Capítulo 41
Noções Básicas Sobre Espaços de Hilbert

Sumário

41.1 Aspectos Topológicos Básicos de Espaços de Hilbert . . . 2314
41.2 Aspectos Geométricos Básicos de Espaços de Hilbert . . . 2316
41.2.1 Fechos e Complementos Ortogonais. Somas Diretas de Subespaços Fechados . . . 2319
41.2.2 Funcionais Lineares e o Dual Topológico de um Espaço de Hilbert . . . 2322
41.2.2.1 O Teorema da Representação de Riesz . . . 2323
41.2.3 Conjuntos Ortonormais Completos em Espaços de Hilbert . . . 2325
41.2.4 Conjuntos Totais . . . 2336
41.2.4.1 Um Exemplo no Espaço $L^2(\mathbb{R},\ dx)$ . . . 2336
41.3 Somas Diretas e Produtos Tensoriais de Espaços de Hilbert. Espaços de Fock . . . 2340
41.3.1 Somas Diretas de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert . . . 2340
41.3.2 Somas Diretas de uma Coleção Contável de Espaços de Hilbert . . . 2341
41.3.3 Produtos Tensoriais de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert . . . 2345
41.3.4 Os Espaços de Fock . . . 2348
41.4 Coleções de Subespaços Fechados como Reticulados Ortomodulares . . . 2350
41.5 Exercícios Adicionais . . . 2353
APÊNDICES . . . 2354
41.A Um Exemplo: os Sistemas de Rademacher e de Walsh . . . 2354
41.B Exemplo de Subespaços Fechados Cuja Soma não é Fechada . . . 2356

Um espaço vetorial $\mathcal{H}$ sobre o corpo dos complexos e dotado de um produto escalar $u,\ v \in \mathcal{H} \mapsto \langle u,\ v\rangle \in \mathbb{C}$ é dito ser um *espaço de Hilbert*[1] se for completo em relação à métrica d definida por esse produto escalar:

$$d(u,\ v)\ =\ \|u-v\|\ =\ \sqrt{\langle u-v,\ u-v\rangle}\ ,\qquad u,\ v \in \mathcal{H}\ . \tag{41.1}$$

Advertimos o estudante que dentre as propriedades definidoras de espaços de Hilbert destaca-se não apenas a existência de um produto escalar, mas também a propriedade de completeza, sem a qual muitas propriedades geométricas fundamentais desses espaços não seriam válidas, como o Teorema do Melhor Aproximante e o Teorema da Decomposição Ortogonal. Vide adiante.

As noções de espaços de Banach e de Hilbert foram introduzidas na Seção 25.5, página 1464. Sobre a origem da noção abstrata de Espaço de Hilbert, vide nota histórica à página 1465.

Espaços de Hilbert desempenham um papel fundamental em toda a Física Quântica[2] e em várias áreas da Matemática. Historicamente sua importância na Física Quântica foi apontada por diversos autores, mas foi especialmente von Neumann[3] quem mais claramente destacou sua relevância para a própria interpretação probabilística daquelas teorias físicas[4]. Exemplos de espaços de Hilbert são os espaços de dimensão finita $\mathbb{C}^n$, o espaço ℓ_2, das sequências de quadrado somável, estudado na Seção 25.5.1, página 1466, e os espaços $L^2(M,\ d\mu)$, das funções de quadrado integrável em relação a uma medida μ definida em um espaço mensurável M. Esses espaços foram estudados na Seção 32.4, página 1695.

Nas primeiras seções deste capítulo estudamos aspectos topológicos e geométricos gerais de espaços de Hilbert, chegando à importante noção de *conjunto ortonormal completo* (ou *base ortogonal completa*). Na Seção 41.2.2, página 2322, somos apresentados ao importante Teorema da Representação de Riesz, Teorema 41.4, página 2324, que afirma que todo

[1] David Hilbert (1862–1943).
[2] Há um dito corrente (e anônimo) que afirma que a Mecânica Quântica é uma agradável pretexto para o estudo dos espaços de Hilbert...
[3] John von Neumann (1903–1957).
[4] Nota histórica. Dois dos trabalhos seminais de von Neumann a respeito são: J. von Neumann, "Über die Grundlagen der Quantenmechanik", Mathematische Annalen, **98**, 1–30 (1927) e J. von Neumann, "Allgemeine Eigenwerttheorie Hermiteschen Funktionaloperatoren", Mathematische Annalen, **102**, 49–131 (1929). Vide também o livro clássico [401].

espaço de Hilbert pode ser identificado com seu dual topológico, ou seja, com o conjunto de seus funcionais lineares e contínuos. A Seção 41.3, página 2340, desenvolve algumas construções que podem ser realizadas com espaços de Hilbert, tais como somas diretas e produtos tensoriais, e apresenta a construção do chamado espaço de Fock, também de relevância para a Física Quântica.

Para a leitura deste capítulo uma certa familiaridade com a noção de produto escalar e de norma é necessária, assim como é necessário conhecer a desigualdade de Cauchy-Schwarz. O conceito de produto escalar foi apresentado na Seção 3.1.3, página 272, e o conceito de norma foi introduzido na Seção 3.2, página 276. A desigualdade de Cauchy-Schwarz foi demonstrada com toda generalidade (para formas sesquilineares positivas) no Teorema 3.1, página 270, mas para facilitar o leitor, apresentamos agora uma demonstração mais simples e rápida, específica para produtos escalares.

• A desigualdade de Cauchy-Schwarz revisitada

A importante desigualdade de Cauchy[5]-Schwarz[6] é a afirmação que para quaisquer $u,\ v \in \mathcal{H}$ tem-se

$$\big|\langle u,\ v\rangle\big|\ \le\ \|u\|\,\|v\|\ . \tag{41.2}$$

Sua primeira demonstração geral é devida a von Neumann (vide trabalhos citados na nota-de-rodapé 4, página 2312).

Para prová-la, observemos em primeiro lugar que a desigualdade acima é trivialmente válida nos casos em que $\langle u,\ v\rangle = 0$, ou em que $\|u\| = 0$, ou em que $\|v\| = 0$. Consideremos, então, que $\langle u,\ v\rangle \neq 0$, $\|u\| \neq 0$ e $\|v\| \neq 0$. Nesse caso, é evidente que, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ vale, pela positividade da norma,

$$0\ \le\ \left\|\frac{\alpha}{\|v\|}v - \frac{1}{\|u\|}u\right\|^2\ .$$

Expandindo-se o lado direito, isso fica

$$0\ \le\ \left\langle \frac{\alpha}{\|v\|}v - \frac{1}{\|u\|}u,\ \ \frac{\alpha}{\|v\|}v - \frac{1}{\|u\|}u\right\rangle\ =\ |\alpha|^2 + 1 - \frac{2}{\|u\|\,\|v\|}\mathrm{Re}\Big(\alpha\langle u,\ v\rangle\Big)\ , \tag{41.3}$$

ou seja,

$$2\mathrm{Re}\Big(\alpha\langle u,\ v\rangle\Big)\ \le\ \big(|\alpha|^2+1\big)\|u\|\,\|v\|\ . \tag{41.4}$$

Essa relação vale para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Se, em particular, escolhermos $\alpha = \big|\langle u,\ v\rangle\big|/\langle u,\ v\rangle$, teremos $|\alpha| = 1$ e (41.4) transforma-se na afirmação que $\big|\langle u,\ v\rangle\big| \le \|u\|\,\|v\|$, como queríamos provar.

O lema a seguir indica uma condição necessária e suficiente para que a igualdade seja válida na desigualdade de Cauchy-Schwarz (41.2). Essa condição, ainda que simples, é relevante em algumas situações.

Lema 41.1 *A igualdade $\big|\langle u,\ v\rangle\big| = \|u\|\,\|v\|$ é válida se e somente se existirem constantes $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$, ou seja, se e somente se u e v forem vetores linearmente dependentes.* □

Prova. Novamente podemos supor sem perda de generalidade que u e v são não nulos. Se $u = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ é evidente que tem-se a igualdade $\big|\langle u,\ v\rangle\big| = \|u\|\,\|v\|$. Para provar a recíproca, recordemos que (41.3) informa que

$$\left\|\frac{\alpha}{\|v\|}v - \frac{1}{\|u\|}u\right\|^2\ =\ |\alpha|^2 + 1 - \frac{2}{\|u\|\,\|v\|}\mathrm{Re}\Big(\alpha\langle u,\ v\rangle\Big) \tag{41.5}$$

para qualquer $\alpha \in \mathbb{C}$. Seja $\langle u,\ v\rangle = \big|\langle u,\ v\rangle\big|e^{i\gamma}$ a decomposição polar do número complexo $\langle u,\ v\rangle$ e escolhamos $\alpha = e^{-i\gamma}$. O lado direito de (41.5) ficará

$$2 - \frac{2}{\|u\|\,\|v\|}\big|\langle u,\ v\rangle\big|\ .$$

Se supormos que $\big|\langle u,\ v\rangle\big| = \|u\|\,\|v\|$ a última expressão anula-se e (41.5) informa que

$$\frac{e^{-i\gamma}}{\|v\|}v - \frac{1}{\|u\|}u\ =\ 0\ ,$$

[5] Augustin Louis Cauchy (1789–1857).
[6] Herman Amandus Schwarz (1843–1921).

ou seja, informa que u e v são linearmente dependentes. ■

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz segue também o seguinte resultado elementar, porém útil:

$$\|u\| \;=\; \sup\Big\{\big|\langle v,\ u\rangle\big|,\ v\in\mathcal{H},\ \|v\|\le 1\Big\}\,. \tag{41.6}$$

Para provar isso, notemos primeiramente que essa igualdade é trivialmente válida caso $u=0$, pois aí ambos os lados anulam-se. Consideremos $u\neq 0$. Por um lado,

$$\|u\| \;=\; \left|\left\langle \frac{u}{\|u\|},\ u\right\rangle\right| \;\le\; \sup\Big\{\big|\langle v,\ u\rangle\big|,\ v\in\mathcal{H},\ \|v\|\le 1\Big\}\,.$$

Por outro lado, para $v\in\mathcal{H}$ com $\|v\|\le 1$ tem-se por (41.2) que $\big|\langle v,\ u\rangle\big|\le\|u\|$, mostrando que $\sup\Big\{\big|\langle v,\ u\rangle\big|,\ v\in\mathcal{H},\ \|v\|=1\Big\}\le\|u\|$, completando a prova de (41.6).

41.1 Aspectos Topológicos Básicos de Espaços de Hilbert

Por definição, um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um espaço métrico com a métrica dada em (41.1) e, portanto, existe uma topologia métrica naturalmente definida em $\mathcal{H}$. É a essa topologia a que normalmente nos referiremos quando falarmos de convergência de sequências e de continuidade de funções em $\mathcal{H}$.

Assim, dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de vetores de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ converge a um vetor x de $\mathcal{H}$ se para todo $\epsilon>0$ existir $N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ tal que $\|x-x_i\|\le\epsilon$ para todo $i\ge N(\epsilon)$. Em outras palavras, $x=\lim_{n\to\infty}x_n$ se e somente se $\lim_{i\to\infty}\|x-x_i\|=0$.

O estudante deve ser advertido que há outras topologias de interesse no estudo dos espaços de Hilbert, como a topologia fraca induzida pelos produtos escalares. Nem todas essas topologias de interesse são métricas. No estudo introdutório que pretendemos nesse capítulo tais topologias não serão consideradas.

• Conjuntos fechados em espaços de Hilbert

Como lidaremos muito frequentemente com o fecho de subconjuntos de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e com propriedades de conjuntos fechados de $\mathcal{H}$ vale a pena lembrar nesse contexto as seguintes caracterizações de tais conceitos, válidas em espaços métricos gerais (vide página 1575):

1. O fecho $\overline{C}$ de um subconjunto C de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ coincide com o conjunto de todos os vetores de $\mathcal{H}$ que são pontos limite de sequências convergentes formada por elementos de C.
2. Um subconjunto F de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é fechado se toda sequência convergente formada por elementos de F convergir em $\mathcal{H}$ a um vetor que também é elemento de F.

• O fecho de um subespaço linear é também um subespaço linear

Vamos ilustrar os conceitos acima mostrando um simples resultado do qual faremos uso adiante. Seja E um subespaço de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Vamos mostrar que seu fecho $\overline{E}$ é também um subespaço de $\mathcal{H}$. Para isso devemos mostrar que se $x,\ y\in\overline{E}$, então qualquer vetor de $\mathcal{H}$ que seja da forma $z=\alpha x+\beta y$, com $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$, é também elemento de $\overline{E}$. Se x e $y\in\overline{E}$, então existem duas sequências x_i e y_i, $i\in\mathbb{N}$, de vetores de E tais que $x_i\to x$ e $y_i\to y$. Como E é um subespaço, todos os vetores $z_i=\alpha x_i+\beta y_i$ são também elementos de E. É fácil, porém, mostrar que $z_i\to z$. De fato

$$\|z-z_i\| \;=\; \big\|(\alpha x+\beta y)-(\alpha x_i+\beta y_i)\big\| \;=\; \big\|\alpha(x-x_i)+\beta(y-y_i)\big\| \;\le\; |\alpha|\,\big\|x-x_i\big\|+|\beta|\,\big\|y-y_i\big\|\,.$$

Agora, por hipótese, tanto $\|x-x_i\|$ quanto $\|y-y_i\|$ vão a zero quando $i\to\infty$, mostrando que $z_i\to z$. Isso mostra, então, que elementos como z são pontos limite de sequências de elementos de E (no caso $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$) e, portanto, pertencem também ao fecho de E que é, portanto, um subespaço de $\mathcal{H}$.

Subespaços de dimensão finita de um espaço de Hilbert são sempre fechados, como será visto na Proposição 41.6, página 2328. Porém, chamamos a atenção do leitor para o fato de que em espaços de Hilbert de dimensão infinita pode

haver subespaços (também de dimensão infinita) que não são fechados. Um exemplo instrutivo será visto no Exercício E. 41.3, página 2319.

• Uma propriedade da norma

Se a e b são dois vetores de um espaço vetorial normado V (como um espaço de Hilbert, por exemplo), então vale que

$$\Big|\,\|a-b\|-\|b\|\,\Big| \;\le\; \|a\|\,. \tag{41.7}$$

Para mostrar isso, notemos que a relação $\|a-b\|\le\|a\|+\|b\|$ implica $\|a\|\ge\|a-b\|-\|b\|$. Com a substituição $b\to a-b$, tiramos também que $\|a\|\ge\|b\|-\|a-b\|$. As duas desigualdades dizem que $\|a\|\ge|\,\|a-b\|-\|b\|\,|$, como queríamos provar.

• Continuidade da norma e do produto escalar

De acordo com a definição de continuidade de funções entre espaços métricos (vide discussão à página 1656) uma função $f:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$, de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ nos números complexos é contínua se para toda sequência convergente de vetores $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ a sequência de números $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ for também convergente e

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n) \;=\; f\Big(\lim_{n\to\infty}x_n\Big)\,.$$

Um exemplo banal de uma tal função contínua é a norma $f(x)=\|x\|$. De fato, se $x_n\to x$, isso significa que $\|x_i-x\|\to 0$. Logo, $\big|f(x)-f(x_i)\big|=\big|\|x\|-\|x_i\|\big|$. Mas, pela desigualdade (41.7), tomando-se $a=x-x_i$ e $b=-x_i$, concluímos

$$\big|f(x)-f(x_i)\big| \;\le\; \|x-x_i\|\,,$$

como o lado direito vai a zero quando $i\to\infty$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n) \;=\; f\Big(\lim_{n\to\infty}x_n\Big) \;=\; f(x)\,,\qquad \text{ou seja,}\qquad \lim_{n\to\infty}\|x_n\| \;=\; \Big\|\lim_{n\to\infty}x_n\Big\| \;=\; \|x\|\,,$$

demonstrando a continuidade da norma.

Há um outro exemplo igualmente banal, mas importante. Seja $\phi\in\mathcal{H}$ um vetor fixo e seja a função $f:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ dada por

$$f(x) \;=\; \langle\phi,\ x\rangle\,.$$

Que f é contínua pode ser demonstrado com uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 3.1, página 270), que diz que se $x_n\to x$, então

$$\big|f(x)-f(x_i)\big| \;=\; \Big|\big\langle\phi,(x-x_i)\big\rangle\Big| \;\le\; \|\phi\|\,\|x-x_i\|$$

e o lado direito vai a zero quando $i\to\infty$, demonstrando a continuidade. Analogamente, fixando-se $\phi\in\mathcal{H}$, a função $f(x)=\langle x,\ \phi\rangle$ é contínua.

E. 41.1 *Exercício*. Sejam $\{x_n\in\mathcal{H},\ n\in\mathbb{N}\}$ e $\{y_n\in\mathcal{H},\ n\in\mathbb{N}\}$ duas sequências de vetores em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ que convergem a vetores x e y de $\mathcal{H}$, respectivamente (ou seja, $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$ e $\lim_{n\to\infty}\|y_n-y\|=0$). Mostre que

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n,\ y_n\rangle \;=\; \langle x,\ y\rangle\,. \tag{41.8}$$

Sugestão. Mostre que podemos escrever

$$\langle x_n,\ y_n\rangle-\langle x,\ y\rangle \;=\; \langle x_n-x,\ y_n\rangle+\langle x,\ y_n-y\rangle\,.$$

Mostre também que se $\{z_n\in\mathcal{H},\ n\in\mathbb{N}\}$ é uma sequência convergente de vetores em $\mathcal{H}$, então existe uma constante $M\ge 0$ tal que $\|z_n\|\le M$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Use esses fatos, mais a desigualdade de Cauchy-Schwarz, para completar a prova. ✠

41.2 Aspectos Geométricos Básicos de Espaços de Hilbert

• **Conjuntos convexos**

Seja V um espaço vetorial (sobre os reais ou complexos). Uma combinação linear de dois vetores x e $y \in V$ que seja do tipo $\lambda x + (1-\lambda)y$ com $\lambda \in [0,\ 1]$ é dita ser uma *combinação linear convexa* de x e y. Um conjunto $A \subset V$ é dito ser um *conjunto convexo* se para todo $x,\ y \in A$ e todo $\lambda \in [0,\ 1]$ o vetor $\lambda x + (1-\lambda)y$ também for elemento de A.

Note-se que qualquer subespaço de V é também um conjunto convexo.

• **O Teorema do Melhor Aproximante**

O seguinte teorema é de importância fundamental na teoria dos espaços de Hilbert. O mesmo é um caso particular do Teorema 25.6, página 1481, válido para espaços normados uniformemente convexos, mas apresentamos abaixo uma demonstração específica para o caso de espaços de Hilbert, o que permite o uso simplificador da identidade do paralelogramo.

Teorema 41.1 (Teorema do Melhor Aproximante) *Seja A um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, para todo $x \in \mathcal{H}$ existe um vetor $y \in A$ tal que a distância $\|x-y\|$ entre x e y é igual a mínima distância possível entre x e A, ou seja,*

$$\|x-y\| \ = \ \inf_{y' \in A} \|x-y'\| \ .$$

Fora isso, esse vetor y é o único vetor em A com essa propriedade.

No caso particular em que $x=0$, concluímos disso que existe um vetor y em A, único, cuja norma é a menor possível dentre os elementos de A: $\|y\| = \inf_{y' \in A} \|y'\|$. □

Prova. A ideia da demonstração é construir um vetor y com a propriedade mencionada a partir de uma sequência de Cauchy de vetores de A, mostrar que essa sequência converge a um vetor de A, mostrar que esse vetor satisfaz a propriedade de mínima distância mencionada e, por fim, mostrar sua unicidade.

Seja $D \geq 0$ definida como

$$D \ = \ \inf_{y' \in A} \|x-y'\| \ .$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $y_n \in A$ um vetor com a propriedade que

$$\|x-y_n\|^2 \ < \ D^2 + \frac{1}{n} \ .$$

Notemos que tais vetores sempre existem. Se tal não fosse o caso, ou seja, se para algum n, digamos n_0, não existisse nenhum vetor y' em A tal que $\left\|x-y'\right\|^2 < D^2 + \frac{1}{n_0}$, isso significaria que para todo $y' \in A$ valeria que $\left\|x-y'\right\|^2 \geq D^2 + \frac{1}{n_0}$. Mas isso contraria a definição de D como o ínfimo de $\left\|x-y'\right\|$, $y' \in A$.

Vamos agora provar que toda sequência y_n como acima é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}$. Para tal, usaremos a identidade do paralelogramo (vide página 280) e o fato de A ser convexo.

A identidade do paralelogramo diz que para todos $a,\ b \in \mathcal{H}$ tem-se que

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 \ = \ 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2. \tag{41.9}$$

Adotemos, então, $a = x - y_n$ e $b = x - y_m$. Teremos que

$$\left\|2x - (y_m + y_n)\right\|^2 + \|y_m - y_n\|^2 \ = \ 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 \ .$$

Isso pode ser reescrito (verifique) como

$$\|y_m - y_n\|^2 \ = \ 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_m+y_n}{2}\right\|^2 \ .$$

Usando agora o fato que $\|x-y_n\|^2 < D^2 + \frac{1}{n}$ para todo n , ficamos com

$$\|y_m - y_n\|^2 \ \leq \ 4D^2 + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) - 4\left\|x - \frac{y_m+y_n}{2}\right\|^2 \ .$$

Notemos agora também que $\frac{y_m+y_n}{2} \in A$ pois o lado esquerdo é uma combinação linear convexa de elementos de A e A é um conjunto convexo. Assim, pela definição de D,

$$\left\|x - \frac{y_m+y_n}{2}\right\|^2 \ \geq \ D^2 \ .$$

Portanto, temos que

$$\|y_m - y_n\|^2 \ \leq \ 4D^2 + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) - 4D^2 \ = \ 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \ .$$

O lado direito pode ser feito arbitrariamente pequeno, tomando-se m e n ambos grandes o suficiente. Ora, isso diz-nos precisamente que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

Com essa informação, e lembrando que $\mathcal{H}$ é um espaço métrico completo, segue que y_n converge a um elemento $y \in \mathcal{H}$. Na verdade podemos dizer também que $y \in A$, pois fizemos a hipótese que A é fechado (lembre-se da caracterização de conjuntos fechados em espaços métricos da página 1575).

Uma vez encontrado esse $y \in A$, vamos mostrar que $\|x-y\| = D$. De fato, para todo n vale que

$$\|x-y\| \ = \ \left\|(x-y_n) - (y-y_n)\right\| \ \leq \ \|x-y_n\| + \|y-y_n\| \ < \ \sqrt{D^2 + \frac{1}{n}} + \|y-y_n\| \ .$$

Tomando-se $n \to \infty$, e usando o fato que y_n converge a y, concluímos que $\|x-y\| \leq D$ (verifique!). Por outro lado, é evidente pela definição de D que $\|x-y\| \geq D$, pois $y \in A$. Daí, segue que $\|x-y\| = D$, como queríamos provar.

Resta-nos demonstrar que esse y é o único elemento de A com essa propriedade. Para tal, vamos supor que haja outro $y' \in A$ com $\|x-y'\| = D$ e usemos novamente a identidade do paralelogramo (41.9), mas agora com $a = x-y$ e $b = x-y'$. Teremos que

$$\left\|2x - (y+y')\right\|^2 + \left\|y-y'\right\|^2 \ = \ 2\|x-y\|^2 + 2\left\|x-y'\right\|^2 \ = \ 4D^2 \ ,$$

ou seja,

$$\left\|y-y'\right\|^2 \ = \ 4D^2 - \left\|2x-(y+y')\right\|^2 \ = \ 4D^2 - 4\left\|x - \frac{y+y'}{2}\right\|^2 \ .$$

Como $\frac{y+y'}{2} \in A$, por ser uma combinação linear convexa, segue que

$$\left\|x - \frac{y+y'}{2}\right\|^2 \ \geq \ D^2$$

e, portanto,

$$\left\|y-y'\right\|^2 \ \leq \ 0 \ ,$$

o que só é possível se $y = y'$. ■

• **Complementos ortogonais**

Se E é um subconjunto de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, define-se seu *complemento ortogonal* $E^\perp$ como o conjunto de todos os vetores de $\mathcal{H}$ que são ortogonais a todos os vetores de E:

$$E^\perp \ = \ \left\{ y \in \mathcal{H} \middle| \ \langle y,\ x\rangle \ = \ 0 \text{ para todo } x \in E \right\} .$$

Temos a seguinte proposição:

Proposição 41.1 *O complemento ortogonal $E^\perp$ de um subconjunto E de $\mathcal{H}$ é um subespaço linear fechado de $\mathcal{H}$.* □

Prova. Que $E^\perp$ é um subespaço é fácil de se verificar pois se $x,\ y \in E^\perp$, então, para quaisquer $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$,

$$\langle \alpha x + \beta y,\ z\rangle \ = \ \overline{\alpha}\langle x,\ z\rangle + \overline{\beta}\langle y,\ z\rangle \ = \ 0$$

para todo $z \in E$, o que mostra que $\alpha x + \beta y \in E^\perp$. Que $E^\perp$ é um conjunto fechado segue do seguinte argumento. Se x_n é uma sequência de elementos de $E^\perp$ que converge a um $x \in \mathcal{H}$, então, para todo $z \in E$ vale

$$\langle x,\ z\rangle \ = \ \Big\langle \lim_{n\to\infty} x_n,\ z\Big\rangle \ = \ \lim_{n\to\infty} \langle x_n,\ z\rangle \ = \ 0\ , \tag{41.10}$$

pois $\langle x_n,\ z\rangle = 0$ para todo n, já que $x_n \in E^\perp$. Isso prova que $x \in E^\perp$, que é assim, fechado. Na penúltima igualdade em (41.10) usamos a continuidade do produto escalar. ■

Faremos adiante uso do seguinte lema:

Lema 41.2 *Se A e B são dois conjuntos de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e $A \subset B$, então, $B^\perp \subset A^\perp$.* □

Prova. Por definição, se $y \in B^\perp$, y é ortogonal a todo elemento de B. Como A é subconjunto de B, y é também ortogonal a todo elemento de A, ou seja, $y \in A^\perp$. ■

E. 41.2 *Exercício elementar*. Mostre que se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert então $\mathcal{H}^\perp = \{0\}$ e $\{0\}^\perp = \mathcal{H}$. Aqui, $\{0\}$ denota o subespaço composto apenas pelo vetor nulo. ✠

• **O Teorema da Decomposição Ortogonal**

O *Teorema do Melhor Aproximante*, que apresentamos acima, tem uma consequência importante. Como todo subespaço linear de um espaço de Hilbert é convexo, segue que subespaços lineares fechados satisfazem as hipóteses do teorema. Assim, se $\mathcal{M}$ é um subespaço linear fechado de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ vale para todo $x \in \mathcal{H}$ que existe um $y \in \mathcal{M}$ único tal que

$$\|x - y\| \ = \ \inf_{y' \in \mathcal{M}} \|x - y'\|\ .$$

Usaremos esse fato para demonstrar o seguinte teorema, de importância central na teoria dos espaços de Hilbert:

Teorema 41.2 (Teorema da Decomposição Ortogonal) *Seja $\mathcal{M}$ um subespaço linear fechado de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, todo $x \in \mathcal{H}$ pode ser escrito de maneira única na forma $x = y + z$, com $y \in \mathcal{M}$ e $z \in \mathcal{M}^\perp$. O vetor y é tal que $\|x - y\| = \inf_{y' \in \mathcal{M}} \|x - y'\|$, ou seja, é o melhor aproximante de x em $\mathcal{M}$.* □

Prova. Vamos escolher y como o elemento de $\mathcal{M}$ tal que $\|x - y\| = \inf_{y' \in \mathcal{M}} \|x - y'\|$, cuja existência foi garantida pelo Teorema 41.1, página 2316. Se definirmos $z := x - y$, tudo que nos restaria fazer é provar que $z \in \mathcal{M}^\perp$ e que tais y e z são únicos. Vamos provar primeiro que $z \in \mathcal{M}^\perp$, o que equivale a provar que $\langle z,\ y'\rangle = 0$ para todo $y' \in \mathcal{M}$. Isso é feito indiretamente, observando primeiro que, pela definição de y, vale que

$$\|x - y\|^2 \ \le \ \|x - y - \lambda y'\|^2$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e todo $y' \in \mathcal{M}$, já que $y + \lambda y' \in \mathcal{M}$, pois $\mathcal{M}$ é um subespaço. Essa última relação diz, pela definição de z, que

$$\|z\|^2 \ \le \ \|z - \lambda y'\|^2$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Escrevendo o lado direito como $\langle z - \lambda y',\ z - \lambda y'\rangle$ e expandindo, teremos

$$\|z\|^2 \ \le \ \|z\|^2 - 2\mathrm{Re}\Big(\lambda\langle z,\ y'\rangle\Big) + |\lambda|^2\|y'\|^2\ ,$$

ou seja,

$$2\mathrm{Re}\big(\lambda\langle z,\ y'\rangle\big) \ \le \ |\lambda|^2\|y'\|^2\ . \tag{41.11}$$

Agora, como todo número complexo, $\langle z,\ y'\rangle$ é da forma $\langle z,\ y'\rangle = |\langle z,\ y'\rangle|e^{i\alpha}$, para algum α real. Como (41.11) vale para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, vale em particular para λ da forma $\lambda = te^{-i\alpha}$, onde escolhemos $t > 0$. Inserindo esse λ em (41.11), a mesma fica

$$2t\big|\langle z,\ y'\rangle\big| \ \le \ t^2\|y'\|^2\ ,$$

ou seja,

$$\big|\langle z,\ y'\rangle\big| \ \le \ \frac{t}{2}\|y'\|^2\ ,$$

desigualdade esta que vale para todo $t > 0$. Ora, isso só é possível se o lado esquerdo é nulo: $\big|\langle z,\ y'\rangle\big| = 0$. Como y' é um elemento arbitrário de $\mathcal{M}$, isso demonstra que $z \in \mathcal{M}^\perp$, como queríamos.

Demonstrar a unicidade da escolha de y e z é bem fácil. Suponha que também possamos escrever $x = y' + z'$ com $y' \in \mathcal{M}$ e $z' \in \mathcal{M}^\perp$. Teríamos $y + z = y' + z'$, ou seja, $y - y' = z' - z$. Agora, o lado esquerdo é um elemento de $\mathcal{M}$, enquanto que o lado direito é um elemento de $\mathcal{M}^\perp$ (por quê?). Porém, o único elemento que $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^\perp$ podem ter em comum é o vetor nulo (por quê?), o que implica $y = y'$ e $z = z'$. ■

41.2.1 Fechos e Complementos Ortogonais. Somas Diretas de Subespaços Fechados

Discutiremos nesta seção algumas propriedades de subespaços de espaços de Hilbert, incluindo a noção de soma direta de subespaços fechados.

• **Fechos e complementos ortogonais**

A proposição a seguir contém uma afirmação importante que será amplamente utilizada no que segue.

Proposição 41.2 *Seja $\overline{E}$ o fecho de um subespaço E de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, $\overline{E} = \big(E^\perp\big)^\perp$, o que,* en passant, *informa que $\overline{E}$ também é um subespaço linear de $\mathcal{H}$. Em particular, se E é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$, então $E = \big(E^\perp\big)^\perp$.* □

Prova. Notemos primeiramente que $E \subset \big(E^\perp\big)^\perp$, pois $\big(E^\perp\big)^\perp$ é o conjunto de todos os vetores perpendiculares a cada elemento de $E^\perp$ e todo elemento de E tem essa propriedade. Como $\big(E^\perp\big)^\perp$ é um conjunto fechado (pela Proposição 41.1, página 2317), segue que $\overline{E} \subset \big(E^\perp\big)^\perp$ pois, por definição, $\overline{E}$ é o menor fechado que contém E.

Vamos agora provar a relação oposta, ou seja, que $\overline{E} \supset \big(E^\perp\big)^\perp$. Para isso vamos mostrar que todo elemento de $\big(E^\perp\big)^\perp$ está no fecho de E. Seja $x \in \big(E^\perp\big)^\perp$. Como $\overline{E}$ é um subespaço linear fechado, a ele se aplica o Teorema de Decomposição Ortogonal e podemos afirmar que x pode ser escrito como $x = y + z$ com $y \in \overline{E}$ e $z \in \big(\overline{E}\big)^\perp$. Se provarmos que $z = 0$, teremos estabelecido que $x = y \in \overline{E}$, que é o que queremos. Para isso, notemos que

$$\langle x,\ z\rangle \ = \ \langle y,\ z\rangle + \|z\|^2\ .$$

Como $\langle y,\ z\rangle = 0$ (pois $y \in \overline{E}$ e $z \in (\overline{E})^\perp$), segue que $\|z\|^2 = \langle x,\ z\rangle$. Queremos agora provar que esse produto escalar é nulo, o que implica $z = 0$.

Como $E \subset \overline{E}$ segue pelo Lema 41.2, página 2318, que $\big(\overline{E}\big)^\perp \subset E^\perp$. Logo, $z \in E^\perp$. Como $x \in \big(E^\perp\big)^\perp$, segue imediatamente que x e z são perpendiculares, completando a prova. ■

E. 41.3 *Exercício*. Seja o espaço de Hilbert ℓ_2 das sequências de quadrado somável (vide Seção 25.5.1, página 1466), e seja $\mathfrak{d} \subset \ell_2$ o subconjunto definido em (25.42), página 1466, composto pelas sequências que possuam apenas um número finito de componentes não-nulas: $\mathfrak{d} := \Big\{a \equiv (a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots),\ \text{com } a_n \in \mathbb{C} \text{ e } \ a_n = 0,\ \text{exceto para um conjunto finito de } n\text{'s}\Big\}$.

1. Mostre que $\mathfrak{d}$ é um subespaço de ℓ_2 e que não é de dimensão finita.
2. Mostre que $\mathfrak{d}^\perp = \{0\}$, o subespaço de ℓ_2 composto apenas pelo vetor nulo.

3. Conclua do Exercício E. 41.2, página 2318, que $\left(\mathfrak{d}^{\perp}\right)^{\perp} = \ell_2$.

Logo, pela Proposição 41.2, página 2319, temos que $\overline{\mathfrak{d}} = \ell_2$. Como $\mathfrak{d}$ é um subconjunto próprio de ℓ_2, vemos que $\mathfrak{d}$ não é um subespaço fechado de ℓ_2. ✠

Se U e e V são subespaços de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então sua interseção $U \cap V$ é também um subespaço de $\mathcal{H}$, como é muito fácil constatar (combinações lineares de dois elementos de $U \cap V$ são elementos de U e de V e, portanto, de $U \cap V$). Note que a união $U \cup V$ não é necessariamente um subespaço!

E. 41.4 *Exercício simples.* Justifique essas observações. ✠

O lema a seguir contém um resultado elementar, mas frequentemente evocado:

Lema 41.3 *Se U e V são subespaços de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então*

$$(U \cup V)^{\perp} \;=\; U^{\perp} \cap V^{\perp} \,. \tag{41.12}$$

Sabemos que $U^{\perp} \cap V^{\perp}$ é um subespaço de $\mathcal{H}$ e, como $U^{\perp}$ e $V^{\perp}$ são subespaços fechados, sua intersecção também o é e concluimos que $(U \cup V)^{\perp}$ é também um subespaço fechado, mesmo se U ou V não o forem. □

Prova. Se $x \in U^{\perp} \cap V^{\perp}$ então, evidentemente, $x \in U^{\perp}$ e $x \in V^{\perp}$. Mas isso implica que $x \in (U \cup V)^{\perp}$, pois $U \cup V$ é composto por elementos de U ou de V. Assim, mostramos que $U^{\perp} \cap V^{\perp} \subset (U \cup V)^{\perp}$.

Por outro lado, se $y \in (U \cup V)^{\perp}$, então $y \in U^{\perp}$ e $y \in V^{\perp}$. Logo, $y \in U^{\perp} \cap V^{\perp}$e, portanto, estabelecemos que $(U \cup V)^{\perp} \subset U^{\perp} \cap V^{\perp}$. Isso completa a demonstração. ■

• Mais sobre subespaços de espaços de Hilbert. Somas diretas de subespaços fechados

Vamos agora apresentar mais algumas definições e propriedades de subespaços de espaços de Hilbert, incluindo subespaços fechados. Elas são relevantes em muitos desenvolvimentos, como na Física Quântica e, em particular, naquilo que veio a ser chamado de Lógica Quântica. A propriedade de associatividade da soma direta de subespaços fechados, estabelecida logo adiante, é relevante na discussão de um importante exemplo de reticulado ortocomplementado tratado na Seção 41.4, página 2350.

Se U e V são dois subespaços de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, definimos

$$U + V \;:=\; \big\{u + v,\; u \in U,\; v \in V\big\} \,. \tag{41.13}$$

É bastante claro que $U + V$, assim, definido, é também um subespaço de $\mathcal{H}$, dito ser a *soma dos subespaços U e V*. É claro também que vale $U + V = V + U$.

Se U e V forem subespaços fechados de $\mathcal{H}$ sua soma $U+V$ não é necessariamente um subespaço fechado. Um exemplo é exibido no Apêndice 41.B, página 2356. Definimos sua *soma direta* por

$$U \oplus V \;:=\; \overline{U + V} \,. \tag{41.14}$$

Dessa forma, vemos que $\oplus$, assim definida, é uma operação (*i.e.*, uma função binária) no conjunto dos subespaços fechados de $\mathcal{H}$, pois o lado direito de (41.14) é também um subespaço fechado de $\mathcal{H}$.

Note-se que, pelo comentado acima, vale a comutatividade da operação de soma direta de subespaços fechados:

$$U \oplus V = V \oplus U \,. \tag{41.15}$$

O subespaço nulo $0 \equiv \{0\} \subset \mathcal{H}$ é também fechado e é elementar constatar que se U é um subespaço fechado, vale igualmente

$$U \oplus 0 \;=\; 0 \oplus U \;=\; U \,. \tag{41.16}$$

Se U e V são dois subespaços (não necessariamente fechados) de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, sua intersecção $U \cap V$ é igualmente um subespaço de $\mathcal{H}$, como é elementar constatar. Se U e V forem subespaços fechados de $\mathcal{H}$, $U \cap V$ será igualmente um subespaço fechado de $\mathcal{H}$ (por ser a intersecção de dois conjuntos fechados).

O teorema a seguir relaciona somas diretas e insersecções de subespaços de um espaço de Hilbert e mostra que a operação de soma direta de subespaços fechados é associativa.

Teorema 41.3 *Se U e V são subespaços de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então*

$$U \cap V \;\subset\; \big(U^{\perp} + V^{\perp}\big)^{\perp} \;\subset\; \overline{U} \cap \overline{V} \,. \tag{41.17}$$

Se U e V são fechados, ou seja, se $\overline{U} = U$ e $\overline{V} = V$, então, por (41.17),

$$U \cap V \;=\; \big(U^{\perp} + V^{\perp}\big)^{\perp} \,. \tag{41.18}$$

Portanto, substituindo $U \to U^{\perp}$ e $V \to V^{\perp}$ nessa relação, temos

$$U^{\perp} \cap V^{\perp} \;=\; \Big(\overline{U} + \overline{V}\Big)^{\perp} \;=\; \big(U + V\big)^{\perp} \,, \tag{41.19}$$

válida para U e V fechados. Tomando-se o complemento ortogonal de ambos os lados, obtemos, também para U e V fechados,

$$\Big(U^{\perp} \cap V^{\perp}\Big)^{\perp} \;=\; \overline{U + V} \,, \tag{41.20}$$

ou seja,

$$U \oplus V \;=\; \Big(U^{\perp} \cap V^{\perp}\Big)^{\perp} \;\overset{(41.12)}{=}\; \big((U \cup V)^{\perp}\big)^{\perp} \,. \tag{41.21}$$

De (41.20) decorre também que se U, V e W são subespaços fechados, então

$$\overline{\overline{U + V} + W} \;=\; \overline{U + \overline{V + W}} \,, \tag{41.22}$$

ou seja,

$$(U \oplus V) \oplus W \;=\; U \oplus (V \oplus W) \,, \tag{41.23}$$

provando que a operação de soma direta de subespaços fechados de um espaço de Hilbert é associativa. □

Comentário. De (41.23) segue que o conjunto dos subespaços fechados de um espaço de Hilbert é um monóide[7] comutativo sob a operação de soma direta (o elemento neutro sendo o subespaço nulo: $\{0\}$. Vide (41.16)). Com isso, o conjunto dos subespaços fechados de um espaço de Hilbert pode ser feito um grupo com uso da construção de Grothendieck[8], Seção 2.6.1, página 246. Essa observação é o início da chamada K-teoria. ♣

Prova do Teorema 41.3. Precisamos apenas provar (41.17)-(41.20) e (41.22).

I. Prova de (41.17)-(41.20).

Sejam U e V subespaços de $\mathcal{H}$. Seja $w \in \big(U^{\perp} + V^{\perp}\big)^{\perp}$. Então, w é ortogonal a todo $U^{\perp}$ **e** a todo $V^{\perp}$ (ambos são subespaços de $U^{\perp} + V^{\perp}$). Assim, $w \in \big(U^{\perp}\big)^{\perp} \cap \big(V^{\perp}\big)^{\perp} = \overline{U} \cap \overline{V}$. Dessa forma, vemos que

$$\big(U^{\perp} + V^{\perp}\big)^{\perp} \;\subset\; \overline{U} \cap \overline{V} \,. \tag{41.24}$$

Por outro lado, seja $s \in U \cap V$. Se $x \in U^{\perp} + V^{\perp}$, arbitrário, então $x = u' + v'$ com $u' \in U^{\perp}$ e $v' \in V^{\perp}$. Disso segue que $\langle s,\, x\rangle = \langle s,\, u'\rangle + \langle s,\, v'\rangle$. Ambos os termos, porém, são nulos, pois $u' \in U^{\perp}$, mas $s \in U$ e pois $v' \in V^{\perp}$, mas $s \in V$. Concluímos que $s \in \big(U^{\perp} + V^{\perp}\big)^{\perp}$ e, consequentemente, estabecebemos que

$$U \cap V \;\subset\; \big(U^{\perp} + V^{\perp}\big)^{\perp} \,. \tag{41.25}$$

Temos assim, por (41.24) e (41.25),

$$U \cap V \;\subset\; \big(U^{\perp} + V^{\perp}\big)^{\perp} \;\subset\; \overline{U} \cap \overline{V} \,, \tag{41.26}$$

demonstrando (41.17).

[7] A noção de *monóide* é introduzida na Seção 2.1.3, página 127.
[8] Alexander Grothendieck (1928–2014).

Se U e V são fechados (*i.e.*, $\overline{U} = U$ e $\overline{V} = V$), (41.26) diz-nos que

$$U \cap V \;=\; \left(U^{\perp} + V^{\perp}\right)^{\perp} .$$

Tomando-se o complemento ortogonal disso, obtemos

$$(U \cap V)^{\perp} \;=\; \overline{U^{\perp} + V^{\perp}} .$$

Substituindo-se $U \to U^{\perp}$ e $V \to V^{\perp}$, extraímos disso

$$\left(U^{\perp} \cap V^{\perp}\right)^{\perp} \;=\; \overline{\overline{U} + \overline{V}} \;=\; \overline{U + V} ,$$

provando (41.20).

II. Prova de (41.22).

Sejam U, V e W subespaços fechados de $\mathcal{H}$. Seguindo as definições, temos

$$\begin{aligned}
(U \oplus V) \oplus W \;=\; \overline{\overline{U + V} + W} \;&\overset{(41.20)}{=}\; \left(\left(\overline{U + V}\right)^{\perp} \cap W^{\perp}\right)^{\perp} \\
&\overset{(41.20)}{=}\; \left(\left(U^{\perp} \cap V^{\perp}\right)^{\perp\perp} \cap W^{\perp}\right)^{\perp} \\
&=\; \left(\overline{U^{\perp} \cap V^{\perp}} \cap W^{\perp}\right)^{\perp} \\
&\overset{*}{=}\; \left(\left(U^{\perp} \cap V^{\perp}\right) \cap W^{\perp}\right)^{\perp} \\
&\overset{**}{=}\; \left(U^{\perp} \cap V^{\perp} \cap W^{\perp}\right)^{\perp} .
\end{aligned}$$

Na passagem indicada por $*$ usamos apenas o fato de $U^{\perp}$ e $V^{\perp}$ serem fechados (Proposição 41.1, página 2317), assim como sua intersecção. Na passagem indicada por $**$ usamos a associatividade da interseção de conjuntos.

Assim, estabelecemos que

$$(U \oplus V) \oplus W \;=\; \left(U^{\perp} \cap V^{\perp} \cap W^{\perp}\right)^{\perp} \tag{41.27}$$

Como $(U \oplus V) \oplus W = W \oplus (U \oplus V)$, temos também $W \oplus (U \oplus V) = \left(U^{\perp} \cap V^{\perp} \cap W^{\perp}\right)^{\perp}$. Se nessa igualdade procedermos as substituições $W \to U$, $U \to V$ e $V \to W$, obtemos

$$U \oplus (V \oplus W) \;=\; \left(V^{\perp} \cap W^{\perp} \cap U^{\perp}\right)^{\perp} \overset{\text{assoc.}}{=} \left(U^{\perp} \cap V^{\perp} \cap W^{\perp}\right)^{\perp} \overset{(41.27)}{=} (U \oplus V) \oplus W ,$$

completando a prova da associatividade da operação $\oplus$ no conjunto dos subespaços fechados de $\mathcal{H}$. ■

41.2.2 Funcionais Lineares e o Dual Topológico de um Espaço de Hilbert

• **Funcionais lineares**

Um funcional linear l definido em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é uma função cujo domínio é um subespaço vetorial $\mathcal{E}$ de $\mathcal{H}$ assumindo valores complexos, $l : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$, e de tal forma que para todo $x,\ y \in \mathcal{E}$ e todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ tem-se

$$l(\alpha x + \beta y) \;=\; \alpha l(x) + \beta l(y) .$$

• **Funcionais lineares contínuos**

De grande importância são os funcionais lineares contínuos definidos em $\mathcal{H}$. Estes são funcionais lineares com domínio igual a $\mathcal{H}$ e tais que se $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de vetores que converge a $x \in \mathcal{H}$, então vale

$$\lim_{n \to \infty} l(x_n) \;=\; l\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) \;=\; l(x) .$$

Se l e l' são funcionais lineares sobre $\mathcal{H}$ definimos para $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ um funcional linear $\alpha l + \beta l'$ como sendo o funcional linear que a cada $x \in \mathcal{H}$ associa o número $\alpha l(x) + \beta l'(x)$. É elementar mostrar que o funcional $\alpha l + \beta l'$ é também contínuo. O conjunto de todos os funcionais lineares contínuos de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é também, portanto, um espaço vetorial que denotaremos por $\mathcal{H}^*$. O espaço $\mathcal{H}^*$ é denominado o *dual topológico* de $\mathcal{H}$.

• **Funcionais lineares limitados**

Um funcional linear l sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é dito ser limitado se existir uma constante $M \geq 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{H}$ vale

$$|l(x)| \;\leq\; M \, \|x\| .$$

A seguinte proposição mostra que os conceitos de funcional linear contínuo e de funcional linear limitado são idênticos.

Proposição 41.3 *Em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ um funcional linear é contínuo se e somente se for um funcional linear limitado.* □

Prova. Se l é um funcional linear limitado e se $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de vetores que converge a $x \in \mathcal{H}$, então

$$|l(x) - l(x_j)| \;=\; |l(x - x_j)| \;\leq\; M \|x - x_j\|$$

e o lado direito vai a zero quando $j \to \infty$, provando que l é contínuo.

Suponhamos reciprocamente que l é um funcional linear contínuo. Então, para um $\epsilon > 0$ fixo existe $\delta > 0$ tal que $|l(v)| \leq \epsilon$ para todo vetor v com $\|v\| \leq \delta$. Seja u um vetor não-nulo qualquer de $\mathcal{H}$. Então,

$$v \;=\; \delta \frac{u}{\|u\|}$$

é tal que $\|v\| = \delta$. Logo, como l é linear, vale que

$$\left| \frac{\delta}{\|u\|} l(u) \right| \;=\; \left| l\left(\delta \frac{u}{\|u\|}\right) \right| \;\leq\; \epsilon .$$

Assim,

$$|l(u)| \;\leq\; \frac{\epsilon}{\delta} \, \|u\| ,$$

provando que l é limitado (podemos adotar $M = \epsilon/\delta$). ■

Mencionamos que a Proposição 41.3 pode ser generalizada: uma aplicação linear entre dois espaços normados é contínua se e somente se for limitada (Proposição 42.1, página 2361).

41.2.2.1 O Teorema da Representação de Riesz

Um exemplo de funcional linear contínuo é o seguinte. Seja $\phi \in \mathcal{H}$ um vetor fixado. Defina-se então,

$$l_{\phi}(x) \;:=\; \langle \phi,\ x \rangle , \qquad \forall x \in \mathcal{H} .$$

É evidente que l_{ϕ} é um funcional linear e que l_{ϕ} é contínuo, pela continuidade do produto escalar (vide página 2315).

Esse exemplo não foi colocado aqui apenas como ilustração, pois demonstraremos agora que todo funcional linear contínuo em um espaço de Hilbert é da forma $l(x) = \langle \phi,\ x \rangle$ para algum ϕ de $\mathcal{H}$. Esse resultado, conhecido como

Teorema da Representação de Riesz, ou simplesmente como *Lema de Riesz*[9], é um dos resultados fundamentais da teoria dos espaços de Hilbert e do mesmo muitas consequências serão extraídas, especialmente na teoria de operadores lineares em espaços de Hilbert. O Teorema da Representação de Riesz foi originalmente obtido em 1907 por Riesz[10] e, independentemente, por Fréchet[11]. Vide [449] para as referências originais e para uma demonstração distinta da que apresentamos abaixo.

Vamos a seu enunciado e demonstração.

Teorema 41.4 (Teorema da Representação de Riesz) *Seja l um funcional linear contínuo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, existe $\phi \in \mathcal{H}$, único, tal que*

$$l(x) \;=\; \langle \phi,\, x\rangle, \qquad \forall x \in \mathcal{H}\,.$$

□

Prova. Seja l um funcional linear contínuo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Seja $N \subset \mathcal{H}$ o núcleo de l, ou seja, o conjunto de todos os vetores de $\mathcal{H}$ que são anulados por l:

$$N \;:=\; \Big\{ y \in \mathcal{H} |\;\; l(y) \;=\; 0 \Big\}\,.$$

Vamos mostrar que N é um subespaço linear fechado de $\mathcal{H}$. Que N é um subespaço é elementar pois, se $x,\, y \in N$, então $l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$. Que N é fechado pode ser visto pelo fato que podemos caracterizar N como a imagem inversa do número 0 de $\mathbb{C}$ por l: $N = l^{-1}(\{0\})$. O conjunto $\{0\}$, constituído por um único ponto, é fechado em $\mathbb{C}$ e funções contínuas são tais que sua imagem inversa mapeia fechados em fechados (vide página 1653). Logo, N é fechado.

E. 41.5 *Exercício*. Mostre também que N é fechado, demonstrando que se x_i é uma sequência de elementos de N que converge a $x \in \mathcal{H}$ então, pela continuidade, vale $l(x) = 0$, provando que $x \in N$. ✠

Caso N seja idêntico a $\mathcal{H}$, isso significa que $l(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ e o teorema estaria provado, adotando-se para tal $\phi = 0$.

Vamos supor que $N \neq \mathcal{H}$. Como N é fechado, pelo Teorema da Decomposição Ortogonal todo $x \in \mathcal{H}$ é da forma $x = y + z$ com $y \in N$ e $z \in N^\perp$. Como $N \neq \mathcal{H}$, devem existir elementos não-nulos em $N^\perp$, doutra forma teríamos $x = y \in N$ para todo $x \in \mathcal{H}$.[12]

Seja, então, z_0 um vetor não-nulo de $N^\perp$. É obvio que $l(z_0) \neq 0$. Para qualquer vetor $u \in \mathcal{H}$ vale que $l(z_0)u - l(u)z_0$ é um elemento de N, pois

$$l\Big(l(z_0)u - l(u)z_0\Big) \;=\; l(z_0)l(u) - l(u)l(z_0) \;=\; 0\,.$$

Assim, como $l(z_0)u - l(u)z_0$ é um elemento de N e z_0 é um elemento de $N^\perp$, ambos são ortogonais entre si, ou seja,

$$0 \;=\; \big\langle z_0,\, l(z_0)u - l(u)z_0\big\rangle\,.$$

Isso diz, porém, que

$$0 \;=\; l(z_0)\langle z_0,\, u\rangle - l(u)\|z_0\|^2\,,$$

ou seja,

$$l(u) \;=\; \frac{l(z_0)}{\|z_0\|^2}\,\langle z_0,\, u\rangle \;=\; \left\langle \frac{\overline{l(z_0)}}{\|z_0\|^2}\, z_0,\, u \right\rangle\,.$$

Definindo

$$\phi \;=\; \frac{\overline{l(z_0)}}{\|z_0\|^2}\, z_0\,,$$

[9] Essa nomenclatura é inadequada, por provocar confusão com o não menos importante Lema 42.26, página 2554, que também recebe o nome de Lema de Riesz.
[10] Frigyes Riesz (1880–1956).
[11] Maurice René Fréchet (1878–1973).
[12] Fazemos notar ao estudante que é somente neste parágrafo, interessantemente, que a condição de continuidade de l é usada, a saber, por meio da afirmativa que N é fechado e que, portanto, $N^\perp$ é formado por algo além do vetor nulo (caso l não seja identicamente zero). Note-se também o uso importante que foi feito do Teorema da Decomposição Ortogonal na demonstração.

fica provado que para todo $u \in \mathcal{H}$ vale $l(u) = \langle \phi,\, u\rangle$, como desejávamos estabelecer.

Por fim, para demonstrar que tal ϕ é único, suponhamos que exista um outro ϕ' tal que também valha $l(u) = \langle \phi',\, u\rangle$, para todo $u \in \mathcal{H}$. Teríamos, então, $\langle \phi,\, u\rangle = \langle \phi',\, u\rangle$, ou seja, $\langle \phi - \phi',\, u\rangle = 0$ para todo $u \in \mathcal{H}$. Como essa relação vale para todo $u \in \mathcal{H}$, vale também para $u = \phi - \phi'$. Logo, $0 = \langle \phi - \phi',\, \phi - \phi'\rangle = \|\phi - \phi'\|^2$ e, portanto, $\phi = \phi'$. ■

Incidentalmente, o Teorema da Representação de Riesz diz-nos que, fora o caso em que l é identicamente nulo, tem-se sempre que $N^\perp$ é um subespaço unidimensional de $\mathcal{H}$, a saber, o subespaço gerado pelo vetor ϕ.

41.2.3 Conjuntos Ortonormais Completos em Espaços de Hilbert

• **Conjuntos ortonormais**

Um conjunto E de vetores de um espaço de Hilbert é dito ser um *conjunto ortonormal* se a norma de todos os seus elementos for igual a 1 e se vetores distintos de E forem ortogonais entre si, ou seja, $\|u\| = 1,\ \forall u \in E$ e $\langle u,\, v\rangle = 0,\ \forall u,\, v \in E$ com $u \neq v$.

Vamos a alguns exemplos. No espaço de Hilbert $L^2\big([0,\, 2\pi],\, dx\big)$ o conjunto

$$\Big\{ e_n(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z} \Big\} \tag{41.28}$$

é um conjunto ortonormal de vetores. No espaço de Hilbert ℓ_2 das sequências de quadrado somável (vide Seção 25.5.1, página 1466), as sequências $e^n_m = \delta_{n,\,m}$ formam um conjunto ortonormal de vetores. Podemos representá-las como

$$e^n \;=\; \Big(\underbrace{0,\, \ldots,\, 0}_{n-1},\, 1,\, 0,\, \ldots \Big)\,, \quad n \geq 1\,. \tag{41.29}$$

No espaço de Hilbert $L^2\big([-1,\, 1],\, dx\big)$ um conjunto ortonormal é formado pelos *polinômios de Legendre*[13] (normalizados):

$$\Big\{ Q_n(x) \;=\; \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x), \quad n \in \mathbb{N} \Big\}\,,$$

pois, como é bem sabido[14], valem para os polinômios de Legendre $P_n(x)$, definidos por

$$P_n(x) \;=\; \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \;=\; \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

as relações

$$\int_{-1}^{1} \overline{P_n(x)} P_m(x)\, dx \;=\; \frac{2}{2n+1} \delta_{n,\,m}\,.$$

No espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R},\, dx)$, de particular importância para a Mecânica Quântica, há vários conjuntos ortonormais bem-conhecidos, como por exemplo

$$\Big\{ h_n(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x)\, e^{-x^2/2}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \Big\}\,,$$

onde H_n, $n \in \mathbb{N}_0$, são os polinômios de Hermite[15]

$$H_n(x) \;=\; (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\,,$$

[13] Adrien-Marie Legendre (1752–1833).
[14] Definição e propriedades dos polinômios de Legendre são estudadas nas Seções 15.1.2 e 16.2.1, páginas 844 e 916, respectivamente.
[15] Charles Hermite (1822–1901).

os quais satisfazem

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\, H_n(x)\, e^{-x^2}\, dx \;=\; 2^m m! \sqrt{\pi}\, \delta_{m,\,n}\ .$$

Para mais propriedades das funções mencionadas acima, vide Capítulo 16, página 904.

No Apêndice 41.A, página 2354, exibiremos um exemplo instrutivo de um conjunto infinito contável de funções ortonormais em um espaço de Hilbert separável que não forma, porém, uma base ortonormal completa: as funções de Rademacher. Nesse fato não há nada de especial: qualquer base ortonormal completa infinita tem um subconjunto também infinito e ortonormal, e que não é completo (ex: tome-se as funções e_n de (41.28) com n par). As funções de Rademacher, porém, possuem um interesse especial devido à sua relevância na teoria das aproximações de funções.

• O espaço das funções *almost*-periódicas. Uma digressão

Há espaços de Hilbert onde, em contraste com os exemplos acima, existem conjuntos ortonormais não-contáveis de vetores. Um exemplo importante é o espaço $AP(\mathbb{R})$, das funções ditas *almost*-periódicas em $\mathbb{R}$. Sem entrarmos em detalhes (para um tratamento completo, vide e.g. [293] e [107]), são denominadas *almost*-periódicas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ que podem ser escritas como limites uniformes de séries trigonométricas como

$$f(t) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\, e^{i\omega_n t}\ ,\ \ t\in\mathbb{R}\ , \tag{41.30}$$

onde f_n são constantes e $\{\omega_n,\ n\in\mathbb{Z}\}$ é um subconjunto contável arbitrário de $\mathbb{R}$. As constantes ω_n são denominadas *frequências* de f e as constantes f_n são denominadas *amplitudes*. Um caso particular importante é aquele no qual as frequências ω_n são da forma $\omega_n = n\omega$, para algum $\omega>0$, denominado *frequência fundamental*. Como o estudante facilmente reconhece, funções como

$$f(t) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\, e^{in\omega t}\ ,\ \ t\in\mathbb{R}\ ,$$

são periódicas de período $2\pi/\omega$ e a série do lado direito é a série de Fourier[16] de f. Se a série do lado direito converge uniformemente, f é contínua (justifique!). Assim, $AP(\mathbb{R})$ contém as funções contínuas e periódicas. O conjunto $AP(\mathbb{R})$ contém também funções não-periódicas. Por exemplo, funções como

$$f(t) \;=\; 2\cos(\omega_1 t) + 2\cos(\omega_2 t) \;=\; e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t} + e^{-i\omega_2 t}\ , \qquad \omega_1>0 \text{ e } \omega_2>0\ , \tag{41.31}$$

são elementos de $AP(\mathbb{R})$, mas são periódicas se e somente se a razão ω_2/ω_1 for um número racional. Se ω_2/ω_1 for racional da forma $\omega_2/\omega_1 = p/q$ com p e q inteiros e primos entre si, então a f dada acima é periódica de período $T = 2\pi p/\omega_2 = 2\pi q/\omega_1$.

E. 41.6 *Exercício*. Justifique todas as afirmações acima. Em particular, prove que a função f de (41.31) não é periódica se ω_2/ω_1 for irracional. ✠

Um exemplo de uma função de $AP(\mathbb{R})$ que não é periódica é

$$f(t) \;=\; 2\cos(\sqrt{2}t) + 2\cos(t) \;=\; e^{i\sqrt{2}t} + e^{-i\sqrt{2}t} + e^{it} + e^{-it}\ ,$$

que não é periódica, pois $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

Funções como a f de (41.31) não são periódicas se ω_2/ω_1 for irracional. Como, porém, todo número irracional pode ser aproximado por sequências de números racionais, uma tal f possui períodos aproximados (mas não exatos!). Essa é a origem da denominação de tais funções como *almost*-periódicas[17].

Foi demonstrado por H. Bohr (vide nota histórica, abaixo) que o conjunto $AP(\mathbb{R})$ gera um espaço de Hilbert com produto escalar dado por

$$\langle f,\ g\rangle_{AP} \;:=\; \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx\ . \tag{41.32}$$

[16] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).

[17] Em Português seria mais adequado dizer "quase-periódicas". Porém, essa nomenclatura é usada em várias línguas para designar um certo subconjunto de funções de $AP(\mathbb{R})$. Por isso optamos pelo barbarismo "*almost*-periódicas".

É um exercício fácil mostrar que o conjunto de funções

$$\big\{e_\alpha(x) \;=\; e^{i\alpha x},\quad \alpha\in\mathbb{R}\big\} \;\subset\; AP(\mathbb{R}) \tag{41.33}$$

é um conjunto ortonormal em relação ao produto escalar (41.32). Trata-se, claramente, de um conjunto não-contável.

E. 41.7 *Exercício*. Mostre que $\langle e_\alpha,\ e_\alpha\rangle_{AP} = 1$ para todo $\alpha\in\mathbb{R}$ e que $\langle e_\alpha,\ e_\beta\rangle_{AP} = 0$ para todos $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ com $\alpha\neq\beta$. ✠

*

Nota histórica. A teoria das funções *almost*-periódicas reais foi originalmente desenvolvida por H. Bohr[18], irmão do físico N. Bohr[19], em vários trabalhos publicados entre 1924 e 1926[20]. H. Bohr, porém, menciona dois predecessores: Bohl[21], em tese publicada em 1893, e Esclangon[22], em tese de 1904, os quais obtiveram resultados semelhantes sobre as funções ditas "quase-periódicas", um caso especial das funções *almost*-periódicas estudadas por H. Bohr[23].

Os trabalhos de H. Bohr podem ser encontrados na edição em três volumes [65] de suas obras completas. Bohr não conhecia previamente os trabalhos anteriores de Bohl e Esclangon sobre as funções quase-periódicas e menciona ter sido chamado à atenção sobre existência dos mesmos por Hadamard[24]. H. Bohr distinguiu-se também pelo desenvolvimento da teoria das funções *almost*-periódicas de uma variável complexa. O conceito foi posteriormente generalizado por von Neumann[25] para funções definidas em grupos. Para definições e alguns resultados nesse caso geral, vide [590]. ♣

• O Teorema de Pitágoras

Proposição 41.4 *Seja $E = \{e_1,\ \ldots,\ e_n\}$ um conjunto ortonormal finito de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e sejam $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$ números complexos. Então,*

$$\left\|\sum_{a=1}^{n} \lambda_a e_a\right\|^2 \;=\; \sum_{a=1}^{n} |\lambda_a|^2\ .$$

□

Prova.

$$\left\|\sum_{a=1}^{n} \lambda_a e_a\right\|^2 \;=\; \left\langle \sum_{a=1}^{n} \lambda_a e_a,\ \sum_{b=1}^{n} \lambda_b e_b\right\rangle \;=\; \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n} \overline{\lambda_a}\lambda_b \langle e_a,\ e_b\rangle \;=\; \sum_{a=1}^{n} |\lambda_a|^2\ ,$$

pois $\langle e_a,\ e_b\rangle = \delta_{a,\,b}$. ■

A proposição acima é denominada *Teorema de Pitágoras*[26] por ser uma óbvia generalização do bem-conhecido teorema da Geometria Euclidiana[27].

• Conjuntos ortonormais e séries convergentes

Exploraremos aqui uma consequência do Teorema de Pitágoras da qual faremos uso adiante. Trata-se de uma condição necessária e suficiente para que certas sequências formadas por combinações lineares de elementos de um conjunto ortonormal contável de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ sejam convergentes, sequências estas muito comummente encontradas na Mecânica Quântica e outras aplicações da teoria dos espaços de Hilbert.

[18] Harald August Bohr (1887–1951).

[19] Niels Henrik David Bohr (1885–1962).

[20] Os trabalhos pioneiros de H. Bohr são: H. Bohr. "Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I", Acta Mathematica **45**, (1924) 29–127. "Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. II", Acta Mathematica **46**, (1925) 101–214. "Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. III", Acta Mathematica **47**, (1926) 237–281.

[21] Piers Bohl (1865–1921).

[22] Ernest B. Esclangon (1876–1954).

[23] Os trabalhos pioneiros de Bohl e Esclangon são: P. Bohl. "Über die Darstellung von Funktionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit meheren einer Variabeln proportionalen Argumenten". Magisterdissertation, Dorpat (1893). P. Bohl. "Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie". Journal de Crelle **131**, (1906) 268–321. E. Esclangon. "Les Fonctions Quasi-Périodiques". Thèse, Paris (1904). E. Esclangon. "Nouvelles Recherches sur les Fonctions Quasi-Périodiques". Annales de l'Obser. de Bordeau, (1919).

[24] Jacques Salomon Hadamard (1865–1963).

[25] John von Neumann (1903–1957).

[26] Pitágoras de Samos (ci. 569 A.C. – ci. 475 A.C.).

[27] Euclides de Alexandria (ci. 325 A.C. – ci. 265 A.C.).

Proposição 41.5 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ um conjunto ortonormal contável em $\mathcal{H}$. Então, uma sequência de vetores $s_n = \sum_{a=1}^{n} \lambda_a e_a$, $n \in \mathbb{N}$, converge em $\mathcal{H}$ se e somente se $\sum_{a=1}^{\infty} |\lambda_a|^2 < \infty$.* □

Prova. Se s_n converge é uma sequência de Cauchy. Isso significa que para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que para todo m e n maiores que $N(\epsilon)$ tem-se $\|s_m - s_n\| \leq \epsilon$. Vamos supor sem perda de generalidade que $m < n$. Pelo Teorema de Pitágoras

$$\|s_m - s_n\|^2 \;=\; \left\| \sum_{a=m+1}^{n} \lambda_a e_a \right\|^2 \;=\; \sum_{a=m+1}^{n} |\lambda_a|^2 \;=\; |l_m - l_n| \;, \tag{41.34}$$

onde $l_n := \sum_{a=1}^{n} |\lambda_a|^2$. Concluímos que $|l_m - l_n| \leq \epsilon^2$ para todo m e n maiores que $N(\epsilon)$, ou seja, l_n é uma sequência de Cauchy de números reais e que, portanto, converge. Assim, $\sum_{a=1}^{\infty} |\lambda_a|^2 < \infty$.

Vamos provar a recíproca. Se $\sum_{a=1}^{\infty} |\lambda_a|^2 < \infty$, então l_n é limitada superiormente e, por ser uma sequência monotonamente crescente, converge (por quê?). Assim, l_n é uma sequência de Cauchy. A mesma identidade (41.34) nos diz, então, que s_n é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}$ e, portanto, converge a um vetor de $\mathcal{H}$. ■

Seguindo o costume, denotaremos o limite da sequência $s_n = \sum_{a=1}^{n} \lambda_a e_a$ por $\sum_{a=1}^{\infty} \lambda_a e_a$. Esse limite deve ser sempre entendido no sentido de convergência em norma no espaço de Hilbert em questão.

• **Subespaços gerados por conjuntos ortonormais finitos**

Seja $E = \{e_1,\ \ldots,\ e_n\}$ um conjunto ortonormal finito de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. É elementar verificar que o conjunto $\mathcal{E}$ de todos os vetores de $\mathcal{H}$ que sejam da forma $\sum_{a=1}^{n} \lambda_a e_a$ para λ_a complexos é um subespaço de $\mathcal{H}$, denominado *subespaço gerado por E*.

Recordemos que, pelo procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt discutido na Seção 3.3, página 286, todo subespaço de dimensão finita de $\mathcal{H}$ possui ao menos um conjunto ortonormal finito que o gera.

Proposição 41.6 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Se $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$ é um subespaço gerado por um conjunto ortonormal finito (ou seja, se $\mathcal{E}$ é um subespaço de dimensão finita), então $\mathcal{E}$ é um conjunto fechado.* □

Prova. Seja $\{x^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $\mathcal{E}$ que converge a $x \in \mathcal{H}$. Cada x^i é da forma

$$x^i \;=\; \sum_{a=1}^{n} \lambda_a^i e_a \;.$$

Vamos provar que para cada a a sequência $\{\lambda_a^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy de números complexos. Se $\{x^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é convergente, então é uma sequência de Cauchy. Logo, para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que $\|x^i - x^j\| \leq \epsilon$ para todos $i,\ j \geq N(\epsilon)$. Assim, para $i,\ j \geq N(\epsilon)$

$$\epsilon^2 \;\geq\; \|x^i - x^j\|^2 \;=\; \left\| \sum_{a=1}^{n} (\lambda_a^i - \lambda_a^j) e_a \right\|^2 \;=\; \sum_{a=1}^{n} |\lambda_a^i - \lambda_a^j|^2 \;.$$

Mas isso diz que para $i,\ j \geq N(\epsilon)$ vale para cada $a \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ que $|\lambda_a^i - \lambda_a^j| \leq \epsilon$. Assim, $\{\lambda_a^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy de números complexos e, portanto, cada uma dessas sequências converge a um número complexo λ_a. Seja

$$x' \;=\; \sum_{a=1}^{n} \lambda_a e_a \;.$$

Claramente x' é um elemento de $\mathcal{E}$. Vamos mostrar que, na verdade, $x' = x$. Para tal, basta mostrar que x^i converge a x' e lembrar a unicidade de pontos limite em espaços métricos, como um espaço de Hilbert (vide Corolário 31.1, página 1641). Mostrar que x^i converge a x' é trivial, pois

$$\|x^i - x'\|^2 \;=\; \left\| \sum_{a=1}^{n} (\lambda_a^i - \lambda_a) e_a \right\|^2 \;=\; \sum_{a=1}^{n} |\lambda_a^i - \lambda_a|^2$$

e como $\lambda_a^i \to \lambda_a$ o lado direito fica arbitrariamente pequeno quando $i \to \infty$. Logo, $x^i \to x'$ e, portanto, $x' = x$. ■

Vamos estudar algumas propriedades de conjuntos ortonormais finitos ou contáveis, a mais importante sendo as desigualdades de Bessel, à qual chegaremos logo adiante. O primeiro passo é a seguinte proposição útil.

Proposição 41.7 *Seja $E = \{e_1,\ \ldots,\ e_n\}$ um conjunto ortonormal finito de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e sejam $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$ números complexos. Então, para todo $x \in \mathcal{H}$ vale que*

$$\left\| x - \sum_{a=1}^{n} \lambda_a e_a \right\|^2 \;=\; \|x\|^2 + \sum_{a=1}^{n} \big|\lambda_a - \langle e_a,\ x\rangle\big|^2 - \sum_{a=1}^{n} \big|\langle e_a,\ x\rangle\big|^2 \;. \tag{41.35}$$

□

Prova. Expandindo o lado esquerdo de (41.35), temos

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{a=1}^{n} \lambda_a e_a \right\|^2 \;&=\; \left\langle x - \sum_{a=1}^{n} \lambda_a e_a,\ x - \sum_{b=1}^{n} \lambda_b e_b \right\rangle \\
&=\; \|x\|^2 - \sum_{b=1}^{n} \lambda_b \langle x,\ e_b\rangle - \sum_{a=1}^{n} \overline{\lambda_a} \langle e_a,\ x\rangle + \left\| \sum_{a=1}^{n} \lambda_a e_a \right\|^2 \\
&=\; \|x\|^2 + \sum_{a=1}^{n} \Big(-\lambda_a \overline{\langle e_a,\ x\rangle} - \overline{\lambda_a} \langle e_a,\ x\rangle + |\lambda_a|^2 \Big) \\
&=\; \|x\|^2 + \sum_{a=1}^{n} \Big(\big|\langle e_a,\ x\rangle\big|^2 - \lambda_a \overline{\langle e_a,\ x\rangle} - \overline{\lambda_a} \langle e_a,\ x\rangle + |\lambda_a|^2 \Big) - \sum_{a=1}^{n} \big|\langle e_a,\ x\rangle\big|^2 \\
&=\; \|x\|^2 + \sum_{a=1}^{n} \overline{\big(\lambda_a - \langle e_a,\ x\rangle\big)} \big(\lambda_a - \langle e_a,\ x\rangle\big) - \sum_{a=1}^{n} \big|\langle e_a,\ x\rangle\big|^2 \\
&=\; \|x\|^2 + \sum_{a=1}^{n} \big|\lambda_a - \langle e_a,\ x\rangle\big|^2 - \sum_{a=1}^{n} \big|\langle e_a,\ x\rangle\big|^2 \;,
\end{aligned} \tag{41.36}$$

que é o que desejávamos mostrar. ■

• **Melhores aproximantes em subespaços de dimensão finita**

A Proposição 41.7 tem consequências importantes que exploraremos a seguir. Uma delas é útil em problemas de aproximação em espaços de Hilbert e em problemas variacionais, de relevância, por exemplo na Mecânica Quântica.

Lembremos primeiramente que, dado um subespaço de dimensão finita de um espaço de Hilbert, é sempre possível encontrar nele, pelo procedimento de Gram-Schmidt (vide Seção 3.3, página 286), um conjunto ortonormal de vetores que gera esse subespaço. Temos então o seguinte:

Proposição 41.8 *Seja $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ um conjunto ortonormal finito de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e seja $x \in \mathcal{H}$. Então, o melhor aproximante de x no subespaço de dimensão finita $\mathcal{E}$ gerado pelos vetores $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é o vetor*

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k . \tag{41.37}$$

A distância $\|x-y\|$ entre x e seu melhor aproximante y satisfaz

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{a=1}^{n} \big|\langle e_a, x\rangle\big|^2 . \tag{41.38}$$

□

Prova. Já vimos acima (Proposição 41.6, página 2328) que o subespaço $\mathcal{E}$ gerado pelo conjunto ortonormal finito $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é fechado. Aplica-se, portanto, o Teorema do Melhor Aproximante (Teorema 41.1, página 2316) e podemos afirmar que para todo $x \in \mathcal{H}$ existe um e somente um $y \in \mathcal{E}$ tal que a distância $\|x-y\|$ é a menor possível. Porém, todo $y' \in \mathcal{E}$ é da forma $y' = \sum_{a=1}^{n} \lambda_a e_a$. Logo, por (41.35),

$$\|x-y'\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{a=1}^{n} \big|\lambda_a - \langle e_a, x\rangle\big|^2 - \sum_{a=1}^{n} \big|\langle e_a, x\rangle\big|^2 . \tag{41.39}$$

É evidente que o lado direito assume seu valor mínimo quando $\lambda_a = \langle e_a, x\rangle$ para todo a entre 1 e n. Assim, $y = \sum_{a=1}^{n} \langle e_a, x\rangle e_a$. Por (41.39), segue imediatamente disso a relação (41.38). ■

• **As desigualdades de Bessel**

Seja, como acima, $\mathcal{E}$ o subespaço de dimensão finita gerado pelo conjunto ortonormal finito $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Para $x \in \mathcal{H}$ o melhor aproximante em $\mathcal{E}$ é o vetor y dado em (41.37) e a distância $\|x-y\|$ satisfaz (41.38). Como $\|x-y\| \geq 0$, o lado direito de (41.38) é não-negativo e chegamos à seguinte conclusão:

Proposição 41.9 (Desigualdades de Bessel) *Para todo $x \in \mathcal{H}$ e para todo conjunto ortonormal finito $\{e_1, \ldots, e_n\}$ vale*

$$\sum_{a=1}^{n} \big|\langle e_a, x\rangle\big|^2 \leq \|x\|^2 . \tag{41.40}$$

Se $E = \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal contável, vale também para todo $x \in \mathcal{H}$,

$$\sum_{a=1}^{\infty} \big|\langle e_a, x\rangle\big|^2 \leq \|x\|^2 . \tag{41.41}$$

□

Note que (41.41) segue trivialmente do fato de (41.40) valer para todo n. As desigualdades (41.40) e (41.41) são conhecidas como *desigualdades de Bessel*[28]. Como veremos em breve, as mesmas desempenham um papel importante na teoria dos espaços de Hilbert.

• **Uma consequência da desigualdade de Bessel**

A desigualdade de Bessel, acima, possui uma consequência um tanto surpreendente, cuja importância será revelada quando discutirmos a noção de conjunto ortonormal completo, logo adiante (particularmente no Teorema 41.7, página 2332). Essa consequência é a afirmação expressa no seguinte teorema:

[28] Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846).

Teorema 41.5 *Seja B um conjunto ortonormal de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, para cada $y \in \mathcal{H}$, o conjunto de todos os $e_\alpha \in B$ tais que $\langle e_\alpha, y\rangle \neq 0$ é um conjunto contável.* □

Note-se que não está excluído que o conjunto ortonormal B, no enunciado acima, seja não-contável.

Prova. Vamos escrever $B = \{e_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$, onde Λ é algum conjunto não-vazio de índices, não necessariamente contável.

Comecemos lembrando que se $\{e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_m}\}$ é um subconjunto finito de B, então a desigualdade de Bessel (41.40) garante que para cada $y \in \mathcal{H}$ tem-se

$$\sum_{a=1}^{m} \big|\langle e_{\alpha_a}, y\rangle\big|^2 \leq \|y\|^2 . \tag{41.42}$$

É claro que para cada $y \in \mathcal{H}$ o conjunto B pode ser escrito como a seguinte união disjunta:

$$B = Z^y \cup B^y \tag{41.43}$$

com

$$Z^y := \big\{e_\alpha \in B \big| \ \langle e_\alpha, y\rangle = 0\big\} \qquad \text{e} \qquad B^y := \big\{e_\alpha \in B \big| \ \langle e_\alpha, y\rangle \neq 0\big\} .$$

É igualmente claro que podemos escrever B^y como

$$B^y = \bigcup_{n=1}^{\infty} B^y_n, \tag{41.44}$$

onde, para $n = 1, 2, \ldots$,

$$B^y_n = \left\{ e_\alpha \in B \,\middle|\, \big|\langle e_\alpha, y\rangle\big|^2 \in \left(\frac{\|y\|^2}{n+1}, \frac{\|y\|^2}{n}\right] \right\} .$$

E. 41.8 *Exercício*. Convença-se que (41.43) é verdadeira e que aquela união é disjunta, assim como a união em (41.44). ♣

Desejamos mostrar que B^y é um conjunto contável. A observação crucial é que cada B^y_n é um conjunto finito. De fato, podemos facilmente mostrar que cada B^y_n tem no máximo n elementos. Mostramos isso por contradição com a desigualdade de Bessel (41.42). Vamos supor que houvesse em B^y_n mais que n elementos e tomemos em B^y_n um conjunto $\{e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_{n+1}}\}$ com $n+1$ elementos. Como todos são elementos de B^y_n, tem-se que

$$|\langle e_{\alpha_a}, y\rangle|^2 > \frac{\|y\|^2}{n+1}$$

para todo $a = 1, \ldots, n+1$. Logo,

$$\sum_{a=1}^{n+1} |\langle e_{\alpha_a}, y\rangle|^2 > (n+1)\frac{\|y\|^2}{n+1} = \|y\|^2 ,$$

contrariando a desigualdade de Bessel (41.42). Assim, cada B^y_n pode ter no máximo n elementos.

Isso diz-nos que $B^y = \bigcup_{n=1}^{\infty} B^y_n$ é um conjunto contável (eventualmente até finito), completando a demonstração. ■

• **Conjuntos ortonormais completos**

Chegamos agora ao importante conceito de conjunto ortonormal completo em um espaço de Hilbert.

Definição. Um conjunto ortonormal B de vetores em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é dito ser um *conjunto ortonormal completo* em $\mathcal{H}$, ou uma *base ortonormal completa* em $\mathcal{H}$, se o único vetor de $\mathcal{H}$ que é ortogonal a todos os vetores de B for o vetor nulo. ♠

Notemos que B da definição acima não precisa ser necessariamente um conjunto finito ou contável. De fato, como veremos, há espaços de Hilbert que só admitem conjuntos ortonormais completos não-contáveis.

Conjuntos ortonormais completos desempenham um papel de grande importância no estudo de espaços de Hilbert e suas aplicações. Vamos estudá-los aqui. Primeiramente demonstremos que eles sempre existem.

Teorema 41.6 *Todo espaço de Hilbert possui pelo menos um conjunto ortonormal completo.* □

Prova. A demonstração faz uso do Lema de Kuratowski-Zorn (vide página 85). Seja $\mathfrak{E}$ a coleção de todos os conjuntos ortonormais de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Podemos introduzir em $\mathfrak{E}$ uma ordem parcial, denotada por "$\preceq$", dizendo que $E_1 \preceq E_2$ se $E_1 \subset E_2$, para dois conjuntos ortonormais E_1 e E_2.

Seja $\{E_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ um conjunto linearmente ordenado em $\mathfrak{E}$ pela relação de ordem acima. Isso significa que ou $E_\alpha \subset E_\beta$ ou $E_\beta \subset E_\alpha$ para quaisquer $\alpha,\ \beta \in \Lambda$. Esse conjunto $\{E_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ possui um majorante em $\mathfrak{E}$, a saber, o conjunto ortogonal obtido tomando-se a união de todos os E_α, ou seja, $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$.

E. 41.9 *Exercício*. Por que razão $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$ é também um conjunto ortonormal? ✣

Assim, concluímos que em $\mathfrak{E}$, com a relação de ordem dada acima, vale sempre que qualquer conjunto linearmente ordenado possui um majorante em $\mathfrak{E}$. Ora, essas são precisamente as hipóteses do Lema de Kuratowski-Zorn e, assim, concluímos que existe um elemento maximal B em $\mathfrak{E}$, ou seja, um conjunto ortonormal que não está contido propriamente em nenhum outro conjunto ortonormal.

Vamos, então, mostrar que esse B é um conjunto ortonormal completo. Para tal vamos supor o oposto, ou seja, vamos supor que haja $y \in \mathcal{H}$ não-nulo, com, digamos, $\|y\| = 1$, que seja ortogonal a todos os elementos de B. Claramente, y não pode pertencer a B, pois para isso teria que ser ortogonal a si mesmo, ou seja, $\|y\|^2 = \langle y,\ y\rangle = 0$. Se um tal y existisse, então $B_1 = B \cup \{y\}$ seria também um conjunto ortonormal (por quê?) que contém B como subconjunto próprio. Ora, isso contraria o fato que B é maximal. Logo, tal y não existe e B é um conjunto ortonormal completo. ■

O seguinte exercício ilustra a discussão acima.

E. 41.10 *Exercício*. Mostre que no espaço de Hilbert ℓ_2 das sequências de quadrado somável, o conjunto de vetores $E = \{e^n,\ n \in \mathbb{N}\}$, onde os vetores e^n são definidos em (41.29), forma um conjunto ortonormal completo de vetores. ✣

E. 41.11 *Exercício*. Um conjunto ortonormal em um espaço de Hilbert separável, mesmo que possuindo a cardinalidade de $\mathbb{N}$, não é necessariamente um conjunto ortonormal completo. Para cada $m \in \mathbb{Z}$ considere-se $\psi_m(x) = \chi_{[m,\ m+1)}(x)$, a função característica do intervalo $[m,\ m+1)$. Constate que $\{\psi_m,\ m \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormal em $L^2(\mathbb{R},\ dx)$. Constate, porém, que a função $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x)\chi_{[0,\ 1)}(x)$ é um elemento não-nulo de $L^2(\mathbb{R},\ dx)$ e é ortogonal a todos os vetores ψ_m. ✣

A importância dos conjuntos ortonormais completos reside no fato que todo vetor de um espaço de Hilbert pode ser escrito como limite de sequências de vetores obtidos por combinações lineares finitas de elementos de um conjunto ortonormal completo. Desse tema fundamental da teoria dos espaços de Hilbert trataremos agora.

• A decomposição de vetores em termos de conjuntos ortogonais completos

Chegamos agora ao resultado mais importante sobre conjuntos ortogonais completos e que é a verdadeira razão de ser de sua definição.

Teorema 41.7 *Seja y um vetor de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e B um conjunto ortonormal completo em $\mathcal{H}$. Como vimos acima (Teorema 41.5, página 2331), o subconjunto de B definido por $B^y = \{e_\alpha \in B|\ \langle e_\alpha,\ y\rangle \neq 0\}$ é um conjunto contável. Vamos escrever os elementos de B^y como e_{α_a} com $a \in \mathbb{N}$. Então, vale que*

$$y \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{a=1}^{n} \langle e_{\alpha_a},\ y\rangle\, e_{\alpha_a} \tag{41.45}$$

e que

$$\|y\|^2 \;=\; \sum_{a=1}^{\infty} \big|\langle e_{\alpha_a},\ y\rangle\big|^2 \,. \tag{41.46}$$

□

A expressão (41.46) pode ser interpretada como uma generalização do Teorema de Pitágoras para dimensão infinita.

Prova do Teorema 41.7. Pela desigualdade de Bessel (41.41) sabemos que $\displaystyle\sum_{a=1}^{\infty} \big|\langle e_{\alpha_a},\ y\rangle\big|^2 \leq \|y\|^2$. Pela Proposição 41.5, página 2328, isso diz-nos que a sequência de vetores $s_n = \displaystyle\sum_{a=1}^{n} \langle e_{\alpha_a},\ y\rangle\, e_{\alpha_a}$ converge em $\mathcal{H}$ a um vetor que chamaremos de y':

$$y' \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{a=1}^{n} \langle e_{\alpha_a},\ y\rangle\, e_{\alpha_a} \;=\; \sum_{a=1}^{\infty} \langle e_{\alpha_a},\ y\rangle\, e_{\alpha_a} \,.$$

Queremos provar que $y' = y$. Para tal, tomemos um elemento arbitrário e_α em B e calculemos o produto escalar $\langle e_\alpha,\ y - y'\rangle$. Há dois casos a considerar: **1.** $e_\alpha \in B^y$ e, portanto, $\alpha = \alpha_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e **2.** $e_\alpha \notin B^y$ e, portanto, $\langle e_\alpha,\ y\rangle = 0$ e $\alpha \neq \alpha_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

No caso **1** temos, usando a continuidade do produto escalar,

$$\langle e_\alpha,\ y'\rangle \;=\; \left\langle e_\alpha,\ \lim_{n\to\infty} \sum_{a=1}^{n} \langle e_{\alpha_a},\ y\rangle\, e_{\alpha_a} \right\rangle \;=\; \lim_{n\to\infty} \left\langle e_\alpha,\ \sum_{a=1}^{n} \langle e_{\alpha_a},\ y\rangle\, e_{\alpha_a} \right\rangle \;=\; \langle e_{\alpha_k},\ y\rangle \;=\; \langle e_\alpha,\ y\rangle \,. \tag{41.47}$$

Logo, $\langle e_\alpha,\ y - y'\rangle = \langle e_\alpha,\ y\rangle - \langle e_\alpha,\ y'\rangle \overset{(41.47)}{=} 0$.

No caso **2** temos também

$$\langle e_\alpha,\ y'\rangle \;=\; \left\langle e_\alpha,\ \lim_{n\to\infty} \sum_{a=1}^{n} \langle e_{\alpha_a},\ y\rangle\, e_{\alpha_a} \right\rangle \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{a=1}^{n} \langle e_{\alpha_a},\ y\rangle\, \langle e_\alpha,\ e_{\alpha_a}\rangle \;=\; 0 \,,$$

pois $\alpha \neq \alpha_k$ para todo k e, portanto, $\langle e_\alpha,\ e_{\alpha_a}\rangle = 0$. Logo, $\langle e_\alpha,\ y - y'\rangle = \langle e_\alpha,\ y\rangle - \langle e_\alpha,\ y'\rangle = 0 - 0 = 0$.

Em ambos os casos o resultado é o mesmo, ou seja, $\langle e_\alpha,\ y - y'\rangle = 0$ para todo $e_\alpha \in B$. Pela definição de B como conjunto ortonormal completo, o único vetor ortogonal a todos os elementos de B é o vetor nulo. Logo, $y = y'$.

Por (41.37), o vetor mais próximo de y no subespaço gerado por $\{e_{\alpha_1},\ \ldots,\ e_{\alpha_n}\}$ é $\displaystyle\sum_{a=1}^{n} \langle e_{\alpha_a},\ y\rangle e_{\alpha_a}$. Segue de (41.38) que

$$\left\| y - \sum_{a=1}^{n} \langle e_{\alpha_a},\ y\rangle e_{\alpha_a} \right\|^2 \;=\; \|y\|^2 - \sum_{a=1}^{n} \big|\langle e_{\alpha_a},\ y\rangle\big|^2 \,.$$

Tomando-se o limite $n \to \infty$ o lado esquerdo vai a zero, como vimos, e, portanto, $\|y\|^2 = \displaystyle\sum_{a=1}^{\infty} \big|\langle e_{\alpha_a},\ y\rangle\big|^2$. ■

É importante dirigir a atenção do estudante para o fato que na expressão $y = \displaystyle\sum_{a=1}^{\infty} \langle e_{\alpha_a},\ y\rangle\, e_{\alpha_a}$ a soma é realizada em elementos de B^y que, para cada y, é um conjunto contável (pelo Teorema 41.5, página 2331). Mas B^y depende de y e, assim, para y's diferentes comparecem conjuntos diferentes de vetores $e_\alpha \in B$ na soma. Isso é importante no caso de o conjunto ortonormal completo B ser não-contável. Se B for contável podemos fazer a soma sobre todos os elementos de B pois os elementos de Z^y não contribuem.

Apesar de termos demonstrado que todo espaço de Hilbert possui um conjunto ortonormal completo, demonstrar que um conjunto ortonormal B dado concretamente é um conjunto ortonormal completo pode ser um problema envolvente que requer um trabalho cuidadoso de análise. Tal é o caso, por exemplo, do conjunto ortonormal (41.28) do espaço de Hilbert $L^2([0,\ 2\pi])$. É bem sabido, e fácil de se verificar, que o conjunto (contável) de vetores $\{e_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}},\ n \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormal. Demonstrar que é completo, porém, envolve mais trabalho e requer uso do teorema do qual trataremos no próximo tópico abaixo, que discute caracterizações alternativas do conceito de conjunto ortonormal completo. Para a demonstração de completeza de alguns conjuntos ortonormais de funções especiais de interesse, incluindo o conjunto $\{e_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}},\ n \in \mathbb{Z}\}$ em $L^2([0,\ 2\pi])$, vide Capítulo 17, página 975.

• Conjuntos ortonormais completos e bases topológicas

Em um espaço vetorial V a *varredura linear* ("*linear span*") de um conjunto não-vazio $A \subset V$ é a coleção, denotada

por span (A), de todos os vetores de V que podem ser escritos como uma combinação linear finita de elementos de A:

$$\text{span }(A) \;=\; \Big\{ v \in V \Big|\; v = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}, \;\; \text{para } \lambda_i \in \mathbb{C} \text{ e } a_i \in A \Big\} \;. \tag{41.48}$$

É elementar constatar que para A não-vazio span (A) é um subespaço de V, em verdade, o menor subespaço vetorial de V que contém A, pois é também elementar constatar que se E é um subespaço linear de V tal que $A \subset E$, então span $(A) \subset E$ e, portanto, span (A) está contido na intersecção de todos os subespaços E com $A \subset E$ e como span (A) é um subespaço que também contém A, concluímos que span $(A) = \displaystyle\bigcap_{\substack{E \supset A \\ E \text{ subespaço}}} E$.

Em um espaço vetorial topológico V um conjunto $B \subset V$ é dito ser uma *base topológica* de V se seus subconjuntos finitos forem compostos somente por vetores linearmente independentes e se span (B) for um conjunto denso em V, ou seja, se seu fecho for V: $\overline{\text{span }(B)} = V$.

O teorema que demonstraremos a seguir mostra, entre outras coisas, que em um espaço de Hilbert um conjunto ortonormal B é uma base topológica se e somente se ele for um conjunto ortonormal completo.

Teorema 41.8 *Se $B = \{e_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ é um conjunto ortonormal em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então são equivalentes as seguintes afirmativas:*

1. *B é um conjunto ortonormal completo de $\mathcal{H}$.*
2. *B é uma base topológica de $\mathcal{H}$, ou seja, $\overline{\text{span }(B)} = \mathcal{H}$.*
3. *Para todo $y \in \mathcal{H}$ o conjunto $B^y = \big\{ e_\alpha \in B \big|\; \langle e_\alpha,\ y\rangle \neq 0 \big\}$ é contável e vale $\|y\|^2 = \displaystyle\sum_{e_\alpha \in B^y} \big|\langle e_\alpha,\ y\rangle\big|^2$.* □

Prova. Que **1** implica **2** e que **1** implica **3** já foi demonstrado acima (Teorema 41.7, página 2332). Resta demonstrar que **3** implica **1** e que **2** implica **1**.

Primeiramente, mostremos que **3** implica **1**. Isso é feito supondo que **3** vale e que **1** não vale e mostrando que isso leva a um absurdo. Se B não for um conjunto ortonormal completo, então existe um vetor $x \in \mathcal{H}$ não-nulo que é ortogonal a todo elemento de B, ou seja, $\langle e_\alpha,\ x\rangle = 0$ para todo $e_\alpha \in B$. Por **3**, isso implica que

$$\|x\|^2 \;=\; \sum_{e_\alpha \in B^x} \big|\langle e_\alpha,\ x\rangle\big|^2 \;=\; 0 \;,$$

uma contradição.

Por fim, mostremos que **2** implica **1**. Isso é feito supondo que **2** vale e que **1** não vale e mostrando que isso leva a um absurdo. Se B não é uma base ortonormal completa, então existe um vetor $x \in \mathcal{H}$ não-nulo que é ortogonal a todo elemento de B, ou seja, $\langle e_\alpha,\ x\rangle = 0$ para todo $e_\alpha \in B$. Então, o conjunto $\{x\}^\perp$ é um subespaço linear fechado que contém B e span (B) (por quê?). Como $\overline{\text{span }(B)}$ é, por definição, o menor fechado que contém span (B), vale também que $\overline{\text{span }(B)} \subset \{x\}^\perp$. Como $\{x\}^\perp$ é um subconjunto próprio de $\mathcal{H}$ (pois não contém x nem o subespaço gerado por x), concluímos que span (B) é um subconjunto próprio de $\mathcal{H}$, uma contradição com a hipótese que **2** é verdadeiro. ■

A equivalência provada acima entre bases topológicas e conjuntos ortonormais completos justifica o fato de conjuntos ortonormais completos serem também denominados *bases ortonormais completas*.

• Espaços de Hilbert separáveis

Recordemos duas noções introduzidas na Seção 28.4, página 1575.

Seja um espaço X dotado de uma topologia τ. Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é *denso* em X se o fecho de A for igual a X, ou seja, se não houver outro conjunto fechado que não X contendo A. Um espaço topológico X é dito ser *separável* se possuir um subconjunto denso contável.

Definimos acima a noção de varredura linear de um conjunto $A \subset \mathcal{H}$, que denotamos por span (A). Um conceito associado é o de *varredura linear por racionais* de um conjunto $A \subset \mathcal{H}$, que denotamos por $\text{span}_{\mathbb{Q}}(A)$: a coleção, de todos os vetores de $\mathcal{H}$ que podem ser escrito como uma combinação linear finita por racionais de elementos de A:

$$\text{span}_{\mathbb{Q}}(A) \;=\; \Big\{ v \in V \Big|\; v = r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}, \;\; \text{para } r_i \in \mathbb{Q}\mathbb{C} \text{ e } a_i \in A \Big\} \;,$$

onde $\mathbb{Q}\mathbb{C}$ denota o conjunto de todos os números complexos racionais, ou seja, de todos os números complexos cujas partes real e imaginária são racionais.

Como $\mathbb{Q}\mathbb{C}$ é denso em $\mathbb{C}$, é claro que todo elemento de span (A) pode ser aproximado (na topologia de $\mathcal{H}$) por elementos de $\text{span}_{\mathbb{Q}}(A)$. De fato, se $\{(r_j)_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de números em $\mathbb{Q}\mathbb{C}$ que aproxima $\lambda_j \in \mathbb{C}$, então $(r_1)_m a_1 + \cdots + (r_n)_m a_n$ aproxima $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ na norma de $\mathcal{H}$, pois

$$\begin{aligned}\Big\|\big((r_1)_m a_1 + \cdots + (r_n)_m a_n\big) - \big(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n\big)\Big\| \;&=\; \Big\|\big((r_1)_m - \lambda_1\big)a_1 + \cdots + \big((r_n)_m - \lambda_n\big)a_n\Big\| \\ &\leq\; \big|(r_1)_m - \lambda_1\big|\,\|a_1\| + \cdots + \big|(r_n)_m - \lambda_n\big|\,\|a_n\| \;,\end{aligned}$$

que converge a zero para $m \to \infty$. Isso significa que para todo $A \subset \mathcal{H}$ vale $\overline{\text{span}_{\mathbb{Q}}(A)} \supset \text{span }(A)$ e, consequentemente, $\overline{\text{span}_{\mathbb{Q}}(A)} \supset \overline{\text{span }(A)}$. No entanto, como $\text{span}_{\mathbb{Q}}(A) \subset \text{span }(A)$, vale também que $\overline{\text{span}_{\mathbb{Q}}(A)} \subset \overline{\text{span }(A)}$. Logo, $\overline{\text{span}_{\mathbb{Q}}(A)} = \overline{\text{span }(A)}$.

Assim, pelo Teorema 41.8, concluímos que $B \subset \mathcal{H}$ é uma base ortonormal completa se e somente se $\overline{\text{span}_{\mathbb{Q}}(B)} = \mathcal{H}$.

Se $A \subset \mathcal{H}$ for contável, é muito fácil ver que $\text{span}_{\mathbb{Q}}(A)$ é também contável (por ser uma união contável de conjuntos contáveis). Logo, se B for um conjunto ortonormal completo contável, o conjunto $\text{span}_{\mathbb{Q}}(B)$ é um conjunto contável denso em $\mathcal{H}$. Concluímos disso que $\mathcal{H}$ será um espaço topológico separável se possuir um conjunto ortonormal completo contável.

A recíproca é também verdadeira: se um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ for um espaço topológico separável, então todo conjunto ortonormal completo de $\mathcal{H}$ é contável. Para ver isso, vamos supor que $\mathcal{H}$ seja separável e seja $D \subset \mathcal{H}$ contável e denso em $\mathcal{H}$: $\overline{D} = \mathcal{H}$. Seja também B um conjunto ortonormal completo em $\mathcal{H}$. Notemos que

$$B_D \;:=\; \bigcup_{x \in D} B^x$$

é contável, por ser uma união contável de conjuntos contáveis (pois D é contável, assim como cada B^x, pelo Teorema 41.5, página 2331.). Pelo Teorema 41.7, página 2332, cada $x \in D$ é um elemento de $\overline{\text{span }(B^x)}$. Concluímos disso que $D \subset \overline{\text{span }(B_D)}$. Logo, como D é denso em $\mathcal{H}$, segue que $\mathcal{H} = \overline{\text{span }(B_D)}$. Agora, B_D é um conjunto ortonormal (por ser subconjunto de B). Logo, concluímos pelo Teorema 41.8 que B_D é um conjunto ortonormal completo.

Disso concluímos também que $B = B_D$, pois se B_D fosse um subconjunto próprio de B haveria $v \in B$, $v \neq 0$, que não pertence a B_D. Como B é um conjunto ortonormal, segue que v é ortogonal a todos os elementos de B_D. Isso contraria o fato provado que B_D é um conjunto ortonormal completo. Vimos, então, que todo conjunto ortonormal completo de um espaço de Hilbert separável deve ser contável.

Resumimos nossas conclusões na seguinte proposição:

Proposição 41.10 *Se um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ possui um conjunto ortonormal completo contável, então é um espaço topológico separável (ou seja, possui um subconjunto contável denso). Por outro lado, se um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ for separável, então todos os seus conjuntos ortonormais completos são contáveis.* □

O seguinte corolário é evidente:

Corolário 41.1 *Se um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ possui um conjunto ortonormal completo contável, então todos os demais conjuntos ortonormais completos de $\mathcal{H}$ são contáveis.* □

Nesse contexto, a seguinte observação é relevante:

Proposição 41.11 *Se um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ possui um conjunto ortonormal não-contável, então $\mathcal{H}$ não é separável.* □

Prova. Seja C um conjunto ortonormal não-contável de $\mathcal{H}$. Se C for um conjunto ortonormal completo não há o que provar. Se não o for, podemos, evocando o Lema de Zorn, acrescentar elementos a C pertencentes a $C^\perp$ de modo a obter um conjunto ortonormal completo. Esse conjunto ortonormal completo não pode ser contável, pois contém C. ■

Os espaços de Hilbert $L^2([a,\ b],\ dx)$, $L^2([a,\ b],\ r(x)dx)$ com r positiva e integrável no intervalo $[a,\ b]$, assim como $L^2(\mathbb{R},\ dx)$, são separáveis. Esses fatos decorrem dos resultados apresentados no Capítulo 17, página 975. O espaço de Hilbert $AP(\mathbb{R})$ das funções *almost*-periódicas é não-separável, pois possui um conjunto ortonormal não-contável, a saber, aquele de (41.33).

Finalizamos mencionando que no caso de espaços de Hilbert separáveis podemos refrasear o Teorema 41.7, acima, da seguinte forma:

Teorema 41.9 *Seja y um vetor de um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$ e B um conjunto ortonormal completo (e, portanto, contável) em $\mathcal{H}$. Vamos escrever os elementos de B como e_a com $a \in \mathbb{N}$. Então, vale que*

$$y \ = \ \lim_{n\to\infty} \sum_{a=1}^{n} \langle e_a,\ y\rangle\, e_a \tag{41.49}$$

e que

$$\|y\|^2 \ = \ \sum_{a=1}^{\infty} \big|\langle e_a,\ y\rangle\big|^2 \ . \tag{41.50}$$

□

A única diferença em relação ao Teorema 41.7 é que agora as somas acima não precisam mais ser restritas apenas aos elementos de B^y, mas são feitas sobre todos os elementos de B, independente do vetor $y \in \mathcal{H}$ considerado. Eventualmente alguns termos dessas somas serão nulos (tal é o caso se para um dado a tivermos $e_a \in Z^y$, ou seja, $\langle e_a,\ y\rangle = 0$), mas isso não alterará o resultado.

41.2.4 Conjuntos Totais

Um subconjunto $\mathcal{T}$ de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é dito ser um *conjunto total* de $\mathcal{H}$ se $\mathcal{T}^\perp = \{0\}$. Como o estudante percebe, toda base ortonormal completa em um espaço de Hilbert é um conjunto total do mesmo espaço. Os dois conceitos, porém, não podem ser confundidos. A seguinte proposição é relevante nesse contexto por fornecer uma caracterização alternativa importante da noção de conjuntos totais.

Proposição 41.12 *Um subconjunto $\mathcal{T}$ de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é total se e somente se span $(\mathcal{T})$ for um conjunto denso em $\mathcal{H}$ (isto é, $\overline{\text{span}\ (\mathcal{T})} = \mathcal{H}$), ou seja, se e somente se todo elemento de $\mathcal{H}$ puder ser aproximado na norma de $\mathcal{H}$ por uma sequência de vetores compostos por combinações lineares finitas de elementos de $\mathcal{T}$.* □

Prova. Suponhamos que $\mathcal{T}^\perp = \{0\}$. Como $\mathcal{T} \subset \text{span}\ (\mathcal{T})$, teremos pelo Lema 41.2, página 2318, que $\mathcal{T}^\perp \supset \text{span}\ (\mathcal{T})^\perp$ e que $\big(\mathcal{T}^\perp\big)^\perp \subset \big(\text{span}\ (\mathcal{T})^\perp\big)^\perp$. Como span $(\mathcal{T})$ é um subespaço de $\mathcal{H}$, podemos aplicar a Proposição 41.2, página 2319, e teremos $\overline{\text{span}\ (\mathcal{T})} = \big(\text{span}\ (\mathcal{T})^\perp\big)^\perp \supset \big(\mathcal{T}^\perp\big)^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$, implicando que $\overline{\text{span}\ (\mathcal{T})} = \mathcal{H}$.

Vamos agora supor que $\overline{\text{span}\ (\mathcal{T})} = \mathcal{H}$. Se $x \in \mathcal{T}^\perp$, então vale, naturalmente, que $x \in \text{span}\ (\mathcal{T})^\perp$, pois os elementos de span $(\mathcal{T})$ são combinações lineares finitas de elementos de $\mathcal{T}$. Logo, $\{x\} \subset \text{span}\ (\mathcal{T})^\perp$ e $\{x\}^\perp \supset \big(\text{span}\ (\mathcal{T})^\perp\big)^\perp = \overline{\text{span}\ (\mathcal{T})} = \mathcal{H}$, implicando que $\{x\}^\perp = \mathcal{H}$. Como $x \in \mathcal{H}$, isso está dizendo, em particular, que $\langle x,\ x\rangle = 0$ e, portanto, $x = 0$. Logo, provou-se que $\mathcal{T}^\perp = \{0\}$. ■

41.2.4.1 Um Exemplo no Espaço $L^2(\mathbb{R},\ dx)$

O exemplo de conjunto total que agora discutiremos é relevante na Mecânica Quântica, a saber, na discussão de propriedades dos chamados *estados coerentes*.

Comecemos nossa discussão recordando algumas propriedades das chamadas diferenças finitas de funções.

• **Diferenças finitas**

Seja $h > 0$, fixo. Dada uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definimos recursivamente as n-ésimas *diferenças finitas* $\Delta_h^n F \equiv \Delta^n F$, $n \in \mathbb{N}_0$, como sendo as funções definidas por

$$\big(\Delta^0 F\big)(y) \ := \ F(y)\ , \quad \big(\Delta^1 F\big)(y) \ := \ F(y+h) - F(y)\ , \qquad \big(\Delta^n F\big)(y) \ := \ \big(\Delta^{n-1} F\big)(y+h) - \Delta^{n-1} F(y)\ , \ \ n \geq 2\ .$$

É fácil ver que

$$\big(\Delta^n F\big)(y) \ = \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} F(y+kh)\ .$$

Se F for infinitamente diferenciável, teremos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$F^{(n)}(y) \ = \ \lim_{h\to 0} \frac{\big(\Delta^n F\big)(y)}{h^n}\ .$$

Além disso, o Teorema do Valor Intermediário para diferenças finitas (vide e.g. [241], Th. 60.1, pag. 353) afirma que no intervalo $(y,\ y+nh)$ existe um ponto ξ tal que

$$\frac{\big(\Delta^n F\big)(y)}{h^n} \ = \ F^{(n)}(\xi)\ . \tag{41.51}$$

• **Funções Gaussianas**

Consideremos o espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R},\ dx)$ (aqui, dx representa a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$), cujo produto escalar denotaremos por $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$. Seja χ uma função de $L^2(\mathbb{R},\ dx)$. Para $a \in \mathbb{R}$, definamos χ_a como sendo a função $\chi_a(x) = \chi(x-a)$. Evidentemente $\chi_a \in L^2(\mathbb{R},\ dx)$, pois a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ é invariante por translações.

Seja $g(x) := e^{-x^2}$ e, com a convenção acima, seja g_a a função em $\mathbb{R}$ definida para cada $a \in \mathbb{R}$ por $g_a(x) := e^{-(x-a)^2}$. Trata-se da chamada *função Gaussiana* centrada em a. Cada função g_a é, naturalmente, um elemento de $L^2(\mathbb{R},\ dx)$, pois $\int_{-\infty}^{\infty} g_a(x)^2 dx = \sqrt{\pi/2}$.

A proposição que segue demonstra uma propriedade de funções Gaussianas que será usada adiante.

Proposição 41.13 *Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R},\ dx)$. Então, a função G definida para $a \in \mathbb{R}$ por*

$$G(a) \ := \ \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\ g_a(x)\, dx$$

é infinitamente diferenciável e para cada $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\frac{d^n}{da^n} G(a) \ = \ \frac{d^n}{da^n} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\ g_a(x)\, dx \ = \ \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\ \frac{d^n}{da^n} g_a(x)\, dx \ = \ \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\ H_n(x-a) g_a(x)\, dx\ ,$$

onde H_n é o n-ésimo polinômio de Hermite. Note-se que a integral do lado direito é finita, pois $H_n(x-a)g_a(x) \in L^2(\mathbb{R},\ dx)$, enquanto função de x. □

Prova. O ponto central da demonstração é provar que sob as hipóteses de acima vale para todo $n \in \mathbb{N}$ a inversão representada pela igualdade $\dfrac{d^n}{da^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\ g_a(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\ \frac{d^n}{da^n} g_a(x)\, dx$. Para tal faremos uso do Teorema da Convergência Dominada, Teorema 32.6, página 1692.

Para $a \in \mathbb{R}$ definamos

$$K_n(a) \ := \ \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\ \frac{d^n}{da^n} g_a(x)\, dx\ .$$

Vamos provisoriamente restringir a a um intervalo aberto finito $(\alpha,\ \beta)$ com $-\infty < \alpha < \beta < \infty$.

Seja $n \in \mathbb{N}$ e seja $h \in (0,\ 1/n)$. Podemos, então, escrever

$$K_n(a) \ = \ \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\ \left(\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^n g_a(x)}{h^n}\right) dx\ ,$$

com $\Delta^n g_a(x)$ definido como a n-ésima diferença finita na variável a:

$$\Delta^0 g_a(x) \;:=\; g_a(x)\;, \quad \Delta^1 g_a(x) \;:=\; g_{a+h}(x) - g_a(x)\;, \qquad \Delta^n g_a(x) \;:=\; \Delta^{n-1} g_{a+h}(x) - \Delta^{n-1} g_a(x)\;,\;\; n \geq 2\;,$$

com

$$\Delta^n g_a(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g_{a+kh}(x)\;.$$

Por definição, a razão $\frac{\Delta^n g_a(x)}{h^n}$ converge a $\frac{d^n}{da^n} g_a(x)$ quando $h \to 0$, o limite existindo pontualmente para todo $x \in \mathbb{R}$ (o que é suficiente para os propósitos que teremos adiante, a saber, para o Teorema da Convergência Dominada). Por ser uma soma finita de elementos de $L^2(\mathbb{R},\, dx)$, $\Delta^n g_a$ é também um elemento desse espaço.

Observe-se agora que

$$\frac{\Delta^n G(a)}{h^n} \;=\; \frac{1}{h^n} \Delta^n \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\; g_a(x)\, dx \right) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\; \frac{\Delta^n g_a(x)}{h^n}\, dx\;.$$

Por (41.51), podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\; \frac{\Delta^n g_a(x)}{h^n}\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)} \left(\frac{d^n}{da^n} g_a(x) \bigg|_{a=\xi} \right) dx$$

para algum $\xi \in (a,\; a+nh)$. A chamada *fórmula de Rodrigues* para os polinômios de Hermite (vide (16.108), página 934), informa-nos que $\frac{d^n}{da^n} g_a(x) = H_n(x-a) g_a(x)$ (com H_n sendo o n-ésimo polinômio de Hermite). Assim,

$$\overline{\psi(x)}\; \frac{\Delta^n g_a(x)}{h^n} \;=\; \overline{\psi(x)} \Big(H_n(x-\xi) g_\xi(x) \Big)\;.$$

Definamos agora

$$\Theta_n(x) \;:=\; \sup \big\{ |H_n(x-y)| g_y(x),\; y \in (\alpha,\; \beta+1) \big\}\;.$$

É fácil de ver que $\Theta_n \in L^2(\mathbb{R},\, dx)$ e é evidente que

$$\left| \overline{\psi(x)}\; \frac{\Delta^n g_a(x)}{h^n} \right| \;=\; \left| \overline{\psi(x)} \Big(H_n(x-\xi) g_\xi(x) \Big) \right| \;\leq\; \left| \overline{\psi(x)} \right| \Theta_n(x) \tag{41.52}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e qualquer $\xi \in (a,\; a+nh) \subset (\alpha,\; \beta+1)$. Como ψ e Θ_n são elementos de $L^2(\mathbb{R},\, dx)$, a função majorante $\left| \overline{\psi(x)} \right| \Theta_n(x)$ do lado direito de (41.52) é um elemento de $L^1(\mathbb{R},\, dx)$ (pela desigualdade de Cauchy-Schwarz). Assim, podemos afirmar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta^n G(a)}{h^n} \;=\; \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\; \frac{\Delta^n g_a(x)}{h^n}\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)} \left(\lim_{h \to 0} \frac{\Delta^n g_a(x)}{h^n} \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\; \frac{d^n}{da^n} g_a(x)\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\; H_n(x-a) g_a(x)\, dx\;,$$

sendo que na segunda igualdade evocamos o Teorema da Convergência Dominada, Teorema 32.6, página 1692, para justificar a troca de limites pela integral. Isso estabeleceu que $\frac{d^n}{da^n} G(a)$ existe para todo $a \in (\alpha,\; \beta)$ e que vale

$$\frac{d^n}{da^n} G(a) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\; H_n(x-a) g_a(x)\, dx\;.$$

Como as afirmações acima valem para qualquer intervalo $(\alpha,\; \beta)$, a restrição de a a esse intervalo é agora dispensável. ■

• Conjuntos totais de funções Gaussianas

A afirmação mais importante que desejamos estabelecer na presente seção é a seguinte: para qualquer intervalo aberto $I = (\alpha,\; \beta) \subset \mathbb{R}$ a coleção de todas as funções Gaussianas centradas em pontos de I é um conjunto total em $L^2(\mathbb{R},\, dx)$. Esse é o conteúdo do teorema que segue.

Teorema 41.10 *Para cada intervalo aberto $(\alpha,\; \beta) \subset \mathbb{R}$, com $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, o conjunto $\mathcal{T}_{(\alpha,\, \beta)} := \big\{ g_a,\; a \in (\alpha,\; \beta) \big\}$ é um conjunto total em $L^2(\mathbb{R},\, dx)$. Consequentemente, $\mathcal{T}_{\mathbb{R}} := \big\{ g_a,\; a \in \mathbb{R} \big\}$ é também um conjunto total em $L^2(\mathbb{R},\, dx)$.* □

Passemos à demonstração desse teorema, após a qual adicionaremos alguns comentários pertinentes.

Prova do Teorema 41.10. Tomemos um intervalo aberto $(\alpha,\; \beta) \subset \mathbb{R}$. Seja $\phi \in \mathcal{T}^{\perp}_{(\alpha,\, \beta)}$. Então, vale $\langle \phi,\; g_a \rangle = 0$ para todo $a \in (\alpha,\; \beta)$, ou seja, $\int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x)}\; g_a(x)\, dx = 0$. Isso obviamente implica que para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $a \in (\alpha,\; \beta)$ vale $\frac{d^n}{da^n} \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x)}\; g_a(x)\, dx = 0$. Pela Proposição 41.13, página 2337, teremos

$$0 \;=\; \frac{d^n}{da^n} \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x)}\; g_a(x)\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x)}\; H_n(x-a) g_a(x)\, dx\;.$$

Assim, estabelecemos que

$$0 \;=\; \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x)}\; H_n(x-a) g_a(x)\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x+a)}\; H_n(x) e^{-x^2}\, dx \;=\; \langle \phi_{-a},\; \Psi_n \rangle\;,$$

onde $\Psi_n(x) := H_n(x) e^{-x^2}$. Como já comentamos (vide Seção 17.2, página 978), os vetores $\Psi_n \in L^2(\mathbb{R},\, dx)$, $n \in \mathbb{N}$, formam uma base ortogonal completa em $L^2(\mathbb{R},\, dx)$. Disso, concluímos que ϕ_{-a} deve ser o vetor nulo em $L^2(\mathbb{R},\, dx)$, por ser ortogonal a todos os elementos de uma base ortogonal de $L^2(\mathbb{R},\, dx)$. Isso implica que ϕ é o vetor nulo em $L^2(\mathbb{R},\, dx)$, provando que $\mathcal{T}^{\perp}_{(\alpha,\, \beta)} = \{0\}$ e, portanto, que $\mathcal{T}_{(\alpha,\, \beta)} := \{ g_a,\; a \in (\alpha,\; \beta) \}$ é um conjunto total em $L^2(\mathbb{R},\, dx)$. Como $\mathcal{T}_{\mathbb{R}} \supset \mathcal{T}_{(\alpha,\, \beta)}$, concluímos que $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ é também um conjunto total em $L^2(\mathbb{R},\, dx)$. ■

• Comentários ao Teorema 41.10. Um teorema devido a Wiener

Temos cinco comentários a fazer sobre o Teorema 41.10. O primeiro comentário concerne um aspecto um tanto surpreendente do Teorema 41.10, a saber, que para funções Gaussianas a coleção $\mathcal{T}_{(\alpha,\, \beta)} := \{ g_a,\; a \in (\alpha,\; \beta) \}$ é um conjunto total, não importa o quão pequeno seja o intervalo finito $(\alpha,\; \beta)$ com $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. O ponto surpreendente, ou contraintuitivo, é que as funções de $\mathcal{T}_{(\alpha,\, \beta)}$ são Gaussianas centradas em $(\alpha,\; \beta)$ e que, portanto, decaem rapidamente fora desse intervalo. Assim, pode parecer estranho que uma função de $L^2(\mathbb{R},\, dx)$ e que tenha, digamos, um máximo acentuado longe do intervalo $(\alpha,\; \beta)$ possa ser aproximada na norma de $L^2(\mathbb{R},\, dx)$ por combinações lineares finitas de elementos de $\mathcal{T}_{(\alpha,\, \beta)}$. O fato que ilude nossa intuição, e que esclarece o que se passa, é que diferenças finitas de funções de $\mathcal{T}_{(\alpha,\, \beta)}$ podem ter máximos fora do intervalo $(\alpha,\; \beta)$. Por exemplo, se tomarmos h "pequeno" o suficiente, então $\Delta^n g_a(x)$ é aproximadamente dada por $h^n \frac{d^n}{da^n} g_a(x) = h^n H_n(x-a) g_a(x)$, cujos máximos (como função de x) podem estar arbitrariamente "longe" de a para n crescente.

O segundo comentário é que o Teorema 41.10 estabelece que todo vetor de $L^2(\mathbb{R},\, dx)$ pode ser aproximado na norma desse espaço por combinações lineares finitas de Gaussianas centradas em $(\alpha,\; \beta)$ (ou em $\mathbb{R}$). Como $L^2(\mathbb{R},\, dx)$ é um espaço de Hilbert separável (isto é, possui uma base ortonormal contável) e como tais coleções de Gaussianas compõem conjuntos não-contáveis, diz-se que $\mathcal{T}_{(\alpha,\, \beta)}$ ou $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ são *bases sobrecompletas*, ou *supercompletas*, de $L^2(\mathbb{R},\, dx)$.

O terceiro comentário é que a afirmação que $\mathcal{T}_{\mathbb{R}} := \{ g_a,\; a \in \mathbb{R} \}$ (a coleção de todos os transladados da função Gaussiana $g(x) = e^{-x^2}$) é um conjunto total de $L^2(\mathbb{R},\, dx)$ é de relevância em Mecânica Quântica no estudo dos chamados *estados coerentes*.

O quarto comentário é que o Teorema 41.10, ainda no caso de funções Gaussianas, pode ser generalizado ainda mais, como mostra o exercício que segue.

E. 41.12 *Exercício*. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ que possua pelo menos um ponto de acumulação em $\mathbb{R}$. Mostre que $\mathcal{T}_A := \big\{ g_a,\; a \in A \big\}$ é um conjunto total em $L^2(\mathbb{R},\, dx)$. *Sugestão:* se x_0 é um dos pontos de acumulação de A, então é possível aproximar as derivadas de e^{-x^2} em x_0 por combinações lineares de elementos de $\mathcal{T}_A$. ✠

O quinto comentário é que um aspecto do Teorema 41.10 pode ser substancialmente generalizado, a saber, se ψ é um vetor de $L^2(\mathbb{R},\, dx)$ cuja transformada de Fourier tem suporte em toda a reta real $\mathbb{R}$, então a coleção $\{ \psi_a,\; a \in \mathbb{R} \}$ de todos os transladados de ψ é um conjunto total de $L^2(\mathbb{R},\, dx)$. Esse teorema, que enunciamos e demonstramos a

seguir (Teorema 41.11), é um caso particular de um Teorema tecnicamente mais elaborado devido a Wiener[29] (vide [459], Teorema 9.4).

Recordemos que, conforme discutido na Seção 39.2.2, página 2196, a transformada de Fourier $\mathcal{F}$ é invertível (em verdade, unitária) em $L^2(\mathbb{R},\ dx)$.

Teorema 41.11 (Wiener) *Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R},\ dx)$ tal que supp $\big(\mathcal{F}[\psi]\big) = \mathbb{R}$. Então, a coleção $\mathcal{T} := \{\psi_a,\ a \in \mathbb{R}\}$ de todos os transladados de ψ é um conjunto total de $\mathcal{H} \equiv L^2(\mathbb{R},\ dx)$.* □

Prova. Seja $\phi \in \mathcal{T}^\perp$. Então, por hipótese, $\langle \phi,\ \psi_a\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x)}\psi(x-a)\,dx = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. A integral se escreve como $\int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x)}\psi^P(a-x)\,dx = \sqrt{2\pi}\big(\overline{\phi} * \psi^P\big)(a)$, onde "$*$" denota o produto de convolução, definido em (39.20), página 2172, e onde denotamos por ψ^p o vetor de $L^2(\mathbb{R},\ dx)$ dado por $\psi^p(x) = \psi(-x)$. Assim, vale que $\overline{\phi} * \psi^P$ é nula em toda parte. Logo, evocando-se (39.122), página 2198, e fazendo uso do Teorema 39.1, página 2179, concluímos que o produto $\mathcal{F}^{-1}[\overline{\phi}]\mathcal{F}^{-1}[\psi^P] = \mathcal{F}^{-1}[\overline{\phi}]\mathcal{F}[\psi]$ é uma função nula quase em toda parte. Como supp $(\mathcal{F}[\psi]) = \mathbb{R}$, segue que $\mathcal{F}[\overline{\phi}]$ é nula quase em toda parte, implicando que ϕ também o é. ■

Note-se que a função Gaussiana g satisfaz as hipóteses do enunciado do Teorema 41.11. Contudo, ao contrário do que se passa com a função Gaussiana, não é permitido em geral restringir as translações no enunciado do Teorema 41.11 a um aberto finito $(\alpha,\ \beta)$ com $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, ou seja, a coleção $\{\psi_a,\ a \in (\alpha,\ \beta)\}$ não é necessariamente um conjunto total em $L^2(\mathbb{R},\ dx)$ para qualquer $\psi \in L^2(\mathbb{R},\ dx)$ não-nulo que possua uma transformada de Fourier com suporte em todo $\mathbb{R}$. Se, por exemplo, $\psi = \chi_{[-1,\ 1]}$, a função característica do intervalo $[-1, 1]$, sua transformada de Fourier tem suporte em todo $\mathbb{R}$ (vide e.g. (39.37)), mas as funções ψ_a com $a \in (\alpha,\ \beta)$ terão suporte contido (propriamente) no intervalo $[\alpha-1,\ \beta+1]$ e, evidentemente, serão todas ortogonais a funções de $L^2(\mathbb{R},\ dx)$ com suporte fora de $[\alpha-1,\ \beta+1]$.

41.3 Somas Diretas e Produtos Tensoriais de Espaços de Hilbert. Espaços de Fock

Nesta seção vamos apresentar construções de espaços de Hilbert que podem ser feitas a partir de certas coleções dadas de espaços de Hilbert, tais como sua soma direta, seu produto tensorial e os chamados espaços de Fock. Todas essas construções são de importância na Física Quântica.

41.3.1 Somas Diretas de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert

Na Seção 2.3.4, página 211, apresentamos a construção da soma direta de uma coleção finita de espaços vetoriais sobre um mesmo corpo. Nenhuma estrutura topológica foi então considerada, ou seja, lá tratou-se de uma construção de uma soma direta algébrica de espaços vetoriais. No caso de espaços de Hilbert podemos introduzir um produto escalar e uma norma nessa soma direta algébrica e verificar que o espaço assim construído é também um espaço de Hilbert.

Para $n \in \mathbb{N}$, sejam $\mathcal{H}_j$, $j = 1,\ \dots\ n$, espaços de Hilbert sobre o mesmo corpo dos complexos e sejam $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_j$ e $\|\cdot\|_j$ os respectivos produtos escalares e normas. A soma direta $\mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$ foi definida na Seção 2.3.4, página 211, e consiste no produto Cartesiano $\mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n$ dotado da estrutura linear

$$\alpha\big(\psi_1,\ \dots,\ \psi_n\big) + \beta\big(\phi_1,\ \dots,\ \phi_n\big) \ := \ \big(\alpha\psi_1 + \beta\phi_1,\ \dots,\ \alpha\psi_n + \beta\phi_n\big)\ ,$$

que faz de $\mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Acima, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ e $\big(\psi_1,\ \dots,\ \psi_n\big)$ e $\big(\phi_1,\ \dots,\ \phi_n\big)$ são elementos de $\mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n$. Nesse espaço vetorial os vetores $\big(\psi_1,\ \dots,\ \psi_n\big)$ passarão a ser denotados por $\psi_1 \oplus \cdots \oplus \psi_n$.

O espaço vetorial assim constituído pode ser dotado de um produto escalar definido por

$$\Big\langle \psi_1 \oplus \cdots \oplus \psi_n,\ \ \phi_1 \oplus \cdots \oplus \phi_n \Big\rangle_{\mathfrak{s}} \ := \ \sum_{k=1}^{n} \langle \psi_k,\ \phi_k\rangle_k\ .$$

[29] Norbert Wiener (1894–1964).

Deixamos para o leitor o exercício simples de verificar que a expressão acima realmente define um produto escalar em $\mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$. A norma associada a esse produto escalar é dada, obviamente, por

$$\Big\|\psi_1 \oplus \cdots \oplus \psi_n\Big\|_{\mathfrak{s}}^2 \ = \ \sum_{k=1}^{n} \|\psi_k\|_k^2\ . \tag{41.53}$$

Um ponto importante é que $\mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$, com o produto escalar acima, é automaticamente um espaço de Hilbert (sem a necessidade de completamento). De fato, seja $\psi_1^j \oplus \cdots \oplus \psi_n^j$, $j \in \mathbb{N}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$ em relação à norma definida em (41.53). Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Big\|\psi_1^a \oplus \cdots \oplus \psi_n^a - \psi_1^b \oplus \cdots \oplus \psi_n^b\Big\|_{\mathfrak{s}}^2 \ \leq \ \epsilon^2$$

sempre que a e b forem maiores que $N(\epsilon)$. Agora, o lado esquerdo vale $\sum_{k=1}^{n} \big\|\psi_k^a - \psi_k^b\big\|_k^2$ e, portanto, concluímos que para cada $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$ vale $\big\|\psi_k^a - \psi_k^b\big\|_k^2 \leq \epsilon^2$ sempre que a e b forem maiores que $N(\epsilon)$. Isso informa-nos que, para cada $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$, as sequências $\{\psi_k^j,\ j \in \mathbb{N}\}$ são de Cauchy em $\mathcal{H}_k$ e, portanto, convergem a um vetor $\Psi_k \in \mathcal{H}_k$. É agora trivial constatar que

$$\lim_{a\to\infty} \Big\|\psi_1^a \oplus \cdots \oplus \psi_n^a - \Psi_1 \oplus \cdots \oplus \Psi_n\Big\|_{\mathfrak{s}}^2 \ = \ \sum_{k=1}^{n} \lim_{a\to\infty} \big\|\psi_k^a - \Psi_k\big\|_k^2 \ = \ 0\ ,$$

provando que a sequência de Cauchy $\psi_1^a \oplus \cdots \oplus \psi_n^a$, $a \in \mathbb{N}$, converge a $\Psi_1 \oplus \cdots \oplus \Psi_n \in \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$ e, portanto, provando que toda sequência de Cauchy em $\mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$ converge nesse mesmo espaço. Isso estabeleceu que a soma direta algébrica $\mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$ já é, *per se*, um espaço de Hilbert, sem a necessidade de operações adicionais, como a restrição a subespaços lineares adequados ou a tomada de completamentos canônicos. Nesse aspecto, as demais construções que apresentaremos no que segue são distintas.

41.3.2 Somas Diretas de uma Coleção Contável de Espaços de Hilbert

A estrutura acima — a soma direta de finitos espaços de Hilbert — pode ser adaptada para somas diretas contáveis de espaços de Hilbert, mas cuidados são necessários.

Na Seção 2.3.4, página 211, apresentamos a construção da soma direta de uma coleção contável de espaços vetoriais sobre um mesmo corpo. Nenhuma estrutura topológica foi então considerada, ou seja, lá tratou-se de uma construção de uma soma direta algébrica de espaços vetoriais. No caso de uma coleção contável espaços de Hilbert podemos introduzir um produto escalar e uma norma definidas em um subespaço adequado de sua soma direta algébrica e verificar que esse subespaço adequadamente definido é igualmente um espaço de Hilbert, o qual, pode assim ser interpretado como o soma direta topológica da coleção contável de espaços de Hilbert considerados.

Para $n \in \mathbb{N}$, sejam $\mathcal{H}_j$, com $j \in \mathbb{N}$, espaços de Hilbert sobre o mesmo corpo dos complexos e sejam $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_j$ e $\|\cdot\|_j$ os respectivos produtos escalares e normas. A soma direta *algébrica* $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ foi definida na Seção 2.3.4, página 211, e consiste no produto Cartesiano $\bigtimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$, ou seja, na coleção de sequências $\mathbb{N} \ni n \mapsto \psi_n \in \mathcal{H}_n$, que frequentemente denotaremos como $\big(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \dots\big)$, com $\psi_j \in \mathcal{H}_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$, dotada da estrutura linear

$$\alpha\big(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \dots\big) + \beta\big(\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3,\ \dots\big) \ := \ \Big(\alpha\psi_1 + \beta\phi_1,\ \alpha\psi_2 + \beta\phi_2,\ \ \alpha\psi_3 + \beta\phi_3,\ \dots\Big)\ , \tag{41.54}$$

para todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$.

Se $\Psi = \big(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \dots\big) \in \bigtimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$, o vetor ψ_j é dito ser a *componente de Ψ em $\mathcal{H}_j$*.

Vamos demonstrar que o subconjunto de $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ definido por

$$\mathfrak{S}\big(\{\mathcal{H}_n,\ n \in \mathbb{N}\}\big) \ \equiv \ \overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}}\mathcal{H}_n \ := \ \left\{\Psi \ \equiv \ \big(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \dots\big) \ \in \ \bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n\|_n^2 \ < \ \infty\right\} \tag{41.55}$$

é um espaço de Hilbert[30] com o produto escalar

$$\big\langle \Psi,\ \Phi\big\rangle_{\mathfrak{S}} \ := \ \sum_{j=1}^{\infty}\big\langle \psi_j,\ \phi_j\big\rangle_j\ , \tag{41.56}$$

onde $\Psi = \big(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \ldots\big)$ e $\Phi = \big(\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3,\ \ldots\big)$ são elementos de $\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$.

Há diversas coisas a se demonstrar aqui. Em primeiro lugar, é preciso estabelecer que $\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$ é, de fato, um subespaço linear de $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$. Para tal, note-se que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz para o produto escalar em $\mathcal{H}_n$ vale

$$\big\|\alpha\psi_n+\beta\phi_n\big\|_n^2 \ = \ \big\langle \alpha\psi_n+\beta\phi_n,\ \alpha\psi_n+\beta\phi_n\big\rangle_n \ = \ |\alpha|^2\big\|\psi_n\big\|^2+|\beta|^2\big\|\phi_n\big\|^2+2\mathrm{Re}\Big(\overline{\alpha}\beta\langle\psi_n,\ \phi_n\rangle_n\Big)$$

$$\leq\ |\alpha|^2\big\|\psi_n\big\|^2+|\beta|^2\big\|\phi_n\big\|^2+2|\alpha|\,|\beta|\,\big\|\psi_n\big\|\,\big\|\phi_n\big\| \ = \ \Big(|\alpha|\big\|\psi_n\big\|+|\beta|\big\|\phi_n\big\|\Big)^2 \ \overset{(5.58)}{\leq}\ 2\Big(|\alpha|^2\big\|\psi_n\big\|^2+|\beta|^2\big\|\phi_n\big\|^2\Big)\ .$$

Logo, para cada $N\in\mathbb{N}$ vale

$$\sum_{n=1}^{N}\big\|\alpha\psi_n+\beta\phi_n\big\|_n^2 \ \leq\ 2|\alpha|^2\sum_{n=1}^{N}\big\|\psi_n\big\|^2+2|\beta|^2\sum_{n=1}^{N}\big\|\phi_n\big\|^2\ .$$

Assim, se $(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \ldots)$ e $(\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3,\ \ldots)$ forem elementos de $\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$ o limite $N\to\infty$ do lado direito é finito, provando que também a combinação linear $\Big(\alpha\psi_1+\beta\phi_1,\ \alpha\psi_2+\beta\phi_2,\ \ \alpha\psi_3+\beta\phi_3,\ \ldots\Big)$ é elemento de $\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$. Isso estabeleceu que $\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$ é um subespaço linear de $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ segundo a mesma estrutura linear definida em (41.54).

Vale notar que (41.56) está bem definida para todos $\Psi,\ \Phi\in\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$, pois, usando diversas vezes a desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Big|\big\langle\psi_j,\ \phi_j\big\rangle_j\Big| \ \leq\ \sum_{j=1}^{\infty}\big\|\psi_j\big\|_j\big\|\phi_j\big\|_j \ \leq\ \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\big\|\psi_j\big\|_j^2}\,\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\big\|\phi_j\big\|_j^2} \ <\ \infty\ ,$$

mostrando que a série do lado direito de (41.56) é absolutamente convergente (e, portanto, convergente) para todos $\Psi,\ \Phi\in\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$.

Que (41.56) define uma forma sesquilinear Hermitiana em $\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$ segundo a estrutura linear definida em (41.54) é um fato de constatação elementar, deixada como exercício. Do fato que

$$\big\|\Psi\big\|_{\mathfrak{S}}^2 \ =\ \Big\|\big(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \ldots\big)\Big\|_{\mathfrak{S}}^2 \ :=\ \Big\langle\big(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \ldots\big)\ ,\ \ \big(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \ldots\big)\Big\rangle_{\mathfrak{S}} \ =\ \sum_{j=1}^{\infty}\|\psi_j\|_j^2 \tag{41.57}$$

vê-se trivialmente que (41.56) é uma forma sesquilinear não-negativa e vê-se trivialmente que $\big\|\Psi\big\|_{\mathfrak{S}}=0$ se e somente se Ψ for o vetor nulo. Isso estabeleceu que (41.56) define um produto escalar em $\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$ e que (41.57) define uma norma nesse espaço.

Para futuro uso, notemos também que para cada $k\in\mathbb{N}$ a expressão

$$\|\Psi\|_{\mathfrak{S},\,k} \ =\ \Big\|\big(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \ldots\big)\Big\|_{\mathfrak{S},\,k} \ :=\ \sqrt{\sum_{j=1}^{k}\|\psi_j\|_j^2} \tag{41.58}$$

define uma seminorma em $\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$. É óbvio que $\big\|\Psi\big\|_{\mathfrak{S},\,k}\leq\big\|\Psi\big\|_{\mathfrak{S}}$ para cada k e para todo $\Psi\in\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$. Também é óbvio que $\big\|\Psi\big\|_{\mathfrak{S},\,k}$ é não-descrescente quando k cresce, sendo que $\lim_{k\to\infty}\big\|\Psi\big\|_{\mathfrak{S},\,k}=\big\|\Psi\big\|_{\mathfrak{S}}$ para todo $\Psi\in\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$.

[30] No que segue usaremos tanto o símbolo $\mathfrak{S}(\{\mathcal{H}_n,\ n\in\mathbb{N}\})$ quando $\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$ para denotar o espaço de Hilbert associado à soma direta dos espaços $\{\mathcal{H}_n,\ n\in\mathbb{N}\}$.

O ponto não-trivial agora é estabelecer que $\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$ é completo na norma dada por (41.57). Esse é o conteúdo do Teorema de Riesz-Fischer, que enunciaremos e demonstraremos a seguir.

• Completeza. O Teorema de Riesz-Fischer para a soma direta contável de espaços de Hilbert

Vamos agora estabelecer que $\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$ é completo na norma dada por (41.57). Essa afirmação, especialmente na sua forma mais geral, em espaços de funções mensuráveis (tratada na Seção 32.4.2, página 1700), é conhecida como *Teorema de Riesz*[31]*-Fischer*[32] e data de 1907.

Seja $\{\Psi^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, uma sequência de vetores de $\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$. Indicaremos por ψ_i^m a componente de Ψ^m em $\mathcal{H}_i$, ou seja, escrevemos $\Psi^m=\big(\psi_1^m,\ \psi_2^m,\ \psi_3^m,\ \ldots\ \big)$. Assim, convencionamos que em cada ψ_i^m o índice superior indexa a sequência e o inferior indexa a componente de cada elemento da sequência no respectivo espaço $\mathcal{H}_i$.

Suponhamos que $\{\Psi^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de Cauchy em $\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$ na métrica induzida pela norma definida em (41.57). Isso significa que para todo $\epsilon>0$ existe um inteiro $N(\epsilon)>0$ tal que $\|\Psi^n-\Psi^m\|<\epsilon$ sempre que $m,\ n>N(\epsilon)$. Assim, se $m,\ n>N(\epsilon)$, é fácil ver que, para os elementos ψ_i^m e ψ_i^n isso significa que

$$\big\|\psi_i^m-\psi_i^n\big\|_i \ \leq\ \left[\sum_{j=1}^{\infty}\big\|\psi_j^m-\psi_j^n\big\|^2\right]^{1/2} \ =\ \|\Psi^m-\Psi^n\|_{\mathfrak{S}} \ <\ \epsilon\ .$$

Isso diz-nos que, para cada $i\in\mathbb{N}$ fixo, a sequência $\{\psi_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}_i$ e, portanto, converge. Seja $\psi_i\in\mathcal{H}_i$ o limite dessa sequência.

O vetor $\Psi=(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \ldots)\in\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ é um forte candidato a ser o limite da sequência $\{\Psi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na métrica definida pela norma (41.57). Colocamo-nos, então, as seguintes questões: **1.** Será Ψ também um elemento de $\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$? **2.** Se a resposta à pergunta anterior for positiva, será que a sequência $\Psi^m,\ m\in\mathbb{N}$, converge ao vetor Ψ na norma (41.57)? Se a resposta a essas perguntas for positiva, estará provado que $\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$ é completo.

Seja $\epsilon>0$ arbitrário. Vamos definir uma sequência crescente de números inteiros e positivos $N_k(\epsilon)$, $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ com $N_{k+1}(\epsilon)>N_k(\epsilon)$, da seguinte forma: $N_k(\epsilon)$ é tal que $\|\Psi^m-\Psi^n\|<\epsilon/2^k$ para todos $m,\ n>N_k(\epsilon)$. Note que uma tal sequência $N_k(\epsilon)$ sempre pode ser encontrada pois, por hipótese, $\{\Psi^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Vamos agora escolher uma sequência crescente de índices $n_1<n_2<\cdots<n_{k-1}<n_k<\cdots$ tais que $n_k>N_k(\epsilon)$. A essa sequência está associada a subsequência $\{\Psi^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Para simplificar a notação, denotaremos $\Phi^k\equiv\Psi^{n_k}$, $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, com $\Phi^k=\big(\phi_1^k,\ \phi_2^k,\ \phi_3^k,\ \ldots\big)$. Tem-se

$$\big\|\Phi^{l+1}-\Phi^l\big\|_{\mathfrak{S}} \ <\ \frac{\epsilon}{2^l}\ , \tag{41.59}$$

pois n_l e n_{l+1} são maiores que $N_l(\epsilon)$. Note que para cada i, ϕ_i^k converge a ψ_i quando $k\to\infty$.

Com essas definições, teremos para todo $k>1$ que (verifique!)

$$\Phi^k-\Phi^1 \ =\ \sum_{l=1}^{k-1}\Big[\Phi^{l+1}-\Phi^l\Big]\ .$$

[31] Frigyes Riesz (1880–1956).
[32] Ernst Sigismund Fischer (1875–1954).

Utilizando as seminormas $\|\cdot\|_{\mathfrak{S},\,n}$, definidas em (41.58), teremos

$$\begin{aligned}
\left\|\Phi^k\right\|_{\mathfrak{S},\,n} &= \left\|\Phi^1+\sum_{l=1}^{k-1}\left[\Phi^{l+1}-\Phi^l\right]\right\|_{\mathfrak{S},\,n} \\
&\leq \left\|\Phi^1\right\|_{\mathfrak{S},\,n}+\sum_{l=1}^{k-1}\left\|\Phi^{l+1}-\Phi^l\right\|_{\mathfrak{S},\,n} \\
&\leq \left\|\Phi^1\right\|_{\mathfrak{S}}+\sum_{l=1}^{k-1}\left\|\Phi^{l+1}-\Phi^l\right\|_{\mathfrak{S}} \\
&< \left\|\Phi^1\right\|_{\mathfrak{S}}+\sum_{l=1}^{k-1}\frac{\epsilon}{2^l} \;\leq\; \left\|\Phi^1\right\|_{\mathfrak{S}}+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^l} \;=\; \left\|\Phi^1\right\|_{\mathfrak{S}}+\epsilon\,.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\left\|\Phi^k\right\|_{\mathfrak{S},\,n} \;<\; \left\|\Phi^1\right\|_{\mathfrak{S}}+\epsilon\,. \tag{41.60}$$

Note que o lado esquerdo é $\left[\sum_{i=1}^n\left\|\phi_i^k\right\|_i^2\right]^{1/2}$ e envolve uma soma finita de $\|\phi_i^k\|_i's$. Assim, como cada ϕ_i^k converge a ϕ_i quando $k\to\infty$ temos, tomando o limite $k\to\infty$,

$$\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{i=1}^n\left\|\phi_i^k\right\|_i^2\right]^{1/2} \;=\; \left[\sum_{i=1}^n\|\psi_i\|_i^2\right]^{1/2} \;=\; \left\|\Psi\right\|_{\mathfrak{S},\,n}\,.$$

Como o lado direito de (41.60) não depende de k, concluímos que $\left\|\Psi\right\|_{\mathfrak{S},\,n}\leq\left\|\Phi^1\right\|_{\mathfrak{S}}+\epsilon$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Agora, isso diz que

$$\sum_{i=1}^n\left\|\psi_i\right\|_i^2 \;\leq\; \Big(\|\Phi^1\|+\epsilon\Big)^2$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. O lado direito não depende de n. Como o lado esquerdo é uma sequência crescente e limitada (pelo lado direito), segue que o lado esquerdo converge quando $n\to\infty$. Isso prova então que $\sum_{i=1}^\infty\|\psi_i\|_i^2<\infty$, ou seja, que $\Psi\in\overline{\bigoplus_{n=1}^\infty\mathcal{H}_n}$.

Resta-nos agora responder à segunda pergunta colocada à página 2343 e mostrar que a sequência Ψ^m converge a Ψ em relação à norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}}$.

Repetindo o raciocínio que levou a (41.60), apenas mantendo Φ^1 do lado esquerdo desde o início, concluímos que $\left\|\Phi^k-\Phi^1\right\|_{\mathfrak{S},\,n}<\epsilon$. Novamente, usando o mesmo argumento acima, podemos tomar o limite $k\to\infty$ e obter $\left\|\Psi-\Phi^1\right\|_{\mathfrak{S},\,n}\leq\epsilon$. Como o lado direito independe de n, segue pelo mesmo raciocínio de acima que $\left\|\Psi-\Phi^1\right\|_{\mathfrak{S}}\leq\epsilon$. Isso significa[33] que para todo $\epsilon>0$ existe $\Phi^1\in\overline{\bigoplus_{n=1}^\infty\mathcal{H}_n}$ tal que $\left\|\Psi-\Phi^1\right\|_{\mathfrak{S}}\leq\epsilon$. Como Φ^1 é escolhido como um elemento da sequência Ψ^m, isso prova que $\Psi=\lim_{m\to\infty}\Psi^m$ na topologia definida pela norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}}$.

Com isso, provamos que $\overline{\bigoplus_{n=1}^\infty\mathcal{H}_n}$ é completo na norma definida em (41.57) e, portanto, é um espaço de Hilbert com relação ao produto escalar definido em (41.56).

E. 41.13 *Exercício*. Seja $\mathfrak{S}_0$ o subconjunto de $\bigoplus_{n=1}^\infty\mathcal{H}_n$ composto por vetores $(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \ldots)$ tais que apenas uma coleção finita das componentes ψ_k é não-nula. Verifique que $\mathfrak{S}_0$ é um subespaço vetorial de $\bigoplus_{n=1}^\infty\mathcal{H}_n$. Verifique que as expressões (41.56) e (41.57) definem um produto escalar e uma norma, respectivamente, em $\mathfrak{S}_0$. Mostre que $\bigoplus_{n=1}^\infty\mathcal{H}_n$ é o fecho de $\mathfrak{S}_0$ na topologia dessa norma. Note que isso não implica por si só que $\overline{\bigoplus_{n=1}^\infty\mathcal{H}_n}$ seja completo. Discuta esse ponto. ✠

E. 41.14 *Exercício*. Constate que o espaço ℓ^2 — das sequências complexas de quadrado somável — que foi discutida na Seção 25.5.1, página 1466, corresponde à construção da soma direta acima com $\mathcal{H}_j=\mathbb{C}$ para todo $j\in\mathbb{N}$. ✠

[33] O estudante aqui talvez tenha que recordar a maneira como $\Phi^1=\Psi^{n_1}$ foi definido no parágrafo que antecede (41.59).

41.3.3 Produtos Tensoriais de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert

Na Seção 2.3.4, página 211, apresentamos a construção do produto tensorial de uma coleção finita de espaços vetoriais sobre um mesmo corpo. Nenhuma estrutura topológica foi então considerada, ou seja, lá tratou-se da construção de um produto tensorial algébrico de espaços vetoriais. No caso de espaços de Hilbert podemos introduzir um produto escalar e uma norma nesse produto tensorial algébrico com o qual, via completamento canônico, podemos construir um espaço de Hilbert que pode ser interpretado como o produto tensorial topológico de (finitos) espaços de Hilbert.

Para $n\in\mathbb{N}$, sejam $\mathcal{H}_j$, $j=1,\ \ldots\ n$, espaços de Hilbert sobre o mesmo corpo dos complexos e sejam $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_j$ e $\|\cdot\|_j$ os respectivos produtos escalares e normas. O produto tensorial algébrico $\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_n$ foi definido na Seção 2.3.5, página 214. Naquela construção nenhuma estrutura topológica foi considerada, ou seja, lá tratou-se de uma construção de um produto tensorial algébrico dos espaços vetoriais $\mathcal{H}_1,\ \ldots,\ \mathcal{H}_n$. Vamos aqui introduzir um produto escalar e uma norma nesse produto tensorial algébrico e construir dessa forma um produto tensorial topológico desses espaços que seja também um espaço de Hilbert.

Para simplificar a exposição, consideraremos primeiramente o caso ($n=2$) de dois espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$. O leitor se aperceberá que a generalização para $n>2$ é imediata e não apresenta dificuldades especiais.

Sejam Ψ e Φ vetores de $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ da forma $\Psi=\sum_{k=1}^m\alpha_k\chi_k\otimes\zeta_k$ e $\Phi=\sum_{l=1}^n\beta_l\xi_l\otimes\varphi_l$, com $m,\ n\in\mathbb{N}$, elementos arbitrários de $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$, onde os α_k's e os β_l's são números complexos e onde $\chi_k,\ \xi_l\in\mathcal{H}_1$ e $\zeta_k,\ \varphi_l\in\mathcal{H}_2$ para todos k e l. Definimos o produto escalar entre esses vetores por

$$\big\langle\Psi,\ \Phi\big\rangle_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2} \;\equiv\; \left\langle\sum_{k=1}^m\alpha_k\chi_k\otimes\zeta_k,\ \sum_{l=1}^n\beta_l\xi_l\otimes\varphi_l\right\rangle_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2} \;:=\; \sum_{k=1}^m\sum_{l=1}^n\overline{\alpha_k}\beta_l\big\langle\chi_k,\ \xi_l\big\rangle_1\big\langle\zeta_k,\ \varphi_l\big\rangle_2\,. \tag{41.61}$$

É muito fácil provar (faça-o!) que o lado direito define uma forma sesquilinear em $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ e que essa forma é Hermitiana. Porém, a propriedade de ela ser não negativa e a propriedade que afirma que $\big\langle\Psi,\ \Psi\big\rangle_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2}=0$ se e somente $\Psi=0$ demandam demonstração.

Para isso, escrevamos $\Psi=\sum_{k=1}^n\alpha_k\chi_k\otimes\zeta_k$ e notemos primeiramente que os vetores $\{\chi_1,\ \ldots,\ \chi_n\}$ geram um subespaço $\mathcal{E}_1$ de dimensão finita de $\mathcal{H}_1$ e que, analogamente, os vetores $\{\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_n\}$ geram um subespaço $\mathcal{E}_2$ de dimensão finita de $\mathcal{H}_2$. Para certos $M,\ N\in\mathbb{N}$, sejam $\{\psi_1,\ \ldots,\ \psi_M\}$ e $\{\phi_1,\ \ldots,\ \phi_N\}$ bases ortonormais em $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, respectivamente. Escrevendo

$$\chi_k \;=\; \sum_{a=1}^M A_{ka}\psi_a \quad\text{e}\quad \zeta_k \;=\; \sum_{b=1}^N B_{kb}\phi_b\,,$$

com $A_{ka},\ B_{kb}\in\mathbb{C}$, temos

$$\Psi \;=\; \sum_{a=1}^M\sum_{b=1}^N\left(\sum_{k=1}^n\alpha_kA_{ka}B_{kb}\right)\psi_a\otimes\phi_b\,. \tag{41.62}$$

Note-se aqui que o conjunto de vetores $\big\{\psi_a\otimes\phi_b,\ a\in\{1,\ \ldots,\ M\},\ b\in\{1,\ \ldots,\ N\}\big\}$, é um conjunto ortonormal de vetores segundo a forma sesquilinear (41.61) (pois $\big\langle\psi_a\otimes\phi_b,\ \psi_c\otimes\phi_d\big\rangle_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2}\overset{(41.61)}{=}\big\langle\psi_a\ \psi_c\big\rangle_1\big\langle\phi_b,\ \phi_b\big\rangle_2=\delta_{ac}\delta_{bd}$) e, portanto, é também um conjunto de vetores linearmente independentes, sendo assim uma base ortonormal no espaço de dimensão finita $\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2$.

Com isso, segue imediatamente de (41.62) que

$$\big\langle\Psi,\ \Psi\big\rangle_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2} \;=\; \sum_{a=1}^M\sum_{b=1}^N\left|\sum_{k=1}^m\alpha_kA_{ka}B_{kb}\right|^2\,.$$

Isso mostra que $\big\langle\Psi,\ \Psi\big\rangle_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2}\geq0$ e disso vemos também que $\big\langle\Psi,\ \Psi\big\rangle_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2}=0$ se e somente se $\displaystyle\sum_{k=1}^m\alpha_kA_{ka}B_{kb}=0$ para todos a e b, o que, por (41.62), é válido se e somente se $\Psi=0$.

Com isso, o produto tensorial algébrico $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ é dotado de um produto escalar e, portanto, de uma norma, dada por $\left\|\Psi\right\|_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2}:=\sqrt{\big\langle\Psi,\ \Psi\big\rangle_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2}}$. Definimos o espaço de Hilbert associado como sendo o completamento de $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ por essa norma. Esse espaço de Hilbert será denotado por $\mathcal{H}_1\overline{\otimes}\mathcal{H}_2$ ou[34] por $\mathfrak{P}\big(\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2\big)$.

[34] Nos dias de hoje é comum ainda designar esse espaço por $\mathcal{H}_1\widehat{\otimes}\mathcal{H}_2$.

Como dissemos, essa construção generaliza-se automaticamente para o caso $n \geq 2$ e, com isso, cai definido o produto tensorial topológico de n espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$, todos sobre o mesmo corpo $\mathbb{C}$. Denotaremos esse espaço de Hilbert por

$$\mathfrak{P}(\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n) \equiv \mathcal{H}_1 \overline{\otimes} \mathcal{H}_2 \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} \mathcal{H}_n .$$

• **Nota de advertência sobre produtos tensoriais de espaços de Hilbert**

Uma nota de advertência para estudantes mais avançados.

Na Teoria das Categorias, a noção de produto tensorial de dois espaços de Hilbert pode ser definida em termos do que se denomina uma *propriedade universal*, que nesse caso vem a ser o seguinte: dados dois espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ sobre, digamos, o corpo dos complexos, seu produto tensorial seria um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com as seguintes propriedades: existe uma aplicação bilinear contínua $\beta : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}$ tal que para toda aplicação bilinear contínua $\varphi : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{K}$, com $\mathcal{K}$ sendo um espaço de Hilbert, existe uma aplicação linear única $\chi : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ tal que $\chi \circ \beta = \varphi$, ou seja, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[dr, "\chi"] & \\ \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

comuta.

Conforme observado por Garrett em [196], no caso em que $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ não são de dimensão finita tal espaço $\mathcal{H}$ e tal mapa bicontínuo β **não** existem e, portanto, **não** existem produtos tensoriais na categoria dos espaços de Hilbert com aplicações lineares contínuas. Esse discussão é interessante por mostrar que nem sempre é possível definir objetos por propriedades universais.

Em nossa apresentação, assim como em toda a literatura a respeito, construímos $\mathcal{H}_1 \overline{\otimes} \mathcal{H}_2$ pelo completamento do produto tensorial algébrico $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ em uma norma adequada. Como observado por Garrett, porém, $\mathcal{H}_1 \overline{\otimes} \mathcal{H}_2$ não satisfaz a propriedade universal acima caso $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ não sejam de dimensão finita (essencialmente por haver operadores de Hilbert-Schmidt que não são tipo-traço) e nenhum espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ o faz. Nossa construção de $\mathcal{H}_1 \overline{\otimes} \mathcal{H}_2$ corresponde a uma propriedade universal distinta daquela acima, na qual aplicações bilineares contínuas são substituidas por aplicações fracamente Hilbert-Schmidt. Vide, *e.g.*, [285].

É ainda relevante observar que o produto tensorial $\mathcal{H}_1 \overline{\otimes} \mathcal{H}_2$ que construímos tem relevância por si só, ainda que não corresponda ao desejo expresso em uma propriedade universal geral.

• **Os subespaços simétricos e antissimétricos de um produto tensorial**

Um caso de interesse especial na construção acima é aquele no qual todos os espaços de Hilbert $\mathcal{H}_j$, $j = 1, \ldots, n$, são iguais a um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, dado. Nessa situação podemos apresentar mais uma definição relevante: a dos subespaços simétricos e antissimétricos de um produto tensorial. Usaremos isso mais adiante quando apresentarmos as definição de espaços de Fock simétricos e antissimétricos.

Para lidar com esse caso vamos introduzir as notações

$$\mathcal{H}^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}}_{n \text{ vezes}} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{H}^{\overline{\otimes} n} := \underbrace{\mathcal{H} \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} \mathcal{H}}_{n \text{ vezes}} ,$$

com as convenções notacionais $\mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathcal{H}^{\overline{\otimes} 0} \equiv \mathbb{C}$ e $\mathcal{H}^{\otimes 1} = \mathcal{H}^{\overline{\otimes} 1} \equiv \mathcal{H}$.

Na Seção 2.3.7, página 230, apresentamos a definição dos operadores de simetrização e antissimetrização em produtos tensoriais algébricos de um mesmo espaço vetorial. Vamos agora trazer aquela discussão para o presente contexto de produtos tensoriais de espaços de Hilbert.

Para $n \geq 2$ podemos definir uma representação $\mathcal{P}_n$ do grupo de permutações de n elementos, S_n, em $\mathcal{H}^{\otimes n}$, da seguinte forma: se π é um elemento de S_n, definimos $\mathcal{P}_n(\pi) : \mathcal{H}^{\otimes n} \to \mathcal{H}^{\otimes n}$ como sendo o operador linear que a cada vetor da forma $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$ associa o vetor $u_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\pi(n)}$. Isso significa que $\mathcal{P}_n(\pi)$ age em vetores gerais de $\mathcal{H}^{\otimes n}$ na forma

$$\mathcal{P}_n(\pi) \left(\sum_{k=1}^{l} \alpha_k \, u_1^k \otimes \cdots \otimes u_n^k \right) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k \, u_{\pi(1)}^k \otimes \cdots \otimes u_{\pi(n)}^k ,$$

onde os α_k's são elementos de $\mathbb{C}$. É elementar constatar que $\mathcal{P}_n(\pi)\mathcal{P}_n(\pi') = \mathcal{P}_n(\pi\pi')$ para todos $\pi, \pi' \in S_n$ e que $\mathcal{P}_n(\mathbf{id}) = \mathbb{1}$, $\mathbf{id}$ sendo a identidade (elemento neutro) de S_n. Isso confirma que $\mathcal{P}_n$ é uma representação de S_n em $\mathcal{H}^{\otimes n}$.

Para $n = 0$ e $n = 1$ convencionamos que S_n é o grupo trivial (contendo apenas a identidade) e que em ambos os casos $\mathcal{P}_n(\mathbf{id}) = \mathbb{1}$, o operador identidade.

Dado que vale

$$\left\langle u_{\pi(1)}^j \otimes \cdots \otimes u_{\pi(n)}^j, \; u_{\pi(1)}^k \otimes \cdots \otimes u_{\pi(n)}^k \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}} = \left\langle u_{\pi(1)}^j, \, u_{\pi(1)}^k \right\rangle \cdots \left\langle u_{\pi(n)}^j, \, u_{\pi(n)}^k \right\rangle = \left\langle u_1^j, \, u_1^k \right\rangle \cdots \left\langle u_n^j, \, u_n^k \right\rangle$$

$$= \left\langle u_1^j \otimes \cdots \otimes u_n^j, \; u_1^k \otimes \cdots \otimes u_n^k \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}} ,$$

temos,

$$\left\| \mathcal{P}_n(\pi) \left(\sum_{k=1}^{l} \alpha_k \, u_1^k \otimes \cdots \otimes u_n^k \right) \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes n}}^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \, u_{\pi(1)}^j \otimes \cdots \otimes u_{\pi(n)}^j, \; \sum_{k=1}^{l} \alpha_k \, u_{\pi(1)}^k \otimes \cdots \otimes u_{\pi(n)}^k \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}}$$

$$= \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{l} \overline{\alpha_j} \alpha_k \left\langle u_{\pi(1)}^j \otimes \cdots \otimes u_{\pi(n)}^j, \; u_{\pi(1)}^k \otimes \cdots \otimes u_{\pi(n)}^k \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}} = \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{l} \overline{\alpha_j} \alpha_k \left\langle u_1^j \otimes \cdots \otimes u_n^j, \; u_1^k \otimes \cdots \otimes u_n^k \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}}$$

$$= \left\langle \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \, u_1^j \otimes \cdots \otimes u_n^j, \; \sum_{k=1}^{l} \alpha_k \, u_1^k \otimes \cdots \otimes u_n^k \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}} = \left\| \sum_{k=1}^{l} \alpha_k \, u_1^k \otimes \cdots \otimes u_n^k \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes n}}^2 ,$$

provando que $\mathcal{P}_n(\pi)$ é uma isometria para todo $\pi \in S_n$. Como $\mathcal{P}_n(\pi)$ tem uma inversa (que é $\mathcal{P}_n(\pi^{-1})$), vemos que ele pode ser estendido como operador unitário a todo $\mathcal{H}^{\overline{\otimes} n}$, pois $\mathcal{H}^{\otimes n}$ é denso em $\mathcal{H}^{\overline{\otimes} n}$. Como de costume, denotaremos essa extensão também por $\mathcal{P}_n(\pi)$.

Definimos agora o *operador de simetrização* $\mathcal{S}_n : \mathcal{H}^{\overline{\otimes} n} \to \mathcal{H}^{\overline{\otimes} n}$ e o *operador de antissimetrização* $\mathcal{A}_n : \mathcal{H}^{\overline{\otimes} n} \to \mathcal{H}^{\overline{\otimes} n}$, para $n \geq 2$, por

$$\mathcal{S}_n := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \mathcal{P}_n(\pi) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{A}_n := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sinal}(\pi) \, \mathcal{P}_n(\pi) , \tag{41.63}$$

respectivamente, onde $\operatorname{sinal}(\pi)$ é o sinal, ou paridade, de $\pi \in S_n$. Para $n = 0$ e $n = 1$ definimos $\mathcal{S}_0 = \mathcal{A}_0 = \mathbb{1}$ e $\mathcal{S}_1 = \mathcal{A}_1 = \mathbb{1}$, o operador identidade. Temos os seguintes fatos algébricos sobre esses operadores:

Proposição 41.14 *Com as definições e convenções acima, valem as seguintes afirmações:*

1. $\mathcal{S}_n \mathcal{P}_n(\pi) = \mathcal{P}_n(\pi) \mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n$ *para todo* $n \geq 0$ *e todo* $\pi \in S_n$.
2. $\mathcal{A}_n \mathcal{P}_n(\pi) = \mathcal{P}_n(\pi) \mathcal{A}_n = \operatorname{sinal}(\pi) \mathcal{A}_n$ *para todo* $n \geq 0$ *e todo* $\pi \in S_n$.
3. $\mathcal{S}_n^2 = \mathcal{S}_n$ *para todo* $n \geq 0$.
4. $\mathcal{A}_n^2 = \mathcal{A}_n$ *para todo* $n \geq 0$.
5. $\mathcal{S}_n \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n \mathcal{S}_n = 0$ *para todo* $n \geq 2$. *Para* $n = 0$ *e* $n = 1$ *valem* $\mathcal{S}_n \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n \mathcal{S}_n = \mathbb{1}$.
6. *Para todo* $n \geq 0$ *os operadores lineares* $\mathcal{S}_n$ *e* $\mathcal{A}_n$ *são operadores limitados e autoadjuntos em* $\mathcal{H}^{\overline{\otimes} n}$.

Os fatos que $\mathcal{S}_n^2 = \mathcal{S}_n$ *e* $\mathcal{A}_n^2 = \mathcal{A}_n$, *mais o fato de esses operadores serem autoadjuntos, dizem-nos que* $\mathcal{S}_n$ *e* $\mathcal{A}_n$ *são projetores ortogonais.* □

Prova. A demonstração dos itens de 1 a 5 é idêntica à da Proposição 2.24, página 230, e não precisa ser repetida aqui. Quanto ao item 6, que $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{A}_n$ são operadores limitados é evidente, por serem combinações lineares finitas de unitários — os operadores $\mathcal{P}_n(\pi)$. Fora isso, da unitariedade de $\mathcal{P}_n(\pi)$ e do fato de ser uma representação de S_n segue que $\mathcal{P}_n(\pi)^* = \mathcal{P}_n(\pi)^{-1} = \mathcal{P}_n\big(\pi^{-1}\big)$. Assim, como a associação $S_n \ni \pi \mapsto \pi^{-1} \in S_n$ é bijetora, segue que

$$\mathcal{S}_n^* \;=\; \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in S_n}\mathcal{P}_n\big(\pi^{-1}\big) \;=\; \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in S_n}\mathcal{P}_n(\pi) \;=\; \mathcal{S}_n\;,$$

mostrando que $\mathcal{S}_n$ é autoadjunto. A demonstração para $\mathcal{A}_n$ é idêntica. ■

Pelo Exercício E. 42.19, página 2391, os subespaços

$$\mathcal{H}_S^{\overline{\otimes} n} \;:=\; \mathrm{Ran}\,(\mathcal{S}_n) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{H}_A^{\overline{\otimes} n} \;:=\; \mathrm{Ran}\,(\mathcal{A}_n) \tag{41.64}$$

são dois subespaços fechados de $\mathcal{H}^{\overline{\otimes} n}$ e são interpretados como os subespaços dos vetores simétricos, respectivamente, antissimétricos por permutações.

Como $\mathcal{S}_n\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n\mathcal{S}_n = 0$, para $n \geq 2$ concluímos também que nesse mesmo caso temos $\mathcal{H}_S^{\overline{\otimes} n} \subset \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}_n)$ e $\mathcal{H}_A^{\overline{\otimes} n} \subset \mathrm{Ker}\,(\mathcal{S}_n)$. Pela Proposição 42.12, página 2389, temos $\mathrm{Ker}\,(\mathcal{S}_n) = \big(\mathcal{H}_S^{\overline{\otimes} n}\big)^{\perp}$ e $\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}_n) = \big(\mathcal{H}_A^{\overline{\otimes} n}\big)^{\perp}$. Assim, concluímos que

$$\mathcal{H}_S^{\overline{\otimes} n} \subset \big(\mathcal{H}_A^{\overline{\otimes} n}\big)^{\perp} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{H}_A^{\overline{\otimes} n} \subset \big(\mathcal{H}_S^{\overline{\otimes} n}\big)^{\perp} \qquad \text{para todo } n \,\geq\, 2\;. \tag{41.65}$$

Para $n = 2$ temos $\mathcal{H}_S^{\overline{\otimes} 2} = \big(\mathcal{H}_A^{\overline{\otimes} 2}\big)^{\perp}$ e $\mathcal{H}_A^{\overline{\otimes} 2} = \big(\mathcal{H}_S^{\overline{\otimes} 2}\big)^{\perp}$, pois $\mathcal{S}_2 + \mathcal{A}_2 = \mathbb{1}$, como se vê diretamente da definição (41.63). Para $n \geq 3$ as inclusões em (41.65) são *próprias*, pois, como também se vê de (41.63), o projetor ortogonal $\mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$ não é igual à identidade, mas é o projetor sobre o subespaço dos vetores invariantes por permutações *pares* (*i.e.*, com $\mathrm{sinal}\,(\pi) = 1$).

• **O determinante de Slater**

Seja $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d,\, d^dx)$ e sejam $\phi_1,\, \ldots,\, \phi_n$ vetores de $\mathcal{H}$. O vetor $\phi_1\otimes\cdots\otimes\phi_n \in \mathcal{H}^{\overline{\otimes} n}$ é representado pela função de n-variáveis $\phi_1(x_1)\cdots\phi_n(x_n) \in L^2(\mathbb{R}^{nd},\, d^{nd}x)$, $x_k \in \mathbb{R}^d$, $k = 1,\, \ldots,\, n$. O vetor $\phi_1\otimes_A\cdots\otimes_A\phi_n := \mathcal{A}_n\Big(\phi_1\otimes\cdots\otimes\phi_n\Big) \in \mathcal{H}_A^{\overline{\otimes} n}$, é representado pela função de n-variáveis

$$\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in S_n}\mathrm{sinal}\,(\pi)\phi_{\pi(1)}(x_1)\cdots\phi_{\pi(n)}(x_n) \;=\; \frac{1}{\sqrt{n!}}\left[\frac{1}{\sqrt{n!}}\det\begin{pmatrix}\phi_1(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \phi_1(x_n) & \cdots & \phi_n(x_n)\end{pmatrix}\right]. \tag{41.66}$$

A expressão entre colchetes (incluindo o fator de nomalização $\big(n!\big)^{-1/2}$) é denominada *determinante de Slater*[35] na Mecânica Quântica, tendo sido introduzida por esse autor em 1929[36] (e, anteriormente, por Heisenberg e Dirac) como forma de dar conta da antissimetria da função de onda de estados de n-partículas Fermiônicas idênticas.

E. 41.15 *Exercício*. Constate a validade da igualdade em (41.66). Use a *fórmula de Leibniz*, eqs. (3.11) ou (10.17), páginas 268 ou 551, respectivamente. ✣

41.3.4 Os Espaços de Fock

Os chamados *espaços de Fock*[37][38] são utilizados na Mecânica Quântica, na Física da Matéria Condensada, na Mecânica Estatística Quântica (notadamente em sistemas Fermiônicos e de spin, na rede), na Teoria Quântica de Muitos Corpos e na Teoria Quântica de Campos, assim como na Teoria de Grupos e nas Álgebras de Operadores (álgebras CAR e CCR).

[35] John Clarke Slater (1900–1976).
[36] J. Slater and H. C. Verma. *"The Theory of Complex Spectra"*. Physical Review, **34** (2), 1293–1322 (1929).
[37] Vladimir Aleksandrovich Fock (1898–1972).
[38] A referência original é: V. Fock, "Konfigurationsraum und zweite Quantelung". Zeitschrift für Physik, **75**, 622–647 (1932).

Definimos o chamado *espaço de Fock* associado a uma coleção $\{\mathcal{H}_j,\, j \in \mathbb{N}\}$ de espaços de Hilbert como sendo a soma direta (topológica) dos produtos tensoriais topológicos $\mathcal{H}_1\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}\mathcal{H}_n$, ou seja,

$$\mathfrak{F}\big(\{\mathcal{H}_j,\, j \in \mathbb{N}\}\big) \;:=\; \mathbb{C} \oplus \left(\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty}}\Big(\mathcal{H}_1\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}\mathcal{H}_n\Big)\right)$$

ou, na outra notação,

$$\mathfrak{F}\Big(\big\{\mathcal{H}_j,\, j \in \mathbb{N}\big\}\Big) \;:=\; \mathbb{C} \oplus \mathfrak{S}\Big(\Big\{\mathfrak{P}\big(\mathcal{H}_1,\, \ldots,\, \mathcal{H}_n\big),\, n \in \mathbb{N}\Big\}\Big)\,.$$

A inclusão do espaço de Hilbert $\mathbb{C}$ entre os somandos acima decorre de uma convenção útil proveniente da Física Quântica.

Trata-se, pela própria construção, de um espaço de Hilbert. Seus vetores são da forma $\Big(\psi_0,\, \psi_1,\, \psi_{12},\, \psi_{123},\, \ldots\Big)$, com $\psi_0 \in \mathbb{C}$, $\psi_1 \in \mathcal{H}_1$, $\psi_{12} \in \mathcal{H}_1\overline{\otimes}\mathcal{H}_2$, $\psi_{123} \in \mathcal{H}_1\overline{\otimes}\mathcal{H}_2\overline{\otimes}\mathcal{H}_3$ e, genericamente, $\psi_{1\ldots n} \in \mathcal{H}_1\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo

$$|\psi_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\big\|\psi_{1\ldots n}\big\|^2_{\mathcal{H}_1\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}\mathcal{H}_n} \;<\; \infty\;. \tag{41.67}$$

Dados $\Psi,\, \Phi \in \mathfrak{F}\Big(\big\{\mathcal{H}_j,\, j \in \mathbb{N}\big\}\Big)$, definimos seu produto escalar por

$$\Big\langle \Psi,\, \Phi\Big\rangle_{\mathfrak{F}} \;:=\; \overline{\psi_0}\phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\langle \psi_{1\ldots n},\;\; \phi_{1\ldots n}\Big\rangle_{\mathcal{H}_1\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}\mathcal{H}_n}\;. \tag{41.68}$$

Uma situação de particular interesse, especialmente nas aplicações supracitadas à Física Quântica, é aquela em que todos os espaços de Hilbert $\mathcal{H}_j$ são iguais: $\mathcal{H}_j = \mathcal{H}$, para todo j e algum espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

O espaço de Fock associado a $\mathcal{H}$, que denotaremos simplesmente por $\mathfrak{F}\big(\mathcal{H}\big)$, é definido por

$$\mathfrak{F}\big(\mathcal{H}\big) \;:=\; \overline{\bigoplus_{n=0}^{\infty}}\mathcal{H}^{\overline{\otimes} n}\,.$$

Seus vetores são da forma $\Big(\psi_0,\, \psi_1,\, \psi_{12},\, \psi_{123},\, \ldots\Big)$, com $\psi_0 \in \mathbb{C}$, $\psi_1 \in \mathcal{H}$ e $\psi_{1\ldots n} \in \mathcal{H}^{\overline{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo

$$|\psi_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\big\|\psi_{1\ldots n}\big\|^2_{\mathcal{H}^{\overline{\otimes} n}} \;<\; \infty\;.$$

Dados $\Psi,\, \Phi \in \mathfrak{F}\big(\mathcal{H}\big)$, definimos seu produto escalar por

$$\Big\langle \Psi,\, \Phi\Big\rangle_{\mathfrak{F}} \;:=\; \overline{\psi_0}\phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\langle \psi_{1\ldots n},\;\; \phi_{1\ldots n}\Big\rangle_{\mathcal{H}^{\overline{\otimes} n}}\;.$$

• **Os Espaços de Fock simétrico e antissimétrico**

De grande relevância para a Física Quântica, devido ao caráter exclusivamente Bosônico ou Fermiônico de estados de partículas idênticas em $3+1$ dimensões espaço-temporais, são os chamados espaços de Fock simétrico (ou Bosônico) ou antissimétrico (ou Fermiônico), os quais passamos a definir.

O chamado *espaço de Fock simétrico* e o chamado *espaço de Fock antissimétrico*, gerados pelo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, são definidos, respectivamente, por

$$\mathfrak{F}_S\big(\mathcal{H}\big) \;:=\; \overline{\bigoplus_{n=0}^{\infty}}\mathcal{H}_S^{\overline{\otimes} n} \qquad \text{e} \qquad \mathfrak{F}_A\big(\mathcal{H}\big) \;:=\; \overline{\bigoplus_{n=0}^{\infty}}\mathcal{H}_A^{\overline{\otimes} n}\;,$$

onde $\mathcal{H}_S^{\overline{\otimes} n}$ e $\mathcal{H}_A^{\overline{\otimes} n}$, os subespaços simétricos e antissimétricos de $\mathcal{H}^{\overline{\otimes} n}$, respectivamente, foram definidos em (41.64), página 2348. Claramente, $\mathfrak{F}_S\big(\mathcal{H}\big)$ e $\mathfrak{F}_S\big(\mathcal{H}\big)$ são dois subespaços de $\mathfrak{F}\big(\mathcal{H}\big)$.

Os subespaços $\mathfrak{F}_S(\mathcal{H})$ e $\mathfrak{F}_A(\mathcal{H})$ não são ortogonais. Devido a (41.65), página 2348, se $\Psi = \Big(\psi_0,\ \psi_1,\ \psi_{12},\ \psi_{123},\ \dots\Big) \in \mathfrak{F}_S(\mathcal{H})$ e $\Phi = \Big(\phi_0,\ \phi_1,\ \phi_{12},\ \phi_{123},\ \dots\Big) \in \mathfrak{F}_A(\mathcal{H})$, com $\psi_0,\ \phi_0 \in \mathbb{C}$, e $\psi_{1\dots n} \in \mathcal{H}_S^{\overline{\otimes} n}$ e $\phi_{1\dots n} \in \mathcal{H}_A^{\overline{\otimes} n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos,

$$\big\langle \Psi,\ \Phi \big\rangle_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} \ = \ \overline{\psi_0}\phi_0 + \langle \psi_1,\ \phi_1 \rangle_{\mathcal{H}} \ .$$

$$\Bigg[\Bigg[\Big[\big[\ \big]\Big]\Bigg]\Bigg]$$

Os espaços de Fock $\mathfrak{F}_S(\mathcal{H})$ e $\mathfrak{F}_A(\mathcal{H})$ são o ponto de partida para a definição das chamadas álgebras CCR e CAR (álgebras de relações canônicas de comutação e de anticomutação), duas classes importantes de álgebras C*. Trataremos das mesmas futuramente (vide, *e.g.*, [80]).

41.4 Coleções de Subespaços Fechados como Reticulados Ortomodulares

A noção de reticulado foi introduzida na Seção 2.1.2, página 119, e as noções de reticulados ortocomplementados e reticulados ortomodulares foram introduzidas na Seção 2.1.2.2, página 126. Para a leitura desta seção uma certa familiaridade com esses conceitos é necessária.

A noção de reticulado ortocomplementado surge de forma muito relevante em discussões sobre o veio a ser chamado *Lógica da Física Quântica*. Vamos apresentar um exemplo que dá um gosto dessa aplicação. Noções sobre espaços de Hilbert (especialmente o Teorema 41.3, página 2321) e sobre operadores limitados agindo em espaços de Hilbert (tema tratado no Capítulo 42, página 2359) também são requeridas no restante desta Seção. Por exemplo, falamos um pouco sobre projetores ortogonais agindo em espaços de Hilbert à página 2391.

• **Projetores ortogonais agindo em espaços de Hilbert**

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja O o conjunto de todos os projetores ortogonais em $\mathcal{H}$, ou seja, dos operadores lineares P agindo em $\mathcal{H}$ tais que $P = P^*$ e $P^2 = P$. O operador identidade $\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ e o operador nulo, $\mathbb{0}_{\mathcal{H}}$, são também projetores ortogonais.

Para $P \in O$, seja $\mathcal{H}_P = P\mathcal{H} \equiv \mathrm{Ran}\,(P)$, a imagem de $\mathcal{H}$ por P. O conjunto $\mathcal{H}_P$ é um subespaço linear fechado de $\mathcal{H}$ (vide Exercício E. 42.19, página 2391). Para o operador nulo, tem-se $\mathcal{H}_{\mathbb{0}_{\mathcal{H}}} = \{0\}$, o subespaço nulo de $\mathcal{H}$.

Reciprocamente, se $\mathcal{V}$ é um linear fechado de $\mathcal{H}$, o Teorema da Decomposição Ortogonal, Teorema 2.2, página 125, garante que todo $\psi \in \mathcal{H}$ pode ser decomposto de forma única como $\psi = \psi_{\mathcal{V}} + \psi_{\mathcal{V}^\perp}$, sendo $\psi_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ e $\psi_{\mathcal{V}^\perp} \in \mathcal{V}^\perp$. Defina-se o operador $P_{\mathcal{V}}$ por $P_{\mathcal{V}}\psi := \psi_{\mathcal{V}}$, a componente de ψ em $\mathcal{V}$. É fácil verificar que $P_{\mathcal{V}}$ é um operador linear e que é um projetor ortogonal: $P_{\mathcal{V}} = (P_{\mathcal{V}})^*$ e $(P_{\mathcal{V}})^2 = P_{\mathcal{V}}$. Para $\mathcal{V} = \{0\}$, o subespaço nulo de $\mathcal{H}$, temos $P_{\{0\}} = \mathbb{0}_{\mathcal{H}}$, o operador nulo agindo em $\mathcal{H}$.

E. 41.16 *Exercício*. Verifique as afirmações feitas acima. ✠

Assim, podemos associar O bijetivamente ao conjunto dos subespaços vetoriais fechados de $\mathcal{H}$. Doravante, salvo menção em contrário, vamos rotular cada projetor ortogonal pelo subespaço fechado no qual ele projeta os vetores de $\mathcal{H}$.

Observação. Vale comentar que o produto de dois projetores ortogonais P e Q nem sempre é um projetor ortogonal. De fato, $(PQ)^* = Q^*P^* = QP$ e, assim, a condição $(PQ)^* = PQ$ é cumprida se e somente se $QP = PQ$, em cujo caso teremos também $(PQ)^2 = PQPQ = P^2Q^2 = PQ$, que é a propriedade de idempotência. Resumindo, se P e Q são projetores ortogonais seu produto PQ é um projetor ortogonal se e somente se $PQ = QP$.

Por exemplo, se $P = P_{\mathcal{V}}$ e $Q = P_{\mathcal{W}}$ para dois subespaços fechados $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, tem-se para $\psi \in \mathcal{H}$ que $P_{\mathcal{V}}P_{\mathcal{W}}\psi \in \mathcal{V}$, mas $P_{\mathcal{W}}P_{\mathcal{V}}\psi \in \mathcal{W}$. Dessa forma, se $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{0\}$, os dois vetores $P_{\mathcal{V}}P_{\mathcal{W}}\psi$ e $P_{\mathcal{W}}P_{\mathcal{V}}\psi$ só podem ser iguais se forem ambos nulos, o que se dá se $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}^\perp$, o que equivale (pelo Lema 41.2, página 2318, e pela Proposição 41.2, página 2319) a $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}^\perp$.

Outra possibilidade para $P_{\mathcal{V}}P_{\mathcal{W}}\psi = P_{\mathcal{W}}P_{\mathcal{V}}\psi$ é termos $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ (ou vice-versa). De fato, se por exemplo $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$, então $P_{\mathcal{V}}P_{\mathcal{W}}\psi = P_{\mathcal{V}}\psi$ e também $P_{\mathcal{W}}P_{\mathcal{V}}\psi = P_{\mathcal{V}}\psi$.

Esses comentários motivam as definições que seguem em (41.69). ♣

• **Somas diretas de subespaços fechados em espaços de Hilbert**

Na Seção 41.2.1, página 2319, apresentamos a noção de soma direta de dois subespaços vetoriais fechados de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$: se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são subespaços vetoriais fechados de $\mathcal{H}$, definimos sua soma direta por

$$\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \ := \ \overline{\mathcal{U} + \mathcal{V}}\ ,$$

onde $\mathcal{U} + \mathcal{V} := \{u + v \in \mathcal{H} |\, u \in \mathcal{U},\ v \in \mathcal{V}\}$ e onde $\overline{\mathcal{U} + \mathcal{V}}$ denota o fecho de $\mathcal{U} + \mathcal{V}$. Na mencionada Seção é provado que $\overline{\mathcal{U} + \mathcal{V}} = \big(\mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{V}^\perp\big)^\perp$ e que a operação $\oplus$ é comutativa e associativa (Teorema 41.3, página 2321).

• **Fazendo o conjunto de projetores ortogonais um reticulado**

Afirmamos que O é um reticulado, com operações $\wedge$ e $\vee$ definidas por:

$$P_{\mathcal{V}} \vee P_{\mathcal{W}} \ := \ P_{\mathcal{V}\oplus\mathcal{W}} \quad \text{e} \quad P_{\mathcal{V}} \wedge P_{\mathcal{W}} \ := \ P_{\mathcal{V}\cap\mathcal{W}}\ . \tag{41.69}$$

O elemento 1 é o operador identidade em $\mathcal{H}$, $\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$, e o elemento 0 é o operador nulo em $\mathcal{H}$: $\mathbb{0}_{\mathcal{H}}$. Antes de prosseguir, observemos que, devido à bijetividade entre O e a coleção dos subespaços fechados de $\mathcal{H}$, podemos considerar que (41.69) induz operações de reticulado na coleção de subespaços fechados de $\mathcal{H}$, a saber,

$$\mathcal{V} \vee \mathcal{W} \ := \ \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \quad \text{e} \quad \mathcal{V} \wedge \mathcal{W} \ := \ \mathcal{V} \cap \mathcal{W}\ . \tag{41.70}$$

Verifiquemos que O é, de fato, um reticulado sob as operações (41.69):

- $P_{\mathcal{V}} \vee P_{\mathcal{V}} = P_{\mathcal{V}\oplus\mathcal{V}} = P_{\mathcal{V}}$ e $P_{\mathcal{V}} \wedge P_{\mathcal{V}} = P_{\mathcal{V}\cap\mathcal{V}} = P_{\mathcal{V}}$, verificando a idempotência (2.7);
- as propriedades $P_{\mathcal{V}} \wedge P_{\mathcal{W}} = P_{\mathcal{W}} \wedge P_{\mathcal{V}}$ e $P_{\mathcal{V}} \vee P_{\mathcal{W}} = P_{\mathcal{W}} \vee P_{\mathcal{V}}$ são óbvias pele definição (41.69), verificando a comutatividade (2.8).
- Verifiquemos a primeira das propriedades de associatividade (2.9): $P_{\mathcal{U}} \wedge (P_{\mathcal{V}} \wedge P_{\mathcal{W}}) = (P_{\mathcal{U}} \wedge P_{\mathcal{V}}) \wedge P_{\mathcal{W}}$. Desenvolvendo o lado esquerdo, temos

  $$P_{\mathcal{U}} \wedge (P_{\mathcal{V}} \wedge P_{\mathcal{W}}) \ = \ P_{\mathcal{U}} \wedge P_{\mathcal{V}\cap\mathcal{W}} \ = \ P_{\mathcal{U}\cap(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})} \ = \ P_{(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})\cap\mathcal{W}} \ = \ (P_{\mathcal{U}} \wedge P_{\mathcal{V}}) \wedge P_{\mathcal{W}}\ ,$$

  devido à associatividade da intersecção. Para verificar a segunda propriedade de associatividade (2.10), $P_{\mathcal{U}} \vee (P_{\mathcal{V}} \vee P_{\mathcal{W}}) = (P_{\mathcal{U}} \vee P_{\mathcal{V}}) \vee P_{\mathcal{W}}$ desenvolvemos:

  $$P_{\mathcal{U}} \vee (P_{\mathcal{V}} \vee P_{\mathcal{W}}) \ = \ P_{\mathcal{U}} \vee (P_{\mathcal{V}\oplus\mathcal{W}}) \ = \ P_{\mathcal{U}\oplus(\mathcal{V}\oplus\mathcal{W})} \ \overset{\text{assoc.}}{=} \ P_{(\mathcal{U}\oplus\mathcal{V})\oplus\mathcal{W}} \ = \ (P_{\mathcal{U}} \vee P_{\mathcal{V}}) \vee P_{\mathcal{W}}\ .$$

  Acima, usamos a já mencionada associatividade da soma direta de subespaços fechados, demonstrada no Teorema 41.3, página 2321.
- Para demonstrar a propriedade de absorvência devemos estabelecer que para projetores ortogonais $P_{\mathcal{U}}$ e $P_{\mathcal{V}}$, valem

  $$P_{\mathcal{U}} \wedge \big(P_{\mathcal{U}} \vee P_{\mathcal{V}}\big) \ = \ P_{\mathcal{U}} \quad \text{e} \quad P_{\mathcal{U}} \vee \big(P_{\mathcal{U}} \wedge P_{\mathcal{V}}\big) \ = \ P_{\mathcal{U}}\ , \tag{41.71}$$

  ou seja,

  $$P_{\mathcal{U}\cap(\mathcal{U}\oplus\mathcal{V})} \ = \ P_{\mathcal{U}} \quad \text{e} \quad P_{\mathcal{U}\oplus(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})} \ = \ P_{\mathcal{U}}\ . \tag{41.72}$$

  Mas, como $\mathcal{U}$ é fechado, $\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) = \mathcal{U} \cap (\overline{\mathcal{U} + \mathcal{V}}) = \overline{\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} + \mathcal{V})} = \overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$. Isso provou a primeira relação em (41.72). Para demonstrar a segunda, observemos que $\mathcal{U} \oplus (\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \overline{\mathcal{U} + (\mathcal{U} \cap \mathcal{V})} = \overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$, pois $\mathcal{U} + (\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \mathcal{U}$, já que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{U}$.

Isso estabeleceu que O é um reticulado sob as operações definidas em (41.69).

• **Comentário sobre a relação de ordem no reticulado dos projetores ortogonais**

Antes de prosseguirmos, façamos um comentário sobre a relação de ordem $P_{\mathcal{U}} \preceq P_{\mathcal{V}}$. Segundo a definição de relação de ordem em reticulados (2.13), página 121, $P_{\mathcal{U}} \preceq P_{\mathcal{V}}$ significa que $P_{\mathcal{U}} = P_{\mathcal{U}} \wedge P_{\mathcal{V}} \overset{(41.69)}{=} P_{\mathcal{U}\cap\mathcal{V}}$. Assim, $P_{\mathcal{U}} \preceq P_{\mathcal{V}}$ se e somente se $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, o que ocorre se e somente se $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Assim, em O a relação de ordem coincide com a relação de

inclusão dos subespaços fechados de $\mathcal{H}$. Segundo (2.13), tem-se equivalentemente $P_{\mathcal{U}} \preceq P_{\mathcal{V}}$ se e somente se $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, o que também é verdadeiro se e somente se $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$.

• **Fazendo o conjunto de projetores ortogonais um reticulado ortocomplementado**

Afirmamos que O é um reticulado ortocomplementado. A operação de ortocomplementaridade é definida em O por

$$(P_{\mathcal{V}})^{\perp} \ := \ P_{\mathcal{V}^{\perp}} \ = \ \mathbb{1}_{\mathcal{H}} - P_{\mathcal{V}} \ .$$

Verifiquemos as propriedade requeridas à ortocomplementaridade:

1. $\big((P_{\mathcal{V}})^{\perp}\big)^{\perp} = (P_{\mathcal{V}^{\perp}})^{\perp} = (P_{\mathcal{V}})$, pois $\mathcal{V}^{\perp\perp} = \mathcal{V}$, por este ser fechado. Isso verifica a propriedadede involução.
2. $(P_{\mathcal{V}})^{\perp} \vee P_{\mathcal{V}} = P_{\mathcal{V}^{\perp} \oplus \mathcal{V}} = P_{\mathcal{H}} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$, pois $\mathcal{V}^{\perp} \oplus \mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}^{\perp} + \mathcal{V}} = \mathcal{H}$. Além isso, $(P_{\mathcal{V}})^{\perp} \wedge P_{\mathcal{V}} = P_{\mathcal{V}^{\perp} \cap \mathcal{V}} = P_{\{0\}} = \mathbb{0}_{\mathcal{H}}$. Isso verifica a propriedade de complementaridade.
3. Vamos supor que $P_{\mathcal{U}} \preceq P_{\mathcal{V}}$, ou seja, $P_{\mathcal{U}} = P_{\mathcal{U}} \wedge P_{\mathcal{V}}$, o que, por nossas definições significa $P_{\mathcal{U}} = P_{\mathcal{U} \cap \mathcal{V}}$. Temos que $(P_{\mathcal{U}})^{\perp} \wedge (P_{\mathcal{V}})^{\perp} = P_{\mathcal{U}^{\perp}} \wedge P_{\mathcal{V}^{\perp}} = P_{\mathcal{U}^{\perp} \cap \mathcal{V}^{\perp}}$. Agora, por (41.20), página 2321, temos $\mathcal{U}^{\perp} \cap \mathcal{V}^{\perp} = (\overline{\mathcal{U} + \mathcal{V}})^{\perp} = (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V})^{\perp}$. Assim, estabelecemos que $(P_{\mathcal{U}})^{\perp} \wedge (P_{\mathcal{V}})^{\perp} = P_{(\mathcal{U} \oplus \mathcal{V})^{\perp}} = (P_{\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}})^{\perp} = (P_{\mathcal{U}} \vee P_{\mathcal{V}})^{\perp} = \Big((P_{\mathcal{U}} \wedge P_{\mathcal{V}}) \vee P_{\mathcal{V}}\Big)^{\perp}$, sendo que aqui usamos a hipótese $P_{\mathcal{U}} = P_{\mathcal{U}} \wedge P_{\mathcal{V}}$. Agora, pelas propriedades de simetria e de abservência, $(P_{\mathcal{U}} \wedge P_{\mathcal{V}}) \vee P_{\mathcal{V}} = P_{\mathcal{V}} \vee (P_{\mathcal{U}} \wedge P_{\mathcal{V}}) \overset{(41.71)}{=} P_{\mathcal{V}}$. Assim, provamos que $(P_{\mathcal{U}})^{\perp} \wedge (P_{\mathcal{V}})^{\perp} = (P_{\mathcal{V}})^{\perp}$, que equivale a afirmar que $(P_{\mathcal{V}})^{\perp} \preceq (P_{\mathcal{U}})^{\perp}$. Em resumo, estabececemos que se $P_{\mathcal{U}} \preceq P_{\mathcal{V}}$, então $(P_{\mathcal{V}})^{\perp} \preceq (P_{\mathcal{U}})^{\perp}$ demonstrando a propriedade de inversão de ordem.

   Uma forma menos algébrica e mais "geométrica" de provar a mesma coisa, e que vai ao encontro da ideia por trás da relação de ordem, é a seguinte. Vimos que $P_{\mathcal{U}} \preceq P_{\mathcal{V}}$ implica $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Tomando-se o complemento ortogonal dessa relação, temos $\mathcal{V}^{\perp} \subset \mathcal{U}^{\perp}$ e isso informa que $\mathcal{V}^{\perp} = \mathcal{V}^{\perp} \cap \mathcal{U}^{\perp}$. Isso se expressa em termos dos projetores pela igualdade $P_{\mathcal{V}^{\perp}} = P_{\mathcal{V}^{\perp} \cap \mathcal{U}^{\perp}} \overset{(41.69)}{=} P_{\mathcal{V}^{\perp}} \wedge P_{\mathcal{V}^{\perp}}$, que equivale à afirmação que $P_{\mathcal{V}^{\perp}} \preceq P_{\mathcal{U}^{\perp}}$, ou seja, $(P_{\mathcal{V}})^{\perp} \preceq (P_{\mathcal{U}})^{\perp}$, como desejávamos.

Isso estabeleceu que a operação $\perp$ é, de fato, uma operação de ortocomplementaridade e, consequentemente, que o conjunto dos projetores ortogonais em subespaços fechados de um espaço de Hilbert é um reticulado ortocomplementado.

• **Reticulados de projetores ortogonais são também ortomodulares**

O reticulado O, dos projetores ortogonais em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, não é, em geral, uma álgebra Booleana, pois carece, em geral, da propriedade de distributividade para as operações $\wedge$ e $\vee$. Porém, ele satisfaz uma versão mais fraca da distributividade, a chamada propriedade ortomodular (2.21), página 127, sendo, assim um reticulado ortomodular.

Desejamos provar que o reticulado O, dos projetores ortogonais em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, é também um reticulado ortomodular, ou seja, satifaz a propriedade (2.21), página 127, que neste caso assume a forma:

$$\text{Se } P_{\mathcal{U}} \preceq P_{\mathcal{V}}, \text{ ou seja, se } \mathcal{U} \subset \mathcal{V} \ , \text{ então } P_{\mathcal{U}} \vee \big(P_{\mathcal{U}^{\perp}} \wedge P_{\mathcal{V}}\big) \ = \ P_{\mathcal{V}} \ .$$

Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ dois subespaços fechados de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e vamos então supor que $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, o que implica $\mathcal{V}^{\perp} \subset \mathcal{U}^{\perp}$. Temos que

$$P_{\mathcal{U}} \vee (P_{\mathcal{U}^{\perp}} \wedge P_{\mathcal{V}}) \ = \ P_{\mathcal{U}} \vee P_{\mathcal{U}^{\perp} \cap \mathcal{V}} \ = \ P_{\mathcal{U} \oplus (\mathcal{U}^{\perp} \cap \mathcal{V})} \ . \tag{41.73}$$

Como $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{U}^{\perp}$ são fechados,

$$\mathcal{U} \oplus (\mathcal{U}^{\perp} \cap \mathcal{V}) \overset{(41.21)}{=} \Big(\mathcal{U}^{\perp} \cap (\mathcal{U}^{\perp} \cap \mathcal{V})^{\perp}\Big)^{\perp} \overset{(41.12)}{=} \Big(\mathcal{U}^{\perp} \cap \big(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}^{\perp}\big)\Big)^{\perp} \overset{(1.24)}{=} \Big((\mathcal{U}^{\perp} \cap \mathcal{U}) \cup (\mathcal{U}^{\perp} \cap \mathcal{V}^{\perp})\Big)^{\perp} ,$$

sendo que na última igualdade usamos a propriedade distributiva para intersecções de uniões descrita na segunda relação de (1.24), página 65. Agora, $\mathcal{U}^{\perp} \cap \mathcal{U} = \{0\}$ e $\mathcal{U}^{\perp} \cap \mathcal{V}^{\perp} = \mathcal{V}^{\perp}$, pois $\mathcal{V}^{\perp} \subset \mathcal{U}^{\perp}$. Assim, mostramos que $\mathcal{U} \oplus (\mathcal{U}^{\perp} \cap \mathcal{V}) = \big(\mathcal{V}^{\perp}\big)^{\perp} = \mathcal{V}$. Retornando com isso a (41.73), estabelecemos que, caso $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, ou seja, caso $P_{\mathcal{U}} \preceq P_{\mathcal{V}}$, então

$$P_{\mathcal{U}} \vee (P_{\mathcal{U}^{\perp}} \wedge P_{\mathcal{V}}) \ = \ P_{\mathcal{V}} \ .$$

Isso é precisamente a propriedade ortomodular de desejávamos estabelecer.

41.5 Exercícios Adicionais

E. 41.17 *Exercício*. Determine para quais valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a função $f_{\alpha}(x) = x^{\alpha}$ pertence: (*i*) ao espaço de Hilbert $L^2((0,\ 1),\ dx)$; (*ii*) ao espaço de Hilbert $L^2((0,\ \infty),\ dx)$; (*iii*) ao espaço de Hilbert $L^2((1,\ \infty),\ dx)$. ✠

E. 41.18 *Exercício*. Determine para quais valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a função $f_{\alpha}(x) = x^{\alpha} e^{-x}$ pertence: (*i*) ao espaço de Hilbert $L^2((0,\ 1),\ dx)$; (*ii*) ao espaço de Hilbert $L^2((0,\ \infty),\ dx)$; (*iii*) ao espaço de Hilbert $L^2((1,\ \infty),\ dx)$. ✠

E. 41.19 *Exercício*. Construa um exemplo de uma função $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ com as seguintes propriedades: (*i*) f é limitada em todo intervalo finito $(-a,\ a)$ com $0 < a < \infty$; (*ii*) f não é limitada em $\mathbb{R}$. ✠

E. 41.20 *Exercício*. Construa um exemplo de uma função satisfazendo as propriedades do exercício anterior e que seja também contínua. ✠

E. 41.21 *Exercício*. Prove que a bola aberta de raio 1 e a bola fechada de raio 1 de um espaço vetorial normado são convexas. ✠

E. 41.22 *Exercício*. Prove que o fecho de um conjunto convexo de um espaço vetorial normado é também convexo. ✠

E. 41.23 *Exercício*. Mostre que todo espaço de Hilbert separável é isometricamente isomorfo ou a algum $\mathbb{C}^n$ ou a ℓ_2. ✠

E. 41.24 *Exercício*. Seja $\mathcal{C}$ um conjunto não-vazio, fechado e convexo de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Mostre que existe em $\mathcal{C}$ um único vetor v cuja norma é mínima e que para tal v valem as propriedades $\mathrm{Re}\big(\langle x,\ x - v\rangle\big) \geq 0$ e $\mathrm{Re}\big(\langle v,\ x - v\rangle\big) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{C}$. Interprete o significado dessas desigualdades. ✠

E. 41.25 *Exercício*. Seja o espaço vetorial $\mathbb{C}^n$ e denote-se por $\langle a,\ b\rangle_{\mathbb{C}} := \overline{a_1} b_1 + \cdots + \overline{a_n} b_n$, para $a,\ b \in \mathbb{C}^n$, o produto escalar usual em $\mathbb{C}^n$. Usando o Lema de Riesz, mostre que todo produto escalar $\omega(x,\ y)$ (com $x,\ y \in \mathbb{C}^n$) definido em $\mathbb{C}^n$ é da forma $\langle x,\ Ay\rangle_{\mathbb{C}}$ para alguma matriz autoadjunta (em relação ao produto escalar usual) e de autovalores positivos A. ✠

E. 41.26 *Exercício*. Mostre que os espaços de Fock $\mathbb{C} \oplus \Big(\overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty} \big(\mathcal{H}_1 \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} \mathcal{H}_n\big)}\Big)$ também podem ser definidos como o completamento de $\mathbb{C} \oplus \Big(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \big(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n\big)\Big)$ na norma definida pelo lado esquerdo de (41.67), página 2349. ✠

Apêndices

41.A Um Exemplo: os Sistemas de Rademacher e de Walsh

As chamadas *funções de Rademacher*[39], denotadas por r_n, com $n \in \mathbb{N}_0$, são as definidas em $\mathbb{R}$ por

$$r_n(x) \;:=\; \text{sinal}\Big(\text{sen}\big(2^n \pi x\big)\Big)\,, \tag{41.A.1}$$

onde, aqui, definimos, para $y \in \mathbb{R}$

$$\text{sinal}\,(y) \;:=\; \begin{cases} 1\,, & \text{se } y > 0\,, \\ 0\,, & \text{se } y = 0\,, \\ -1\,, & \text{se } y < 0\,. \end{cases} \tag{41.A.2}$$

Podemos também escrever, para $n \in \mathbb{N}_0$,

$$r_n(x) \;=\; \begin{cases} (-1)^k\,, & \text{se } x \in \big(\frac{k}{2^n},\, \frac{k+1}{2^n}\big) \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\,, \\ 0\,, & \text{de outra forma.} \end{cases} \tag{41.A.3}$$

E. 41.27 *Exercício*. Verifique! ✠

Observe-se que pela definição (41.A.1) tem-se que todas as funções r_m têm período 1 e vale

$$r_n(x) \;=\; r_0\big(2^n x\big),\;\; \forall x \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{N}_0\,.$$

No que segue, estaremos interessados na restrição das funções de Rademacher ao intervalo $[0,\,1]$. Para gráficos dessas funções, vide Figura 41.A.1, página 2354.

O conjunto de funções $\mathscr{R} \equiv \{r_n : [0,\,1] \to \{-1,\,0,\,1\},\; n \in \mathbb{N}_0\}$ é denominado *sistema de Rademacher*.

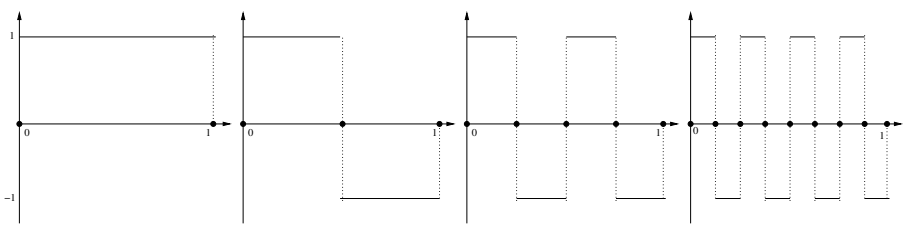

Figura 41.A.1: Da esquerda para a direita, gráficos esquemáticos das funções de Rademacher r_0, r_1, r_2 e r_3 no intervalo $[0,\,1]$.

Notemos que no intervalo $[0,\,1]$ a função r_0 vale 1, exceto nos pontos 0 e 1, onde se anula. Intuitivamente as funções r_n são definidas da seguinte forma. Para cada n particiona-se o intervalo $[0,\,1)$ em 2^n intervalos de largura igual $\big[k/2^n,\,(k+1)/2^n\big)$, com $k = 0,\,\ldots,\,2^n - 1$. Em seguida, define-se r_n em cada intervalo $\big(k/2^n,\,(k+1)/2^n\big)$ como sendo $(-1)^k$, ou seja, r_n é definido alternadamente como $+1$ ou -1, começando com $+1$ no primeiro intervalo $(0,\,1/2^n)$.

[39] Hans Adolph Rademacher (1892–1969).

Nos demais pontos de $[0,\,1]$, que são pontos de descontinuidade, r_n é definido como 0. Para r_{n+1} cada intervalo $\big(k/2^n,\,(k+1)/2^n\big)$ é dividido ao meio e r_{n+1} troca de sinal em cada metade, sempre começando com o sinal $+1$ no intervalo $(0,\,1/2^{n+1})$ e seguindo alternadamente nos demais. Cada r_{n+1} também se anula nos pontos de descontinuidade.

Vamos agora provar que $\mathscr{R}$ é um conjunto ortonormal em $L^2\big([0,\,1],\,dx\big)$. Em primeiro lugar, é claro que $\int_0^1 \big(r_n(x)\big)^2 dx = 1$, já que $\big(r_n(x)\big)^2$ só difere de $+1$ em um conjunto finito de pontos do intervalo $[0,\,1]$ (a saber, nos $2^n + 1$ pontos da forma $k/2^n$ com $k = 0,\,\ldots,\,2^n$). Consideremos agora as integrais $\int_0^2 r_m(x) r_n(x) dx$, com $0 \le n < m$. Podemos escrever

$$\int_0^1 r_n(x) r_m(x)\,dx \;=\; \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} r_n(x) r_m(x)\,dx \;\overset{(41.A.3)}{=}\; \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^k \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} r_m(x)\,dx\,.$$

Agora,

$$\Big[\frac{k}{2^n},\,\frac{k+1}{2^n}\Big) \;=\; \bigcup_{j=2^{m-n}k}^{2^{m-n}(k+1)-1} \Big[\frac{j}{2^m},\,\frac{j+1}{2^m}\Big)\,.$$

Assim,

$$\int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} r_m(x)\,dx \;=\; \sum_{j=2^{m-n}k}^{2^{m-n}(k+1)-1} \int_{j/2^m}^{(j+1)/2^m} r_m(x)\,dx \;\overset{(41.A.3)}{=}\; \frac{1}{2^m} \sum_{j=2^{m-n}k}^{2^{m-n}(k+1)-1} (-1)^j \;=\; 0$$

pois o número de somandos é $\big(2^{m-n}(k+1) - 1\big) - \big(2^{m-n}k\big) + 1 = 2^{m-n}$, que é um número par.

Portanto, estabelecemos que valem as relações de ortogonalidade

$$\int_0^1 r_n(x) r_m(x)\,dx \;=\; \delta_{mn}$$

para todos $m,\,n \in \mathbb{N}_0$ e, portanto, o sistema de Rademacher $\mathscr{R}$ é um conjunto ortonormal em $L^2\big([0,\,1],\,dx\big)$.

Apesar de ser um conjunto ortonormal infinito, $\mathscr{R}$ **não** é um conjunto ortogonal *completo*, pois há elementos de $L^2\big([0,\,1],\,dx\big)$ ortogonais a todos os elementos de $\mathscr{R}$.

Um exemplo de um tal elemento é a função $f(x) = r_1(x) r_2(x)$. Afirmamos que $\int_0^1 r_n(x) f(x) dx = 0$. De fato, para $n = 0$, r_0 é uma constante e a afirmação é uma decorrência da ortogonalidade de r_1 e r_2. Para $n = 1$ temos $\int_0^1 r_n(x) f(x) dx = \int_0^1 \big(r_1(x)\big)^2 r_2(x) dx = \int_0^1 r_2(x) dx = 0$, pois r_2 e r_0 são ortogonais. O caso $n = 2$ é idêntico.

Tomemos, portanto, $n \ge 3$. A função $r_1 r_2$ é constante em cada intervalo $\big(k/4,\,(k+1)/4\big)$ (onde r_2 também é constante). Agora, $\int_{k/4}^{(k+1)/4} r_n(x)\,dx = 0$, pois

$$\big[k/4,\,(k+1)/4\big) \;=\; \bigcup_{j=2^{n-2}k}^{2^{n-2}(k+1)-1} \Big[\frac{j}{2^n},\,\frac{j+1}{2^n}\Big)\,,$$

sendo o lado direito a união de $\big(2^{n-2}(k+1) - 1\big) - \big(2^{n-2}k\big) + 1 = 2^{n-2}$ intervalos (um número par), todos de mesmo comprimento, e de sorte que em cada um deles r_n vale $(-1)^j$ (exceto em um número finito de pontos, onde vale 0).

Além da função $r_1 r_2$ há uma coleção infinita contável de outras funções em $L^2\big([0,\,1],\,dx\big)$ que também são ortogonais ao sistema de Rademacher, todas formadas por produtos finitos de funções de Rademacher distintas. Essa afirmação baseia-se na seguinte generalização dos fatos expostos acima: para todo $a \in \mathbb{N}$ e $n_j \in \mathbb{N}_0$ $(j = 1,\,\ldots,\,a)$ com $0 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_a$ vale

$$\int_0^1 r_{n_1}(x) \cdots r_{n_a}(x)\,dx \;=\; 0\,.$$

A demonstração é a seguinte: quebramos a integral no intervalo $[0,\,1]$ em 2^{n_a-1} integrais nos intervalos $\big(k/2^{n_a-1},\,(k+1)/2^{n_a-1}\big)$, $k = 0,\,\ldots,\,2^{n_a-1} - 1$, todos de igual comprimento. Agora, é fácil ver que as funções $r_{n_1}(x)$, ..., $r_{n_{a-1}}(x)$ são constantes em cada um desses intervalos (pois, como n_a é maior que n_j para todo $j = 1,\,\ldots,\,a-1$, a partição que compõe o suporte da função $r_{n_a}(x)$ é mais fina que o suporte das $r_{n_1}(x)$, ..., $r_{n_{a-1}}(x)$). Assim, para cada k,

$$\int_{k/2^{n_a-1}}^{(k+1)/2^{n_a-1}} r_{n_1}(x) \cdots r_{n_{a-1}}(x) r_{n_a}(x)\,dx \;=\; \text{const.} \int_{k/2^{n_a-1}}^{(k+1)/2^{n_a-1}} r_{n_a}(x)\,dx \;=\; 0\,,$$

pois $r_{n_a}(x)$ tem sinal trocado em cada metade do intervalo $\big(k/2^{n_a-1},\ (k+1)/2^{n_a-1}\big)$.

Com isso, é fácil provar por indução (faça-o!) que o sistema

$$\mathscr{W} \ \equiv\ \Big\{ r_{n_1}\cdots r_{n_a},\ a\in\mathbb{N},\ n_j\in\mathbb{N}_0,\ j=1,\ \ldots,\ a,\ \text{ com }\ 0\le n_1<n_2<\cdots<n_a \Big\}$$

é um conjunto ortonormal em $L^2\big([0,\ 1],\ dx\big)$. Esse sistema é denominado *sistema de Walsh*[40] e é possível demonstrar que se trata de uma base ortonormal completa em $L^2\big([0,\ 1],\ dx\big)$. Para mais detalhes, vide [234], [172] ou o trabalho original [565]. Vide também [517].

41.B Exemplo de Subespaços Fechados Cuja Soma não é Fechada

Conforme prometido em nossa discussão sobre a soma $U+V$ de dois subespaços de um espaço de Hilbert (vide (41.13), página 2320), mostremos uma situação, extraída de livros-textos, na qual U e V são fechados, mas $U+V$ não é. Na lide com operadores não limitados, outros exemplos podem ser encontrados, mas desejamos manter a discussão aqui em um nível o mais elementar possível.

O espaço de Hilbert que consideraremos é $\ell^2(\mathbb{N})$, o espaço de Hilbert das sequências complexas de quadrado somável. Tomaremos

$$U\ :=\ \left\{ a_n\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{N},\ \text{com } a_n=0 \text{ para todo } n \text{ par e } \sum_{m=0}^{\infty}|a_{2m+1}|^2<\infty \right\},$$

ou seja,

$$U\ :=\ \left\{ (a_1,\ 0,\ a_3,\ 0,\ a_5,\ \ldots) \text{ com } \sum_{n=0}^{\infty}|a_{2n+1}|^2<\infty \right\}.$$

Em palavras, U é composto por todas as sequências de quadrado somável cujas componentes *pares* se anulam. O subespaço U é fechado por ser o complemento ortogonal do subespaço

$$\left\{ (0,\ b_2,\ 0,\ b_4,\ 0,\ \ldots)\ b_n\in\mathbb{C} \text{ para todo } n\in\mathbb{N}, \text{ com } \sum_{n=1}^{\infty}|b_{2n}|^2<\infty \right\}$$

composto por todas as sequências de quadrado somável cujas componentes *ímpares* se anulam.

O subespaço V que consideraremos é formado por todas as sequências $\{c_n\in\mathbb{C}\,, n\in\mathbb{N}\}\in\ell^2(\mathbb{N})$ com a seguinte peculiaridade: para cada $k\in\mathbb{N}$, ímpar, tem-se $c_{k+1}=k^{-1}c_k$. Assim, são independentes apenas as componentes ímpares dos elementos de V, sendo as componentes pares determinadas por seus antecessores. Um típico elemento de V é

$$\big(c_1,\ c_1,\ c_3,\ 3^{-1}c_3,\ c_5,\ 5^{-1}c_5,\ c_7,\ 7^{-1}c_7,\cdots\big)\,.$$

Naturalmente, a condição de uma tal sequência estar em $\ell^2(\mathbb{N})$ significa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big(1+(2n+1)^{-2}\big)|c_{2n+1}|^2\ <\ \infty.$$

V é fechado, pois se $(f_1,\ f_2,\ f_3,\ \cdots)\in\overline{V}$, então pode ser aproximado em norma por um elemento de V, ou seja, para todo $\epsilon>0$ existe $\big(c_1,\ c_1,\ c_3,\ 3^{-1}c_3,\ c_5,\ 5^{-1}c_5,\ \cdots\big)\in V$ tal que

$$\epsilon^2\ >\ \sum_{m=1}^{\infty}\big|f_m-c_m\big|^2\ =\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\big|f_{2n-1}-c_{2n-1}\big|^2+\big|f_{2n}-(2n-1)^{-1}c_{2n-1}\big|^2\Big)\,.$$

Com isso, vemos que para cada $n\in\mathbb{N}$ vale

$$\big|f_{2n-1}-c_{2n-1}\big|\ <\ \epsilon\quad\text{e}\quad\big|f_{2n}-(2n-1)^{-1}c_{2n-1}\big|\ <\ \epsilon\,.$$

[40] Joseph Leonard "Joe" Walsh (1895–1973).

Assim, vale para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$\big|f_{2n}-(2n-1)^{-1}f_{2n-1}\big|\ \le\ \big|f_{2n}-(2n-1)^{-1}c_{2n-1}\big|+\big|(2n-1)^{-1}c_{2n-1}-(2n-1)^{-1}f_{2n-1}\big|\ \le\ \big(1+(2n-1)^{-1}\big)\epsilon\,.$$

Logo, para cada $n\in\mathbb{N}$ vale $f_{2n}-(2n-1)^{-1}f_{2n-1}=0$, provando que a sequência $\{f_n\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}\}$ está em V.

E. 41.28 *Exercício*. Verifique! ✠

Uma vez posto que U e V são fechados, mostremos que $U+V$ contém o espaço das sequências finitas $\mathfrak{d}$, definido em (25.42), página 1466. Vide também Exercício E. 41.3, página 2319. De fato, os elementos de $U+V$ são da forma

$$\Big(a_1+c_1,\ c_1,\ a_3+c_3,\ 3^{-1}c_3,\ a_5+c_5,\ 5^{-1}c_5,\ a_7+c_7,\ 7^{-1}c_7\,,\cdots\Big)\,.$$

Vemos claramente que essa sequência pode ter elementos identicamente nulos a partir de qualquer $N\in\mathbb{N}$ dado se escolhermos a_m e c_m nulos para m grande o suficiente. Assim, $\mathfrak{d}\subset U+V$ e, portanto, pelo exposto no Exercício E. 41.3, página 2319, $\ell^2(\mathbb{N})=\overline{\mathfrak{d}}\subset\overline{U+V}$. Isso estabelece que $\overline{U+V}=\ell^2(\mathbb{N})$.

Vamos agora provar, porém, que $U+V$ é um subconjunto próprio de $\ell^2(\mathbb{N})$. Considere-se, para tal, a sequência $a_n=n^{-1}$, $n\in\mathbb{N}$, que certamente é um elemento de $\ell^2(\mathbb{N})$. Afirmamos que essa sequência não é um elemento de $U+V$. Se assim fosse, deveríamos ter na k-ésima posição, com k par: $(k-1)^{-1}c_{k-1}=k^{-1}$. Assim, para todo k par, valeria $c_{k-1}=\frac{k-1}{k}$. Com isso, porém, é impossível de a sequência $\{c_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ ser um elemento de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Concluímos, assim, que $U+V$ é um subconjunto próprio de $\ell^2(\mathbb{N})$, ainda que $\overline{U+V}=\ell^2(\mathbb{N})$. Se $U+V$ fosse fechado valeria $U+V=\overline{U+V}=\ell^2(\mathbb{N})$ o que vimos ser impossível, pois há vetores em $\ell^2(\mathbb{N})$ que não estão em $U+V$. Dessa forma, $U+V$ não é fechado.