.

Proposição 40.90 *Para cada $g \in B_l\big(\sigma(A)\big)$, Boreliana e limitada, a aplicação $\mathcal{S}_g : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ definida por*

$$\mathcal{S}_g(u,\ v) \;:=\; \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^{-n}\int_{\sigma(A)} g\,d\mu_{\psi_n,\,A} \tag{40.188}$$

onde $\psi_n := u + i^n v$, é uma aplicação sesquilinear e bicontínua em $\mathcal{H}$, sendo que $|\mathcal{S}_g(u,\ v)| \leq \|g\|_\infty\|u\|\,\|v\|$ para todos $u,\ v \in \mathcal{H}$. Assim, pela Proposição 40.11, página 2197, existe um operador limitado, que denotaremos por $g(A)$, tal que

$$\mathcal{S}_g(u,\ v) \;=\; \big\langle u,\ g(A)v\big\rangle$$

para todos $u,\ v \in \mathcal{H}$. É claro também que

$$\big\|g(A)\big\| \;\leq\; \|g\|_\infty\,. \tag{40.189}$$

□

Prova. Para cada função f contínua tem-se pela identidade de polarização (3.34), página 278, e por (40.187), que

$$\mathcal{S}_f(u,\ v) \;=\; \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^{-n}\int_{\sigma(A)} f d\mu_{\psi_n,\,A} \;=\; \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^{-n}\big\langle \psi_n,\ f(A)\psi_n\big\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^{-n}\Big\langle \big(u+i^n v\big),\ f(A)\big(u+i^n v\big)\Big\rangle \;=\; \big\langle u,\ f(A)v\big\rangle\,.$$

Isso mostra que $\mathcal{S}_f$ é sesquilinear e é bicontínua pois, por Cauchy-Schwarz, vale $|\langle u,\ f(A)v\rangle| \leq \|f(A)\|\,\|u\|\,\|v\|$. Queremos agora provar que essas propriedades estendem-se às formas $\mathcal{S}_g$, com $g \in B_l\big(\sigma(A)\big)$, e a ideia é explorar o fato que tais funções podem ser aproximadas por funções contínuas. Mais especificamente, usaremos o seguinte resultado:

Teorema 40.42 (Teorema de Lusin) [70] *Seja X um espaço localmente compacto e Hausdorff e seja μ uma medida positiva sobre uma σ-álgebra $\mathcal{M}$ de X que contém a σ-álgebra de Borel de X tal que: 1) $\mu(K) < \infty$ para todo compacto $K \subset X$; 2) μ é regular, ou seja $\mu(E) = \inf\{\mu(V),\ E \subset V,\ V \text{ aberto}\}$ para todo $E \in \mathcal{M}$ e $\mu(E) = \sup\big\{\mu(K),\ K \subset E,\ K \text{ compacto}\big\}$ para todo $E \in \mathcal{M}$ com $\mu(E) < \infty$; 3) o espaço de medida produzido por $\mathcal{M}$ e μ é completo, ou seja, se $E \in \mathcal{M}$ é tal que $\mu(E) = 0$, então todo subconjunto de E pertence a $\mathcal{M}$.*

Suponha que g seja uma função complexa e mensurável em X com a propriedade que $g(x) = 0$ se $x \notin B$, sendo $B \subset X$ tal que $\mu(B) < \infty$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $f \in C_c(X)$ (o espaço das funções contínuas definidas em X que tenham suporte compacto) tal que

$$\mu\big(\{x \in X|\ g(x) \neq f(x)\}\big) \;\leq\; \epsilon\,.$$

Além disso, f pode ser escolhida de forma que

$$\sup_{x\in X}|f(x)| \;\leq\; \sup_{x\in X}|g(x)|\,.$$

□

[70] Nikolai Nikolaevich Lusin (ou Luzin) (1883–1950).

O enunciado do teorema acima foi extraído de [427], onde sua demonstração pode também ser encontrada[71]. O Teorema 40.42 tem o seguinte corolário elementar, que usaremos adiante.

Corolário 40.24 *Seja X um espaço localmente compacto e Hausdorff e sejam μ_j, $j = 1, \ldots, n$, uma coleção finita de medidas satisfazendo as condições do Teorema 40.42. Seja g uma função complexa e Boreliana em X com a propriedade que $g(x) = 0$ se $x \notin B$, sendo $B \subset X$ tal que $\mu_j(B) < \infty$, $j = 1, \ldots, n$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $f \in C_c(X)$ tal que*

$$\mu_j\Big(\big\{x \in X |\ g(x) \neq f(x)\big\}\Big) \ \leq \ \epsilon$$

para todo $j = 1, \ldots, n$. Além disso, f pode ser escolhida de forma que

$$\sup_{x\in X} |f(x)| \ \leq \ \sup_{x\in X} |g(x)| \, .$$

Para tal f valerá

$$\int_X |f - g| \, d\mu_j \ \leq \ 2\|g\|_\infty \, \epsilon \, , \tag{40.190}$$

para cada $j = 1, \ldots, n$. □

Prova. Seja $D \coloneqq \big\{x \in X |\ g(x) \neq f(x)\big\}$. Pelas hipóteses, as medidas μ_j têm em comum a σ-álgebra de Borel em X, onde podemos definir a medida $\mu \coloneqq \mu_1 + \cdots + \mu_n$, a qual também satisfaz todas as condições do Teorema 40.42. Logo, existe $f \in C_c(X)$ com $(\mu_1 + \cdots + \mu_n)\big(D\big) \leq \epsilon$, ou seja, $\mu_1\big(D\big) + \cdots + \mu_n\big(D\big) \leq \epsilon$, o que implica $\mu_j\big(D\big) \leq \epsilon$ para todo $j = 1, \ldots, n$, pois as medidas são positivas. Prosseguindo, teremos para cada $j = 1, \ldots, n$,

$$\int_X |f - g| \, d\mu_j \ = \ \int_D |f - g| \, d\mu_j \ \leq \ \|f - g\|_\infty \mu_j(D) \ \leq \ 2\|g\|_\infty \, \epsilon \, ,$$

onde usamos o fato que $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$, o que implica $\|f - g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \leq 2\|g\|_\infty$. ■

Note-se que as condições 1, 2 e 3 do enunciado do Teorema 40.42 são aquelas garantidas pelo Teorema 40.41 e, portanto, valem para as medidas $\mu_{\psi,\,A}$ definidas em $X = \sigma(A)$.

Para $u, \, v \in \mathcal{H}$ fixos e $\epsilon > 0$ podemos, pelo Corolário 40.24, escolher $f \in C(\sigma(A))$ de forma que

$$\int_{\sigma(A)} |f - g| \, d\mu_{\psi_n,\,A} \ \leq \ 2\|g\|_\infty \, \epsilon \tag{40.191}$$

para todos os quatro vetores $\psi_n = u + i^n v$, $n = 0, \ldots, 3$. Assim, com $u, \, v \in \mathcal{H}$ fixos e para uma tal f teremos

$$|\mathcal{S}_g(u,\, v) - \mathcal{S}_f(u,\, v)| \ = \ \left|\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^{-n} \int_{\sigma(A)} (g - f) d\mu_{\psi_n,\,A}\right| \ \leq \ \sum_{n=0}^{3}\int_{\sigma(A)} |g - f| d\mu_{\psi_n,\,A} \ \leq \ 8\|g\|_\infty \, \epsilon \, . \tag{40.192}$$

Com isso podemos provar que $\mathcal{S}_g$ é sesquilinear explorando o fato que $\mathcal{S}_f$ o é para toda f contínua. De fato, para todos $u, \, v_1, \, v_2 \in \mathcal{H}$ e $\alpha_1, \, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, temos $S_f(u, \, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) - \alpha_1 \mathcal{S}_f(u, \, v_1) - \alpha_2 \mathcal{S}_f(u, \, v_2) = 0$ se f for contínua e daí segue que

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{S}_g(u, \, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) - \alpha_1 \mathcal{S}_g(u, \, v_1) - \alpha_2 \mathcal{S}_g(u, \, v_2)\Big| \\
&= \ \Big|\Big(\mathcal{S}_g(u, \, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) - \alpha_1 \mathcal{S}_g(u, \, v_1) - \alpha_2 \mathcal{S}_g(u, \, v_2)\Big) - \Big(\mathcal{S}_f(u, \, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) - \alpha_1 \mathcal{S}_f(u, \, v_1) - \alpha_2 \mathcal{S}_f(u, \, v_2)\Big)\Big| \\
&\leq \ \Big|\mathcal{S}_g(u, \, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) - \mathcal{S}_f(u, \, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)\Big| \\
&\qquad + \ |\alpha_1|\big|\mathcal{S}_g(u, \, v_1) - \mathcal{S}_f(u, \, v_1)\big| + |\alpha_2|\big|\mathcal{S}_g(u, \, v_2) - \mathcal{S}_f(u, \, v_2)\big| \, .
\end{aligned}$$

[71] Teorema 2.24 da edição [427].

Por (40.192), os três últimos termos podem ser escolhidos tão pequenos quanto se queira pela escolha de uma $f \in C(\sigma(A))$ apropriada (evocando o Corolário 40.24), o que nos leva a concluir que $\mathcal{S}_g(u, \, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \mathcal{S}_g(u, \, v_1) + \alpha_2 \mathcal{S}_g(u, \, v_2)$, estabelecendo a linearidade de $\mathcal{S}_g$ em relação ao segundo argumento. A antilinearidade em relação ao primeiro argumento é provada da mesma forma. Resta-nos mostrar que S_g é bicontínua. Escolhendo novamente $f \in C\big(\sigma(A)\big)$ de forma que $\big|\mathcal{S}_g(u, \, v) - \mathcal{S}_f(u, \, v)\big| \leq \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$ qualquer (vide (40.192)), e usando que $\big|\mathcal{S}_f(u, \, v)\big| \leq \|f(A)\| \, \|u\| \, \|v\|$, teremos

$$\big|\mathcal{S}_g(u, \, v)\big| \ = \ \big|\mathcal{S}_g(u, \, v) - \mathcal{S}_f(u, \, v) + \mathcal{S}_f(u, \, v)\big| \ \leq \ \big|\mathcal{S}_g(u, \, v) - \mathcal{S}_f(u, \, v)\big| + \big|\mathcal{S}_f(u, \, v)\big| \ \leq \ \epsilon + \big\|f(A)\big\| \, \|u\| \, \|v\| \, . \tag{40.193}$$

Lembremos que $\big\|f(A)\big\| = \|f\|_\infty$ e que, pelo Teorema de Lusin, Teorema 40.42, podemos escolher f de modo que $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$. Assim, $\big|\mathcal{S}_g(u, \, v)\big| \leq \epsilon + \|g\|_\infty \|u\| \, \|v\|$. Como isso vale para todo $\epsilon > 0$, concluímos que $\big|\mathcal{S}_g(u, \, v)\big| \leq \|g\|_\infty \|u\| \, \|v\|$, provando que $\mathcal{S}_g$ é bicontínua. Isso completa a prova da Proposição 40.90. ■

A Proposição 40.90 estabelece uma associação entre funções Borelianas limitadas g definidas em $\sigma(A)$ e operadores limitados $g(A)$ agindo em $\mathcal{H}$. Denotemos essa aplicação por $\hat{\phi} : B_l\big(\sigma(A)\big) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ou seja, $g(A) \equiv \hat{\phi}(g)$. A associação $f \mapsto f(A)$, para f contínua, é, como vimos no correr da demonstração da Proposição 40.90, um caso particular, de modo que $\hat{\phi} : B_l\big(\sigma(A)\big) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma extensão da aplicação $\phi : C\big(\sigma(A)\big) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ do Cálculo Funcional Contínuo, Teorema 40.40. Sobre a aplicação $\hat{\phi}$ temos o seguinte teorema.

Teorema 40.43 (Cálculo Funcional Boreliano) *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, seja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjunto e seja $\phi_A \equiv \hat{\phi} : B_l\big(\sigma(A)\big) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definida acima. $\hat{\phi}$ é uma extensão de $\phi : C\big(\sigma(A)\big) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ do Teorema 40.40 e, portanto, para $f \in C(\sigma(A))$ vale $\hat{\phi}(f) = \phi(f) = f(A)$. Em particular, para todo polinômio p vale $\hat{\phi}(p) = p(A)$. Por (40.189), $\big\|\hat{\phi}(g)\big\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \|g\|_\infty$ para toda $g \in B_l\big(\sigma(A)\big)$. Fora isso, valem as seguintes afirmações:*

1. *A aplicação $\hat{\phi}$ é um $*$-homomorfismo algébrico, ou seja,*

$$\hat{\phi}(\alpha g + \beta h) \ = \ \alpha\hat{\phi}(g) + \beta\hat{\phi}(h) \, , \qquad \hat{\phi}(gh) \ = \ \hat{\phi}(g)\hat{\phi}(h) \, , \qquad \hat{\phi}(g)^* \ = \ \hat{\phi}(\overline{g}) \, , \qquad \hat{\phi}(1) \ = \ \mathbb{1} \, , \tag{40.194}$$

   para todas $g, \, h \in B_l\big(\sigma(A)\big)$ e todos $\alpha, \, \beta \in \mathbb{C}$. Como $gh = hg$, segue de (40.194) que $\hat{\phi}(g)\hat{\phi}(h) = \hat{\phi}(h)\hat{\phi}(g)$ para todas $g, \, h \in B_l\big(\sigma(A)\big)$.

2. *Se $g \geq 0$ tem-se também $\hat{\phi}(g) \geq 0$.*

3. *Sejam $g \in B_l\big(\sigma(A)\big)$ e $g_n \in B_l\big(\sigma(A)\big)$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ para todo $x \in \sigma(A)$ mas tais que existe $M > 0$ para o qual $\|g_n\|_\infty < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $g_n(A)$ converge a $g(A)$ na topologia operatorial forte, ou seja, para todo $\psi \in \mathcal{H}$ a sequência $g_n(A)\psi$ converge a $g(A)\psi$.*

4. *Se $\varphi \in \mathcal{H}$ é um autovetor de A com autovalor λ_0, então $\mu_{\varphi,\,A}$ é a medida de Dirac centrada em λ_0 e $\hat{\phi}(g)\varphi = g(\lambda_0)\varphi$ para toda $g \in B_l(\sigma(A))$. Em geral, tem-se $\sigma\big(\hat{\phi}(g)\big) \subset \overline{\big\{g(\lambda), \ \lambda \in \sigma(A)\big\}}$.* □

Comentamos que no Teorema 40.40, página 2316, estabelecemos que $\sigma\big(\phi(f)\big) = \big\{f(\lambda), \ \lambda \in \sigma(A)\big\}$ para f contínua. Tal propriedade não pode valer, em geral, para funções Borelianas limitadas, já pelo fato de que a imagem de um conjunto compacto por uma função Boreliana limitada não é necessariamente um conjunto compacto.

Prova do Teorema 40.43.

Prova do item 1. Como $\mathcal{S}_g(u, \, v)$ dada em (40.188) é claramente linear em g, concluímos que $\hat{\phi}$ também o é: $\hat{\phi}(\alpha g + \beta h) = \alpha\hat{\phi}(g) + \beta\hat{\phi}(h)$ para todas $g, \, h \in B_l(\sigma(A))$ e todas $\alpha, \, \beta \in \mathbb{C}$.

Para provar que $\hat{\phi}(gh) = \hat{\phi}(g)\hat{\phi}(h)$ é suficiente provar que $\langle u, \, (gh)(A)v\rangle = \langle u, \, g(A)h(A)v\rangle$ para cada $u, \, v \in \mathcal{H}$. Fixemos esse par de vetores e, evocando o Corolário 40.24, escolhamos $f_1 \in C\big(\sigma(A)\big)$ tal que

$$\mu_{\psi_n,\,A}\Big(\big\{x \in \sigma(A) : \, g(x) \neq f_1(x)\big\}\Big) \ \leq \ \epsilon$$

para todos os quatro vetores $\psi_n = u + i^n h(A)v$, $n = 0, \ldots, 3$ e para os quatro vetores $\psi_n = u + i^n v$, $n = 0, \ldots, 3$. Fixada f_1, e evocando o Corolário 40.24, escolhamos $f_2 \in C(\sigma(A))$ tal que

$$\mu_{\psi_n,\,A}\Big(\big\{x \in \sigma(A) : \, h(x) \neq f_2(x)\big\}\Big) \ \leq \ \epsilon$$

para todos os quatro vetores $\psi_n = f_1(A)^* u + i^n v$, $n = 0, \ldots, 3$ e para os quatro vetores $\psi_n = u + i^n v$, $n = 0, \ldots, 3$.

Com essas escolhas valem, por (40.190),

$$\int_{\sigma(A)} |f_1 - g| \, d\mu_{\psi_n, A} \, \leq \, 2\|g\|_\infty \, \epsilon$$

para todos os quatro vetores $\psi_n = u + i^n h(A)v$, $n = 0, \ldots, 3$ e, portanto, como em (40.192),

$$\left|\mathcal{S}_g(u, \, h(A)v) - \mathcal{S}_{f_1}(u, \, h(A)v)\right| \, \leq \, 8\|g\|_\infty \, \epsilon \, . \tag{40.195}$$

Analogamente,

$$\int_{\sigma(A)} |f_2 - h| \, d\mu_{\psi_n, A} \, \leq \, 2\|h\|_\infty \, \epsilon$$

para todos os quatro vetores $\psi_n = f_1(A)^* u + i^n v$, $n = 0, \ldots, 3$. e, portanto, como em (40.192),

$$\left|\mathcal{S}_h(f_1(A)^* u, \, v) - \mathcal{S}_{f_2}(f_1(A)^* u, \, v)\right| \, \leq \, 8\|h\|_\infty \, \epsilon \, . \tag{40.196}$$

Como

$$\Big\{x \in \sigma(A) : \, g(x)h(x) \neq f_1(x) f_2(x)\Big\} \subset \Big\{x \in \sigma(A) : \, g(x) \neq f_1(x)\Big\} \bigcup \Big\{x \in \sigma(A) : \, h(x) \neq f_2(x)\Big\}$$

(justifique!), segue também que

$$\mu_{\psi_n, A}\Big(\big\{x \in \sigma(A) : \, g(x)h(x) \neq f_1(x) f_2(x)\big\}\Big)$$

$$\leq \, \mu_{\psi_n, A}\Big(\big\{x \in \sigma(A) : \, g(x) \neq f_1(x)\big\}\Big) + \mu_{\psi_n, A}\Big(\big\{x \in \sigma(A) : \, h(x) \neq f_2(x)\big\}\Big) \, \leq \, 2\epsilon$$

para todos os quatro vetores $\psi_n = u + i^n v$, $n = 0, \ldots, 3$. Isso implica, como em (40.190),

$$\int_{\sigma(A)} |f_1 f_2 - gh| \, d\mu_{\psi_n, A} \, \leq \, 4\|gh\|_\infty \, \epsilon$$

para todos os quatro vetores $\psi_n = u + i^n v$, $n = 0, \ldots, 3$ e, portanto, como em (40.192),

$$|\mathcal{S}_{gh}(u, \, v) - \mathcal{S}_{f_1 f_2}(u, \, v)| \leq \, 16\|gh\|_\infty \, \epsilon \, . \tag{40.197}$$

Teremos, fazendo uso de (40.195), (40.196) e (40.197),

$$\begin{aligned}
\Big|\big\langle u, \, (gh)(A)v\big\rangle - \big\langle u, \, g(A)h(A)v\big\rangle\Big| \quad &= \quad \Big|\mathcal{S}_{gh}\big(u, \, v\big) - \mathcal{S}_g\big(u, \, h(A)v\big)\Big| \\
&= \quad \Big|\mathcal{S}_{gh}\big(u, \, v\big) - \mathcal{S}_{f_1}\big(u, \, h(A)v\big) - \mathcal{S}_g\big(u, \, h(A)v\big) + \mathcal{S}_{f_1}\big(u, \, h(A)v\big)\Big| \\
&\leq \quad \Big|\mathcal{S}_{gh}(u, \, v) - \mathcal{S}_{f_1}(u, \, h(A)v)\Big| + \Big|\mathcal{S}_g(u, \, h(A)v) - \mathcal{S}_{f_1}(u, \, h(A)v)\Big| \\
&\overset{(40.195)}{\leq} \quad \Big|\mathcal{S}_{gh}(u, \, v) - \mathcal{S}_{f_1}(u, \, h(A)v)\Big| + 8\|g\|_\infty \epsilon \\
&= \quad \Big|\mathcal{S}_{gh}(u, \, v) - \big\langle u, \, f_1(A)h(A)v\big\rangle\Big| + 8\|g\|_\infty \epsilon \\
&= \quad \Big|\mathcal{S}_{gh}(u, \, v) - \big\langle f_1(A)^* u, \, h(A)v\big\rangle\Big| + 8\|g\|_\infty \epsilon \\
&= \quad \Big|\mathcal{S}_{gh}(u, \, v) - \mathcal{S}_h\big(f_1(A)^* u, \, v\big)\Big| + 8\|g\|_\infty \epsilon \\
&= \quad \Big|\mathcal{S}_{gh}\big(u, \, v\big) - \mathcal{S}_{f_2}\big(f_1(A)^* u, \, v\big) \\
&\qquad\qquad - \mathcal{S}_h\big(f_1(A)^* u, \, v\big) + \mathcal{S}_{f_2}\big(f_1(A)^* u, \, v\big)\Big| + 8\|g\|_\infty \epsilon \\
&\leq \quad \Big|\mathcal{S}_{gh}(u, \, v) - \mathcal{S}_{f_2}\big(f_1(A)^* u, \, v\big)\Big| \\
&\qquad\qquad + \Big|\mathcal{S}_h\big(f_1(A)^* u, \, v\big) - \mathcal{S}_{f_2}\big(f_1(A)^* u, \, v\big)\Big| + 8\|g\|_\infty \epsilon \\
&\overset{(40.196)}{\leq} \quad \Big|\mathcal{S}_{gh}\big(u, \, v\big) - \mathcal{S}_{f_2}\big(f_1(A)^* u, \, v\big)\Big| + 8\big(\|h\|_\infty + \|g\|_\infty\big)\epsilon \\
&= \quad \Big|\mathcal{S}_{gh}(u, \, v) - \big\langle f_1(A)^* u, \, f_2(A)v\big\rangle\Big| + 8\big(\|h\|_\infty + \|g\|_\infty\big)\epsilon \\
&= \quad \Big|\mathcal{S}_{gh}(u, \, v) - \big\langle u, \, f_1(A) f_2(A)v\big\rangle\Big| + 8\big(\|h\|_\infty + \|g\|_\infty\big)\epsilon \\
&= \quad \Big|\mathcal{S}_{gh}(u, \, v) - \big\langle u, \, (f_1 f_2)(A)v\big\rangle\Big| + 8\big(\|h\|_\infty + \|g\|_\infty\big)\epsilon \\
&= \quad \Big|\mathcal{S}_{gh}(u, \, v) - \mathcal{S}_{f_1 f_2}(u, \, v)\Big| + 8\big(\|h\|_\infty + \|g\|_\infty\big)\epsilon \\
&\overset{(40.197)}{\leq} \quad 16\|gh\|_\infty \epsilon + 8\big(\|h\|_\infty + \|g\|_\infty\big)\epsilon \\
&= \quad 8\big(2\|gh\|_\infty + \|h\|_\infty + \|g\|_\infty\big)\epsilon \, .
\end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, concluímos que $\langle u, \, (gh)(A)v\rangle = \langle u, \, g(A)h(A)v\rangle$ para todos $u, \, v \in \mathcal{H}$, o que implica $(gh)(A) = g(A)h(A)$, ou seja, $\hat{\phi}(gh) = \hat{\phi}(g)\hat{\phi}(h)$, estabelecendo a propriedade de homomorfismo.

Provar que $\hat{\phi}(g)^* = \hat{\phi}(\overline{g})$ segue das seguintes linhas autoexplicativas:

$$\langle v,\, g(A)^* u\rangle \;=\; \overline{\langle u,\, g(A) v\rangle} \;=\; \overline{\mathcal{S}_g(u,\, v)} \;=\; \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^n \int_{\sigma(A)} \overline{g} d\mu_{\psi_n,\, A}$$

$$= \; \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^n \left\langle \big(u + i^n v\big),\, \overline{g}(A)\big(u + i^n v\big)\right\rangle \;=\; \langle v,\, \overline{g}(A) u\rangle \;,$$

sendo que a última igualdade é demonstrada explicitamente, expandindo-se o produto escalar na soma. Isso estabeleceu que $g(A)^* = \overline{g}(A)$, ou seja, $\hat{\phi}(g)^* = \hat{\phi}(\overline{g})$.

Prova do item 2. Se g é Boreliana limitada e positiva então $\sqrt{g}$ também o é (vide Proposição 31.17, página 1573). Com isso, $\hat{\phi}(g) = \hat{\phi}(\sqrt{g}\sqrt{g}) = \hat{\phi}(\sqrt{g})\hat{\phi}(\sqrt{g})$, que é um operador positivo, pois $\hat{\phi}(\sqrt{g}) = \hat{\phi}\left(\overline{\sqrt{g}}\right) = \hat{\phi}(\sqrt{g})^*$, já que $\sqrt{g}$ é real.

Prova do item 3. Sejam $g \in B_l(\sigma(A))$ e $g_n \in B_l(\sigma(A))$, $n \in \mathbb{N}$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ para todo $x \in \sigma(A)$ mas tais que existe $M > 0$ para o qual $\|g_n\|_\infty < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fixemos $\psi \in \mathcal{H}$. Tem-se que

$$\begin{aligned}
\big\|\big(g_n(A) - g(A)\big)\psi\big\|^2 \;&=\; \Big\langle \psi,\, \big(g_n(A) - g(A)\big)^*\big(g_n(A) - g(A)\big)\psi\Big\rangle \\
&=\; \int_{\sigma(A)} |g_n - g|^2 \, d\mu_{\psi,\, A} \\
&\leq\; \|g_n - g\|_\infty \int_{\sigma(A)} |g_n - g| \, d\mu_{\psi,\, A} \\
&\leq\; (M + \|g\|_\infty) \int_{\sigma(A)} |g_n - g| \, d\mu_{\psi,\, A} \;.
\end{aligned}$$

Neste ponto evocamos o Teorema da Convergência Dominada, Teorema 31.6 da página 1557, o qual garante[72] que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\sigma(A)} |g_n - g| \, d\mu_{\psi,\, A} = 0$. Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} \big\|\big(g_n(A) - g(A)\big)\psi\big\| = 0$ para cada $\psi \in \mathcal{H}$, o que significa que $g_n(A) \to g(A)$ na topologia operatorial forte.

Prova do item 4. Seja $\varphi \in \mathcal{H}$ um autovetor de A com autovalor λ_0. Adotemos $\|\varphi\| = 1$ e consideremos a medida $\mu_{\varphi,\, A}$ tal que $\langle \varphi,\, f(A)\varphi\rangle = \int_{\sigma(A)} f \, d\mu_{\varphi,\, A}$ para f contínua (vide (40.187)). Pelo Teorema 40.40, $f(A)\varphi = f(\lambda_0)\varphi$. Logo, por (40.190),

$$\int_{\sigma(A)} f \, d\mu_{\varphi,\, A} \;=\; f(\lambda_0) \tag{40.198}$$

para toda função $f \in C\big(\sigma(A)\big)$.

Vamos provar que $\mu_{\varphi,\, A}\big(\{\lambda_0\}\big)$ é não-nula. Seja G um aberto contendo o conjunto fechado $\{\lambda_0\}$. Então, $F = \sigma(A) \setminus G$ é fechado. Pelo Lema de Urysohn[73], Lema 32.3, página 1604, existe uma função $f_u \in C\big(\sigma(A)\big)$ satisfazendo $0 \leq f_u(x) \leq 1$ para todo $x \in \sigma(A)$ e tal que $f_u(\lambda_0) = 1$ e $f_u(x) = 0$ para todo $x \in F$. Assim, f_u pode ser não-nula apenas no aberto G. Logo, como $\int_{\sigma(A)} f_u d\mu_{\varphi,\, A} \overset{(40.198)}{=} f_u(\lambda_0) = 1$, vale

$$1 \;=\; \int_{\sigma(A)} f_u d\mu_{\varphi,\, A} \;=\; \int_G f_u d\mu_{\varphi,\, A} \overset{0\leq f_u\leq 1}{\leq} \mu_{\varphi,\, A}(G) \;. \tag{40.199}$$

Pela regularidade da medida $\mu_{\varphi,\, A}$ (propriedade (40.185), página 2318), vale

$$\mu_{\varphi,\, A}\big(\{\lambda_0\}\big) \;=\; \inf\Big\{\mu_{\varphi,\, A}(G),\; \{\lambda_0\} \subset G,\; G \text{ aberto}\Big\} \overset{(40.199)}{\geq} \; 1 \;. \tag{40.200}$$

[72] Cada g_n é dominada pela função constante M, a qual claramente pertence a $\mathcal{L}_1(\sigma(A),\, d\mu_{\psi,\, A})$.

[73] Pavel Samuilovich Urysohn (1898–1924).

Evocando o Teorema de Lusin, Teorema 40.42, página 2319, existe para todo $\epsilon > 0$ uma função $f_\epsilon \in C\big(\sigma(A)\big)$ tal que $\mu_{\varphi,\, A}\Big(\big\{x \in \sigma(A) :\; g(x) \neq f_\epsilon(x)\big\}\Big) \leq \epsilon$ e $\|f_\epsilon\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ Como vimos (vide (40.190)), isso implica $\Big|\int_{\sigma(A)} (g - f_\epsilon)\, d\mu_{\varphi,\, A}\Big| < 2\|g\|_\infty \epsilon$, ou seja, $\Big|\int_{\sigma(A)} g \, d\mu_{\varphi,\, A} - f_\epsilon(\lambda_0)\Big| < 2\|g\|_\infty \epsilon$ e, portanto,

$$\int_{\sigma(A)} g \, d\mu_{\varphi,\, A} \;=\; \lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(\lambda_0) \;.$$

Vamos mostrar que $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(\lambda_0) = g(\lambda_0)$. Se assim não fosse, teríamos $f_\epsilon(\lambda_0) \neq g(\lambda_0)$ para todo ϵ pequeno o suficiente, ou seja, para tais ϵ's valeria $\lambda_0 \in \big\{x \in \sigma(A) :\; g(x) \neq f_\epsilon(x)\big\}$. Logo, $\mu_{\varphi,\, A}\big(\{\lambda_0\}\big) \leq \mu_{\varphi,\, A}\Big(\big\{x \in \sigma(A) :\; g(x) \neq f_\epsilon(x)\big\}\Big) < \epsilon$, o que implica $\mu_{\varphi,\, A}\big(\{\lambda_0\}\big) = 0$, contrariando (40.200)[74]. Com isso, estabelecemos que

$$\int_{\sigma(A)} g \, d\mu_{\varphi,\, A} \;=\; g(\lambda_0) \tag{40.201}$$

para toda função Boreliana limitada g. Em particular, se $B \subset \sigma(A)$ é um conjunto Boreliano e χ_B é sua função característica, então $\mu_{\varphi,\, A}(B) = \int_{\sigma(A)} \chi_B \, d\mu_{\varphi,\, A} = \chi_B(\lambda_0)$. Isso está dizendo-nos que $\mu_{\varphi,\, A} = \delta_{\{\lambda_0\}}$, a medida de Dirac centrada em λ_0 (vide página 1449).

Para completar a prova que $g(A)\varphi = g(\lambda_0)\varphi$ para toda $g \in B_l\big(\sigma(A)\big)$, notamos que

$$\begin{aligned}
\Big\|\big(g(A) - g(\lambda_0)\mathbb{1}\big)\varphi\Big\|^2 \;&=\; \Big\langle \varphi,\; \big(g(A) - g(\lambda_0)\mathbb{1}\big)^*\big(g(A) - g(\lambda_0)\mathbb{1}\big)\varphi\Big\rangle \\
&=\; \int_{\sigma(A)} \big|g - g(\lambda_0)\big|^2 \, d\mu_{\varphi,\, A} \overset{(40.201)}{=} \big|g(\lambda_0) - g(\lambda_0)\big|^2 \;=\; 0 \;,
\end{aligned}$$

provando que $g(A)\varphi = g(\lambda_0)\varphi$.

Se λ não pertence ao fecho da imagem de $\sigma(A)$ por g então $r := \frac{1}{(g-\lambda)}$ é Boreliana e limitada e, portanto, $\hat{\phi}(r)$ está bem definida e vale $\hat{\phi}(r)\hat{\phi}(g-\lambda) = \hat{\phi}(g-\lambda)\hat{\phi}(r) = \mathbb{1}$, pelas propriedades de homomorfismo, provando que $\hat{\phi}(g) - \lambda\mathbb{1}$ é bijetora com inversa limitada e que, portanto, $\lambda \in \rho(\hat{\phi}(g))$, o conjunto resolvente de $\hat{\phi}(g)$. Isso estabeleceu que o complemento do fecho da imagem de g, $\mathbb{C} \setminus \overline{\{g(\lambda),\; \lambda \in \sigma(A)\}}$, é um subconjunto de $\rho(\hat{\phi}(g))$. Logo, $\sigma(\hat{\phi}(g)) \subset \overline{\{g(\lambda),\; \lambda \in \sigma(A)\}}$.

Com isso a demonstração do Teorema 40.43 está completa. ■

Uma das consequências mais importantes da extensão de ϕ a $\hat{\phi}$ reside no fato que agora podemos definir operadores como $\hat{\phi}(\chi_B) = \chi_B(A)$, onde χ_B é a função característica de um conjunto Boreliano B de $\sigma(A)$. Como veremos, podemos com o uso de tais operadores generalizar o Teorema Espectral para operadores autoadjuntos limitados, um fato de importância fundamental, inclusive para a Física Quântica. Para tratar disso devemos primeiro discutir a noção geral de medidas com valores em projeções ortogonais (mvpo's).

40.9.3 Medidas com Valores em Projeções Ortogonais

Definição. Seja K um conjunto compacto (i.e., fechado e limitado) de $\mathbb{R}$, doravante fixo. Vamos denotar por $\mathfrak{B}(K)$ a coleção de todos os conjuntos Borelianos de K. Uma associação $\mathfrak{E}_K \equiv \mathfrak{E} : \mathfrak{B}(K) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que a cada conjunto Boreliano $B \in \mathfrak{B}(K)$ associa um operador limitado E_B é dita ser uma *medida com valores em projeções ortogonais* (*mvpo*) se as seguintes condições forem satisfeitas.

1. Cada E_B é um projetor ortogonal, ou seja, $E_B^2 = E_B$ e $E_B^* = E_B$.
2. $E_\emptyset = 0$ e $E_K = \mathbb{1}$.

[74] Esse argumento casualmente prova que $f_\epsilon(\lambda_0) = g(\lambda_0)$ para todo ϵ pequeno o suficiente, um resultado intuitivamente esperado, já que $\mu_{\varphi,\, A}\big(\{\lambda_0\}\big) \neq 0$

3. $E_{B_1}E_{B_2} = E_{B_1\cap B_2}$ para todos $B_1,\ B_2 \in \mathfrak{B}(K)$.

4. Para toda coleção contável B_n, $n \in \mathbb{N}$, de Borelianos em K satisfazendo $B_k \cap B_l = \emptyset$ sempre que $k \neq l$, tem-se

$$E_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n} \;=\; s\!-\!\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} E_{B_n}\ ,$$

onde $s-\lim$ é o limite na topologia operatorial forte, ou seja, para todo $\psi \in \mathcal{H}$ vale

$$E_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n}\psi \;=\; \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} E_{B_n}\psi\ .$$

♠

A relevância dessa definição ficará clara com o Teorema 40.45, adiante. Notemos por ora que para cada $\psi \in \mathcal{H}$ com $\psi \neq 0$ podemos definir, para todo $B \in \mathfrak{B}(K)$,

$$\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}}(B) \;:=\; \langle \psi,\ E_B\psi\rangle\ . \tag{40.202}$$

O índice $\mathfrak{E}$ servirá para lembrar a dependência de ν da medida com valores em projeções ortogonais $\{E_B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ B \subset K,\ B \text{ Boreliano}\}$.

Teremos, $\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}}(\emptyset) = \langle\psi,\ E_\emptyset\psi\rangle = 0$ e $\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}}(B) \geq 0$ para todo B, pois $\langle\psi,\ E_B\psi\rangle = \langle\psi,\ E_B^*E_B\psi\rangle = \|E_B\psi\|^2$. Além disso, O item 4 da definição acima tem a seguinte consequência: se B_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma coleção contável de Borelianos em K satisfazendo $B_k \cap B_l = \emptyset$ sempre que $k \neq l$, então

$$\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \;=\; \left\langle \psi,\ E_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n}\psi\right\rangle \;=\; \left\langle \psi,\ s\!-\!\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} E_{B_n}\psi\right\rangle \;=\; \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\langle\psi,\ E_{B_n}\psi\rangle \;=\; \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}}(B_n)\ .$$

Essas propriedades estão dizendo-nos que $\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}}$ é uma medida positiva sobre a σ-álgebra de Borel de K. Se $\|\psi\| = 1$, tem-se que $\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}}(K) = \langle\psi,\ E_K\psi\rangle = \|\psi\|^2 = 1$, e vemos nesse caso $\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}}$ é uma medida de probabilidade em K.

Se assim é, podemos construir uma integral (de Lebesgue) sobre a medida Boreliana $\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}}$, tal como desenvolvido no Capítulo 31, página 1523, e com a mesma teremos definidas as integrais $\int g d\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}}$ para toda g Boreliana e limitada. Como mostraremos, seguindo passos semelhantes, mas não idênticos, à construção dos operadores $\hat{\phi}(A) \equiv g(A)$ feita acima (passos esses iniciados com a Proposição 40.90 e que culminaram com o Teorema 40.43), podemos construir a partir das integrais $\int g d\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}}$ operadores limitados, que denotaremos por $\phi_{\mathfrak{E}}(g) \equiv g_{\mathfrak{E}}$, tais que $\int g d\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}} = \langle\psi,\ g_{\mathfrak{E}}\psi\rangle$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$.

• **Construindo os operadores $\phi_{\mathfrak{E}}(g) \equiv g_{\mathfrak{E}}$**

Nossa construção dos operadores $\phi_{\mathfrak{E}}(g) \equiv g_{\mathfrak{E}}$ assemelha-se àquela dos operadores $\hat{\phi}(A) \equiv g(A)$ mas, ao contrário daquele caso, não podemos partir do pressuposto que $\int f d\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}} = \langle\psi,\ f_{\mathfrak{E}}\psi\rangle$ para $f \in C(K)$ contínua, pois os operadores $f_{\mathfrak{E}}$ não foram ainda definidos. Nossa estratégia será inicialmente definir tais operadores para as funções Borelianas simples de K e, a partir delas, definir os operadores $g_{\mathfrak{E}}$ para g Boreliana e limitada.

Seja X um conjunto e $Y \subset X$. Define-se a *função característica* de Y, denotada $\chi_Y : X \to \mathbb{R}$ por

$$\chi_Y(x) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{se } x \in Y \\ 0, & \text{se } x \notin Y \end{cases}\ .$$

Vide Seção 1.1.2.2, página 63.

Seja, $s = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{B_k}$ uma função simples Boreliana limitada definida em K, onde $B_k \in \mathfrak{B}(K)$ e α_k, para todo $k = 1, \ldots, m$. O conjunto de todas as funções simples Borelianas limitadas definida em K será denotado por $S_l(K)$. Definimos $\phi_{\mathfrak{E}}(s) \equiv s_{\mathfrak{E}} := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k E_{B_k}$. É elementar constatar que

$$\phi_{\mathfrak{E}}(\alpha r + \beta s) \;=\; \alpha\phi_{\mathfrak{E}}(r) + \beta\phi_{\mathfrak{E}}(s)\ ,\qquad \phi_{\mathfrak{E}}(rs) \;=\; \phi_{\mathfrak{E}}(r)\phi_{\mathfrak{E}}(s)\ ,\phi_{\mathfrak{E}}(s)^* \;=\; \phi_{\mathfrak{E}}(\overline{s})\ ,\qquad \phi_{\mathfrak{E}}(1) \;=\; \phi_{\mathfrak{E}}(\chi_K) \;=\; \mathbb{1}\ ,$$

para todas $r,\ s \in S_l(K)$ e todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$. Como $rs = sr$, segue de que $\phi_{\mathfrak{E}}(r)\phi_{\mathfrak{E}}(s) = \phi_{\mathfrak{E}}(s)\phi_{\mathfrak{E}}(r)$ para todas $r,\ s \in S_l(K)$. Assim, $\phi_{\mathfrak{E}} : S_l(K) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um $*$-homomorfismo. Observe-se que se $s \in S_l(K)$ é representado na forma $s = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\chi_{B_k}$ (com os B_k's disjuntos) então o espectro de $\phi_{\mathfrak{E}}(s)$ é $\{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m\}$ e $\big\|\phi_{\mathfrak{E}}(s)\big\|$ coincide com $\max\{|\alpha_1|,\ \ldots,\ |\alpha_m|\} = \sup_{x\in K}|s(x)| \equiv \|s\|_\infty$.

Temos o seguinte análogo à Proposição 40.90, da página 2319:

Proposição 40.91 *Para cada $g \in B_l(K)$, Boreliana e limitada, a aplicação $\mathcal{S}_g : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ definida por*

$$\mathcal{S}_g(u,\ v) \;:=\; \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^{-n}\int_K g\, d\nu_{\psi_n,\,\mathfrak{E}}\ , \tag{40.203}$$

onde $\psi_n := u + i^n v$, é uma aplicação sesquilinear e bicontínua em $\mathcal{H}$, sendo que $|\mathcal{S}_g(u,\ v)| \leq \|g\|_\infty\|u\|\,\|v\|$ para todos $u,\ v \in \mathcal{H}$. Assim, pela Proposição 40.11, existe um operador limitado, que denotaremos por $\phi_{\mathfrak{E}}(g) \equiv g_{\mathfrak{E}}$, tal que

$$\mathcal{S}_g(u,\ v) \;=\; \langle u,\ g_{\mathfrak{E}}\, v\rangle$$

para todos $u,\ v \in \mathcal{H}$. Vale igualmente que

$$\|g_{\mathfrak{E}}\| \;\leq\; \|g\|_\infty\ . \tag{40.204}$$

□

Prova. Para cada função $s \in S_l(K)$ da forma $s = \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\chi_{B_k}$ tem-se pela identidade de polarização (3.34), página 278, que

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_s(u,\ v) \;&=\; \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^{-n}\int_K s d\nu_{\psi_n,\,\mathfrak{E}} \;=\; \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^{-n}\int_K \chi_{B_k} d\nu_{\psi_n,\,\mathfrak{E}} \\
&=\; \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^{-n}\,\nu_{\psi_n,\,\mathfrak{E}}(B_k) \\
&\overset{(40.202)}{=}\; \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^{-n}\,\langle\psi_n,\ E_{B_k}\psi_n\rangle \;=\; \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^{-n}\,\langle\psi_n,\ s_{\mathfrak{E}}\,\psi_n\rangle \\
&=\; \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^{-n}\left\langle (u+i^n v),\ s_{\mathfrak{E}}\,(u+i^n v)\right\rangle \\
&=\; \langle u,\ s_{\mathfrak{E}}\, v\rangle\ ,
\end{aligned}$$

Isso mostra que $\mathcal{S}_s$, com $s \in S_l(K)$, é sesquilinear e é bicontínua pois, por Cauchy-Schwarz, vale $|\langle u,\ s_{\mathfrak{E}}v\rangle| \leq \|s_{\mathfrak{E}}\|\,\|u\|\,\|v\| \leq \|s\|_\infty\,\|u\|\,\|v\|$. Queremos agora provar que essas propriedades estendem-se às formas $\mathcal{S}_g$, com $g \in B_l(K)$, e a ideia é explorar o fato que tais funções podem ser aproximadas por funções simples. Mais especificamente, usaremos os seguintes fatos: pelo Lema 31.3, página 1543, e pelo Corolário 31.2, se $g \in B_l(K)$, existe uma sequência $s_n \in S_l(K)$ tal que $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = g(x)$ para todo $x \in K$. Podemos escolhê-la de forma que $\sup_{x\in K}|s_n(x)| \leq \sup_{x\in K}|g(x)|$ para todo n. Agora, pelo Teorema da Convergência Dominada, Teorema 31.6, página 1557, segue do fato de a própria g ser integrável que $\lim_{n\to\infty}\int_K |s_n - g|d\nu = 0$. Se ν é uma soma finita de medidas, $\nu = \nu_1 + \cdots + \nu_l$, segue disso que para todo $\epsilon > 0$ existe $s \in S_l(K)$ tal que $\int_K |s-g|d\nu_k < \epsilon$ para todo $k = 1, \ldots, l$ e de modo que $\sup_{x\in K}|s(x)| \leq \sup_{x\in K}|g(x)|$.

Disso extraímos essencialmente a mesma consequência que em (40.192): para cada $u,\ v \in \mathcal{H}$, $g \in B_l(K)$ e $\epsilon > 0$ podemos encontrar $s \in S_l(K)$ tal que $|\mathcal{S}_g(u,\ v) - \mathcal{S}_s(u,\ v)| \leq \epsilon$. Como em (40.193), isso implica, $|\mathcal{S}_g(u,\ v)| = |\mathcal{S}_g(u,\ v) - \mathcal{S}_s(u,\ v) + \mathcal{S}_s(u,\ v)| \leq |\mathcal{S}_g(u,\ v) - \mathcal{S}_s(u,\ v)| + |\mathcal{S}_s(u,\ v)| \leq \epsilon + \|s_{\mathfrak{E}}\|\,\|u\|\,\|v\|$ e como $\|s_{\mathfrak{E}}\| \leq \|s\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ temos também $|\mathcal{S}_g(u,\ v)| \leq \|g\|_\infty\|u\|\,\|v\|$ para todo $u,\ v \in \mathcal{H}$.

Tendo provado que S_g é sesquilinear e bicontínua, concluímos novamente pela Proposição 40.11, que existe um operador limitado $\phi_{\mathfrak{E}}(g) \equiv g_{\mathfrak{E}}$, tal que $\mathcal{S}_g(u,\ v) = \langle u,\ g_{\mathfrak{E}}\, v\rangle$ para todos $u,\ v \in \mathcal{H}$ com $\|g_{\mathfrak{E}}\| \leq \|g\|_\infty$. ■

Sobre $\phi_{\mathfrak{E}}(g) : B_l(K) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ vale o seguinte:

Teorema 40.44 (Cálculo Funcional Boreliano (versão para mvpo's)) *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $K \subset \mathbb{R}$ compacto e $\mathfrak{E} : \mathfrak{B}(K) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma medida com valores em projeções ortogonais e seja $\phi_{\mathfrak{E}} : B_l(K) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definida acima. Então, $\|\phi_{\mathfrak{E}}(g)\|_{\mathcal{H}} \leq \|g\|_\infty$ para toda $g \in B_l(K)$. Fora isso, valem as seguintes afirmações:*

1. *A aplicação $\phi_{\mathfrak{E}}$ é um $*$-homomorfismo algébrico, ou seja,*

$$\phi_{\mathfrak{E}}(\alpha g + \beta h) \;=\; \alpha\phi_{\mathfrak{E}}(g) + \beta\phi_{\mathfrak{E}}(h)\,, \qquad \phi_{\mathfrak{E}}(gh) \;=\; \phi_{\mathfrak{E}}(g)\phi_{\mathfrak{E}}(h)\,, \qquad \phi_{\mathfrak{E}}(g)^* \;=\; \phi_{\mathfrak{E}}(\overline{g})\,, \qquad \phi_{\mathfrak{E}}(1) \;=\; \mathbb{1}\,, \tag{40.205}$$

   para todas $g,\ h \in B_l(K)$ e todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$. Como $gh = hg$, segue de (40.205) que $\phi_{\mathfrak{E}}(g)\phi_{\mathfrak{E}}(h) = \phi_{\mathfrak{E}}(h)\phi_{\mathfrak{E}}(g)$ para todas $g,\ h \in B_l(K)$.

2. *Se $g \geq 0$ tem-se também $\phi_{\mathfrak{E}}(g) \geq 0$.*

3. *Sejam $g \in B_l(K)$ e $g_n \in B_l(K)$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ para <u>todo</u> $x \in K$ mas tais que existe $M > 0$ para o qual $\|g_n\|_\infty < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $\phi_{\mathfrak{E}}(g_n)$ converge a $\phi_{\mathfrak{E}}(g)$ na topologia operatorial forte, ou seja, para todo $\psi \in \mathcal{H}$ a sequência $\phi_{\mathfrak{E}}(g_n)\psi$ converge a $\phi_{\mathfrak{E}}(g)\psi$.* □

Prova. As demonstrações dos itens 1, 2 e 3 repetem os mesmos passos das demonstrações respectivas do Teorema 40.43, apenas com a diferença que as funções Borelianas não são aqui aproximadas por funções contínuas, mas por funções simples. ■

• **<u>Integração sobre uma medida com valores em projeções ortogonais</u>**

Por analogia à definição de integral sobre medidas, vamos escrever

$$\phi_{\mathfrak{E}}(g) \;\equiv\; g_{\mathfrak{E}} \;\equiv\; \int_K g(\lambda)\, dE_\lambda \;\equiv\; \int g(\lambda)\, dE_\lambda\,,$$

para denotar o operador obtido na Proposição 40.91, página 2327, tal que $\langle \psi,\ g_{\mathfrak{E}}\psi\rangle = \int g d\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}}$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$ com $\|\psi\| = 1$. Com essa notação, podemos também formalmente escrever

$$\langle \psi,\ g_{\mathfrak{E}}\psi\rangle \;\equiv\; \int g(\lambda)\, \langle \psi,\ dE_\lambda\psi\rangle \;\equiv\; \int g(\lambda)\, d\langle \psi,\ E_\lambda\psi\rangle$$

e entender $d\langle \psi,\ E_\lambda\psi\rangle$ como uma nova notação para $d\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}}$.

O fato de $\phi_{\mathfrak{E}}$ ser um $*$-homomorfismo entre as álgebras $B_l(K)$ e $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (Teorema 40.44, página 2328) expressa-se na nova notação da seguinte forma, que nada mais é que a (40.205):

$$\int_K \Big(\alpha g(\lambda) + \beta h(\lambda)\Big)\, dE_\lambda \;=\; \alpha \int_K g(\lambda)\, dE_\lambda + \beta \int_K h(\lambda)\, dE_\lambda\,, \tag{40.206}$$

$$\int_K (gh)(\lambda)\, dE_\lambda \;=\; \left(\int_K g(\lambda)\, dE_\lambda\right)\left(\int_K h(\lambda)\, dE_\lambda\right)\,, \tag{40.207}$$

$$\left(\int_K g(\lambda)\, dE_\lambda\right)^* \;=\; \int_K \overline{g(\lambda)}\, dE_\lambda\,, \tag{40.208}$$

$$\int_K \chi_K(\lambda)\, dE_\lambda \;\equiv\; \int_K 1\, dE_\lambda \;\equiv\; \int_K dE_\lambda \;=\; \mathbb{1}\,, \tag{40.209}$$

válidas para todas $g,\ h \in B_l(K)$ e todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$.

De particular importância é o operador obtido do monômio $f(\lambda) = \lambda$. Vamos denotá-lo por $A_{\mathfrak{E}}$:

$$A_{\mathfrak{E}} \;:=\; \int \lambda\, dE_\lambda\,.$$

Mostraremos que a cada operador A limitado autoadjunto existe uma <u>única</u> medida $\mathfrak{E}$ com valores em projeções ortogonais com a propriedade que $A_{\mathfrak{E}} = A$.

40.9.4 Os Projetores Espectrais e o Teorema Espectral

Seja $B \subset \sigma(A)$ um conjunto Boreliano. Então, $\chi_B \in B_l(\sigma(A))$. A introdução dos operadores $\hat{\phi}(g) = g(A)$ para g Boreliana e limitada permite-nos definir os operadores limitados $P_B := \hat{\phi}(\chi_{B\cap\sigma(A)}) \equiv \chi_B(A)$, denominados *projetores espectrais* do operador autoadjunto A. Suas propriedades básicas estão coletadas no seguinte teorema:

Teorema 40.45 *Seja A um operador autoadjunto agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, a associação $\mathfrak{P} : \mathfrak{B}(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que a cada Boreliano de $\sigma(A)$ associa um operador limitado, dada por $\mathfrak{B}(\sigma(A)) \ni B \mapsto P_B := \hat{\phi}(\chi_B) \equiv \chi_B(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma medida com valores em projeções ortogonais, mais especificamente, tem-se*

1. *Cada P_B é um projetor ortogonal, ou seja, $P_B^2 = P_B$ e $P_B^* = P_B$.*

2. *$P_\emptyset = 0$ e $P_{\sigma(A)} = \mathbb{1}$.*

3. *$P_{B_1}P_{B_2} = P_{B_1\cap B_2}$ para todos $B_1,\ B_2 \subset \sigma(A)$ Borelianos.*

4. *Se B_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma coleção contável de Borelianos em $\sigma(A)$ satisfazendo $B_k \cap B_l = \emptyset$ sempre que $k \neq l$, então*

$$P_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n} \;=\; s{-}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} P_{B_n}\,,$$

   onde $s-\lim$ é o limite na topologia operatorial forte, ou seja, para todo $\psi \in \mathcal{H}$ vale

$$P_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n}\psi \;=\; \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} P_{B_n}\psi\,.$$

5. *Se $\psi \in \mathcal{H}$, vale*

$$\mu_{\psi,\,A}(B) \;=\; \langle \psi,\ P_B\psi\rangle\,, \tag{40.210}$$

   para todo $B \in \mathfrak{B}(\sigma(A))$.

Os projetores P_B com $B \in \mathfrak{B}(\sigma(A))$ são denominados projetores espectrais *do operador A.* □

Prova do Teorema 40.45.

<u>*Prova do item 1.*</u> Como $\chi_B^2 = \chi_B$ e $\overline{\chi_B} = \chi_B$, o item 1 segue do item 1 do Teorema 40.43.

<u>*Prova do item 2.*</u> $\chi_\emptyset = 0$ e, daí, $P_\emptyset = \hat{\phi}(\chi_\emptyset) = 0$. Fora isso, $\chi_{\sigma(A)}$ coincide em $\sigma(A)$ com o polinômio constante igual a 1. Logo, pelo enunciado Teorema 40.43, tem-se $P_{\sigma(A)} = \hat{\phi}(\chi_{\sigma(A)}) = \hat{\phi}(1) = \mathbb{1}$.

<u>*Prova do item 3.*</u> $\chi_{B_1}\chi_{B_2} = \chi_{B_1\cap B_2}$. Logo, pela propriedade de homomorfismo de $\hat{\phi}$, item 1 do Teorema 40.43, vale $P_{B_1}P_{B_2} = \hat{\phi}(\chi_{B_1})\hat{\phi}(\chi_{B_2}) = \hat{\phi}(\chi_{B_1\cap B_2}) = P_{B_1\cap B_2}$.

<u>*Prova do item 4.*</u> A sequência de funções Borelianas $g_N = \sum_{n=1}^N \chi_{B_n}$ satisfaz $\|g_N\|_\infty = 1$ para todo N, pois os B_n são disjuntos e, portanto, cada ponto $x \in \sigma(A)$ pode estar no máximo em um dos B_n's. É também claro que para cada $x \in \sigma(A)$

$$\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n}(x) \;=\; \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \chi_{B_n}(x) \;=\; \lim_{N\to\infty} g_N(x)\,.$$

Portanto, pelo item 3 do Teorema 40.43, segue que

$$\hat{\phi}\left(\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n}\right) \;=\; s{-}\lim_{N\to\infty} \hat{\phi}\left(\sum_{n=1}^{N} \chi_{B_n}\right) \;=\; s{-}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \hat{\phi}\left(\chi_{B_n}\right)\,,$$

ou seja,

$$P_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n} \;=\; s{-}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} P_{B_n}\,.$$

Prova do item 5. A prova é elementar, pois $\mu_{\psi,\,A}(B) = \int_{\sigma(A)} \chi_B \, d\mu_{\psi,\,A} = \langle \psi,\ \chi_B(A)\psi\rangle \equiv \langle \psi,\ P_B\psi\rangle$. ■

É evidente agora que $\nu_{\psi,\,\mathfrak{P}} = \mu_{\psi,\,A}$, pelo menos quando essas medidas estão restritas à σ-álgebra de Borel de $\sigma(A)$. Com o uso da notação introduzida acima, teremos

$$g(A) \;=\; \int_{\sigma(A)} g(\lambda)\, dP_\lambda \tag{40.211}$$

para toda $g \in B_l(\sigma(A))$ e, em particular, podemos escrever o próprio operador autoadjunto A na forma

$$A \;=\; \int_{\sigma(A)} \lambda\, dP_\lambda \,. \tag{40.212}$$

As relações (40.206)-(40.209) ficam

$$\int_{\sigma(A)} \Big(\alpha g(\lambda) + \beta h(\lambda)\Big)\, dP_\lambda \;=\; \alpha \int_{\sigma(A)} g(\lambda)\, dP_\lambda + \beta \int_{\sigma(A)} h(\lambda)\, dP_\lambda \,, \tag{40.213}$$

$$\int_{\sigma(A)} (gh)(\lambda)\, dP_\lambda \;=\; \left(\int_{\sigma(A)} g(\lambda)\, dP_\lambda\right)\left(\int_{\sigma(A)} h(\lambda)\, dP_\lambda\right) \,, \tag{40.214}$$

$$\left(\int_{\sigma(A)} g(\lambda)\, dP_\lambda\right)^{*} \;=\; \int_{\sigma(A)} \overline{g(\lambda)}\, dP_\lambda \,, \tag{40.215}$$

$$\int_{\sigma(A)} \chi_{\sigma(A)}(\lambda)\, dP_\lambda \;\equiv\; \int_{\sigma(A)} 1\, dP_\lambda \;\equiv\; \int_{\sigma(A)} dP_\lambda \;=\; \mathbb{1} \,, \tag{40.216}$$

válidas para todas $g,\ h \in B_l(\sigma(A))$ e todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$.

• **Unicidade dos projetores espectrais**

Se tivermos uma outra medida $\mathfrak{E}$ com valores em projeções ortogonais tal que $A_{\mathfrak{E}} = A$, será essa medida idêntica à medida dos projetores espectrais $\mathfrak{P}$ definida acima? A resposta é sim! De fato, se $A = \int_{\sigma(A)} \lambda\, dP_\lambda = \int_{\sigma(A)} \lambda\, dE_\lambda$ vale para todo polinômio p a relação $p(A) = \int_{\sigma(A)} p(\lambda)\, dP_\lambda = \int_{\sigma(A)} p(\lambda)\, dE_\lambda$ (para isso, use (40.206)-(40.207) e (40.213)-(40.214)). Assim, para todo $\psi \in \mathcal{H}$ e todo polinômio p, vale

$$\left\langle \psi,\ \left(\int_{\sigma(A)} p(\lambda)\, dP_\lambda\right)\psi \right\rangle = \left\langle \psi,\ \left(\int_{\sigma(A)} p(\lambda)\, dE_\lambda\right)\psi \right\rangle, \text{ ou seja, } \int_{\sigma(A)} p(\lambda)\, d\mu_{\psi,\,A} = \int_{\sigma(A)} p(\lambda)\, d\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}} \,.$$

Pelo Teorema de Weierstrass (Teorema 37.18, página 1992), concluímos disso que $\int_{\sigma(A)} f\, d\mu_{\psi,\,A} = \int_{\sigma(A)} f\, d\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}}$ para toda função contínua $f \in C(\sigma(A))$. Usando novamente o Teorema de Lusin, Teorema 40.42, e o Corolário 40.24, obtém-se daí que $\int_{\sigma(A)} g\, d\mu_{\psi,\,A} = \int_{\sigma(A)} g\, d\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}}$ para toda função Boreliana limitada $g \in B_l(\sigma(A))$. Em particular, para um conjunto Boreliano $B \subset \sigma(A)$, arbitrário, tem-se $\int_{\sigma(A)} \chi_B\, d\mu_{\psi,\,A} = \int_{\sigma(A)} \chi_B\, d\nu_{\psi,\,\mathfrak{E}}$, ou seja, $\mu_{\psi,\,A}(B) = \nu_{\psi,\,\mathfrak{E}}(B)$. Isso, por sua vez afirma, por (40.202) e por (40.210), que $\langle \psi,\ P_B\psi\rangle = \langle \psi,\ E_B\psi\rangle$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$, o que, pela identidade de polarização (expressão (3.34), página 278) implica $P_B = E_B$. Como B é arbitrário, isso significa que as medidas com valores em projetores ortogonais $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{E}$ coincidem, caso $A = A_{\mathfrak{E}}$.

• **O Teorema Espectral para operadores autoadjuntos limitados**

Chegamos assim ao seguinte:

Teorema 40.46 (Teorema Espectral) *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjunto. Então, existe uma única medida com valores em projeções ortogonais $\mathfrak{P} : \mathfrak{B}(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, a saber, aquela estabelecida no Teorema 40.45, com $\mathfrak{B}(\sigma(A)) \ni B \mapsto P_B := \hat{\phi}(\chi_B) \equiv \chi_B(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tal que, com a notação acima,*

$$A \;=\; \int_{\sigma(A)} \lambda\, dP_\lambda \,. \tag{40.217}$$

Tem-se, também de modo único,

$$g(A) \;=\; \int_{\sigma(A)} g(\lambda)\, dP_\lambda \,.$$

para toda $g \in B_l(\sigma(A))$ e de sorte que as relações (40.213)-(40.216) são válidas para todas $g,\ h \in B_l(\sigma(A))$ e todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$. □

A expressão (40.217) é denominada *representação espectral*, ou *decomposição espectral* do operador autoadjunto limitado A. O Teorema Espectral é de importância fundamental para a Física Quântica, mas antes de discutirmos isso na Seção 48.3, façamos alguns comentários de natureza notacional.

• **A notação de Dirac**

Na Física Quântica, encontra-se para as expressões (40.211)-(40.212) a notação, dita *notação de Dirac*[75],

$$A \;=\; \int_{\sigma(A)} \lambda\, d|\lambda\rangle\langle\lambda| \,, \qquad g(A) \;=\; \int_{\sigma(A)} g(\lambda)\, d|\lambda\rangle\langle\lambda| \,,$$

ou seja, nela identificamos $dP_\lambda \equiv d|\lambda\rangle\langle\lambda|$. Assim, na notação de Dirac (40.213)-(40.216) ficam

$$\int_{\sigma(A)} \Big(\alpha g(\lambda) + \beta h(\lambda)\Big)\, d|\lambda\rangle\langle\lambda| \;=\; \alpha \int_{\sigma(A)} g(\lambda)\, d|\lambda\rangle\langle\lambda| + \beta \int_{\sigma(A)} h(\lambda)\, d|\lambda\rangle\langle\lambda| \,,$$

$$\int_{\sigma(A)} (gh)(\lambda)\, d|\lambda\rangle\langle\lambda| \;=\; \left(\int_{\sigma(A)} g(\lambda)\, d|\lambda\rangle\langle\lambda|\right)\left(\int_{\sigma(A)} h(\lambda)\, d|\lambda\rangle\langle\lambda|\right) \,,$$

$$\left(\int_{\sigma(A)} g(\lambda)\, d|\lambda\rangle\langle\lambda|\right)^{*} \;=\; \int_{\sigma(A)} \overline{g(\lambda)}\, d|\lambda\rangle\langle\lambda| \,,$$

$$\int_{\sigma(A)} \chi_{\sigma(A)}(\lambda)\, d|\lambda\rangle\langle\lambda| \;\equiv\; \int_{\sigma(A)} 1\, d|\lambda\rangle\langle\lambda| \;\equiv\; \int_{\sigma(A)} d|\lambda\rangle\langle\lambda| \;=\; \mathbb{1} \,,$$

válidas para todas $g,\ h \in B_l(\sigma(A))$ e todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$.

Advertimos o leitor que, ao contrário do que é lamentavelmente sugerido em muitos livros-texto de Mecânica Quântica, não é sempre legítimo interpretar o símbolo $|\lambda\rangle\langle\lambda|$ como um projetor sobre um autovetor $|\lambda\rangle$, pois nem todo $\lambda \in \sigma(A)$ é um autovalor de A e $|\lambda\rangle$ não necessariamente designa um legítimo vetor de $\mathcal{H}$. A notação de Dirac é apenas isso: uma notação. Mais especificamente, é uma notação para representar os fatos descritos no Teorema Espectral, Teorema 40.46.

Há uma pequena literatura matemática que pretende atender ao interesse de alguns físicos no sentido de atribuir um status extranotacional às manipulações formais envolvendo os símbolos "bra" $\langle\lambda|$ e "ket" $|\lambda\rangle$, por meio dos chamados "rigged Hilbert spaces"[76]. Citemos aqui [412]: *"We must emphasize that we regard the spectral theorem as sufficient for any argument where a nonrigorous approach might rely on the Dirac notation; thus, we only recommend the abstract rigged space approach to readers with a strong emotional attachment to the Dirac formalism"*.

• **Comentário sobre os projetores espectrais**

Vamos agora fazer uma observação de uso frequente.

Proposição 40.92 *Seja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, autoadjunto, Afirmamos que os projetores espectrais de A são elementos da álgebra de von Neumann gerada por A.* □

[75] Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984).

[76] Vide, e.g., os seguintes trabalhos de John Elias Roberts (1939–2015): *"The Dirac Bra and Ket Formalism"*, J. Math. Phys. **7**, 1097–1104 (1966) e *"Rigged Hilbert Spaces in Quantum Mechanics"*, Commun. Math. Phys. **3**, 98–119 (1966). O próprio Roberts deixou de valorizar esse tipo de abordagem.

Prova. Seja B um conjunto Boreliano de $\sigma(A)$. Seja $P_B := \hat{\phi}(\chi_B) \equiv \chi_B(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ o correspondente projetor espectral de A, tal como definido no Teorema 40.45, página 2329. Tomemos $\psi \in \mathcal{H}$. Pelo Corolário 40.24, página 2320, existe para cada ϵ uma função $f \in C(\sigma(A))$ tal que

$$\Big|\langle \psi,\ P_B\psi\rangle - \langle \psi,\ f(A)\psi\rangle\Big| \ =\ \left|\int_{\sigma(A)} \big(\chi_B - f\big)\, d\mu_{\psi,\,A}\right| \ \leq\ \int_{\sigma(A)} \big|\chi_B - f\big|\, d\mu_{\psi,\,A} \overset{(40.190)}{\leq}\ 2\|\chi_B\|_\infty\epsilon \ =\ 2\epsilon\,.$$

Isso diz-nos que P_B encontra-se no fecho fraco da álgebra C* gerada por A, ou seja, na álgebra de von Neumann gerada por A, como queríamos estabelecer. ■

40.10 Operadores Tipo Traço e de Hilbert-Schmidt

Nesta seção introduzimos as noções de operadores traciais, de operadores de Hilbert-Schmidt e definimos a noção de traço para operadores traciais, generalizando, assim, para espaços de Hilbert separáveis a noção de traço de matrizes quadradas, introduzida na Seção 10.2.3, página 523. Nosso tratamento é detalhado e procuramos não omitir passagens de demonstrações. O material aqui contido pode ser encontrado em diversas referências, como [412] (que, no entanto, é muito econômico nas demonstrações), [273] e [459]. O texto clássico sobre o assunto é [439].

No que segue, $\mathcal{H}$ denota um espaço de Hilbert separável com produto escalar $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ e $\{\phi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ ou $\{\psi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ denotam bases ortonormais completas em $\mathcal{H}$. Em tudo o que segue consideraremos $\mathcal{H}$ como sendo de dimensão infinita, mas todos os resultados são igualmente válidos em dimensão finita (alguns sendo eventualmente triviais, nesse caso). É útil recordar que para cada $\psi\in\mathcal{H}$ vale $\|\psi\|^2_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty}\big|\langle\phi_n,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}}\big|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\big|\langle\psi_n,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}}\big|^2$ e que, consequentemente, ambas as séries são convergentes.

• **Resultados preparatórios**

Aqui vamos denotar por $\mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ o conjunto de todos os operadores autoadjuntos, limitados e positivos agindo no espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$. Vamos reunir alguns resultados técnicos que serão utilizados em toda a corrente seção.

Proposição 40.93 *Seja $F\in\mathcal{B}_+(\mathcal{H})$. Se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n,\ F\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$ for convergente para uma base ortonormal completa $\{\phi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$, então o será para qualquer outra base ortonormal completa $\{\psi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ em $\mathcal{H}$ e teremos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n,\ F\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\psi_n,\ F\psi_n\rangle_{\mathcal{H}}$.* □

Prova. Se $\{\psi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ é uma outra base ortonormal completa, então observe-se que $\langle\psi_m,\ F\psi_m\rangle_{\mathcal{H}} = \big\|F^{1/2}\psi_m\big\|^2_{\mathcal{H}}$ para todo m e que vale $\big\|F^{1/2}\psi_m\big\|^2_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty}\big|\langle\phi_n,\ F^{1/2}\psi_m\rangle_{\mathcal{H}}\big|^2$, assim como $\big\|F^{1/2}\phi_n\big\|^2_{\mathcal{H}} = \sum_{m=1}^{\infty}\big|\langle\psi_m,\ F^{1/2}\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\big|^2$. Logo,

$$\sum_{m=1}^{M}\langle\psi_m,\ F\psi_m\rangle_{\mathcal{H}} \ =\ \lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\big|\langle\phi_n,\ F^{1/2}\psi_m\rangle_{\mathcal{H}}\big|^2 \ =\ \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[\sum_{m=1}^{M}\big|\langle\psi_m,\ F^{1/2}\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\big|^2\right]$$

$$=\ \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[\big\|F^{1/2}\phi_n\big\|^2_{\mathcal{H}} - \sum_{m=M+1}^{\infty}\big|\langle\psi_m,\ F^{1/2}\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\big|^2\right]$$

e, portanto,

$$\sum_{m=1}^{M}\langle\psi_m,\ F\psi_m\rangle_{\mathcal{H}} - \sum_{m=1}^{M}\langle\phi_m,\ F\phi_m\rangle_{\mathcal{H}} \ =\ \lim_{N\to\infty}\sum_{n=M+1}^{N}\big\|F^{1/2}\phi_n\big\|^2_{\mathcal{H}} - \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=M+1}^{\infty}\big|\langle\psi_m,\ F^{1/2}\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\big|^2\,.$$

Temos que $\big\|F^{1/2}\phi_n\big\|^2_{\mathcal{H}} = \langle\phi_n,\ F\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$ e, portanto, para todo $\epsilon>0$ existe $M_1(\epsilon)\in\mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=M+1}^{N}\big\|F^{1/2}\phi_n\big\|^2_{\mathcal{H}} \ =\ \sum_{n=M+1}^{\infty}\langle\phi_n,\ F\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \ <\ \epsilon$$

sempre que $M\geq M_1(\epsilon)$, pela hipótese de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n,\ F\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$. Por outro lado, podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=M+1}^{\infty}\big|\langle\psi_m,\ F^{1/2}\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\big|^2 \ =\ \sum_{n=1}^{N}\big\|P_M^{\perp}F^{1/2}\phi_n\big\|^2_{\mathcal{H}}\,,$$

onde $P_M := P_{\psi_1}+\cdots+P_{\psi_M}$ é o projetor ortogonal sobre o subespaço gerado por $\psi_1,\ \ldots,\ \psi_M$ e $P_M^{\perp} = \mathbb{1}-P_M$ é o projetor ortogonal sobre o subespaço ortogonal àquele subespaço. Naturalmente, como $\|P_M^{\perp}\|_{\mathcal{H}}=1$, vale

$$\sum_{n=1}^{N}\big\|P_M^{\perp}F^{1/2}\phi_n\big\|^2_{\mathcal{H}} \ \leq\ \sum_{n=1}^{N}\big\|F^{1/2}\phi_n\big\|^2_{\mathcal{H}} \ =\ \sum_{n=1}^{N}\langle\phi_n,\ F\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\,,$$

estabelecendo que $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\big\|P_M^{\perp}F^{1/2}\phi_n\big\|^2_{\mathcal{H}}$ existe. Escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big\|P_M^{\perp}F^{1/2}\phi_n\big\|^2_{\mathcal{H}} \ =\ \sum_{n=1}^{L}\big\|P_M^{\perp}F^{1/2}\phi_n\big\|^2_{\mathcal{H}} + J_{L,\,M}$$

com $J_{L,\,M} := \sum_{n=L+1}^{\infty}\big\|P_M^{\perp}F^{1/2}\phi_n\big\|^2_{\mathcal{H}}$. Usando os fatos acima,

$$J_{L,\,M} \ :=\ \sum_{n=L+1}^{\infty}\big\|P_M^{\perp}F^{1/2}\phi_n\big\|^2_{\mathcal{H}} \ \leq\ \sum_{n=L+1}^{\infty}\big\|F^{1/2}\phi_n\big\|^2_{\mathcal{H}} \ =\ \sum_{n=L+1}^{\infty}\langle\phi_n,\ F\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \ \leq\ \epsilon$$

sempre que $L\geq M_1(\epsilon)$, independentemente de M.

Assim, juntando os fatos estabelecidos, provamos que para todo $\epsilon>0$ temos

$$\left|\sum_{m=1}^{M}\langle\psi_m,\ F\psi_m\rangle_{\mathcal{H}} - \sum_{m=1}^{M}\langle\phi_m,\ F\phi_m\rangle_{\mathcal{H}} + \sum_{n=1}^{L}\big\|P_M^{\perp}F^{1/2}\phi_n\big\|^2_{\mathcal{H}}\right| \ \leq\ \epsilon+\epsilon$$

desde que tomemos $M\geq M_1(\epsilon)$ e $L\geq M_1(\epsilon)$. Agora, para cada L tem-se

$$\lim_{M\to\infty}\sum_{n=1}^{L}\big\|P_M^{\perp}F^{1/2}\phi_n\big\|^2_{\mathcal{H}} \ =\ \sum_{n=1}^{L}\lim_{M\to\infty}\big\|P_M^{\perp}F^{1/2}\phi_n\big\|^2_{\mathcal{H}} \ =\ 0\,,$$

pois para cada $\psi\in\mathcal{H}$ vale $\lim_{M\to\infty}\big\|P_M^{\perp}\psi\big\|^2_{\mathcal{H}} = \lim_{M\to\infty}\sum_{m=M+1}^{\infty}\big|\langle\psi_m,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}}\big|^2 = 0$, já que $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\big|\langle\psi_m,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}}\big|^2$ é uma série convergente (a $\|\psi\|^2_{\mathcal{H}}$). Logo, para todo $\epsilon>0$ vale

$$\lim_{M\to\infty}\left|\sum_{m=1}^{M}\langle\psi_m,\ F\psi_m\rangle_{\mathcal{H}} - \sum_{m=1}^{M}\langle\phi_m,\ F\phi_m\rangle_{\mathcal{H}}\right| \ \leq\ 2\epsilon$$

e, portanto, $\lim_{M\to\infty}\sum_{m=1}^{M}\langle\psi_m,\ F\psi_m\rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{M\to\infty}\sum_{m=1}^{M}\langle\phi_m,\ F\phi_m\rangle_{\mathcal{H}}$. ■

O seguinte lema técnico será usado diversas vezes em demonstrações no que segue:

Lema 40.15 *Seja $F \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n,\, F\psi_n\rangle_{\mathcal{H}}$ seja convergente para uma base ortonormal completa $\{\psi_n,\, n\in\mathbb{N}\}$ (e, portanto, para todas as bases ortonormais completas em $\mathcal{H}$, pela Proposição 40.93, página 2332). Seja também $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma isometria parcial. Então, vale a desigualdade*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \langle \psi_m,\, U^*FU\psi_m\rangle_{\mathcal{H}} \;\le\; \sum_{m=1}^{\infty} \langle \psi_m,\, F\psi_m\rangle_{\mathcal{H}} \tag{40.218}$$

em qualquer base ortonormal completa $\{\psi_m,\, m\in\mathbb{N}\}$ do espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$. □

Prova. Observemos em primeiro lugar que $U^*FU = (F^{1/2}U)^*F^{1/2}U$. Logo, $U^*FU \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$. Isso é relevante, pois diz-nos que a série $\sum_{m=1}^{\infty} \langle \psi_m,\, U^*FU\psi_m\rangle_{\mathcal{H}}$, se convergir, será independente da base ortonormal completa empregada (pela Proposição 40.93), fato que usaremos no que segue.

Uma observação importante é que, conforme demonstrado na Proposição 40.14, página 2203, se U é uma isometria parcial, então sua imagem $\mathrm{Ran}\,(U)$ é um conjunto fechado em $\mathcal{H}$. Assim, $\mathcal{H}$ pode ser decomposto em dois subespaços ortogonais fechados: $\mathrm{Ker}\,(U^*)$ e $\mathrm{Ker}\,(U^*)^{\perp} \overset{(40.33)}{=} \mathrm{Ran}\,(U)$. Como ambos são subespaços fechados de $\mathcal{H}$, ambos são por si mesmos espaços de Hilbert separáveis e, portanto, dotados de bases ortonormais completas contáveis. Assim, é claro que podemos constituir uma base ortonormal completa $\{\psi_m,\, m\in\mathbb{N}\}$ em $\mathcal{H}$ constituída de sorte que cada ψ_m ou pertence a $\mathrm{Ker}\,(U^*)$ ou a $\mathrm{Ran}\,(U)$.

Denotemos por $\mathcal{U}$ o subconjunto de $\mathbb{N}$ definido por $\mathcal{U} := \{n\in\mathbb{N}|\ \psi_n \in \mathrm{Ran}\,(U)\}$. Obviamente, os elementos ψ_m com $m\in\mathcal{U}$ são da forma $\psi_m = U\phi_m$, para algum $\phi_m \in \mathcal{H}$. Sem perda de generalidade podemos escolher $\phi_m \in \mathrm{Ker}\,(U)^{\perp}$. Note-se que, como U é uma isometria em $\mathrm{Ker}\,(U)^{\perp}$, vale $\delta_{mn} = \langle \psi_m,\, \psi_n\rangle_{\mathcal{H}} = \langle U\phi_m,\, U\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \phi_m,\, \phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$ para todos $m,\, n\in\mathcal{U}$. Assim, $\{\phi_m,\, m\in\mathcal{U}\}$ é um conjunto ortonormal em $\mathrm{Ker}\,(U)^{\perp}$ e queremos agora provar que $\{\phi_m,\, m\in\mathcal{U}\}$ é uma base ortonormal completa em $\mathrm{Ker}\,(U)^{\perp}$.

Suponhamos que $\psi \in \mathrm{Ker}\,(U)^{\perp}$ satisfaça $\langle \psi,\, \phi_m\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ para todo $m\in\mathcal{U}$. Novamente devido à isometria de U em $\mathrm{Ker}\,(U)^{\perp}$, temos $0 = \langle \psi,\, \phi_m\rangle_{\mathcal{H}} = \langle U\psi,\, U\phi_m\rangle_{\mathcal{H}} = \langle U\psi,\, \psi_m\rangle_{\mathcal{H}}$ para todo $m\in\mathcal{U}$, provando que $U\psi \in \mathrm{Ran}\,(U)^{\perp}$. Logo, $U\psi \in \mathrm{Ran}\,(U)\cap\mathrm{Ran}\,(U)^{\perp}$, o que implica $U\psi = 0$. Logo, $\psi \in \mathrm{Ker}\,(U)\cap\mathrm{Ker}\,(U)^{\perp}$, provando que $\psi = 0$. Isso estabelece que o conjunto $\{\phi_m,\, m\in\mathcal{U}\}$ é uma base ortonormal completa em $\mathrm{Ker}\,(U)^{\perp}$.

Tomando a união de $\{\phi_m,\ m\in\mathcal{U}\}$ com alguma base ortonormal completa em $\mathrm{Ker}\,(U)$ constituímos uma base ortonormal completa em $\mathcal{H}$, que denotaremos por $\{\varphi_m,\, m\in\mathbb{N}\}$. Note-se que cada φ_m ou é um elemento de $\mathrm{Ker}\,(U)$ ou é um elemento de $\{\phi_l,\, l\in\mathcal{U}\}$.

Pelas hipóteses sobre F, teremos

$$\infty \;>\; \sum_{m=1}^{\infty} \langle \psi_m,\, F\psi_m\rangle_{\mathcal{H}} \;\ge\; \sum_{m\in\mathcal{U}} \langle \psi_m,\, F\psi_m\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \sum_{m\in\mathcal{U}} \langle \phi_m,\, U^*FU\phi_m\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n,\, U^*FU\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}}\,, \tag{40.219}$$

sendo que a segunda desigualdade decorre do fato de a soma ser restrita de $m\in\mathbb{N}$ a $m\in\mathcal{U}\subset\mathbb{N}$, com os somandos sendo positivos. Na última igualdade usamos o fato evidente que $U\varphi_n = 0$ para aqueles φ_n's que sejam elementos de $\mathrm{Ker}\,(U)$. Naturalmente, (40.219) estabelece que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \varphi_n,\, U^*FU\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}}$ é convergente na base $\{\varphi_m,\, m\in\mathbb{N}\}$ e, como observamos no início da demonstração, isso implica que essa expressão independe da base ortonormal completa $\{\varphi_m,\, m\in\mathbb{N}\}$. Assim, estabelecemos que para qualquer base ortonormal completa $\{\psi_m,\, m\in\mathbb{N}\}$ tem-se a desigualdade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n,\, U^*FU\psi_n\rangle_{\mathcal{H}} \;\le\; \sum_{m=1}^{\infty} \langle \psi_m,\, F\psi_m\rangle_{\mathcal{H}} \;<\; \infty\,,$$

que é o que desejávamos demonstrar. ■

40.10.1 Operadores Tipo Traço, ou Traciais

Seja $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dizemos que A é um *operador tipo traço*, ou um *operador de classe tracial*, ou simplesmente um *operador tracial*, se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\, |A|\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$ for convergente para uma base ortonormal completa $\{\phi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ (e, portanto, para todas as outras, pela Proposição 40.93, acima).

Comentemos que se $\mathcal{H}$ tem dimensão finita, então, naturalmente, todo operador é tipo traço. Mais adiante mostraremos que podemos definir a noção de traço de um operador tracial, generalizando a noção correspondente que se conhece para matrizes quadradas (vide Seção 10.2.3, página 523).

Denotamos por $\mathcal{I}_1 \equiv \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ o conjunto de todos os operadores de traciais agindo em $\mathcal{H}$.

Proposição 40.94 *Seja $A\in\mathcal{I}_1$ e seja $\{\varphi_m,\, m\in\mathbb{N}\}$ uma base ortonormal no espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$. Então, a sequência $\{\langle \varphi_n,\, A\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}},\, n\in\mathbb{N}\}$ é absolutamente somável e vale*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big|\langle \varphi_n,\, A\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}}\big| \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n,\, |A|\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}}\,. \tag{40.220}$$

□

Prova. Usando a decomposição polar de operadores de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (vide Teorema da Decomposição Polar, Teorema 40.31, página 2290) escrevemos $A = U|A|$, onde U é uma isometria parcial. Teremos,

$$\big|\langle \varphi_n,\, A\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}}\big| \;=\; \Big|\big\langle \varphi_n,\, U|A|^{1/2}|A|^{1/2}\varphi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}\Big| \;=\; \Big|\big\langle |A|^{1/2}U^*\varphi_n,\, |A|^{1/2}\varphi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}\Big| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} \Big\||A|^{1/2}U^*\varphi_n,\Big\|_{\mathcal{H}}\Big\||A|^{1/2}\varphi_n\Big\|_{\mathcal{H}}\,. \tag{40.221}$$

Logo, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para produtos escalares e para sequências,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \big|\langle \varphi_n,\, A\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}}\big| &\overset{(40.221)}{\le} \sum_{n=1}^{\infty} \Big\||A|^{1/2}U^*\varphi_n\Big\|_{\mathcal{H}}\Big\||A|^{1/2}\varphi_n\Big\|_{\mathcal{H}} \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \big\||A|^{1/2}U^*\varphi_n\big\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n'=1}^{\infty} \big\||A|^{1/2}\varphi_{n'}\big\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n,\, U|A|U^*\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}}\right)^{1/2} \left(\sum_{n'=1}^{\infty} \langle \varphi_{n'},\, |A|\varphi_{n'}\rangle_{\mathcal{H}}\right)^{1/2} \\
&\overset{(40.218)}{\le} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n,\, |A|\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}}\,,
\end{aligned}$$

como queríamos estabelecer. ■

O teorema a seguir apresenta fatos de importância fundamental sobre $\mathcal{I}_1$.

Teorema 40.47 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável e seja $\mathcal{I}_1$ o conjunto de todos os operadores de traciais agindo em $\mathcal{H}$. Então, valem as seguintes afirmações:*

1. *$\mathcal{I}_1$ é um espaço vetorial.*
2. *$\mathcal{I}_1$ é um $*$-bi-ideal*[77] *de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.* □

Prova. Aqui seguimos [412] proximamente.

Prova de 1. Como $|\lambda A| = |\lambda|\,|A|$ para todo $\lambda\in\mathbb{C}$ e todo $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ segue facilmente que se $A\in\mathcal{I}_1$ então $\lambda A\in\mathcal{I}_1$. Sejam agora $A,\ B\in\mathcal{I}_1$. De acordo com o Teorema da Decomposição Polar (Teorema 40.31, página 2290) podemos escrever $A+B = U|A+B|$, $A = V|A|$ e $B = W|B|$, assim como $|A+B| = U^*(A+B)$, $|A| = V^*A$ e $|B| = W^*B$, onde U, V e W são isometrias parciais. Assim,

$$\langle \phi_n,\, |A+B|\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \langle \phi_n,\, U^*V|A|\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \phi_n,\, U^*W|B|\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\,,$$

[77] A noção de ideal em álgebras associativas foi introduzida na Seção 2.4.1.2, página 233.

e podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{N} \langle \phi_n,\, |A+B|\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \;\leq\; \sum_{n=1}^{N} \big|\langle \phi_n,\, U^*V|A|\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\big| + \sum_{n=1}^{N} \big|\langle \phi_n,\, U^*W|B|\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\big|$$

Observe-se que

$$\big|\langle \phi_n,\, U^*V|A|\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\big| \;=\; \big|\langle |A|^{1/2}V^*U\phi_n,\;\, |A|^{1/2}\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\big| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \big\||A|^{1/2}V^*U\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}\big\||A|^{1/2}\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}\,.$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \big|\langle \phi_n,\, U^*V|A|\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\big| \qquad &\leq \qquad \sum_{n=1}^{N} \big\||A|^{1/2}V^*U\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}\,\big\||A|^{1/2}\phi_n\big\|_{\mathcal{H}} \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \quad \left(\sum_{n=1}^{N} \big\||A|^{1/2}V^*U\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{m=1}^{N} \big\||A|^{1/2}\phi_m\big\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2} \\
&\leq \quad \left(\sum_{n=1}^{N} \big\||A|^{1/2}V^*U\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{m=1}^{N} \langle \phi_m,\, |A|\phi_m\rangle_{\mathcal{H}}\right)^{1/2} \\
&\leq \quad \left(\sum_{n=1}^{N} \big\||A|^{1/2}V^*U\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \langle \phi_m,\, |A|\phi_m\rangle_{\mathcal{H}}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\sum_{n=1}^{N} \big|\langle \phi_n,\, U^*W|B|\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\big| \;\leq\; \left(\sum_{n=1}^{N} \big\||B|^{1/2}W^*U\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \langle \phi_m,\, |B|\phi_m\rangle_{\mathcal{H}}\right)^{1/2}.$$

Vamos agora provar que

$$\sum_{n=1}^{N} \big\||A|^{1/2}V^*U\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}^2 \;\leq\; \sum_{m=1}^{\infty} \langle \phi_m,\, |A|\phi_m\rangle_{\mathcal{H}} \qquad e \tag{40.222}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \big\||B|^{1/2}W^*U\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}^2 \;\leq\; \sum_{m=1}^{\infty} \langle \phi_m,\, |B|\phi_m\rangle_{\mathcal{H}}\,, \tag{40.223}$$

o que estabelece que

$$\sum_{n=1}^{N} \langle \phi_n,\, |A+B|\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \;\leq\; \sum_{m=1}^{\infty} \langle \phi_m,\, |A|\phi_m\rangle_{\mathcal{H}} + \sum_{m=1}^{\infty} \langle \phi_m,\, |B|\phi_m\rangle_{\mathcal{H}}\,. \tag{40.224}$$

É suficiente provarmos (40.222), pois a prova de (40.223) é idêntica. Escrevendo $\big\||A|^{1/2}V^*U\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle \phi_n,\, U^*V|A|V^*U\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$ vemos que (40.222) decorre imediatamente do Lema 40.15, página 2334 (recordar que $V|A|V^* = \big(|A|^{1/2}V^*\big)^*\big(|A|^{1/2}V^*\big)$ é positivo). Claramente, (40.224) demonstra que $A+B \in \mathcal{I}_1$, caso $A,\ B \in \mathcal{I}_1$, e, portanto, $\mathcal{I}_1$ é um espaço vetorial, como queríamos provar.

Prova de 2. Há dois pontos a serem provados:

i. Se $A \in \mathcal{I}_1$, então $A^* \in \mathcal{I}_1$.

ii. Para todos $A \in \mathcal{I}_1$ e $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ valem $AB \in \mathcal{I}_1$ e $BA \in \mathcal{I}_1$.

Prova de i. Seja $A \in \mathcal{I}_1$ e seja $A = V|A|$ sua decomposição polar (V isometria parcial). Vimos no Teorema da Decomposição Polar, Teorema 40.31, página 2290, que $\big|A^*\big| = V|A|V^*$. Logo, o Lema 40.15, página 2334, garante que em qualquer base ortonormal completa vale

$$\infty \;>\; \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\, |A|\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \;\geq\; \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\, V|A|V^*\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n, \big|A^*\big|\,\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\,, \tag{40.225}$$

provando que $A^* \in \mathcal{I}_1$. Incidentalmente, trocando-se A por A^*, (40.225) prova que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\, |A|\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\, |A^*|\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \tag{40.226}$$

em qualquer base ortonormal completa.

Prova de ii. Se $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, vimos nas Proposições 40.50, página 2239, e 40.76, página 2290, que B pode ser escrito como soma de até quatro operadores unitários. É, portanto, suficiente tomarmos $B = U$, unitário. Provemos, então, que se U é unitário e $A \in \mathcal{I}_1$, então $UA \in \mathcal{I}_1$. Do fato que $(UA)^*(UA) = A^*A$ concluímos que $\big|UA\big| = |A|$, o que permite inferir que $UA \in \mathcal{I}_1$. Logo, se $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $A \in \mathcal{I}_1$, então $BA \in \mathcal{I}_1$. Note-se agora que $AB = (B^*A^*)^*$. Como a operação $*$ leva elementos de $\mathcal{I}_1$ em $\mathcal{I}_1$ (pela parte *i*), concluímos que vale também que $AB \in \mathcal{I}_1$. ■

As afirmações da proposição que segue aprofundam o estudo de propriedades do ideal $\mathcal{I}_1$.

Proposição 40.95 *Para $A \in \mathcal{I}_1$ a expressão $\|A\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\, |A|\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$ define uma norma em $\mathcal{I}_1$, a qual é independente (pela Proposição 40.93) da particular base ortonormal $\{\phi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ tomada no espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$. Essa norma satisfaz*

$$\|A\|_1 \;=\; \|A^*\|_1 \tag{40.227}$$

e

$$\|A\| \;\leq\; \|A\|_1 \tag{40.228}$$

para todo $A \in \mathcal{I}_1$. Além disso, o ideal $\mathcal{I}_1$ é um espaço de Banach para a norma $\|\cdot\|_1$. □

Prova. Como $|\lambda A| = |\lambda|\,|A|$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, é evidente que $\|\lambda A\|_1 = |\lambda|\,\|A\|_1$. A desigualdade triangular foi provada em (40.224). Se $\|A\|_1 = 0$ é claro que $0 = \langle \phi_n,\, |A|\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} = \big\||A|^{1/2}\phi_n\,\big\|_{\mathcal{H}}^2$ para todo elemento da base ortonormal completa $\{\phi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, implicando $|A|^{1/2} = 0$ e, portanto, $A = 0$ (pela decomposição polar). Isso estabeleceu que $\|\cdot\|_1$ é uma norma em $\mathcal{I}_1$.

A igualdade (40.227) foi provada em (40.226).

Provemos (40.228). Pela propriedade C* (vide Teorema 40.11, página 2197), tem-se $\|A\|^2 = \|A^*A\| = \big\||A|^2\big\| = \big\||A|\big\|^2$. Por outro lado, tem-se para uma base ortonormal completa $\{\varphi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ que

$$\big\|A\big\|_1 \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n,\, |A|\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}} \;\geq\; \langle \varphi_1,\, |A|\varphi_1\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big|\langle \varphi_1,\, |A|\varphi_1\rangle_{\mathcal{H}}\big|$$

Como isso vale para toda base ortonormal completa, segue que

$$\big\|A\big\|_1 \;\geq\; \sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{H}\\ \|\varphi\|_{\mathcal{H}}=1}} \big|\langle \varphi,\, |A|\varphi\rangle_{\mathcal{H}}\big| \overset{(40.43)}{=} \big\||A|\big\| \;=\; \|A\|\,,$$

estabelecendo (40.228).

Provemos que $\mathcal{I}_1$ é um espaço de Banach para a norma $\|\cdot\|_1$. Se $\{A_n \in \mathcal{I}_1,\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_1$, então (40.228) garante que também o é na norma operatorial $\|\cdot\|$. Como $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um espaço de Banach nessa norma, $\{A_n \in \mathcal{I}_1,\ n \in \mathbb{N}\}$ possui um $\|\cdot\|$-limite A em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Precisamos agora provar que $A \in \mathcal{I}_1$ e que $\{A_n \in \mathcal{I}_1,\ n \in \mathbb{N}\}$ converge a A na norma $\|\cdot\|_1$.

Temos para todos $m,\, N \in \mathbb{N}$ e qualquer base ortonormal $\{\varphi_m,\, m \in \mathbb{N}\}$ que

$$\sum_{n=1}^{N} \langle \varphi_n,\, |A|\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}} \,\leq\, \sum_{n=1}^{N} \Big|\langle \varphi_n,\, (|A|-|A_m|)\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}}\Big| + \sum_{n=1}^{N} \langle \varphi_n,\, |A_m|\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}} \,\leq\, \sum_{n=1}^{N} \Big|\langle \varphi_n,\, (|A|-|A_m|)\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}}\Big| + \|A_m\|_1\,.$$

Como $\|\cdot\|_1$ é uma norma, a desigualdade (3.24), página 275, informa-nos que $\big|\|A_m\|_1 - \|A_n\|_1\big| \leq \|A_m - A_n\|_1$ e como a sequência $\{A_n \in \mathfrak{I}_1,\, n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_1$, concluímos que a sequência numérica $\{\|A_n\|_1,\, A_n \in \mathfrak{I}_1,\, n \in \mathbb{N}\}$ é também de Cauchy e, portanto, é limitada e convergente: $\|A_m\|_1 \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|_1 =: \mathcal{A} < \infty$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Fora isso, temos por Cauchy-Schwarz que $\sum_{n=1}^{N} \Big|\langle \varphi_n,\, (|A|-|A_m|)\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}}\Big| \leq \big\||A|-|A_m|\big\|\, N$. Sabemos da Proposição 40.75, página 2290 que $\big\||A|-|A_m|\big\| \to 0$ para $m \to \infty$. Logo, escolhendo m grande o suficiente de modo que $\big\||A|-|A_m|\big\| \leq 1/N$, teremos $\sum_{n=1}^{N} \langle \varphi_n,\, |A|\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}} \leq \mathcal{A}+1$ para todo $N \in \mathbb{N}$, estabelecendo que $A \in \mathfrak{I}_1$.

Provemos agora que $\lim_{m\to\infty} \|A_m - A\|_1 = 0$. Recordemos primeiramente que, pela Proposição 40.75, página 2290, tem-se para cada $m \in \mathbb{N}$ que $|A - A_m| = \lim_{k\to\infty} |A_k - A_m|$, o limite se dando na topologia da norma operatorial $\|\cdot\|$ pois, evidentemente, $\lim_{k\to\infty} \|(A-A_m)-(A_k-A_m)\| = \lim_{k\to\infty} \|A-A_k\| = 0$. Assim, para cada $N \in \mathbb{N}$ e cada $m \in \mathbb{N}$, vale

$$\sum_{n=1}^{N} \langle \varphi_n,\, |A-A_m|\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}} \,=\, \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle \varphi_n,\, |A_k-A_m|\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}} \,\leq\, \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n,\, |A_k-A_m|\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}} \,=\, \lim_{k\to\infty} \big\|A_k - A_m\big\|_1\,.$$

Agora, $m \mapsto A_m$ é uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_1$. Assim, para cada $\epsilon > 0$ existe $M(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|A_k - A_m\|_1 < \epsilon$ sempre que $k \geq M(\epsilon)$ e $m \geq M(\epsilon)$. Logo, $\lim_{k\to\infty} \big\|A_k - A_m\big\|_1 < \epsilon$ sempre que $m \geq M(\epsilon)$. Estabelecemos, portanto, que para cada $\epsilon > 0$ existe $M(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{N} \langle \varphi_n,\, |A-A_m|\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}} < \epsilon$ sempre que que $m \geq M(\epsilon)$, independentemente de N. Isso implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n,\, |A-A_m|\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}} < \epsilon$ sempre que $m \geq M(\epsilon)$, ou seja, que $\|A-A_m\|_1 < \epsilon$ sempre que $m \geq M(\epsilon)$, provando que A é o limite da sequência $\{A_m,\, m \in \mathbb{N}\}$ na norma $\|\cdot\|_1$. ■

40.10.1.1 O Traço de um Operador Tracial

Nosso objetivo nesta seção é definir a noção de traço de um operador tracial, generalizando, assim, a noção correspondente conhecida no contexto de matrizes quadradas (vide Seção 10.2.3, página 523). Começamos com uma observação trivial: com uso da norma $\|\cdot\|_1$ podemos refrasear a Proposição 40.94, página 2335 da seguinte forma:

Proposição 40.96 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável. Se $A \in \mathfrak{I}_1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\, A\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$ é absolutamente convergente em qualquer base ortonormal completa $\{\phi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ e vale*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big|\langle \phi_n,\, A\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\big| \,\leq\, \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\, |A|\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \,=\, \|A\|_1\,. \tag{40.229}$$

□

Neste ponto o seguinte comentário é apropriado: se A <u>não</u> for um operador tipo traço, então o fato de $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\, A\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$ ser absolutamente somável em uma base ortonormal completa $\{\phi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ <u>não</u> implica que o seja em outra base ortonormal completa. O seguinte exemplo ilustra isso.

Exemplo 40.13 Seja $\{\phi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ uma base ortonormal completa específica e seja $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ o operador linear definido de sorte que $S\phi_n = \phi_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (comparar com (40.135)). É fácil constatar (faça-o!) que S^* é tal que $S^*\phi_1 = 0$ e $S^*\phi_n = \phi_{n-1}$ para todo $n \geq 2$. Daí, $S^*S = \mathbb{1}$ e, portanto, $|S| = \mathbb{1}$. Assim, S <u>não</u> é um operador tipo traço. Entretanto, temos que $\big|\langle \phi_n,\, S\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\big| = 0$ para todo n, provando que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\, S\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$ é absolutamente convergente (e nula). Seja agora a base ortonormal completa $\{\psi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ cujos elementos são definidos por $\psi_{2k-1} := \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\phi_{2k-1} + \phi_{2k}\big)$ e $\psi_{2k} := \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\phi_{2k-1} - \phi_{2k}\big)$,

$k \in \mathbb{N}$ (verifique que se trata de uma base ortonormal e completa!). Temos que $\langle \psi_{2k-1},\, S\psi_{2k-1}\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e que $\langle \psi_{2k},\, S\psi_{2k}\rangle_{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Verifique! Assim, $\big|\langle \psi_n,\, S\psi_n\rangle_{\mathcal{H}}\big| = \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostrando que $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n,\, S\psi_n\rangle_{\mathcal{H}}$ <u>não</u> é absolutamente convergente! ♦

Para operadores traciais tem-se, no entanto, o seguinte resultado importante:

Proposição 40.97 *Para $A \in \mathfrak{I}_1$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\, A\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$ independe da particular base ortonormal completa $\{\phi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ considerada.* □

Prova. Seja $\{\psi_m,\, m \in \mathbb{N}\}$ uma outra base ortonormal completa em $\mathcal{H}$. Temos $A\psi_m = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\, A\psi_m\rangle_{\mathcal{H}}\phi_n$ e, pela continuidade do produto escalar, $\langle \psi_m,\, A\psi_m\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\, A\psi_m\rangle_{\mathcal{H}} \langle \psi_m,\, \phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$. Essa última série é absolutamente convergente, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big|\langle \phi_n,\, A\psi_m\rangle_{\mathcal{H}}\Big|\, \Big|\langle \psi_m,\, \phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\Big| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Big|\langle \phi_n,\, A\psi_m\rangle_{\mathcal{H}}\Big|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n'=1}^{\infty} \Big|\langle \psi_m,\, \phi_{n'}\rangle_{\mathcal{H}}\Big|^2\right)^{1/2}$$
$$= \big\|A\psi_m\big\|_{\mathcal{H}} \big\|\psi_m\big\|_{\mathcal{H}} \,\leq\, \|A\| \,<\, \infty\,.$$

Assim, para $M \in \mathbb{N}$, podemos escrever

$$\sum_{m=1}^{M} \langle \psi_m,\, A\psi_m\rangle_{\mathcal{H}} \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \phi_n,\; A\left(\sum_{m=1}^{M} \langle \psi_m,\, \phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \psi_m\right)\right\rangle_{\mathcal{H}} \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\; A\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} - \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\; AP_M^{\perp}\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\,, \tag{40.230}$$

onde P_M é o projetor ortogonal sobre o subespaço gerado por $\psi_1,\, \ldots,\, \psi_m$: $P_M\chi := \sum_{n=1}^{M} \langle \psi_m,\, \chi\rangle_{\mathcal{H}}\psi_m$, $\forall \chi \in \mathcal{H}$, e $P_M^{\perp} = \mathbb{1} - P_M$.

Vamos agora provar que $\lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\; AP_M^{\perp}\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Como $A \in \mathfrak{I}_1$ e $\mathfrak{I}_1$ é um bi-ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, vale $AP_M^{\perp} \in \mathfrak{I}_1$.

Usando as decomposições polares $AP_M^\perp = U_M|AP_M^\perp|$ e $A = V|A|$, temos $|AP_M^\perp| = U_M^* V|A|P_M^\perp$ e com isso,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n,\ AP_M^\perp\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\langle\phi_n,\ AP_M^\perp\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\right| \overset{(40.229)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n,\ |AP_M^\perp|\,\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$\overset{\text{Prop. 40.93}}{=} \sum_{m=1}^{\infty}\langle\psi_m,\ |AP_M^\perp|\,\psi_m\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{m=1}^{\infty}\left\langle\psi_m,\ U_M^*V|A|P_M^\perp\psi_m\right\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{m=M+1}^{\infty}\left\langle\psi_m,\ U_M^*V|A|\psi_m\right\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$= \sum_{m=M+1}^{\infty}\left\langle|A|^{1/2}V^*U_M\psi_m,\ |A|^{1/2}\psi_m\right\rangle_{\mathcal{H}} \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sum_{m=M+1}^{\infty}\left\||A|^{1/2}V^*U_M\psi_m\right\|_{\mathcal{H}}\left\||A|^{1/2}\psi_m\right\|_{\mathcal{H}}$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\sum_{m=M+1}^{\infty}\left\||A|^{1/2}V^*U_M\psi_m\right\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{m'=M+1}^{\infty}\left\||A|^{1/2}\psi_{m'}\right\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{m=1}^{\infty}\left\||A|^{1/2}V^*U_M\psi_m\right\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{m'=M+1}^{\infty}\left\||A|^{1/2}\psi_{m'}\right\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{m=1}^{\infty}\left\langle\psi_m,\ U_M^*V|A|V^*U_M\psi_m\right\rangle_{\mathcal{H}}\right)^{1/2}\left(\sum_{m'=M+1}^{\infty}\langle\psi_{m'},\ |A|\psi_{m'}\rangle_{\mathcal{H}}\right)^{1/2}$$

$$\overset{(40.218)}{\leq} \left(\sum_{m=1}^{\infty}\langle\psi_m,\ |A|\psi_m\rangle_{\mathcal{H}}\right)^{1/2}\left(\sum_{m'=M+1}^{\infty}\langle\psi_{m'},\ |A|\psi_{m'}\rangle_{\mathcal{H}}\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\|A\|_1}\left(\sum_{m'=M+1}^{\infty}\langle\psi_{m'},\ |A|\psi_{m'}\rangle_{\mathcal{H}}\right)^{1/2}.$$

Como $A \in \mathcal{I}_1$, tem-se $\lim_{M\to\infty}\sum_{m'=M+1}^{\infty}\langle\psi_{m'},\ |A|\psi_{m'}\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ e, assim, provamos que $\lim_{M\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n,\ AP_M^\perp\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Retornando a (40.230), estabelecemos que $\lim_{M\to\infty}\sum_{m=1}^{M}\langle\psi_m,\ A\psi_m\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n,\ A\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$. ■

• **O traço de um operador tracial e suas propriedades**

A Proposição 40.97 permite-nos introduzir a seguinte definição.

Definição. (Traço de um operador tracial) Para $A \in \mathcal{I}_1$ define-se $\mathrm{Tr}(A)$, denominado *traço do operador* A, por

$$\mathrm{Tr}(A) := \sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n,\ A\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\ ,$$

onde $\{\phi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é qualquer base ortonormal completa no espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$. Para $A \in \mathcal{I}_1$, a Proposição 40.96, página 2338, assegura-nos que a série que define $\mathrm{Tr}(A)$ é absolutamente convergente e a Proposição 40.97, página 2339, assegura-nos que $\mathrm{Tr}(A)$ independe da particular base ortonormal completa considerada. ♠

A proposição que segue lista algumas propriedades elementares relevantes do traço:

Proposição 40.98 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável e $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ o $*$-bi-ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ composto pelos elementos traciais de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Então, a aplicação $\mathcal{I}_1 \ni A \mapsto \mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{C}$ definida acima possui as seguintes propriedades:*

1. *Para todos $A,\ B \in \mathcal{I}_1$ e todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ vale $\mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha\mathrm{Tr}(A) + \beta\mathrm{Tr}(B)$. Assim, a aplicação $\mathcal{I}_1 \ni A \mapsto \mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{C}$ é linear.*
2. *Para todo $A \in \mathcal{I}_1$ vale $\mathrm{Tr}(A^*) = \overline{\mathrm{Tr}(A)}$.*
3. *Para todo $A \in \mathcal{I}_1$ e todo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ vale $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Essa propriedade é denominada* propriedade cíclica do traço.
4. *Para $A \in \mathcal{I}_1$, vale $\|A\|_1 = \mathrm{Tr}\big(|A|\big)$.*
5. *Para $A \in \mathcal{I}_1$, vale $\Big|\mathrm{Tr}\big(A\big)\Big| \leq \|A\|_1$.* □

A propriedade cíclica do traço será estendida (para operadores de Hilbert-Schmidt) na Proposição 40.100, página 2345.

Prova da Proposição 40.98. A prova dos itens 1 e 2 é elementar e deixada como exercício. O item 3 poder ser provado facilmente, como sugerido em [412], se recordarmos que $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pode ser expresso como soma de até quatro elementos unitários (vide Proposição 40.76, página 2290). Assim, é suficiente provarmos que para todo $A \in \mathcal{I}_1$ e todo unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ vale $\mathrm{Tr}(AU) = \mathrm{Tr}(UA)$. Agora, como U é unitário, se $\{\phi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal completa em $\mathcal{H}$, então $\{U\phi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ também o é. Logo,

$$\mathrm{Tr}(UA) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle U\phi_n,\ (UA)U\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n,\ (AU)\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} = \mathrm{Tr}(AU)\ .$$

O item 4 é evidente. O item 5 foi demonstrado em (40.229), página 2338. ■

40.10.2 Operadores de Hilbert-Schmidt

Um operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é dito ser um *operador de Hilbert*[78]*–Schmidt*[79] se $|A|^2 \in \mathcal{I}_1$. O conjunto de todos os operadores de Hilbert-Schmidt agindo em $\mathcal{H}$ será denotado aqui por $\mathcal{I}_2 \equiv \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$.

Como $\mathcal{I}_1$ é um $*$-bi-ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, é evidente que se $A \in \mathcal{I}_1$ então $|A|^2 = A^*A \in \mathcal{I}_1$. Logo, $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$. Ainda assim, $\mathcal{I}_2$ possui propriedades semelhantes a $\mathcal{I}_1$, como revelaremos na corrente seção.

Seja $\{\phi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ uma base ortonormal completa em $\mathcal{H}$. Se $A \in \mathcal{I}_2$, segue do fato que $|A|^2 \in \mathcal{I}_1$ que a expressão $\mathrm{Tr}\big(|A|^2\big) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n,\ |A|^2\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$ é finita e independe da particular base ortonormal completa adotada em $\mathcal{H}$. Defina-se, portanto, para $A \in \mathcal{I}_2$,

$$\big\|A\big\|_2 := \sqrt{\mathrm{Tr}\big(|A|^2\big)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n,\ |A|^2\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\big\|A\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}^2}\ , \tag{40.231}$$

para alguma base ortonormal completa em $\mathcal{H}$.

• **Resultados preparatórios e desigualdades úteis**

Vamos agora demonstrar diversos resultados e desigualdades envolvendo as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, algumas das quais utilizaremos adiante no estudo de propriedades estruturais dos espaços $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$. Diversas dessas desigualdades encontram aplicações em Física, como na Mecânica Estatística, na Mecânica Quântica e na Teoria Quântica de Campos.

Lema 40.16 *Se $A \in \mathcal{I}_2$, então $A^* \in \mathcal{I}_2$ e vale $\big\|A^*\big\|_2 = \big\|A\big\|_2$.* □

[78] David Hilbert (1862–1943).
[79] Erhard Schmidt (1876–1959).

Prova. Seja $\{\phi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ uma base ortonormal completa em $\mathcal{H}$. Se $A=U|A|$ é a decomposição polar de $A\in\mathcal{I}_2$, temos para todo $N\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N}\langle\phi_n,\ |A^*|^2\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \sum_{n=1}^{N}\langle\phi_n,\ AA^*\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \overset{(40.156)}{=} \sum_{n=1}^{N}\langle\phi_n,\ UA^*AU^*\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \sum_{n=1}^{N}\langle\phi_n,\ U|A|^2U^*\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n,\ U|A|^2U^*\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \overset{(40.218)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n,\ |A|^2\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big\|A\big\|_2^2\,.$$

Isso implica que $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\langle\phi_n,\ |A^*|^2\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\leq\big\|A\big\|_2^2$ e, portanto, que $A^*\in\mathcal{I}_2$. Essa mesma desigualdade também afirma que $\big\|A^*\big\|_2\leq\big\|A\big\|_2$. Trocando-se A por A^* isso implica que $\big\|A^*\big\|_2=\big\|A\big\|_2$. ■

Lema 40.17 *Se $A,\ B\in\mathcal{I}_2$, então $AB\in\mathcal{I}_1$ e vale*

$$\|AB\|_1 \;\leq\; \|A\|_2\|B\|_2\,. \tag{40.232}$$

Temos ainda

$$\Big|\mathrm{Tr}\big(A^*B\big)\Big| \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty}\Big|\big\langle\phi_n,\ A^*B\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}\Big| \;\leq\; \|A^*B\|_1 \;\leq\; \|A\|_2\|B\|_2 \tag{40.233}$$

em qualquer base ortonormal completa $\{\phi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ de $\mathcal{H}$. □

Prova. Por mera conveniência vamos provar que se $A,\ B\in\mathcal{I}_2$, então $A^*B\in\mathcal{I}_1$ e $\|A^*B\|_1\ \leq\ \|A\|_2\|B\|_2$, o que, evidentemente, equivale ao que se quer provar, já que estabelecemos que $A^*\in\mathcal{I}_2$ e que $\|A^*\|_2=\|A\|_2$.

Escrevamos, pela decomposição polar, $|A^*B|=U^*A^*B$, onde U é uma isometria parcial. Seja uma base ortonormal completa $\{\phi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ em $\mathcal{H}$. Teremos,

$$\big\langle\phi_n,\ |A^*B|\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big\langle\phi_n,\ U^*A^*B\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big\langle AU\phi_n,\ B\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} \;\leq\; \big\|AU\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}\big\|B\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}\,.$$

Assim, para todo $N\in\mathbb{N}$, vale

$$\sum_{n=1}^{N}\big\langle\phi_n,\ |A^*B|\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} \;\leq\; \sum_{n=1}^{N}\big\|AU\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}\big\|B\phi_n\big\|_{\mathcal{H}} \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\sum_{n=1}^{N}\big\|AU\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n'=1}^{N}\big\|B\phi_{n'}\big\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\big\|AU\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n'=1}^{\infty}\big\|B\phi_{n'}\big\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2} \;=\; \left(\sum_{n=1}^{\infty}\big\langle\phi_n,\ U^*|A|^2U\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}\right)^{1/2}\left(\sum_{n'=1}^{\infty}\big\langle\phi_{n'},\ |B|^2\phi_{n'}\big\rangle_{\mathcal{H}}\right)^{1/2}$$

$$\overset{(40.218)}{\leq} \left(\sum_{n=1}^{\infty}\big\langle\phi_n,\ |A|^2\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}\right)^{1/2}\left(\sum_{n'=1}^{\infty}\big\langle\phi_{n'},\ |B|^2\phi_{n'}\big\rangle_{\mathcal{H}}\right)^{1/2} \;=\; \|A\|_2\|B\|_2\,.$$

Logo, $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\big\langle\phi_n,\ |A^*B|\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}$ existe e é majorada por $\|A\|_2\|B\|_2$, o que estabelece que $A^*B\in\mathcal{I}_1$ e que $\|A^*B\|_1\leq\|A\|_2\|B\|_2$.

Como $A^*B\in\mathcal{I}_1$, temos ainda

$$\Big|\mathrm{Tr}\big(A^*B\big)\Big| \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty}\Big|\big\langle\phi_n,\ A^*B\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}\Big| \overset{(40.229)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty}\big\langle\phi_n,\ |A^*B|\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \|A^*B\|_1 \;\leq\; \|A\|_2\|B\|_2\,.$$

■

Lema 40.18 *Para todo $A\in\mathcal{I}_2$ vale*

$$\|A\| \;\leq\; \|A\|_2\,. \tag{40.234}$$

□

Prova. Pela propriedade C*, $\|A\|^2=\|A^*A\|$. Logo, $\|A\|^2=\|A^*A\|\overset{(40.228)}{\leq}\big\|A^*A\big\|_1=\mathrm{Tr}\Big(\big|A^*A\big|\Big)=\mathrm{Tr}\big(A^*A\big)=\|A\|_2^2$. ■

Lema 40.19 *Para todo $A\in\mathcal{I}_1$ vale*

$$\|A\|_2 \;\leq\; \|A\|_1\,. \tag{40.235}$$

□

Prova. Já vimos que se $A\in\mathcal{I}_1$, então $A\in\mathcal{I}_2$. Seja $\{\phi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ uma base ortonormal completa no espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$. Então, $\|A\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|A\phi_n\|_{\mathcal{H}}^2$. Usando a decomposição polar $A=U|A|$, U sendo uma isometria parcial, escrevemos $\|A\phi_n\|_{\mathcal{H}}^2=\big\|U|A|^{1/2}|A|^{1/2}\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}^2\leq\big\||A|^{1/2}\big\|^2\big\||A|^{1/2}\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}^2$. Pela propriedade C*, vale $\big\||A|^{1/2}\big\|^2=\big\||A|\big\|=\big\||A|^2\big\|^{1/2}=\big\|A^*A\big\|^{1/2}=\big\|A\big\|$. Assim, $\|A\phi_n\|_{\mathcal{H}}^2\leq\|A\|\ \big\||A|^{1/2}\phi_n\big\|_{\mathcal{H}}^2=\|A\|\ \big\langle\phi_n,\ |A|\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}$. Logo, $\|A\|_2^2\leq\|A\|\sum_{n=1}^{\infty}\big\langle\phi_n,\ |A|\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}=\|A\|\ \|A\|_1$. Por (40.228), $\|A\|\leq\|A\|_1$ e, portanto, provamos que $\|A\|_2^2\leq\|A\|_1^2$, como desejávamos. ■

O corolário a seguir é consequência imediata dos Lemas 40.17, 40.18 e 40.19, acima, e dispensa demonstração.

Corolário 40.25 *Para $A,\ B\in\mathcal{I}_1$ vale*

$$\big\|AB\big\|_1 \;\leq\; \big\|A\big\|_2\big\|B\big\|_2 \;\leq\; \big\|A\big\|_1\big\|B\big\|_1\,. \tag{40.236}$$

□

Temos ainda:

Lema 40.20 *Para $A,\ B\in\mathcal{I}_2$ vale*

$$\big\|AB\big\|_2 \;\leq\; \big\|A\big\|_2\big\|B\big\|_2\,. \tag{40.237}$$

Prova. Pelo Lema, 40.17, página 2342, $AB\in\mathcal{I}_1$ e $\|AB\|_2\overset{(40.235)}{\leq}\|AB\|_1\overset{(40.232)}{\leq}\|A\|_2\|B\|_2$. ■

• **Mais propriedades de operadores de Hilbert-Schmidt**

Vamos agora obter algumas propriedades estruturais importantes do conjunto $\mathcal{I}_2$ dos operadores de Hilbert-Schmidt agindo em um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$.

Proposição 40.99 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável e seja $\mathcal{I}_2$ o conjunto dos operadores de Hilbert-Schmidt agindo em $\mathcal{H}$. Valem as seguintes afirmações:*

1. *$\mathcal{I}_2$ é um espaço vetorial.*
2. *$\|\cdot\|_2$ é uma norma em $\mathcal{I}_2$.*
3. *$\mathcal{I}_2$ é um $*$-bi-ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*
4. *A expressão $\langle A,\ B\rangle_{\mathcal{I}_2}:=\mathrm{Tr}(A^*B)$ define um produto escalar em $\mathcal{I}_2$ e $\mathcal{I}_2$ é um espaço de Hilbert em relação a esse produto escalar, pois $\mathcal{I}_2$ é completo na norma $\|\cdot\|_2$.* □

Prova. *Prova do item 1.* Primeiramente, é evidente que se $A \in \mathcal{I}_2$ então $\alpha A \in \mathcal{I}_2$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Sejam $A,\ B \in \mathcal{I}_2$. É claro que $|A+B|^2 = (A+B)^*(A+B) = |A|^2 + A^*B + B^*A + |B|^2$. Assim, para todo $N \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{n=1}^{N} \Big|\big\langle \phi_n,\ |A+B|^2\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}\Big|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} \Big|\big\langle \phi_n,\ |A|^2\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}\Big| + \sum_{n=1}^{N} \Big|\big\langle \phi_n,\ A^*B\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}\Big| + \sum_{n=1}^{N} \Big|\big\langle \phi_n,\ B^*A\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}\Big| + \sum_{n=1}^{N} \Big|\big\langle \phi_n,\ |B|^2\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}\Big|$$

$$\stackrel{(40.233)}{\leq} \Big(\big\|A\big\|_2 + \big\|B\big\|_2\Big)^2 .$$

Logo, $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \Big|\big\langle \phi_n,\ |A+B|^2\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}\Big| \leq \Big(\big\|A\big\|_2 + \big\|B\big\|_2\Big)^2$ e, portanto $A+B \in \mathcal{I}_2$. Isto estabeleceu que $\mathcal{I}_2$ é um espaço vetorial. Incidentalmente, a última desigualdade afirma também que

$$\big\|A+B\big\|_2 \ \leq\ \big\|A\big\|_2 + \big\|B\big\|_2 \,. \tag{40.238}$$

Prova do item 2. Da definição (40.231) é evidente que $\big\|A\big\|_2 \geq 0$ e que $\big\|A\big\|_2 = 0$ se e somente se $A\phi_n = 0$ para todos os elementos de uma base ortonormal completa $\{\phi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{H}$, o que implica que $A = 0$. É também evidente pela definição que $\big\|\alpha A\big\|_2 = |\alpha|\big\|A\big\|_2$ para todos $\alpha \in \mathbb{C}$ e $A \in \mathcal{I}_2$. Por fim, a desigualdade triangular foi estabelecida em (40.238). Portanto, $\|\cdot\|_2$ é uma norma em $\mathcal{I}_2$.

Prova do item 3. Já demonstramos no Lema 40.16, página 2341, que $A \in \mathcal{I}_2$ se e somente se $A^* \in \mathcal{I}_2$. Vamos provar que se $A \in \mathcal{I}_2$ e $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, então $AB \in \mathcal{I}_2$. Como $\mathcal{I}_2$ é um espaço vetorial, é suficiente provar que $AU \in \mathcal{I}_2$ para todo unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, pois $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pode ser expresso como soma de até quatro elementos unitários (vide Proposição 40.76, página 2290). Agora, $|AU|^2 = U^*|A|^2U$. Logo, se $\{\phi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal completa de $\mathcal{H}$, vale para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} \big\langle \phi_n,\ |AU|^2\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} \ =\ \sum_{n=1}^{N} \big\langle U\phi_n,\ |A|^2U\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} \ \leq\ \sum_{n=1}^{\infty} \big\langle U\phi_n,\ |A|^2U\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} \ =\ \|A\|_2^2 \,,$$

já que $\{U\phi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é também uma base ortonormal completa de $\mathcal{H}$. Isso estabeleceu que $AU \in \mathcal{I}_2$ para todo unitário U e todo $A \in \mathcal{I}_2$ e, portanto, que $AB \in \mathcal{I}_2$ se $A \in \mathcal{I}_2$ e $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Note-se também que a relação $BA = (A^*B^*)^*$ mostra também que $BA \in \mathcal{I}_2$ se $A \in \mathcal{I}_2$ e $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Isso demonstrou que $\mathcal{I}_2$ é um $*$-bi-ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Prova do item 4. Sabemos por (40.233) que $|\mathrm{Tr}(A^*B)| \leq \big\|A\big\|_2\big\|B\big\|_2 < \infty$ se $A,\ B \in \mathcal{I}_2$. Assim, $\langle A,\ B\rangle_{\mathcal{I}_2} := \mathrm{Tr}(A^*B)$ é uma forma sesquilinear em $\mathcal{I}_2$, a qual é positiva (pois $\mathrm{Tr}(A^*A) = \|A\|_2^2 \geq 0$) e Hermitiana (pois $\overline{\mathrm{Tr}(A^*B)} = \mathrm{Tr}(B^*A)$). Como $\mathrm{Tr}(A^*A) = \|A\|_2^2$ é nula se e somente se $A = 0$, estabeleceu-se que $\langle A,\ B\rangle_{\mathcal{I}_2}$ é um produto escalar em $\mathcal{I}_2$.

Vamos agora provar que $\mathcal{I}_2$ é completo na norma $\|\cdot\|_2$. Se a sequência $\{A_n \in \mathcal{I}_2,\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_2$, então (40.234) afirma que essa sequência é também uma sequência de Cauchy na norma operatorial $\|\cdot\|$ e, portanto, converge a um elemento $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Desejamos provar que $A \in \mathcal{I}_2$ e que $\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\|_2 = 0$.

Como $\|\cdot\|_2$ é uma norma, a desigualdade (3.24), página 275, informa-nos que $\big|\|A_m\|_2 - \|A_n\|_2\big| \leq \|A_m - A_n\|_2$ e como a sequência $\{A_m \in \mathcal{I}_2,\ m \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_2$, concluímos que a sequência numérica $\{\|A_m\|_2,\ A_m \in \mathcal{I}_1,\ m \in \mathbb{N}\}$ é também de Cauchy e, portanto, é limitada e convergente.

Para $N \in \mathbb{N}$ temos, para uma base ortonormal completa $\{\phi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$,

$$\sum_{n=1}^{N} \langle \phi_n,\ A^*A\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \ \leq\ \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle \phi_n,\ A_m^*A_m\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \ \leq\ \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\ A_m^*A_m\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \ =\ \lim_{m\to\infty} \|A_m\|_2^2 \,.$$

Como isso é válido para todo $N \in \mathbb{N}$, o limite $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle \phi_n,\ A^*A\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$ existe, provando que $A \in \mathcal{I}_2$.

Resta-nos provar que $\lim_{m\to\infty} \|A - A_m\|_2 = 0$. Para $N \in \mathbb{N}$ temos, para uma base ortonormal completa $\{\phi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$,

$$\sum_{n=1}^{N} \langle \phi_n,\ (A-A_m)^*(A-A_m)\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \ \leq\ \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle \phi_n,\ (A_k-A_m)^*(A_k-A_m)\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$\leq\ \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\ (A_k-A_m)^*(A_k-A_m)\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \ =\ \lim_{k\to\infty} \big\|A_k - A_m\big\|_2^2 \,.$$

Como $\{A_m \in \mathcal{I}_2,\ m \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_2$, para todo $\epsilon > 0$ existe $M(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\big\|A_k - A_m\big\|_2 < \epsilon$ sempre que $m \geq M(\epsilon)$ e $k \geq M(\epsilon)$. Logo, para todo $\epsilon > 0$ vale $\sum_{n=1}^{N} \langle \phi_n,\ (A-A_m)^*(A-A_m)\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} < \epsilon^2$ sempre que $m \geq M(\epsilon)$, independentemente de N. Assim, para todo $\epsilon > 0$ vale $\|A - A_m\|_2^2 < \epsilon^2$ sempre que $m \geq M(\epsilon)$. Isso prova que A é o limite da sequência $\{A_m \in \mathcal{I}_2,\ m \in \mathbb{N}\}$ na norma $\|\cdot\|_2$. Como $\|A\|_2^2 = \mathrm{Tr}(A^*A) = \langle A,\ A\rangle_{\mathcal{I}_2}$, isso provou que $\mathcal{I}_2$ é um espaço de Hilbert para o produto escalar $\langle A,\ B\rangle_{\mathcal{I}_2} = \mathrm{Tr}(A^*B)$. ■

Listemos agora dois corolários imediatos da Proposição 40.99.

Corolário 40.26 *Se $A,\ B \in \mathcal{I}_2$, então $\big|\mathrm{Tr}(A^*B)\big| \leq \|A\|_2\|B\|_2$.* □

Prova. A desigualdade $\big|\mathrm{Tr}(A^*B)\big| \leq \|A\|_2\|B\|_2$ é meramente a desigualdade de Cauchy-Schwarz para o produto escalar $\langle A,\ B\rangle_{\mathcal{I}_2} := \mathrm{Tr}(A^*B)$. ■

Corolário 40.27 *Um operador limitado A pertence a $\mathcal{I}_1$ se e somente se puder ser escrito como produto de dois operadores A_1 e A_2 de $\mathcal{I}_2$: $A = A_1A_2$.* □

Prova. Pelo Lema 40.17, página 2342, se $A_1,\ A_2 \in \mathcal{I}_2$, então $A_1A_2 \in \mathcal{I}_1$. Se $A \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, temos pela decomposição polar, $A = A_1A_2$ com $A_1 = U|A|^{1/2}$ e $A_2 = |A|^{1/2}$, onde U é uma isometria parcial. Agora, $A_2 \in \mathcal{I}_2$, pois $\mathrm{Tr}\big(A_2^*A_2\big) = \mathrm{Tr}\big(|A|\big) < \infty$, por hipótese. Adicionalmente, $A_1 \in \mathcal{I}_2$, pois $A_1 = UA_2$ e $\mathcal{I}_2$ é um bi-ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. ■

• **A propriedade cíclica do traço em $\mathcal{I}_2$ e mais algumas desigualdades**

A proposição a seguir estende a propriedade cíclica do traço estabelecida na Proposição 40.98, página 2340.

Proposição 40.100 *Sejam $A,\ B \in \mathcal{I}_2$. Então, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.* □

Prova. Seja $\{\phi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ uma base ortonormal completa em $\mathcal{H}$ e seja P_N o projetor ortogonal sobre o subespaço gerado por $\phi_1,\ \ldots,\ \phi_N$, ou seja, $P_N = \sum_{n=1}^{N} P_{\phi_n}$, com $P_{\phi_a}\psi := \langle \phi_a,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}}\phi_a$, $\forall \psi \in \mathcal{H}$. Seja $P_N^{\perp} := \mathbb{1} - P_N$. Temos,

$$\mathrm{Tr}(AB) \ =\ \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \big\langle \phi_n,\ AB\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} \ =\ \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \big\langle \phi_n,\ AP_NB\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \big\langle \phi_n,\ AP_N^{\perp}B\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}$$

e

$$\mathrm{Tr}(BA) \ =\ \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \big\langle \phi_n,\ BA\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} \ =\ \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \big\langle \phi_n,\ BP_NA\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \big\langle \phi_n,\ BP_N^{\perp}A\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} \,.$$

Temos que

$$\sum_{n=1}^{N} \big\langle \phi_n,\ AP_NB\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} \ =\ \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \big\langle \phi_n,\ A\phi_m\big\rangle_{\mathcal{H}}\big\langle \phi_m,\ B\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$=\ \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \big\langle \phi_m,\ B\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}\big\langle \phi_n,\ A\phi_m\big\rangle_{\mathcal{H}} \ =\ \sum_{m=1}^{N} \big\langle \phi_n,\ BP_NA\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} \,.$$

Assim, se estabelecermos que $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\langle\phi_n,\ AP_N^{\perp}B\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}=0$ e que $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\langle\phi_n,\ BP_N^{\perp}A\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$ a Proposição 40.100 estará provada. É suficiente demonstrarmos a primeira dessas afirmações, como faremos no que segue. Temos que

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\langle\phi_n,\ AP_N^{\perp}B\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\right| \leq \sum_{n=1}^{N}\left|\langle\phi_n,\ AP_N^{\perp}B\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\right|$$

$$\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq}\sum_{n=1}^{N}\left\|A^*\phi_n\right\|_{\mathcal{H}}\left\|P_N^{\perp}B\phi_n\right\|_{\mathcal{H}}\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq}\left(\sum_{n=1}^{N}\left\|A^*\phi_n\right\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n'=1}^{N}\left\|P_N^{\perp}B\phi_{n'}\right\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \|A\|_2\left(\sum_{n'=1}^{N}\left\|P_N^{\perp}B\phi_{n'}\right\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2}.$$

Mostremos agora que $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left\|P_N^{\perp}B\phi_n\right\|_{\mathcal{H}}^2=0$. Escrevemos,

$$\sum_{n=1}^{N}\left\|P_N^{\perp}B\phi_n\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=1}^{N}\langle\phi_n,\ B^*P_N^{\perp}B\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n,\ B^*P_N^{\perp}BP_N\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} = \mathrm{Tr}\Big(B^*P_N^{\perp}BP_N\Big).$$

Note-se que $P_N\in\mathcal{I}_1$ (por ser o projetor em um subespaço de dimensão finita). Com isso, tem-se também que $P_N^{\perp}BP_N\in\mathcal{I}_1$ e que $B^*P_N^{\perp}BP_N\in\mathcal{I}_1$, pois $\mathcal{I}_1$ é um bi-ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Logo, a propriedade cíclica do traço estabelecida na Proposição 40.98, página 2340, permite escrever

$$\mathrm{Tr}\Big(B^*P_N^{\perp}BP_N\Big) = \mathrm{Tr}\Big(P_N^{\perp}BP_NB^*\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n,\ P_N^{\perp}BP_NB^*\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty}\langle\phi_n,\ BP_NB^*\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=N+1}^{\infty}\langle B^*\phi_n,\ P_NB^*\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty}\left\|B^*\phi_n\right\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Agora, como $B\in\mathcal{I}_2$, a soma $\sum_{n=1}^{\infty}\left\|B^*\phi_n\right\|_{\mathcal{H}}^2=\|B^*\|_2^2$ é convergente e, portanto, $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left\|B^*\phi_n\right\|_{\mathcal{H}}^2=0$. Isso completa a demonstração. ■

Comentário. A propriedade cíclica do traço na forma listada na Proposição 40.98 pode ser reobtida a partir da Proposição 40.100, mas note-se que a mesma foi usada na prova acima. Sejam $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $A\in\mathcal{I}_1$. Usando a decomposição polar, podemos escrever $A=U|A|^{1/2}|A|^{1/2}$, com U sendo uma isometria parcial. Note-se que $|A|^{1/2}\in\mathcal{I}_2$, pois $\mathrm{Tr}(|A|^{1/2}|A|^{1/2})=\mathrm{Tr}(|A|)<\infty$, por hipótese. Logo, $BU|A|^{1/2}\in\mathcal{I}_2$ pois, como vimos, $\mathcal{I}_2$ é um bi-ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Assim, pela Proposição 40.100, vale $\mathrm{Tr}(BA)=\mathrm{Tr}\Big(\big(BU|A|^{1/2}\big)|A|^{1/2}\Big)=\mathrm{Tr}\Big(|A|^{1/2}BU|A|^{1/2}\Big)$. Como, pela mesma razão, $|A|^{1/2}B\in\mathcal{I}_2$ e $U|A|^{1/2}\in\mathcal{I}_2$, tem-se, novamente pela Proposição 40.100, que $\mathrm{Tr}\Big(|A|^{1/2}BU|A|^{1/2}\Big)=\mathrm{Tr}\Big(U|A|^{1/2}|A|^{1/2}B\Big)=\mathrm{Tr}(AB)$, estabelecendo que $\mathrm{Tr}(BA)=\mathrm{Tr}(AB)$. ♣

Lema 40.21 *Para $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $B\in\mathcal{I}_1$, valem*

$$\left\|AB\right\|_1\leq\|A\|\|B\|_1 \qquad e \qquad \left\|BA\right\|_1\leq\|A\|\|B\|_1\,. \tag{40.239}$$

□

Prova. Seja $\{\phi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ uma base ortonormal completa em $\mathcal{H}$. Usando as decomposições polares $AB=U|AB|$ e $B=V|B|$, como U e V sendo isometrias parciais, podemos escrever $\|AB\|_1=\mathrm{Tr}\big(|AB|\big)=\mathrm{Tr}\Big(U^*AV|B|^{1/2}|B|^{1/2}\Big)$. Observe-se agora que $|B|^{1/2}\in\mathcal{I}_2$, pois $\mathrm{Tr}\Big(|B|^{1/2}|B|^{1/2}\Big)=\mathrm{Tr}\big(|B|\big)=\|B\|_1<\infty$, pela hipótese sobre B. Logo,

$U^*AV|B|^{1/2}\in\mathcal{I}_2$, já que $\mathcal{I}_2$ é um bi-ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Assim, a propriedade cíclica do traço para $\mathcal{I}_2$ estabelecida na Proposição 40.100, página 2345, permite escrever $\mathrm{Tr}\Big(U^*AV|B|^{1/2}|B|^{1/2}\Big)=\mathrm{Tr}\Big(|B|^{1/2}U^*AV|B|^{1/2}\Big)$. Logo, temos que

$$\|AB\|_1 = \mathrm{Tr}\Big(|B|^{1/2}U^*AV|B|^{1/2}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n,\ |B|^{1/2}U^*AV|B|^{1/2}\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty}\big\langle|B|^{1/2}\phi_n,\ U^*AV|B|^{1/2}\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq}\sum_{n=1}^{\infty}\left\||B|^{1/2}\phi_n\right\|_{\mathcal{H}}\left\|U^*AV|B|^{1/2}\phi_n\right\|_{\mathcal{H}}.$$

Como $\left\|U^*AV|B|^{1/2}\phi_n\right\|_{\mathcal{H}}\leq\|A\|\left\||B|^{1/2}\phi_n\right\|_{\mathcal{H}}$, temos

$$\|AB\|_1 \leq \|A\|\sum_{n=1}^{\infty}\left\||B|^{1/2}\phi_n\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \|A\|\sum_{n=1}^{\infty}\big\langle\phi_n,\ |B|\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} = \|A\|\,\|B\|_1\,,$$

estabelecendo que $\|AB\|_1\leq\|A\|\,\|B\|_1$. Como $BA=(A^*B^*)^*$ temos também $\|BA\|_1=\|A^*B^*\|_1\leq\|A^*\|\,\|B^*\|_1\leq\|A\|\,\|B\|_1$. ■

Lema 40.22 *Para $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $B\in\mathcal{I}_2$, valem*

$$\left\|AB\right\|_2\leq\|A\|\|B\|_2 \qquad e \qquad \left\|BA\right\|_2\leq\|A\|\|B\|_2\,. \tag{40.240}$$

□

Prova. Seja $\{\phi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ uma base ortonormal completa em $\mathcal{H}$. Temos $\|AB\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n,\ B^*A^*AB\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}=\sum_{n=1}^{\infty}\langle B\phi_n,\ A^*AB\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}$. Agora, A^*A é um operador autoadjunto e, pelo Teorema 40.12, página 2207, temos que $\langle B\phi_n,\ A^*AB\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\leq\|A^*A\|\,\left\|B\phi_n\right\|_{\mathcal{H}}^2=\|A\|^2\,\left\|B\phi_n\right\|_{\mathcal{H}}^2$. Logo, estabelecemos que $\|AB\|_2^2\leq\|A\|^2\,\sum_{n=1}^{\infty}\left\|B\phi_n\right\|_{\mathcal{H}}^2=\|A\|^2\|B\|_2^2$. Provando que $\left\|AB\right\|_2\leq\|A\|\|B\|_2$. Como $BA=(A^*B^*)^*$, temos também $\left\|BA\right\|_2=\|(A^*B^*)^*\|_2=\|A^*B^*\|_2\leq\|A^*\|\,\|B^*\|_2=\|A\|\,\|B\|_2$. ■

• **Reunindo algumas desigualdades**

Para facilitar futuras referências, listemos algumas das igualdades e desigualdades que obtivemos acima para as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$.

1. $\|\alpha A\|_1=|\alpha|\,\|A\|_1$ e $\|A+B\|_1\leq\|A\|_1+\|B\|_1$, para todos $\alpha\in\mathbb{C}$, $A,\ B\in\mathcal{I}_1$.
2. $\|\alpha A\|_2=|\alpha|\,\|A\|_2$ e $\|A+B\|_2\leq\|A\|_2+\|B\|_2$, para todos $\alpha\in\mathbb{C}$, $A,\ B\in\mathcal{I}_2$.
3. $\|A\|_1=\|A^*\|_1$, $A\in\mathcal{I}_1$.
4. $\|A\|_2=\|A^*\|_2$, $A\in\mathcal{I}_2$.
5. $\|A\|\leq\|A\|_2\leq\|A\|_1$, $A\in\mathcal{I}_1$.
6. $\|A\|\leq\|A\|_2$, $A\in\mathcal{I}_2$.
7. $\|AB\|_1\leq\|A\|_2\|B\|_2$, $A,\ B\in\mathcal{I}_2$.
8. $\|AB\|_1\leq\|A\|_2\|B\|_2\leq\|A\|_1\|B\|_1$, $A,\ B\in\mathcal{I}_1$.
9. $\left\|AB\right\|_1\leq\|A\|\|B\|_1$ e $\left\|BA\right\|_1\leq\|A\|\|B\|_1$, $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $B\in\mathcal{I}_1$.
10. $\left\|AB\right\|_2\leq\|A\|\|B\|_2$ e $\left\|BA\right\|_2\leq\|A\|\|B\|_2$, $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $B\in\mathcal{I}_2$.

11. $\big|\mathrm{Tr}(A)\big| \leq \|A\|_1$, $A \in \mathcal{I}_1$.

12. $\big|\mathrm{Tr}(AB)\big| \leq \|A\|_2 \|B\|_2$, $A,\ B \in \mathcal{I}_2$.

• **Os ideais $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ como $*$-álgebras de Banach**

Os espaços $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ compõem exemplos importantes de $*$-álgebras de Banach. Isso é estabelecido na proposição que segue, cuja demonstração meramente reúne resultados já estabelecidos.

Proposição 40.101 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável. Então, valem as seguintes afirmações:*

1. *$\mathcal{I}_1$ é uma $*$-álgebra de Banach na norma $\|\cdot\|_1$.*
2. *$\mathcal{I}_2$ é uma $*$-álgebra de Banach na norma $\|\cdot\|_2$.* □

Prova. *Prova do item 1.* Já estabelecemos que $\mathcal{I}_1$ é uma álgebra (por ser um espaço vetorial e um bi-ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$) e que se $A \in \mathcal{I}_1$ então $A^* \in \mathcal{I}_1$ (Teorema 40.47, página 2335) com $\|A\|_1 = \|A^*\|_1$ (Proposição 40.95, página 2337). Estabelecemos também que $\mathcal{I}_1$ é completo na norma $\|\cdot\|_1$ (Proposição 40.95, página 2337) e que $\|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|_1$ para todos $A,\ B \in \mathcal{I}_1$ (Corolário 40.25, página 2343). Portanto, $\mathcal{I}_1$ é uma $*$-álgebra de Banach nessa norma.

Prova do item 2. Já estabelecemos que $\mathcal{I}_2$ é uma álgebra (por ser um espaço vetorial e um bi-ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$), que se $A \in \mathcal{I}_2$, então $A^* \in \mathcal{I}_2$ com $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$ (Lema 40.16, página 2341) e que $\mathcal{I}_2$ é completo na norma $\|\cdot\|_2$ (Proposição 40.99, página 2343). Estabelecemos também que $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$ para todos $A,\ B \in \mathcal{I}_2$ (Lema 40.20, página 2343). Portanto, $\mathcal{I}_2$ é uma $*$-álgebra de Banach nessa norma. ■

40.10.3 Operadores Traciais e de Hilbert-Schmidt e os Operadores Compactos

Nesta seção estabelecemos relações importantes entre operadores traciais e de Hilbert-Schmidt, por um lado, e operadores compactos, por outro lado.

• **Operadores traciais e operadores compactos**

A proposição que segue estabelece que todo operador tracial é compacto e relaciona sua norma $\|\cdot\|_1$ aos seus valores singulares.

Proposição 40.102 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável. Então, todo elemento de $\mathcal{I}_1$ é compacto e os operadores de posto finito (e, portanto, os compactos) são $\|\cdot\|_1$-densos em $\mathcal{I}_1$.*

Um operador compacto C pertence a $\mathcal{I}_1$ se e somente se $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\mu_n$ converge e, nesse caso, tem-se $\|C\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$, onde μ_n são os valores singulares de C, ou seja, são os autovalores de $|C|$ (a soma incluindo a multiplicidade de cada autovalor). □

Prova. Seja P_{φ_n} o projetor ortogonal sobre φ_n, isto é, $P_{\varphi_n}\psi := \langle\varphi_n,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}}\varphi_n$, $\forall\psi\in\mathcal{H}$. Seja também $P_N := \sum_{n=1}^{N} P_{\varphi_n}$ o projetor ortogonal sobre o subespaço gerado por $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_N$ e seja $P_N^{\perp} := \mathbb{1} - P_N$.

Para $A \in \mathcal{I}_1$, defina-se $A_N := AP_N$. É claro que $A_N\psi = \sum_{n=1}^{N}\langle\varphi_n,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}} A\varphi_n$ para qualquer $\psi\in\mathcal{H}$. Isso mostra que cada A_N é um operador de posto finito e, pela Proposição 40.78, página 2293, cada A_N é compacto. Como $A \in \mathcal{I}_1$, valem $A_N \in \mathcal{I}_1$ e $A - A_N = AP_N^{\perp} \in \mathcal{I}_1$, pois $\mathcal{I}_1$ é um bi-ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Provemos agora que $\lim_{N\to\infty}\|A - A_N\|_1 = 0$, estabelecendo que operadores de posto finito (e, portanto, os compactos), são $\|\cdot\|_1$-densos em $\mathcal{I}_1$. Sejam as representações polares $AP_N^{\perp} = U|AP_N^{\perp}|$ e $A = V|A|$, com U e V sendo isometrias parciais. Temos que $|AP_N^{\perp}| = U^*V|A|P_N^{\perp}$ e, com isso, vale

$$\|A-A_N\|_1 = \big\|AP_N^{\perp}\big\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\big\langle\phi_n,\ |AP_N^{\perp}|\phi_n\big\rangle_{\mathfrak{H}} = \sum_{n=1}^{\infty}\big\langle\phi_n,\ U^*V|A|P_N^{\perp}\phi_n\big\rangle_{\mathfrak{H}} = \sum_{n=N+1}^{\infty}\big\langle\phi_n,\ U^*V|A|^{1/2}|A|^{1/2}\phi_n\big\rangle_{\mathfrak{H}}$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty}\big\langle|A|^{1/2}V^*U\phi_n,\ |A|^{1/2}\phi_n\big\rangle_{\mathfrak{H}} \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty}\big\||A|^{1/2}V^*U\phi_n\big\|_{\mathfrak{H}}\big\||A|^{1/2}\phi_n\big\|_{\mathfrak{H}}$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\big\||A|^{1/2}V^*U\phi_n\big\|_{\mathfrak{H}}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n'=N+1}^{\infty}\big\||A|^{1/2}\phi_{n'}\big\|_{\mathfrak{H}}^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\big\langle\phi_n,\ U^*V|A|V^*U\phi_n\big\rangle_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2}\left(\sum_{n'=N+1}^{\infty}\big\langle\phi_{n'},\ |A|\phi_{n'}\big\rangle_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\big\langle\phi_n,\ U^*V|A|V^*U\phi_n\big\rangle_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2}\left(\sum_{n'=N+1}^{\infty}\big\langle\phi_{n'},\ |A|\phi_{n'}\big\rangle_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2}$$

$$\overset{(40.218)}{\leq} \left(\sum_{n=1}^{\infty}\big\langle\phi_n,\ |A|\phi_n\big\rangle_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2}\left(\sum_{n'=N+1}^{\infty}\big\langle\phi_{n'},\ |A|\phi_{n'}\big\rangle_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2} = \sqrt{\|A\|_1}\left(\sum_{n'=N+1}^{\infty}\big\langle\phi_{n'},\ |A|\phi_{n'}\big\rangle_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2}.$$

Como $A \in \mathcal{I}_1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\big\langle\phi_n,\ |A|\phi_n\big\rangle_{\mathfrak{H}} =: \big\|A\big\|_1$ converge e, portanto, $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}\big\langle\phi_n,\ |A|\phi_n\big\rangle_{\mathfrak{H}} = 0$. Logo, $\lim_{N\to\infty}\|A - A_N\|_1 = 0$.

Pela desigualdade (40.228), tem-se também $\lim_{N\to\infty}\Big\|A - A_N\Big\| = 0$, provando que A é o limite na norma $\|\cdot\|$ da sequência de operadores compactos A_N. Portanto, pelo Teorema 40.84, página 2296, A é compacto.

Se C é compacto, então segue facilmente de (40.179) que $\sum_{n=1}^{N}\langle\phi_n,\ |C|\phi_n\rangle_{\mathfrak{H}} = \sum_{n=1}^{N}\mu_n$, com μ_n e ϕ_n sendo os autovalores, respectivamente, os autovetores normalizados do operador autoadjunto $|C|$. Disso segue que $C \in \mathcal{I}_1$ se e somente se $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\mu_n$ existe e, nesse caso, teremos $\|C\|_1 = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\langle\phi_n,\ |C|\phi_n\rangle_{\mathfrak{H}} = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$. ■

E. 40.50 *Exercício*. Mostre que o operador C do Exercício E. 40.48, página 2315, é compacto mas não é tracial. ✣

• **Operadores de Hilbert-Schmidt e operadores compactos**

A proposição que segue estabelece que todo operador de Hilbert-Schmidt é compacto e relaciona sua norma $\|\cdot\|_2$ aos seus valores singulares.

Proposição 40.103 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável. Então, todo elemento de $\mathcal{I}_2$ é compacto e os operadores de posto finito (e, portanto, os compactos) são $\|\cdot\|_2$-densos em $\mathcal{I}_2$.*

Um operador compacto C pertence a $\mathcal{I}_2$ se e somente se $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\mu_n^2$ converge e, nesse caso, tem-se $\|C\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2}$, onde μ_n são os valores singulares de C, ou seja, são os autovalores de $|C|$ (a soma incluindo a multiplicidade de cada autovalor). □

Prova. Seja $\{\phi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ uma base ortonormal completa em $\mathcal{H}$ e seja P_N o projetor ortogonal sobre o subespaço gerado por $\phi_1,\ \ldots,\ \phi_N$, ou seja, $P_N = \sum_{n=1}^{N}P_{\phi_n}$, com $P_{\phi_a}\psi := \langle\phi_a,\ \psi\rangle_{\mathfrak{H}}\phi_a$, $\forall\psi\in\mathcal{H}$. Seja $P_N^{\perp} := \mathbb{1} - P_N$. Para $A \in \mathcal{I}_2$, defina-se $A_N = AP_N$. Para $\psi\in\mathcal{H}$ tem-se $A_N\psi = \sum_{a=1}^{N}\langle\phi_a,\ \psi\rangle_{\mathfrak{H}}A\phi_a$. Assim, A_N é um operador de posto finito e, pela

Proposição 40.78, página 2293, cada A_N é compacto. Como $A - A_N = AP_N^\perp$, vale

$$\|A - A_N\|^2 \overset{(40.234)}{\leq} \|A - A_N\|_2^2 \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\; P_N^\perp A^* A P_N^\perp \phi_n \rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle \phi_n,\; A^* A \phi_n \rangle_{\mathcal{H}} \,.$$

Como $A \in \mathcal{I}_2$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n,\; A^*A\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} = \|A\|_2^2$ é convergente e, portanto, $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle \phi_n,\; A^*A\phi_n\rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Logo, $\lim_{N\to\infty} \|A - A_N\| = 0$ e $\lim_{N\to\infty} \|A - A_N\|_2 = 0$. O fato que $\lim_{N\to\infty} \|A - A_N\| = 0$ significa que A é o $\|\cdot\|$-limite da sequência de operadores compactos A_N. Logo, pelo Teorema 40.84, página 2296, A é compacto. O fato que $\lim_{N\to\infty} \|A - A_N\|_2 = 0$ diz-nos que os operadores de posto finito (e, portanto, os compactos) são $\|\cdot\|_2$-densos em $\mathcal{I}_2$.

Se C é compacto temos pela representação (40.179) que $\sum_{n=1}^{N} \langle \phi_n,\; |C|^2 \phi_n\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{N} \mu_n^2$, com μ_n e ϕ_n sendo os autovalores, respectivamente, os autovetores normalizados do operador autoadjunto $|C|$. Disso segue que $C \in \mathcal{I}_2$ se e somente se $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu_n^2$ existe e nesse caso vale $\|C\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2$. ∎

40.10.4 Operadores de Hilbert-Schmidt e Operadores Integrais

Há um fato muito importante por trás da noção de operador de Hilbert-Schmidt que é, em muitos sentidos, a razão de ser desses operadores, a saber, sua relação com operadores integrais, expressa no teorema que segue.

Teorema 40.48 *Seja $(M,\, \mathcal{M},\, \mu)$ um espaço mensurável, com M sendo um conjunto não-vazio, $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra em M e μ uma medida em $\mathcal{M}$. Sejam $\mathcal{H} = L^2(M,\, d\mu)$ (que supomos ser separável) e $\mathcal{H}^2 = L^2(M\times M,\, d\mu\otimes d\mu)$. Então, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um operador de Hilbert-Schmidt (ou seja, $A \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$) se e somente se existir $\mathsf{K}_A \in \mathcal{H}^2$ tal que*

$$\big(A\psi\big)(x) \;=\; \int_M \mathsf{K}_A(x,\, y)\psi(y)\, d\mu_y \,, \qquad \forall\, \psi \in \mathcal{H}\,,$$

sendo $\|A\|_2 = \big\|\mathsf{K}_A\big\|_{\mathcal{H}^2}$, isto é, $\mathrm{Tr}(A^*A) = \displaystyle\int_{M\times M} |\mathsf{K}_A(x,\, y)|^2\, d\mu_x\, d\mu_y$. A aplicação $U : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$ entre os espaços de Hilbert $\mathcal{H}^2$ e $\mathcal{I}_2(\mathcal{H})$, definida por $U(\mathsf{K}_A) = A$, é unitária e, portanto, vale mais geralmente

$$\big\langle A,\; B\big\rangle_{\mathcal{I}_2(\mathcal{H})} \;=\; \mathrm{Tr}(A^*B) \;=\; \int_{M\times M} \overline{\mathsf{K}_A(x,\, y)}\, \mathsf{K}_B(x,\, y)\, d\mu_x\, d\mu_y \,, \tag{40.241}$$

para todos $A,\; B \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$, com $\mathsf{K}_A \equiv U^{-1}(A)$ e $\mathsf{K}_B \equiv U^{-1}(B)$. □

Prova do Teorema 40.48. A prova é dividida em duas partes. Na primeira construímos um operador de Hilbert-Schmidt a partir de um elemento $\mathsf{K} \in \mathcal{H}^2$ com as propriedades mencionadas e na segunda mostramos que se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um operador de Hilbert-Schmidt, então A pode ser escrito como um operador integral cujo núcleo integral é um vetor $\mathsf{K} \in \mathcal{H}^2$ com as propriedades mencionadas.

Parte I. Vamos provar que se $\mathsf{K} \in \mathcal{H}^2$ então $\mathcal{H} \ni \psi \mapsto \int_M \mathsf{K}(x,\, y)\psi(y)\, d\mu_y$ define um operador linear A_{K} de $\mathcal{H}$ em si mesmo, o qual é um operador de Hilbert-Schmidt com $\big\|A_{\mathsf{K}}\big\|_2 = \big\|\mathsf{K}\big\|_{\mathcal{H}^2}$.

Seja $\mathsf{K} \in \mathcal{H}^2$. Sejam $\phi,\; \psi \in \mathcal{H}$ e seja $\phi\otimes\overline{\psi}$ o elemento de $\mathcal{H}^2$ dado pelo produto de ϕ e $\overline{\psi}$: $\big(\phi\otimes\overline{\psi}\big)(x,\, y) = \phi(x)\overline{\psi(y)}$, $(x,\, y) \in M\times M$. Naturalmente, vale $\big\|\phi\otimes\overline{\psi}\big\|_{\mathcal{H}^2} = \|\phi\|_{\mathcal{H}}\|\overline{\psi}\|_{\mathcal{H}}$ A aplicação $\mathcal{H} \ni \phi \mapsto \big\langle \mathsf{K},\; \phi\otimes\overline{\psi}\big\rangle_{\mathcal{H}^2} \in \mathbb{C}$ é um funcional linear contínuo sobre $\mathcal{H}$ pois, por Cauchy-Schwarz, $\Big|\big\langle \mathsf{K},\; \phi\otimes\overline{\psi}\big\rangle_{\mathcal{H}^2}\Big| \leq \big\|\mathsf{K}\big\|_{\mathcal{H}^2}\|\phi\otimes\overline{\psi}\|_{\mathcal{H}^2} = \big\|\mathsf{K}\big\|_{\mathcal{H}^2}\|\phi\|_{\mathcal{H}}\|\overline{\psi}\|_{\mathcal{H}}$. Pelo Teorema da Representação de Riesz, Teorema 39.4, página 2134, existe $\eta \in \mathcal{H}$ tal que $\big\langle \mathsf{K},\; \phi\otimes\overline{\psi}\big\rangle_{\mathcal{H}^2} = \langle \eta,\; \phi\rangle_{\mathcal{H}}$ para todo e qualquer $\phi \in \mathcal{H}$ e todo e qualquer $\psi \in \mathcal{H}$. Naturalmente, η depende de ψ e denotemos a função $\psi \mapsto \eta$ por $A_{\mathsf{K}}(\psi)$, de modo que temos $\big\langle \mathsf{K},\; \phi\otimes\overline{\psi}\big\rangle_{\mathcal{H}^2} = \langle A_{\mathsf{K}}(\psi),\; \phi\rangle_{\mathcal{H}}$.

É elementar constatar que A_{K} é um operador linear: para todos $\alpha_1,\; \alpha_2 \in \mathbb{C}$ e todos $\psi_1,\; \psi_2 \in \mathcal{H}$, vale

$$\big\langle A_{\mathsf{K}}\big(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\big),\; \phi\big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \Big\langle \mathsf{K},\; \phi\otimes\overline{\big(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\big)}\Big\rangle_{\mathcal{H}^2} \;=\; \overline{\alpha_1}\big\langle \mathsf{K},\; \phi\otimes\overline{\psi_1}\big\rangle_{\mathcal{H}^2} + \overline{\alpha_2}\big\langle \mathsf{K},\; \phi\otimes\overline{\psi_2}\big\rangle_{\mathcal{H}^2}$$

$$= \;\overline{\alpha_1}\langle A_{\mathsf{K}}(\psi_1),\; \phi\rangle_{\mathcal{H}} + \overline{\alpha_2}\langle A_{\mathsf{K}}(\psi_2),\; \phi\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big\langle \alpha_1 A_{\mathsf{K}}(\psi_1) + \alpha_2 A_{\mathsf{K}}(\psi_2),\; \phi\big\rangle_{\mathcal{H}} \,.$$

Como isso é válido para todo $\phi \in \mathcal{H}$, segue que $A_{\mathsf{K}}\big(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\big) = \alpha_1 A_{\mathsf{K}}(\psi_1) + \alpha_2 A_{\mathsf{K}}(\psi_2)$, estabelecendo a linearidade. O operador linear A_{K} é também limitado pois,

$$\big\|A_{\mathsf{K}}\psi\big\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle A_{\mathsf{K}}\psi,\; A_{\mathsf{K}}\psi\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big\langle \mathsf{K},\; (A_{\mathsf{K}}\psi)\otimes\overline{\psi}\big\rangle_{\mathcal{H}^2} \;\leq\; \big\|\mathsf{K}\big\|_{\mathcal{H}^2}\|A_{\mathsf{K}}\psi\|_{\mathcal{H}}\|\overline{\psi}\|_{\mathcal{H}}\,,$$

como vimos, o que mostra que $\frac{\|A_{\mathsf{K}}\psi\|_{\mathcal{H}}}{\|\psi\|_{\mathcal{H}}} \leq \big\|\mathsf{K}\big\|_{\mathcal{H}^2}$ e, portanto, $\|A_{\mathsf{K}}\| \leq \big\|\mathsf{K}\big\|_{\mathcal{H}^2}$.

Vamos agora provar que A_{K} é um operador de Hilbert-Schmidt. Seja $\{\phi_n,\; n \in \mathbb{N}\}$ uma base ortonormal completa em $\mathcal{H}$. É evidente que $\{\phi_m\otimes\overline{\phi_n},\; m,\; n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal completa em $\mathcal{H}^2$ e com a mesma podemos escrever $\mathsf{K} = \displaystyle\sum_{m,\, n\in\mathbb{N}} k_{mn}\phi_m\otimes\overline{\phi_n}$, sendo que $\displaystyle\sum_{m,\, n\in\mathbb{N}} |k_{mn}|^2 = \|\mathsf{K}\|_{\mathcal{H}^2}^2 < \infty$.

Temos que

$$A_{\mathsf{K}}\phi_n \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \langle \phi_m,\; A_{\mathsf{K}}\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\phi_m \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \big\langle \phi_m\otimes\overline{\phi_n},\; \mathsf{K}\big\rangle_{\mathcal{H}^2}\phi_m \,.$$

Segue disso e da continuidade do produto escalar que

$$\big\langle A_{\mathsf{K}}\phi_n,\; A_{\mathsf{K}}\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big\langle \mathsf{K},\; (A_{\mathsf{K}}\phi_n)\otimes\overline{\phi_n}\big\rangle_{\mathcal{H}^2} \;=\; \left\langle \mathsf{K},\; \left(\sum_{m=1}^{\infty} \big\langle \phi_m\otimes\overline{\phi_n},\; \mathsf{K}\big\rangle_{\mathcal{H}^2}\phi_m\right)\otimes\overline{\phi_n}\right\rangle_{\mathcal{H}^2}$$

$$= \;\sum_{m=1}^{\infty} \big\langle \phi_m\otimes\overline{\phi_n},\; \mathsf{K}\big\rangle_{\mathcal{H}^2}\big\langle \mathsf{K},\; \phi_m\otimes\overline{\phi_n}\big\rangle_{\mathcal{H}^2} \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} |k_{mn}|^2 \,.$$

Logo, $\|A_{\mathsf{K}}\|_2^2 = \displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \big\langle A_{\mathsf{K}}\phi_n,\; A_{\mathsf{K}}\phi_n\big\rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty} |k_{mn}|^2$ existe, provando que $A_{\mathsf{K}} \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$ e também que $\|A_{\mathsf{K}}\|_2^2 = \displaystyle\sum_{m,\, n\in\mathbb{N}} |k_{mn}|^2 = \|\mathsf{K}\|_{\mathcal{H}^2}^2$.

Importante é agora observar que para todos $\psi,\; \phi \in \mathcal{H}$ tem-se

$$\big\langle A_{\mathsf{K}}\psi,\; \phi\big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big\langle \mathsf{K},\; \phi\otimes\overline{\psi}\big\rangle_{\mathcal{H}^2} \;=\; \int_{M\times M} \overline{\mathsf{K}(x,\, y)}\phi(x)\overline{\psi(y)}\, d\mu_x d\mu_y \;=\; \int_M \overline{\left(\int_M \mathsf{K}(x,\, y)\psi(y)\, d\mu_y\right)}\phi(x)\, d\mu_x \,,$$

o que permite identificar

$$\big(A_{\mathsf{K}}\psi\big)(x) \;=\; \int_M \mathsf{K}(x,\, y)\psi(y)\, d\mu_y \tag{40.242}$$

para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Assim, $A_{\mathsf{K}} \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$ é um operador integral cujo núcleo integral é $\mathsf{K} \in \mathcal{H}^2$, sendo $\|A_{\mathsf{K}}\|_2 = \|\mathsf{K}\|_{\mathcal{H}^2}$. Observe-se que a aplicação $U : \mathcal{H}^2 \ni \mathsf{K} \mapsto A_{\mathsf{K}} \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$ definida por $\big\langle A_{\mathsf{K}}\psi,\; \phi\big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle \mathsf{K},\; \phi\otimes\overline{\psi}\big\rangle_{\mathcal{H}^2}$ ou por (40.242) é linear. Assim, $U : \mathcal{H}^2 \ni \mathsf{K} \mapsto A_{\mathsf{K}} \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$ é uma isometria entre os espaços de Hilbert $\mathcal{H}^2$ e $\mathcal{I}_2(\mathcal{H})$.

Parte II. Vamos agora provar que todo operador de Hilbert-Schmidt em $\mathcal{H}$ pode ser escrito como um operador integral cujo núcleo integral é um elemento de $\mathcal{H}^2$.

Vimos acima que a aplicação $U : \mathcal{H}^2 \ni \mathsf{K} \mapsto A_{\mathsf{K}} \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$ é uma isometria entre os espaços de Hilbert $\mathcal{H}^2$ e $\mathcal{I}_2(\mathcal{H})$. Vamos provar que $\mathrm{Ran}\,(U)$ contém os operadores de posto finito de $\mathcal{I}_2(\mathcal{H})$ para, ao final, extrair disso as devidas conclusões.

Se $B \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$ é um operador de posto finito, então $\mathrm{Ran}\,(B)$ é um subespaço de dimensão finita de $\mathcal{H}$ e existem $N \in \mathbb{N}$ e um conjunto ortonormal $\{\phi_1,\; \ldots,\; \phi_N\} \subset \mathcal{H}$ tais que $B\psi = \sum_{n=1}^{N} \langle \phi_n,\; B\psi\rangle_{\mathcal{H}}\phi_n = \sum_{n=1}^{N} \langle B^*\phi_n,\; \psi\rangle_{\mathcal{H}}\phi_n$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Explicitando isso, temos

$$\big(B\psi\big)(x) \;=\; \sum_{n=1}^{N} \left(\int_M \overline{\big(B^*\phi_n\big)(y)}\, \psi(y)\, d\mu_y\right)\phi_n(x) \;=\; \int_M \mathsf{K}_B(x,\, y)\, \psi(y)\, d\mu_y \,,$$

onde $\mathsf{K}_B(x,\,y) := \sum_{n=1}^N \phi_n(x)\,\overline{(B^*\phi_n)(y)}$. Agora, $\mathsf{K}_B \in \mathcal{H}^2$, pois

$$\int_{M\times M} \left|\mathsf{K}_B(x,\,y)\right|^2 d\mu_x\,d\mu_y \;=\; \sum_{m=1}^N\sum_{n=1}^N \int_{M\times M} (B^*\phi_n)(y)\,\overline{\phi_n(x)}\,\overline{(B^*\phi_m)(y)}\,\phi_m(x)\,d\mu_x\,d\mu_y$$

$$= \sum_{m=1}^N\sum_{n=1}^N \left(\underbrace{\int_M \overline{\phi_n(x)}\,\phi_m(x)\,d\mu_x}_{=\langle\phi_n,\,\phi_m\rangle_{\mathcal{H}}=\delta_{nm}}\right)\left(\int_M \overline{(B^*\phi_m)(y)}\,(B^*\phi_n)(y)\,d\mu_y\right) \;=\; \sum_{n=1}^N \left\|B^*\phi_n\right\|_{\mathcal{H}}^2 \;<\; \infty\,.$$

Além disso,

$$\left\langle \phi,\;\; A_{\mathsf{K}_B}\psi\right\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \left\langle \phi\otimes\overline{\psi},\;\mathsf{K}_B\right\rangle_{\mathcal{H}^2} \;=\; \int_{M\times M} \overline{\phi(x)}\;\psi(y)\;\mathsf{K}_B(x,\,y)\,d\mu_x\,d\mu_y$$

$$= \sum_{n=1}^N \left(\int_M \overline{\phi(x)}\,\phi_n(x)\,d\mu_x\right)\left(\int_M \overline{(B^*\phi_n)(y)}\,\psi(y)\,d\mu_y\right) \;=\; \sum_{n=1}^N \langle\phi,\,\phi_n\rangle_{\mathcal{H}}\,\langle B^*\phi_n,\,\psi\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$= \left\langle \phi\,,\;\; \sum_{n=1}^N \langle\phi_n,\,B\psi\rangle_{\mathcal{H}}\,\phi_n\right\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \langle\phi,\,B\psi\rangle_{\mathcal{H}}\,,$$

provando que $A_{\mathsf{K}_B} = B$ e, portanto, provando que todo operador de posto finito está em $\mathrm{Ran}\,(U)$.

Como $U : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$ é uma isometria, a Proposição 40.3, página 2174, garante-nos que sua imagem $\mathrm{Ran}\,(U)$ é um conjunto fechado de $\mathcal{I}_2(\mathcal{H})$. Na Proposição 40.103, página 2349, observamos que os operadores de posto finito são densos (na topologia da norma $\|\cdot\|_2$) em todo $\mathcal{I}_2(\mathcal{H})$. Assim, a imagem de U contém um conjunto denso em $\mathcal{I}_2(\mathcal{H})$, pois contém os operadores de posto finito. Como a imagem de U é fechada, concluímos que $\mathrm{Ran}\,(U) = \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$. Em palavras, isso diz-nos que todo operador de Hilbert-Schmidt em $\mathcal{H} = L^2(M,\,d\mu)$ é um operador integral com núcleo integral em $\mathcal{H}^2 = L^2\big(M\times M,\,d\mu\otimes d\mu\big)$.

O fato de $\mathrm{Ran}\,(U) = \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$ implica também (vide Proposição 40.14, página 2203) que $\mathrm{Ker}\,(U^*)^\perp = \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$ e, portanto, $\mathrm{Ker}\,(U^*) = \{0\}$. Assim, U é unitário e, consequentemente, $\langle A,\;B\rangle_{\mathcal{I}_2} = \langle U^*A,\;U^*B\rangle_{\mathcal{H}^2}$, ou seja, $\mathrm{Tr}(A^*B) = \int_{M\times M} \overline{\mathsf{K}_A(x,\,y)}\,\mathsf{K}_B(x,\,y)\,d\mu_x\,d\mu_y$ para todos $A,\;B \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$, com $\mathsf{K}_A \equiv U^*(A)$ e $\mathsf{K}_B \equiv U^*(B)$. ■

A associação entre operadores de Hilbert-Schmidt e operadores integrais com núcleo em $\mathcal{H}^2$ é importante por fornecer um critério útil (suficiente, mas não necessário) para se estabelecer se um operador integral é compacto: basta que seu núcleo integral seja também de quadrado integrável.

Antes de prosseguirmos, recordemos que, por definição, $U : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$, introduzido no Teorema 40.48, satisfaz

$$\left\langle \phi,\,U(\mathsf{K})\psi\right\rangle_{\mathcal{H}} \equiv \left\langle \phi,\,A_{\mathsf{K}}\psi\right\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \left\langle \phi\otimes\overline{\psi},\,\mathsf{K}\right\rangle_{\mathcal{H}^2} \quad\text{e}\quad \left\langle \phi,\,A\psi\right\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \left\langle \phi\otimes\overline{\psi},\,U^*(A)\right\rangle_{\mathcal{H}^2} \equiv \left\langle \phi\otimes\overline{\psi},\,\mathsf{K}_A\right\rangle_{\mathcal{H}^2} \quad (40.243)$$

para todos $\psi,\;\phi \in \mathcal{H}$. Acima, denotamos $U(\mathsf{K})$ por A_{K} e $U^*(A)$ por K_A. A proposição que segue apresenta mais algumas propriedades do operador unitário $U : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$ e uma consequência dessas propriedades para operadores traciais.

Proposição 40.104 *Seja $\mathcal{H} = L^2(M,\,d\mu)$ como no Teorema 40.48 e seja $\mathsf{K}_A = U^*(A)$ o núcleo integral associado a $A \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$, tal como definido naquele teorema (vide (40.243)). Então, valem as seguintes afirmações:*

1. *Para todo $A \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$ vale $\mathsf{K}_{A^*}(x,\,y) = \overline{\mathsf{K}_A(y,\,x)}$, $(\mu\otimes\mu)$-q.t.p.*
2. *Para todos $A,\;B \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$ vale $\mathsf{K}_{AB}(x,\,y) = \displaystyle\int_M \mathsf{K}_A(x,\,z)\mathsf{K}_B(z,\,y)\,d\mu_z$, $(\mu\otimes\mu)$-q.t.p.*
3. *Para todos $A,\;B \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$ vale*

$$\mathrm{Tr}(AB) \;=\; \int_{M\times M} \mathsf{K}_A(y,\,x)\,\mathsf{K}_B(x,\,y)\,d\mu_x\,d\mu_y\,. \quad (40.244)$$

4. *Se $A \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ é um operador tracial, então existe um núcleo integral $\mathsf{L}_A \in \mathcal{H}^2$ tal que $(A\psi)(x) = \int_M \mathsf{L}_A(x,\,y)\psi(y)\,d\mu_y$ e vale*

$$\mathrm{Tr}(A) \;=\; \int_M \mathsf{L}_A(x,\,x)\,d\mu_x\,. \quad (40.245)$$

□

Comentário. Não deve escapar ao leitor a semelhança entre os resultados acima e fatos bem conhecidos da álgebra de matrizes. O leitor deve ser advertido, porém, que $A \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ pode possuir mais de uma representação integral e que (40.245) não necessariamente vale para todas essas representações. ♣

Prova da Proposição 40.104. Por definição, temos $\left\langle \phi,\;A\psi\right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \phi\otimes\overline{\psi},\;\mathsf{K}_A\right\rangle_{\mathcal{H}^2}$ para todos $\psi,\;\phi \in \mathcal{H}$. Dessa forma, $\left\langle \phi\otimes\overline{\psi},\;\mathsf{K}_{A^*}\right\rangle_{\mathcal{H}^2} = \left\langle \phi,\;A^*\psi\right\rangle_{\mathcal{H}} = \overline{\left\langle \psi,\;A\phi\right\rangle_{\mathcal{H}}} = \overline{\left\langle \psi\otimes\overline{\phi},\;\mathsf{K}_A\right\rangle_{\mathcal{H}^2}}$. Assim, escrevendo-se explicitamente a igualdade $\left\langle \phi\otimes\overline{\psi},\;\mathsf{K}_{A^*}\right\rangle_{\mathcal{H}^2} = \overline{\left\langle \psi\otimes\overline{\phi},\;\mathsf{K}_A\right\rangle_{\mathcal{H}^2}}$, temos

$$\int_{M\times M} \overline{\phi(x)}\psi(y)\mathsf{K}_{A^*}(x,\,y)\,d\mu_x d\mu_y \;=\; \int_{M\times M} \psi(x)\overline{\phi(y)}\,\overline{\mathsf{K}_A(x,\,y)}\,d\mu_x d\mu_y\,,$$

o que implica $\mathsf{K}_{A^*}(x,\,y) = \overline{\mathsf{K}_A(y,\,x)}$, $(\mu\otimes\mu)$-q.t.p. Para demonstrar a segunda parte, notemos que

$$\left\langle \phi\otimes\overline{\psi},\;\mathsf{K}_{AB}\right\rangle_{\mathcal{H}^2} \;=\; \left\langle \phi,\;AB\psi\right\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \left\langle \phi\otimes\overline{B\psi},\;\mathsf{K}_A\right\rangle_{\mathcal{H}^2}$$

$$= \int_{M\times M} \overline{\phi(x)}(B\psi)(y)\mathsf{K}_A(x,\,y)\,d\mu_x d\mu_y \;=\; \int_{M\times M} \overline{\phi(x)}\left(\int_M \mathsf{K}_B(y,\;z)\psi(z)\,d\mu_z\right)\mathsf{K}_A(x,\,y)\,d\mu_x d\mu_y$$

$$= \int_{M\times M} \overline{\phi(x)}\psi(z)\left(\int_M \mathsf{K}_A(x,\,y)\mathsf{K}_B(y,\,z)\,d\mu_y\right)d\mu_x d\mu_z\,,$$

o que estabelece que $\mathsf{K}_{AB}(x,\,z) = \displaystyle\int_M \mathsf{K}_A(x,\,y)\mathsf{K}_B(y,\,z)\,d\mu_y$, $(\mu\otimes\mu)$-q.t.p.

A relação (40.244) segue imediatamente dos resultados acima e de (40.241). Para provarmos (40.245), lembramos (Corolário 40.27, página 2345) que se $A \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, podemos escrevê-lo na forma $A = A_1A_2$ com $A_1,\;A_2 \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$. Assim, aplicam-se os resultados acima e temos $(A\psi)(x) = \int_{M\times M} \mathsf{K}_{A_1}(x,\,y)\mathsf{K}_{A_2}(y,\;z)\psi(z)\,d\mu_y d\mu_z$, com $\mathsf{K}_{A_1},\;\mathsf{K}_{A_2} \in \mathcal{H}^2$, o que nos permite identificar $\mathsf{L}_A(x,\;z) = \int_M \mathsf{K}_{A_1}(x,\;y)\mathsf{K}_{A_2}(y,\;z)\,d\mu_y$. Observe-se que $\mathsf{L}_A \in \mathcal{H}^2$, pois, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, é fácil ver que

$$\left|\mathsf{L}_A(x,\;z)\right|^2 \;\le\; \left(\int_M \left|\mathsf{K}_{A_1}(x,\;y)\right|^2 d\mu_y\right)\left(\int_M \left|\mathsf{K}_{A_2}(y',\;z)\right|^2 d\mu_{y'}\right)\,,$$

donde se extrai $\int_{M\times M} |\mathsf{L}_A(x,\;z)|^2\,d\mu_x d\mu_z \le \|\mathsf{K}_{A_1}\|_{\mathcal{H}^2}^2\|\mathsf{K}_{A_2}\|_{\mathcal{H}^2}^2 < \infty$. Por (40.244),

$$\mathrm{Tr}(A) \;=\; \mathrm{Tr}(A_1A_2) = \int_M \left(\int_M \mathsf{K}_{A_1}(x,\;y)\mathsf{K}_{A_2}(y,\;x)\,d\mu_y\right)d\mu_x = \int_M \mathsf{L}_A(x,\;x)d\mu_x\,,$$

como afirmamos. ■

40.10.5 O Teorema de Lidskii. Traço e Espectro de Operadores Traciais

Não poderíamos encerrar esta seção sem colocar o traço de um operador tracial em contacto com seu espectro. É bem sabido que o traço de uma matriz coincide com a soma de seus autovalores (incluindo multiplicidade). Vide Seção 10.2.3, página 523. A validade dessa afirmação no caso de espaços de Hilbert de dimensão infinita é o conteúdo do seguinte teorema:

Teorema 40.49 (Teorema de Lidskii) *Seja $A \in \mathfrak{I}_1$ e sejam $\lambda_n(A),\ n \in \mathbb{N}$, seus autovalores (incluindo multiplicidade). Então, vale* $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(A)$. □

É um tanto surpreendente notar que esse teorema foi demonstrado (por Lidskii[80]) somente no ano de 1959. Para uma demonstração e referências históricas remetemos o leitor a [459].

40.11 O Traço Parcial

A noção de *traço parcial* de operadores definidos em espaços de Hilbert que sejam produtos tensoriais de dois outros espaços de Hilbert é frequentemente empregada na Mecânica Quântica e na Teoria da Informação Quântica. O caso particular, e mais simples, em que os espaços de Hilbert envolvidos são de dimensão finita já foi tratado na Seção 10.8.2.2, página 592. Mostraremos aqui que a noção de traço parcial pode ser definida no contexto de produtos tensoriais de espaços de Hilbert de dimensão infinita para operadores agindo no produto tensorial e que sejam de tipo traço.

No que segue consideraremos dois espaços de Hilbert separáveis $\mathcal{H}'$ e $\mathcal{H}''$ dotados de bases ortonormais completas $\{\mathbf{e}_k,\ k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}'$ e $\{\mathbf{f}_l,\ l \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}''$, respectivamente, e denotaremos por $\mathcal{H}$ o produto tensorial de ambos: $\mathcal{H} := \mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$.

Consideraremos também um operador $A \in \mathfrak{I}_1(\mathcal{H})$. Como A é limitado, a expressão

$$\mathcal{H}' \times \mathcal{H}' \ni (\psi,\ \phi) \longmapsto \omega_n(\psi,\ \phi) := \sum_{j=1}^{n} \big\langle (\psi \otimes \mathbf{f}_j),\ A(\phi \otimes \mathbf{f}_j) \big\rangle_{\mathcal{H}} \in \mathbb{C}$$

define para cada $n \in \mathbb{N}$ uma forma sesquilinear em $\mathcal{H}'$ e que é bicontínua (pois $|\omega_n(\psi,\ \phi)| \leq n\|A\|\,\|\psi\|_{\mathcal{H}'}\|\phi\|_{\mathcal{H}'}$). Assim, existe (pela Proposição 40.11, página 2197) um operador linear limitado, que denotamos por $\mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)$, agindo em $\mathcal{H}'$ (ou seja, $\mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$), tal que $\omega_n(\psi,\ \phi) = \big\langle \psi,\ \mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)\phi \big\rangle_{\mathcal{H}'}$, ou seja, tal que

$$\big\langle \psi,\ \mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)\phi \big\rangle_{\mathcal{H}'} = \sum_{j=1}^{n} \big\langle (\psi \otimes \mathbf{f}_j),\ A(\phi \otimes \mathbf{f}_j) \big\rangle_{\mathcal{H}}\,. \tag{40.246}$$

Observe-se aqui que os operadores $\mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)$ não dependem da escolha da base ortonormal $\{\mathbf{e}_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ em $\mathcal{H}'$ mas dependem da escolha da base ortonormal $\{\mathbf{f}_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ em $\mathcal{H}''$.

Afirmamos que $\mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A) \in \mathfrak{I}_1(\mathcal{H}')$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A decomposição polar de $\mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)$ (vide Teorema 40.31, página 2290) permite-nos escrever $\Big|\mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)\Big| = U_n^* \mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)$ para uma isometria parcial U_n. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \Big\langle \mathbf{e}_i,\ \Big|\mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)\Big|\mathbf{e}_i \Big\rangle_{\mathcal{H}'} &= \sum_{i=1}^{N} \Big| \Big\langle \mathbf{e}_i,\ \Big|\mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)\Big|\mathbf{e}_i \Big\rangle_{\mathcal{H}'} \Big| \\
&= \sum_{i=1}^{N} \Big| \Big\langle U_n\mathbf{e}_i,\ \mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)\mathbf{e}_i \Big\rangle_{\mathcal{H}'} \Big| \overset{(40.246)}{\leq} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} \Big| \Big\langle \big((U_n\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{f}_j\big),\ A\big(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{f}_j\big) \Big\rangle_{\mathcal{H}'} \Big| \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} \Big| \Big\langle \big(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j\big),\ (U_n^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}''})A\big(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{f}_j\big) \Big\rangle_{\mathcal{H}'} \Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \Big| \Big\langle \big(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j\big),\ (U_n^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}''})A\big(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{f}_j\big) \Big\rangle_{\mathcal{H}'} \Big| \overset{(40.220)}{\leq} \Big\|(U_n^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}''})A\Big\|_1 \leq \|A\|_1\,.
\end{aligned} \tag{40.247}$$

[80] Viktor Borisovich Lidskii (1924–2008).

A última desigualdade é decorrência do seguinte. Como $A \in \mathfrak{I}_1(\mathcal{H})$, tem-se também, usando o Lema 40.21, página 2346, $(U_n \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}''})A \in \mathfrak{I}_1(\mathcal{H})$ com $\big\|(U_n^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}''})A\big\|_1 \leq \|U_n^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}''}\|\,\|A\|_1 \leq \|A\|_1$.

Segue de (40.247) que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a sequência de números positivos $N \mapsto \sum_{i=1}^{N} \big\langle \mathbf{e}_i,\ \big|\mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)\big|\mathbf{e}_i \big\rangle_{\mathcal{H}'}$ é limitada superiormente por $\|A\|_1$ e, portanto, converge quando $N \to \infty$, provando que $\mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A) \in \mathfrak{I}_1(\mathcal{H}')$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos agora que a sequência de operadores $\mathbb{N} \ni n \mapsto \mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A) \in \mathfrak{I}_1(\mathcal{H}')$ converge no espaço de Banach $\mathfrak{I}_1(\mathcal{H}')$, provando para tal que essa sequência é de Cauchy em $\mathfrak{I}_1(\mathcal{H}')$.

Observemos que, novamente pela decomposição polar, existe para cada $m,\ n \in \mathbb{N}$ uma isometria parcial U_{mn} tal que $\Big|\mathrm{Ptr}^{(m)}_{\mathcal{H}''}(A) - \mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)\Big| = U_{mn}^*\Big(\mathrm{Ptr}^{(m)}_{\mathcal{H}''}(A) - \mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)\Big)$. Com isso, considerando $m < n$,

$$\begin{aligned}
\Big\|\mathrm{Ptr}^{(m)}_{\mathcal{H}''}(A) - \mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)\Big\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} \Big\langle \mathbf{e}_i, \Big|\mathrm{Ptr}^{(m)}_{\mathcal{H}''}(A) - \mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)\Big|\,\mathbf{e}_i \Big\rangle_{\mathcal{H}'} = \sum_{i=1}^{\infty} \Big| \Big\langle \mathbf{e}_i, \Big|\mathrm{Ptr}^{(m)}_{\mathcal{H}''}(A) - \mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)\Big|\,\mathbf{e}_i \Big\rangle_{\mathcal{H}'} \Big| \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \Big| \Big\langle U_{mn}\mathbf{e}_i, \Big(\mathrm{Ptr}^{(m)}_{\mathcal{H}''}(A) - \mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)\Big)\,\mathbf{e}_i \Big\rangle_{\mathcal{H}'} \Big| \\
&\overset{(40.246)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \Bigg| \sum_{j=1}^{m} \Big\langle \big((U_{mn}\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{f}_j\big),\ A\big(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j\big) \Big\rangle_{\mathcal{H}} - \sum_{j=1}^{n} \Big\langle \big((U_{mn}\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{f}_j\big),\ A\big(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j\big) \Big\rangle_{\mathcal{H}} \Bigg| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=m+1}^{n} \Big| \Big\langle \big((U_{mn}\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{f}_j\big),\ A\big(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j\big) \Big\rangle_{\mathcal{H}} \Big| \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=m+1}^{n} \Big| \Big\langle \big(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j\big),\ (U_{mn}^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}''})A\big(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j\big) \Big\rangle_{\mathcal{H}} \Big| \\
&\overset{(40.220)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=m+1}^{n} \Big\langle \big(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j\big),\ \Big|(U_{mn}^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}''})A\Big|\big(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j\big) \Big\rangle_{\mathcal{H}}\,.
\end{aligned} \tag{40.248}$$

Observe-se agora que, como $U_{mn}^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}''}$ é limitado, tem-se $(U_{mn}^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}''})A \in \mathfrak{I}_1(\mathcal{H})$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \Big\langle \big(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j\big),\ \Big|(U_{mn}^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}''})A\Big|\big(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j\big) \Big\rangle_{\mathcal{H}} = \Big\|(U_{mn}^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}''})A\Big\|_1 < \infty\,.$$

Logo, a somatória final em (40.248) pode ser feita menor que qualquer $\epsilon > 0$ prescrito escolhendo-se m e n grandes o suficientes, o que estabelece que a sequência $\mathbb{N} \ni n \mapsto \mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A) \in \mathfrak{I}_1(\mathcal{H}')$ é uma sequência é de Cauchy em $\mathfrak{I}_1(\mathcal{H}')$ e, portanto, converge nesse espaço de Banach.

Denotaremos por $\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}(A) \in \mathfrak{I}_1(\mathcal{H}')$ esse limite, o qual é denominado *traço parcial* de $A \in \mathfrak{I}_1(\mathcal{H})$ tomado sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}''$.

Pela desigualdade (40.228), página 2337, convergência na norma de $\mathfrak{I}_1(\mathcal{H})$ implica convergência na norma operatorial de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Assim, para todos $\psi,\ \phi \in \mathcal{H}'$,

$$\big\langle \psi,\ \mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}(A)\phi \big\rangle_{\mathcal{H}'} = \lim_{n\to\infty} \big\langle \psi,\ \mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)\phi \big\rangle_{\mathcal{H}'} \overset{(40.246)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \big\langle (\psi \otimes \mathbf{f}_j),\ A(\phi \otimes \mathbf{f}_j) \big\rangle_{\mathcal{H}}\,. \tag{40.249}$$

Um ponto importante a ser estabelecido é o seguinte:

Proposição 40.105 $\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}(A)$ *independe da escolha das bases ortonormais completas* $\{\mathbf{e}_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}'$ *e* $\{\mathbf{f}_j,\ j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}''$. □

Comentário. A independência dos aproximantes $\mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}(A)$, $n \in \mathbb{N}$, da escolha da base ortonormal completa $\{\mathbf{e}_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}'$ já foi observada logo após sua definição em (40.246) e isso já implica a independência do limite $\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}(A)$ para com essa escolha. Esses aproximantes são, porém, dependentes da escolha da base ortonormal completa $\{\mathbf{f}_j,\ j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}''$. Portanto, o ponto não trivial é provar a independência do limite $\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}(A)$ da escolha da ortonormal completa $\{\mathbf{f}_j,\ j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}''$. ♣

Prova da Proposição 40.105. Tomemos ψ e ϕ não nulos em $\mathcal{H}'$ e consideremos os vetores normalizados $\psi' := \psi/\|\psi\|_{\mathcal{H}'}$ e $\phi' := \phi/\|\phi\|_{\mathcal{H}'}$. Temos,

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\Big(\big(P_{\psi'}\otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}''}\big)A\big(P_{\phi'}\otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}''}\big)\Big) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\Big\langle (\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{f}_j),\ \big(P_{\psi'}\otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}''}\big)A\big(P_{\phi'}\otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}''}\big)(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{f}_j)\Big\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\langle\psi',\ \mathbf{e}_i\rangle_{\mathcal{H}'}\langle \mathbf{e}_i,\ \phi'\rangle_{\mathcal{H}'}\sum_{j=1}^{\infty}\langle (\psi'\otimes\mathbf{f}_j),\ A(\phi'\otimes\mathbf{f}_j)\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$= \langle\psi',\ \phi'\rangle_{\mathcal{H}'}\sum_{j=1}^{\infty}\langle (\psi'\otimes\mathbf{f}_j),\ A(\phi'\otimes\mathbf{f}_j)\rangle_{\mathcal{H}} \stackrel{(40.249)}{=} \frac{\langle\psi,\ \phi\rangle_{\mathcal{H}'}}{\|\psi\|^2_{\mathcal{H}'}\|\phi\|^2_{\mathcal{H}'}}\langle\psi,\ \mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}(A)\phi\rangle_{\mathcal{H}'}\,. \quad (40.250)$$

O lado esquerdo da última igualdade é independente dos $\{\mathbf{e}_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}'$ e dos $\{\mathbf{f}_j,\ j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}''$, devido à invariância do traço em $\mathcal{H}$ por essas escolhas. Assim, concluímos que $\big\langle\psi,\ \mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}(A)\phi\big\rangle_{\mathcal{H}'}$ também é independente, exceto talvez no caso em que $\langle\psi,\ \phi\rangle_{\mathcal{H}'} = 0$. Para contornar esse caso, consideremos que para $\psi = \phi \equiv \chi \neq 0$ a igualdade em (40.250) mais a ciclicidade do traço em $\mathcal{H}$ informam-nos que

$$\big\langle\chi,\ \mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}(A)\chi\big\rangle_{\mathcal{H}'} \;=\; \|\chi\|^2_{\mathcal{H}'}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\Big(A\big(P_{\chi'}\otimes\mathbb{1}_{\mathcal{H}''}\big)\Big)\,,$$

com $\chi' := \chi/\|\chi\|_{\mathcal{H}'}$. Novamente, o lado direito da última igualdade é independente dos $\{\mathbf{e}_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}'$ e dos $\{\mathbf{f}_j,\ j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}''$, devido à invariância do traço em $\mathcal{H}$ por essas escolhas. Devido à identidade de polarização (3.34)–(3.35), página 278, todas as expressões do tipo $\big\langle\psi,\ \mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}(A)\phi\big\rangle_{\mathcal{H}'}$ são combinações lineares finitas de expressões como $\big\langle\chi,\ \mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}(A)\chi\big\rangle_{\mathcal{H}'}$. As considerações acima permitem concluir, portanto, que para todos $\psi,\ \phi \in \mathcal{H}'$ a expressão $\big\langle\psi,\ \mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}(A)\phi\big\rangle_{\mathcal{H}'}$ independe dos $\{\mathbf{e}_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}'$ e dos $\{\mathbf{f}_j,\ j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}''$ e, portanto, $\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}(A)$ também independe dessa escolha. ■

• **Propriedades do Traço Parcial**

O traço parcial em dimensão infinita compartilha propriedades com o caso de dimensão finita, tratado na Seção 10.8.2.2, página 592. Como $\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}(A) \in \mathcal{I}(\mathcal{H}')$, ele tem traço finito e, por (40.249),

$$\sum_{i=1}^{N}\big\langle\mathbf{e}_i,\ \mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}(A)\mathbf{e}_i\big\rangle_{\mathcal{H}'} \;=\; \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{\infty}\big\langle(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{f}_j),\ A(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{f}_j)\big\rangle_{\mathcal{H}}\,.$$

O limite $N\to\infty$ do lado direito existe e é igual a $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(A)$. Provou-se, assim, a importante igualdade

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'}\big(\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}(A)\big) \;=\; \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(A)\,. \quad (40.251)$$

E. 40.51 *Exercício*. Mostre que

$$\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\left(\sum_{k=1}^{m}B_k\otimes C_k\right) \;=\; \sum_{k=1}^{m}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}''}(C_k)\,B_k \qquad \text{e que} \qquad \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left(\sum_{k=1}^{m}B_k\otimes C_k\right) \;=\; \sum_{k=1}^{m}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'}(B_k)\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}''}(C_k)\,,$$

onde $m \in \mathbb{N}$ e $B_k \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H}')$ e $C_k \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H}'')$ para todo $k \in \{1,\ \ldots,\ m\}$. ✣

Sejam $D \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ e $E \in \mathcal{B}(\mathcal{H}'')$, sempre com $A \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$. Temos que também que $A(D\otimes E) \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ e, portanto, para todos $\psi,\ \phi \in \mathcal{H}'$, temos

$$\Big\langle\psi,\ \mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\big(A(D\otimes E)\big)\phi\Big\rangle_{\mathcal{H}'} \;=\; \lim_{n\to\infty}\Big\langle\psi,\ \mathrm{Ptr}^{(n)}_{\mathcal{H}''}\big(A(D\otimes E)\big)\phi\Big\rangle_{\mathcal{H}'} \stackrel{(40.246)}{=} \sum_{j=1}^{\infty}\Big\langle(\psi\otimes\mathbf{f}_j),\ A(\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes E)\big((D\phi)\otimes\mathbf{f}_j\big)\Big\rangle_{\mathcal{H}}\,.$$

Por outro lado, o mesmo método revela que

$$\Big\langle\psi,\ \mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\big(A(\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes E)\big)(D\phi)\Big\rangle_{\mathcal{H}'} \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\Big\langle(\psi\otimes\mathbf{f}_j),\ A(\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes E)\big((D\phi)\otimes\mathbf{f}_j\big)\Big\rangle_{\mathcal{H}}\,,$$

com o mesmo lado direito da expressão anterior. Concluímos disso que

$$\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\big(A(D\otimes E)\big) \;=\; \mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\big(A(\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes E)\big)D\,. \quad (40.252)$$

De forma totalmente análoga prova-se também que

$$\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\big((D\otimes E)A\big) \;=\; D\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\big((\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes E)A\big)\,. \quad (40.253)$$

Juntando os resultados acima, podemos afirmar que para $D,\ D' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ e $E,\ E' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}'')$, com $A \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, tem-se

$$\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\Big((D\otimes E)A(D'\otimes E')\Big) \;=\; D\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\Big((\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes E)A(\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes E')\Big)D'\,. \quad (40.254)$$

No caso em que $E = E' = \mathbb{1}_{\mathcal{H}''}$, (40.254) fica

$$\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\Big((D\otimes\mathbb{1}_{\mathcal{H}''})A(D'\otimes\mathbb{1}_{\mathcal{H}''})\Big) \;=\; D\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\big(A\big)D'\,. \quad (40.255)$$

A independência de $\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}(A)$ da escolha da base ortonormal completa $\{\mathbf{f}_j,\ j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}''$ implica

$$\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\big(A\big) \;=\; \mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\Big((\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes U^*)A(\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes U)\Big)\,, \quad (40.256)$$

para todo unitário U agindo em $\mathcal{H}''$, pois mudanças de bases ortonormais completas são implementadas por operadores unitários. De fato, temos por (40.249), para todos $\psi,\ \phi \in \mathcal{H}'$,

$$\Big\langle\psi,\ \mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\Big((\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes U^*)A(\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes U)\Big)\phi\Big\rangle_{\mathcal{H}'} \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\Big\langle(\psi\otimes\mathbf{f}_j),\ (\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes U^*)A(\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes U)(\phi\otimes\mathbf{f}_j)\Big\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\big\langle\big(\psi\otimes(U\mathbf{f}_j)\big),\ A\big(\phi\otimes(U\mathbf{f}_j)\big)\big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\big\langle(\psi\otimes\mathbf{f}_j),\ A\big(\phi\otimes\mathbf{f}_j\big)\big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big\langle\psi,\ \mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\big(A\big)\phi\big\rangle_{\mathcal{H}'}\,, \quad (40.257)$$

sendo que na penúltima igualdade usamos a invariância de $\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\big(A\big)$ por mudanças ds base ortonornal $\{\mathbf{f}_j,\ j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}'$, no caso, pelo operador unitário U. Isso demonstrou (40.256).

Substituindo-se $A \to (\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes U)A$ em (40.256), obtemos

$$\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\Big(A\big(\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes U\big)\Big) \;=\; \mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\Big(\big(\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes U\big)A\Big)\,, \quad (40.258)$$

para todo unitário U agindo em $\mathcal{H}''$. Se agora nos recordarmos do fato que todo elemento $E \in \mathcal{B}(\mathcal{H}'')$ pode ser escrito como uma combinação linear de até quatro operadores unitários (vide Proposição 40.50, página 2239 e Proposição 40.76, página 2290), obtemos de (40.258) que

$$\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\Big(A\big(\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes E\big)\Big) \;=\; \mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\Big(\big(\mathbb{1}_{\mathcal{H}'}\otimes E\big)A\Big) \quad (40.259)$$

para todo $E \in \mathcal{B}(\mathcal{H}'')$. Essa é uma forma particular, válida para traços parciais, da bem conhecida propriedade cíclica do traço usual (vide Proposição 40.98, página 2340). Como no caso de matrizes tratado na Seção 10.8.2.2, página 592, propriedades cíclicas que igualem $\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\big(AB\big)$ a $\mathrm{Ptr}_{\mathcal{H}''}\big(BA\big)$, para $A \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ e $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ arbitrários, **não** são geralmente válidas para o traço parcial.

40.12 Exercícios Adicionais

O Exercício dirigido que segue é baseado no Exercício I.4 da referência [117].

E. 40.52 *Exercício dirigido.* Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa com unidade $\mathbb{1}$ e sejam $u,\ v \in \mathcal{A}$. Afirmamos que vale $\sigma(uv)\setminus\{0\} = \sigma(vu)\setminus\{0\}$.

Para demonstrar isso, vamos estabelecer que para qualquer $\lambda \in \rho(vu)$, ou seja, tal que $(vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}$ existe, valem

$$\Big(u(vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}v - \mathbb{1}\Big)(uv-\lambda\mathbb{1}) \;=\; \lambda\mathbb{1} \quad \text{e} \tag{40.260}$$

$$(uv-\lambda\mathbb{1})\Big(u(vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}v - \mathbb{1}\Big) \;=\; \lambda\mathbb{1}\,. \tag{40.261}$$

Antes de extraírmos as consequências disso, provemos (40.260) e (40.261).

A prova de (40.260) é feita através das seguintes passagens autoexplicativas: se $(vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}$ existe, então

$$\begin{aligned}
0 &= u(vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}\times 0\\
&= u(vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}\big[vuv-\lambda v - vuv + \lambda v\big]\\
&= u(vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}\Big[v(uv-\lambda\mathbb{1}) - (vu-\lambda\mathbb{1})v\Big]\\
&= u(vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}v(uv-\lambda\mathbb{1}) - uv\\
&= u(vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}v(uv-\lambda\mathbb{1}) - (uv-\lambda\mathbb{1}) - \lambda\mathbb{1}\\
&= \Big(u(vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}v - \mathbb{1}\Big)(uv-\lambda\mathbb{1}) - \lambda\mathbb{1}\,,
\end{aligned}$$

que é a igualdade (40.260). Verifique as passagens acima. Para (40.261), temos analogamente, se $(vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}$ existe,

$$\begin{aligned}
0 &= 0\times(vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}v\\
&= \big[uvu-\lambda u - uvu + \lambda u\big](vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}v\\
&= \Big[(uv-\lambda\mathbb{1})u - u(vu-\lambda\mathbb{1})\Big](vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}v\\
&= \Big((uv-\lambda\mathbb{1})u(vu-\lambda\mathbb{1})^{-1} - u\Big)v\\
&= \Big((uv-\lambda\mathbb{1})u(vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}v - uv + \lambda\mathbb{1}\Big) - \lambda\mathbb{1}\\
&= (uv-\lambda\mathbb{1})\Big(u(vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}v - \mathbb{1}\Big) - \lambda\mathbb{1}\,,
\end{aligned}$$

que é a igualdade (40.261). Verifique as passagens acima.

Para $\lambda\neq 0$, (40.260) e (40.261) mostram que $(uv-\lambda\mathbb{1})$ tem inversa dada por $\frac{1}{\lambda}\Big(u(vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}v-\mathbb{1}\Big)$ desde que $(vu-\lambda\mathbb{1})^{-1}$ exista, ou seja, desde que $\lambda\in\rho(vu)$.

Assim, para $\lambda\neq 0$ temos $\lambda\in\rho(uv)$ desde que $\lambda\in\rho(vu)$, ou seja, $\rho(uv)\setminus\{0\}\subset\rho(vu)\setminus\{0\}$. Trocando $u\leftrightarrow v$, concluímos que $\rho(uv)\setminus\{0\} = \rho(vu)\setminus\{0\}$, o que equivale a $\rho(uv)\cup\{0\} = \rho(vu)\cup\{0\}$ (vide Exercício E. 1.2, página 58). Tomando-se os conjuntos complementares, isso fica $\sigma(uv)\cap\{0\}^{\mathrm{c}} = \sigma(vu)\cap\{0\}^{\mathrm{c}}$, ou seja, $\sigma(uv)\setminus\{0\} = \sigma(vu)\setminus\{0\}$, que é o que desejávamos provar.

Note-se que não foram feitas hipóteses sobre a álgebra $\mathcal{A}$, exceto a de a mesma ser associativa e ter unidade.

Em termos dos operadores resolventes de uv e de vu, estabelecemos que para $\lambda\in\sigma(uv)\setminus\{0\} = \sigma(vu)\setminus\{0\}$ vale

$$R_\lambda(uv) \;=\; \frac{1}{\lambda}\Big(\mathbb{1} + uR_\lambda(vu)v\Big)\,. \tag{40.262}$$

Esta é a *terceira identidade do resolvente*.

No caso de álgebras de Banach, para $\lambda > \|uv\|$, podemos usar a série de Neumann no lado direito de (40.262), obtendo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}\Big(\mathbb{1} + u\big(\lambda\mathbb{1}-vu\big)^{-1}v\Big) \;&=\; \frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{1} + \lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^n}u(vu)^nv\right) \;=\; \frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{n+1}}(uv)^{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^n}(uv)^n\right) \;=\; \frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{1}-\lambda^{-1}uv\right)^{-1} \;=\; (\lambda\mathbb{1}-uv)^{-1} \;=\; R_\lambda(uv)\,,
\end{aligned}$$

confirmando a igualdade em (40.262). ✣

Apêndices

40.A Prova do Teorema 40.19

A função complexa $f(z) = \sqrt{1-z}$ é analítica no disco unitário aberto $D_1 = \{z \in \mathbb{C}|\ |z| < 1\}$ e tem nesse domínio uma série de Taylor absolutamente convergente dada por

$$f(z) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

onde

$$c_0 \ = \ 1, \qquad c_1 \ = \ -\frac{1}{2}, \qquad \text{e} \qquad c_n \ = \ -\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \ , \ \ n \geq 1 \ .$$

É bastante claro que $|c_n| \leq 1$ para todo n (mostre isso!). Em verdade, a série de Taylor de $f(z)$ converge absolutamente no disco unitário fechado $\overline{D_1} = \{z \in \mathbb{C}|\ |z| \leq 1\}$, ou seja, também para $|z| = 1$. Para ver isso, notemos que os coeficientes c_n são todos negativos, exceto quando $n = 0$. Assim, tem-se para todo $N \geq 0$,

$$\sum_{n=0}^{N} (|c_n| + c_n) \ = \ 2c_0 \ = \ 2 \ ,$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \ = \ 2 - \sum_{n=0}^{N} c_n \ .$$

Logo,

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \ = \ 2 - \sum_{n=0}^{N} c_n \ = \ 2 - \lim_{t\to 1_-} \sum_{n=0}^{N} c_n t^n \ \leq \ 2 - \lim_{t\to 1_-} \sqrt{1-t} \ = \ 2 \ . \tag{40.A.1}$$

Acima, $\lim_{t\to 1_-}$ é o limite quando t aproxima-se de 1 pelos reais com valores menores que 1 (lembre-se que a série de Taylor de $f(z)$ não converge se $|z| > 1$). A desigualdade no meio de (40.A.1) deve-se ao fato de que, para $t \in [0,\ 1)$, a série de Taylor $\sum_{n=0}^{N} c_n t^n$ converge a $\sqrt{1-t}$ e é decrescente, pois os coeficientes c_n são todos negativos para $n \geq 1$, o que implica $\sum_{n=0}^{N} c_n t^n \geq \sqrt{1-t}$. O sinal "$-$" inverte o sentido da desigualdade para "$\leq$". Com isso, para $|z| \leq 1$,

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n||z|^n \ \leq \ \sum_{n=0}^{N} |c_n| \ \leq \ 2 \tag{40.A.2}$$

para todo N, provando[81] que a série de Taylor de $f(z)$ converge absolutamente para $|z| \leq 1$.

Note-se também que, como $f(z)^2 = 1 - z$, vale

$$1 - z \ = \ \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)^2 \ = \ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_n c_m z^{m+n} \ = \ \sum_{p=0}^{\infty} z^p \left(\sum_{\substack{m+n=p \\ m,\ n\geq 0}} c_n c_m\right)$$

$$= \ (c_0)^2 + 2c_0c_1 z + \sum_{p=2}^{\infty} z^p \left(\sum_{\substack{m+n=p \\ m,\ n\geq 0}} c_n c_m\right) \ = \ 1 - z + \sum_{p=2}^{\infty} z^p \left(\sum_{\substack{m+n=p \\ m,\ n\geq 0}} c_n c_m\right) \ , \tag{40.A.3}$$

o que nos leva a concluir, pela unicidade da série de Taylor, que

$$\sum_{\substack{m+n=p \\ m,\ n\geq 0}} c_n c_m \ = \ 0 \ , \qquad \text{para todo } p \geq 2 \ . \tag{40.A.4}$$

Usaremos essa identidade abaixo.

[81] Os argumentos acima foram extraídos de [412].

E. 40.53 *Exercício*. Justifique todas as passagens acima a partir do fato que a série de Taylor de f converge absolutamente para $|z| \leq 1$. ✣

Seja w um elemento da álgebra $\mathcal{B}$ tal que $\|w\| \leq \mathbb{1}$. Defina-se para $N \in \mathbb{N}$,

$$s_N \ = \ \sum_{n=0}^{N} c_n w^n \ ,$$

com a convenção que $w^0 = \mathbb{1}$. Vamos mostrar dois fatos sobre s_N: primeiro que os s_N formam uma sequência da Cauchy e segundo que essa sequência converge a um elemento y tal que $y^2 = \mathbb{1} - w$.

Mostremos que $\{s_N,\ N \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de Cauchy na álgebra $\mathcal{B}$. Seja $N < M$. Temos $s_M - s_N = \sum_{n=N+1}^{M} c_n w^n$. Logo,

$$\|s_M - s_N\| \ \leq \ \sum_{n=N+1}^{M} |c_n| \, \|w^n\| \ \leq \ \sum_{n=N+1}^{M} |c_n| \, \|w\|^n \ \leq \ \sum_{n=N+1}^{M} |c_n|$$

Por (40.A.2), as somas parciais $k_N = \sum_{n=0}^{N} |c_n|$ são limitadas superiormente e, por formarem uma sequência crescente, convergem, sendo portanto uma sequência de Cauchy. Assim $|k_M - k_N| = \sum_{n=N+1}^{M} |c_n|$ pode ser feito arbitrariamente pequeno para M e N grandes o suficiente. Isso prova que s_N, $N \in \mathbb{N}$, é também uma sequência de Cauchy na álgebra $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ é uma espaço de Banach, a completeza assegura que s_N converge a um elemento y da álgebra.

Mostremos agora que $y^2 = \mathbb{1} - w$. Isso é equivalente a mostrar que $\lim_{N\to\infty} (s_N)^2 = \mathbb{1} - w$ (por quê?). Agora

$$(s_N)^2 \ = \ \left(\sum_{n=0}^{N} c_n w^n\right)^2 \ = \ \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} c_n c_m w^{n+m} \ = \ \sum_{p=0}^{2N} w^p \left(\sum_{\substack{n+m=p \\ 0\leq n\leq N \\ 0\leq m\leq N}} c_n c_m\right) .$$

Para $N > 2$ podemos escrever

$$\sum_{p=0}^{2N} w^p \left(\sum_{\substack{n+m=p \\ 0\leq n\leq N \\ 0\leq m\leq N}} c_n c_m\right) \ = \ (c_0)^2\mathbb{1} + 2c_0c_1 w + \sum_{p=2}^{N} w^p \left(\sum_{\substack{n+m=p \\ 0\leq n\leq N \\ 0\leq m\leq N}} c_n c_m\right) + \sum_{p=N+1}^{2N} w^p \left(\sum_{\substack{n+m=p \\ 0\leq n\leq N \\ 0\leq m\leq N}} c_n c_m\right) .$$

Como $(c_0)^2\mathbb{1} + 2c_0c_1 w = \mathbb{1} - w$, segue que

$$(s_N)^2 - (\mathbb{1} - w) \ = \ \sum_{p=2}^{N} w^p \left(\sum_{\substack{n+m=p \\ 0\leq n\leq N \\ 0\leq m\leq N}} c_n c_m\right) + \sum_{p=N+1}^{2N} w^p \left(\sum_{\substack{n+m=p \\ 0\leq n\leq N \\ 0\leq m\leq N}} c_n c_m\right) .$$

Resta-nos provar que essas duas somas convergem a zero quando $N \to \infty$. Na verdade, a primeira soma é igual a zero, pois

$$\sum_{p=2}^{N} w^p \left(\sum_{\substack{n+m=p \\ 0\leq n\leq N \\ 0\leq m\leq N}} c_n c_m\right) \ = \ \sum_{p=2}^{N} w^p \left(\sum_{\substack{n+m=p \\ m,\ n\geq 0}} c_n c_m\right)$$

e, para $p \geq 2$ vimos em (40.A.4) que $\sum_{\substack{n+m=p \\ m,\ n\geq 0}} c_n c_m \ = \ 0$.

Com isso, temos apenas que

$$(s_N)^2 - (\mathbb{1} - w) \ = \ \sum_{p=N+1}^{2N} w^p \left(\sum_{\substack{n+m=p \\ 0\leq n\leq N \\ 0\leq m\leq N}} c_n c_m\right) .$$

Agora, para $p \geq 2$,

$$\sum_{\substack{n+m=p\\0\leq n\leq N\\0\leq m\leq N}} c_n c_m \;=\; \sum_{n=p-N}^{N} c_n c_{p-n} \;=\; \sum_{n=0}^{N} c_n c_{p-n} - \sum_{n=0}^{p-N-1} c_n c_{p-n} \;=\; -\sum_{n=0}^{p-N-1} c_n c_{p-n}\,,$$

já que $\sum_{n=0}^{N} c_n c_{p-n} = \sum_{m+n=p} c_n c_p = 0$. Portanto,

$$\|(s_N)^2 - (\mathbb{1}-w)\| \;\leq\; \sum_{p=N+1}^{2N} \|w\|^p \left| \sum_{\substack{n+m=p\\0\leq n\leq N\\0\leq m\leq N}} c_n\, c_m \right| \;\leq\; \sum_{p=N+1}^{2N} \left| \sum_{n=0}^{p-N-1} c_n c_{p-n} \right| \;\leq\; \sum_{p=N+1}^{2N} \sum_{n=0}^{p-N-1} |c_n|\,|c_{p-n}|\,. \tag{40.A.5}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\sum_{p=N+1}^{2N} \sum_{n=0}^{p-N-1} |c_n|\,|c_{p-n}| &\overset{q=p-N-1}{=} \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{q} |c_n|\,|c_{q-n+N+1}| \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{q=n}^{N-1} |c_n|\,|c_{q-n+N+1}| \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} |c_n| \left(\sum_{q=n}^{N-1} |c_{q-n+N+1}| \right) \\
&\overset{r=q-n+N+1}{=} \sum_{n=0}^{N-1} |c_n| \left(\sum_{r=N+1}^{2N-n} |c_r| \right) \\
&\leq \sum_{n=0}^{N-1} |c_n| \left(\sum_{r=N+1}^{2N} |c_r| \right) \;=\; \left(\sum_{n=0}^{N-1} |c_n| \right) \left(\sum_{r=N+1}^{2N} |c_r| \right) \\
&\overset{(40.A.2)}{\leq} 2 \sum_{r=N+1}^{2N} |c_r|\,.
\end{aligned} \tag{40.A.6}$$

E. 40.54 *Exercício*. Justifique todas as passagens acima. ✣

Assim,

$$\big\|(s_N)^2 - (\mathbb{1}-w)\big\| \;\leq\; 2 \sum_{r=N+1}^{2N} |c_r|\,. \tag{40.A.7}$$

Já vimos, porém, que $\sum_{r=N+1}^{2N} |c_r| \to 0$ quando $N \to \infty$, pois as somas parciais $k_N = \sum_{r=0}^{N} |c_r|$ formam um sequência de Cauchy. Portanto, o lado direito de (40.A.7) converge a zero quando $N \to \infty$, provando que $y^2 = \mathbb{1} - w$.

Se $\mathcal{B}$ for também uma álgebra de Banach-$*$ e w for autoadjunto, então $s_N^* = s_N$ para todo N, pois as constantes c_n são reais. Como a operação de involução $*$ é contínua na norma, temos que $y^* = (\lim_{N\to\infty} s_N)^* = (\lim_{N\to\infty} s_N^*) = \lim_{N\to\infty} s_N = y$, mostrando que y é igualmente autoadjunto. ■

40.B Um Lema Sobre Espaços Normados Devido a F. Riesz

Em diversos lugares fazemos uso do seguinte resultado muito útil, devido a F. Riesz[82]:

[82] Frigyes Riesz (1880–1956). A referência original é F. Riesz, "Über lineare Funktionalgleichungen", Acta Math. **41**, 71–98 (1918). Vide também [419], Sec. 98, Lemma 2.

Lema 40.23 (Lema de Riesz) *Seja Z um espaço normado e sejam X e Y dois subespaços de Z satisfazendo as seguintes condições:*

1. *X é um subespaço próprio de Y.*
2. *X é fechado.*

Então, para cada $D \in (0,\,1)$ existe $y \in Y$ com $\|y\| = 1$ tal que

$$\inf_{x\in X} \|y - x\| \;\geq\; D\,,$$

ou seja, existe $y \in Y$ com $\|y\| = 1$ cuja distância a X é ao menos igual a D. □

Notas. Esse lema é frequentemente empregado em espaços normados que não sejam de Hilbert, para neles compensar a ausência de bases ortonormais como ingrediente de demonstrações. Vide Nota à página 2304. Em alguns textos o lema acima é enunciado tomando-se $Y = Z$, mas na versão acima fica claro que o subespaço Y, onde encontramos um vetor y com a propriedade desejada, não precisa ser fechado. O Lema 40.23 não deve ser confundido com não menos importante "Teorema da Representação de Riesz", Teorema 39.4 , página 2134, que por vezes também é denominado "Lema de Riesz". ♣

Prova do Lema 40.23. Como X é um subespaço próprio de Y podemos escolher um vetor não-nulo $v \in Y \setminus X$. Afirmamos que a distância de v a X, ou seja, a grandeza $d := \inf_{x\in X} \|v - x\|$, é não-nula. De fato, se valesse $d = 0$ poderíamos encontrar em X uma sequência x_n, $n \in \mathbb{N}$, tal que $\|v - x_n\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Mas isso diria-nos que v é um elemento do fecho $\overline{X}$ de X (pela Proposição 27.11, página 1440). Por hipótese $\overline{X} = X$ e, portanto, concluiríamos que $v \in X$ contradizendo o fato que $v \in Y \setminus X$. Portanto, $d > 0$.

Pela definição de ínfimo, existe $x_0 \in X$ tal que $d \leq \|v - x_0\| \leq d/D$ (lembrar aqui que $d/D > d$ pois tomamos $D \in (0,\,1)$). Afirmamos que o vetor $y := \|v - x_0\|^{-1}(v - x_0)$ possui as propriedades desejadas.

Em primeiro lugar, é evidente que $y \in Y$, pois $v - x_0 \in Y$, dado que $v \in Y$ e $x_0 \in X$, sendo X um subespaço de Y. Em segundo lugar, é evidente que $\|y\| = 1$. Por fim, temos que para $x \in X$, arbitrário, vale

$$\|y - x\| \;=\; \left\| \frac{1}{\|v - x_0\|}(v - x_0) - x \right\| \;=\; \frac{\Big\|v - \big(x_0 + \|v - x_0\|x\big)\Big\|}{\|v - x_0\|} \;\geq\; \frac{d}{\|v - x_0\|} \;\geq\; \frac{d}{d/D} \;=\; D\,,$$

sendo que na primeira desigualdade usamos o fato que $x_0 + \|v - x_0\|x \in X$ e na segunda desigualdade usamos o fato que $\|v - x_0\| \leq d/D$. Logo, estabelecemos que $\inf_{x\in X} \|y - x\| \geq D$, como desejávamos. ■