Capítulo 43
Operadores Lineares Não-Limitados em Espaços de Hilbert

Sumário

O estudo de operadores não-limitados agindo em espaços de Hilbert é tema de particular importância para a Mecânica Quântica e para a Teoria Quântica de Campos, assim como para a teoria das Equações Diferenciais. A teoria básica dos operadores não-limitados em espaços de Hilbert foi desenvolvida originalmente por von Neumann[1] no final dos anos 20 e no início dos anos 30 do século XX, estendendo trabalhos anteriores de Hilbert e Schmidt sobre operadores limitados. O propósito de von Neumann era prover a então nascente Mecânica Quântica de fundamentos matemáticos adequados. Sua contribuição teve reflexos importantes no próprio quadro conceitual dessa teoria física. Desses esforços nasceram também alguns dos mais importantes desenvolvimentos iniciais da Análise Funcional e do estudo de Álgebras de Operadores.

O presente capítulo é dedicado ao estudo introdutório da teoria dos operadores não-limitados e, portanto[2], não-contínuos, agindo em um espaço de Hilbert. Nestas Notas, a teoria básica dos operadores limitados é desenvolvida no Capítulo 42, página 2383.

Uma notável distinção entre operadores limitados e não-limitados agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é que, devido ao Teorema BLT, Teorema 42.1, página 2389, podemos sempre assumir que um operador limitado está definido em todo $\mathcal{H}$. No caso de operadores não-limitados, porém, tal suposição não pode ser feita e somos desde o início confrontados com a necessidade de restringir seu domínio de definição a um subespaço linear próprio (eventualmente denso) de $\mathcal{H}$.

Por exemplo, no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, dx)$ o operador de multiplicação $(q\phi)(x) := x\phi(x)$, se aplicado à função $\phi(x) = \left(1+x^2\right)^{-1/2}$, que é um elemento de $L^2(\mathbb{R}, dx)$, produz uma função que não é mais elemento desse espaço (por não ser de quadrado integrável). Algo similar se dá em $L^2(\mathbb{R}, dx)$ com o operador de derivação $\frac{d}{dx}$, o qual, enquanto operador agindo nesse espaço, só pode ser aplicado sobre funções diferenciáveis (quase em toda parte) e cujas derivadas tenham quadrado integrável. Por exemplo, a função $x^{1/3}e^{-x^2}$ é de quadrado integrável em $\mathbb{R}$ e é diferenciável (exceto em $x = 0$), mas sua derivada não é um elemento de $L^2(\mathbb{R}, dx)$. Verifique!

É claro, com isso, que a definição de um operador não-limitado (e, portanto, não-contínuo) deve vir sempre acompanhada da especificação de seu domínio de definição. Podemos assim formalizar a definição de operador linear adequada

[1] János Neumann (1903–1957). Von Neumann também adotou os nomes de Johann von Neumann e John von Neumann.
[2] Pelo Proposição 42.1, página 2385.

ao presente contexto: em um espaço de Hilbert complexo $\mathcal{H}$, um operador linear $T : D(T) \to \mathcal{H}$, é uma aplicação entre um subespaço vetorial $D(T)$ de $\mathcal{H}$ (o domínio de definição de T) com valores em $\mathcal{H}$ tal que, para todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ e todo $u,\ v \in D(T)$ tem-se $T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv$. Para espaços de Hilbert reais a definição é similar.

É importante ao estudante mentalizar desde o início que a especificação de um domínio é parte integrante da definição de um operador linear e que propriedades do operador dependem intrinsecamente de propriedades de seu domínio. Tal fato é de crucial relevância para o caso de operadores não-contínuos em agindo em espaços de Hilbert, nosso presente objeto de estudo.

Como referências adicionais para o material aqui presente, recomendamos [299], [60], [453], [454], [419], [460], [470], [503] e [604].

*** ** * ** ***

No presente capítulo optamos por desenvolver a teoria sem a intromissão, no texto principal, de exemplos e contraexemplos ilustrativos das várias instâncias apresentadas. Eles são apresentados e discutidos com detalhe na Seção 43.4, página 2611. Ao serem mencionados o estudante poderá passar à sua leitura e retornar sem perdas. Devido à natureza um tanto abstrata de muitas das definições e resultados que encontraremos, o estudo detalhado dos exemplos e contraexemplos é fortemente recomendado.

43.1 Classificando Operadores Não-Limitados

"Todas as funções contínuas são semelhantes; as descontínuas o são cada uma à sua maneira".
Parodiando Lev Nikolaevitch Tolstoi (1828–1910), *"Anna Kariênina"*.

A paráfrase acima serve de moto para o trabalho de classificação de operadores não-limitados que ora iniciamos, introduzindo noções como a de *operadores fechados* e de *operadores fecháveis*, de operadores simétricos, essencialmente autoadjuntos, autoadjuntos etc. Comecemos nossa discussão introduzindo alguns conceitos.

• A soma direta $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$

Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, podemos dotar o produto Cartesiano $\mathcal{H} \times \mathcal{H} := \big\{(\psi,\ \phi),\ \psi,\ \phi \in \mathcal{H}\big\}$ de uma estrutura de espaço vetorial definindo

$$\alpha(\psi,\ \phi) + \beta(\psi',\ \phi') \ := \ \big(\alpha\psi + \beta\psi',\ \alpha\phi + \beta\phi'\big)$$

para todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ e todos $(\psi,\ \phi)$ e $(\psi',\ \phi') \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. É possível dotar o espaço vetorial assim constituído de um produto escalar, definindo-o por

$$\big\langle(\psi,\ \phi),\ (\psi',\ \phi')\big\rangle \ := \ \langle\psi,\ \psi'\rangle_{\mathcal{H}} + \langle\phi,\ \phi'\rangle_{\mathcal{H}} \tag{43.1}$$

para todos $(\psi,\ \phi)$ e $(\psi',\ \phi') \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, onde $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ é o produto escalar de $\mathcal{H}$. É um exercício simples provar que tal expressão realmente define um produto escalar compatível com a estrutura linear definida acima para $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. A norma associada a esse produto escalar é dada por

$$\big\|(\psi,\ \phi)\big\|^2 \ = \ \|\psi\|^2_{\mathcal{H}} + \|\phi\|^2_{\mathcal{H}} \tag{43.2}$$

como facilmente se constata. Essa norma faz de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ um espaço métrico e é um outro exercício simples constatar que $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ é completo em relação à mesma. Assim, com essas estruturas, $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, que passamos a denotar por $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, a soma direta de $\mathcal{H}$ consigo mesmo. Esse espaço de Hilbert desempenhará um papel relevante no desenvolvimento da teoria dos operadores não-limitados definidos em $\mathcal{H}$.

O produto escalar e a norma definidos em (43.1) e (43.2) passarão a ser denotados por $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$ e por $\|\cdot\|_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$, respectivamente. O produto escalar em $\mathcal{H}$ e a norma a ele associada continuarão a ser denotados por $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, respectivamente, ou simplesmente por $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ e $\|\cdot\|$, quando isso não causar confusão.

Vamos ainda recordar algumas definições básicas.

• O gráfico de um operador

Se $T : D(T) \to \mathcal{H}$ é um operador linear agindo em um subespaço linear $D(T)$ de $\mathcal{H}$, definimos o *gráfico de T* como sendo o subconjunto $\Gamma(T)$ de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ definido por

$$\Gamma(T) \ := \ \big\{(\varphi,\ T\varphi),\ \varphi \in D(T)\big\}\ .$$

É elementar constatar (faça-o!) que $\Gamma(T)$ é um subespaço linear de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Como veremos repetidamente, propriedades topológicas de $\Gamma(T)$ enquanto subconjunto do espaço de Hilbert $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ (como, por exemplo, se $\Gamma(T)$ é fechado ou não) refletem-se em propriedades do operador T. Uma tal conexão, aliás, já foi observada no Teorema do Gráfico Fechado, Teorema 42.9, página 2407.

• **Extensões de operadores**

Dados dois operadores $T_1 : D(T_1) \to \mathcal{H}$ e $T_2 : D(T_2) \to \mathcal{H}$ dizemos que T_2 é uma extensão de T_1 (ou que T_1 é estendido por T_2) se $D(T_1) \subset D(T_2)$ e se $T_1\varphi = T_2\varphi$ para todo $\varphi \in D(T_1)$.

É fácil constatar que essa definição é totalmente equivalente à seguinte: dizemos que T_2 é uma extensão de T_1 (ou que T_1 é estendido por T_2) se $\Gamma(T_1) \subset \Gamma(T_2)$.

Notação. Se um operador T é estendido por um operador S escrevemos $T \subset S$ ou $S \supset T$. Essa notação é reminiscente da noção primordial de função como uma relação entre conjuntos, tal como descrito na Seção 1.1, página 49. ◀

Se T_1 e T_2 satisfazem $T_1 \subset T_2$ e $T_2 \subset T_1$, então $\Gamma(T_1) \subset \Gamma(T_2)$ e $\Gamma(T_2) \subset \Gamma(T_1)$, o que implica $\Gamma(T_1) = \Gamma(T_2)$ e, portanto, implica $T_1 = T_2$.

• **Um produto escalar em $D(T)$**

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador linear. No subespaço $D(T)$ podemos definir um produto escalar por

$$\langle \varphi,\, \varphi' \rangle_T \;:=\; \langle \varphi,\, \varphi' \rangle_{\mathcal{H}} + \langle T\varphi,\, T\varphi' \rangle_{\mathcal{H}} \,, \qquad \varphi,\, \varphi' \in D(T)\,, \tag{43.3}$$

onde $\langle \cdot,\, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ é o produto escalar de $\mathcal{H}$. A norma associada ao mesmo é

$$\|\varphi\|_T^2 \;:=\; \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|T\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 \,.$$

Como veremos, é uma questão relevante saber quando $D(T)$ é completo na norma $\|\cdot\|_T$.

Para todo operador $T : D(T) \to \mathcal{H}$, vale trivialmente

$$\frac{\|T\varphi\|_{\mathcal{H}}^2}{\|\varphi\|_T^2} \;=\; \frac{\|T\varphi\|_{\mathcal{H}}^2}{\|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|T\varphi\|_{\mathcal{H}}^2} \;\leq\; 1$$

para todo $\varphi \in D(T)$ com $\varphi \neq 0$. Logo, todo operador $T : D(T) \to \mathcal{H}$ é limitado enquanto operador entre os espaços normados $(D(T),\, \|\cdot\|_T)$ e $(\mathcal{H},\, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$.

Passemos agora a uma importante classificação de operadores lineares em fechados ou fecháveis.

43.1.1 Operadores Fechados

Um operador linear $T : \underline{D(T)} \to \mathcal{H}$ é dito ser um *operador fechado* se $\Gamma(T)$ for um subespaço linear fechado de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Ou seja, T é fechado se $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(T)$, onde $\overline{\Gamma(T)}$ é o fecho de $\Gamma(T)$ na topologia de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

Recordemos que, pelo Teorema do Gráfico Fechado, Teorema 42.9, página 2407, todo operador limitado $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, definido em todo $\mathcal{H}$, possui gráfico fechado na topologia de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ e, portanto, todo operador limitado é fechado no sentido da definição acima.

Assim, um operador linear $T : D(T) \to \mathcal{H}$ é fechado se e somente se toda sequência $(\varphi_n,\, T\varphi_n) \in \Gamma(T)$ que for convergente em $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ convergir a um elemento de $\Gamma(T)$. Isso equivale a dizer que se existirem $(\varphi,\, \psi) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \big\|(\varphi_n,\, T\varphi_n) - (\varphi,\, \psi)\big\| \;=\; 0\,, \qquad \text{então} \qquad (\varphi,\, \psi) \in \Gamma(T)\,, \ \text{ ou seja, } \ \varphi \in D(T) \ \text{ e } \ \psi \;=\; T\varphi\,.$$

A condição $\lim_{n\to\infty} \big\|(\varphi_n,\, T\varphi_n) - (\varphi,\, \psi)\big\|_{\mathcal{H}} = 0$ se dá se e somente se $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ **e** $\psi = \lim_{n\to\infty} T\varphi_n$ na norma de $\mathcal{H}$. Com isso, podemos afirmar que T é fechado se e somente se a existência em $\mathcal{H}$ dos limites

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} T\varphi_n \qquad \text{implicar} \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi_n \in D(T) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} T\varphi_n \;=\; T\left(\lim_{n\to\infty} \varphi_n\right)\,.$$

Vide ainda Comentário 1 à página 2582, adiante.

No Exemplo 43.1, página 2611, exibimos um caso instrutivo de um operador que não é fechado, não sendo sequer fechável (vide a definição de operador fechável na Seção 43.1.2, página 2584). O estudante pode passar àquele exemplo, se o desejar, e retomar a leitura deste ponto.

A seguinte proposição apresenta-nos uma maneira alternativa de definir-se a noção de operador fechado:

Proposição 43.1 *Se $D(T)$ é um subespaço linear de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e $T : D(T) \to \mathcal{H}$ é um operador linear, então T é fechado se e somente se $D(T)$ for um espaço de Hilbert em relação ao produto escalar $\langle \cdot,\, \cdot \rangle_T$ definido em (43.3).* □

Prova. *Parte I.* Assumimos que $\Gamma(T)$ é fechado e provamos que $D(T)$ é completo na norma $\|\cdot\|_T$.

Se φ_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy em $D(T)$ em relação à norma $\|\cdot\|_T$, então para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\varphi_m - \varphi_n\|_{\mathcal{H}}^2 + \|T\varphi_m - T\varphi_n\|_{\mathcal{H}}^2 \;=:\; \|\varphi_m - \varphi_n\|_T^2 \;<\; \epsilon^2$$

sempre que m e n forem maiores que $N(\epsilon)$. Ora, essa relação diz que ambas as sequências $\{\varphi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, e $\{T\varphi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, são sequências de Cauchy em $\mathcal{H}$ na norma desse espaço de Hilbert. Portanto, como $\mathcal{H}$ é completo nessa norma, ambas convergem na métrica de $\mathcal{H}$ a vetores φ e $\psi \in \mathcal{H}$, respectivamente. Porém, como o gráfico de T é fechado, devemos ter $(\varphi,\, \psi) \in \Gamma(T)$ e, portanto, $\varphi \in D(T)$ e $\psi = T\varphi$. Resta provar que φ é o limite da sequência $\{\varphi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, também na norma $\|\cdot\|_T$. Porém,

$$\lim_{m\to\infty} \|\varphi_m - \varphi\|_T^2 \;=\; \lim_{m\to\infty} \left(\|\varphi_m - \varphi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|T\varphi_m - T\varphi\|_{\mathcal{H}}^2\right) \;=\; 0\,,$$

já que $\lim_{m\to\infty} \|\varphi_m - \varphi\|_{\mathcal{H}} = 0$ e $\lim_{m\to\infty} \|T\varphi_m - T\varphi\|_{\mathcal{H}} = \lim_{m\to\infty} \|T\varphi_m - \psi\|_{\mathcal{H}} = 0$.

Isso estabeleceu que sequências de Cauchy em $D(T)$ em relação à norma $\|\cdot\|_T$, convergem em $D(T)$ em relação à mesma norma, estabelecendo que $D(T)$ é um espaço de Hilbert para o produto escalar $\langle \cdot,\, \cdot \rangle_T$.

Parte II. Assumimos que $D(T)$ é completo na norma $\|\cdot\|_T$ e provamos que $\Gamma(T)$ é fechado.

Seja $\big\{(\varphi_n,\, T\varphi_n),\ n \in \mathbb{N}\big\}$ uma sequência em $\Gamma(T)$ que converge em $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ a um elemento $(\varphi,\, \psi)$. Desejamos provar que $(\varphi,\, \psi) \in \Gamma(T)$.

O fato de $\big\{(\varphi_n,\, T\varphi_n),\ n \in \mathbb{N}\big\}$ convergir a $(\varphi,\, \psi)$ em $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ significa que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|T\varphi_n - \psi\|_{\mathcal{H}}^2\right) \;=\; 0\,.$$

Logo, $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{H}} = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \|T\varphi_n - \psi\|_{\mathcal{H}} = 0$. Assim, ambas as sequências $\{\varphi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, e $\{T\varphi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, convergem na norma de $\mathcal{H}$ e, portanto, são sequências de Cauchy em relação a essa norma. Logo, para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|\varphi_m - \varphi_n\|_{\mathcal{H}} < \epsilon$ e $\|T\varphi_m - T\varphi_n\|_{\mathcal{H}} < \epsilon$ sempre que m e n forem ambos maiores que $N(\epsilon)$. Mas isso implica que

$$\|\varphi_m - \varphi_n\|_{\mathcal{H}}^2 + \|T\varphi_m - T\varphi_n\|_{\mathcal{H}}^2 \;\leq\; 2\epsilon^2$$

sempre que m e n forem ambos maiores que $N(\epsilon)$. Isso, por sua vez, equivale à afirmação que $\{\varphi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, é uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_T$. Como $D(T)$, por hipótese, é completo nessa norma, existe $\phi \in D(T)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \phi\|_T = 0$ ou seja, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|\varphi_n - \phi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|T\varphi_n - T\phi\|_{\mathcal{H}}^2\right) \;=\; 0\,. \tag{43.4}$$

Como antes, isso implica que $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \phi\|_{\mathcal{H}}^2 = 0$ e que $\lim_{n\to\infty} \|T\varphi_n - T\phi\|_{\mathcal{H}}^2 = 0$. Pela unicidade de limites em um espaço métrico segue que $\phi = \varphi$ (e, portanto, que $\varphi \in D(T)$) e que $\psi = T\phi = T\varphi$, estabelecendo que $(\varphi,\, \psi) \in \Gamma(T)$, como desejávamos. ■

• **Três comentários sobre a noção de operador fechado**

Comentário 1. Para melhor apreciação da definição de operador fechado é conveniente compará-la à de operador contínuo. Para um operador contínuo a convergência da sequência φ_n, $n \in \mathbb{N}$, implica a convergência da sequência $T\varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$, e implica $\lim_{n\to\infty} T\varphi_n = T\left(\lim_{n\to\infty} \varphi_n\right)$. Para um operador fechado é preciso supor a convergência de φ_n, $n \in \mathbb{N}$ **e** de $T\varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$ para que se possa ter a igualdade $\lim_{n\to\infty} T\varphi_n = T\left(\lim_{n\to\infty} \varphi_n\right)$.

Essa distinção entre operadores contínuos e fechados é ilustrada no seguinte exemplo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{se } x = 0\,, \\ \frac{1}{x}\,, & \text{se } x \neq 0\,. \end{cases}$$

A função f, evidentemente, não é contínua. Porém, se uma sequência x_n, $n \in \mathbb{N}$, for tal que os limites

$$\lim_{n\to\infty} x_n \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

ambos existem (o que, nesse caso, ocorre se e somente se $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ ou se $x_n = 0$ para todo n grande o suficiente), então $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$.

E. 43.1 *Exercício*. Demonstre essa afirmação! ♣

Esse caso deve ainda ser contrastado com o exemplo da função (dita de Dirichlet)

$$D(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}\,, \end{cases}$$

que também não é contínua e para a qual a existência dos limites $\lim_{n\to\infty} x_n$ e $\lim_{n\to\infty} D(x_n)$ **não** implica que valha $\lim_{n\to\infty} D(\varphi_n) = D\left(\lim_{n\to\infty} \varphi_n\right)$. Para ver isso, tome-se o caso em que x_n é uma sequência de racionais convergindo a um irracional (digamos, a π). Teremos que $\lim_{n\to\infty} x_n = \pi$ existe, que $D(x_n) = 1$ para todo n e, portanto $\lim_{n\to\infty} D(x_n) = 1$ existe, mas $D\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = D(\pi) = 0$ e, portanto, $\lim_{n\to\infty} D(x_n) \neq D\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$.

As funções f e D, acima, são ambas descontínuas mas, em um sentido informal, podemos dizer que a função D é ainda "mais descontínua" que a função f, pois as condições que garantem a igualdade $\lim_{n\to\infty} D(x_n) = D\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$ são mais restritivas que a existência de ambos os limites.

Operadores fechados (que não sejam limitados) assemelham-se à função f acima. Em um certo sentido, portanto, podemos dizer que a noção de operador fechado é o primeiro passo além da noção de operador contínuo com o qual podemos ainda manter uma certa funcionalidade operacional, como a troca de ordem de limites, indispensável a diversas manipulações. ♣

Comentário 2. Uma outra observação importante sobre operadores fechados é a seguinte. Se M e N são dois espaços topológicos com topologias τ_M e τ_N, respectivamente, dizemos que uma função $f : M \to N$ é uma *função fechada* em relação a essas topologias se a imagem por f de todo conjunto τ_M-fechado for um conjunto τ_N-fechado, ou seja, se para todo $F \subset M$ que seja τ_M-fechado valer que $f(F)$ é τ_N-fechado. Essa noção **não** é relacionada à noção de operador fechado que apresentamos acima e, por isso, o estudante deve ter o devido cuidado de não confundi-las. Trata-se de uma lamentável colisão de nomenclaturas. ♣

Comentário 3. Outra fonte de confusão para iniciantes (o que incluiu o autor destas notas) gira em torno do Teorema do Gráfico Fechado, Teorema 42.9, página 2407. Segundo esse teorema, se $T : X \to Y$ é um operador linear entre dois espaços de Banach X e Y (com $D(T) = X$), então T é contínuo enquanto aplicação entre os espaços topológicos X e Y se e somente se seu gráfico $\Gamma(T)$ for fechado como subconjunto do espaço topológico $X \oplus Y$.

Por que isso não implica que todo operador fechado T é contínuo enquanto operador de $D(T)$ em $\mathcal{H}$, ambos dotados da topologia definida pela norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$? A resposta é que $D(T)$ não é necessariamente um subespaço de Banach de $\mathcal{H}$ nessa norma. Se T for fechado, $D(T)$ é um espaço de Hilbert (e, portanto, de Banach) na norma $\|\cdot\|_T$ (pela Proposição 43.1, página 2582), mas não necessariamente na norma de $\mathcal{H}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

Uma informação que o Teorema do Gráfico Fechado efetivamente nos trás sobre operadores fechados é a seguinte. Já observamos que todo operador $T : D(T) \to \mathcal{H}$, fechado ou não, é limitado enquanto operador entre os espaços normados $(D(T),\ \|\cdot\|_T)$ e $(\mathcal{H},\ \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$. Assim, o Teorema do Gráfico Fechado, Teorema 42.9, página 2407, e a Proposição 43.1, página 2582, garantem-nos a validade do seguinte:

Proposição 43.2 *Se $D(T)$ é um subespaço linear de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e $T : D(T) \to \mathcal{H}$ é um operador linear fechado, então $\Gamma(T)$ será fechado enquanto subespaço linear de $D(T) \times \mathcal{H}$, adotando-se em $D(T)$ a topologia definida pela norma $\|\cdot\|_T$ e em $\mathcal{H}$ a topologia definida pela norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.* □

A afirmação dessa proposição, porém, é de pouca utilidade, por ser um tanto trivial, já que sob a hipótese de T ser fechado já sabemos que $(D(T),\ \|\cdot\|_T)$ é um espaço de Hilbert e T é limitado enquanto operador de $(D(T),\ \|\cdot\|_T)$ em $(\mathcal{H},\ \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$.

Uma consequência muito mais relevante do Teorema do Gráfico Fechado é a Proposição 43.3, página 2584, logo adiante. ♣

• Operadores fechados em domínios fechados são limitados

Uma observação importantes sobre operadores fechados está contida na seguinte proposição.

Proposição 43.3 *Se $T : D(T) \to \mathcal{H}$ for fechado e $D(T)$ for um subespaço fechado de $\mathcal{H}$, então T é limitado. Em particular, se T for fechado e $D(T) = \mathcal{H}$, então T é limitado.* □

Prova. Isso é um corolário imediato do Teorema do Gráfico Fechado, Teorema 42.9, página 2407. ■

Vemos assim que um operador fechado definido em todo o espaço de Hilbert é forçosamente limitado. Como veremos mais adiante (na forma do Teorema 43.3, página 2593), a Proposição 43.3 permite apresentar uma nova demonstração do Teorema de Hellinger-Toeplitz, Teorema 42.10, página 2409.

43.1.2 Operadores Fecháveis

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador linear, sendo $D(T)$ um subespaço linear de $\mathcal{H}$. O operador T é dito ser um *operador fechável* se possuir ao menos uma extensão fechada. Assim, T é fechavel se e somente se existir ao menos um operador S com $T \subset S$ e $\overline{\Gamma(S)} = \Gamma(S)$.

No Exemplo 43.1, página 2611, exibimos um exemplo instrutivo de um operador que não é fechável. O estudante pode passar àquele exemplo, se o desejar, e retomar a leitura deste ponto.

É evidente pela definição que todo operador fechado é fechável. Temos o seguinte fato básico sobre operados fecháveis:

Proposição 43.4 *Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador fechável. Então, existe um operador fechado $\overline{T}$ que estende T, $T \subset \overline{T}$, e possui as seguintes propriedades: 1º $\Gamma\big(\overline{T}\big) = \overline{\Gamma(T)}$ e 2º se S é qualquer operador fechado que estende T, então S também estende $\overline{T}$, ou seja, se S é qualquer operador fechado tal que $T \subset S$, então $T \subset \overline{T} \subset S$. Esse operador $\overline{T}$ é o único operador com tais propriedades.* □

O operador $\overline{T}$ é dito ser o *fecho* de T. O fecho $\overline{T}$ de T deve ser interpretado como o "menor" operador fechado que estende o operador fechável T, já que é estendido por todo outro operador fechado com tal propriedade.

Prova da Proposição 43.4. Se S for uma extensão de T, então $\Gamma(T) \subset \Gamma(S)$. Se S for uma extensão fechada de T, isso implica que $\overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S)$, pois $\Gamma(S) = \overline{\Gamma(S)}$.

Defina-se $\mathcal{T} \subset \mathcal{H}$ por

$$\mathcal{T} := \Big\{\phi \in \mathcal{H} \,\Big|\, (\phi,\ \psi) \in \overline{\Gamma(T)} \text{ para algum } \psi \in \mathcal{H}\Big\}\,.$$

Afirmamos que se $\phi \in \mathcal{T}$, então existe um e somente um $\psi \in \mathcal{H}$ tal que $(\phi,\ \psi) \in \overline{\Gamma(T)}$, ou seja, afirmamos que se dois pares do tipo $(\phi,\ \psi)$ e $(\phi,\ \psi')$ forem elementos de $\overline{\Gamma(T)}$, então $\psi = \psi'$. De fato, se ambos são elementos de $\overline{\Gamma(T)}$, são elementos de $\Gamma(S)$. Logo, $(\phi,\ \psi) = (\phi,\ S\phi)$ e $(\phi,\ \psi') = (\phi,\ S\phi)$, implicando que $\psi = S\phi = \psi'$.

Afirmamos também que $\mathcal{T}$ é um subespaço linear de $\mathcal{H}$. De fato, se $\phi_1,\ \phi_2 \in \mathcal{T}$, então existem $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathcal{H}$, únicos, tais que $(\phi_1,\ \psi_1) \in \overline{\Gamma(T)}$ e $(\phi_2,\ \psi_2) \in \overline{\Gamma(T)}$. Como $\overline{\Gamma(T)}$ é um subespaço linear, isso implica que $(\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2,\ \alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_2) \in \overline{\Gamma(T)}$ para todos $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{C}$, ou seja, que $\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 \in \mathcal{T}$.

Defina-se $\overline{T} : D\big(\overline{T}\big) \to \mathcal{H}$, com $D\big(\overline{T}\big) \equiv \mathcal{T}$, por $\overline{T}(\phi) = \psi$, onde ψ é o (único) elemento de $\mathcal{H}$ tal que $(\phi,\ \psi) \in \overline{\Gamma(T)}$. Como já vimos, se $(\phi_1,\ \psi_2) \in \overline{\Gamma(T)}$ e $(\phi_2,\ \psi_2) \in \overline{\Gamma(T)}$, então $\big(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2,\ \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\big) \in \overline{\Gamma(T)}$. Isso implica que $\overline{T}\big(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2\big) = \alpha_1\overline{T}(\phi_1) + \alpha_2\overline{T}(\phi_2)$, ou seja, isso implica que $\overline{T}$ é um operador linear.

É claro pela definição que se $\psi \in \mathcal{H}$ é tal que $(\phi,\ \psi) \in \overline{\Gamma(T)}$, então $\phi \in \mathcal{T} = D\big(\overline{T}\big)$ e $\psi = \overline{T}\phi$. Logo, temos que $\Gamma\big(\overline{T}\big) = \big\{(\phi,\ \overline{T}\phi),\ \phi \in D\big(\overline{T}\big)\big\} = \overline{\Gamma(T)}$, o que nos informa que $\overline{T}$ é um operador fechado e que é uma extensão de T, pois $\Gamma(T) \subset \overline{\Gamma(T)}$.

Se S é uma extensão fechada de T, então $\Gamma(T) \subset \Gamma(S)$ e, portanto, $\overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S)$, pois $\Gamma(S)$ é fechado e pela definição de fecho de um conjunto. Mas isso diz que $\Gamma\big(\overline{T}\big) \subset \Gamma(S)$, o que significa que $\overline{T} \subset S$.

Para provar a unicidade de $\overline{T}$, seja U uma outra extensão fechada de T tal que $T \subset U \subset S$ para toda extensão fechada S de T. Teremos $U \subset \overline{T}$, ao passo que vale também $\overline{T} \subset U$. Logo, $U = \overline{T}$. ■

A Proposição 43.4, página 2584, possui a seguinte consequência:

Corolário 43.1 *Um operador linear $T : D(T) \to \mathcal{H}$ é fechável se e somente se $\overline{\Gamma(T)}$, o fecho de seu gráfico, for o gráfico de um operador linear.* □

Prova. Se $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(S)$ para algum operador linear S, então S é fechado (pois $\overline{\Gamma(T)}$ é um conjunto fechado) e $\Gamma(T) \subset \overline{\Gamma(T)} = \Gamma(S)$, mostrando que $T \subset S$ e, assim, T é fechável por possuir ao menos uma extensão fechada. Por outro lado, se $T : D(T) \to \mathcal{H}$ é fechável, então a Proposição 43.4 afirma que $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(\overline{T})$. ■

Operadores não-fecháveis, ou seja, que não possuam extensões fechadas são de pouca relevância na Análise Funcional e suas aplicações e praticamente não há resultados relevantes que sejam válidos para os mesmos. A título de ilustração exibimos um operador de tal tipo no Exemplo 43.1, página 2611.

Se o desejar, o leitor poderá passar ao Exemplo 43.1, página 2611, e retornar a este ponto em seguida.

Outro exemplo elementar de operador não-fechável será exibido no Exemplo 43.2, página 2611.

43.1.3 O Adjunto de um Operador Linear

Na Seção 42.2.1, página 2410, foi introduzida a noção de adjunto de um operador limitado agindo em um espaço de Hilbert. Na presente seção apresentaremos a noção análoga para o caso de operadores não-limitados. Assim, como no caso de operadores limitados, essa noção revela-se um instrumento fundamental para a exploração de propriedades de operadores não-limitados.

Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador definido em um subespaço linear $D(T)$ de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Como discutiremos a seguir, o adjunto T^* de T só pode ser definido em um domínio de $\mathcal{H}$ se $D(T)$ for denso em $\mathcal{H}$ (de outra forma T^* tem de ser definido em um *coset* $\mathcal{H}/\overline{D(T)}$). Assim, só definiremos o adjunto de operadores densamente definidos.

Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ com $D(T)$ denso em $\mathcal{H}$. Para definirmos seu operador adjunto T^* comecemos especificando seu domínio de definição. O mesmo é dado por

$$D(T^*) := \Big\{\varphi \in \mathcal{H} \Big| \text{ existe } \eta \in \mathcal{H} \text{ tal que para todo } \psi \in D(T) \text{ vale } \langle\varphi,\, T\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle\eta,\, \psi\rangle_{\mathcal{H}}\Big\} .$$

Antes de prosseguirmos, façamos dois comentários importantes sobre a definição acima. Seja $\varphi \in D(T^*)$ e sejam η e $\eta' \in \mathcal{H}$ que satisfaçam $\langle\varphi,\, T\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle\eta,\, \psi\rangle_{\mathcal{H}}$ e $\langle\varphi,\, T\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle\eta',\, \psi\rangle_{\mathcal{H}}$ para todo $\psi \in D(T)$. Naturalmente, isso implica que $\langle\eta - \eta',\, \psi\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ para todo $\psi \in D(T)$. Como $D(T)$ está sendo suposto denso, isso implica que $\eta = \eta'$. Como veremos, essa unicidade é crucial para que se possa definir o adjunto T^* e é por isso que restringimos sua definição a operadores T tais que $D(T)$ seja denso em $\mathcal{H}$.

O segundo comentário é que $D(T^*)$ é um subespaço linear de $\mathcal{H}$. De fato, sejam $\varphi_1,\ \varphi_2$ elementos de $D(T^*)$ e sejam η_1 e η_2 os elementos de $\mathcal{H}$ tais que $\langle\varphi_j,\, T\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle\eta_j,\, \psi\rangle_{\mathcal{H}}$ para todo $\psi \in D(T)$, $j = 1,\ 2$. Teremos para todos $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{C}$ que

$$\big\langle(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2),\, T\psi\big\rangle_{\mathcal{H}} = \overline{\alpha_1}\big\langle\varphi_1,\, T\psi\big\rangle_{\mathcal{H}}+\overline{\alpha_2}\big\langle\varphi_2,\, T\psi\big\rangle_{\mathcal{H}} = \overline{\alpha_1}\big\langle\eta_1,\, \psi\big\rangle_{\mathcal{H}}+\overline{\alpha_2}\big\langle\eta_2,\, \psi\big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle(\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2),\, \psi\big\rangle_{\mathcal{H}} \tag{43.5}$$

para todo $\psi \in D(T)$, estabelecendo que $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \in D(T^*)$ e que este é um subespaço linear de $\mathcal{H}$.

Definimos $T^* : D(T^*) \to \mathcal{H}$ por $T^*\varphi := \eta$, onde η é o univocamente[3] definido elemento de $\mathcal{H}$ tal que $\langle\varphi,\, T\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle\eta,\, \psi\rangle_{\mathcal{H}}$ para todo $\psi \in D(T)$. As igualdades de (43.5) demonstram também que T^* assim definido é um operador linear. Temos, portanto, pela definição que

$$\big\langle\varphi,\, T\psi\big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle T^*\varphi,\, \psi\big\rangle_{\mathcal{H}} \tag{43.6}$$

para todos $\psi \in D(T)$ e para todos $\varphi \in D(T^*)$.

O estudante deve aperceber-se que toda a construção acima é feita de modo a garantir a validade de (43.6) nos domínios em que a mesma faça sentido. No caso de operadores limitados esse circunlóquio é dispensável, pois lá o Teorema da Representação de Riesz, Teorema 41.4, página 2348, garante-nos que podemos definir T^* em todo $\mathcal{H}$. Para que isso fique claro, revisite a discussão correspondente da Seção 42.2.1, página 2410.

[3] Aqui se faz visível porque a unicidade é relevante.

Uma observação de muita relevância é a seguinte. Já comentamos que T^* só pode ser definido como operador linear definido em $\mathcal{H}$ quando T for densamente definido. Isso, porém, não necessariamente implica T^* também seja densamente definido. Pode haver situações, e veremos exemplos, nas quais $D(T^*)$ não é denso em $\mathcal{H}$ ainda que $D(T)$ o seja. Uma consequência disso é que o duplo adjunto $(T^*)^*$ pode não estar definido, mesmo quando $D(T)$ for denso em $\mathcal{H}$.

Advertimos ainda o estudante que, mesmo quando $(T^*)^*$ estiver definido não será necessariamente verdade que $(T^*)^* = T$, isso só se dá em casos especiais (para operadores fechados). É um fato da vida que o tratamento e a manipulação de operadores não-limitados não apresenta facilidades comparáveis às dos operadores limitados.

No Exemplo 43.2, página 2611, exibimos um exemplo "patológico" ilustrativo de um operador não-fechável (e, portanto, não-fechado). Aquele exemplo exibe uma situação na qual $T^* = 0$ mesmo que T não seja o operador nulo, uma situação impossível no caso de operadores limitados. Nele vemos também que $D(T^*)$ não é denso em $\mathcal{H}$. Há exemplos ainda mais dramáticos nos quais T é densamente definido, mas $D(T^*) = \{0\}$ (em cujo caso tem-se também $T^* = 0$, evidentemente). Mais adiante (Teorema 43.2, página 2589) veremos que o fato de T não ser fechável está diretamente relacionado ao fato de $D(T^*)$ não ser denso.

Se o desejar, o leitor poderá passar ao Exemplo 43.2, página 2611, e retornar a este ponto em seguida.

• **Soma de operadores lineares e seu adjunto**

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e sejam $T : D(T) \to \mathcal{H}$ e $S : D(S) \to \mathcal{H}$ dois operadores lineares. Como podem existir elementos em $D(T)$ que não estão em $D(S)$, a soma de T e S só pode ser definida em $D(T) \cap D(S)$ (que, a propósito, pode ser composto apenas pelo vetor nulo!). Tomado esse cuidado de adotar $D(T + S) := D(T) \cap D(S)$, podemos definir a soma de T e S de maneira natural, como sendo o operador linear $(T + S) : D(T) \cap D(S) \to \mathcal{H}$ dado por

$$(T + S)\psi := T\psi + S\psi , \qquad \psi \in D(T) \cap D(S) . \tag{43.7}$$

Essa definição torna também evidente que $T + S = S + T$.

Caso $D(T)$ e $D(S)$ sejam ambos densos em $\mathcal{H}$, podemos, como vimos, definir seus adjuntos T^* e S^*, respectivamente, e, analogamente, sua soma $T^* + S^*$ estará definida em $D(T^*) \cap D(S^*)$, por

$$\big(T^* + S^*\big)\phi := T^*\phi + S^*\phi , \qquad \phi \in D(T^*) \cap D(S^*) .$$

Caso $D(T + S) := D(T) \cap D(S)$ também seja denso em $\mathcal{H}$ (o que pode não ocorrer, mesmo que $D(T)$ e $D(S)$ sejam ambos densos em $\mathcal{H}$!), poderemos definir $(T + S)^*$ em um domínio $D\big((T + S)^*\big)$. O estudante deve perceber que não é nada evidente que $(T + S)^*$ seja dado por $T^* + S^*$ (e isso pode não ser verdade), nem que seus domínios sejam iguais ou relacionados.

A determinação precisa de $D\big((T + S)^*\big)$ pode também não ser fácil. O resultado a seguir, porém, revela alguns fatos simples e úteis sobre a relação entre $D\big((T + S)^*\big)$ e $D(T^*) \cap D(S^*)$ e entre $(T + S)^*$ e $T^* + S^*$, com os quais podemos manipular adjuntos de somas com a devida cautela.

Proposição 43.5 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e sejam $T : D(T) \to \mathcal{H}$ e $S : D(S) \to \mathcal{H}$ dois operadores lineares densamente definidos, de modo que existam seus adjuntos $T^* : D(T^*) \to \mathcal{H}$ e $S^* : D(S^*) \to \mathcal{H}$, respectivamente. Vamos supor que $D(T + S) := D(T) \cap D(S)$ seja também denso em $\mathcal{H}$, de modo que $(T + S)^*$ esteja definido em um domínio $D\big((T + S)^*\big)$. Então, tem-se $D(T^*) \cap D(S^*) \subset D\big((T + S)^*\big)$ e a restrição de $(T + S)^*$ a $D(T^*) \cap D(S^*)$ é dada por $T^* + S^*$, ou seja,*

$$(T + S)^* \restriction_{D(T^*)\cap D(S^*)} = T^* + S^* .$$

□

Prova. Pela definição, se $D(T + S) := D(T) \cap D(S)$ for denso em $\mathcal{H}$, então

$$D\big((T + S)^*\big) := \Big\{\varphi \in \mathcal{H} \Big| \text{ existe } \eta \in \mathcal{H} \text{ tal que para todo } \psi \in D(T) \cap D(S) \text{ vale } \big\langle\varphi,\, (T + S)\psi\big\rangle_{\mathcal{H}} = \langle\eta,\, \psi\rangle_{\mathcal{H}}\Big\}$$

e tem-se

$$\big\langle\varphi,\, (T + S)\psi\big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle(T + S)^*\varphi,\, \psi\big\rangle_{\mathcal{H}}$$

para todo $\varphi \in D\big((T + S)^*\big)$ e todo $\psi \in D(T) \cap D(S)$. Agora, se $\psi \in D(T) \cap D(S)$, tem-se trivialmente

$$\big\langle\varphi,\, (T + S)\psi\big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle\varphi,\, T\psi\big\rangle_{\mathcal{H}} + \big\langle\varphi,\, S\psi\big\rangle_{\mathcal{H}}$$

e se $\varphi \in D(T^*) \cap D(S^*)$, podemos escrever

$$\big\langle \varphi,\ (T+S)\psi \big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big\langle T^*\varphi,\ \psi \big\rangle_{\mathcal{H}} + \big\langle S^*\varphi,\ \psi \big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big\langle (T^*+S^*)\varphi,\ \psi \big\rangle_{\mathcal{H}} \,,$$

para todo $\psi \in D(T) \cap D(S)$. Isso diz-nos claramente que se $\varphi \in D(T^*) \cap D(S^*)$, então $\varphi \in D\big((T+S)^*\big)$ e $(T+S)^*\varphi = (T^*+S^*)\varphi$, provando o que desejávamos ■

No caso em que S é um operador limitado as coisas são mais simples.

Proposição 43.6 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador linear e seja $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador limitado. Então, $D(T+A) := D(T)$.*

Se $D(T)$ for denso, então T^* e $(T+A)^*$ estão definidos e valem $D\big((T+A)^*\big) = D(T^*)$ e $(T+A)^* = T^* + A^*$. □

Prova. Se $T : D(T) \to \mathcal{H}$ é um operador definido em um subespaço linear $D(T)$ de $\mathcal{H}$ e $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um operador limitado, então a soma $T+A$ está definida em $D(T)$, pois $D(T+A) = D(T) \cap D(A) = D(T) \cap \mathcal{H} = D(T)$.

Para todo $\varphi \in D\big((T+A)^*\big)$ e todo $\psi \in D(T+A) = D(T)$, teremos

$$\big\langle (T+A)^*\varphi,\ \psi \big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big\langle \varphi,\ (T+A)\psi \big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big\langle \varphi,\ T\psi \big\rangle_{\mathcal{H}} + \big\langle \varphi,\ A\psi \big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big\langle \varphi,\ T\psi \big\rangle_{\mathcal{H}} + \big\langle A^*\varphi,\ \psi \big\rangle_{\mathcal{H}} \,.$$

Logo, se $\varphi \in D\big((T+A)^*\big)$

$$\big\langle \varphi,\ T\psi \big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \Big\langle \big((T+A)^* - A^*\big)\varphi,\ \psi \Big\rangle_{\mathcal{H}}$$

para todo $\psi \in D(T+A) = D(T)$. Isso afirma que $\varphi \in D(T^*)$ com $T^*\varphi = \big((T+A)^* - A^*\big)\varphi$. Assim, $D\big((T+A)^*\big) \subset D(T^*)$. Sabemos da Proposição 43.5, página 2586, que $D\big((T+A)^*\big) \supset D(T^*) \cap D(A^*) = D(T^*)$. Assim, provamos que $D\big((T+A)^*\big) = D(T^*)$ e vimos também que nesse domínio vale $T^* = (T+A)^* - A^*$, completando a demonstração. ■

Para $z \in \mathbb{C}$ definimos

$$T + z \;:=\; T + z\mathbb{1}$$

e, pela Proposição 43.6, temos, evidentemente, $D(T+z) = D(T)$. Também pela Proposição 43.6 é evidente que $D\big((T+z)^*\big) = D(T^*)$ e que

$$(T+z)^* \;=\; T^* + \overline{z} \,. \tag{43.8}$$

• A relação entre $\operatorname{Ker}(T^*)$ e $\operatorname{Ran}(T)^\perp$

A proposição a seguir é fundamental e reflete um teorema semelhante válido para operadores limitados (vide Proposição 42.12, página 2413).

Proposição 43.7 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador linear definido em um subespaço $D(T)$ denso em $\mathcal{H}$ (de modo que exista o operador adjunto $T^* : D(T^*) \to \mathcal{H}$). Então, valem*

$$\operatorname{Ker}\big(T^*\big) \;=\; \operatorname{Ran}\big(T\big)^\perp \tag{43.9}$$

e

$$\operatorname{Ker}\big(T^*\big)^\perp \;=\; \overline{\operatorname{Ran}\big(T\big)} \,. \tag{43.10}$$

□

Prova. Se $\psi \in \operatorname{Ker}\big(T^*\big)$, então (evidentemente) $\psi \in D(T^*)$ e $T^*\psi = 0$. Assim, para todo $\phi \in D(T)$ vale $\big\langle \psi,\ T\phi \big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle T^*\psi,\ \phi \big\rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Isso informa que $\psi \in \operatorname{Ran}\big(T\big)^\perp$, provando que $\operatorname{Ker}\big(T^*\big) \subset \operatorname{Ran}\big(T\big)^\perp$. Seja agora $\psi \in \operatorname{Ran}\big(T\big)^\perp$. Teremos $\big\langle \psi,\ T\phi \big\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ para todo $\phi \in D(T)$. Logo, $\psi \in D(T^*)$ e $\big\langle T^*\psi,\ \phi \big\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ para todo $\phi \in D(T)$. Como $D(T)$ é denso em $\mathcal{H}$, isso implica que $T^*\psi = 0$. Logo, provou-se que $\operatorname{Ran}\big(T\big)^\perp \subset \operatorname{Ker}\big(T^*\big)$, completando a demonstração de (43.9). A relação (43.10) segue de (43.9) e da Proposição 41.2, página 2343. ■

Corolário 43.2 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador linear definido em um subespaço $D(T)$ denso em $\mathcal{H}$ (de modo que o adjunto $T^* : D(T^*) \to \mathcal{H}$ esteja definido). Então,* $\operatorname{Ker}\big(T^*\big) = \{0\}$ *se e somente se* $\operatorname{Ran}\big(T\big)$ *for denso em $\mathcal{H}$.* □

Prova. Pela Proposição 43.7, página 2587, $\operatorname{Ker}\big(T^*\big) = \{0\}$ se e somente se $\operatorname{Ran}\big(T\big)^\perp = \{0\}$, o que se dá se e somente se $\operatorname{Ran}\big(T\big)$ for denso em $\mathcal{H}$. ■

• Relacionando o adjunto e o fecho de operadores lineares

Um dos motivos da importância da noção de adjunto de um operador reside no fato de que com o mesmo podemos encontrar uma condição necessária e suficiente para que um operador T seja fechável ($D(T^*)$ deve ser denso em $\mathcal{H}$). Além disso, caso T seja fechável, podemos obter seu fecho tomando duas vezes o adjunto de T, ou seja, $\overline{T} = T^{**}$. Nos resultados que seguem apresentaremos a prova dessas afirmações.

Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador definido em um subespaço linear $D(T)$ de $\mathcal{H}$. Vamos assumir que $D(T)$ seja denso em $\mathcal{H}$, de modo que T^* esteja definido. Para todos $\psi \in D(T)$ e $\phi \in D(T^*)$ temos a igualdade $\langle \phi,\ T\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle T^*\phi,\ \psi \rangle_{\mathcal{H}}$ a qual pode ser escrita em termos do produto escalar em $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ na forma

$$\Big\langle (\phi,\ T^*\phi),\ (-T\psi,\ \psi) \Big\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \;=\; 0 \,. \tag{43.11}$$

Esse fato sugere a seguinte definição. Seja $V : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ dado por

$$V(\xi,\ \zeta) \;:=\; (-\zeta,\ \xi) \tag{43.12}$$

para todo $(\xi,\ \zeta) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. É elementar constatar que V é linear, limitado com $\|V\| = 1$, que V é bijetor e que $V^{-1} = -V$. O cômputo

$$\Big\langle (\xi',\ \zeta'),\ V(\xi,\ \zeta) \Big\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \;=\; \Big\langle (\xi',\ \zeta'),\ (-\zeta,\ \xi) \Big\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \;=\; \langle -\xi',\ \zeta \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \zeta',\ \xi \rangle_{\mathcal{H}}$$

$$=\; \Big\langle (\zeta',\ -\xi'),\ (\xi,\ \zeta) \Big\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \;=\; \Big\langle -V(\xi',\ \zeta'),\ (\xi,\ \zeta) \Big\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$$

revela que $V^* = -V = V^{-1}$ e, consequentemente, que V é unitário. Com o uso de V podemos reescrever (43.11) e afirmar que para todos $\psi \in D(T)$ e $\phi \in D(T^*)$ vale

$$\Big\langle (\phi,\ T^*\phi),\ V(\psi,\ T\psi) \Big\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \;=\; 0 \,. \tag{43.13}$$

Disso obtemos um resultado que nos revela uma caracterização alternativa útil para o gráfico de T^*:

Lema 43.1 *Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador definido em um subespaço linear $D(T)$ denso em $\mathcal{H}$, de modo que seu adjunto T^* exista. Então, vale*

$$\Gamma(T^*) \;=\; V\big(\Gamma(T)^\perp\big) \;=\; V\big(\Gamma(T)\big)^\perp \,, \tag{43.14}$$

onde $V : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ é o operador unitário definido em (43.12). □

Prova. De (43.13) lemos que $\Gamma(T^*) \subset V\big(\Gamma(T)\big)^\perp$. Por outro lado, se $(\chi,\ \rho) \in V\big(\Gamma(T)\big)^\perp$, então para todo $\psi \in D(T)$ vale

$$0 \;=\; \Big\langle (\chi,\ \rho),\ V(\psi,\ T\psi) \Big\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \;=\; \Big\langle (\chi,\ \rho),\ (-T\psi,\ \psi) \Big\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \;=\; \langle \rho,\ \psi \rangle_{\mathcal{H}} - \langle \chi,\ T\psi \rangle_{\mathcal{H}} \,.$$

Pela definição de T^*, a validade da igualdade $\langle \chi,\ T\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \rho,\ \psi \rangle_{\mathcal{H}}$ para todo $\psi \in D(T)$ significa que $\chi \in D(T^*)$ e que $\rho = T^*\chi$, ou seja, que $(\chi,\ \rho) = (\chi,\ T^*\chi) \in \Gamma(T^*)$. Logo, provamos que $V\big(\Gamma(T)\big)^\perp \subset \Gamma(T^*)$ e, portanto, que $\Gamma(T^*) = V\big(\Gamma(T)\big)^\perp$. Do Lema 42.3, página 2415, temos que que $V\big(\Gamma(T)\big)^\perp = V\big(\Gamma(T)^\perp\big)$, pois V é unitário, e isso completa a prova de (43.14). ■

O seguinte corolário imediato do Lema 43.1 contém um resultado de grande importância:

Teorema 43.1 *Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador definido em um subespaço linear $D(T)$ denso em $\mathcal{H}$. Então, seu adjunto T^* é um operador fechado.* □

Prova. A igualdade $\Gamma(T^*) = V\big(\Gamma(T)\big)^\perp$ contida em (43.14) informa que $\Gamma(T^*)$ é fechado, pois o complemento ortogonal de qualquer subconjunto de um espaço de Hilbert é fechado (pelo Proposição 41.1, página 2341). Logo, T^* é um operador fechado. ■

A proposição a seguir pode ser provada diretamente da definição de adjunto de operadores, mas é mais sucinta e elegantemente apresentada como corolário do Lema 43.1.

Proposição 43.8 *Se para dois operadores lineares S e T definidos em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ tivermos $T \subset S$, então vale $S^* \subset T^*$.* □

Prova. Se $\Gamma(T) \subset \Gamma(S)$, então $\Gamma(S)^\perp \subset \Gamma(T)^\perp$ (Lema 41.2, página 2342). Logo $V\big(\Gamma(S)^\perp\big) \subset V\big(\Gamma(T)^\perp\big)$ e segue de (43.14) que $\Gamma(S^*) \subset \Gamma(T^*)$. ■

O operador V permite-nos ainda uma outra caracterização alternativa útil, a saber, para o fecho do gráfico de um operador linear.

Lema 43.2 *Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador definido em um subespaço linear $D(T)$ denso em $\mathcal{H}$, de modo que seu adjunto T^* exista. Então, vale*

$$\overline{\Gamma(T)} \;=\; V\big(\Gamma(T^*)\big)^\perp \;=\; V\big(\Gamma(T^*)^\perp\big) \,, \tag{43.15}$$

onde $V : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ é o operador unitário definido em (43.12). □

Prova. Se $\mathcal{E}$ for um subespaço linear de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, temos que $V^2(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, já que $V^2 = -\mathbb{1}$. Assim, podemos escrever

$$\overline{\Gamma(T)} \;=\; \big(\Gamma(T)^\perp\big)^\perp \;=\; V\Big(V\big(\Gamma(T)^\perp\big)\Big)^\perp \;\stackrel{(43.14)}{=}\; V\big(\Gamma(T^*)\big)^\perp \;=\; V\left(\Gamma(T^*)^\perp\right) \,,$$

sendo que na primeira igualdade evocamos a Proposição 41.2, página 2343, e na última igualdade evocamos novamente o Lema 42.3, página 2415. ■

O teorema a seguir é de importância fundamental na teoria dos operadores não-limitados, por fornecer uma condição necessária e suficiente para que um operador T seja fechável ($D(T^*)$ deve ser denso) e por fornecer uma expressão para seu fecho ($\overline{T} = T^{**}$), relacionando, assim, as noções de adjunto, fechabilidade e fecho de operadores.

Teorema 43.2 *Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador definido em um subespaço linear $D(T)$ denso em $\mathcal{H}$, de modo que seu adjunto T^* exista. Então, T é fechável se e somente se $D(T^*)$ for denso em $\mathcal{H}$.*

Além disso, se T for fechável, valem

$$\overline{T} \;=\; T^{**} \tag{43.16}$$

e

$$\big(\overline{T}\big)^* \;=\; T^* \,, \tag{43.17}$$

e combinando essas duas igualdades, obtemos ainda $T^* = T^{***}$. Ainda para T fechável, valem

$$\mathrm{Ran}\,\big(\overline{T}\big)^\perp \;=\; \mathrm{Ran}\,(T)^\perp \qquad e \qquad \overline{\mathrm{Ran}\,\big(\overline{T}\big)} \;=\; \overline{\mathrm{Ran}\,(T)} \,. \tag{43.18}$$

□

Prova. Se $D(T^*)$ for denso em $\mathcal{H}$ podemos definir o adjunto de T^*, que denotamos por T^{**} (i.e., $T^{**} := \big(T^*\big)^*$). Assim, de (43.14) obtemos que

$$\Gamma\big(T^{**}\big) \;=\; V\Big(\Gamma\big(T^*\big)^\perp\Big) \,. \tag{43.19}$$

Logo,

$$\Gamma(T) \;\subset\; \overline{\Gamma(T)} \;\stackrel{(43.15)}{=}\; V\Big(\Gamma\big(T^*\big)^\perp\Big) \;\stackrel{(43.19)}{=}\; \Gamma\big(T^{**}\big) \,.$$

Isso informa-nos que $T \subset T^{**}$. Pelo Teorema 43.1, página 2589, T^{**} é fechado, e concluímos que T é fechável, por ter uma extensão fechada.

Seja T fechável e suponhamos que $D(T^*)$ não seja denso em $\mathcal{H}$. Então, existe ψ não-nulo com $\psi \in \Big(\overline{D(T^*)}\Big)^\perp$. Com isso, para todo $\phi \in D\big(T^*\big)$ teremos em $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$

$$\Big\langle (\psi,\, 0),\, (\phi,\, T^*\phi) \Big\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \;=\; \langle \psi,\, \phi \rangle_{\mathcal{H}} \;=\; 0 \,.$$

Logo, $(\psi,\, 0) \in \Gamma(T^*)^\perp$ e, portanto,

$$(0,\, \psi) \;=\; V(\psi,\, 0) \;\in\; V\big(\Gamma(T^*)^\perp\big) \;\stackrel{(43.15)}{=}\; \overline{\Gamma(T)} \,.$$

Mas o fato de existir $\psi \neq 0$ tal que $(0,\, \psi) \in \overline{\Gamma(T)}$ revela que $\overline{\Gamma(T)}$ não é o gráfico de um operador linear e, portanto, T não é fechável, um contradição. Isso estabeleceu que T é fechável se e somente se $D(T^*)$ for denso em $\mathcal{H}$.

Se T for fechável, então $D(T^*)$ é denso em $\mathcal{H}$. Logo,

$$\Gamma\big(\overline{T}\big) \;=\; \overline{\Gamma(T)} \;\stackrel{(43.15)}{=}\; V\big(\Gamma(T^*)\big)^\perp \;\stackrel{(43.19)}{=}\; \Gamma\big(T^{**}\big) \,,$$

sendo que na primeira igualdade usamos a Proposição 43.4, página 2584. Isso provou que

$$\overline{T} \;=\; T^{**} \,. \tag{43.20}$$

Finalmente, observe-se que T^* é fechado (pelo Teorema 43.1, página 2589) e, consequentemente, pelo que já vimos na presente demonstração, $D\big(T^{**}\big)$ é denso em $\mathcal{H}$, implicando que $\big(T^{**}\big)^*$ está definido e vale $\big(T^{**}\big)^* = \Big(\big(T^*\big)^*\Big)^* = \big(T^*\big)^{**}$. Assim,

$$T^* \;=\; \overline{(T^*)} \;\stackrel{(43.20)}{=}\; \big(T^*\big)^{**} \;=\; \big(T^{**}\big)^* \;\stackrel{(43.20)}{=}\; \big(\overline{T}\big)^* \,.$$

estabelecendo (43.17).

A primeira relação em (43.18) segue de $\mathrm{Ran}\,\big(\overline{T}\big)^\perp \stackrel{(43.9)}{=} \mathrm{Ker}\,\big(\big(\overline{T}\big)^*\big) \stackrel{(43.17)}{=} \mathrm{Ker}\,\big(T^*\big) \stackrel{(43.9)}{=} \mathrm{Ran}\,\big(T\big)^\perp$. Que $\overline{\mathrm{Ran}\,\big(\overline{T}\big)} = \overline{\mathrm{Ran}\,\big(T\big)}$ segue disso e da Proposição 41.2, página 2343. ■

Antes de prosseguirmos, notemos que por (43.8) e por (43.16) tem-se, para T fechável e para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\overline{T+z} \;=\; \overline{T} + z \,.$$

43.1.3.1 Operadores Simétricos, Autoadjuntos e Essencialmente Autoadjuntos

No contexto de operadores limitados agindo em espaços de Hilbert é bem-conhecida a relevância da noção de operador autoadjunto. Tais operadores desempenham um papel estrutural e surgem de maneira importante em aplicações, notadamente à Física Quântica. No caso de operadores não-limitados tal noção é igualmente importante, mas aqui um certo cuidado é necessário para defini-la propriamente sem que se percam propriedades que operadores autoadjuntos apresentam no contexto da teoria dos operadores limitados, como por exemplo a propriedade de apresentarem espectro real, a validade do Teorema Espectral (que os coloca em contacto com a interpretação probabilística da Física Quântica), a propriedade de suas exponenciais gerarem grupos unitários (outra propriedade relevante para a Física Quântica) etc.

Como veremos na discussão que segue, para operadores não-limitados agindo em espaços de Hilbert há de se distinguir a noção de operador simétrico (ou Hermitiano) da noção de operador autoadjunto (noções sinônimas no caso de operadores limitados). Muito importante, também, especialmente em aplicações à Física Quântica, é a noção de operador essencialmente autoadjunto, a qual também introduziremos e discutiremos.

• **Operadores simétricos ou Hermitianos**

Definição. Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador linear definido em um subespaço linear denso $D(T)$ de $\mathcal{H}$, de sorte que T^* está definido. Dizemos que T é um *operador simétrico* ou um *operador Hermitiano* se para todos $\psi, \phi \in D(T)$ valer $\langle \phi, T\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle T\phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}}$. ♠

É fácil perceber que isso equivale a dizer que $D(T) \subset D(T^*)$ e que $T\phi = T^*\phi$ para todo $\phi \in D(T)$, ou seja, equivale a dizer que $T \subset T^*$. Assim, temos a seguinte definição equivalente:

Definição. Um operador $T : D(T) \to \mathcal{H}$ densamente definido em $\mathcal{H}$ é dito ser *simétrico* ou *Hermitiano* se $T \subset T^*$. ♠

Se $T \subset T^*$, então T é fechável (pois T^* é sempre fechado, pelo Teorema 43.1, página 2589), e, portanto, vale

$$T \subset \overline{T} \subset T^* . \tag{43.21}$$

Além disso, como $D(T) \subset D(T^*)$, então $D(T^*)$ é também denso, o que significa dizer que T^{**} está definido e tem-se $\overline{T} = T^{**}$ (pelo Teorema 43.2, página 2589). Assim, para operadores simétricos tem-se de (43.21)

$$T \subset \overline{T} \overset{(43.16)}{=} T^{**} \subset T^* \overset{(43.17)}{=} \left(\overline{T}\right)^* . \tag{43.22}$$

A expressão (43.22) contém uma informação que destacamos para referência futura:

Proposição 43.9 *Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador simétrico. Então, seu fecho $\overline{T}$ é também simétrico.* □

Prova. Segundo (43.22), vale $\overline{T} \subset \left(\overline{T}\right)^*$. ■

O resultado a seguir será usado diversas vezes no que segue.

Lema 43.3 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador linear densamente definido e simétrico. Então, para todo $\varphi \in D(T)$, vale*

$$\left\|(T \pm i)\varphi\right\|^2 = \left\|T\varphi\right\|^2 + \left\|\varphi\right\|^2 \tag{43.23}$$

e, portanto, vale

$$\|\varphi\|_T^2 \equiv \left\|\left(\varphi, T\varphi\right)\right\|^2_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} = \left\|(T \pm i)\varphi\right\|^2 . \tag{43.24}$$

□

Prova. Se $\varphi \in D(T)$, então

$$\left\|(T+i)\varphi\right\|^2 = \left\langle (T+i)\varphi, (T+i)\varphi \right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle T\varphi, T\varphi\rangle_{\mathcal{H}} + \langle i\varphi, i\varphi\rangle_{\mathcal{H}} + \langle T\varphi, i\varphi\rangle_{\mathcal{H}} + \langle i\varphi, T\varphi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle T\varphi, T\varphi\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \varphi, \varphi\rangle_{\mathcal{H}} ,$$

pois

$$\langle T\varphi, i\varphi\rangle_{\mathcal{H}} = i\langle T\varphi, \varphi\rangle_{\mathcal{H}} = i\langle \varphi, T\varphi\rangle_{\mathcal{H}} = -\langle i\varphi, T\varphi\rangle_{\mathcal{H}} ,$$

sendo que, na segunda igualdade acima, usamos que T é simétrico. De forma análoga, prova-se que $\left\|(T - i)\varphi\right\|^2 = \left\|T\varphi\right\|^2 + \|\varphi\|^2$. ■

• **Operadores simétricos fechados**

Vimos que um operador simétrico é sempre fechável. Se um operador $T : D(T) \to \mathcal{H}$ densamente definido for simétrico e *fechado*, (43.22) fica

$$T = \overline{T} = T^{**} \subset T^* = \left(\overline{T}\right)^* . \tag{43.25}$$

O seguinte resultado sobre operadores simétricos fechados será evocado no que segue.

Lema 43.4 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador linear densamente definido, simétrico e fechado. Então,* $\mathrm{Ran}\left(T \pm i\right)$ *são ambos fechados em $\mathcal{H}$.* □

Prova curta. Por hipótese, $\Gamma(T)$ é fechado e, portanto, é um subespaço de Hilbert de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Por (43.24), as aplicações $W_\pm : \Gamma(T) \to \mathcal{H}$ definidas por $W_\pm(\varphi, T\varphi) := (T \pm i)\varphi$ são isometrias. Logo, pela Proposição 42.3, página 2388, $\mathrm{Ran}\left(W_\pm\right) = \mathrm{Ran}\left(T \pm i\right)$ é fechado em $\mathcal{H}$. ■

Prova longa. Provemos que $\mathrm{Ran}\left(T + i\right)$ é fechado em $\mathcal{H}$. Seja em $\mathrm{Ran}\left(T + i\right)$ uma sequência $(T + i)\phi_n$, $n \in \mathbb{N}$, com $\phi_n \in D(T)$, que convirja em $\mathcal{H}$. A convergência dessa sequência implica que a mesma é uma sequência de Cauchy. Logo, para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|(T + i)(\phi_m - \phi_n)\right\| = \left\|(T + i)\phi_m - (T + i)\phi_n\right\| < \epsilon$ sempre que m e n forem maiores que $N(\epsilon)$. Por (43.24), temos

$$\left\|\left(\phi_m - \phi_n, T(\phi_m - \phi_n)\right)\right\|_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} = \left\|(T + i)(\phi_m - \phi_n)\right\|$$

e concluímos que $\left(\phi_n, T\phi_n\right)$, $n \in \mathbb{N}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ composta por elementos de $\Gamma(T)$. Como $\Gamma(T)$ é fechado, essa sequência converge a $(\psi, T\psi) \in \Gamma(T)$. Logo, a sequência ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$ converge a $\psi \in D(T)$ e a sequência $T\phi_n$, $n \in \mathbb{N}$ converge a $T\psi \in \mathrm{Ran}\,(T)$. Portanto, a sequência $(T + i)\phi_n$, $n \in \mathbb{N}$ converge a $T\psi + i\psi$, que é elemento de $\mathrm{Ran}\left(T + i\right)$, estabelecendo que esse conjunto é fechado. A prova para $\mathrm{Ran}\left(T - i\right)$ é análoga. ■

• **Operadores autoadjuntos**

Definição. Um operador $T : D(T) \to \mathcal{H}$ densamente definido em $\mathcal{H}$ é dito ser um *operador autoadjunto* se $T = T^*$. ♠

Assim, um operador $T : D(T) \to \mathcal{H}$ densamente definido é autoadjunto se $D(T) = D(T^*)$ e $T\psi = T^*\psi$ para todo $\psi \in D(T) = D(T^*)$. Naturalmente, tem-se também $\langle \phi, T\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle T\phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}}$ para todos $\psi, \phi \in D(T)$. É evidente também que todo operador autoadjunto é simétrico.

A recíproca da última observação, porém, não é necessariamente verdadeira e disso veremos exemplos. Faz-se importante notar aqui que no contexto de operadores limitados em espaços de Hilbert (como no contexto de matrizes) as noções de operador autoadjunto e operador simétrico (ou Hermitiano) são sinônimos. Tal não é mais o caso para operadores ilimitados, pois aqui é preciso distinguir ambas as noções, já é somente para operadores autoadjuntos (segundo a definição de acima) que as boas propriedades normalmente associadas a essa noção são válidas. Operadores simétricos mas não autoadjuntos podem não ter espectro real, podem não possuir um Teorema Espectral e se exponenciados (se isso for possível) podem não gerar grupos unitários uniparamétricos.

Se T é autoadjunto, $T = T^*$ garante que T é fechado (pelo Teorema 43.1, página 2589), isto é, garante que $T = \overline{T}$. Com isso, (43.22) fica $T^* = T = \overline{T} = T^{**} \subset T^* = \left(\overline{T}\right)^*$, o que implica a validade da seguinte cadeia de igualdades:

$$T = T^* = \overline{T} = T^{**} = \left(\overline{T}\right)^* . \tag{43.26}$$

A proposição que segue, que dispensa demonstração, é uma consequência trivial da Proposição 43.7, página 2587, e do Teorema da Decomposição Ortogonal, Teorema 41.2, página 2342.

Proposição 43.10 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador linear* autoadjunto *definido em um subespaço $D(T)$, denso em $\mathcal{H}$. Então, valem*

$$\mathrm{Ker}\,(T) = \mathrm{Ran}\,(T)^\perp \tag{43.27}$$

e

$$\mathrm{Ker}\,(T)^\perp = \overline{\mathrm{Ran}\,(T)} . \tag{43.28}$$

Com isso, tem-se $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}\,(T) \oplus \overline{\mathrm{Ran}\,(T)}$. □

• **O Teorema de Hellinger-Toeplitz**

Um operador simétrico definido em todo $\mathcal{H}$ é autodjunto e limitado. Essa afirmação, conhecida com Teorema de Hellinger[4]-Toeplitz[5], foi enunciada e demonstrada no Teorema 42.10, página 2409. Aqui ela será apresentada como consequência da Proposição 43.3, página 2584.

Teorema 43.3 (Teorema de Hellinger-Toeplitz (revisitado)) *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja T um operador linear tal que $D(T) = \mathcal{H}$ e tal que*

$$\langle \phi,\, T\psi \rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \langle T\phi,\, \psi \rangle_{\mathcal{H}} \tag{43.29}$$

para todos ϕ, $\psi \in \mathcal{H}$. Então, T é autoadjunto e limitado. ■

Prova. A relação 43.29 informa-nos que T é simétrico: $T \subset T^*$. Como $D(T) = \mathcal{H}$, temos também $D(T^*) = \mathcal{H}$ e, portanto, $T = T^*$. Logo, pelo Teorema 43.1, página 2589, T é fechado. Pela Proposição 43.3, página 2584, T é limitado. ■

• **Operadores essencialmente autoadjuntos**

Como já dissemos, a noção mais importante no presente contexto é a de operador autoadjunto, mas há uma outra que possui uma relevância especial, notadamente em aplicações. Trata-se da noção de *operador essencialmente autoadjunto*.

Definição. Um operador $T : D(T) \to \mathcal{H}$ densamente definido em $\mathcal{H}$ é dito ser um *operador essencialmente autoadjunto* se for simétrico e se seu fecho for autoadjunto, ou seja, se $\overline{T} = \left(\overline{T}\right)^*$, relação essa que, em face de (43.16) e de (43.17), equivale a dizer que $T^* = T^{**}$. ♠

Assim, para um operador essencialmente autoadjunto, tem-se $T \subset T^*$ e $\overline{T} = \left(\overline{T}\right)^*$. Nesse caso, a expressão (43.22) fica $T \subset \overline{T} = T^{**} \subset T^* = \left(\overline{T}\right)^* = \overline{T}$ e, portanto, vale

$$T \;\subset\; \overline{T} \;=\; T^{**} \;=\; T^* \;=\; \left(\overline{T}\right)^* . \tag{43.30}$$

A noção de operador essencialmente autoadjunto é importante devido à seguinte observação:

Proposição 43.11 *Se um operador $T : D(T) \to \mathcal{H}$ densamente definido em $\mathcal{H}$ é essencialmente autoadjunto, então T possui uma única extensão autoadjunta, a saber, seu fecho $\overline{T}$.* □

Prova. Se T for essencialmente autoadjunto então, por definição, T possui ao menos uma extensão autoadjunta, a saber, seu fecho $\overline{T}$. Suponhamos que haja um operador linear S com $S = S^*$ e tal que $T \subset S$. Como S é autoadjunto, S é fechado. Portanto, temos $T \subset \overline{T} \subset S$. Pela Proposição 43.8, página 2589, vale, portanto, $S^* \subset \left(\overline{T}\right)^* \subset T^*$ e, consequentemente, tem-se pelas hipóteses $S \subset \overline{T} \subset T^*$. Assim, temos $\overline{T} \subset S$ e $S \subset \overline{T}$ e, portanto, $S = \overline{T}$ ■

• **Comentários**

Como dissemos, a Proposição 43.11 revela a importância da noção de operador essencialmente autoadjunto. Elaboremos sobre isso sob a luz de aplicações à Mecânica Quântica. No estudo de sistemas quânticos, estamos por vezes interessados em situações nas quais é dado um operador simétrico H_0, que representa o Hamiltoniano de um sistema físico, e estamos interessados em estendê-lo a um domínio suficientemente grande no qual tenhamos um operador autoadjunto que, como tal, gera a evolução dinâmica do sistema em questão. Sucede, porém, que há situações nas quais um operador simétrico H_0 possui muitas extensões autoadjuntas, não raro dependentes de condições de contorno impostas aos elementos de seus domínios de definição. Em muitos de tais casos, a multiplicidade da dinâmica está relacionada ao fato de que essas diferentes condições de contorno podem ser interpretadas como diferentes interações externas aplicadas ao sistema e que, dessa forma, influenciam sua evolução temporal. Se H_0 for essencialmente autoadjunto, porém, temos garantido *a priori* que há uma única tal extensão autoadjunta e, portanto, uma única dinâmica associada a H_0. Essa unicidade da dinâmica é em muitos casos um *desideratum*.

[4] Ernst David Hellinger (1883–1950).
[5] Otto Toeplitz (1881–1940).

Tal ocorre, por exemplo, quando se considera um sistema quântico não-relativístico composto por um número finito de partículas eletricamente carregadas movendo-se no espaço tridimensional e interagindo entre si por forças eletrostáticas. Em um domínio conveniente, um importante teorema devido a Kato[6], datado de 1951[7], garante que o correspondente operador Hamiltoniano de Schrödinger é essencialmente autoadjunto. Assim, a evolução dinâmica quântica de um tal sistema é, como desejado, descrita por um operador autoadjunto e de maneira única. Cremos não ser necessário destacar a importância de tal teorema para toda a Mecânica Quântica, em particular para a Física Atômica e Molecular e para a Física do Estado Sólido.

Apesar de sua grande importância científica, o Teorema de Kato é poucas vezes reconhecido em textos introdutórios de Mecânica Quântica dirigidos a estudantes de Física. O trabalho original de Kato fora originalmente submetido à *Physical Review*. Porém, aquela revista *"could not figure out how and who should referee it, and that journal eventually transferred it to the Transactions of the American Mathematical Society. Along the way the paper was lost several times, but it finally reached von Neumann, who recommended its acceptance. The refereeing process took over three years"*[8].

O teorema de Kato é muitas vezes apresentado na forma de um teorema mais geral denominado Teorema de Kato-Rellich[9]. Nessa forma mais geral o referido teorema é de grande relevância para o estudo da chamada Teoria de Perturbações. O Teorema de Kato-Rellich pode ser encontrado em [419].

• ***"Core"* de um operador autoadjunto**

Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador linear definido em um subespaço linear $D(T)$, denso em $\mathcal{H}$. Seja $D \subset D(T)$ um subespaço linear de $D(T)$ (e, portanto, de $\mathcal{H}$) e igualmente denso. Denotamos por $T\restriction_D$ a restrição[10] de T a D. É evidente que $\left(T\restriction_D\right) \subset T$.

Se T é autoadjunto, dizemos que um subespaço linear denso $D \subset D(T)$ é um *"core"* para T se $\overline{T\restriction_D} = T$. Em outras palavras, D é um *core* para um operador autoadjunto T, se $T\restriction_D$ for um operador essencialmente autoadjunto.

A noção de *core* de um operador linear é relevante no seguinte tipo de discussão. Em muitos casos nos é dado um operador simétrico, digamos, H_0, definido em um certo domínio $D(H_0)$ para o qual desejamos encontrar uma extensão autoadjunta. Isso naturalmente requer encontrar um domínio que contenha $D(H_0)$ no qual esteja definida uma extensão de H_0 que seja autoadjunta. Sucede, porém, que nem sempre é uma tarefa fácil encontrar um tal domínio.

Mais fácil pode ser seguir o seguinte "programa". Primeiramente, procuramos um subespaço linear $D \supset D(H_0)$ tal que exista um operador $H_1 : D \to \mathcal{H}$ que estenda H_0 e que seja essencialmente autoadjunto. Se tal existir, saberemos que $\overline{H_1} = H_1^{**} =: H$ será uma extensão autoadjunta de H_0.

Os passos desse programa são: 1º estender H_0 a um domínio adequado $D \supset D(H_0)$; 2º assegurar que essa extensão H_1 é essencialmente autoadjunta e 3º determinar o duplo adjunto de H_1.

Naturalmente, a implementação desse "programa" para a construção de extensões autoadjuntas de operadores simétricos esbarra em uma dificuldade: como saber que a extensão $H_1 : D \to \mathcal{H}$ é essencialmente autoadjunta sem termos de provar que seu fecho é autoadjunto (o que pode uma tarefa igualmente difícil)? Ou, equivalentemente, como saber que um subespaço $D \supset D(H_0)$ é um *core* de algum operador autoadjunto H?

No que segue apresentaremos algumas respostas a essas questões que podem ser convertidas em critérios "práticos" eficientes para a construção de extensões autoadjuntas de operadores. Começamos com critérios para saber quando um operador é autoadjunto.

• **Condições necessárias e suficientes para um operador ser autoadjunto**

Nosso próximo teorema apresenta duas condições necessárias e suficientes para que um operador simétrico seja autoadjunto. No seu enunciado e demonstração seguimos proximamente [453], com alguns poucos esclarecimentos. É de se notar, porém, que esse teorema e sua demonstração, assim como quase todos os demais resultados do corrente capítulo, derivam dos trabalhos originais de von Neumann sobre o tema, fonte da qual a grande maioria dos autores bebeu.

[6] Tosio Kato (1917–1999). Kato é o autor do clássico [299] e de [300].
[7] A referência original é: T. Kato, "Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type", Trans. Amer. Math. Soc., **70**, 195–211 (1951).
[8] Extraído de: H. Cordes, A. Jensen, S. T. Kuroda, G. Ponce, B. Simon and M. Taylor, *"Tosio Kato (1917–1999)"*, Notices Amer. Math. Soc. **47**, 650–657 (2000).
[9] Franz Rellich (1906–1955). A contribuição de Rellich é anterior a de Kato, datando de 1939. O mesmo, porém, nunca o aplicou para o problema analisado por Kato.
[10] Vide página 71.

Teorema 43.4 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador linear densamente definido e simétrico. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

(a) T *é autoadjunto.*

(b) T *é fechado e valem* $\operatorname{Ker}\left(T^* + i\right) = \{0\} = \operatorname{Ker}\left(T^* - i\right)$.

(c) $\operatorname{Ran}\left(T + i\right) = \mathcal{H} = \operatorname{Ran}\left(T - i\right)$. □

Comentário. A demonstração do teorema deixará claro que são ambas as hipóteses $\operatorname{Ran}(T+i) = \mathcal{H}$ **e** $\operatorname{Ran}(T-i) = \mathcal{H}$, juntas, que implicam que T é autoadjunto. Supor apenas uma não é suficiente. ♣

Prova do Teorema 43.4. *Parte I: (a) implica (b).* Se $T = T^*$, então T é fechado (pelo Teorema 43.1, página 2589). Seja $\phi \in \operatorname{Ker}\left(T^* + i\right)$, ou seja, tal que $T\phi = T^*\phi = -i\phi$. Então, teremos

$$i\langle\phi,\, \phi\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \langle -i\phi,\, \phi\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \langle T^*\phi,\, \phi\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \langle\phi,\, T\phi\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \langle\phi,\, -i\phi\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; -i\langle\phi,\, \phi\rangle_{\mathcal{H}}\;,$$

donde concluímos que $\|\phi\|^2 = 0$. Isso provou que $\operatorname{Ker}\left(T^* + i\right) = \{0\}$. A prova que $\operatorname{Ker}\left(T^* - i\right) = \{0\}$ é análoga.

Parte II: (b) implica (c). Pelo Corolário 43.2, página 2588, se $\operatorname{Ker}\left(T^* - i\right) = \{0\}$, então que $\operatorname{Ran}\left(T + i\right)$ é denso em $\mathcal{H}$. Como T é simétrico e fechado, o Lema 43.4, página 2592, garante-nos que $\operatorname{Ran}\left(T + i\right)$ é fechado. Logo, $\operatorname{Ran}\left(T + i\right) = \mathcal{H}$. A prova que $\operatorname{Ran}\left(T - i\right) = \mathcal{H}$ é análoga.

Parte III: (c) implica (a). Observemos primeiramente que se $\operatorname{Ran}\left(T + i\right) = \mathcal{H} = \operatorname{Ran}\left(T - i\right)$, então (43.9), página 2587, implica que $\operatorname{Ker}\left(T^* + i\right) = \{0\} = \operatorname{Ker}\left(T^* - i\right)$. Seja agora $\varphi \in D(T^*)$. Certamente existe $\eta \in D(T)$ tal que

$$(T^* - i)\varphi \;=\; (T - i)\eta\,, \tag{43.31}$$

pois, por hipótese, $\operatorname{Ran}\left(T - i\right) = \mathcal{H}$. Como T é simétrico, temos $D(T) \subset D(T^*)$ e, portanto, tem-se $\eta \in D(T^*)$ e $T\eta = T^*\eta$. Assim, (43.31) implica $T^*(\varphi - \eta) = i(\varphi - \eta)$, ou seja, implica que $\varphi - \eta \in \operatorname{Ker}\left(T^* - i\right)$. Logo, $\eta = \varphi$ e concluímos, relendo as linhas acima, que para todo $\varphi \in D(T^*)$ tem-se $\varphi \in D(T)$ e $T\varphi = T^*\varphi$. Isso significa $D(T^*) \subset D(T)$ e, portanto, que $T = T^*$, ou seja, que T é autoadjunto. ■

• **Condições necessárias e suficientes para um operador ser essencialmente autoadjunto**

O Teorema 43.4 possui uma versão para operadores essencialmente autoadjuntos de particular importância prática.

Teorema 43.5 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador linear densamente definido e simétrico. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

(a) T *é essencialmente autoadjunto.*

(b) $\operatorname{Ker}\left(T^* + i\right) = \{0\} = \operatorname{Ker}\left(T^* - i\right)$.

(c) $\operatorname{Ran}\left(T + i\right)$ *e* $\operatorname{Ran}\left(T - i\right)$ *são ambos densos em* $\mathcal{H}$. □

Prova. Como $T \subset \overline{T}$, $D(\overline{T})$ é denso em $\mathcal{H}$. Da Proposição 43.9, página 2591, $\overline{T}$ também é simétrico e, portanto, aplicam-se ao mesmo as conclusões do Teorema 43.4: são equivalentes as afirmações

(a') $\overline{T}$ é autoadjunto.

(b') $\overline{T}$ é fechado e valem $\operatorname{Ker}\left(\left(\overline{T}\right)^* + i\right) = \{0\} = \operatorname{Ker}\left(\left(\overline{T}\right)^* - i\right)$.

(c') $\operatorname{Ran}\left(\overline{T} + i\right) = \mathcal{H} = \operatorname{Ran}\left(\overline{T} - i\right)$.

O item (a') equivale à afirmação (a). No item (b') a afirmação que $\overline{T}$ é fechado é supérflua e, além isso, vale $\left(\overline{T}\right)^* = T^*$, por (43.22). Assim, o item (b') equivale à afirmação (b).

A equivalência dos itens (c') e (c) pode ser estabelecida diretamente pelo seguinte raciocínio. O operador $\overline{T}$ é simétrico e fechado e, portanto, pela Proposição 43.4, página 2592, $\operatorname{Ran}\left(\overline{T} \pm i\right)$ é fechado. Por (43.18), temos, portanto, $\overline{\operatorname{Ran}\left(T \pm i\right)} = \operatorname{Ran}\left(\overline{T} \pm i\right)$. Segue disso que se $\operatorname{Ran}\left(\overline{T} \pm i\right) = \mathcal{H}$ se e somente se $\operatorname{Ran}\left(T \pm i\right)$ for denso em $\mathcal{H}$. ■

43.2 Espaços de Deficiência e Extensões Autoadjuntas de Operadores Simétricos

Nesta seção realizaremos um estudo mais sistemático das extensões autoadjuntas de operadores simétricos, tema cuja relevância já discutimos anteriormente. Se $T : D(T) \to \mathcal{H}$ for densamente definido e simétrico, então $T \subset \overline{T} \subset T^* = \overline{T}^*$, implicando que $\overline{T}$ é igualmente simétrico. Se $S : D(S) \to \mathcal{H}$ é uma extensão autoadjunta de T, então S é fechado e temos $T \subset \overline{T} \subset S$. Assim, S é também uma extensão autoadjunta de $\overline{T}$. A recíproca é obviamente verdadeira e concluímos que as extensões autoadjuntas de um operador simétrico T coincidem com as extensões autoadjuntas de seu fecho $\overline{T}$. Portanto, é suficiente estudarmos as extensões autoadjuntas de operadores simétricos fechados.

Nosso resultado principal é o Teorema 43.6, página 2600. No Exemplo 43.3, página 2612, discutimos detalhadamente o uso desse teorema em um caso concreto de interesse para a Mecânica Quântica.

43.2.1 Considerações Preliminares

Nesta seção faremos algumas considerações preliminares sobre extensões autoadjuntas de operadores simétricos. Nosso interesse aqui é apresentar extensões essencialmente autoadjuntas de operadores simétricos de um certo tipo. Na Seção 43.2.2, página 2597, faremos o desenvolvimento completo da teoria.

Para o que segue faremos uso do seguinte resultado técnico.

Lema 43.5 *Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ simétrico e tal que os espaços* $\operatorname{Ker}(T^* - i)$ *e* $\operatorname{Ker}(T^* + i)$ *sejam unitariamente equivalentes. Seja um operador unitário* $U : \operatorname{Ker}(T^* - i) \to \operatorname{Ker}(T^* + i)$. *Sejam* $\phi \in D(T)$ *e* $\psi \in \operatorname{Ker}(T^* - i)$. *Então,* $\phi + (U + \mathbb{1})\psi = 0$ *se e somente se* $\phi = 0$ *e* $\psi = 0$. □

Prova. Se $\phi + (U + \mathbb{1})\psi = 0$, então para todo $\varphi \in D(T)$ teremos

$$0 \;=\; \Big\langle \phi + (U + \mathbb{1})\psi,\; (T + i)\varphi \Big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \Big\langle (T^* - i)\phi + (T^* - i)(U + \mathbb{1})\psi,\;\; \varphi \Big\rangle_{\mathcal{H}}$$

para todo $\varphi \in D(T)$. Como $D(T)$ é denso em $\mathcal{H}$, segue que $(T^* - i)\phi + (T^* - i)(U + \mathbb{1})\psi = 0$. Agora, valem $(T^* - i)\phi = (T - i)\phi$ (pois T é simétrico e $\phi \in D(T)$), $(T^* - i)\psi = 0$ (pois $\psi \in \operatorname{Ker}(T^* - i)$) e $(T^* - i)U\psi = -2iU\psi$ (pois $U\psi \in \operatorname{Ker}(T^* + i)$). Assim, obtemos $(T - i)\phi = 2iU\psi$. O lado esquerdo é um elemento de $\operatorname{Ran}(T - i)$ e o lado direito é um elemento de $\operatorname{Ran}(U) = \operatorname{Ker}(T^* + i)$. Sabemos da Proposição 43.7, página 2587, que $\operatorname{Ker}(T^* + i) = \operatorname{Ran}(T - i)^{\perp}$. Logo, devemos ter $(T - i)\phi = 0$ e $U\psi = 0$. Como U é unitário, temos $\psi = 0$ e, portanto, a relação $\phi + (U + \mathbb{1})\psi = 0$ implica também $\phi = 0$. ■

O seguinte resultado contém uma afirmação útil que será estendida na Seção 43.2.2, página 2597.

Proposição 43.12 *Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador linear densamente definido e simétrico e tal que os espaços* $\operatorname{Ker}(T^* - i)$ *e* $\operatorname{Ker}(T^* + i)$ *sejam unitariamente equivalentes. Então, T possui extensões essencialmente autoadjuntas parametrizadas por operadores unitários de* $\operatorname{Ker}(T^* - i)$ *sobre* $\operatorname{Ker}(T^* + i)$. *Os fechos dessas extensões essencialmente autoadjuntas são, naturalmente, extensões autoadjuntas de T.* □

Prova da Proposição 43.12. Seja um operador unitário $U : \operatorname{Ker}(T^* - i) \to \operatorname{Ker}(T^* + i)$. Para cada U desse tipo vamos definir um operador essencialmente autoadjunto T_U que estende T. Começamos definindo seu domínio. Seja

$$D(T_U) \;:=\; \Big\{ \phi + (U + \mathbb{1})\psi \;\Big|\; \phi \in D(T),\; \psi \in \operatorname{Ker}(T^* - i) \Big\}\,.$$

É elementar constatar que $D(T_U)$ é um subespaço linear de $\mathcal{H}$ e é evidente que $D(T) \subset D(T_U)$.

Defina-se $T_U : D(T_U) \to \mathcal{H}$ por

$$T_U\big(\phi + (U + \mathbb{1})\psi\big) \;:=\; T\phi - i(U - \mathbb{1})\psi\,.$$

O Lema 43.5, página 2596, garante que T_U está bem definido (a imagem do vetor nulo é o vetor nulo) e que é linear. É claro também que T_U estende T (tome-se elementos em $D(T_U)$ com $\psi = 0$ na definição de T_U), isto é $T \subset T_U$. Para o que segue o seguinte resultado é crucial:

Lema 43.6 *O operador T_U definido acima é um operador simétrico.* □

Por ser um tanto técnica, a demonstração desse lema é apresentada no Apêndice 43.A, página 2619.

Afirmamos que T_U é essencialmente autoadjunto e para tal verificaremos a condição (c) do Teorema 43.5, página 2595. Temos que

$$\big(T_U + i\big)\big(\phi + \psi + U\psi\big) \;=\; (T+i)\phi + 2i\psi \;. \tag{43.32}$$

Analogamente,

$$\big(T_U - i\big)\big(\phi + \psi + U\psi\big) \;=\; (T-i)\phi - 2iU\psi \;. \tag{43.33}$$

Em (43.32) vemos que elementos de $\mathrm{Ran}\,(T_U+i)$ são combinação linear de elementos de $\mathrm{Ran}\,(T+i)$ e de $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$. Sabemos da Proposição 43.7, página 2587, que $\mathrm{Ran}\,(T+i)^\perp = \mathrm{Ker}\,(T^*-i)$. Logo, $\mathrm{Ran}\,(T_U+i)$ é denso em $\mathcal{H}$. Analogamente, (43.33) diz-nos que elementos de $\mathrm{Ran}\,(T_U-i)$ são combinação linear de elementos de $\mathrm{Ran}\,(T-i)$ e de $\mathrm{Ker}\,(T^*+i)$ e pela mesma Proposição 43.7 segue que $\mathrm{Ran}\,(T_U-i)$ é denso em $\mathcal{H}$.

Assim, provamos pelo Teorema 43.5, página 2595, que T_U é essencialmente autoadjunto. Disso segue que $T \subset T_U \subset \overline{T_U}$ e $\overline{T_U}$ é, portanto, uma extensão autoadjunta de T. ■

A Proposição 43.12 levanta várias questões. Para que um operador simétrico possua extensões autoadjuntas é também necessário que $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$ e $\mathrm{Ker}\,(T^*+i)$ sejam unitariamente equivalentes? O que ocorre se $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$ e $\mathrm{Ker}\,(T^*+i)$ não forem unitariamente equivalentes? São as extensões $\overline{T_U}$, encontradas acima, todas as extensões autoadjuntas de T? Responderemos essas questões na Seção 43.2.2, página 2597. Como veremos, as respostas à primeira e à última questão são positivas.

43.2.2 Classificação de Extensões Simétricas Fechadas de Operadores Simétricos Fechados. Extensões Autoadjuntas

Na presente seção seguiremos muito proximamente [454], mas com uma organização um tanto diferente e com diversos esclarecimentos.

• **Espaços de deficiência e índices de deficiência**

Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$, densamente definido, simétrico e fechado. Vimos nos Teoremas 43.4 e 43.5, páginas 2594 e 2595, respectivamente, que os espaços $\mathrm{Ker}\,(T^*\pm i)$ desempenham um papel na questão de se saber se T é autoadjunto ou essencialmente autoadjunto. Eles também desempenham um papel no estudo de extensões autoadjuntas de T e, por isso vamos dar aos mesmos um nome: os espaços

$$\mathcal{K}_+(T) \;:=\; \mathrm{Ker}\,(T^*-i) \;\stackrel{(43.9)}{=}\; \mathrm{Ran}\,(T+i)^\perp \qquad \text{e} \qquad \mathcal{K}_-(T) \;:=\; \mathrm{Ker}\,(T^*+i) \;\stackrel{(43.9)}{=}\; \mathrm{Ran}\,(T-i)^\perp$$

são denominados *espaços de deficiência* do operador T. Pela definição, é evidente que $\mathcal{K}_\pm(T) \subset D(T^*)$. Está claro que $\mathcal{K}_\pm(T)$ são ambos fechados (por serem o complemento ortogonal de algo) e, portanto, são subespaços de Hilbert de $\mathcal{H}$. $\mathcal{K}_+(T)$ é o subespaço gerado pelos autovetores de T^* com autovalor $+i$ e $\mathcal{K}_-(T)$ é o subespaço gerado pelos autovetores de T^* com autovalor $-i$. É também elementar constatar que $\mathcal{K}_+(T) \cap \mathcal{K}_-(T) = \{0\}$. No entanto, $\mathcal{K}_+(T)$ e $\mathcal{K}_-(T)$ não são necessariamente ortogonais em relação ao produto escalar de $\mathcal{H}$. Os mesmos são, porém, ortogonais em relação a um outro produto escalar, como logo veremos.

As dimensões dos espaços de deficiência,

$$d_\pm \;\equiv\; d_\pm(T) \;:=\; \dim \mathrm{Ker}\,(T^*\mp i) \;,$$

são denominados *índices de deficiência* do operador T. Os índices de deficiência $d_\pm$ podem assumir valores arbitrários em $\mathbb{N}$ e podem mesmo ser infinitos.

• **O espaço de Hilbert $D(T^*)$**

Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador densamente definido. Como T^* é fechado, sabemos que $D(T^*)$ é um espaço de Hilbert em relação ao produto escalar $\langle\psi,\,\phi\rangle_{T^*} := \langle\psi,\,\phi\rangle_{\mathcal{H}} + \langle T^*\psi,\,T^*\phi\rangle_{\mathcal{H}}$, com $\psi,\,\phi \in D(T^*)$, definido em (43.3) (vide Proposição 43.1, página 2582).

Dizemos que um subespaço $\mathcal{M}$ de $D(T^*)$ é T^*-fechado se for fechado na métrica definida por $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_{T^*}$. Dizemos que dois subespaços $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ de $D(T^*)$ são T^*-ortogonais se $\langle\psi,\,\phi\rangle_{T^*} = 0$ para todos $\psi \in \mathcal{M}$, $\phi \in \mathcal{N}$. Se $\mathcal{A} \subset D(T^*)$, denotamos por $\mathcal{A}^{\perp_{T^*}}$ o complemento ortogonal de $\mathcal{A}$ em relação ao produto escalar $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_{T^*}$, ou seja,

$$\mathcal{A}^{\perp_{T^*}} := \big\{\phi \in D(T^*)\big|\; \text{ para todo } \psi \in \mathcal{A} \text{ vale } \langle\phi,\,\psi\rangle_{T^*} \;=\; 0\big\} \;.$$

Claro está que $\{0\}^{\perp_{T^*}} = D(T^*)$.

Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ forem dois subespaços T^*-fechados e T^*-ortogonais tais que todo elemento ψ de $D(T^*)$ possa ser escrito de forma única como $\psi = \psi_{\mathcal{M}} + \psi_{\mathcal{N}}$, com $\psi_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$ e $\psi_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}$, então dizemos que $D(T^*)$ é a T^*-soma direta de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ e escrevemos $D(T^*) = \mathcal{M} \oplus_{T^*} \mathcal{N}$ (o símbolo $\oplus_{T^*}$ serve para recordar que os subespaços $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são ortogonais em relação ao produto escalar $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_{T^*}$).

Proposição 43.13 *Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador densamente definido, simétrico e fechado. Então,*

$$D(T^*) \;=\; D(T) \oplus_{T^*} \mathrm{Ker}\,(T^*-i) \oplus_{T^*} \mathrm{Ker}\,(T^*+i) \;, \tag{43.34}$$

sendo que os subespaços $D(T)$ e $\mathrm{Ker}\,(T^*\pm i)$ são subespaços T^*-fechados de $D(T^*)$. □

Prova. Para qualquer operador linear $S : D(S) \to \mathcal{H}$, a convergência de uma sequência $\phi_n \in D(S)$, $n \in \mathbb{N}$ na norma $\|\cdot\|_S$ a um elemento $\phi \in D(S)$ equivale à convergência de $(\phi_n,\, S\phi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, em $\Gamma(S)$ a $(\phi,\, S\phi)$. Por hipótese, $\Gamma(T^*)$ e $\Gamma(T)$ são fechados em $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Assim, $\Gamma(T^*) \cap \Gamma(T)$ também o é. Seja ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência em $D(T) \subset D(T^*)$. Como $T\phi_n = T^*\phi_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $(\phi_n,\, T\phi_n) = (\phi_n,\, T^*\phi_n) \in \Gamma(T^*) \cap \Gamma(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, se $\phi_n \in D(T)$, $n \in \mathbb{N}$, converge a $\phi \in D(T^*)$, teremos que $(\phi_n,\, T^*\phi_n)$ converge a $(\phi,\, T^*\phi)$ em $\Gamma(T^*)$. Mas, pelo exposto, tem-se também que $(\phi,\, T^*\phi) \in \Gamma(T^*) \cap \Gamma(T)$ e, portanto, $\phi \in D(T)$ e $T^*\phi = T\phi$. Logo, $D(T)$ é T^*-fechado.

Sabemos que $\mathrm{Ker}\,(T^*\pm i)$ são ambos fechados na topologia usual de $\mathcal{H}$ pois, por (43.9), $\mathrm{Ker}\,(T^*\pm i) = \mathrm{Ran}\,(T\mp i)^\perp$. Se $\psi_n \in \mathrm{Ker}\,(T^*+i)$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência convergente em $D(T^*)$ na norma $\|\cdot\|_{T^*}$ a um elemento $\psi \in D(T^*)$, então $\|\psi_n - \psi\|_{T^*}^2 = \|\psi_n - \psi\|^2 + \|T^*\psi_n - T^*\psi\|^2$ converge a zero quando $n \to \infty$, o que implica que $\lim_{n\to\infty} \|\psi_n - \psi\|^2 = 0$. Logo, $\psi \in \mathrm{Ker}\,(T^*+i)$, pois este é fechado na topologia usual. Isso provou que $\mathrm{Ker}\,(T^*+i)$ é fechado na topologia de $\|\cdot\|_{T^*}$. De forma análoga, prova-se que $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$ é fechado na mesma topologia.

Provemos agora que $D(T)$, $\mathrm{Ker}\,(T^*+i)$ e $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$ são T^*-ortogonais um em relação ao outro.

Se $\phi \in D(T)$ e $\psi \in \mathrm{Ker}\,(T^*\pm i)$, então $\big\langle\phi,\,\psi\big\rangle_{T^*} = \big\langle\phi,\,\psi\big\rangle_{\mathcal{H}} + \big\langle T^*\phi,\,T^*\psi\big\rangle_{\mathcal{H}}$. Mas $T^*\psi = \mp i\psi$ e $T^*\phi = T\phi$. Logo, $\big\langle\phi,\,\psi\big\rangle_{T^*} = \big\langle\phi,\,\psi\big\rangle_{\mathcal{H}} + (\mp i)\big\langle T\phi,\,\psi\big\rangle_{\mathcal{H}}$. Porém, pela definição de adjunto, $\big\langle T\phi,\,\psi\big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle\phi,\,T^*\psi\big\rangle_{\mathcal{H}} = (\mp i)\big\langle\phi,\,\psi\big\rangle_{\mathcal{H}}$ e $\big\langle\phi,\,\psi\big\rangle_{T^*} = \big\langle\phi,\,\psi\big\rangle_{\mathcal{H}} + (\mp i)^2\big\langle\phi,\,\psi\big\rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Isso provou que $D(T)$ é T^*-ortogonal a $\mathrm{Ker}\,(T^*+i)$ e a $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$.

Sejam $\psi_\pm \in \mathrm{Ker}\,(T^*\mp i)$, respectivamente. Teremos,

$$\big\langle\psi_+,\,\psi_-\big\rangle_{T^*} \;=\; \big\langle\psi_+,\,\psi_-\big\rangle_{\mathcal{H}} + \big\langle T^*\psi_+,\,T^*\psi_-\big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big\langle\psi_+,\,\psi_-\big\rangle_{\mathcal{H}} + \big\langle i\psi_+,\,-i\psi_-\big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big\langle\psi_+,\,\psi_-\big\rangle_{\mathcal{H}} - \big\langle\psi_+,\,\psi_-\big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; 0\;.$$

Isso provou que $\mathrm{Ker}\,(T^*+i)$ é T^*-ortogonal a $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$.

É claro que $\mathcal{V} := D(T) \oplus_{T^*} \mathrm{Ker}\,(T^*-i) \oplus_{T^*} \mathrm{Ker}\,(T^*+i)$ é um subespaço T^*-fechado de $D(T^*)$. Desejamos demonstrar que $\mathcal{V}^{\perp_{T^*}} = \{0\}$, onde $\mathcal{V}^{\perp_{T^*}}$ é o complemento ortogonal de $\mathcal{V}$ em relação ao produto escalar $\big\langle\cdot,\,\cdot\big\rangle_{T^*}$. De fato, como $\mathcal{V}$ é T^*-fechado, a condição $\mathcal{V}^{\perp_{T^*}} = \{0\}$ implicaria que $\mathcal{V} = \Big(\mathcal{V}^{\perp_{T^*}}\Big)^{\perp_{T^*}} = \{0\}^{\perp_{T^*}} = D(T^*)$, o que estabeleceria (43.34).

Provemos, então, que $\mathcal{V}^{\perp_{T^*}} = \{0\}$. Seja $\psi \in \mathcal{V}^{\perp_{T^*}}$. Então, tem-se, em particular,

$$0 \;=\; \big\langle\psi,\,\phi\big\rangle_{T^*} \;=\; \big\langle\psi,\,\phi\big\rangle_{\mathcal{H}} + \big\langle T^*\psi,\,T^*\phi\big\rangle_{\mathcal{H}}$$

para todo $\phi \in D(T)$, ou seja, tem-se $\big\langle T^*\psi,\,T^*\phi\big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle -\psi,\,\phi\big\rangle_{\mathcal{H}}$. Como $T^*\phi = T\phi$, estabeleceu-se que $\big\langle T^*\psi,\,T\phi\big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle -\psi,\,\phi\big\rangle_{\mathcal{H}}$ para todo $\phi \in D(T)$. Isso significa que $T^*\psi \in D(T^*)$ e que $T^*T^*\psi = -\psi$, o que trivialmente implica que $(T^*+i)(T^*-i)\psi = 0$. Logo, $(T^*-i)\psi \in \mathrm{Ker}\,(T^*+i)$.

Por hipótese, ψ é também T^*-ortogonal a $\mathrm{Ker}\,(T^*+i)$. Logo, para todo $\chi \in \mathrm{Ker}\,(T^*+i)$, temos

$$0 \;=\; \big\langle\chi,\,\psi\big\rangle_{T^*} \;=\; \big\langle\chi,\,\psi\big\rangle_{\mathcal{H}} + \big\langle T^*\chi,\,T^*\psi\big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big\langle\chi,\,\psi\big\rangle_{\mathcal{H}} + \big\langle -i\chi,\,T^*\psi\big\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; i\big\langle\chi,\,(T^*-i)\psi\big\rangle_{\mathcal{H}}\;.$$

Tomando, em particular, $\chi = (T^*-i)\psi \in \mathrm{Ker}\,(T^*+i)$, concluímos que $\|(T^*-i)\psi\|^2 = 0$, ou seja, que $\psi \in \mathrm{Ker}\,(T^*-i) \subset \mathcal{V}$. Mas isso só é compatível com $\psi \in \mathcal{V}^{\perp_{T^*}}$ se $\psi = 0$. Logo, $\mathcal{V}^{\perp_{T^*}} = \{0\}$ e a demonstração está completa. ■

• **Subespaços T^*-simétricos**

Vamos definir em $D(T^*)$ uma forma sesquilinear, denotada por $[\cdot,\ \cdot]_{T^*}$, dada por

$$[\phi,\ \psi]_{T^*} \ := \ \langle T^*\phi,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}} - \langle \phi,\ T^*\psi\rangle_{\mathcal{H}}\ , \quad \phi,\ \psi \in D(T^*)\ .$$

Um subespaço linear $\mathcal{A}$ de $D(T^*)$ no qual a forma sesquilinear $[\cdot,\ \cdot]_{T^*}$ anule-se, mais precisamente, onde valha $[\phi,\ \psi]_{T^*} = 0$ para todos $\phi,\ \psi \in \mathcal{A}$, é dito ser um *subespaço T^*-simétrico*.

• **Extensões simétricas fechadas de operadores simétricos**

Antes de falarmos sobre extensões autoadjuntas de operadores simétricos fechados é de grande importância entendermos como são as extensões simétricas e fechadas dos mesmos, lembrando que extensões autoadjuntas são também simétricas e fechadas.

Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador densamente definido, simétrico e fechado. Então, $T = \overline{T} \subset T^*$. Se S é uma extensão simétrica de T, então teremos $T \subset S$ e, portanto, $S^* \subset T^*$. Assim,

$$T \ = \ \overline{T} \ \subset \ S \ \subset \ S^* \ \subset \ T^*\ .$$

Essa cadeia informa-nos que toda extensão simétrica S de T é uma restrição de T^* a algum subespaço de $D(T^*)$ (pois $S \subset T^*$). Essa pequena observação desempenhará um papel crucial adiante. Na proposição que segue revelam-se quais são esses subespaços.

Proposição 43.14 *Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador densamente definido, simétrico e fechado, de modo que $T = \overline{T} \subset T^*$. Se S é uma extensão simétrica e fechada de T, então S é a restrição de T^* a um subespaço T^*-fechado e T^*-simétrico de $D(T^*)$.* □

Prova. Já vimos que $S \subset T^*$, ou seja, $\Gamma(S) \subset \Gamma(T^*)$. Como $\Gamma(T^*)$ é fechado, S é fechado se e somente se $\Gamma(S)$ for um subespaço fechado de $\Gamma(T^*)$ (é um exercício simples de topologia provar isso). Isso, porém, equivale a dizer que S é fechado se e somente se $D(S)$ for um subespaço T^*-fechado de $D(T^*)$.

S é simétrico, então $\langle S\phi,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \phi,\ S\psi\rangle_{\mathcal{H}}$ para todos $\phi,\ \psi \in D(S)$. Como $S \subset T^*$, então $\langle T^*\phi,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \phi,\ T^*\psi\rangle_{\mathcal{H}}$ para todos $\phi,\ \psi \in D(S)$, ou seja, $D(S)$ é T^*-simétrico. ■

A Proposição 43.14 revela-nos a importância de subespaços T^*-simétricos e T^*-fechados de $D(T^*)$. A próxima proposição revela-nos como são tais subespaços face à decomposição (43.34).

Proposição 43.15 *Um subespaço $\mathcal{S}$ de $D(T^*)$ é T^*-simétrico, T^*-fechado e tal que $D(T) \subset \mathcal{S}$ se e somente se for da forma $\mathcal{S} = D(T) \oplus_{T^*} \mathcal{S}_k$, onde $\mathcal{S}_k$ é um subespaço T^*-simétrico, T^*-fechado de $\mathrm{Ker}\,(T^*-i) \oplus_{T^*} \mathrm{Ker}\,(T^*+i)$.*

Cada subespaço T^*-simétrico, T^*-fechado de $\mathrm{Ker}\,(T^*-i) \oplus_{T^*} \mathrm{Ker}\,(T^*+i)$ é caracterizado por uma isometria (na norma usual de $\mathcal{H}$) $U : D(U) \to \mathrm{Ran}\,(U)$ de um subespaço $D(U)$ de $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$ em $\mathrm{Ran}\,(U) \subset \mathrm{Ker}\,(T^*+i)$.

Em resumo, todo subespaço $\mathcal{S}$ de $D(T^*)$ que seja T^*-simétrico, T^*-fechado e tal que $D(T) \subset \mathcal{S}$ é da forma $\mathcal{S} = D(T) \oplus_{T^*} \mathcal{S}_k$, onde $\mathcal{S}_k = \big\{\psi_+ \oplus_{T^*} (U\psi_+),\ \psi_+ \in D(U)\big\}$ para um operador linear isométrico (na norma usual de $\mathcal{H}$) $U : D(U) \to \mathrm{Ran}\,(U)$ de um subespaço $D(U)$ de $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$ em $\mathrm{Ran}\,(U) \subset \mathrm{Ker}\,(T^*+i)$. □

Prova. Seja $\mathcal{S}$ um subespaço de $D(T^*)$ que seja T^*-simétrico, T^*-fechado e tal que $D(T) \subset \mathcal{S}$. Face à decomposição (43.34), defina-se $\mathcal{S}_k := \mathcal{S} \cap \Big(\mathrm{Ker}\,(T^*-i) \oplus_{T^*} \mathrm{Ker}\,(T^*+i)\Big)$. É evidente que $\mathcal{S}_k$ será T^*-fechado, por ser a intersecção de dois conjuntos T^*-fechados. É também evidente que $\mathcal{S}_k$ é T^*-simétrico, pois $\mathcal{S}$ (e, portanto, todo subespaço do mesmo) o é. Resta provar que $\mathcal{S} = D(T) \oplus_{T^*} \mathcal{S}_k$. Se $\psi \in \mathcal{S} \subset D(T^*)$, sabemos por (43.34) que $\psi = \phi_1 + \phi_2$ com $\phi_1 \in D(T)$ e $\phi_2 \in \mathrm{Ker}\,(T^*-i) \oplus_{T^*} \mathrm{Ker}\,(T^*+i)$. Se $\phi_1 \in D(T) \subset \mathcal{S}$, segue que $\phi_2 = \psi - \phi_1$ é também elemento de $\mathcal{S}$ (pois ψ e ϕ_1 são elementos de $\mathcal{S}$, que é um subespaço vetorial). Logo, $\phi_2 \in \mathcal{S} \cap \Big(\mathrm{Ker}\,(T^*-i) \oplus_{T^*} \mathrm{Ker}\,(T^*+i)\Big) = \mathcal{S}_k$, provando que $\mathcal{S} = D(T) \oplus_{T^*} \mathcal{S}_k$.

Vamos agora à recíproca. Seja $\mathcal{S}_k$ um subespaço T^*-simétrico, T^*-fechado de $\mathrm{Ker}\,(T^*-i) \oplus_{T^*} \mathrm{Ker}\,(T^*+i)$ e defina-se $\mathcal{S} := D(T) \oplus_{T^*} \mathcal{S}_k$. Desejamos provar que $\mathcal{S}$ é T^*-simétrico, T^*-fechado (que contém $D(T)$ é evidente pela construção). Que $\mathcal{S}$ é T^*-fechado é evidente, pois $\mathcal{S}_k$ o é, assim como $D(T)$ (pelo Teorema 43.13, página 2598), sendo que $\mathcal{S}_k$ e $D(T)$

são T^*-ortogonais. Para provar que $\mathcal{S}$ é T^*-simétrico, tomemos $\psi,\ \phi \in \mathcal{S}$ com $\phi = \phi_1 + \phi_2$ e $\psi = \psi_1 + \psi_2$, sendo $\phi_1,\ \psi_1 \in D(T)$ e $\phi_2,\ \psi_2 \in \mathcal{S}_k$. Com isso, temos

$$[\phi,\ \psi]_{T^*} \ = \ [\phi_1,\ \psi_1]_{T^*} + [\phi_2,\ \psi_2]_{T^*} + [\phi_1,\ \psi_2]_{T^*} + [\phi_2,\ \psi_1]_{T^*}\ .$$

Primeiramente, é evidente que $[\phi_2,\ \psi_2]_{T^*} = 0$ pois $\mathcal{S}_k$ é T^*-simétrico. Para $[\phi_1,\ \psi_1]_{T^*}$ temos

$$[\phi_1,\ \psi_1]_{T^*} \ = \ \langle T^*\phi_1,\ \psi_1\rangle_{\mathcal{H}} - \langle \phi_1,\ T^*\psi_1\rangle_{\mathcal{H}} \ = \ \langle T\phi_1,\ \psi_1\rangle_{\mathcal{H}} - \langle \phi_1,\ T\psi_1\rangle_{\mathcal{H}} \ = \ 0\ ,$$

pois $\phi_1,\ \phi_2 \in D(T) \subset D(T^*)$ e T é simétrico. Analogamente,

$$[\phi_1,\ \psi_2]_{T^*} \ = \ \langle T^*\phi_1,\ \psi_2\rangle_{\mathcal{H}} - \langle \phi_1,\ T^*\psi_2\rangle_{\mathcal{H}} \ = \ \langle T\phi_1,\ \psi_2\rangle_{\mathcal{H}} - \langle \phi_1,\ T^*\psi_2\rangle_{\mathcal{H}} \ = \ 0\ ,$$

novamente pois $T \subset T^*$, pois $\phi \in D(T) \subset D(T^*)$ e pela definição de adjunto. De forma idêntica mostra-se que $[\phi_2,\ \psi_1]_{T^*} = 0$. Portanto, $[\phi,\ \psi]_{T^*} = 0$, provando que $\mathcal{S}$ é T^*-simétrico.

Vamos agora caracterizar $\mathcal{S}_k$ em termos de certas isometrias. Como $\mathcal{S}_k$ é um subespaço T^*-fechado da soma direta $\mathrm{Ker}\,(T^*-i) \oplus_{T^*} \mathrm{Ker}\,(T^*+i)$, todo $\psi \in \mathcal{S}_k$ pode ser escrito de forma única como $\psi = \psi_+ + \psi_- = \psi_+ \oplus_{T^*} \psi_-$, com $\psi_\pm \in \mathrm{Ker}\,(T^* \mp i)$. Como $\mathcal{S}_k$ é um subespaço T^*-simétrico, vale para todo $\psi = \psi_+ + \psi_- \in \mathcal{S}_k$,

$$\begin{aligned} 0 \ = \ [\psi,\ \psi]_{T^*} \ &= \ \big\langle T^*(\psi_+ + \psi_-),\ (\psi_+ + \psi_-)\big\rangle_{\mathcal{H}} - \big\langle (\psi_+ + \psi_-),\ T^*(\psi_+ + \psi_-)\big\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \ \big\langle i(\psi_+ - \psi_-),\ (\psi_+ + \psi_-)\big\rangle_{\mathcal{H}} - \big\langle (\psi_+ + \psi_-),\ i(\psi_+ - \psi_-)\big\rangle_{\mathcal{H}} \ = \ -2i\big(\langle \psi_+,\ \psi_+\rangle_{\mathcal{H}} - \langle \psi_-,\ \psi_-\rangle_{\mathcal{H}}\big)\ , \end{aligned}$$

o que prova que

$$\|\psi_-\| \ = \ \|\psi_+\|\ . \tag{43.35}$$

Como $\mathcal{S}_k$ é um subespaço, se houver dois vetores do tipo $\psi_+ \oplus_{T^*} \psi_-$ e $\psi_+ \oplus_{T^*} \psi_-'$ em $\mathcal{S}_k$, então sua diferença $0 \oplus_{T^*} (\psi_- - \psi_-')$ seria um elemento de $\mathcal{S}_k$. Por (43.35), porém, temos $\psi_- = \psi_-'$. Isso nos mostra que $\mathcal{S}_k$ é o gráfico de uma função U com domínio $D(U)$ em um subconjunto de $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$ e imagem em um subconjunto de $\mathrm{Ker}\,(T^*+i)$. Fora isso, a linearidade impõe que se $\psi_+ \oplus_{T^*} \psi_-$ e $\psi_+' \oplus_{T^*} \psi_-'$ são elementos de $\mathcal{S}_k$, então para todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ os elementos $\alpha\big(\psi_+ \oplus_{T^*} \psi_-\big) + \beta\big(\psi_+' \oplus_{T^*} \psi_-'\big) = (\alpha\psi_+ + \beta\psi_+') \oplus_{T^*} (\alpha\psi_- + \beta\psi_-')$ são também elementos de $\mathcal{S}_k$. Isso mostra que a função $U : D(U) \to \mathrm{Ran}\,(U)$ é um operador linear. Podemos, portanto, escrever $\mathcal{S}_k = \big\{\psi_+ \oplus_{T^*} (U\psi_+),\ \psi_+ \in D(U)\big\}$. A relação (43.35) diz-nos que U é uma isometria na norma usual de $\mathcal{H}$: $\|U\psi_+\| \ = \ \|\psi_+\|$. ■

As Proposições 43.14 e 43.15 fornecem-nos os ingredientes principais do resultado mais importante da seção corrente, o Teorema 43.6, que enunciaremos e demonstraremos no que segue. Esse teorema apresenta a forma geral das extensões simétricas e fechadas de um operador simétrico e fechado T. O ponto mais importante desse teorema é a afirmação que um operador simétrico e fechado T possui extensões autoadjuntas se e somente se seus espaços de deficiência forem unitariamente equivalentes. Se assim for, essas extensões autoadjuntas são parametrizadas por operadores unitários $U : \mathrm{Ker}\,(T^*-i) \to \mathrm{Ker}\,(T^*+i)$.

Teorema 43.6 *Seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador densamente definido, simétrico e fechado, de modo que $T = \overline{T} \subset T^*$. Então, as extensões simétricas e fechadas de T são parametrizadas por isometrias (na norma usual de $\mathcal{H}$) $U : D(U) \to \mathrm{Ran}\,(U)$ de um subespaço $D(U)$ de $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$ em $\mathrm{Ran}\,(U) \subset \mathrm{Ker}\,(T^*+i)$ e são da forma $S_U : D(S_U) \to \mathcal{H}$ com*

$$D(S_U) \ = \ D(T) \oplus_{T^*} \mathcal{S}_k\ , \qquad \textit{onde} \qquad \mathcal{S}_k \ = \ \big\{\psi_+ \oplus_{T^*} (U\psi_+),\ \ \psi_+ \in D(U)\big\}$$

ou seja,

$$D(S_U) \ = \ \Big\{\phi + \psi + U\psi,\ \ \textit{com}\ \phi \in D(T),\ \psi \in D(U) \ \subset \ \mathrm{Ker}\,(T^*-i)\Big\}\ , \tag{43.36}$$

com

$$S_U\big(\phi + \psi + U\psi\big) \ = \ T\phi + i\psi - iU\psi\ , \tag{43.37}$$

$\phi \in D(T)$ e $\psi \in D(U) \subset \mathrm{Ker}\,(T^*-i)$.

T possuirá extensões autoadjuntas se e somente se $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$ e $\mathrm{Ker}\,(T^*+i)$ forem unitariamente equivalentes, ou seja, se possuírem a mesma dimensão, e essas extensões serão dadas por (43.37) com $U : \mathrm{Ker}\,(T^*-i) \to \mathrm{Ker}\,(T^*+i)$ unitário, (ou seja, com U isométrico com $D(U) = \mathrm{Ker}\,(T^*-i)$ e $\mathrm{Ran}\,(U) = \mathrm{Ker}\,(T^*+i)$).

Se $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)=\{0\}$ *mas* $\mathrm{Ker}\,(T^*+i)\neq\{0\}$*, então* $D(U)=\{0\}$ *e* $U=0$ *é uma isometria trivial. Nesse caso,* T *não possui extensões simétricas fechadas além de si mesmo.*

Se $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)\neq\{0\}$ *mas* $\mathrm{Ker}\,(T^*+i)=\{0\}$*, então* U *só é isométrico no caso trivial em que* $D(U)=\{0\}$ *e* $U=0$*. Novamente, nesse caso* T *não possui extensões simétricas fechadas além de si mesmo.*

Se $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)=\{0\}$ *e* $\mathrm{Ker}\,(T^*+i)=\{0\}$*, então* T *não não possui extensões simétricas fechadas além de si mesmo, mas nesse caso* $\mathrm{Ran}\,(T+i)=\mathcal{H}$ *e* $\mathrm{Ran}\,(T-i)=\mathcal{H}$*, o que, pelo Teorema 43.4, página 2594, implica que* T *é autoadjunto.* □

Prova. Se S é uma extensão simétrica e fechada de T, então reunindo as Proposições 43.14 e 43.15, sabemos que

$$D(S)\;=\;D(T)\oplus_{T^*}\mathcal{S}_k\,,\qquad\text{onde}\qquad \mathcal{S}_k\;=\;\big\{\psi_+\oplus_{T^*}(U\psi_+),\;\;\psi_+\in D(U)\big\}$$

para alguma isometria $U:D(U)\to\mathrm{Ran}\,(U)$ de um subespaço $D(U)$ de $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$ em $\mathrm{Ran}\,(U)\subset\mathrm{Ker}\,(T^*+i)$, ou seja,

$$D(S)\;=\;\big\{\phi+\psi+U\psi,\;\;\text{com }\phi\in D(T),\;\psi\in D(U)\;\subset\;\mathrm{Ker}\,(T^*-i)\big\}$$

Sabemos também que S é uma restrição de T^* a esse domínio. Logo, para todos $\phi\in D(T)$, $\psi\in D(U)\subset\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$ temos

$$S\big(\phi+\psi+U\psi\big)\;=\;T^*\big(\phi+\psi+U\psi\big)\;=\;T^*\phi+T^*\psi+T^*U\psi\;=\;T\phi+i\psi-iU\psi\,,\tag{43.38}$$

onde usamos na última passagem que $T^*\phi=T\phi$ (pois $T\subset T^*$ e $\phi\in D(T)\subset D(T^*)$), que $T^*\psi=i\psi$ (pois $\psi\in\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$) e que $T^*U\psi=-iU\psi$ (pois $U\psi\in\mathrm{Ker}\,(T^*+i)$).

Se a extensão simétrica e fechada S for essencialmente autoadjunta, então ela será automaticamente autoadjunta, por ser fechada. Podemos nos perguntar quando S dada em (43.38) é autoadjunta. Sabemos do Teorema 43.4, página 2594, que para tal é necessário e suficiente que tenhamos $\mathrm{Ran}\,(S+i)=\mathcal{H}$ e $\mathrm{Ran}\,(S-i)=\mathcal{H}$. Por (43.38) temos que

$$(S+i)\big(\phi+\psi+U\psi\big)\;=\;(T+i)\phi+2i\psi$$

e

$$(S-i)\big(\phi+\psi+U\psi\big)\;=\;(T-i)\phi-2iU\psi$$

com $\phi\in D(T)$ e $\psi\in D(U)\subset\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$. Como ϕ e ψ são independentes, teremos

$$\mathrm{Ran}\,(S+i)\;=\;\mathrm{Ran}\,(T+i)\oplus D(U)$$

e

$$\mathrm{Ran}\,(S-i)\;=\;\mathrm{Ran}\,(T-i)\oplus\mathrm{Ran}\,(U)\,.$$

Usamos acima o símbolo de soma direta $\oplus$ para recordar o fato que, devido à Proposição 43.7, página 2587, temos $\mathrm{Ran}\,(T+i)^\perp=\mathrm{Ker}\,(T^*-i)\supset D(U)$ e $\mathrm{Ran}\,(T-i)^\perp=\mathrm{Ker}\,(T^*+i)\supset\mathrm{Ran}\,(U)$.

Como T e $T\pm i$ são fechados, segue do Lema 43.4, página 2592, que $\mathrm{Ran}\,(T\pm i)$ são ambos fechados. Logo, teremos $\mathrm{Ran}\,(S+i)=\mathcal{H}$ se e somente se $D(U)=\mathrm{Ran}\,(T+i)^\perp=\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$ e teremos $\mathrm{Ran}\,(S-i)=\mathcal{H}$ se e somente se $\mathrm{Ran}\,(U)=\mathrm{Ran}\,(T-i)^\perp=\mathrm{Ker}\,(T^*+i)$.

Assim, concluímos que S é autoadjunta se e somente $D(U)=\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$, $\mathrm{Ran}\,(U)=\mathrm{Ker}\,(T^*+i)$ e se $U:\mathrm{Ker}\,(T^*-i)\to\mathrm{Ker}\,(T^*+i)$ for uma isometria. Pela Proposição 42.15, página 2418, isso se dá se e somente se $U:\mathrm{Ker}\,(T^*-i)\to\mathrm{Ker}\,(T^*+i)$ for unitário.

Concluímos disso que T possuirá extensões autoadjuntas se e somente se $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)$ e $\mathrm{Ker}\,(T^*+i)$ forem unitariamente equivalentes, ou seja, se possuírem a mesma dimensão.

As demais afirmações do enunciado do Teorema 43.6, sobre os casos em que $\mathrm{Ker}\,(T^*-i)=\{0\}$ e/ou $\mathrm{Ker}\,(T^*+i)\neq\{0\}$, são imediatas. ■

43.3 Formas Quadráticas e Alguns de Seus Usos

Nesta seção descreveremos a teoria básica das formas quadráticas e sua relação com operadores definidos em espaços de Hilbert. Formas quadráticas (vide definição logo abaixo) são um relevante instrumento de definição de operadores lineares (eventualmente não-limitados) em espaços de Hilbert, sendo usadas, por exemplo, na obtenção de certas extensões de operadores, como a chamada extensão de Friedrichs de operadores simétricos semilimitados. Formas quadráticas são muito usadas no estudo matemático da Física Quântica (vide *e.g.*, [506] e [508]). Vide também [299], [453], [454], [503] e [60].

Na lide com operadores não limitados surgem frequentemente dificuldades relacionadas a domínios de definição. Por exemplo, se A e B forem operadores autoadjuntos agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, definidos em domínios $D(A)$ e $D(B)$, respectivamente, seria natural definir sua soma formal $A+B$ da maneira ingênua: $(A+B)\psi:=A\psi+B\psi$. É claro que essa expressão somente faz sentido sobre vetores $\psi\in\mathcal{H}$ que simultaneamente pertençam a $D(A)$ e a $D(B)$, ou seja, a $D(A)\cap D(B)$. Essa intersecção, porém, pode ser um subespaço não-denso (ou mesmo igual ao vetor nulo) ou pode não ser um *core* para $A+B$. São conhecidos exemplos dessas situações. Formas quadráticas fornecem uma estratégia para se encontrar extensões de operadores, e mesmo de definição dos mesmos, que pode em casos adequados superar dificuldades desse tipo.

• Definição de forma quadrática. Domínio de uma forma

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert (sobre os complexos) e seja $\mathcal{V}$ um subespaço de $\mathcal{H}$. Uma *forma quadrática* Q em $\mathcal{V}$ é uma forma sesquilinear[11] definida em $\mathcal{V}$, ou seja, é uma aplicação $Q:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{C}$ satisfazendo

$$Q\big(u,\;\alpha_1v_1+\alpha_2v_2\big)\;=\;\alpha_1\,Q(u,\;v_1)+\alpha_2\,Q(u,\;v_2)\quad\text{e}\tag{43.39}$$

$$Q\big(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2,\;v\big)\;=\;\overline{\alpha_1}\,Q(u_1,\;v)+\overline{\alpha_2}\,Q(u_2,\;v)\tag{43.40}$$

para todos $u,\;u_1,\;u_2\in\mathcal{V}$, todos $v,\;v_1,\;v_2\in\mathcal{V}$ e todos $\alpha_1,\;\alpha_2\in\mathbb{C}$.

O subespaço $\mathcal{V}$ é denominado *domínio da forma* Q e será doravante denotado por $D(Q)$. Assumiremos sempre que $D(Q)$ é denso em $\mathcal{H}$.

Se $D(Q)=\mathcal{H}$ e Q for *bicontínua*, ou seja, se existir $K\geq0$ tal que para todos $u,\;v\in\mathcal{H}$ vale $\big|Q(u,\;v)\big|\leq K\|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}}$, então vimos na Proposição 42.11, página 2411, que existe um operador linear limitado A, único, agindo em $\mathcal{H}$ tal que $Q(u,\;v)=\langle u,\;Av\rangle_{\mathcal{H}}$. Cabe aqui a observação trivial que o produto escalar em $\mathcal{H}$ é uma forma quadrática bicontínua com domínio igual a $\mathcal{H}$.

Sob a hipótese de bicontinuidade, existe, portanto, uma associação única entre formas quadráticas e operadores lineares limitados. A questão básica que é colocada na teoria das formas quadráticas é se e quando a associação entre formas quadráticas e operadores lineares (não necessariamente limitados) pode ser mantida na ausência da hipótese de bicontinuidade. Essa questão será em grande parte respondida no Teorema 43.7, página 2606, abaixo. Iniciamos a preparação para esse teorema com algumas definições.

• Representação de formas quadráticas por operadores lineares

Seja $Q:D(Q)\times D(Q)\to\mathbb{C}$ uma forma quadrática. Dizemos que um operador linear $A:D(A)\to\mathcal{H}$ com $D(A)\subset D(Q)$ *representa* a forma Q se para todo $x\in D(Q)$ e para todo $y\in D(A)$ valer

$$Q(x,\;y)\;=\;\langle x,\;Ay\rangle_{\mathcal{H}}\,.$$

Implicitamente assumimos nessa definição que $D(A)$ e $D(Q)$ são densos no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Como comentamos acima, formas quadráticas bicontínuas com domínio $\mathcal{H}$ são representadas por operadores limitados. No que segue procuraremos enfraquecer a condição de bicontinuidade de sorte a garantir a representatibilidade (não necessariamente por operadores limitados) de formas quadráticas densamente definidas e que não sejam bicontínuas. Nosso principal resultado será o Teorema 43.7 da página 2606.

[11] No sentido dessa definição, as noções de forma quadrática e de forma sesquilinear coincidem. Por razões históricas, porém, na literatura pertinente aos temas aqui tratados a expressão *forma quadrática* é mais comummente empregada. Assim, essa definição de forma quadrática difere daquela apresentada na Seção 3.1.4, página 274.

• **Formas quadráticas simétricas (ou Hermitianas), positivas e semilimitadas**

Uma forma quadrática $Q : D(Q) \times D(Q) \to \mathbb{C}$ é dita ser uma *forma simétrica*, ou uma *forma Hermitiana* se satisfizer $Q(u,\ v) = \overline{Q(v,\ u)}$ para todos $u,\ v \in D(Q)$.

Uma forma quadrática $Q : D(Q) \times D(Q) \to \mathbb{C}$ é dita ser uma *forma positiva* se $Q(u,\ u) \geq 0$ para todo $u \in D(Q)$.

Uma forma quadrática $Q : D(Q) \times D(Q) \to \mathbb{C}$ é dita ser uma *forma M-semilimitada* se existir uma constante $M \in \mathbb{R}$ tal que $Q(u,\ u) \geq -M\|u\|^2_{\mathcal{H}}$ para todo $u \in D(Q)$.

Uma forma quadrática é dita ser uma *forma semilimitada* se for M-semilimitada para algum $M \in \mathbb{R}$.

É evidente que toda forma positiva é semilimitada (com $M = 0$).

É relevante notar que se Q é M-semilimitada, então a forma quadrática

$$S_{Q,\,M}(u,\ v) \;:=\; Q(u,\ v) + (M + 1)\langle u,\ v\rangle_{\mathcal{H}} \tag{43.41}$$

é uma forma positiva[12]. A relevância dessa observação é que, pelo Teorema 3.1, página 270, $S_{Q,\,M}$ é Hermitiana e, portanto, Q é também Hermitiana (pois $\langle u,\ v\rangle_{\mathcal{H}}$ é Hermitiana, pela própria definição de produto escalar). Assim, toda forma quadrática semilimitada é Hermitiana. Redundantemente, porém, continuaremos a listar as duas propriedades, simetria e semilimitação.

Seja Q uma forma M-semilimitada. Então, para todo $u \in D(Q)$ vale $Q(u,\ u) + M\|u\|^2_{\mathcal{H}} \geq 0$ e, consequentemente,

$$S_{Q,\,M}(u,\ u) \;=\; Q(u,\ u) + (M + 1)\|u\|^2_{\mathcal{H}} \;\geq\; \|u\|^2_{\mathcal{H}} \,. \tag{43.42}$$

Logo, $S_{Q,\,M}(u,\ u) = 0$ se e somente se $u = 0$. Disso concluímos que $S_{Q,\,M}$ é um produto escalar em $D(Q)$, por ser sesquilinear, positiva e Hermitiana e por satisfazer $S_{Q,\,M}(u,\ u) = 0$ se e somente se $u = 0$.

Denotamos por $\|u\|_{Q,\,M}$ a norma associada ao produto escalar $S_{Q,\,M}$: para $u \in D(Q)$,

$$\|u\|^2_{Q,\,M} \;:=\; S_{Q,\,M}(u,\ u) \;=\; Q(u,\ u) + (M + 1)\|u\|^2_{\mathcal{H}} \,. \tag{43.43}$$

Como já comentamos em (43.42), temos que

$$\|u\|_{Q,\,M} \;\geq\; \|u\|_{\mathcal{H}} \,. \tag{43.44}$$

Isso nos remeterá adiante à definição de formas fechadas.

• **Identidade de polarização**

Seja $Q : D(Q) \times D(Q) \to \mathbb{C}$ uma forma quadrática simétrica (ou seja, Hermitiana). Então, vale a *identidade de polarização*:

$$Q(u,\ v) \;=\; \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^{-n} Q\big((u + i^n v),\ (u + i^n v)\big) \;=\; \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^{n} Q\big((u + i^{-n} v),\ (u + i^{-n} v)\big) \,, \tag{43.45}$$

válida para todos $u,\ v \in D(Q)$. Para verificá-la, basta expandir-se o lado direito e constatar-se, com uso da sesquilinearidade de Q, que se obtém o lado esquerdo.

A relação (43.45) mostra que uma forma quadrática simétrica é univocamente determinada por suas "diagonais", ou seja, pelos valores $Q(x,\ x)$, $x \in D(Q)$.

Comentário. Para formas quadráticas simétricas reais, $Q : D(Q) \times D(Q) \to \mathbb{R}$, a identidade de polarização assume a forma $Q(u,\ v) = \frac{1}{4}\Big[Q(u + v,\ u + v) - Q(u - v,\ u - v)\Big]$ para todos $u,\ v \in D(Q)$. Verifique! Logo, também tais formas são univocamente determinadas por suas diagonais. ♣

• **Formas quadráticas fechadas, fecháveis etc.**

Uma forma quadrática M-semilimitada $Q : D(Q) \times D(Q) \to \mathbb{C}$ e tal que $D(Q)$ é completo na norma $\|\cdot\|_{Q,\,M}$ (ou seja, é um espaço de Hilbert em relação ao produto escalar $S_{Q,\,M}$ definido em (43.41)) é dita ser uma *forma quadrática fechada*.

[12] É por mera comodidade que escolhemos o fator $M + 1$ em (43.41). Se usarmos um fator $M + r$ com qualquer $r > 0$ as conclusões que seguirão são as mesmas.

Uma forma quadrática Q' é dita ser uma *extensão* de uma forma quadrática Q se $D(Q) \subset D(Q')$ e se $Q'(u,\ v) = Q(u,\ v)$ para todos $u,\ v \in D(Q)$.

Uma forma quadrática Q é dita uma *forma fechável* se possuir uma extensão fechada.

Se Q é uma forma quadrática fechada com domínio $D(Q)$, um subespaço $C \subset D(Q)$ é dito ser um *core* para Q se e somente se C for denso em $D(Q)$ na topologia definida pela norma $\|\cdot\|_{Q,\,M}$, definida acima.

O estudante deve apreciar a similaridade entre as definições acima e as definições correspondentes da teoria dos operadores limitados.

O teorema fundamental que estabeleceremos adiante afirma que toda forma quadrática fechada semilimitada e simétrica é associada a um operador autoadjunto.

O seguinte resultado sobre formas fechadas será relevante mais adiante:

Lema 43.7 *Seja $Q : D(Q) \times D(Q) \to \mathbb{C}$ uma forma quadrática simétrica, semilimitada e fechada. Então, vale*

$$Q(x,\ y) \;=\; \lim_{n\to\infty} Q(x_n,\ y_n) \tag{43.46}$$

para todos $x,\ y \in D(Q)$ e todas as sequências $x_n,\ y_n \in D(Q)$, $n \in \mathbb{N}$, que convergem a x, respectivamente, a y na norma $\|\cdot\|_{Q,\,M}$. □

Prova. Seja Q uma forma M-semilimitada e fechada. Seja $x_n \in D(Q)$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência convergente na norma $\|\cdot\|_{Q,\,M}$. Como Q é fechada, seu limite x, é também elemento de $D(Q)$: $x \in D(Q)$. Assim, $\lim_{n\to\infty}\|x - x_n\|_{Q,\,M} = 0$ e, pela desigualdade (43.44), vale também $\lim_{n\to\infty}\|x - x_n\|_{\mathcal{H}} = 0$. Com isso, valem $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_{Q,\,M} = \|x\|_{Q,\,M}$ e $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_{\mathcal{H}} = \|x\|_{\mathcal{H}}$. Dessa forma, temos

$$\lim_{n\to\infty} Q(x_n,\ x_n) \stackrel{(43.43)}{=} \lim_{n\to\infty}\Big(\|x_n\|^2_{Q,\,M} - (M + 1)\|x_n\|^2_{\mathcal{H}}\Big) \;=\; \|x\|^2_{Q,\,M} - (M + 1)\|x\|^2_{\mathcal{H}} \stackrel{(43.43)}{=} Q(x,\ x) \,.$$

A afirmação geral de (43.46) segue disso e da identidade de polarização (43.45), página 2603. ■

• **Alguns exemplos**

A título de ilustração e esclarecimento é interessante compararmos duas formas quadráticas que podem ser definidas a partir de um operador linear.

Seja A um operador linear definido em um domínio $D(A)$ de $\mathcal{H}$. Podemos definir duas formas quadráticas em $D(A)$:

$$Q_a(u,\ v) \;:=\; \langle u,\ Av\rangle_{\mathcal{H}} \qquad \text{e} \qquad Q_b(u,\ v) \;:=\; \langle Au,\ Av\rangle_{\mathcal{H}} \,. \tag{43.47}$$

Ambas são densamente definidas se A o for. Q_b é sempre uma forma simétrica, enquanto que Q_a é uma forma simétrica se e somente se A for um operador simétrico.

Q_b é uma forma positiva, enquanto que Q_a é semilimitada se e somente se existir $M \in \mathbb{R}$ tal que $\langle u,\ Au\rangle_{\mathcal{H}} \geq -M\|u\|^2_{\mathcal{H}}$ para todo $u \in D(A)$, ou seja, se e somente se A for limitado inferiormente.

A forma Q_b é semilimitada (por ser positiva) e é fechada se e somente se A for um operador fechado. Isso decorre da observação que a forma quadrática $S_{Q_b,\,0}$ (vide definição (43.41)) coincide (por termos aqui $M = 0$) com o produto escalar definido em (43.3), página 2581, e da Proposição 43.1, pagina 2582.

A forma Q_a não é necessariamente fechada mesmo se A for um operador fechado.

• **O fecho, ou extensão canônica, de formas quadráticas simétricas e semilimitadas**

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $D(Q)$ um subespaço linear denso de $\mathcal{H}$ onde encontra-se definida uma forma quadrática $Q : D(Q) \times D(Q) \to \mathbb{C}$ que é suposta simétrica e M-semilimitada (com $M \in \mathbb{R}$), mas não necessariamente fechada. Denotemos por $\mathcal{H}_S \subset \mathcal{H}$ o subespaço de $\mathcal{H}$ que é o completamento de $D(Q)$ segundo a norma $\|\cdot\|_{Q,\,M}$ (definida em (43.43)), e cuja construção é descrita na Proposição 42.4, página 2390. Denotaremos também por $S_{Q,\,M}$ e $\|\cdot\|_{Q,\,M}$ a extensão a $\mathcal{H}_S$ do produto escalar e norma, respectivamente, originalmente definidos em $D(Q)$. Sabemos que $\mathcal{H}_S$ é um espaço de Hilbert segundo o produto escalar $S_{Q,\,M}$ ao qual a norma $\|\cdot\|_{Q,\,M}$ é associada.

Podemos definir uma extensão $\widetilde{Q} : \mathcal{H}_S \times \mathcal{H}_S \to \mathbb{C}$ da forma quadrática Q por

$$\widetilde{Q}(x,\ y) \ := \ \lim_{n\to\infty} Q(x_n,\ y_n)\ , \qquad x,\ y \in \mathcal{H}_S\ , \tag{43.48}$$

onde x_n e y_n são sequências em $D(Q)$ que convergem a x e y, respectivamente, na topologia de $\mathcal{H}_S$, ou seja, que satisfazem

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|_{Q,\,M} \ = \ 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \|y - y_n\|_{Q,\,M} \ = \ 0\ .$$

É importante conferir que a definição de $\widetilde{Q}$ dada em (43.48) independe das particulares sequências $x_n \in D(Q)$ e $y_n \in D(Q)$ que convergem a $x \in \mathcal{H}_S$ e $y \in \mathcal{H}_S$, respectivamente. Se x'_n e y'_n forem outras de tais sequências, temos que

$$Q(x_n,\ y_n) - Q(x'_n,\ y'_n) \ = \ Q(x_n - x'_n,\ y_n - y'_n) + Q(x'_n,\ y_n - y'_n) + Q(x_n - x'_n,\ y'_n)$$

$$= \ S_Q(x_n - x'_n,\ y_n - y'_n) + S_Q(x'_n,\ y_n - y'_n) + S_Q(x_n - x'_n,\ y'_n) - \langle x_n - x'_n,\ y_n - y'_n\rangle_{\mathcal{H}} - \langle x'_n,\ y_n - y'_n\rangle_{\mathcal{H}} - \langle x_n - x'_n,\ y'_n\rangle_{\mathcal{H}}$$

Portanto, usando Cauchy-Schwarz (na forma $\big|S_Q(u,v)\big| \leq \|u\|_{Q,\,M}\|v\|_{Q,\,M}$ e na forma $\big|\langle u,\ v\rangle_{\mathcal{H}}\big| \leq \|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}} \overset{(43.44)}{\leq} \|u\|_{Q,\,M}\|v\|_{Q,\,M}$), obtemos

$$\Big|Q(x_n,\ y_n) - Q(x'_n,\ y'_n)\Big| \ \leq \ 2\Big(\|x_n - x'_n\|_{Q,\,M}\|y_n - y'_n\|_{Q,\,M} + \|x'_n\|_{Q}\|y_n - y'_n\|_{Q,\,M} + \|x_n - x'_n\|_{Q,\,M}\|y'_n\|_{Q,\,M}\Big)\ ,$$

que converge a 0 quando $n \to \infty$, pois, pelas hipóteses $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x'_n\|_{Q,\,M} = \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - y'_n\|_{Q,\,M} = 0$, sendo também $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_{Q,\,M} = \lim\limits_{n\to\infty} \|x'_n\|_{Q,\,M} = \|x\|_{Q,\,M}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\|_{Q,\,M} = \lim\limits_{n\to\infty} \|y'_n\|_{Q,\,M} = \|y\|_{Q,\,M}$.

A forma $\widetilde{Q}$ é dita ser o *fecho* da forma quadrática simétrica e semilimitada Q. $\widetilde{Q}$ é também dita ser a *extensão canônica* de Q.

Afirmamos que o fecho $\widetilde{Q}$ de Q é uma forma simétrica e M-semilimitada e fechada. A simetria é de demonstração trivial e deixamo-la como exercício (use a definição (43.48) e a simetria de Q). Para demonstrar a semilimitação, tomemos $x \in \mathcal{H}_S$ e uma sequência x_n em $D(Q)$ convergindo a x na norma $\|\cdot\|_{Q,\,M}$. Teremos $\widetilde{Q}(x,\ x) + M\langle x,\ x\rangle_{\mathcal{H}} = \lim\limits_{n\to\infty}\Big(Q(x_n,\ x_n) + M\langle x_n,\ x_n\rangle_{\mathcal{H}}\Big) \geq 0$, pois Q é M-semilimitado. Acima, usamos o fato que se $x_n \in D(Q)$ converge a x na norma $\|\cdot\|_{Q,\,M}$, então também converge na norma de $\mathcal{H}$, novamente devido a (43.44).

A forma $\widetilde{Q}$ é fechada pois seu domínio de definição é $D(\widetilde{Q}) = \mathcal{H}_S$, que é completo em relação à norma $\|\cdot\|_{Q,\,M}$.

Afirmamos que o fecho $\widetilde{Q}$ é a "menor" extensão fechada, simétrica e M-semilimitada de Q. De fato, se Q_2 for uma extensão fechada de Q, então $D(Q_2) \subset \mathcal{H}$ é completo na norma $\|\cdot\|_{Q_2,\,M}$, que é definida por $\|u\|^2_{Q_2,\,M} := Q_2(u,\ u) + (M+1)\|u\|_{\mathcal{H}}$. Como Q_2 estende Q, vemos que $\|u\|_{Q_2,\,M} = \|u\|_{Q,\,M}$ para todo $u \in D(Q)$. Com isso, vemos que os pontos limites de $D(Q)$ na topologia de $\|\cdot\|_{Q,\,M}$ (que compõem $\mathcal{H}_S$) coincidem com os pontos limites na topologia de $\|\cdot\|_{Q_2,\,M}$ e, portanto, $\mathcal{H}_S \subset D(Q_2)$.

Sejam agora $x,\ y \in \mathcal{H}_S$ e x_n e y_n são sequências em $D(Q)$ que convergem a x e y, respectivamente, na topologia de $\mathcal{H}_S$ (ou seja, na norma $\|\cdot\|_{Q_2,\,M}$). Temos

$$\widetilde{Q}(x,\ y) \ := \ \lim_{n\to\infty} Q(x_n,\ y_n) \ = \ \lim_{n\to\infty} Q_2(x_n,\ y_n) \ = \ Q_2(x,\ y)$$

A primeira igualdade decorre diretamente da definição (43.48) de $\widetilde{Q}$, a segunda da hipótese de Q_2 estender Q e a terceira do Lema 43.7, página 2604, por Q_2 ser fechada. Isso estabeleceu que Q_2 estende $\widetilde{Q}$, provando que $\widetilde{Q}$ é a "menor" extensão fechada de Q.

Coletamos os fatos provados acima na seguinte

Proposição 43.16 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $D(Q)$ um subespaço linear denso de $\mathcal{H}$ onde encontra-se definida uma forma quadrática $Q : D(Q) \times D(Q) \to \mathbb{C}$ que é suposta simétrica e M-semilimitada (com $M \in \mathbb{R}$), mas não necessariamente fechada. Denotemos por $\mathcal{H}_S \subset \mathcal{H}$ o subespaço de $\mathcal{H}$ que é o completamento de $D(Q)$ segundo a norma $\|\cdot\|_{Q,\,M}$ (definida em (43.43)). Seja $\widetilde{Q} : \mathcal{H}_S \times \mathcal{H}_S \to \mathbb{C}$ o fecho (ou extensão canônica) de Q, definida em (43.48). Então, $\widetilde{Q}$ é simétrica e M-semilimitada e fechada e é a menor extensão de Q com tais propriedades, pois se Q_2 for uma extensão simétrica e M-semilimitada e fechada de Q, então Q_2 também estende $\widetilde{Q}$.* □

• **Formas quadráticas fechadas e semilimitadas e suas representações operatoriais**

Podemos agora formular e demonstrar o resultado central desta seção e de toda a teoria das formas quadráticas, o Teorema 43.7, que afirma que toda forma quadrática simétrica semilimitada e fechada pode ser representada (e de forma única) por um operador autoadjunto e limitado inferiormente.

Partes do enunciado e da demonstração do Teorema 43.7 aqui apresentadas provém de [60], com correções, reorganizações, esclarecimentos e acréscimos. Vide também [453] para um tratamento similar.

Teorema 43.7 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo e $D(Q)$ um subespaço denso de $\mathcal{H}$. Seja $Q : D(Q) \times D(Q) \to \mathbb{C}$ uma forma quadrática simétrica, M-semilimitada (para algum $M \in \mathbb{R}$) e fechada. Então, existe um subespaço $D(A) \subset D(Q)$, igualmente denso em $\mathcal{H}$, e um operador linear $A : D(A) \to \mathcal{H}$ tal que A é autoadjunto e representa Q, ou seja, tal que*

$$Q(x,\ y) \ = \ \langle x,\ Ay\rangle_{\mathcal{H}} \tag{43.49}$$

para todos $x \in D(Q)$, $y \in D(A)$.

Fora isso, tem-se as seguintes afirmações adicionais:

a. *Como Q é M-semilimitado, A é limitado inferiormente: $\langle y,\ Ay\rangle_{\mathcal{H}} \geq -M\|y\|^2_{\mathcal{H}}$ para todo $y \in D(A)$. Isso significa que $A + M\mathbb{1} \geq 0$.*

b. *Como $D(A)$ é denso em $\mathcal{H}$, $D(A)$ é um* core *para a forma quadrática Q, ou seja, $D(A)$ é denso em $D(Q)$ na topologia da norma $\|\cdot\|_{Q,\,M}$.*

c. *O operador linear A é univocamente definido por (43.49) no seguinte sentido. Seja C um* core *para Q e suponhamos que para algum $y \in D(Q)$ exista $y^* \in \mathcal{H}$ tal que $Q(x,\ y) = \langle x,\ y^*\rangle_{\mathcal{H}}$ para todo $x \in C$. Então, $y \in D(A)$ e $y^* = Ay$.*

d. *$D\big(\sqrt{A + M\mathbb{1}}\big) = D(Q)$ e vale*

$$Q(x,\ y) + M\langle x,\ y\rangle_{\mathcal{H}} \ = \ \Big\langle \sqrt{A + M\mathbb{1}}\,x,\ \sqrt{A + M\mathbb{1}}\,y\Big\rangle_{\mathcal{H}} \tag{43.50}$$

para todos $x,\ y \in D(Q)$.

□

Prova do Teorema 43.7. A demonstração é dividida em três grandes partes.

Parte I. Seja Q uma forma M-semilimitada. Pela hipótese de Q ser uma forma fechada, temos que $D(Q)$ é um espaço de Hilbert em relação ao produto escalar $S_{Q,\,M}(u,\ v)$ definido em (43.41). A norma $\|u\|_{Q,\,M}$, satisfaz por (43.44) $\|u\|_{\mathcal{H}} \leq \|u\|_{Q,\,M}$ para todo $u \in D(Q)$.

Com isso, vemos que para cada $u \in \mathcal{H}$ fixo, a aplicação $D(Q) \ni v \mapsto \langle u,\ v\rangle_{\mathcal{H}} \to \mathbb{C}$ é linear e contínua, pois $\big|\langle u,\ v\rangle_{\mathcal{H}}\big| \leq \|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}} \overset{(43.44)}{\leq} \|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{Q,\,M}$. Pelo Teorema da Representação de Riesz, Teorema 41.4, página 2348, existe $\tilde{u} \in D(Q)$, único, tal que

$$\langle u,\ v\rangle_{\mathcal{H}} \ = \ S_{Q,\,M}\big(\tilde{u},\ v\big) \tag{43.51}$$

para todo $v \in D(Q)$ e para cada $u \in \mathcal{H}$. Exatamente como na demonstração da Proposição 42.11, página 2411, segue que a aplicação $J : \mathcal{H} \to D(Q)$ dada por $\mathcal{H} \ni u \mapsto Ju := \tilde{u} \in D(Q)$ é linear e limitada: $J \in \mathcal{B}\big(\mathcal{H},\ D(Q)\big)$. Portanto, (43.51) se escreve como

$$\langle u,\ v\rangle_{\mathcal{H}} \ = \ S_{Q,\,M}\big(Ju,\ v\big) \tag{43.52}$$

para todo $u \in \mathcal{H}$ e todo $v \in D(Q)$.

Já vimos que J é limitado. Vamos agora estabelecer uma série de fatos sobre o operador J, a maioria dos quais será utilizada no restante da demonstração do presente teorema.

Comentamos ainda que, como $J : \mathcal{H} \to D(Q)$ e $D(Q) \subset \mathcal{H}$, podemos também, trivialmente, considerar J como sendo uma aplicação $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Isso será implicitamente considerado em algumas passagens do que segue.

1. *J é injetivo.*

   De fato, se $u \in \mathcal{H}$ é tal que $Ju = 0$, então $\langle u,\ v\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ para todo $v \in D(Q)$, o que implica $u = 0$, pois $D(Q)$ é, por hipótese, denso em $\mathcal{H}$ na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Assim, $\operatorname{Ker}(J) = \{0\}$.

2. *J é autoadjunto segundo o produto escalar usual em $\mathcal{H}$.*

De fato, para todos $x,\ y \in \mathcal{H}$,

$$\langle x,\ Jy\rangle_{\mathcal{H}} \overset{(43.52)}{=} S_{Q,\,M}\big(Jx,\ Jy\big) = \overline{S_{Q,\,M}\big(Jy,\ Jx\big)} \overset{(43.52)}{=} \overline{\langle y,\ Jx\rangle_{\mathcal{H}}} = \langle Jx,\ y\rangle_{\mathcal{H}} ,$$

o que prova a afirmação desejada.

3. $\|J\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq 1$ *e* $\|J\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\, D(Q))} \leq 1$.

Para todo $y \in \mathcal{H}$ temos, usando (41.6), página 2338,

$$\begin{aligned}\|Jy\|_{\mathcal{H}} \overset{(43.44)}{\leq} \|Jy\|_{Q,\,M} &\overset{(41.6)}{=} \sup\Big\{\big|S_{Q,\,M}\big(x,\ Jy\big)\big|,\ x\in D(Q),\ \|x\|_{Q,\,M}\leq 1\Big\}\\ &\overset{(43.52)}{=} \sup\Big\{\big|\langle x,\ y\rangle_{\mathcal{H}}\big|,\ x\in D(Q),\ \|x\|_{Q,\,M}\leq 1\Big\}\\ &\overset{\dagger}{\leq} \sup\Big\{\big|\langle x,\ y\rangle_{\mathcal{H}}\big|,\ x\in D(Q),\ \|x\|_{\mathcal{H}}\leq 1\Big\}\\ &\overset{\ddagger}{\leq} \sup\Big\{\big|\langle x,\ y\rangle_{\mathcal{H}}\big|,\ x\in \mathcal{H},\ \|x\|_{\mathcal{H}}\leq 1\Big\}\\ &\overset{(41.6)}{=} \|y\|_{\mathcal{H}} .\end{aligned}$$

Acima, na passagem †, usamos o fato que $\Big\{x \in D(Q),\ \|x\|_{Q,\,M} \leq 1\Big\} \subset \Big\{x \in D(Q),\ \|x\|_{\mathcal{H}} \leq 1\Big\}$ (pois para todo $x \in D(Q)$ tem-se $\|x\|_{\mathcal{H}} \leq \|x\|_{Q,\,M}$, de acordo com (43.44)) e usamos, na passagem ‡, o fato que $D(Q) \subset \mathcal{H}$. Com isso, provou-se que $\|Jy\|_{\mathcal{H}} \leq \|y\|_{\mathcal{H}}$ e que $\|Jy\|_{Q,\,M} \leq \|y\|_{\mathcal{H}}$ para todo $y \in \mathcal{H}$, estabelecendo que $\|J\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq 1$ e que $\|J\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\, D(Q))} \leq 1$.

4. $\overline{\operatorname{Ran}(J)} = \mathcal{H}$, *com o fecho tomado na topologia de $\mathcal{H}$.*

Já vimos que $\operatorname{Ker}(J) = \{0\}$ e que $J = J^*$ em $\mathcal{H}$. Assim, por (42.33), página 2413, $\overline{\operatorname{Ran}(J)} = \operatorname{Ker}(J)^{\perp} = \mathcal{H}$, com o fecho tomado na topologia de $\mathcal{H}$.

5. $J^{*_S} = J\restriction_{D(Q)}$, *com $J^{*_S} : D(Q) \to \mathcal{H}$ sendo o adjunto da aplicação $J : \mathcal{H} \to D(Q)$.*

Para $u,\ v \in D(Q)$ podemos escrever

$$S_{Q,\,M}\big(Ju,\ v\big) \overset{(43.52)}{=} \langle u,\ v\rangle_{\mathcal{H}} = \overline{\langle v,\ u\rangle_{\mathcal{H}}} \overset{(43.52)}{=} \overline{S_{Q,\,M}\big(Jv,\ u\big)} = S_{Q,\,M}\big(u,\ Jv\big) . \tag{43.53}$$

Isso significa que $J^{*_S} = J\restriction_{D(Q)}$, com $J^{*_S} : D(Q) \to \mathcal{H}$ sendo o adjunto da aplicação $J : \mathcal{H} \to D(Q)$ enquanto aplicação entre os espaços de Hilbert $\mathcal{H}$ e $D(Q)$.

6. $\overline{\operatorname{Ran}(J)}^{S} = D(Q)$, *com o fecho tomado na topologia de $D(Q)$.*

Se $x \in \operatorname{Ran}(J)^{\perp_S} \subset D(Q)$, o complemento ortogonal de $\operatorname{Ran}(J)$ em $D(Q)$ segundo o produto escalar $S_{Q,\,M}$, então para todo $y \in D(Q)$ teremos por (43.53)

$$\langle x,\ y\rangle_{\mathcal{H}} = S_{Q,\,M}\big(x,\ Jy\big) = 0 .$$

Como isso é válido para todo $y \in D(Q)$ e $D(Q)$ é denso em $\mathcal{H}$ (na topologia de $\mathcal{H}$), concluímos que $x = 0$. Assim, $\operatorname{Ran}(J)^{\perp_S} = \{0\}$ e, portanto, pela Proposição 41.2, página 2343, temos $\overline{\operatorname{Ran}(J)}^{S} = \Big(\operatorname{Ran}(J)^{\perp_S}\Big)^{\perp_S} = \{0\}^{\perp_S} = D(Q)$.

7. $J^{-1} : \operatorname{Ran}(J) \to \mathcal{H}$ *é densamente definido e simétrico.*

J^{-1} está bem definido em $\operatorname{Ran}(J)$, pois J é injetora. Como $\overline{\operatorname{Ran}(J)} = \mathcal{H}$, o operador J^{-1} é densamente definido e é simétrico, pois tomando $u,\ v \in \operatorname{Ran}(J)$ e escrevendo-os na forma $u = Ju_0$, $v = Jv_0$ para $u_0,\ v_0 \in \mathcal{H}$, teremos, usando o fato de J ser autoadjunto e limitado,

$$\langle u,\ J^{-1}v\rangle_{\mathcal{H}} = \langle Ju_0,\ v_0\rangle_{\mathcal{H}} = \langle u_0,\ Jv_0\rangle_{\mathcal{H}} = \langle J^{-1}u,\ v\rangle_{\mathcal{H}} ,$$

o que estabelece a simetria de J^{-1}.

8. $J^{-1} : \operatorname{Ran}(J) \to \mathcal{H}$ *é autoadjunto.*

Os dois operadores $\pm i\big(J^{-1} \mp i\mathbb{1}\big)J$ estão bem definidos e valem $\pm i\mathbb{1} + J$. Os operadores resolventes $\big(\pm i\mathbb{1} + J\big)^{-1}$ também existem em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, pois J é limitado e autoadjunto e, portanto, possui espectro real. Assim, temos que $\pm i\big(J^{-1} \mp i\mathbb{1}\big)J\big(\pm i\mathbb{1} + J\big)^{-1} = \mathbb{1}$ e podemos escrever $x = \pm i\big(J^{-1} \mp i\mathbb{1}\big)J\big(\pm i\mathbb{1} + J\big)^{-1} x$, para todo $x \in \mathcal{H}$, provando que $\operatorname{Ran}\big(\pm \mathbb{1} + J^{-1}\big) = \mathcal{H}$. Pelo Teorema 43.4, página 2594, J^{-1} é autoadjunto.

Reunindo esses fatos, temos para todos $x \in D(Q)$ e $y \in \operatorname{Ran}(J)$ que

$$\langle x,\ J^{-1}y\rangle_{\mathcal{H}} = \overline{\langle J^{-1}y,\ x\rangle_{\mathcal{H}}} \overset{(43.52)}{=} \overline{S_{Q,\,M}(y,\ x)} = S_{Q,\,M}(x,\ y) . \tag{43.54}$$

Parte II. Definimos agora um operador linear $A : D(A) \to \mathcal{H}$ com $D(A) \subset D(Q)$ dado por $D(A) \equiv \operatorname{Ran}(J)$ por meio da expressão

$$Ay := J^{-1}y - (M+1)y , \tag{43.55}$$

$y \in D(A) \equiv \operatorname{Ran}(J) \subset D(Q)$. O operador A é autoadjunto, pois J^{-1} o é (vide também (43.8), página 2587). O importante, porém, é que para $x \in D(Q)$ e $y \in D(A)$, temos

$$\langle x,\ Ay\rangle_{\mathcal{H}} = \langle x,\ J^{-1}y\rangle_{\mathcal{H}} - (M+1)\langle x,\ y\rangle_{\mathcal{H}} \overset{(43.54)}{=} S_{Q,\,M}(x,\ y) - (M+1)\langle x,\ y\rangle_{\mathcal{H}} \overset{(43.41)}{=} Q(x,\ y) ,$$

o que prova que o operador A representa a forma quadrática Q no sentido de nossa definição.

Parte III. Passemos agora à demonstração das afirmações adicionais do enunciado do Teorema 43.7.

a. Para todo $y \in D(A)$ tem-se $\langle y,\ Ay\rangle_{\mathcal{H}} + M\langle y,\ y\rangle_{\mathcal{H}} \overset{(43.49)}{=} Q(y,\ y) + M\|y\|^2_{\mathcal{H}} \geq 0$, pois Q é M-semilimitado.

b. Já vimos que $D(A) \equiv \operatorname{Ran}(J) \subset D(Q)$ é denso no espaço de Hilbert $D(Q)$, segundo a topologia deste. Assim, segundo a definição à página 2604, $D(A)$ é um *core* para a forma quadrática Q.

c. Seja C um *core* para Q. Então, C é denso em $D(Q)$ na topologia da norma $\|\cdot\|_{Q,\,M}$. Vamos supor que para algum $y \in D(Q)$ exista $y^* \in \mathcal{H}$ tal que

$$Q(x,\ y) = \langle x,\ y^*\rangle_{\mathcal{H}} \tag{43.56}$$

para todo $x \in C$.

Afirmamos que para cada $u \in \mathcal{H}$ a aplicação $C \ni x \mapsto \langle x,\ u\rangle_{\mathcal{H}}$ é contínua na topologia norma $\|\cdot\|_{Q,\,M}$. Isso segue diretamente do fato que $\big|\langle x,\ u\rangle_{\mathcal{H}}\big| \leq \|x\|_{\mathcal{H}}\|u\|_{\mathcal{H}} \overset{(43.44)}{\leq} \|x\|_{Q,\,M}\|u\|_{\mathcal{H}}$.

Afirmamos que para cada $u \in \mathcal{H}$ também a aplicação $C \ni x \mapsto Q(x,\ u)$ é contínua na topologia norma $\|\cdot\|_{Q,\,M}$. De fato, $Q(x,\ u) = S_{Q,\,M}(x,\ u) - (M+1)\langle x,\ u\rangle_{\mathcal{H}}$ e já vimos que $x \mapsto \langle x,\ u\rangle_{\mathcal{H}}$ é contínua naquela topologia. Mas também $x \mapsto S_{Q,\,M}(x,\ u)$ é contínua, pois $\big|S_{Q,\,M}(x,\ u)\big| \leq \|x\|_{Q,\,M}\|u\|_{Q,\,M}$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (lembrar que $S_{Q,\,M}$ é um produto escalar).

Com isso vemos que ambos os lados de (43.56) podem ser estendidos por continuidade para o fecho $D(Q)$ de C na topologia da norma $\|\cdot\|_{Q,\,M}$, e obtemos

$$Q(x,\ y) = \langle x,\ y^*\rangle_{\mathcal{H}} \tag{43.57}$$

mas agora para todo $x \in D(Q)$.

Naturalmente, (43.57) também vale se restringirmos x a $D(A)$ (pois $D(A) \subset D(Q)$). Para $x \in D(A)$ e $y \in D(Q)$, a representação (43.49) diz-nos que podemos escrever $Q(y,\ x) = \langle y,\ Ax\rangle_{\mathcal{H}}$ e, portanto (tomando-se o complexo conjugado de ambos os lados), vale $Q(x,\ y) = \langle Ax,\ y\rangle_{\mathcal{H}}$ com $x \in D(A)$ e $y \in D(Q)$.

Assim, (43.57) diz-nos que $\langle Ax,\ y\rangle_{\mathcal{H}} = \langle x,\ y^*\rangle_{\mathcal{H}}$ para todo $x \in D(A)$. Pela definição de operador adjunto (vide Seção 43.1.3, página 2585), isso é precisamente a afirmação que $y \in D(A^*)$ e $y^* = A^*y$. Já vimos, porém, que A é autoadjunto e disso concluímos que $y \in D(A)$ e $y^* = Ay$.

d. Do Teorema Espectral conhecemos os seguintes fatos: como $A + M\mathbb{1} \geq 0$, existe um operador autoadjunto e positivo $\sqrt{A + M\mathbb{1}}$, unicamente definido em um domínio $D\big(\sqrt{A + M\mathbb{1}}\big) \supset D(A + M\mathbb{1}) = D(A)$ satisfazendo $\big(\sqrt{A + M\mathbb{1}}\big)^2 = A + M\mathbb{1}$, valendo ainda que $D(A + M\mathbb{1}) = D(A)$ é um *core* para $\sqrt{A + M\mathbb{1}}$.

Defina-se em $D(R) \equiv D\big(\sqrt{A+M\mathbb{1}}\big) \supset D(A)$ a forma quadrática

$$R(x,\ y) \ := \ \Big\langle \sqrt{A+M\mathbb{1}}\,x,\ \sqrt{A+M\mathbb{1}}\,y \Big\rangle_{\mathcal{H}}, \qquad x,\ y \in D(R) .$$

R é evidentemente simétrica e positiva (e, portanto, semilimitada) e é fechada (pelo mesmo argumento que mostrou que a forma Q_b, definida em (43.47), página 2604, é fechada, pois aqui $\sqrt{A+M\mathbb{1}}$ é autoadjunto e, portanto, fechado).

Se tomarmos $x,\ y \in D(A) \subset D(R)$, teremos

$$R(x,\ y) \ = \ \Big\langle \sqrt{A+M\mathbb{1}}\,x,\ \sqrt{A+M\mathbb{1}}\,y \Big\rangle_{\mathcal{H}} \ = \ \Big\langle x,\ \Big(\sqrt{A+M\mathbb{1}}\Big)^2 y \Big\rangle_{\mathcal{H}} \ = \ \langle x,\ (A+M\mathbb{1})y\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$\stackrel{(43.49)}{=} \ Q(x,\ y) + M\langle x,\ y\rangle_{\mathcal{H}} ,$$

provando (43.50) em $D(A)$. Como $D(A)$ é um *core* de $\sqrt{A+M\mathbb{1}}$, é também um *core* de R. Já vimos que $D(A)$ é um *core* para Q e concluímos disso que R e a forma $Q + M\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ coincidem não apenas em $D(A)$, mas em todo $D(Q)$, provando completamente (43.50).

Com isso, a demonstração do Teorema 43.7 está completa. ■

43.3.1 Alguns Usos de Formas Quadráticas

43.3.1.1 A Forma de Soma

Já comentamos anteriormente sobre as dificuldades na definição da soma de operadores não limitados e vamos aqui indicar como formas quadráticas podem ser usadas em certos casos especiais para dar sentido a tais operadores. Sejam $A : D(A) \to \mathcal{H}$ e $B : D(B) \to \mathcal{H}$ dois operadores autoadjuntos *positivos* agindo em um mesmo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e tendo como domínios $D(A)$ e $D(B)$, respectivamente. Mesmo assumindo que esses domínios sejam densos em $\mathcal{H}$ não há razão para crer-se que $D(A) \cap D(B)$ seja igualmente denso e há até mesmo exemplos em que essa intersecção seja composta apenas pelo vetor nulo. Se, porém, tivermos válida a condição mais fraca que o subespaço $D\big(\sqrt{A}\big) \cap D\big(\sqrt{B}\big) \equiv \mathcal{C}$ é denso em $\mathcal{H}$ podemos usar a teoria anteriormente desenvolvida, definindo-se em $\mathcal{C}$ a forma quadrática

$$Q(u,\ v) \ := \ \Big\langle \sqrt{A}u,\ \sqrt{A}v \Big\rangle_{\mathcal{H}} + \Big\langle \sqrt{B}u,\ \sqrt{B}v \Big\rangle_{\mathcal{H}} ,$$

$u,\ v \in \mathcal{C}$. Essa forma é sesquilinear e positiva. Seu fecho $\widetilde{Q}$ satisfaz, portanto, as hipóteses do Teorema 43.7, página 2606, e, consequentemente, podemos representar $\widetilde{Q}$ por um operador autoadjunto e positivo C: $\widetilde{Q}(u,\ v) = \langle u,\ Cv\rangle_{\mathcal{H}}$, com $D(C) \subset D\big(\widetilde{Q}\big)$, sendo $D(C)$ denso em $\mathcal{H}$ e um *core* para $\widetilde{Q}$.

O operador autoadjunto positivo C é demonimado *operador de soma em forma quadrática* de A e B, por vezes denotado como $C = A \dot{+} B$ para distinguí-lo do operador soma definido em (43.7), página 2586, que pode não existir, como dissemos.

Esse método de definição da soma de operadores é usado na Mecânica Quântica para definir-se operadores de Schrödinger do tipo $-\Delta + V$ agindo no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n,\ d^nx)$ quando V é positivo mas singular. Para diversas aplicações à Mecânica Quântica de operadores de Schrödinger, vide [453], [454], [506], [508], [503], [60].

43.3.1.2 A Extensão de Friedrichs

O Teorema 43.7, página 2606, tem uma consequência muito relevante: a de garantir a existência de uma extensão autoadjunta para operadores simétricos e positivos (ou limitados inferiormente), extensão essa dotada de algumas propriedades úteis. Trata-se da chamada *extensão de Friedrichs*[13], da qual trataremos agora. A existência dessa extensão é evocada em diversas áreas, da Mecânica Quântica à Geometria Diferencial, passando naturalmente pelo estudo de equações diferenciais.

[13] Kurt Otto Friedrichs (1901–1982).

Teorema 43.8 (Teorema de Extensão de Friedrichs) *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $T : D(T) \to \mathcal{H}$ um operador linear com $D(T)$ um subespaço linear denso em $\mathcal{H}$. Seja T positivo (i.e., $\langle u,\ Tu\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$, $\forall u \in D(T)$) e simétrico. Então, T possui uma extensão autoadjunta e positiva $T_F : D(T_F) \to \mathcal{H}$, denominada* extensão de Friedrichs *de T. A extensão de Friedrichs é a "menor" extensão autoadjunta e positiva de T, pois se B for outra extensão autoadjunta e positiva de T, então $T_F \subset B$.* □

Comentários. 1º Fazemos notar que T não é suposto fechado nas hipóteses do Teorema 43.8. 2º As afirmações do Teorema 43.8 podem ser facilmente estendidas para o caso de T ser limitado inferiormente: $\langle u,\ Tu\rangle_{\mathcal{H}} \geq -M\|u\|^2_{\mathcal{H}}$, para algum $M \in \mathbb{R}$, pois em um tal caso o operador $T + M\mathbb{1}$ é densamente definido (com domínio $D(T)$), positivo, e simétrico. 3º As duas referências originais contendo demonstrações do Teorema 43.8 são as seguintes: K. Friedrichs in "Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren", Math. Ann. **109**, 465–487 (1934). M. Stone in *Linear Transformations in Hilbert Spaces and their Applications in Analysis*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publication 15, Providence, Rhode Island, (1932). Fonte: [454]. Vide também [503]. ♣

Provado Teorema 43.8. É claro que a forma quadrática $Q : D(T) \times D(T) \to \mathbb{C}$ definida por $Q(x,\ y) := \langle x,\ Ty\rangle_{\mathcal{H}}$, $x,\ y \in D(T)$ é densamente definida, simétrica e positiva e, portanto, semilimitada com $M = 0$. Por isso vamos simplificar um pouco nossa notação, denotando o produto escalar $S_{Q,\,M}$ por S_Q e norma correspondente $\|\cdot\|_{Q,\,M}$ por $\|\cdot\|_Q$.

Assim, $S_Q(x,\ y) \equiv S_{Q,\,0}(x,\ y) := Q(x,\ y) + \langle x,\ y\rangle_{\mathcal{H}}$ define um produto escalar em $D(Q) \equiv D(T)$. Seja $\mathcal{H}_S \subset \mathcal{H}$ o completamento de $D(Q) \equiv D(T)$ nesse produto escalar[14], cuja existência foi discutida na Proposição 42.4, página 2390.

Seja $\widetilde{Q} : \mathcal{H}_S \times \mathcal{H}_S \to \mathbb{C}$ o fecho, ou extensão canônica, de Q, definida em (43.48). A forma $\widetilde{Q}$ é densamente definida, simétrica, positiva (e, portanto, semilimitada) e fechada (pois seu domínio de definição é $D\big(\widetilde{Q}\big) \equiv \mathcal{H}_S$, que é um espaço de Hilbert para ao produto escalar S_Q). Pelo Teorema 43.7, página 2606, existe um operador autoadjunto e positivo $T_F : D(T_F) \to \mathcal{H}$ que representa $\widetilde{Q}$ no domínio $D(T_F) \subset D\big(\widetilde{Q}\big) \equiv \mathcal{H}_S$:

$$\widetilde{Q}(x,\ y) \ = \ \langle x,\ T_F y\rangle_{\mathcal{H}} , \qquad \forall\, x \in D\big(\widetilde{Q}\big) \ \text{ e } \ \forall\, y \in D(T_F) .$$

Pelo item **b** do enunciado do Teorema 43.7, página 2606, $D(T_F)$ é denso em $D\big(\widetilde{Q}\big) \equiv \mathcal{H}_S$ na topologia da norma $\|\cdot\|_Q$.

Note-se agora que para $x,\ y \in D(T)$ temos $\langle x,\ Ty\rangle_{\mathcal{H}} = Q(x,\ y) = \widetilde{Q}(x,\ y)$, com a última igualdade decorrendo do fato que $D(T) = D(Q) \subset \mathcal{H}_S = D\big(\widetilde{Q}\big)$. A igualdade $\widetilde{Q}(x,\ y) = \langle x,\ Ty\rangle_{\mathcal{H}}$ é valida para todo $x \in D(T)$ (que é um *core* para $\mathcal{H}_S = D\big(\widetilde{Q}\big)$, pois este último é definido como o completamento de $D(T)$ na norma $\|\cdot\|_Q$) e para $y \in D(T) \subset D\big(\widetilde{Q}\big)$. Pelo item **c** do enunciado do Teorema 43.7, página 2606, temos que $y \in D(T_F)$ e $Ty = T_F y$. Isso demonstrou que T_F estende T. O operador T_F é denominado *extensão de Friedrichs* de T.

Resta-nos provar que T_F é a "menor" extensão de T com a propriedade de ser autoadjunta e positiva. Para tal, seja $B : D(B) \to \mathcal{H}$, com $T \subset B$, uma extensão autoadjunta e positiva de T. Defina-se em $D(B)$ a forma quadrática

$$Q_B(x,\ y) \ := \ \langle x,\ By\rangle_{\mathcal{H}} , \qquad \forall\ x,\ y \ \in \ D(B) .$$

É claro que Q_B estende Q (pois T e B coincidem em $D(T) \subset D(B)$). O fecho, ou extensão canônica, de Q_B, que denotamos por $\widetilde{Q_B}$, também é, naturalmente, uma extensão simétrica, positiva e fechada de Q e, como tal, pela Proposição 43.16, página 2605, é uma extensão de $\widetilde{Q}$. Mas isso significa que $D(T_F) \subset D\big(\widetilde{Q}\big) \subset D\big(\widetilde{Q_B}\big)$ e que

$$\widetilde{Q}(x,\ y) \ = \ \widetilde{Q_B}(x,\ y) , \qquad x,\ y \in D\big(\widetilde{Q}\big) . \tag{43.58}$$

Pelo item **d** do Teorema 43.7, página 2606, sabemos que para as formas quadráticas fechadas $\widetilde{Q}$ e $\widetilde{Q_B}$ valem $D\big(\widetilde{Q}\big) = D\big(\sqrt{T_F}\big)$ e $D\big(\widetilde{Q_B}\big) = D\big(\sqrt{B}\big)$. Logo, $D\big(\sqrt{T_F}\big) \subset D\big(\sqrt{B}\big)$. A relação (43.50) do mesmo teorema afirma ainda que $\widetilde{Q}(x,\ y) = \big\langle \sqrt{T_F}x,\ \sqrt{T_F}y\big\rangle_{\mathcal{H}}$ para todos $x,\ y \in D\big(\widetilde{Q}\big)$ e $\widetilde{Q_B}(x,\ y) = \big\langle \sqrt{B}x,\ \sqrt{B}y\big\rangle_{\mathcal{H}}$ para todos $x,\ y \in D\big(\widetilde{Q_B}\big)$. Logo, reunindo esses fatos, a igualdade (43.58) significa para $x,\ y \in D(T_F)$ que $\big\langle \sqrt{T_F}x,\ \sqrt{T_F}y\big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle \sqrt{B}x,\ \sqrt{B}y\big\rangle_{\mathcal{H}}$, o que implica em $\big\langle x,\ T_F y\big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle x,\ By\big\rangle_{\mathcal{H}}$, $\forall\, x,\ y \in D(T_F)$. Consequentemente, vale $\big\langle x,\ T_F y - By\big\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ para todo $x \in D(T_F)$. Como $D(T_F)$ é denso em $\mathcal{H}$, concluímos que $T_F y = By$ para todo $y \in D(T_F)$, demonstrando que B estende T_F e completando a prova do Teorema 43.8. ■

[14] Em contrante com o que foi feito na demonstração do Teorema 43.7, página 2606, não estamos supondo aqui que $D(Q)$ seja um espaço de Hilbert em relação ao produto escalar S_Q, pois não supomos que Q seja uma forma fechada. Daí a necessidade de completar-se $D(Q)$, produzindo o novo subespaço $\mathcal{H}_S$ de $\mathcal{H}$, e de estender Q a esse completamento.

43.4 Bestiário de Exemplos e Contraexemplos

Esta seção é dedicada à apresentação de diversos exemplos e contraexemplos de propriedades de operadores lineares discutidas no presente capítulo, assim como exemplos de usos de alguns dos seus teoremas mais importantes.

• Exemplo de operador não-fechável

No exemplo 43.1 apresentamos um operador não-fechável, mostrando que o fecho de seu gráfico não é o gráfico de um operador.

Exemplo 43.1 Vamos exibir um exemplo (de [453]) de um operador não-fechável (e, portanto, não-fechado). Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável e seja $\{\psi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ uma base ortonormal completa em $\mathcal{H}$. Seja $\{c_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de quadrado somável (i.e., $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$) tal que $c_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (para o argumento que segue é suficiente que haja uma coleção infinita de c_n's não-nulos). Seja $\phi := \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n \in \mathcal{H}$ e defina-se

$$\mathcal{D} \ := \ \left\{ \sum_{n=1}^{N} \alpha_n\psi_n + \beta\phi, \ \text{ para algum } N \in \mathbb{N}, \text{arbitrário, e para } \beta,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_N \in \mathbb{C} \right\} .$$

É elementar constatar-se (faça-o!) que $\mathcal{D}$ é um subespaço linear de $\mathcal{H}$. Defina-se $T : D(T) \to \mathcal{H}$, com $D(T) \equiv \mathcal{D}$, por

$$T\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n\psi_n + \beta\phi \right) \ := \ \beta\phi \ .$$

É evidente que T é um operador linear e desejamos provar que T <u>não é</u> fechável, mostrando para tal que o fecho de seu gráfico não é o gráfico de um operador. Para isso, provaremos que $(0,\ \phi) \in \overline{\Gamma(T)}$. Seja a sequência em $\Gamma(T)$ dada por

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(-c_k)\psi_k + \phi,\ \ T\left(\sum_{k=1}^{n}(-c_k)\psi_k + \phi \right) \right) \ = \ \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\psi_k,\ \ \phi \right) , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

É evidente que essa sequência converge a $(0,\ \phi)$, estabelecendo que $(0,\ \phi) \in \overline{\Gamma(T)}$. Com o ϕ não é nulo, $\overline{\Gamma(T)}$ não pode ser o gráfico de um operador. ♦

• Outro exemplo de operador não-fechável e com $T^* = 0$ mas com $T \neq 0$

O exemplo abaixo exibe mais um operador não-fechável para o qual temos $T^* = 0$ mesmo que T não seja o operador nulo, uma situação impossível no caso de operadores limitados. Nele vemos também que $D(T^*)$ não é denso em $\mathcal{H}$. No Teorema 43.2, página 2589, vemos que o fato de T não ser fechável está diretamente relacionado ao fato de $D(T^*)$ não ser denso.

Exemplo 43.2 Seja $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{N})$ o espaço de Hilbert das sequências de quadrado somável (vide Seção 25.5.1, página 1489). Seus elementos são sequências $\underline{\psi} = \{\psi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|^2 < \infty$. Seja $\underline{f}$ a sequência definida por $f_n = n^{-1/2}$, $n \in \mathbb{N}$. É claro que $\underline{f}$ *não* é de quadrado somável, ou seja, $\underline{f} \notin \ell_2(\mathbb{N})$. Consideremos o conjunto

$$D(T) \ := \ \left\{ \underline{\psi} \in \ell_2(\mathbb{N}) \,\Big|\, \sum_{n=1}^{\infty} f_n|\psi_n| \ < \ \infty \right\} .$$

É fácil constatar (faça-o!) que $D(T)$ é um subespaço linear de $\ell_2(\mathbb{N})$ e que $D(T)$ é denso em $\ell_2(\mathbb{N})$, pois $D(T)$ contém o espaço $\mathfrak{d}$ (vide (25.42), página 1489) de todas as sequências $\underline{\psi}$ com a propriedade que $\psi_n \neq 0$ apenas para um conjunto finito de n's.

Escolhamos um vetor não-nulo $\underline{\phi} \in \ell_2(\mathbb{N})$, fixo, e definamos o operador linear $T : D(T) \to \ell_2(\mathbb{N})$ por

$$T\underline{\psi} \ := \ \left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m\psi_m \right) \underline{\phi} \ .$$

Vamos determinar T^*. Pela definição, se $\underline{\varphi} \in D(T^*)$, então existe $\underline{\eta} \in \mathcal{H}$ tal que $\langle \underline{\varphi},\ T\underline{\psi} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \underline{\eta},\ \underline{\psi} \rangle_{\mathcal{H}}$ para todo $\underline{\psi} \in D(T)$, ou seja, vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi_n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m\psi_m \right) \phi_n \ = \ \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\eta_m}\,\psi_m \ .$$

Assim, tomando $\underline{\psi} \in \mathfrak{d} \subset D(T)$, podemos reordenar as somas acima e obter

$$\sum_{m=1}^{\infty} \overline{\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\phi_n}\varphi_n \right) f_m - \eta_m \right]}\, \psi_m \ = \ 0 \ ,$$

para todo $\underline{\psi} \in \mathfrak{d} \subset D(T)$, donde concluímos que

$$\eta_m \ = \ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\phi_n}\varphi_n \right) f_m$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, ou seja, $\underline{\eta} = \langle \underline{\phi},\ \underline{\varphi} \rangle_{\mathcal{H}}\underline{f}$. O problema com essa igualdade é que $\underline{f} \notin \ell_2(\mathbb{N})$. Portanto, a mesma só faz sentido se $\langle \underline{\phi},\ \underline{\varphi} \rangle_{\mathcal{H}} = 0$, com o que teremos $\underline{\eta} = 0$. Com isso, identificamos que $D(T^*) = [\underline{\phi}]^{\perp}$, o subespaço ortogonal ao subespaço gerado por $\underline{\phi}$. Portanto, $D(T^*)$ não é denso em $\mathcal{H}$. Além disso, $T^*\underline{\varphi} = \underline{\eta} = 0$, o que informa que T^*, é o operador nulo!

O operador T não é fechável. Para ver isso, consideremos a sequência $(\underline{\psi^N},\ T\underline{\psi^N}) \in \Gamma(T)$, $N \in \mathbb{N}$, sendo que $\underline{\psi^N} \in \mathfrak{d} \subset \ell_2(\mathbb{N})$ é definida por

$$\psi^N_m \ := \ \frac{1}{h_N}\,\frac{1}{\sqrt{m}}\,\chi_{[1,\ N]}(m) \ , \quad m \in \mathbb{N} \ ,$$

para cada $N \in \mathbb{N}$, onde

$$h_N \ := \ \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \qquad \text{e} \qquad \chi_{[1,\ N]}(m) \ := \ \begin{cases} 1 \ , & \text{para } m \in [1,\ N] \ , \\ 0 \ , & \text{de outra forma} \ . \end{cases}$$

Teremos, que

$$\left\| \underline{\psi^N} \right\|^2 \ = \ \sum_{m=1}^{\infty} \left| \psi^N_m \right|^2 \ = \ \frac{1}{(h_N)^2}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m} \ = \ \frac{1}{h_N} \ ,$$

o que implica que $\lim_{N\to\infty} \left\| \underline{\psi^N} \right\|^2 = 0$. Por outro lado,

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m\psi^N_m \ = \ \frac{1}{h_N}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m} \ = \ 1 \ ,$$

o que implica que $T\underline{\psi^N} = \phi$ para todo N e, portanto, que $\lim_{N\to\infty} T\underline{\psi^N} = \phi$. Logo, a sequência $(\underline{\psi^N},\ T\underline{\psi^N}) \in \Gamma(T)$, $N \in \mathbb{N}$, converge a $(0,\ \phi)$. Assim, $(0,\ \phi) \in \overline{\Gamma(T)}$ e, portanto, $\overline{\Gamma(T)}$ não pode ser o gráfico de um operador, o que significa dizer que T não é fechável. ♦

• O operador $-i\frac{d}{dx}$ em $L^2([0,\ 1],\ dx)$

No exemplo que segue faremos um estudo detalhado do operador $-i\frac{d}{dx}$ no espaço de Hilbert $L^2([0,\ 1],\ dx)$, definindo-o primeiramente em domínios adequados para depois obter os correspondentes fechos e suas extensões autoadjuntas. A relevância dessas extensões para a Mecânica Quântica (de uma partícula restrita ao intervalo unidimensional $[0,\ 1]$ ou em um círculo) será discutida ao final.

Esse exemplo é também relevante, pois seu tratamento permite-nos fazer uso de praticamente todo o arsenal de resultados obtidos no presente capítulo.

Exemplo 43.3 Seja $\mathcal{H} = L^2([0,\ 1],\ dx)$. Como é usual, denotaremos por $C([0,\ 1])$ o conjunto das funções complexas contínuas no intervalo $[0,\ 1]$ e denotaremos por $C^1([0,\ 1])$ o conjunto das funções complexas contínuas com derivada contínua no mesmo intervalo. No que segue, usaremos amiúde o fato que $L^2([0,\ 1],\ dx) \subset L^1([0,\ 1],\ dx)$, assim como os fatos de $C([0,\ 1])$ e $C^1([0,\ 1])$ serem subespaços lineares densos em $\mathcal{H}$. Seja $D(T_1) = C^1([0,\ 1])$ e seja $T_1 : D(T_1) \to \mathcal{H}$ o operador definido por $(T_1 f)(x) := -if'(x)$, $x \in [0,\ 1]$.

Claramente, $C^1([0,\ 1]) \subset L^2([0,\ 1],\ dx) \equiv \mathcal{H}$ e claramente a imagem de T_1 são funções contínuas em $[0,\ 1]$ e, portanto, elementos de $\mathcal{H}$. Assim, T_1 é, de fato, um operador linear do subespaço $C^1([0,\ 1])$ de $L^2([0,\ 1],\ dx)$ em $L^2([0,\ 1],\ dx)$.

Defina-se $T_2 : D(T_2) \to \mathcal{H}$, onde $D(T_2) = \left\{ \phi \in C^1([0,\ 1]) \,\middle|\, \phi(0) = \phi(1) = 0 \right\}$, dado por $T_2\phi := -i\phi'$. Claro está que $D(T_2)$ é um subespaço linear e que $D(T_2) \subset D(T_1)$. Como T_2 e T_1 coincidem em $D(T_2)$, concluímos que T_1 estende T_2: $T_2 \subset T_1$.

T_1 e T_2 não são limitados. De fato, é fácil ver que, para cada $n \in \mathbb{N}$, as funções $v_n(x) := \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(n\pi x)$ são elementos de $D(T_2)$ e satisfazem $\|v_n\| = 1$ e $\|T_2 v_n\| = n\pi$ e, portanto, $\|T_2 v_n\|/\|v_n\|$ não é limitado em n. Como $T_2 \subset T_1$, isso evidentemente implica que T_1 também não é limitado. Verifique essas afirmações!

Notemos que $D(T_1)$ e $D(T_2)$ são densos em $\mathcal{H}$ e, portanto, seus adjuntos T_1^* e T_2^* estão definidos em domínios $D(T_1^*)$ e $D(T_2^*)$, respectivamente. No que segue obteremos em diversas etapas resultados sobre T_1 e T_2.

I. *T_1 é fechável.*

Seja $(u,\ v) \in \overline{\Gamma(T_1)}$ e seja $(u_n,\ T_1 u_n) \in \Gamma(T_1)$ um sequência de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ convergente a $(u,\ v)$. Assim, em $\mathcal{H}$ temos os limites $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ e $\lim_{n\to\infty} T_1 u_n = v$.

Para todo $\phi \in \mathcal{H}$ valerá

$$\lim_{n\to\infty} \langle \phi,\ T_1 u_n \rangle_{\mathcal{H}} \ = \ \langle \phi,\ v \rangle_{\mathcal{H}} \ .$$

Se, em particular, tomarmos $\phi \in D(T_2)$, valerá, por integração por partes,

$$\langle \phi,\ T_1 u_n \rangle_{\mathcal{H}} \ = \ -i \int_0^1 \overline{\phi(x)} u_n'(x)\, dx \ = \ i \int_0^1 \overline{\phi'(x)} u_n(x)\, dx \ = \ \big\langle -i\phi',\ u_n \big\rangle_{\mathcal{H}} \ = \ \langle T_2\phi,\ u_n \rangle_{\mathcal{H}} \ .$$

Logo, $\langle \phi,\ v \rangle_{\mathcal{H}} = \langle T_2\phi,\ u \rangle_{\mathcal{H}}$.

Essa igualdade diz-nos que $u \in D(T_2^*)$ e que $T_2^* u = v$. Assim, $(u,\ v) = (u,\ T_2^* u) \in \Gamma\big(T_2^*\big)$, provando que $\overline{\Gamma(T_1)} \subset \Gamma\big(T_2^*\big)$. Logo, $\Gamma(T_1) \subset \Gamma\big(T_2^*\big)$ e como T_2^* é fechado (Teorema 43.1, página 2589), concluímos que T_1 é fechável, por possuir uma extensão fechada. Assim, existe o fecho $\overline{T_1}$ e vale $T_1 \subset \overline{T_1} \subset T_2^*$.

II. *T_2 é simétrico e, portanto, fechável.*

Como $T_2 \subset T_1$, concluímos de $T_1 \subset \overline{T_1} \subset T_2^*$ que $T_2 \subset T_2^*$, ou seja, que T_2 é simétrico e, portanto, fechável e seu fecho $\overline{T_2}$ existe.

III. *Várias relações entre fechos e adjuntos de T_1 e T_2.*

Como T_1 é fechável, pelo Teorema 43.2, página 2589, $D(T_1^*)$ é densamente definido e, portanto, existe T_1^{**} e valem $\overline{T_1} = T_1^{**}$ e $\big(\overline{T_1}\big)^* = T_1^*$.

Como $T_2 \subset T_1$, tem-se também $T_1^* \subset T_2^*$ (Proposição 43.8, página 2589). Disso obtemos que $D(T_2^*)$ é também densamente definido e, portanto, que T_2^{**} existe e valem $\overline{T_2} = T_2^{**}$ e $\big(\overline{T_2}\big)^* = T_2^*$.

Dessa forma, juntando resultados anteriores, estabelecemos também que (verifique!)

$$T_2 \ \subset \ T_1 \ \subset \ T_2^* \quad \text{ e que } \quad \overline{T_2} \ = \ T_2^{**} \ \subset \ T_1^* \ \subset \ T_2^* \ = \ \big(\overline{T_2}\big)^* \ .$$

Essa última relação mostra que $\overline{T_2}$ também é simétrico. Pelo Lema 43.4, página 2592, $\mathrm{Ran}\,\big(\overline{T_2} \pm i\big)$ são ambos subespaços fechados de $\mathcal{H}$. Vamos determiná-los mais adiante.

IVa. *T_2 e $\overline{T_2}$ são simétricos, mas não essencialmente autoadjuntos. $\overline{T_2}$ não é autoadjunto.*

Para ver isso, considere-se as funções $\psi_\pm(x) = e^{\pm x}$, $x \in [0,\ 1]$. É claro que $\psi_\pm \in D(T_1)$. Como $T_1 \subset T_2^*$ (como estabelecemos acima), temos que $\psi_\pm \in D(T_2^*)$ e que $T_2^* \psi_\pm = T_1 \psi_\pm = -i\big(\psi_\pm\big)' = \mp i \psi_\pm$. Logo, $\psi_\pm$ são vetores não-nulos tais que $\psi_\pm \in \mathrm{Ker}\,\big(T_2^* \pm i\big)$. Pelo item (b) do Teorema 43.5, página 2595, concluímos que T_2 <u>não</u> é essencialmente autoadjunto. Assim, como $\overline{T_2}$ não é autoadjunto, pelo Teorema 43.4, página 2594, e pelo comentado acima, concluímos que $\mathrm{Ran}\,\big(\overline{T_2} \pm i\big)$ são ambos subespaços fechados *próprios* de $\mathcal{H}$, pois pelo Teorema 43.2 e pelo Lema 43.4, páginas 2589 e 2592, respectivamente, tem-se $\mathrm{Ran}\,\big(\overline{T_2} \pm i\big) = \overline{\mathrm{Ran}\,\big(\overline{T_2} \pm i\big)} = \overline{\mathrm{Ran}\,(T_2 \pm i)}$. Esse fato, por sua vez, informa que $\overline{T_2}$ também <u>não</u> é essencialmente autoadjunto, devido ao item (c) do Teorema 43.5, página 2595.

Não sendo essencialmente autoadjuntos, T_2 e $\overline{T_2}$ podem possuir múltiplas extensões autodjuntas. Vamos encontrá-las mais adiante.

IVb. *T_2 e $\overline{T_2}$ são simétricos, mas não essencialmente autoadjuntos. $\overline{T_2}$ não é autoadjunto. Uma segunda abordagem.*

Uma outra abordagem equivalente para a mesma questão é a seguinte. Procuremos determinar $\mathrm{Ran}\,(T_2 - i)$. Se $\psi \in \mathrm{Ran}\,(T_2 - i)$, então existe $\phi \in D(T_2)$ tal que $(T_2 - i)\phi = \psi$, ou seja, tal que $\phi' + \phi = i\psi$. A solução dessa equação diferencial, que pode ser obtida por diversos métodos elementares, é

$$\phi(x) \ = \ e^{-x}\phi(0) + i e^{-x} \int_0^x e^s \psi(s)\, ds \ . \tag{43.59}$$

Como procuramos soluções em $D(T_2)$ devemos impor $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 0$. Essa segunda condição implica que $\langle \exp,\ \psi \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 e^s \psi(s)\, ds = 0$, ou seja, que ψ pertença ao complemento ortogonal do subespaço gerado pela função exponencial, subespaço esse que denotamos por $[\exp]$. Assim, $\mathrm{Ran}\,(T_2 - i) \subset [\exp]^\perp$. De maneira totalmente análoga é possível estabelecer que $\mathrm{Ran}\,(T_2 + i) \subset [1/\exp]^\perp$. Acima,

$$[\exp] \ := \ \Big\{ a e^x,\ a \in \mathbb{C} \Big\} \qquad \text{e} \qquad [1/\exp] \ := \ \Big\{ a e^{-x},\ a \in \mathbb{C} \Big\} \tag{43.60}$$

são os subespaços unidimensionais de $\mathcal{H}$ gerados pelas funções e^x e e^{-x}, $x \in [0,\ 1]$, respectivamente.

Como antes, esses fatos dizem que $\mathrm{Ran}\,(T_2 \pm i)$ <u>não</u> são densos em $\mathcal{H}$ e, portanto, T_2 não é essencialmente autodjunto (item (c) do Teorema 43.5, página 2595). Dessa forma, $\overline{T_2}$ não pode ser autoadjunto. A argumentação que $\overline{T_2}$ não é essencialmente autoadjunto é mesma acima.

Retornando a (43.59), é interessante ainda apontar para o seguinte. Como ϕ deve ser um elemento de $C^1\big([0,\ 1]\big)$, sua derivada deve ser contínua, o que nos informa que ψ deve ser contínua. Assim, podemos afirmar mais precisamente que

$$\mathrm{Ran}\,(T_2 - i) \ = \ C\big([0,\ 1]\big) \cap [\exp]^\perp \ \text{ e que } \ \mathrm{Ran}\,(T_2 + i) \ = \ C\big([0,\ 1]\big) \cap [1/\exp]^\perp \ .$$

De (43.9), página 2587, obtemos que

$$\mathrm{Ker}\,\big(T_2^* + i\big) \ = \ [\exp] \quad \text{ e que } \quad \mathrm{Ker}\,\big(T_2^* - i\big) \ = \ [1/\exp] \ .$$

Como $\big(\overline{T_2}\big)^* = T_2^*$, segue trivialmente que

$$\mathrm{Ker}\,\Big(\big(\overline{T_2}\big)^* + i\Big) \ = \ [\exp] \quad \text{ e que } \quad \mathrm{Ker}\,\Big(\big(\overline{T_2}\big)^* - i\Big) \ = \ [1/\exp] \ . \tag{43.61}$$

Esses são os *espaços de deficiência* do operador simétrico e fechado $\overline{T_2}$ e, note-se, são ambos unidimensionais.

Do fato já mencionado que $\mathrm{Ran}\,\big(\overline{T_2} \pm i\big) = \overline{\mathrm{Ran}\,(T_2 \pm i)}$, concluímos que

$$\mathrm{Ran}\,\Big(\overline{T_2} - i\Big) \ = \ [\exp]^\perp \quad \text{ e que } \quad \mathrm{Ran}\,\Big(\overline{T_2} + i\Big) \ = \ [1/\exp]^\perp \ .$$

V. *Determinando o operador $\overline{T_2}$. O operador T_2 não é fechado.*

Para estudar $\overline{\Gamma(T_2)}$ consideremos que se $(\phi,\ \psi) \in \overline{\Gamma(T_2)}$, então existe (ao menos) uma sequência $(\phi_n,\ T_2\phi_n) \in \Gamma(T_2)$, $n \in \mathbb{N}$, convergente em $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ a $(\phi,\ \psi)$.

Notemos que se $\xi \in \mathcal{H}$, então para cada $x \in [0,\ 1]$ a integral $\int_0^x \xi(s) ds$ existe, pois, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int_0^x 1 \cdot \xi(s) ds \right|^2 \ \le \ \left(\int_0^x 1 dt \right) \left(\int_0^x |\xi(s)|^2 ds \right) \ \le \ x \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 \ \le \ \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 \ < \ \infty \ . \tag{43.62}$$

Essa desigualdade, em particular, informa que a função $\int_0^x \xi(s) ds$ é um elemento de $L^2\big([0,\ 1],\ dx\big)$ e que a aplicação $\mathcal{H} \ni \xi \mapsto \int_0^x \xi(s) ds$ é um operador limitado agindo em $L^2\big([0,\ 1],\ dx\big)$.

Considere-se agora o operador de Volterra, definido no espaço de Banach $C\big([0,\ 1]\big)$ por $(Wf)(x) := \int_0^x f(t) dt$. Esse operador foi discutido no Exercício E. 42.30, página 2443, retomado no Exemplo 42.10 à página 2499, e tratado com mais generalidade à página 2516. Sabemos daquela discussão que W pode ser estendido a todo $\mathcal{H} = L^2\big([0,\ 1],\ dx\big)$ como um operador limitado e compacto. Como de costume, denotaremos essa extensão também por W. Como W e o operador $\mathcal{H} \ni \xi \mapsto \int_0^x \xi(s) ds$ coincidem no subespaço $C\big([0,\ 1]\big)$, denso em $L^2\big([0,\ 1],\ dx\big)$, concluímos que eles coincidem em toda parte como operadores limitados agindo em $\mathcal{H}$ e que $(W\xi)(x) = \int_0^x \xi(s) ds$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ e quase todo $x \in [0,\ 1]$.

Como $\|T_2\phi_n - \psi\|_{\mathcal{H}} \to 0$ quando $n \to \infty$, temos do fato de W ser limitado que $\lim_{n\to\infty} \Big\| W\big(T_2\phi_n - \psi\big) \Big\|_{\mathcal{H}} = 0$. Agora, como $T_2\phi_n = -i\phi_n'$ é contínua, tem-se para cada $n \in \mathbb{N}$ que $\big(W T_2 \phi_n\big)(x) = -i\big(\phi_n(x) - \phi_n(0)\big) = -i\phi_n(x)$, já que $\phi_n \in D(T_2)$ e, portanto, anula-se em 0. Com isso, estabelecemos que

$$0 \ = \ \lim_{n\to\infty} \Big\| W\big(T_2\phi_n - \psi\big) \Big\|_{\mathcal{H}} \ = \ \lim_{n\to\infty} \Big\| -i\phi_n - W\psi \Big\|_{\mathcal{H}} \ . \tag{43.63}$$

Como ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência convergente a ϕ em $\mathcal{H}$ concluímos de (43.63) que $-i\phi = W\psi$.

A igualdade $-i\phi = W\psi$ é uma igualdade entre vetores de $\mathcal{H}$ e significa que $-i\phi(x) = \int_0^x \psi(s)\, ds$ para quase todo $x \in [0,\ 1]$. Como o lado esquerdo é uma função contínua, podemos modificar o lado direito em um conjunto de medida nula de modo a fazer a igualdade válida em todo $[0,\ 1]$. Essa mesma igualdade, porém, afirma que $-i\phi'(x) = \psi(x)$ quase em toda parte.

Esses fatos informam o seguinte:

1. Que $-i\phi(x) = \int_0^x \psi(s)\, ds$ e, portanto, que ϕ é um elemento do espaço linear $\mathrm{AC}\big([0,\ 1]\big)$, o conjunto das funções ditas *absolutamente contínuas* em $[0,\ 1]$. Tais funções podem ser definidas como as funções $f : [0,\ 1] \to \mathbb{C}$, contínuas, com derivada integrável de Lebesgue definida quase em toda parte e que satisfazem o Teorema Fundamental do Cálculo: $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(s) ds$. Claro está que $C^1\big([0,\ 1]\big) \subset \mathrm{AC}\big([0,\ 1]\big)$.
2. Que $\phi' \in \mathcal{H}$, pois $\psi \in \mathcal{H}$.
3. Que $-i\phi(x) = \int_0^x \psi(s)\, ds$ implica $\phi(0) = 0$.

4. Que

$$\left|\int_0^1 \big(\psi(s) - (T_2\phi_n)(s)\big)\, ds\right| \stackrel{(43.62)}{\leq} \|\psi - T_2\phi_n\|_{\mathcal{H}} \,. \tag{43.64}$$

Agora, $\int_0^1 (T_2\phi_n)(s)ds = -i\int_0^1 \phi_n'(s)ds = -i\big(\phi_n(1) - \phi_n(0)\big) = 0$, pois $\phi_n \in D(T_2)$ e, portanto, anula-se em 0 e 1. Logo, (43.64) informa que

$$\left|\int_0^1 \psi(s)\, ds\right| \leq \|\psi - T_2\phi_n\|_{\mathcal{H}} \,.$$

O lado esquerdo independe de n e o direito, por hipótese, vai a zero quando $n \to \infty$. Disso concluímos que $\int_0^1 \psi(s)\, ds = 0$ e, portanto, $\phi(1) = i\int_0^1 \psi(s)\, ds = 0$.

Do exposto acima, concluímos que $D\big(\overline{T_2}\big) \subset D_2$, onde

$$D_2 := \Big\{\phi \in \mathrm{AC}\big([0,\ 1]\big),\ \text{com } \phi(0) = \phi(1) = 0 \text{ e } \phi' \in L^2\big([0,\ 1],\ dx\big)\Big\}$$

e também vale $\overline{T_2}\phi = -i\phi'$ para toda $\phi \in D\big(\overline{T_2}\big)$. Demonstremos agora a inclusão oposta: $D_2 \subset D\big(\overline{T_2}\big)$.

Seja $\phi \in D_2$ e seja ϕ' sua derivada quase em toda parte, a qual é Lebesgue integrável (pela definição das funções absolutamente contínuas) e de quadrado integrável (por hipótese). Desejamos provar que $(\phi,\ -i\phi') \in \Gamma\big(\overline{T_2}\big)$. Como $\phi' \in \mathcal{H}$ e $C\big([0,\ 1]\big)$ é denso em $\mathcal{H}$, existe uma sequência $\xi_n \in C\big([0,\ 1]\big)$ que converge a ϕ' na norma de $\mathcal{H}$. Defina-se

$$\phi_n(x) := \int_0^x \xi_n(s)\, ds - x\int_0^1 \xi_n(s)\, ds \,, \qquad n \in \mathbb{N} \,, \quad x \in [0,\ 1] \,.$$

É claro que, para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $\phi_n \in C^1\big([0,\ 1]\big)$ e que $\phi_n(0) = \phi_n(1) = 0$ e, portanto, $\phi_n \in D(T_2)$. Como $\int_0^1 \phi'(s)ds = \phi(1) - \phi(0) = 0$, podemos escrever, para $x \in [0,\ 1]$,

$$\phi_n(x) - \phi(x) = \int_0^x \big(\xi_n(s) - \phi'(s)\big)\, ds - x\int_0^1 \big(\xi_n(s) - \phi'(s)\big)\, ds \,. \tag{43.65}$$

Portanto, por (43.62), $\big\|\phi_n - \phi\big\|_{\mathcal{H}} \leq 2\big\|\xi_n - \phi'\big\|_{\mathcal{H}}$, mostrando que ϕ_n converge a ϕ na norma de $\mathcal{H}$. Além disso, tem-se por (43.65),

$$\phi_n'(x) - \phi'(x) = \xi_n(x) - \phi'(x) - \int_0^1 \big(\xi_n(s) - \phi'(s)\big)\, ds$$

e novamente por (43.62) segue disso que $\big\|\phi_n' - \phi'\big\|_{\mathcal{H}} \leq 2\big\|\xi_n - \phi'\big\|_{\mathcal{H}}$, provando que também ϕ_n' converge a ϕ' na norma de $\mathcal{H}$.

Isso estabeleceu que para todo $\phi \in D_2$ o par $(\phi,\ -i\phi')$ é o limite na norma de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ de uma sequência $(\phi_n,\ -i\phi_n')$ de $\Gamma(T_2)$. Logo, concluímos que $(\phi,\ i\phi') \in \overline{\Gamma(T_2)} = \Gamma\big(\overline{T_2}\big)$ e, consequentemente, $D_2 \subset D\big(\overline{T_2}\big)$, o que, com o anteriormente obtido, implica

$$D\big(\overline{T_2}\big) = D_2 := \Big\{\phi \in \mathrm{AC}\big([0,\ 1]\big),\ \text{com } \phi(0) = \phi(1) = 0 \text{ e } \phi' \in L^2\big([0,\ 1],\ dx\big)\Big\} \,. \tag{43.66}$$

Note-se que, como $D(T_2)$ é um subconjunto próprio de D_2, concluímos disso que T_2 e $\overline{T_2}$ são distintos, por terem domínios distintos, e que, consequentemente, T_2 não é fechado.

VI. *Determinação de* $D\big(T_2^*\big)$.

Seja D_1 o subespaço linear de $\mathcal{H}$ definido por

$$D_1 := \Big\{\phi \in \mathrm{AC}\big([0,\ 1]\big),\ \text{com } \phi' \in L^2\big([0,\ 1],\ dx\big)\Big\} \,.$$

Claro está que $D\big(\overline{T_2}\big) = D_2 \subset D_1$. Seja $\phi \in D_1$. Para cada $\psi \in D(T_2)$ temos, por integração por partes,

$$\langle\phi,\ T_2\psi\rangle_{\mathcal{H}} = -i\int_0^1 \overline{\phi(x)}\psi'(x)\, dx = i\int_0^1 \overline{\phi'(x)}\psi(x)\, dx - i\Big(\overline{\phi(1)}\psi(1) - \overline{\phi(0)}\psi(0)\Big) = \int_0^1 \overline{-i\phi'(x)}\psi(x)\, dx = \langle -i\phi',\ \psi\rangle_{\mathcal{H}} \,,$$

onde acima usamos que $\psi(1) = \psi(0) = 0$, pois $\psi \in D(T_2)$. Assim, vemos que $D_1 \subset D\big(T_2^*\big)$ e $T_2^* \restriction_{D_1} = -i\frac{d}{dx}$. Isso estabeleceu que

$$\big\{(\phi,\ -i\phi'),\ \phi \in D_1\big\} \subset \Gamma\big(T_2^*\big) \,.$$

Usando o fato de $\Gamma\big(T_2^*\big)$ ser fechado e procedendo de forma similar àquela que nos levou à identificação de $D\big(\overline{T_2}\big)$ pode-se demonstrar que $D\big(T_2^*\big) \subset D_1$ e, portanto, que $D\big(T_2^*\big) = D_1$.

VII. *Extensões autoadjuntas para* $\overline{T_2}$.

Como dissemos, o operador simétrico e fechado $\overline{T_2}$ pode possuir múltiplas extensões autodjuntas, que exibiremos em seguida. Essas extensões também podem ser determinadas por meio da teoria dos espaços de deficiência e disso trataremos mais tarde.

Seja $\mathbb{S}^1$ o círculo unitário no plano complexo, centrado na origem: $\mathbb{S}^1 := \{\alpha \in \mathbb{C} \text{ com } |\alpha| = 1\}$. Para $\alpha \in \mathbb{S}^1$, defina-se

$$D(V_\alpha) := \Big\{\phi \in \mathrm{AC}\big([0,\ 1]\big) \text{ com } \phi(1) = \alpha\phi(0) \text{ e com } \phi' \in L^2\big([0,\ 1],\ dx\big)\Big\} \subset D_1 = D\big(T_2^*\big) \,.$$

Para $\alpha \in \mathbb{S}^1$ defina-se agora o operador linear $V_\alpha : D(V_\alpha) \to \mathcal{H}$ por

$$V_\alpha\phi := -i\phi' \,, \quad \phi \in D(V_\alpha) \,. \tag{43.67}$$

Como, para todo $\alpha \in \mathbb{S}^1$, tem-se $D(T_2) \subset D\big(\overline{T_2}\big) = D_2 \subset D(V_\alpha)$ está claro que cada V_α é uma extensão de T_2 e de $\overline{T_2}$.

Por simples integração por partes vê-se que, para $\phi,\ \psi \in D(V_\alpha)$,

$$\langle\phi,\ V_\alpha\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle\phi,\ -i\psi'\rangle_{\mathcal{H}} = -i\int_0^1 \overline{\phi(x)}\psi'(x)\, dx = i\int_0^1 \overline{\phi'(x)}\psi(x)\, dx - i\Big(\overline{\phi(1)}\psi(1) - \overline{\phi(0)}\psi(0)\Big) = \langle -i\phi',\ \psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle V_\alpha\phi,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}} \,,$$

sendo que acima usamos que $\overline{\phi(1)}\psi(1) = |\alpha|^2\overline{\phi(0)}\psi(0) = \overline{\phi(0)}\psi(0)$ para cancelar os termos de superfície. A igualdade acima estabeleceu que $D(V_\alpha) \subset D\big(V_\alpha^*\big)$ e que $V_\alpha \subset V_\alpha^*$, provando que V_α é simétrico.

Afirmamos que cada V_α é autodjunto. Para provar essa afirmação tentemos determinar $\mathrm{Ran}\,(V_\alpha \pm i)$.

No caso de $\mathrm{Ran}\,(V_\alpha - i)$, seja $\psi \in \mathcal{H}$, arbitrário. Afirmamos que a relação $(V_\alpha - i)\phi = \psi$ é satisfeita pela função de $D(V_\alpha)$ dada por

$$\phi(x) = ie^{-x}\left(\frac{\langle\exp,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}}}{\alpha e - 1} + \int_0^x e^s\psi(s)\, ds\right) \,. \tag{43.68}$$

Antes de justificarmos de onde provém essa expressão, comentemos o seguinte:

1. A função ϕ dada em (43.68) é absolutamente contínua, pois, por hipótese, $\psi \in L^2\big([0,\ 1],\ dx\big) \subset L^1\big([0,\ 1],\ dx\big)$.
2. Como é possível constatar diretamente de (43.68), ϕ satisfaz $\phi(1) = \alpha\phi(0)$. Disso e do item anterior concluímos que $\phi \in D(V_\alpha)$.
3. Como é possível constatar diretamente de (43.68), ϕ satisfaz $-i\phi' - i\phi = \psi$, ou seja, $(V_\alpha - i)\phi = \psi$. Concluímos que para cada $\psi \in \mathcal{H}$ existe $\phi \in D(V_\alpha)$ satisfazendo $(V_\alpha - i)\phi = \psi$ e, portanto, $\mathrm{Ran}\,(V_\alpha - i) = \mathcal{H}$.

Para demonstrar que $\mathrm{Ran}\,(V_\alpha + i) = \mathcal{H}$ procedemos similarmente, mas substituindo (43.68) por

$$\phi(x) = ie^{x}\left(\frac{\langle 1/\exp,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}}}{\alpha e^{-1} - 1} + \int_0^x e^{-s}\psi(s)\, ds\right) \,. \tag{43.69}$$

Pelo Teorema 43.4, página 2594, conclui-se de $\mathrm{Ran}\,(V_\alpha + i) = \mathrm{Ran}\,(V_\alpha - i) = \mathcal{H}$ que V_α é autoadjunto.

Nota . As expressões (43.68) e (43.69) não foram adivinhadas. Para justificar (43.68), por exemplo, consideramos a equação diferencial ordinária não-homogênea em $[0,\ 1]$ dada por $y'(x) + y(x) = if(x)$, com f contínua. Multiplicando-a pelo fator integrante e^x, obtemos $\frac{d}{dx}\big(e^x y(x)\big) = ie^x f(x)$, donde se obtém, por integração, $e^x y(x) - y(0) = i\int_0^x e^s f(s)\, ds$. Disso seque que $ey(1) - y(0) = i\int_0^1 e^s f(s)\, ds = i\langle\exp,\ f\rangle_{\mathcal{H}}$. Impondo-se a condição de contorno $y(1) = \alpha y(0)$, obtemos $y(0) = i\frac{\langle\exp,\ f\rangle_{\mathcal{H}}}{\alpha e - 1}$. Inserindo isso de volta na expressão para $y(x)$, obtemos $y(x) = ie^{-x}\left(\frac{\langle\exp,\ f\rangle_{\mathcal{H}}}{\alpha e - 1} + \int_0^x e^s f(s)\, ds\right)$. Essa é a inspiração para (43.68), que é obtida substituindo-se a função contínua f pela de quadrado integrável ψ e verificando-se que a expressão assim obtida está bem definida e satisfaz as propriedades requeridas. ♣

VIII. *As extensões autoadjuntas de* $\overline{T_2}$ *e os espaços de deficiência desse operador.*

Vamos agora fazer uso do Teorema 43.6, página 2600, para determinar todas as extensões autoadjuntas do operador simétrico e fechado $\overline{T_2}$ e, portanto, de T_2. Para tal, notemos que os espaços de deficiência $\mathcal{K}_\pm\big(\overline{T_2}\big)$, são

$$\mathcal{K}_+\big(\overline{T_2}\big) = \mathrm{Ker}\left(\big(\overline{T_2}\big)^* - i\right) \stackrel{(43.61)}{=} [1/\exp] \quad \text{e} \quad \mathcal{K}_-\big(\overline{T_2}\big) = \mathrm{Ker}\left(\big(\overline{T_2}\big)^* + i\right) \stackrel{(43.61)}{=} [\exp]$$

e, assim, são unidimensionais e, portanto, unitariamente isomorfos. Há, consequentemente, segundo o Teorema 43.6, página 2600, extensões autoadjuntas de $\overline{T_2}$, todas parametrizadas por um operador unitário $U : [1/\exp] \to [\exp]$.

Todo $\psi \in \mathcal{K}_\pm\big(\overline{T_2}\big) = \mathrm{Ker}\left(\big(\overline{T_2}\big)^* \mp i\right)$ é da forma $\psi(x) = ae^{\mp x}$, $x \in [0,\ 1]$, com $a \in \mathbb{C}$. O operador unitário $U : \mathcal{K}_+\big(\overline{T_2}\big) \to \mathcal{K}_-\big(\overline{T_2}\big)$ é uma aplicação unitária entre os subespaços unidimensionais $[1/\exp]$ e $[\exp]$ (definidos em (43.60)). Como esses subespaços são unidimensionais, os operadores unitários que os mapeiam são todos da forma[15]

$$U\left(a\frac{1/\exp}{\|1/\exp\|_{\mathcal{H}}}\right) = a\beta\frac{\exp}{\|\exp\|_{\mathcal{H}}} \tag{43.70}$$

[15] Em (43.70), o operador U é expresso nos vetores unitários $(1/\exp)/\|1/\exp\|_{\mathcal{H}}$ e $\exp/\|\exp\|_{\mathcal{H}}$, que também geram $[1/\exp]$ e $[\exp]$, respectivamente, para deixar evidente que U é uma isometria.

para todo $a \in \mathbb{C}$, onde $\beta \in \mathbb{C}$ com $|\beta| = 1$, ou seja, $\beta \in \mathrm{U}(1)$, o grupo das matrizes unitárias unidimensionais. É um exercício elementar (faça-o!) constatar que

$$\|\exp\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\int_0^1 e^{2x}dx} = \sqrt{\frac{e^2-1}{2}}, \quad \text{que} \quad \|1/\exp\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\int_0^1 e^{-2x}dx} = \sqrt{\frac{1-e^{-2}}{2}} \quad \text{e que} \quad \frac{\|1/\exp\|_{\mathcal{H}}}{\|\exp\|_{\mathcal{H}}} = e^{-1}.$$

Logo, $U : [1/\exp] \to [\exp]$ é dada pela extensão linear a todo $[\exp]$ de

$$U(1/\exp) = e^{-1}\beta \exp,$$

com $\beta \in \mathrm{U}(1) = \{\beta \in \mathbb{C},\ |\beta| = 1\}$, isto é, $U(e^{-x}) = \beta e^{(x-1)}$.

Nota. Escrevendo $U(e^{-x}) = \beta e^{-(1-x)}$ podemos observar que U é a composição da transformação de reversão $x \mapsto 1-x$, do intervalo $[0, 1]$ sobre si mesmo, e que é uma transformação unitária discreta em $L^2\big([0, 1], dx\big)$ (e que mapeia bijetivamente $[1/\exp]$ sobre $[\exp]$), com uma transformação do grupo $\mathrm{U}(1)$, manifesta no produto pelo fator de fase β. ♣

Segundo o Teorema 43.6, página 2600, as extensões autoadjuntas S_U de $\overline{T_2}$ são parametrizadas pelos unitários $U : \mathcal{K}_+\big(\overline{T_2}\big) \to \mathcal{K}_-\big(\overline{T_2}\big)$, os quais, por sua vez, são parametrizados por $\beta \in U(1)$. Por isso, passaremos a denotar $S_\beta \equiv S_U$, com $\beta \in \mathrm{U}(1)$. Segundo (43.36), seu domínio é

$$D(S_\beta) = \Big\{\phi + a(1/\exp) + ae^{-1}\beta\exp, \ \text{com } \phi \in D\big(\overline{T_2}\big) \ \text{e} \ a \in \mathbb{C}\Big\}, \tag{43.71}$$

com $D\big(\overline{T_2}\big)$ dado em (43.66). Por (43.37), temos para todo $a \in \mathbb{C}$,

$$S_\beta\big(\phi + a(1/\exp) + ae^{-1}\beta\exp\big) = \overline{T_2}\phi + ai(1/\exp) - iae^{-1}\beta\exp = -i\Big(\phi + a(1/\exp) + ae^{-1}\beta\exp\Big)'. \tag{43.72}$$

Essa relação mostra que S_β é simplesmente o operador de diferenciação em $D(S_\beta)$ multiplicado por $-i$, tal como esperaríamos.

IX. *Identificando as extensões S_β com as extensões V_α.*

Segundo o Teorema 43.6, página 2600, os operadores S_β são todas as extensões autodjuntas do operador fechado e simétrico $\overline{T_2}$. Já havíamos, porém, encontrado acima as extensões V_α desse mesmo operador, definidos em (43.67). Façamos agora algumas considerações que nos permitirão associar os operadores S_β aos operadores V_α.

Para $\beta \in \mathrm{U}(1)$ e $\phi \in D\big(\overline{T_2}\big)$, seja $\varphi = \phi + a(1/\exp) + ae^{-1}\beta\exp \in D(S_\beta)$, ou seja, $\varphi(x) = \phi(x) + ae^{-x} + ae^{-1}\beta e^x$, $x \in [0, 1]$. Teremos $\varphi(1) = a\big(e^{-1} + \beta\big)$ e $\varphi(0) = a\big(1 + e^{-1}\beta\big)$. Assim, para todo $a \in \mathbb{C}$ tem-se $\varphi(1) = \alpha\varphi(0)$, onde

$$\alpha \equiv \boldsymbol{\alpha}(\beta) := \frac{e\beta + 1}{\beta + e}. \tag{43.73}$$

Como $|\beta| = 1$, é elementar constatar (faça-o!) que também vale $|\boldsymbol{\alpha}(\beta)| = 1$. A aplicação $U(1) \ni \beta \mapsto \boldsymbol{\alpha}(\beta) \in U(1)$, dada pela transformação de Möbius[16] especificada em (43.73), é bijetora. De fato, a aplicação é injetora, pois a igualdade $\frac{e\beta+1}{\beta+e} = \frac{e\gamma+1}{\gamma+e}$ implica (como facilmente se vê) $(e^2-1)(\beta-\gamma) = 0$, implicando $\beta = \gamma$. A sobrejetividade decorre da observação que a transformação de Möbius $\boldsymbol{\beta}$ definida por

$$\boldsymbol{\beta}(\gamma) := \frac{e\gamma - 1}{-\gamma + e}$$

também mapeia $\mathrm{U}(1)$ em si mesmo (verifique!) e que para todo $\gamma \in \mathrm{U}(1)$ tem-se $(\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{\beta})(\gamma) = \gamma$ (verifique!). Assim, para todo $\gamma \in \mathrm{U}(1)$, existe $\beta \in \mathrm{U}(1)$ (a saber $\beta = \boldsymbol{\beta}(\gamma)$) tal que $\boldsymbol{\alpha}(\beta) = \gamma$, provando que $\boldsymbol{\alpha} : \mathrm{U}(1) \to \mathrm{U}(1)$ é sobrejetora e, portanto, bijetora e, naturalmente, $\boldsymbol{\alpha}^{-1} = \boldsymbol{\beta}$.

Com o comentado acima, ficamos propensos a acreditar que os operadores S_β e $V_{\boldsymbol{\alpha}(\beta)}$ sejam idênticos. O próximo ponto é provar a identificação dos domínios de ambos.

Para $\beta \in \mathrm{U}(1)$, seja $\xi_\beta := (1/\exp) + e^{-1}\beta\exp$. Naturalmente, a ξ_β corresponde à função contínua $\xi_\beta(x) := e^{-x} + \beta e^{x-1}$, $x \in [0, 1]$. Como facilmente se constata, vale $\xi_\beta(1) = \boldsymbol{\alpha}(\beta)\xi_\beta(0)$.

Por (43.71), os elementos de $D(S_\beta)$ são da forma $\phi_0 + a\xi_\beta$ com $a \in \mathbb{C}$ e $\phi_0 \in D\big(\overline{T_2}\big)$, com $D\big(\overline{T_2}\big)$ dado em (43.66).

Reciprocamente, temos que se $\phi \in D(V_{\boldsymbol{\alpha}(\beta)})$ vale que $\chi_a := \phi - a\xi_\beta$ satisfaz $\chi_a(1) = \phi(1) - a\xi_\beta(1) = \boldsymbol{\alpha}(\beta)\big(\phi(0) - a\xi_\beta(0)\big) = \boldsymbol{\alpha}(\beta)\chi_a(0)$. Como $\xi_\beta(0) = 1 + \beta e^{-1} \neq 0$, a escolha $a_0 = \phi(0)/(1 + \beta e^{-1})$ conduz a $\chi_{a_0}(1) = \chi_{a_0}(0) = 0$, o que faz de χ_{a_0} um elemento de $D\big(\overline{T_2}\big)$ (vide (43.66)). Assim, todo elemento de $D(V_{\boldsymbol{\alpha}(\beta)})$ é da forma $\chi_{a_0} + (a - a_0)\xi_\beta$ com $\chi_{a_0} \in D\big(\overline{T_2}\big)$. Como $a - a_0$ é um elemento arbitrário de $\mathbb{C}$, concluímos que $D(V_{\boldsymbol{\alpha}(\beta)}) = D(S_\beta)$.

Finalmente, é claro com isso que $S_\beta = V_{\boldsymbol{\alpha}(\beta)}$ para cada $\beta \in \mathrm{U}(1)$, pois ambos os operadores atuam na mesma forma nos vetores de $D(V_{\boldsymbol{\alpha}(\beta)}) = D(S_\beta)$, a saber, como $-i\frac{d}{dx}$.

X. *Significado para a Mecânica Quântica.*

[16] Propriedades das transformações de Möbius são apresentadas nos Exercícios E. 14.37 e E. 14.38, página 855.

No contexto da Mecânica Quântica o operador $-i\frac{d}{dx}$ é usualmente associado ao observável momento linear e é o gerador do grupo de translações. Como translações arbitrárias não são uma simetria em um sistema mecânico limitado ao intervalo $[0, 1]$ não seria de se esperar que esse gerador existisse como operador autoadjunto. Há, porém, uma circunstância em que essa simetria pode ser instituída: se identificarmos os pontos 0 e 1, como em um círculo C (de raio $1/2\pi$). Nesse caso tem-se uma simetria translacional contínua (a de rotações em C em torno de seu eixo de simetria) e podemos voltar a pensar na possibilidade de $-i\frac{d}{dx}$ representar um observável: o momento angular, gerador dessas rotações. A condição $\phi(1) = \alpha\phi(0)$, com $\alpha \in \mathrm{U}(1)$, a ser imposta aos vetores do domínio da extensão V_α, também tem interpretação física: trata-se de uma holonomia de fase a ser atribuída às funções de onda de uma partícula eletricamente carregada movendo-se em C na presença, por exemplo, de um fluxo de campo magnético por meio do disco circunscrito por C, onde a partícula se move. A existência dessas fases é bem conhecida do chamado *efeito Bohm*[17]*-Aharonov*[18]. Vide, *e.g.*, [67]. Assim, a interpretação da extensão autoadjunta V_α é a de descrever o observável relacionado ao gerador das rotações (que pode ser entendido como uma componente do momento angular) para uma partícula carregada movendo-se em um círculo em meio ao qual ocorre a presença de um fluxo de campo magnético não-nulo, que impõe a presença do fator de fase α.

A interpretação acima descrita revela uma característica comum a muitas extensões autoadjuntas de operadores de relevância física: elas descrevem em muitos casos condições de contorno a serem impostas a funções de onda devido a condições geométricas especiais ou à presença de interações externas ao sistema. Essas extensões têm, portanto, um claro significado físico. ♦

[17] David Joseph Bohm (1917–1992).
[18] Yakir Aharonov (1932–).

Apêndices

43.A Prova do Lema 43.6

Prova do Lema 43.6. Como $D(T) \subset D(T_U)$, $D(T_U)$ é denso em $\mathcal{H}$. Para $\phi' + (U+\mathbb{1})\psi'$ e $\phi + (U+\mathbb{1})\psi \in D(T_U)$ Vamos calcular

$$\left\langle \phi' + (U+\mathbb{1})\psi',\ T_U\big(\phi + (U+\mathbb{1})\psi\big)\right\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \left\langle \phi' + (U+\mathbb{1})\psi',\ T\phi - i(U-\mathbb{1})\psi)\right\rangle_{\mathcal{H}} .$$

O lado direito pode ser expandido em quatro termos. Vamos calcular cada um deles

1. O primeiro termo é
$$\langle \phi',\ T\phi\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \langle T\phi',\ \phi\rangle_{\mathcal{H}} ,$$
pois T é simétrico e $\phi' \in D(T)$.

2. O segundo termo é
$$-\left\langle \phi',\ i(U-\mathbb{1})\psi\right\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; -\left\langle \phi',\ (iU-T^*)\psi\right\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; -\left\langle (T-i)\phi',\ U\psi\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle T\phi',\ U\psi\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle T\phi',\ \psi\right\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \left\langle T\phi',\ (U+\mathbb{1})\psi\right\rangle_{\mathcal{H}} .$$
Na primeira igualdade usamos que $i\psi = T^*\psi$, pois $\psi \in \mathrm{Ker}\,(T^*-i)$. Na última igualdade usamos o fato que $\mathrm{Ker}\,(T^*+i) = \mathrm{Ran}\,(T-i)^\perp$ para concluir que $\left\langle (T-i)\phi',\ U\psi\right\rangle_{\mathcal{H}} = 0$.

3. O terceiro termo é
$$\begin{aligned}\left\langle (U+\mathbb{1})\psi',\ T\phi\right\rangle_{\mathcal{H}} \;&=\; \left\langle U\psi',\ T\phi\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle T^*\psi',\ \phi\right\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \left\langle U\psi',\ T\phi\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle i\psi',\ \phi\right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &=\; \left\langle U\psi',\ (T-i)\phi\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle U\psi',\ i\phi\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle i\psi',\ \phi\right\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \left\langle -i(U-\mathbb{1})\psi',\ \phi\right\rangle_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$
Na segunda igualdade usamos que $T^*\psi' = i\psi'$, pois $\psi' \in \mathrm{Ker}\,(T^*-i)$. Na última igualdade usamos o fato que $\mathrm{Ker}\,(T^*+i) = \mathrm{Ran}\,(T-i)^\perp$ para concluir que $\left\langle U\psi',\ (T-i)\phi\right\rangle_{\mathcal{H}} = 0$.

4. O quarto termo é $-\left\langle (U+\mathbb{1})\psi',\ i(U-\mathbb{1})\psi\right\rangle_{\mathcal{H}}$. Agora, é trivial verificar que $(U^*-\mathbb{1})(U+\mathbb{1}) = -(U^*+\mathbb{1})(U-\mathbb{1})$. Logo, o quarto termo pode ser escrito como $-\left\langle i(U-\mathbb{1})\psi',\ (U+\mathbb{1})\psi\right\rangle_{\mathcal{H}}$.

Reunindo os quatro resultados acima, podemos escrever

$$\begin{aligned}&\left\langle \phi' + (U+\mathbb{1})\psi',\ T_U\big(\phi + (U+\mathbb{1})\psi\big)\right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\quad=\; \langle T\phi',\ \phi\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle T\phi',\ (U+\mathbb{1})\psi\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle -i(U-\mathbb{1})\psi',\ \phi\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle -i(U-\mathbb{1})\psi',\ (U+\mathbb{1})\psi\right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\quad=\; \left\langle T\phi' - i(U-\mathbb{1})\psi',\ \phi + (U+\mathbb{1})\psi\right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\quad=\; \left\langle T_U\big(\phi' + (U+\mathbb{1})\psi'\big),\ \phi + (U+\mathbb{1})\psi\right\rangle_{\mathcal{H}} .\end{aligned}$$

Essa igualdade é suficiente para concluirmos que T_U é simétrico. ■