Capítulo 45
Equações Diferenciais. Problemas Selecionados de Interesse Físico

Sumário

45.1 Dedução de Algumas Equações Diferenciais de Interesse 2607
45.1.1 Dedução Informal da Equação de Difusão de Calor 2607
45.1.2 Dedução Informal da Equação da Corda Vibrante 2611
45.2 As Equações de Helmholtz e de Laplace 2617
45.2.1 Problemas em Duas Dimensões em Coordenadas Polares 2619
45.2.2 Problemas em Três Dimensões em Coordenadas Esféricas 2621
45.3 Problemas de Difusão em uma Dimensão 2624
45.3.1 A Evolução da Temperatura de uma Barra Finita 2624
45.3.2 A Evolução da Temperatura de uma Barra Infinita 2628
45.3.3 A Evolução da Temperatura de uma Barra Semi-Infinita 2633
45.4 A Equação de Ondas 2638
45.4.1 A Equação de Ondas em 1 + 1 Dimensões 2639
45.4.2 Interlúdio: Ondas Caminhantes e a Equação do Telégrafo 2642
45.4.3 Outro Interlúdio: Sólitons 2644
45.4.3.1 Sólitons na Equação de Korteweg-de Vries 2645
45.4.3.2 Sólitons na Equação de Sine-Gordon 2647
45.4.3.3 Sólitons no Modelo de Poço-Duplo 2648
45.4.3.4 Sólitons na Equação de Schrödinger Não-Linear 2650
45.4.4 A Equação de Ondas e Transformadas de Fourier 2654
45.4.4.1 A Equação de Ondas em 3 + 1 Dimensões. A Solução de Kirchhoff 2657
45.4.4.2 A Equação de Ondas em 2 + 1 Dimensões 2658
45.5 O Problema da Corda Vibrante 2660
45.5.1 Corda Vibrante Homogênea 2660
45.5.2 O Problema da Corda Homogênea Pendurada 2663
45.5.3 Corda Vibrante Não-Homogênea 2666
45.6 O Problema da Membrana Retangular Homogênea 2669
45.7 O Problema da Membrana Circular Homogênea 2671
45.8 O Oscilador Harmônico na Mecânica Quântica e a Equação de Hermite 2673
45.9 O Átomo de Hidrogênio e a Equação de Laguerre Associada 2675
45.10 Propagação de Ondas em Tanques Cilíndricos 2678
45.11 Equações Hiperbólicas Lineares em 1+1 Dimensões e Equações Integrais 2685
45.12 Aplicações do Método da Função de Green 2692
45.12.1 A Equação de Poisson em Três Dimensões 2694
45.12.2 A Equação de Difusão Não-Homogênea 2695
45.12.3 A Equação de Ondas Não-Homogênea em $n + 1$-Dimensões 2697
45.12.3.1 A Equação de Ondas Não-Homogênea em 3 + 1-Dimensões 2701
45.12.3.2 Aplicações à Eletrodinâmica. Potenciais Retardados e Equações de Jefimenko 2703
45.12.3.3 A Equação de Ondas Não-Homogênea em 2 + 1-Dimensões 2708
45.12.3.4 A Equação de Ondas Não-Homogênea em 1 + 1-Dimensões 2710
45.13 Exercícios Adicionais 2712
45.13.1 Problemas Selecionados de Eletrostática 2712
45.13.2 Equação de Difusão em uma Dimensão 2715
45.13.3 Equação de Ondas em uma Dimensão 2717

45.13.4 Modos de Vibração de Membranas 2723
45.13.5 Problemas sobre Ondas e Difusão em Três Dimensões Espaciais 2726
45.13.6 Problemas Envolvendo Funções de Green 2728
APÊNDICES 2730
45.A Duas Transformadas de Laplace 2730

Neste capítulo discutiremos aplicações em problemas físicos de vários dos métodos que discutimos alhures de resolução de equações diferenciais e integrais. Por exemplo, trataremos de alguns problemas físicos dos quais emergem algumas das equações diferenciais ordinárias que estudamos em capítulos anteriores, tais como as equações de Euler, de Bessel, de Legendre, de Legendre associada, de Bessel esférica, de Hermite, de Laguerre e de Laguerre associada. O estudante que estiver procurando a motivação e a origem física daquelas equações poderá ler parcialmente o presente capítulo sem precisar dominar totalmente o material anteriormente apresentado, pelo menos até o ponto em que apresentarmos as soluções das equações. Também evocaremos no que segue o chamado método de separação de variáveis e alguns teoremas de unicidade de solução de equações a derivadas parciais. Tais assuntos são discutidos no Capítulo 18 ao qual o estudante poderá (deverá) passar sem perdas, se julgar necessário. Faremos uso de diversas das propriedades estudadas no Capítulo 16, página 904, especialmente das relações de ortogonalidade.

Na Seção 45.1 apresentamos a dedução de algumas equações a derivadas parciais de maior interesse em aplicações físicas, como a equação de difusão e a equação da corda vibrante. Nosso tratamento será primordialmente informal, mas procuraremos obter equações bastante gerais e discutir a origem física das condições de contorno mais comummente usadas.

A Seção 45.13, página 2712, contém diversos outros problemas de interesse na forma de exercícios.

45.1 Dedução de Algumas Equações Diferenciais de Interesse

Nesta seção apresentaremos deduções de natureza matematicamente informal (mas fisicamente geral) das equações de difusão de calor e das equações da corda vibrante (em particular, da equação de ondas em uma dimensão). Essa apresentação é aqui realizada em benefício do estudante e esta seção diferencia-se das demais seções deste capítulo pois nela não trataremos de métodos de solução das equações. A escolha das equações de difusão de calor e das equações da corda vibrante decorre de serem essas equações frequentemente encontradas em problemas físicos, assim como as equações de Helmholtz e de Laplace, as quais encontraremos na Seção 45.2, página 2617. Essas são também protótipos de equações a derivadas parciais de segunda ordem de tipo parabólico (equação de difusão), hiperbólico (equação de ondas) e elíptico (equação de Laplace), conforme a classificação discutida no Capítulo 18, página 990 (vide Seção 18.2.2, página 1002).

45.1.1 Dedução Informal da Equação de Difusão de Calor

Nesta seção apresentaremos uma dedução informal da equação de difusão de calor em materiais sólidos. Nosso tratamento é informal por duas razões fortemente relacionadas. Em primeiro lugar, pois fazemos uso da chamada *Lei de Fourier* da difusão de calor (vide adiante), a qual, ainda que largamente validada empiricamente, carece até o presente de uma justificativa microscópica em termos de um tratamento estatístico do movimento de átomos e moléculas que compõem o material estudado e suas interações. De fato, a justificativa teórica da Lei de Fourier é assunto corrente de pesquisa, sendo um dos mais importantes problemas em aberto da Mecânica Estatística. Em segundo lugar, nosso tratamento pressupõe a validade do equilíbrio termodinâmico local e da existência de uma temperatura bem definida em cada ponto do material em cada instante de tempo, mesmo em situações nas quais ocorra troca de calor. Essa hipótese, ainda que aceitável em situações nas quais o fluxo térmico não seja grande, carece de validade geral e sua justificativa em termos dos princípios da Mecânica Estatística ainda está longe de ser satisfatória.

Consideremos um material sólido no qual calor possa ser transferido por difusão de um ponto a outro (não consideraremos, portanto, transporte de calor por convecção, como ocorre em líquidos e gases, ou por irradiação). Denotemos por $u(\vec{x},\ t)$ a temperatura desse material no ponto $\vec{x}$ no instante t. Nossa tarefa é encontrar uma equação diferencial

que permita determinar a evolução temporal e espacial de $u(\vec{x},\ t)$ e que, portanto, expresse as leis físicas que regem a difusão de calor em corpos sólidos.

O princípio físico fundamental que rege o processo de difusão de calor é a chamada *Lei de Fourier*, proposta com base em informações empíricas por J. Fourier[1] em seu importante trabalho *"Théorie Analytique de la Chaleur"*, publicado em 1822[2], a qual afirma o seguinte: seja uma superfície orientada infinitesimal de área $d\sigma$ situada em uma posição $\vec{x}$ cujo vetor normal seja $\vec{n}$ (com $\|\vec{n}\| = 1$). Então, a quantidade de calor que atravessa essa superfície por unidade de tempo no sentido definido por $\vec{n}$ é dada por

$$-\kappa(\vec{x},\ t)\left(\vec{\nabla}u(\vec{x},\ t)\right)\cdot d\vec{\sigma}\ ,$$

onde $d\vec{\sigma} := \vec{n}d\sigma$ e onde $\kappa(\vec{x},\ t) \geq 0$ é uma quantidade característica do material (e que pode depender da posição, do tempo e mesmo da temperatura $u(\vec{x},\ t)$) denominada *condutibilidade térmica*.

Assim, dado um volume V do material (suporemos V compacto) delimitado por uma superfície orientada ∂V, a quantidade de calor que entra em V através de ∂V por unidade de tempo é, segundo a Lei de Fourier, dada pela integral de superfície

$$\frac{\delta Q_{\partial V}}{dt} \ = \ \int_{\partial V} \kappa(\vec{x},\ t)\left(\vec{\nabla}u(\vec{x},\ t)\right)\cdot d\vec{\sigma}\ . \tag{45.1}$$

(Acima, $d\vec{\sigma}$ é orientada para o exterior de V). Naturalmente, aplicando o Teorema de Gauss, podemos escrever o lado direito em termos de uma integral de volume:

$$\frac{\delta Q_{\partial V}}{dt} \ = \ \int_V \nabla\cdot\Big(\kappa(\vec{x},\ t)\vec{\nabla}u(\vec{x},\ t)\Big)\,dv\ . \tag{45.2}$$

Se houver em V uma fonte de calor interna (por exemplo, radioatividade, reações químicas etc.), produzindo uma quantidade de calor por unidade de volume descrita por uma função $\Phi(\vec{x},\ t)$ (e que pode também depender de $u(\vec{x},\ t)$), o calor total produzido por essa fonte interna em V por unidade de tempo será dada por

$$\frac{\delta Q_\Phi}{dt} \ = \ \int_V \Phi(\vec{x},\ t)\,dv\ .$$

Assim, a quantidade de calor total que entra ou é produzida em V por unidade de tempo é dada por

$$\frac{\delta Q}{dt} \ = \ \int_V \Big[\nabla\cdot\Big(\kappa(\vec{x},\ t)\vec{\nabla}u(\vec{x},\ t)\Big) + \Phi(\vec{x},\ t)\Big]\,dv\ . \tag{45.3}$$

Em um intervalo de tempo Δt a quantidade de calor δQ que entra ou é produzida em V é distribuída nesse volume, provocando uma variação de temperatura em cada ponto de $u(\vec{x},\ t)$ a $u(\vec{x},\ t+\Delta t)$. Sejam $\rho(\vec{x},\ t)$ e $c(\vec{x},\ t)$ a densidade de massa do material e, respectivamente, o calor específico do material, no ponto $\vec{x}$ no instante de tempo t. Com isso, a quantidade de calor que entra em um volume dv no material (cuja massa é $\rho(\vec{x},\ t)dv$) durante o intervalo Δt será dada por $\rho(\vec{x},\ t)c(\vec{x},\ t)\Big(u(\vec{x},\ t+\Delta t) - u(\vec{x},\ t)\Big)dv$. Logo, a quantidade de calor δQ que entra em V é dada por $\delta Q \ = \ \displaystyle\int_V \rho(\vec{x},\ t)c(\vec{x},\ t)\Big(u(\vec{x},\ t+\Delta t) - u(\vec{x},\ t)\Big)dv$. Assim, $\dfrac{\delta Q}{\Delta t} \ = \ \displaystyle\int_V \rho(\vec{x},\ t)c(\vec{x},\ t)\left(\frac{u(\vec{x},\ t+\Delta t) - u(\vec{x},\ t)}{\Delta t}\right)dv$ e tomando-se o limite $\Delta t \to 0$, obtemos

$$\frac{\delta Q}{dt} \ = \ \int_V \rho(\vec{x},\ t)c(\vec{x},\ t)\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},\ t)dv\ . \tag{45.4}$$

Igualando-se (45.3) e (45.4), temos

$$\int_V \rho(\vec{x},\ t)c(\vec{x},\ t)\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},\ t)dv \ = \ \int_V \Big[\nabla\cdot\Big(\kappa(\vec{x},\ t)\vec{\nabla}u(\vec{x},\ t)\Big) + \Phi(\vec{x},\ t)\Big]\,dv\ .$$

Como essa igualdade é válida para qualquer volume V como especificado, concluímos que

$$\rho(\vec{x},\ t)c(\vec{x},\ t)\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},\ t) \ = \ \nabla\cdot\Big(\kappa(\vec{x},\ t)\vec{\nabla}u(\vec{x},\ t)\Big) + \Phi(\vec{x},\ t)\ . \tag{45.5}$$

[1] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).

[2] As raízes do trabalho de Fourier podem ser traçadas até Newton, com sua *lei do esfriamento* dos corpos.

A expressão (45.5) é a procurada equação que rege o processo de difusão de calor e é, naturalmente, denominada *equação de difusão de calor*. Lembremos que ρ, c, assim como κ e Φ podem depender não só da posição e do tempo, mas também da temperatura u.

Como o estudante pode constatar, a equação (45.5) é uma equação a derivadas parciais de segunda ordem de tipo parabólico. Vide Seção 18.2.2, página 1002.

Um caso de particular interesse se dá quando o termo de fonte Φ está ausente e o meio material considerado é homogêneo, situação na qual ρ, c e κ são constantes. Nesse caso, (45.5) reduz-se a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},\ t) \ = \ D\Delta u(\vec{x},\ t)\ , \tag{45.6}$$

onde $D = \frac{\kappa}{\rho c}$ é a chamada *constante de difusão térmica* e Δu, o chamado *Laplaciano* de u, é definido por $\Delta u := \nabla\cdot\vec{\nabla}u$. A equação (45.6) é também denominada *equação de difusão de calor* ou *equação de difusão de calor homogênea*. Se incluirmos uma fonte térmica interna, a equação para um meio homogêneo (45.6) ficará na forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},\ t) \ = \ D\Delta u(\vec{x},\ t) + \frac{1}{\rho c}\Phi(\vec{x},\ t)\ . \tag{45.7}$$

• Comentários sobre condições de contorno em processos de difusão de calor

Para a resolução de equações como (45.5), (45.6) ou (45.7) são tipicamente fornecidas informações sobre a função u no instante de tempo inicial, digamos, $t = 0$, ou seja,

$$u(\vec{x},\ 0) \ = \ u_0(\vec{x})\ ,$$

sendo u_0 uma função dada que descreve a distribuição inicial de temperatura no material considerado (condição inicial). É necessário, porém, agregar informações que descrevam o processo de troca de calor entre a superfície do meio material considerado e o meio externo. Em geral, essas informações são também resultantes da imposição da Lei de Fourier, como discutiremos a seguir.

Vamos supor que o meio material que estamos a considerar ocupe um volume finito W do espaço delimitado por uma superfície orientada ∂W, estando em cada ponto $\vec{y} \in \partial W$ em contacto com um meio externo. De acordo com a Lei de Fourier, o fluxo de calor por unidade de área para dentro de W através de ∂W em $\vec{y}$ é dado por $-\kappa(\vec{y},\ t)\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{y},\ t)$, onde $\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{y},\ t)$ é a derivada normal de u em $\vec{y}$ no instante t, ou seja, $\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{\nabla}u\cdot\vec{n}$, com $\vec{n}$ sendo o vetor normal a ∂W em $\vec{y}$ apontando para fora de W com $\|\vec{n}\| = 1$.

Assim, se o meio material estiver em contacto térmico com uma fonte de calor que injete no mesmo um fluxo de calor por unidade de área $q(\vec{y},\ t)$ na posição $\vec{y} \in \partial W$, devemos impor a condição

$$-\kappa(\vec{y},\ t)\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{y},\ t) \ = \ q(\vec{y},\ \ t) \quad \text{ para todo } \vec{y} \in \partial W \text{ e } t > 0\ . \tag{45.8}$$

Se, por exemplo, a fonte de calor for um meio externo a temperatura $T(\vec{y},\ t)$ para cada $\vec{y} \in \partial W$, então, de acordo com a Lei de Fourier, esse fluxo de calor deve ser proporcional à diferença de temperatura entre o meio material e o meio externo em cada ponto $\vec{y} \in \partial W$, ou seja, deve-se impor

$$-\kappa(\vec{y},\ t)\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{y},\ t) \ = \ -\sigma(\vec{y},\ t)\Big(T(\vec{y},\ t) - u(\vec{y},\ t)\Big)\ , \quad \text{ para todo } \vec{y} \in \partial W \text{ e } t > 0\ , \tag{45.9}$$

onde $\sigma(\vec{y},\ t) \geq 0$ é uma constante, denominada *condutibilidade térmica*, e que caracteriza o contacto térmico entre o meio material e o meio externo. $\sigma(\vec{y},\ t)$ pode também ser dependente das temperaturas $T(\vec{y},\ t)$ e $u(\vec{y},\ t)$, ainda que essa dependência seja, em geral, muito fraca para ser considerada. O estudante deve atentar para o fato que os sinais em (45.9) são escolhidos de forma que o calor flua de um ponto mais quente para um mais frio.

As relações (45.8) e (45.9) representam a lei física (Lei de Fourier) que rege a troca de calor com o meio externo através da superfície ∂W. A relação (45.9) pode ser escrita como

$$\sigma(\vec{y},\ t)u(\vec{y},\ t) + \kappa(\vec{y},\ t)\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{y},\ t) \ = \ \sigma(\vec{y},\ t)T(\vec{y},\ t)\ , \quad \text{ para todo } \vec{y} \in \partial W \text{ e } t > 0\ , \tag{45.10}$$

como facilmente se vê.

As expressões (45.8) e (45.9) ou (45.10) representam as formas mais gerais de condição de contorno a serem impostas em processos de difusão de calor que levem em conta a Lei de Fourier, mas há alguns casos particulares de interesse. Se valer que $\kappa(\vec{y},\ t)/\sigma(\vec{y},\ t) \ll 1/\left|\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{y},\ t)\right|$ para todo $\vec{y} \in \partial W$ e todo t, o que ocorre se o contacto térmico entre o meio material e o meio externo for muito bom, então (45.9) pode ser aproximada por

$$u(\vec{y},\ t) \ = \ T(\vec{y},\ t)\,, \quad \text{para todo } \vec{y} \in \partial W \text{ e } t > 0\,, \tag{45.11}$$

o que significa que a temperatura do meio material e o meio externo igualam-se na superfície ∂W.

Outro caso particular de interesse se dá quando $\sigma(\vec{y},\ t)/\kappa(\vec{y},\ t) \ll 1/\left|u(\vec{y},\ t) - T(\vec{y},\ t)\right|$ para todo $\vec{y} \in \partial W$ e todo t, o que ocorre se o meio material estiver em mau contacto térmico com o meio externo (isolamento térmico). Nesse caso, (45.9) aproxima-se por

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{y},\ t) \ = \ 0\,, \quad \text{para todo } \vec{y} \in \partial W \text{ e } t > 0\,, \tag{45.12}$$

o que equivale a adotar $q(\vec{y},\ t) \equiv 0$ em (45.8).

Esses comentários justificam considerar-se em problemas de difusão de calor os seguintes tipos de condição de contorno lineares em ∂W:

1. Condição de Dirichlet[3]:

$$u(\vec{y},\ t) \ = \ h(\vec{y},\ t)\,, \quad \text{para todo } \vec{y} \in \partial W \text{ e } t > 0\,;$$

2. Condição de Neumann[4]:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{y},\ t) \ = \ q(\vec{y},\ t)\,, \quad \text{para todo } \vec{y} \in \partial W \text{ e } t > 0\,;$$

3. Condição mista:

$$\alpha_1(\vec{y},\ t)u(\vec{y},\ t) + \alpha_2(\vec{y},\ t)\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{y},\ t) \ = \ g(\vec{y},\ t)\,, \quad \text{para todo } \vec{y} \in \partial W \text{ e } t > 0\,;$$

as funções h, q, g, α_1 e α_2 sendo dadas pelo problema. Em muitos casos considera-se também condições ditas homogêneas:

1. Condição de Dirichlet homogênea:

$$u(\vec{y},\ t) \ = \ 0\,, \quad \text{para todo } \vec{y} \in \partial W \text{ e } t > 0\,;$$

2. Condição de Neumann homogênea:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{y},\ t) \ = \ 0\,, \quad \text{para todo } \vec{y} \in \partial W \text{ e } t > 0\,;$$

3. Condição mista homogênea:

$$\alpha_1(\vec{y},\ t)u(\vec{y},\ t) + \alpha_2(\vec{y},\ t)\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{y},\ t) \ = \ 0\,, \quad \text{para todo } \vec{y} \in \partial W \text{ e } t > 0\,;$$

α_1 e α_2 sendo funções dadas pelo problema.

Em seções que se seguirão teremos a oportunidade de resolver alguns problemas nos quais algumas das condições acima são impostas.

[3] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859).
[4] Carl Neumann (1832–1925).

45.1.2 Dedução Informal da Equação da Corda Vibrante

Nesta seção apresentamos uma dedução informal de diversas versões da equação da corda vibrante em uma dimensão. Nossa dedução é informal, pois uma dedução de primeiros princípios deveria incluir um tratamento microscópico do movimento de átomos e moléculas que compõem a corda e de suas interações, assim como a tomada de um limite macroscópico adequado das equações resultantes, no espírito do grupo de renormalização. Um tal tratamento está além de nossas pretensões.

Alguns métodos de solução de algumas das equações que encontraremos serão apresentados nas seções seguintes.

Consideremos uma corda de diâmetro desprezível, tensionada e que, em uma situação de equilíbrio, estenda-se ao longo do eixo x, cuja direção, definida pelo versor $\hat{\imath}$, denominaremos "direção longitudinal da corda". Ao ser retirada de sua posição de equilíbrio um ponto de coordenada x sofre no instante t um deslocamento transversal de $u(x,\ t)$ na direção do versor $\hat{\jmath}$. Não consideraremos descolamentos da corda na direção $\hat{\imath}$ ou na direção $\hat{k} = \hat{\imath} \times \hat{\jmath}$. A direção de $\hat{\jmath}$ será denominada "direção transversal da corda". Vide Figura 45.1, página 2611.

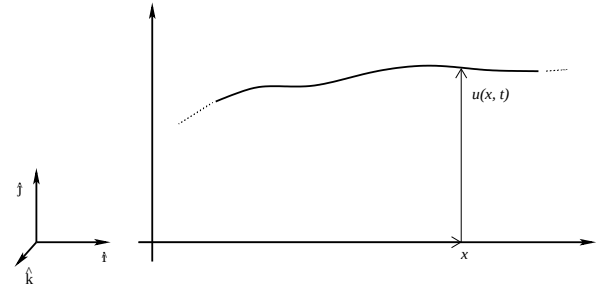

Figura 45.1: Os versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k} = \hat{\imath} \times \hat{\jmath}$, este último saindo do plano do papel. $u(x,\ t)$ representa o deslocamento na direção $\hat{\jmath}$ no instante t do ponto da corda situado, quando no equilíbrio, na posição x. Não consideramos deslocamentos da corda nas direções $\hat{\imath}$ ou $\hat{k}$.

Denotaremos por $\rho(x)$ a densidade linear de massa da corda e denotaremos por $\vec{\tau}(x,\ t)$ a força de tensão que a porção da corda situada em $x' > x$ exerce no ponto x sobre a porção da corda situada em $x' < x$ no instante t (Figura 45.2, página 2612). Como só permitimos movimentos no plano dos versores $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$, podemos escrever

$$\vec{\tau}(x,\ t) \ = \ \tau_l(x,\ t)\hat{\imath} + \tau_t(x,\ t)\hat{\jmath}$$

e com essa notação queremos dizer que $\tau_l(x,\ t)$ é a componente longitudinal de $\vec{\tau}(x,\ t)$ e $\tau_t(x,\ t)$ é a componente transversal.

Além da força de tensão, cada ponto x da corda poderá estar submetido a uma força "externa" por unidade de comprimento $\vec{f}(x,\ t)$ a qual poderá conter a força peso, forças de atrito viscoso (dependentes da velocidade $\frac{\partial u}{\partial t}$), forças restauradoras etc. Por ora não precisaremos detalhar que tipo de forças consideraremos e delas trataremos mais adiante. A força por unidade comprimento $\vec{f}$ pode depender de x e de t, assim como de u e de algumas de suas derivadas parciais, mas por simplicidade notacional vamos designá-la apenas por $\vec{f}(x,\ t)$, omitindo provisoriamente dependências com u e suas derivadas parciais. Suporemos que essas forças externas têm apenas componentes longitudinais e transversais e, em coerência com a notação acima, escrevemos

$$\vec{f}(x,\ t) \ = \ f_l(x,\ t)\hat{\imath} + f_t(x,\ t)\hat{\jmath}\,.$$

Supomos que a corda move-se apenas na direção transversal e, portanto, o momento linear de um trecho de corda situado entre x_0 e x é dado por $\left(\int_{x_0}^{x} \rho(x')\frac{\partial u}{\partial t}(x',\ t)dx'\right)\hat{\jmath}$. Pela segunda lei de Newton, a variação temporal desse

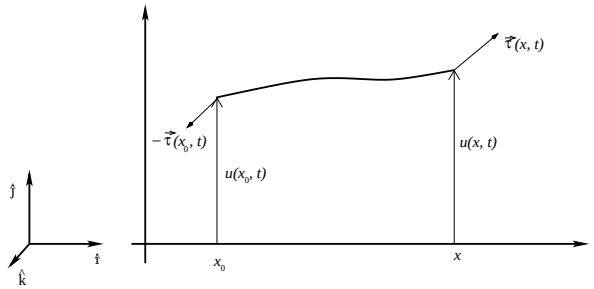

Figura 45.2: O trecho de corda entre x_0 e x. Indicados estão também as tensões $-\vec{\tau}(x_0,\,t)$ e $\vec{\tau}(x,\,t)$ aplicadas nos pontos x_0 e x, respectivamente. Posteriormente, demonstra-se que esses vetores são tangentes à corda nos respectivos pontos.

momento satisfaz

$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x}\rho(x')\frac{\partial u}{\partial t}(x',\,t)dx'\,\hat{\jmath}\;=\;\vec{\tau}(x,\,t)-\vec{\tau}(x_0,\,t)+\int_{x_0}^{x}\vec{f}(x',\,t)\,dx'\,. \tag{45.13}$$

Os diversos termos do lado direito representam forças agindo sobre o trecho de corda situado entre x_0 e x e são de fácil explicação. O termo $\vec{\tau}(x,\,t)$ é, por definição, a força de tensão que a porção da corda situada em $x'>x$ exerce no ponto x. O termo $-\vec{\tau}(x_0,\,t)$ é (pelo princípio de ação e reação) a força de tensão que a porção da corda situada em $x'<x_0$ exerce no ponto x_0. Por fim, $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\vec{f}(x',\,t)\,dx'$ é a força total exercida pelas forças "externas" sobre o trecho de corda situado entre x_0 e x.

Naturalmente, podemos escrever (45.13) como

$$\int_{x_0}^{x}\rho(x')\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x',\,t)dx'\,\hat{\jmath}\;=\;\vec{\tau}(x,\,t)-\vec{\tau}(x_0,\,t)+\int_{x_0}^{x}\vec{f}(x',\,t)\,dx'\,. \tag{45.14}$$

Em suas componentes, essa expressão significa

$$0\;=\;\tau_l(x,\,t)-\tau_l(x_0,\,t)+\int_{x_0}^{x}f_l(x',\,t)\,dx'\,, \tag{45.15}$$

$$\int_{x_0}^{x}\rho(x')\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x',\,t)dx'\;=\;\tau_t(x,\,t)-\tau_t(x_0,\,t)+\int_{x_0}^{x}f_t(x',\,t)\,dx'\,. \tag{45.16}$$

Diferenciando (45.15) e (45.16) em relação a x, obtemos

$$0\;=\;\frac{\partial\tau_l}{\partial x}(x,\,t)+f_l(x,\,t)\,, \tag{45.17}$$

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\,t)\;=\;\frac{\partial\tau_t}{\partial x}(x,\,t)+f_t(x,\,t)\,. \tag{45.18}$$

No instante de tempo t, o vetor posição de um ponto da corda cuja posição de equilíbrio é x é dado por $x\hat{\imath}+u(x,\,t)\hat{\jmath}$. Assim, o momento angular (em relação à origem) do trecho da corda situado entre x_0 e x é dado por

$$\int_{x_0}^{x}\rho(x')\Big(x'\hat{\imath}+u(x',\,t)\hat{\jmath}\Big)\times\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x',\,t)\,\hat{\jmath}\right)dx'\;=\;\left(\int_{x_0}^{x}\rho(x')x'\frac{\partial u}{\partial t}(x',\,t)\,dx'\right)\hat{k}\,,$$

onde $\times$ denota o produto vetorial.

Vamos agora expressar a igualdade entre a variação do momento angular do trecho da corda situado entre x_0 e x e o torque exercido pelas forças externas agindo sobre esse trecho. Teremos, como é fácil de se ver,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{x_0}^{x}\rho(x')x'\frac{\partial u}{\partial t}(x',\,t)dx'\right)\hat{k}\;=\;\Big(x\hat{\imath}+u(x,\,t)\hat{\jmath}\Big)\times\vec{\tau}(x,\,t)-\Big(x_0\hat{\imath}+u(x_0,\,t)\hat{\jmath}\Big)\times\vec{\tau}(x_0,\,t)$$
$$+\int_{x_0}^{x}\Big(x'\hat{\imath}+u(x',\,t)\hat{\jmath}\Big)\times\vec{f}(x',\,t)\,dx'\,.$$

Escrevendo $\vec{\tau}$ e $\vec{f}$ em termos de suas componentes, essa expressão fica

$$\left(\int_{x_0}^{x}\rho(x')x'\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x',\,t)dx'\right)\hat{k}\;=\;\Big(x\tau_t(x,\,t)-u(x,\,t)\tau_l(x,\,t)\Big)\hat{k}-\Big(x_0\tau_t(x_0,\,t)-u(x_0,\,t)\tau_l(x_0,\,t)\Big)\hat{k}$$
$$+\left(\int_{x_0}^{x}\Big(x'f_t(x',\,t)-u(x',\,t)f_l(x',\,t)\Big)\,dx'\right)\hat{k}\,.$$

Como ambos os lados apontam na mesma direção $\hat{k}$, obtivemos

$$\int_{x_0}^{x}\rho(x')x'\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x',\,t)dx'\;=\;x\tau_t(x,\,t)-u(x,\,t)\tau_l(x,\,t)-x_0\tau_t(x_0,\,t)+u(x_0,\,t)\tau_l(x_0,\,t)$$
$$+\int_{x_0}^{x}\Big(x'f_t(x',\,t)-u(x',\,t)f_l(x',\,t)\Big)\,dx'\,.$$

Diferenciando em relação a x concluímos que

$$\rho(x)x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\,t)\;=\;\tau_t(x,\,t)+x\frac{\partial\tau_t}{\partial x}(x,\,t)-\frac{\partial}{\partial x}\Big(u(x,\,t)\tau_l(x,\,t)\Big)+xf_t(x,\,t)-u(x,\,t)f_l(x,\,t)\,. \tag{45.19}$$

Agora, multiplicando-se (45.18) por x, obtemos

$$\rho(x)x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\,t)\;=\;x\frac{\partial\tau_t}{\partial x}(x,\,t)+xf_t(x,\,t)\,.$$

Esses termos podem, portanto, ser cancelados de (45.19), de sorte que aquela expressão reduz-se a

$$0\;=\;\tau_t(x,\,t)-\frac{\partial}{\partial x}\Big(u(x,\,t)\tau_l(x,\,t)\Big)-u(x,\,t)f_l(x,\,t)\,. \tag{45.20}$$

Usando agora (45.17), essa última expressão pode ser reescrita como $\tau_t(x,\,t)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(u(x,\,t)\tau_l(x,\,t)\Big)-u(x,\,t)\frac{\partial\tau_l}{\partial x}(x,\,t)$ e concluímos que

$$\tau_t(x,\,t)\;=\;\tau_l(x,\,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,\,t)\,. \tag{45.21}$$

Note-se que essa expressão afirma, caso $\tau_l(x,\,t)\neq 0$, que

$$\frac{\tau_t(x,\,t)}{\tau_l(x,\,t)}\;=\;\frac{\partial u}{\partial x}(x,\,t)\,,$$

que contém a informação que o vetor $\vec{\tau}(x,\,t)$ é tangente à curva $u(x,\,t)$, já que $\frac{\tau_t(x,\,t)}{\tau_l(x,\,t)}$ é a tangente do ângulo que esse vetor forma com a direção longitudinal x. Assim, provamos que a tensão em cada ponto da corda é tangente à corda. Em certos tratamentos da equação da corda vibrante essa afirmação é tida como óbvia mas, acima, vemos que para obtê-la devemos fazer uso da Segunda Lei de Newton da lei da variação do momento angular.

Falaremos mais sobre (45.21) quando comentarmos sobre condições de contorno à página 2616.

Inserindo-se (45.21) em (45.18), obtemos

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t)\ =\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_l(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ t)\right)+f_t(x,\ t)\ , \tag{45.22}$$

sendo que τ_l pode ser expressa usando (45.15) em termos de f_l por

$$\tau_l(x,\ t)\ =\ \tau_l(x_0,\ t)-\int_{x_0}^{x} f_l(x',\ t)\,dx'\ , \tag{45.23}$$

para qualquer x_0.

Combinando (45.22) a (45.23), obtemos

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t)\ =\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\tau_l(x_0,\ t)-\int_{x_0}^{x} f_l(x',\ t)\,dx'\right)\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ t)\right)+f_t(x,\ t) \tag{45.24}$$

ou, de modo mais explícito,

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t)\ =\ \left(\tau_l(x_0,\ t)-\int_{x_0}^{x} f_l(x',\ t)\,dx'\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ t)-f_l(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ t)+f_t(x,\ t)\ , \tag{45.25}$$

para qualquer x_0.

As expressões (45.24) ou (45.25) representam a forma mais geral da equação da corda vibrante e, no que segue, discutiremos alguns de seus casos particulares de interesse físico.

Como o estudante pode constatar, as equações (45.24) ou (45.25) são equações a derivadas parciais de segunda ordem de tipo hiperbólico. Vide Seção 18.2.2, página 1002.

• **Equação da corda vibrante. Ausência de forças longitudinais externas**

O primeiro caso particular de interesse se dá quando a força longitudinal f_l é identicamente nula. A relação (45.23) garante, então, que $\tau_l(x,\ t)=\tau_l(x_0,\ t)$, ou seja, τ_l é constante em x, podendo depender apenas do tempo. Assim, escrevendo $\tau_l(x,\ t)=\tau(t)$ para a componente longitudinal da tensão, (45.22) fica

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t)\ =\ \tau(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ t)+f_t(x,\ t)\ . \tag{45.26}$$

O caso mais simples é aquele no qual a força transversal f_t é também identicamente nula, quando então obtemos a equação

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t)\ =\ \tau(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ t)\ . \tag{45.27}$$

Nessa situação, existe um particular interesse no caso em que $\rho(x)\equiv\rho$, constante, e $\tau(t)\equiv\tau$, constante, quando a equação então assume a forma da *equação de ondas simples* em uma dimensão

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t)\ =\ c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ t)\ , \tag{45.28}$$

onde $c:=\sqrt{\dfrac{\tau}{\rho}}$. A constante positiva c é identificada como a velocidade de fase associada à equação de ondas (45.28). Vide para tal a discussão da Seção 45.4.1, página 2639.

Há alguns casos de interesse físico nos quais a força transversal f_t é não-nula. Se desejarmos considerar uma corda disposta horizontalmente em um campo gravitacional e incluirmos o peso da corda (por unidade de comprimento) na força transversal, teremos $f_t=-\rho(x)g$, com g sendo a aceleração da gravidade. Vide Figura 45.3, página 2615. Nesse caso (45.26) fica

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t)\ =\ \tau(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ t)-\rho(x)g\ . \tag{45.29}$$

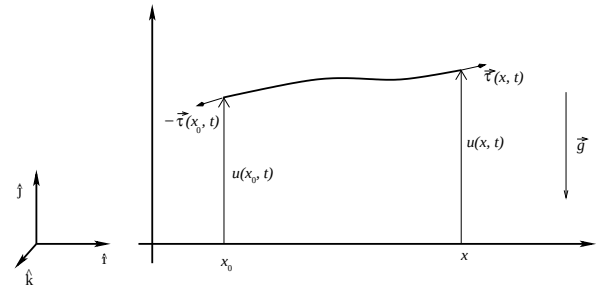

Figura 45.3: Corda sob campo gravitacional transverso. Acima, à direita, $\vec{g}=-g\hat{\jmath}$. As tensões $-\vec{\tau}(x_0,\ t)$ e $\vec{\tau}(x,\ t)$ são indicadas tangentes à curva nos respectivos pontos de atuação x_0 e x.

Se desejarmos considerar que a corda se move em um meio viscoso (por exemplo, o ar) e sofre, ao mover-se nesse meio, uma força de atrito viscoso proporcional e oposta à sua velocidade em cada ponto, devemos adotar $f_t=-\gamma\dfrac{\partial u}{\partial t}$ (com $\gamma>0$) e, nesse caso, (45.26) fica

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t)\ =\ \tau(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ t)-\gamma\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)\ . \tag{45.30}$$

Se incluirmos tanto a força peso quanto a força viscosa, teremos a equação

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t)\ =\ \tau(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ t)-\gamma\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)-\rho(x)g\ . \tag{45.31}$$

• **Equação da corda vibrante com forças longitudinais externas**

Vamos agora tratar de incluir forças externas longitudinais. Consideremos primeiramente a situação na qual f_l é não-nula, mas forças transversais externas estão ausentes. A equação (45.22) fica

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t)\ =\ \left(\tau_l(x_0,\ t)-\int_{x_0}^{x} f_l(x',\ t)\,dx'\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ t)-f_l(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ t)\ , \tag{45.32}$$

para qualquer x_0.

Um caso de interesse á aquele em que a corda é disposta verticalmente em um campo gravitacional, como na Figura 45.4, página 2616 (corda "pendurada"). Teremos $f_l(x,\ t)=-\rho(x)g$ e supondo que a tensão longitudinal em $x_0=0$ seja nula ($x_0=0$ é o extremo inferior da corda e supomos que nele não são exercidas forças), teremos $\tau_l(x,\ t)=g\displaystyle\int_0^x\rho(x')\,dx'$. Nesse caso, (45.32) assume a forma

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t)\ =\ g\left(\int_0^x\rho(x')\,dx'\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ t)+g\rho(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ t)\ . \tag{45.33}$$

Essa á a *equação da corda pendurada com densidade variável*.

No caso de a densidade $\rho(x)$ ser constante $\rho(x)\equiv\rho$, essa equação assume a forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t)\ =\ gx\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ t)+g\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ t)\ ,$$

ou seja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t)\ =\ g\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ t)\right)\ . \tag{45.34}$$

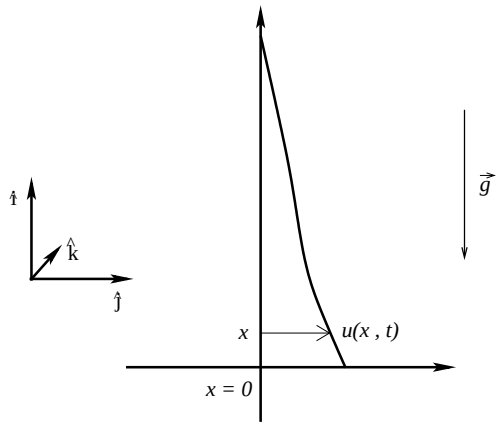

Figura 45.4: Corda sob campo gravitacional longitudinal. Indicados à esquerda são os versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k} = \hat{\imath} \times \hat{\jmath}$, este último entrando do plano do papel (ao contrário da Figura 45.1). À direita, a aceleração da gravidade $\vec{g} = -g\hat{\imath}$.

Essa é *equação da corda pendurada homogênea*.

Há também interesse em considerar-se situações nas quais a corda pendurada move-se em um meio viscoso (por exemplo, o ar), situação essa na qual devemos, como antes, acrescentar uma força transversa viscosa do tipo $f_t = -\gamma \dfrac{\partial u}{\partial t}$, com $\gamma > 0$. Nesse caso, a equação da corda pendurada não-homogênea (45.33) assume a forma

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t) \ = \ g\left(\int_0^x \rho(x')\,dx'\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ t) + g\rho(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ t) - \gamma\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)\ , \tag{45.35}$$

enquanto que a equação da corda pendurada homogênea (45.34) assume a forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t) \ = \ g\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ t)\right) - \gamma\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)\ . \tag{45.36}$$

• **Comentários sobre condições de contorno no problema da corda vibrante**

Caso a corda esteja fixa em um ponto, digamos, $x = 0$, deve-se naturalmente impor a condição de contorno

$$u(0,\ t) \ = \ 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\ .$$

Mais genericamente, podemos querer considerar a situação na qual o ponto da corda localizado em $x = 0$ executa um movimento forçado por um agente externo, de sorte que tenhamos

$$u(0,\ t) \ = \ f_1(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\ ,$$

para alguma função f_1 dada.

Um outro tipo de situação ocorre quando um dos extremos da corda, digamos, $x = 0$, pode mover-se livremente na direção transversal. Nesse caso entendemos que esse ponto se move sem a ação de uma tensão transversal. Segundo (45.21), ao impormos nesse caso que $\tau_t(0,\ t) \equiv 0$ estamos impondo que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) \ = \ 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\ ,$$

desde que tenhamos $\tau_l(0,\ t) \neq 0$. Essa última hipótese é usualmente adotada quando de uma corda não sujeita a forças longitudinais externas. No caso da corda pendurada, porém, ela não pode ser imposta no extremo inferior da corda, pois nesse caso a tensão longitudinal em um ponto qualquer da corda é dada pelo peso do trecho de corda abaixo desse ponto, sendo, portanto, nulo no extremo inferior.

Uma outra situação particular ocorre quando um ponto, digamos, $x = 0$, estiver preso a uma mola que aplica uma força restauradora $-ku(0,\ t)$, $k > 0$, sobre a corda. Nesse caso teremos $\tau_t(0,\ t) = -ku(0,\ t)$ (supondo a ausência de outras forças transversais externas) e, por (45.21), valerá

$$ku(0,\ t) + \tau_l(0,\ t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) \ = \ 0\ , \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\ .$$

Se a força restauradora for do tipo $-k\big(u(0,\ t) - y(t)\big)$, $k > 0$, (o que ocorre se a corda estiver presa no ponto $x = 0$ a uma mola cujo ponto de equilíbrio se move transversalmente à corda segundo a função $y(t)$), teremos

$$ku(0,\ t) + \tau_l(0,\ t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) \ = \ ky(t)\ , \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\ .$$

Esses comentários justificam considerar-se no problema da corda vibrante os seguintes tipos de condição de contorno lineares em um ponto, digamos, $x = 0$:

1. Condição de Dirichlet:
$$u(0,\ t) \ = \ h_1(t)\ , \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\ ;$$
2. Condição de Neumann:
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) \ = \ q_1(t)\ , \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\ ;$$
3. Condição mista:
$$\alpha_1(t)u(0,\ t) + \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) \ = \ g_1(t)\ , \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\ ;$$

as funções h_1, q_1, g_1, α_1 e α_2 dadas pelo problema.

Em muitos casos estaremos também considerando condições ditas homogêneas:

1. Condição de Dirichlet homogênea:
$$u(0,\ t) \ = \ 0\ , \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\ ;$$
2. Condição de Neumann homogênea:
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) \ = \ 0\ , \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\ ;$$
3. Condição mista homogênea:
$$\alpha_1(t)u(0,\ t) + \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) \ = \ 0\ , \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\ ;$$

α_1, α_2 sendo funções dadas pelo problema.

45.2 As Equações de Helmholtz e de Laplace

Nesta seção apresentaremos alguns problemas envolvendo as equações diferenciais parciais de Laplace e Helmholtz dos quais emergem, pelo método de separação de variáveis, algumas das equações diferenciais ordinárias – e suas soluções – de que tratamos em capítulos anteriores. O método de separação de variáveis é discutido na Seção 18.3, página 1005.

• **A equação de ondas**

A equação de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x},\ t) - c^2\Delta u(\vec{x},\ t) \ = \ 0$$

com $c > 0$, pode ser tratada pelo procedimento de separação de variáveis, por meio do qual procuramos soluções independentes que sejam da forma de um produto $u(\vec{x},\ t) = T(t)E(\vec{x})$. Por substituição na equação de ondas, somos rapidamente levados à seguinte equação:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \ = \ \frac{\Delta E(\vec{x})}{E(\vec{x})}\,.$$

Como o lado esquerdo é uma função somente de t e o lado direito uma função somente das coordenadas espaciais $\vec{x}$, a igualdade acima só é possível se ambos os lados forem iguais a uma constante, a qual denotaremos por $-\lambda^2$. Assim, concluímos que

$$\ddot{T}(t) + (c\lambda)^2 T(t) \ = \ 0\,, \tag{45.37}$$

$$\Delta E(\vec{x}) + \lambda^2 E(\vec{x}) \ = \ 0\,. \tag{45.38}$$

Obtemos por esse procedimento duas equações, uma envolvendo apenas a função T, outra a função E e uma incógnita extra, a constante λ, a qual deverá ser determinada pela fixação de certas condições adicionais sobre o problema, por exemplo, por meio de condições de contorno. Tais constantes que aparecem quando do método de separação de variáveis são denominadas *constantes de separação*.

A solução da equação temporal é bem simples:

$$\begin{array}{rcll} T(t) & = & \beta_1 + \beta_2 t\,, & \text{caso } \lambda = 0\,, \\ T(t) & = & \alpha_1 \cos(\lambda c t) + \alpha_2 \operatorname{sen}(\lambda c t)\,, & \text{caso } \lambda \neq 0\,, \end{array} \tag{45.39}$$

onde α_1, α_2, β_1 e β_2 são constantes arbitrárias a serem tipicamente fixadas por condições iniciais.

• **A equação de difusão**

A equação de difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},\ t) - D\Delta u(\vec{x},\ t) \ = \ 0$$

com $D > 0$, pode ser tratada pelo procedimento de separação de variáveis, por meio do qual procuramos soluções independentes que sejam da forma de um produto $u(\vec{x},\ t) = T(t)E(\vec{x})$. Por substituição na equação de ondas, somos rapidamente levados à seguinte equação:

$$\frac{1}{D}\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} \ = \ \frac{\Delta E(\vec{x})}{E(\vec{x})}\,.$$

Como o lado esquerdo é uma função somente de t e o lado direito uma função somente das coordenadas espaciais $\vec{x}$, a igualdade acima só é possível se ambos os lados forem iguais a uma constante, a qual denotaremos por $-\lambda^2$. Assim, concluímos que

$$\dot{T}(t) + \lambda^2 D\, T(t) \ = \ 0\,,$$

$$\Delta E(\vec{x}) + \lambda^2 E(\vec{x}) \ = \ 0\,.$$

Obtemos por esse procedimento duas equações, uma envolvendo apenas a função T, outra a função E e uma incógnita extra, a constante λ, a qual deverá ser determinada pela fixação de certas condições adicionais sobre o problema, por exemplo, por meio de condições de contorno.

A solução da equação temporal é bem simples:

$$\begin{array}{rcll} T(t) & = & \beta_1, & \text{caso } \lambda = 0\,, \\ T(t) & = & \alpha_1 e^{-\lambda^2 D t}, & \text{caso } \lambda \neq 0\,, \end{array} \tag{45.40}$$

onde α_1 e β_1 são constantes arbitrárias a serem tipicamente fixadas por condições iniciais.

• **As equações de Helmholtz e de Laplace**

Como se observa, tanto no caso da equação de ondas quanto no caso da equação de difusão, a função $E(\vec{x})$, que contém a dependência espacial da função $u(\vec{x},\ t)$, satisfaz a equação diferencial parcial

$$\Delta E(\vec{x}) + \lambda^2 E(\vec{x}) \ = \ 0\,,$$

com λ constante. No caso em que $\lambda \neq 0$ essa equação diferencial parcial é denominada *equação de Helmholtz*[5]. No caso $\lambda = 0$ temos a chamada *equação de Laplace*[6]

$$\Delta E(\vec{x}) \ = \ 0\,.$$

Essa última equação aparece em vários outros contextos, por exemplo, na Eletrostática.

Trataremos dessas duas equações em duas e três dimensões em coordenadas polares e esféricas, respectivamente.

45.2.1 Problemas em Duas Dimensões em Coordenadas Polares

• **A Equação de Laplace em duas dimensões em coordenadas polares**

O operador Laplaciano em duas dimensões em coordenadas polares assume a forma

$$\Delta u \ = \ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\,. \tag{45.41}$$

Vide (4.36), página 328. A equação de Laplace fica

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial E}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} \ = \ 0\,.$$

E agora é tomada como uma função de ρ e φ.

O método de separação de variáveis propõe procurarmos soluções independentes dessa equação que sejam da forma de um produto: $E(\rho,\ \varphi) = \Xi(\rho)\Phi(\varphi)$. Inserindo isso na equação de Laplace, somos levados a

$$\frac{\rho\,(\rho \Xi'(\rho))'}{\Xi(\rho)} \ = \ -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}\ .$$

Como o lado esquerdo é uma função somente de ρ e o lado direito uma função somente de φ, a igualdade acima só é possível se ambos os lados forem iguais a uma constante de separação, a qual denotaremos por ν^2. Assim, concluímos que

$$\rho^2 \Xi''(\rho) + \rho \Xi'(\rho) - \nu^2 \Xi(\rho) \ = \ 0\,,$$

$$\Phi''(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) \ = \ 0\,.$$

Reconhecemos que a equação para Ξ é uma **equação de Euler**, cuja solução geral é $\alpha_\nu \rho^\nu + \beta_\nu \rho^{-\nu}$, caso $\nu \neq 0$, ou $\alpha_0 \ln(\rho) + \beta_0$, caso $\nu = 0$. Aqui, α's e β's são constantes arbitrárias.

Concluímos que a equação de Laplace em duas dimensões em coordenadas polares possui soluções independentes da forma

$$\begin{array}{rcll} E(\rho,\ \varphi) & = & \Big(\alpha_0 \ln(\rho) + \beta_0\Big)\Big(\delta_0 \varphi + \gamma_0\Big), & \text{caso } \nu = 0\,, \\ E(\rho,\ \varphi) & = & \Big(\alpha_\nu \rho^\nu + \beta_\nu \rho^{-\nu}\Big)\Big(\delta_\nu \cos(\nu\varphi) + \gamma_\nu \operatorname{sen}(\nu\varphi)\Big), & \text{caso } \nu \neq 0\,. \end{array} \tag{45.42}$$

[5] Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894).
[6] Pierre-Simon Laplace (1749–1827).

Acima α's, β's, γ's e δ's são constantes arbitrárias a serem fixadas por condições adicionais a serem impostas à solução. Por exemplo, se desejarmos que as soluções sejam funções periódicas em φ de período 2π, então devemos impor que $\delta_0 = 0$ e que ν seja um inteiro.

A solução geral da equação de Laplace em duas dimensões que representa funções periódicas de período 2π em φ é, portanto,

$$u(\rho,\ \varphi) \ = \ \gamma_0 \ln(\rho) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(\alpha_m \rho^m + \beta_m \rho^{-m}\Big)\Big(\delta_m \cos(m\varphi) + \gamma_m \operatorname{sen}(m\varphi)\Big) \ ,$$

ou, em forma complexa,

$$u(\rho,\ \varphi) \ = \ \gamma_0 \ln(\rho) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(a_m \rho^m + b_m \rho^{-m}\Big) e^{im\varphi} \ ,$$

onde γ_0, a_m e b_m são constantes a serem determinadas por condições adicionais a serem impostas à solução.

• **A Equação de Helmholtz em duas dimensões em coordenadas polares**

Devido à forma do operador Laplaciano em duas dimensões em coordenadas polares dada em (45.41), a equação de Helmholtz assume a forma

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial E}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 E \ = \ 0 \ .$$

E agora é tomada como uma função de ρ e φ.

O método de separação de variáveis propõe procurarmos soluções independentes dessa equação que sejam da forma de um produto: $E(\rho,\ \varphi) = \Xi(\rho)\Phi(\varphi)$. Inserindo isso na equação de Helmholtz, somos levados a

$$\frac{\rho\,(\rho \Xi'(\rho))'}{\Xi(\rho)} + \lambda^2 \rho^2 \ = \ -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} \ .$$

Como o lado esquerdo é uma função somente de ρ e o lado direito uma função somente de φ, a igualdade acima só é possível se ambos os lados forem iguais a uma constante de separação, a qual denotaremos por ν^2. Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} \rho^2 \Xi''(\rho) + \rho \Xi'(\rho) + (\lambda^2 \rho^2 - \nu^2)\Xi(\rho) \ &= \ 0 \ , \\ \Phi''(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) \ &= \ 0 \ . \end{aligned}$$

Pela mudança de variável[7] $z = \lambda\rho$ e definindo $y(z) = y(\lambda\rho) = \Xi(\rho)$, a primeira equação acima transforma-se em

$$z^2 y''(z) + z y'(z) + (z^2 - \nu^2) y(z) \ = \ 0 \ ,$$

que podemos reconhecer como sendo a **equação de Bessel** de ordem ν.

Vemos assim que o método de separação de variáveis para a equação de Helmholtz em duas dimensões em coordenadas polares conduz a soluções independentes da forma $E(\rho,\ \varphi) = y(\lambda\rho)\Phi(\varphi)$ onde as funções y e Φ satisfazem as equações ordinárias

$$\begin{aligned} z^2 y''(z) + z y'(z) + (z^2 - \nu^2) y(z) \ &= \ 0 \ , \\ \Phi''(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) \ &= \ 0 \ . \end{aligned}$$

sendo $z = \lambda\rho$.

Concluímos que a equação de Helmholtz em duas dimensões em coordenadas polares possui soluções independentes da forma

$$\begin{aligned} E(\rho,\ \varphi) \ &= \ \Big(\alpha_0 J_0(\lambda\rho) + \beta_0 N_0(\lambda\rho)\Big)\Big(\delta_0 \varphi + \gamma_0\Big), \qquad \text{caso } \nu = 0 \ , \\ E(\rho,\ \varphi) \ &= \ \Big(\alpha_\nu J_\nu(\lambda\rho) + \beta_\nu N_\nu(\lambda\rho)\Big)\Big(\delta_\nu \cos(\nu\varphi) + \gamma_\nu \operatorname{sen}(\nu\varphi)\Big), \quad \text{caso } \nu \neq 0 \ . \end{aligned} \tag{45.43}$$

[7] Aqui supomos $\lambda \neq 0$.

Acima, J_ν são as funções de Bessel de ordem ν e N_ν são as funções de Neumann de ordem ν. Fora isso, α's, β's, γ's e δ's são constantes arbitrárias a serem fixadas por condições adicionais a serem impostas à solução.

Por exemplo, se desejarmos que as soluções sejam funções periódicas em φ de período 2π, então devemos impor que $\delta_0 = 0$ e que ν seja um inteiro.

A solução geral da equação de Helmholtz em duas dimensões que representa funções periódicas de período 2π em φ é, portanto,

$$u(\rho,\ \varphi) \ = \ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(\alpha_m J_m(\lambda\rho) + \beta_m N_m(\lambda\rho)\Big)\Big(\delta_m \cos(m\varphi) + \gamma_m \operatorname{sen}(m\varphi)\Big) \ ,$$

ou, em forma complexa,

$$u(\rho,\ \varphi) \ = \ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(a_m J_m(\lambda\rho) + b_m N_m(\lambda\rho)\Big) e^{im\varphi} \ ,$$

onde a_m e b_m são constantes a serem determinadas por condições adicionais a serem impostas à solução.

Recomendamos ao leitor o exercício instrutivo de comparar as equações radiais obtidas acima no caso de Laplace e de Helmholtz em duas dimensões, assim como suas soluções.

45.2.2 Problemas em Três Dimensões em Coordenadas Esféricas

• **A Equação de Laplace em três dimensões em coordenadas esféricas**

O operador Laplaciano em três dimensões em coordenadas esféricas assume a forma

$$\Delta u \ = \ \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left((\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{(\operatorname{sen}\theta)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right] \ . \tag{45.44}$$

Vide (4.38), página 329. Assim, a equação de Laplace em três dimensões em coordenadas esféricas fica

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial E}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left((\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial E}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{(\operatorname{sen}\theta)^2}\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2}\right] \ = \ 0 \ ,$$

onde E agora é uma função de r, θ e φ.

O método de separação de variáveis propõe procurarmos soluções independentes dessa equação que sejam da forma de um produto: $E(r,\ \theta,\ \varphi) = R(r)Y(\theta,\ \varphi)$. Inserindo isso na equação de Laplace, somos levados a

$$\frac{\big(r^2 R'(r)\big)'}{R(r)} \ = \ -\frac{1}{Y(\theta,\ \varphi)}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left((\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial Y}{\partial \theta}(\theta,\ \varphi)\right) + \frac{1}{(\operatorname{sen}\theta)^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}(\theta,\ \varphi)\right] \ .$$

Mais uma vez constatamos que, pelo fato de o lado esquerdo ser função apenas de r enquanto que o lado direito é função de θ e φ, a igualdade acima implica que ambos os lados devem ser iguais a uma constante. Por conveniência futura, escrevemos essa constante na forma $\sigma(\sigma+1)$ (note que todo número complexo c pode ser escrito dessa forma, pois a equação $\sigma^2 + \sigma - c = 0$ sempre tem pelo menos uma solução). Concluímos que

$$r^2 R''(r) + 2r R'(r) - \sigma(\sigma+1) R(r) \ = \ 0 \ . \tag{45.45}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left((\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial Y}{\partial \theta}(\theta,\ \varphi)\right) + \frac{1}{(\operatorname{sen}\theta)^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}(\theta,\ \varphi) + \sigma(\sigma+1) Y(\theta,\ \varphi) \ = \ 0 \ . \tag{45.46}$$

Reconhecemos que a equação para R é uma **equação de Euler**, cujas soluções são

$$\begin{aligned} R(r) \ &= \ \alpha_1 r^\sigma + \alpha_2 r^{-(1+\sigma)} \ , \qquad \text{caso } \sigma \neq -\tfrac{1}{2} \ , \\ R(r) \ &= \ r^{-\frac{1}{2}}(\alpha_1 \ln(r) + \alpha_2) \ , \quad \text{caso } \sigma = -\tfrac{1}{2} \ . \end{aligned} \tag{45.47}$$

Passemos agora à equação para $Y(\theta,\,\varphi)$, a qual propomos novamente tratar pelo método de separação de variáveis. Tomemos, então, Y na forma de um produto $Y(\theta,\,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. Somos conduzidos a

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta(\theta)}\,\frac{d}{d\theta}\left((\operatorname{sen}\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}(\theta)\right) + \sigma(\sigma+1)(\operatorname{sen}\theta)^2 \;=\; -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}\,.$$

Mais uma vez, a igualdade acima só é possível se ambos os lados forem iguais a uma constante, que escrevemos na forma μ^2. Ficamos com

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}\,\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}(\theta)\right) + \sigma(\sigma+1)\Theta(\theta) - \frac{\mu^2}{(\operatorname{sen}(\theta))^2}\,\Theta(\theta) \;=\; 0\,, \tag{45.48}$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) \;=\; 0\,. \tag{45.49}$$

A equação para Φ tem por soluções

$$\Phi(\varphi) \;=\; \begin{cases} \delta_0\varphi + \gamma_0\,, & \text{caso } \mu = 0\,, \\ \delta_\mu\cos(\mu\varphi) + \gamma_\mu\operatorname{sen}(\mu\varphi)\,, & \text{caso } \mu \neq 0\,. \end{cases} \tag{45.50}$$

Claramente, se desejarmos que $\Phi(\varphi)$ seja contínua e periódica de período 2π devemos impor que $\delta_0 = 0$ e que μ seja um inteiro, ou seja, $\mu = m \in \mathbb{Z}$ em cujo caso a solução fica $\Phi(\varphi) = \delta_m\cos(m\varphi) + \gamma_m\operatorname{sen}(m\varphi)$ para todo $\mu = m \in \mathbb{Z}$ (inclusive $m = 0$). Essa solução pode também ser escrita de forma complexa como $\Phi(\varphi) = a_m e^{im\varphi} + b_m e^{-im\varphi}$ para outras constantes a_m e b_m.

A experiência ensina que para melhor tratarmos a equação (45.48) convém proceder a mudança de variável

$$\zeta \;=\; \cos\theta\,, \qquad \text{com} \qquad \frac{d}{d\zeta} \;=\; -\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}\frac{d}{d\theta}\,.$$

Definindo também $y(\zeta) = \Theta(\theta)$, ou seja, $\Theta(\theta) = y(\cos\theta)$, a equação diferencial para Θ transforma-se em

$$\frac{d}{d\zeta}\left((1-\zeta^2)\frac{dy}{d\zeta}(\zeta)\right) + \sigma(\sigma+1)\,y(\zeta) - \frac{\mu^2}{1-\zeta^2}\,y(\zeta) \;=\; 0\,,$$

ou, equivalentemente,

$$(1-\zeta^2)y''(\zeta) - 2\zeta y'(\zeta) + \sigma(\sigma+1)\,y(\zeta) - \frac{\mu^2}{1-\zeta^2}\,y(\zeta) \;=\; 0\,.$$

Reconhecemos que se trata da **equação de Legendre associada**. Por (45.50) vemos que para o caso em que Φ é contínua e periódica de período 2π devemos necessariamente ter $\mu = m \in \mathbb{Z}$. Como discutimos quando tratamos da equação de Legendre associada, se desejarmos também que $y(\zeta)$ seja finita nos extremos ±1 (ou seja, que $\Theta(\theta)$ seja finita nos extremos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$), devemos ter também que $\sigma = l \in \mathbb{N}_0$, sendo que l e m relacionam-se por $-l \leq m \leq l$. As soluções para $y(\zeta)$ nesse caso são os polinômios de Legendre associados $y(\zeta) = P_l^m(\zeta)$ ou, em termos de θ, $\Theta(\theta) = P_l^m(\cos(\theta))$.

Concluímos, assim, que se desejarmos soluções que sejam periódicas de período 2π em φ e finitas nos extremos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, temos

$$Y(\theta,\,\varphi) \;=\; P_l^m(\cos(\theta))\left(\delta_m\cos(m\varphi) + \gamma_m\operatorname{sen}(m\varphi)\right)$$

ou, em forma complexa,

$$Y(\theta,\,\varphi) \;=\; P_l^m(\cos(\theta))\left(a_m e^{im\varphi} + b_m e^{-im\varphi}\right).$$

Constatamos que o lado direito é uma combinação linear das funções harmônicas esféricas $Y_l^m(\theta,\,\varphi)$ e $Y_l^{-m}(\theta,\,\varphi)$, definidos em (16.80).

Assim, retornando à $E(r,\,\theta,\,\varphi)$, concluímos que sob as condições mencionadas a equação de Laplace tem soluções independentes da forma

$$E(r,\,\theta,\,\varphi) \;=\; \left(\alpha\, r^l + \frac{\beta}{r^{l+1}}\right) Y_l^m(\theta,\,\varphi)\,,$$

com $l \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$ e $-l \leq m \leq l$, α e β sendo constantes. Acima, adotamos para a parte radial a primeira solução de (45.47), pois $\sigma = l \in \mathbb{N}_0$ e, portanto, $\sigma \neq -\frac{1}{2}$.

A solução geral da equação de Laplace em três dimensões que representa funções periódicas de período 2π em φ e finitas nos extremos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ é, portanto,

$$u(r,\,\theta,\,\varphi) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(\alpha_{l,\,m}\, r^l + \frac{\beta_{l,\,m}}{r^{l+1}}\right) Y_l^m(\theta,\,\varphi)\,. \tag{45.51}$$

Aqui, $\alpha_{l,\,m}$ e $\beta_{l,\,m}$ são constantes a serem determinadas por condições adicionais a serem impostas à solução.

• **Expansão em multipolos**

Se soubermos *a priori* que a solução $u(r,\,\theta,\,\varphi)$ converge a 0 para $r \to \infty$, podemos supor que as constantes $\alpha_{l,\,m}$, acima, se anulam. Nesse caso a solução reduz-se a

$$u(r,\,\theta,\,\varphi) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{\beta_{l,\,m}}{r^{l+1}}\, Y_l^m(\theta,\,\varphi)\,.$$

Essa situação ocorre, por exemplo, na Eletrostática quando lidamos com o problema de determinar o potencial elétrico produzido por uma distribuição de cargas elétricas estáticas limitadas a uma região finita. Nesse caso a expansão acima é denominada *expansão em multipolos*. O mesmo tipo de situação ocorre se desejarmos determinar o potencial gravitacional produzido por uma distribuição de matéria limitada a uma região finita (por exemplo, um planeta).

Se soubermos *a priori*, por exemplo, por considerações de simetria, que a função $u(r,\,\theta,\,\varphi)$ não depende da variável φ, então os termos da soma com $m \neq 0$ devem ser todos nulos. Como $Y_l^0(\theta,\,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos(\theta))$, onde P_l são os polinômios de Legendre, obtemos apenas

$$u(r,\,\theta) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}\left(\alpha_l\, r^l + \frac{\beta_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos(\theta)) \tag{45.52}$$

para certas constantes α_l e β_l. Novamente, se também soubermos que a solução $u(r,\,\theta)$ converge a 0 para $r \to \infty$, podemos supor que as constantes α_l, acima, anulam-se, e obtemos para a expansão em multipolos

$$u(r,\,\theta) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\beta_l}{r^{l+1}}\, P_l(\cos(\theta))\,. \tag{45.53}$$

Historicamente, o problema que conduziu Legendre aos polinômios de Legendre foi o de determinar o potencial gravitacional de uma distribuição de matéria limitada a uma região finita e simétrica em relação ao eixo z. Isso conduziu-o à função geratriz dos polinômios de Legendre (expressão (16.51), página 919), da qual ele derivou a expressão para os $P_l(\cos(\theta))$ como polinômios em $\cos(\theta)$ e, daí, à última expressão.

• **A Equação de Helmholtz em três dimensões em coordenadas esféricas**

Devido à forma assumida pelo operador Laplaciano, expressa em (45.44), a equação de Helmholtz em três dimensões em coordenadas esféricas assume a forma

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial E}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left((\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial E}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{(\operatorname{sen}\theta)^2}\frac{\partial^2 E}{\partial\varphi^2}\right] + \lambda^2 E \;=\; 0\,,$$

onde E agora é uma função de r, θ e φ.

O método de separação de variáveis propõe procurarmos soluções independentes dessa equação que sejam da forma de um produto: $E(r,\,\theta,\,\varphi) = R(r)Y(\theta,\,\varphi)$. Inserindo isso na equação de Helmholtz, somos levados a

$$\frac{\left(r^2R'(r)\right)'}{R(r)} + \lambda^2 r^2 \;=\; -\frac{1}{Y(\theta,\,\varphi)}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left((\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial Y}{\partial\theta}(\theta,\,\varphi)\right) + \frac{1}{(\operatorname{sen}\theta)^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}(\theta,\,\varphi)\right].$$

Mais uma vez constatamos que, pelo fato de o lado esquerdo ser função apenas de r enquanto que o lado direito é função de θ e φ, a igualdade acima implica que ambos os lados devem ser iguais a uma constante. Por conveniência futura,

escrevemos essa constante na forma $\sigma(\sigma+1)$ (note que todo número complexo c pode ser escrito dessa forma, pois a equação $\sigma^2+\sigma-c=0$ sempre tem pelo menos uma solução). Concluímos que

$$r^2R''(r)+2rR'(r)+\Big(\lambda^2r^2-\sigma(\sigma+1)\Big)R(r) \;=\; 0\,, \tag{45.54}$$

$$\frac{1}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left((\,\mathrm{sen}\theta)\frac{\partial Y}{\partial\theta}(\theta,\,\varphi)\right)+\frac{1}{(\,\mathrm{sen}\theta)^2}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}(\theta,\,\varphi)+\sigma(\sigma+1)Y(\theta,\,\varphi) \;=\; 0\,. \tag{45.55}$$

Reconhecemos que a equação para $Y(\theta,\,\varphi)$ é precisamente a mesma que obtivemos no caso da equação de Laplace em três dimensões em coordenadas esféricas. Assim, se desejarmos soluções para $Y(\theta,\,\varphi)$ que sejam periódicas de período 2π em φ e finitas nos extremos $\theta=0$ e $\theta=\pi$, teremos que fixar $\sigma=l\in\mathbb{N}_0$ e $Y(\theta,\,\varphi)$ será uma combinação linear de $Y_l^{\,m}(\theta,\,\varphi)$ e $Y_l^{\,-m}(\theta,\,\varphi)$, onde $m\in\mathbb{Z}$ com $-l\leq m\leq l$.

Concentremo-nos agora na equação radial. Pela mudança de variável[8] $z=\lambda r$ e definindo $y(z)=y(\lambda r)=R(r)$, a equação (45.54) acima transforma-se em

$$z^2y''(z)+2zy'(z)+(z^2-\sigma(\sigma+1))y(z) \;=\; 0\,,$$

que podemos reconhecer como sendo a **equação de Bessel esférica** de ordem σ. Como mencionamos, estamos interessados primordialmente no caso em que $\sigma=l\in\mathbb{N}_0$. Obtemos, nesse caso

$$R(r) \;=\; a\,j_l(\lambda r)+b\,n_l(\lambda r)\,,$$

onde a e b são constantes e j_l e n_l são as funções de Bessel esféricas de ordem l e de Neumann esféricas de ordem l, respectivamente.

Retornando a $E(r,\;\theta,\;\varphi)$, concluímos que, sob as hipóteses delineadas acima, a equação de Helmholtz em três dimensões possui soluções independentes da forma

$$E(r,\,\theta,\,\varphi) \;=\; \Big(\alpha\,j_l(\lambda r)+\beta\,n_l(\lambda r)\Big)\,Y_l^{\,m}(\theta,\,\varphi)\,,$$

com $l\in\mathbb{N}_0$, $m\in\mathbb{Z}$ e $-l\leq m\leq l$, α e β sendo constantes.

A solução geral da equação de Helmholtz em três dimensões que representa funções periódicas de período 2π em φ e finitas nos extremos $\theta=0$ e $\theta=\pi$ é, portanto,

$$u(r,\,\theta,\,\varphi) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Big(\alpha_{l,\,m}\,j_l(\lambda r)+\beta_{l,\,m}\,n_l(\lambda r)\Big)\,Y_l^{\,m}(\theta,\,\varphi)\,.$$

Aqui, $\alpha_{l,\,m}$ e $\beta_{l,\,m}$ são constantes a serem determinadas por condições adicionais a serem impostas à solução.

Recomendamos ao leitor o exercício instrutivo de comparar as equações radiais obtidas acima no caso de Laplace e de Helmholtz em três dimensões, assim como suas soluções.

45.3 Problemas de Difusão em uma Dimensão

45.3.1 A Evolução da Temperatura de uma Barra Finita

Nesta seção trataremos de um problema clássico, o da evolução da temperatura de uma barra termicamente condutora de tamanho finito submetida a certas condições de contorno em seus extremos e partindo de uma distribuição inicial de temperatura. Esse problema foi estudado por Fourier[9] em seu célebre trabalho *"Théorie Analytique de la Chaleur"*, publicado em 1822, e que não apenas lançou as bases da moderna teoria da difusão do calor, como também lançou as bases da teoria das séries e transformadas de Fourier, de ampla aplicação em Física e Matemática.

[8] Aqui supomos $\lambda\neq 0$.

[9] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).

O problema que consideraremos é o de encontrar soluções para a equação de difusão de um meio termicamente condutor homogêneo sem fontes:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-D\frac{\partial^2u}{\partial x^2} \;=\; 0\,,$$

com $D>0$, constante, $t\geq 0$ e $x\in[0,\;L]$ para algum $L>0$. A constante D representa a constante de difusão térmica da barra homogênea localizada em $[0,\;L]$ (de comprimento L, portanto) e $u(x,\;t)$ representa a temperatura dessa barra na posição x no instante t. A condição inicial a ser considerada será

$$u(x,\;0) \;=\; u_0(x)\,,\qquad x\in[0,\;L]\,,$$

onde u_0 é uma função dada da qual suporemos certas propriedades mais adiante. u_0 representa a temperatura inicial da barra.

• **Condições de contorno**

Tratamos de apresentar rapidamente as condições de contorno mais comummente empregadas.

Consideraremos que a barra está termicamente isolada, exceto nos seus extremos, onde pode trocar calor com meios externos. De acordo com a Lei de Fourier, o fluxo de calor em $x=0$ é dado por $-k\frac{\partial u}{\partial x}(0,\;t)$ (com k sendo a condutibilidade térmica da barra). Assim, se a barra estiver em contacto térmico com uma fonte de calor que injete um fluxo de calor $q_1(t)$ através da posição $x=0$, devemos impor a condição

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}(0,\;t) \;=\; q_1(t)\,.$$

Se, por exemplo, a fonte de calor for um meio externo a temperatura $T_1(t)$ o fluxo $q_1(t)$ será, também segundo a Lei de Fourier, proporcional à diferença de entre a temperatura barra em $x=0$ e a temperatura do meio externo em contacto com a barra no mesmo ponto:

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}(0,\;t) \;=\; \sigma_1\big(T_1(t)-u(0,\;t)\big)\,, \tag{45.56}$$

σ_1 sendo a condutibilidade do contacto térmico da barra com o meio externo em $x=0$. No outro extremo $x=L$ teremos, analogamente,

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}(L,\;t) \;=\; \sigma_2\big(u(L,\;t)-T_2(t)\big)\,, \tag{45.57}$$

σ_2 sendo a condutibilidade do contacto térmico da barra com o meio externo em $x=L$, a temperatura deste meio sendo $T_2(t)$. Caso $k/\sigma_1\ll 1/\big|\frac{\partial u}{\partial x}(x,\;0)\big|$, a barra está em excelente contacto térmico com o meio em $x=0$ e a condição (45.56) reduz-se a $u(0,\;t)=T_1(t)$. Caso $\sigma_1/k\ll 1/\big|T_1(t)-u(0,\;t)\big|$, a barra está termicamente isolada do meio em $x=0$ e a condição (45.56) reduz-se a $\frac{\partial u}{\partial x}(0,\;t)=0$.

Esses comentários justificam considerar-se em problemas de difusão os seguintes tipos de condição de contorno lineares em $x=0$:

1. Condição de Dirichlet:
$$u(0,\;t) \;=\; h_1(t)\,,\quad \text{para todo } t>0\,;$$
2. Condição de Neumann:
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\;t) \;=\; q_1(t)\,,\quad \text{para todo } t>0\,;$$
3. Condição mista:
$$\alpha_1(t)u(0,\;t)+\alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,\;t) \;=\; g_1(t)\,,\quad \text{para todo } t>0\,;$$

as funções h_1, q_1, g_1, α_1 e α_2 sendo dadas pelo problema. Em $x=L$ tem-se relações análogas.

Em muitos casos estaremos também considerando condições ditas homogêneas:

1. Condição de Dirichlet homogênea:
$$u(0,\;t) \;=\; 0\,,\quad \text{para todo } t>0\,;$$

2. Condição de Neumann homogênea:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\, t) \;=\; 0\,, \quad \text{para todo } t>0\,;$$

3. Condição mista homogênea:

$$\alpha_1(t)u(0,\, t)+\alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,\, t) \;=\; 0\,, \quad \text{para todo } t>0\,;$$

α_1, α_2 sendo funções dadas pelo problema, e analogamente em $x=L$.

• **Resolução pelo método de separação de variáveis e pelo princípio de sobreposição**

Como ilustração, vamos considerar o problema mais simples de determinar a evolução da temperatura, descrita pela equação de difusão simples

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; 0\,, \tag{45.58}$$

com $t\geq 0$ e $0\leq x\leq L$, de uma barra metálica de comprimento $L>0$ e constante de difusão térmica $D>0$, cujas extremidades (situadas em $x=0$ e $x=L$) são postas em bom contacto térmico com banhos térmicos de temperatura 0, de sorte que tenhamos as condições de contorno de Dirichlet homogêneas

$$u(0,\, t) \;=\; 0 \quad \text{e} \quad u(L,\, t) \;=\; 0\,, \qquad \forall t>0\,,$$

e a condição inicial

$$u(x,\, 0) \;=\; u_0(x), \qquad x\in[0,\, L]\,.$$

Para encontrar as soluções de (45.58) satisfazendo as condições iniciais e de contorno mencionadas acima, procede-se pelo método de separação de variáveis, procurando primeiramente soluções particulares que sejam da forma $u(x,\, t) = T(t)U(x)$. Inserindo em (45.58), obtém-se

$$\frac{1}{D}\frac{\dot T(t)}{T(t)} \;=\; \frac{U''(x)}{U(x)}\,.$$

Essa igualdade só é possível se ambos os lados forem iguais a uma constante de separação, que denotamos por $-\lambda^2$. Chegamos com isso a

$$\dot T(t)+\lambda^2 DT(t) \;=\; 0\,, \tag{45.59}$$

$$U''(x)+\lambda^2 U(x) \;=\; 0\,. \tag{45.60}$$

As soluções da primeira equação, naturalmente, são

$$T(t) \;=\; a_0 t + b_0\,, \qquad \text{caso } \lambda = 0\,, \tag{45.61}$$

$$T(t) \;=\; a_1 e^{-\lambda^2 D t}\,, \qquad \text{caso } \lambda\neq 0\,. \tag{45.62}$$

Para $\lambda=0$ a equação (45.60) reduz-se a $U''(x)=0$, cuja solução é $U(x)=c_1x+c_2$. Como desejamos que $U(0)=U(L)=0$, de modo que $u(x,\, t)=T(t)U(x)$ satisfaça as condições de contorno, obtém-se $c_1=c_2=0$, ou seja, obtém-se a solução trivial $U(x)\equiv 0$. O caso interessante, portanto, está em $\lambda\neq 0$.

No caso $\lambda\neq 0$, as soluções de (45.60) são, como é bem conhecido,

$$U(x) \;=\; \beta_1\cos(\lambda x)+\beta_2\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,.$$

A imposição que $U(0)=0$ implica $\beta_1=0$, levando a $U(x)=\beta_2\,\mathrm{sen}(\lambda x)$. A imposição que $U(L)=0$ implica $\lambda L = n\pi$, com $n\in\mathbb{Z}$ (tomar $\beta_2=0$ conduz novamente à solução trivial $U(x)\equiv 0$) e, assim, $U(x)=U_n(x)=\beta_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. Em verdade, podemos nos restringir a n's positivos não-nulos, i.e., $n=1,\,2,\,3,\,\ldots$, pois para $n=0$ tem-se $U_0(x)\equiv 0$ (solução trivial) e para os demais n's vale $U_{-n}(x)=-U_n(x)$, mostrando que as soluções com $U_n(x)$ e $U_{-n}(x)$ não são independentes.

Resumindo, para cada $n=1,\,2,\,,3,\,\ldots$ temos $\lambda_n=\frac{n\pi}{L}$ e $U_n(x)=\beta_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Para tais valores de λ a solução (45.62) fica $a_n e^{-D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$, e as soluções particulares para $u(x,\, t)=T(t)U(x)$ ficam

$$u_n(x,\, t) \;=\; a_n e^{-D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,,$$

$n=1,\,2,\,3,\,\ldots$ (aqui, absorvemos a constante β_2 dentro das constantes a_n, as quais ainda estão indeterminadas e podem depender de n).

Chegamos até aqui com o método de separação de variáveis. Evocando o princípio de sobreposição, obtemos uma solução mais geral de (45.58) satisfazendo as condições de contorno homogêneas somando as soluções acima:

$$u(x,\, t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,. \tag{45.63}$$

A imposição da condição inicial $u(x,\, 0)=u_0(x)$, que fixa a temperatura em $t=0$, conduz a

$$u_0(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,. \tag{45.64}$$

Em (45.64) a função u_0 é expressa em termos de uma série de Fourier de senos e a justificativa para a validade dessa expansão, sobre hipóteses adequadas para a função u_0, é apresentada na Proposição 38.12, página 2135. A teoria geral das séries de Fourier encontra-se desenvolvida na Seção 38.4, página 2119. Para invertermos essas relações, expressando as constantes a_n em termos de u_0, fazemos uso das bem-conhecidas relações de ortogonalidade da função seno:

$$\int_0^{\pi} \mathrm{sen}(my)\,\mathrm{sen}(ny)\,dy \;=\; \frac{\pi}{2}\,\delta_{m,\,n}\,, \qquad m,\, n=1,\,2,\,3,\,\ldots\,. \tag{45.65}$$

Assim, multiplicando (45.64) por $\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e integrando de 0 a L, obtemos

$$\int_0^L \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) u_0(x)\,dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^L \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx$$

$$\stackrel{y=\pi x/L}{=} \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} \mathrm{sen}(my)\,\mathrm{sen}(ny)\,dy \;=\; \frac{L}{2}a_m\,,$$

ou seja,

$$a_n \;=\; \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) u_0(x')\,dx' \tag{45.66}$$

para todo $n=1,\,2,\,3,\,\ldots$.

• **A função de Green para as condições iniciais**

Usando (45.66) podemos reescrever (45.63) como

$$u(x,\, t) \;=\; \int_0^L G(x,\, t,\, x')u_0(x')\,dx'\,, \tag{45.67}$$

onde, formalmente,

$$G(x,\, t,\, x') \;=\; \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)e^{-D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\,. \tag{45.68}$$

Essa expressão é denominada *função de Green*[10] do problema de valor inicial em questão. Para $t>0$ é muito fácil constatar a convergência uniforme da série que define G. Para $t=0$ a convergência deve ser entendida no sentido de distribuições. Vide Capítulo 39, página 2162. A importância de (45.67) está em expressar a solução diretamente em termos das condição inicial u_0. A função G contém em si a informação de como os valores das condição inicial no ponto x' influencia a solução no ponto x no instante t.

[10] George Green (1793–1841). O principal trabalho de Green sobre equações diferenciais, "An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism", de 1828, pode ser encontrado em arXiv:0807.0088 [physics.hist-ph].

45.3.2 A Evolução da Temperatura de uma Barra Infinita

O problema que consideraremos nesta seção é o de encontrar soluções para a equação de difusão de um meio unidimensional infinito, termicamente condutor, homogêneo, sem fontes (uma barra termicamente condutora):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; 0\,, \tag{45.69}$$

com $D > 0$, constante, $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$. A constante D representa a constante de difusão térmica do meio homogênea e $u(x,\, t)$ representa a temperatura desse meio na posição x no instante t. A condição inicial a ser considerada será

$$u(x,\, 0) \;=\; u_0(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \tag{45.70}$$

onde u_0 é uma função real dada, da qual suporemos certas propriedades mais adiante e representa a temperatura inicial do meio. Note-se que o problema acima difere daquele tratado na Seção 45.3.1, página 2624, em um ponto fundamental: aqui x não está limitado a um intervalo compacto $[0,\, L]$, mas estende-se por toda reta real $\mathbb{R}$.

Há diversos comentários que devemos fazer sobre o problema acima. Em primeiro lugar, fazemos notar que o problema acima é o que se denomina um problema de Cauchy característico, pois a superfície $t = 0$, onde os dados iniciais são fornecidos, é uma superfície característica da equação (45.69) (vide discussão da Seção 18.4, página 1011). É relevante lembrar que a equação de difusão é de segunda ordem na variável x, não em t e os dados iniciais são fornecidos em $t = 0$.

Em segundo lugar, não especificamos ainda que tipo de condição de contorno (no infinito) é suposta para a solução procurada. Esse é um ponto de grande relevância para a justificação do método de solução que desenvolveremos e também para a discussão do problema de unicidade de solução. Por ora, adiantamos que desejamos soluções que caem a zero suficientemente rápido quando $|x| \to \infty$, sendo que postergaremos a discussão dos detalhes de quão rápido deve ser esse decaimento para mais adiante. Sobre a condição inicial u_0 suporemos inicialmente que essa função é um elemento do *espaço de Schwartz* $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, definido na Seção 39.1, página 2163.

Observemos de passagem que (45.69) possui soluções que não decaem no infinito como, por exemplo, a solução constante $u(x,\, t) = c_0$, $c_0 \neq 0$, constante, a solução estática $u(x,\, t) = x$, ou a solução

$$u(x,\, t) \;=\; \frac{1}{2}x^2 + Dt\,, \tag{45.71}$$

a qual corresponde à condição inicial $u_0(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Como veremos, a questão da escolha de condições de contorno que garantam unicidade de solução é surpreendentemente sutil devido a propriedades especiais do processo de difusão.

Como fazemos outras vezes no presente capítulo, seguiremos uma linha pragmática, procurando encontrar diretamente as soluções desejadas pospondo, por vezes, a justificativa matemática dos nossos procederes.

• **Uma solução para o problema de difusão em $\mathbb{R}$**

Se seguirmos o procedimento de separação de variáveis que adotamos no início da Seção 45.3.1, começamos procurando soluções de (45.69) na forma de um produto: $u(x,\, t) = U(x)T(t)$ e para as funções U e T obtemos as equações diferenciais ordinárias (45.59)–(45.60). Como comentamos após aquelas equações, o caso em que a constante de separação λ é nula conduz a uma solução para T da forma $T(t) = \alpha t + \beta$ e para U também da forma $U(x) = \gamma x + \delta$. Uma solução linearmente crescente em t e em x não é fisicamente aceitável para um problema de difusão (especialmente pois procuramos soluções que decaem a zero no infinito) e podem, portanto, ser descartadas de início.

No caso $\lambda \neq 0$, temos para T e U as soluções

$$T(t) \;=\; ae^{-D\lambda^2 t} \quad \text{e} \quad U(x) \;=\; be^{i\lambda x} + ce^{-i\lambda x}\,.$$

Novamente, como estamos interessados em soluções que decaem a zero no infinito espacial, devemos ter $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, uma solução particular de (45.69) tem a forma $e^{-D\lambda^2 t}\Big(be^{i\lambda x} + ce^{-i\lambda x}\Big)$, onde absorvemos a constante a nas constantes b e c. Como a solução $e^{-D\lambda^2 t}e^{-i\lambda x}$ difere da solução $e^{-D\lambda^2 t}e^{i\lambda x}$ apenas por uma troca de sinal em λ, podemos dizer que o procedimento de separação de variáveis conduz a soluções do tipo $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}A(\lambda)e^{-D\lambda^2 t}e^{i\lambda x}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrário, onde $A(\lambda)$ eventualmente depende de λ. (A introdução do fator $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ no presente momento é arbitrária e sua conveniência ficará clara no que segue).

Evocando o princípio de sobreposição podemos pressupor obter soluções mais gerais integrando em λ as soluções do tipo $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}A(\lambda)e^{-D\lambda^2 t}e^{i\lambda x}$, ou seja, podemos considerar soluções do tipo

$$u(x,\, t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)e^{-D\lambda^2 t}e^{i\lambda x}\, d\lambda\,. \tag{45.72}$$

Se desejarmos neste ponto justificar a convergência da integral do lado direito deveríamos supor que a função $A(\lambda)$ seja uma função integrável, $A \in L^1(\mathbb{R},\, dx)$, ou seja, satisfaça $\int_{-\infty}^{\infty}|A(\lambda)|d\lambda < \infty$. Entretanto, vamos adotar uma hipótese ainda mais conservadora, cuja conveniência ficará clara logo adiante, a saber, a de que A seja um elemento do *espaço de Schwartz* $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, definido na Seção 39.1, página 2163. Portanto, há aqui uma admissão implícita que nossa solução em (45.72) não é a mais geral possível de (45.69), mas que certas condições são supostas sobre a função A, sobre a condição inicial u_0 (como veremos) e também sobre o comportamento no infinito espacial da solução $u(x,\, t)$.

Notemos também que se (45.72) é a solução do problema discutido, então em $t = 0$ devemos ter

$$u_0(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)e^{i\lambda x}\, d\lambda\,,$$

expressão essa que relaciona A e u_0. Ora, essa relação, se válida, diz-nos que u_0 é a transformada de Fourier inversa de A:

$$u_0(x) \;=\; \mathcal{F}^{-1}[A](x)$$

(vide (39.86), página 2192) em coerência, portanto, com a suposição que fizemos acima que u_0 é um elemento de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Como a transformada de Fourier é inversível em $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (daí termos escolhido esse espaço para abrigar a função u_0), valerá também

$$A(\lambda) \;=\; \mathcal{F}[u_0](\lambda)\,.$$

Para prosseguirmos, lembremos agora que, segundo (39.72), vale para $t > 0$,

$$e^{-D\lambda^2 t} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2Dt}}\mathcal{F}[h_t](\lambda)\,,$$

onde $h_t(x) := e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$ (verifique!). Com isso, fica claro que (45.72) pode ser escrita para $t > 0$ como

$$u(x,\, t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2Dt}}\mathcal{F}^{-1}\Big[\mathcal{F}[h_t]\mathcal{F}[u_0]\Big](x) \overset{(39.90)}{=} \frac{1}{\sqrt{2Dt}}\big(h_t * u_0\big)(x) \overset{(39.85)}{=} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\infty} h_t(x-y)u_0(y)\, dy\,.$$

Portanto, estabelecemos que a solução que tentamos construir tem a forma

$$u(x,\, t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}}\, u_0(y)\, dy\,, \tag{45.73}$$

com $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$. Essa expressão fornece $u(x,\, t)$ diretamente em termos da condição inicial u_0 e com isso podemos identificar

$$G(x,\, t;\, y) \;:=\; \frac{\exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4Dt}\Big)}{\sqrt{4\pi Dt}}\,, \qquad x,\, y \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad t \,>\, 0\,, \tag{45.74}$$

como sendo a função de Green para a condição inicial do problema de difusão tratado, com (45.73) podendo ser reescrita na forma

$$u(x,\, t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\, t;\, y)\, u_0(y)\, dy\,, \tag{45.75}$$

com $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$. A função $G(x,\, t;\, y)$ é também denominada *núcleo do calor* por alguns autores.

A expressão (45.75) revela que a solução u depende *linearmente* da condição inicial u_0 (uma propriedade que o autor deste texto não crê ser obviamente esperada para as soluções da equação de difusão (45.69)). A expressão (45.75) permite também a seguinte interpretação para a função de Green: $G(x,\, t;\, y)$ intermedia a influência da condição inicial u_0 no ponto y sobre a solução u no instante de tempo $t > 0$ na posição x.

E. 45.1 *Exercício.* Obtenha explicitamente a solução $u(x,\ t)$ fornecida por (45.75) para o caso em que $u_0(x) = \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, onde $\sigma > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ são constantes. *Sugestão:* use o resultado do Exercício E. 39.14, página 2175. ✣

• **A equação de difusão em $\mathbb{R}^n$**

O exercício a seguir indica como as considerações acima podem ser estendidas a mais de uma dimensão.

E. 45.2 *Exercício.* Considere equação de difusão $\dfrac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n$ (com $D > 0$, constante) sob a condição inicial $u(x,\ 0) = u_0(x)$, $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$, com $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Usando transformadas de Fourier, obtenha a solução

$$u(x,\ t) \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} G(x,\ t;\ y)\ u_0(y)\ d^n y \qquad \text{com} \qquad G(x,\ t;\ y) \ := \ \frac{\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4Dt}\right)}{\left(4\pi Dt\right)^{n/2}} \ ,$$

$x,\ y \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$. ✣

Observações. Acima, $\Delta u := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$, o Laplaciano de u, e $(x-y)^2 = (x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2$. ♣

• **Discussão sobre a solução (45.73): algumas propriedades da função de Green (45.74)**

Recordemos que até o presente supomos a hipótese que u_0 seja um elemento do espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Há de imediato três questões a se colocar: se (45.73) é de fato solução de (45.69), se a condição inicial (45.70) é de fato satisfeita e, não menos importante, se essa solução é única.

Uma quarta questão que postergaremos é a de se saber se a condição $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ pode ser enfraquecida, permitindo que (45.73) também forneça uma solução de nosso problema com a condição inicial (45.70), mas para um conjunto maior de funções u_0.

Que (45.73) satisfaz (45.69) para todos $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$ pode ser diretamente verificado diferenciando-se sob o símbolo de integral (o que é permitido pelo rápido decaimento do integrando, sob a hipótese que $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$). Quanto à condição inicial, tem-se o seguinte. A expressão do lado direito de (45.69) não está diretamente definida em $t = 0$ (o integrando não está definido em $t = 0$). No entanto, é possível demonstrar que para $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ vale

$$\lim_{t\to 0_+} \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\ t;\ y)\ u_0(y)\ dy \ = \ u_0(x) \ . \tag{45.76}$$

De fato, conforme discutido na Seção 38.2, página 2099, $G(x,\ t;\ y)$ compõe uma sequência delta de Dirac, no seguinte sentido: para todos $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$ vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\ t;\ y)\, dy \ = \ 1 \tag{45.77}$$

e para todos $x \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ vale

$$\lim_{t\to 0_+} \left[\int_{-\infty}^{x-\delta} G(x,\ t;\ y)\, dy + \int_{x+\delta}^{\infty} G(x,\ t;\ y)\, dy \right] \ = \ 0 \ . \tag{45.78}$$

A demonstração de (45.77) é elementar (integral de Laplace. Faça-o!) e a demonstração de (45.78) pode ser encontrada à página 2100 quando discutimos o exemplo da sequência delta de Dirac Gaussiana (substitua-se n por $1/\sqrt{4Dt}$ em (38.12)). Vide, por exemplo, (38.14). Com isso, segue do Teorema 38.1, página 2102, que o limite (45.76) é de fato verdadeiro (e uniforme em $\mathbb{R}$) desde que u_0 seja uniformemente contínua e limitada em $\mathbb{R}$ (o que é o caso se $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$).

Reunimos nossos resultados na seguinte proposição:

Proposição 45.1 *Seja $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. A função*

$$u(x,\ t) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\ t;\ y)\ u_0(y)\ dy \ , \qquad \textit{com} \qquad G(x,\ t;\ y) \ := \ \frac{\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4Dt}\right)}{\sqrt{4\pi Dt}} \ , \qquad x,\ y \in \mathbb{R} \ \ e \ \ t > 0 \ , \tag{45.79}$$

satisfaz a equação de difusão $\dfrac{\partial u}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ *para todos* $x \in \mathbb{R}$ *e* $t > 0$ *e satisfaz* $\lim\limits_{t\to 0_+} u(x,\ t) = u_0(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *com o limite sendo uniforme, ou seja,* $\lim\limits_{t\to 0_+} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|u(x,\ t) - u_0(x)\right| = 0$. □

É relevante para o que virá a seguir observar que a solução exposta em (45.79) é identicamente nula caso u_0 seja a função identicamente nula.

Desejamos em seguida discutir a questão da unicidade da solução (45.79) da equação de difusão de (45.69) com a condição inicial (45.70) e aqui encontraremos uma interessante surpresa: a solução não é única! Antes de tratarmos dessa questão é relevante fazermos um comentário sobre a natureza da solução (45.79).

• **Discussão sobre a solução (45.79): não-causalidade de Einstein**

Como dissemos, a expressão (45.75) permite a seguinte interpretação: a função $G(x,\ t;\ y)$ pesa quão grande é a influência da condição inicial u_0 no ponto y sobre a solução u no instante de tempo $t > 0$ na posição x. Tendo essa interpretação em mente, salta aos olhos uma característica da propagação de calor regida por (45.79): uma alteração no valor de u_0 próximo a um ponto y modifica instantaneamente a função u em todo $x \in \mathbb{R}$, pois para todo $t > 0$ a função $G(x,\ t;\ y)$ é não-nula para quaisquer $x,\ y \in \mathbb{R}$.

Assim, perturbações nas condições iniciais propagam-se com velocidade arbitrariamente grande, revelando o caráter não-relativístico da propagação de calor, tal como descrita pela equação de difusão (45.69). Em outras palavras a equação (45.69) e a função de Green (45.74) não são *Einstein causais*[11]. Matematicamente isso se deve ao caráter não-hiperbólico da equação de difusão (45.69) (que é uma equação parabólica, como já comentamos). Fisicamente isso é uma decorrência do fato de que na demonstração da equação de difusão (45.69) não são levados em conta aspectos relativísticos que impliquem uma propagação de calor com velocidade inferior à da luz. Uma versão da equação de difusão compatível com a causalidade de Einstein deve ter da forma de uma equação *hiperbólica*, como

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \ = \ 0 \ , \tag{45.80}$$

(com $0 < C \leq c$, c sendo a velocidade da luz) cuja função de Green $G(x,\ t;\ y)$ tem suporte na região $|x-y| \leq Ct$, com $t > 0$. Diversas equações da forma (45.80) têm sido propostas na literatura, sendo o assunto ainda controverso e objeto de pesquisa[12].

A solução de equações hiperbólicas ainda mais gerais que a equação (45.80) em $1+1$-dimensões é apresentada em detalhe na Seção 45.11, página 2685, e com a solução lá apresentada fica explícito o caráter Einstein-causal da solução.

Como discutiremos adiante, essas questões sobre a natureza não Einstein-causal da equação (45.69) têm implicações na discussão sobre a unicidade da solução (45.79).

• **A não-unicidade de solução. Um contraexemplo de Tikhonov**

A questão da unicidade da solução apresentada em (45.73) para a equação (45.69) sob a condição inicial $u(x,\ 0) = 0$ é respondida negativamente por meio de um fascinante contraexemplo encontrado por Tikhonov[13] em 1935 (a referência completa é A. N. Tychonoff, *"Théorèmes d'unicité pour l'equation de la chaleur"*, Mat. Sbornic, Vol. **42**, 1–57 (1935)). Observemos que para a equação de difusão em intervalos compactos a questão unicidade de solução tem resposta positiva para as condições de contorno mais comuns, tal como apresentado na Seção 18.6, página 1048 (vide, em particular, Proposição 18.2, página 1048, ou sua generalização, Proposição 18.7, página 1055).

[11] A causalidade de Einstein é o princípio segundo o qual efeitos físicos não podem propagar-se com velocidade superior à da luz.

[12] Algumas referências sobre o tema:

- C. R. Cattaneo, *"Sur une de l'equation de la chaleur liminant le paradoxe d'une propagation instantane"*, Compte. Rend. de L'Academie des Sciences, Series I-Mathematics, **247** (4), 431–433 (1958).
- A. Barletta, E. Zanchini, *"Hyperbolic heat conduction and local equilibrium: a second law analysis"*, Int. J. Heat Mass Trans. **40** (5), 1007 (1997).
- Y. M. Ali, L. C. Zhang, *"Relativistic heat conduction"*, Int. J. Heat Mass Trans. **48**, 2397 (2005).
- Y. M. Ali, L. C. Zhang, *"Relativistic moving heat source"*, Int. J. Heat Mass Trans. **48**, 2741 (2005).

[13] Andrei Nikolaevich Tikhonov (1906–1993). O sobrenome russo "Tikhonov" é por vezes transliterado como "Tykhonov", "Tichonov" ou ainda "Tychonoff". Trata-se do mesmo Tikhonov do célebre *Teorema de Tikhonov* da Topologia Geral.

Seguindo proximamente a exposição de [310], apresentaremos no que segue esse instrutivo contraexemplo de Tikhonov. A supracitada referência de Tikhonov de 1935 contém resultados ainda mais fortes, pois apresenta uma solução geral da equação (45.69).

Sejam a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a < b < \infty$ e seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(z) \;:=\; \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(z-a)^2}+\frac{1}{(z-b)^2}\right)} \,, & \text{para } a < z < b \,, \\ 0 \,, & \text{para } z \leq a \text{ ou } z \geq b \,. \end{cases}$$

A função g é contínua e infinitamente diferenciável e tem suporte, assim como todas as suas derivadas, no intervalo $[a,\ b]$. É possível demonstrar (vide [310], Lemma 67.2) que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ vale a seguinte majoração para a n-ésima derivada de g:

$$\left|g^{(n)}(x)\right| \;\leq\; 2^{6n} n^{3n/2} \,, \tag{45.81}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja agora a função $\phi(x,\ t)$ definida por

$$\phi(x,\ t) \;:=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g^{(m)}(Dt)}{(2m)!}\, x^{2m} \,. \tag{45.82}$$

Com a majoração (45.81) é relativamente fácil demonstrar que para cada $t \in \mathbb{R}$, a série do lado direito é absolutamente convergente em $\{x \in \mathbb{C} \,||x| < R\}$ para todo $R > 0$ e, portanto, é uniformemente convergente como função de x em todo compacto de $\mathbb{C}$. Assim, ϕ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{C}$ e, para cada $t \in \mathbb{R}$, a função $\phi(x,\ t)$ é analítica como função de x em todo $\mathbb{C}$. A função ϕ, como função de t, tem suporte no intervalo $[a/D,\ b/D]$ e, portanto, vale $\phi(x,\ 0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Usando a majoração (45.81) é relativamente fácil demonstrar também que, para cada $p,\ q \in \mathbb{N}_0$, a série de derivadas parciais em relação a t e x dada por

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^{p+q}}{\partial t^p \partial x^q} \left(\frac{g^{(m)}(Dt)}{(2m)!}\, x^{2m} \right) \;=\; D^p \sum_{\substack{m=0 \\ 2m \geq q}}^{\infty} \frac{g^{(m+p)}(Dt)}{(2m-q)!}\, x^{2m-q} \tag{45.83}$$

também converge absoluta e uniformemente em compactos. Segundo a Proposição 38.4, página 2097, isso mostra que ϕ é infinitamente diferenciável e que $\frac{\partial^{p+q}}{\partial t^p \partial x^q}\phi(x,\ t)$ é dada pelo lado direito de (45.83). Temos, portanto que

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,\ t) \;=\; D \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g^{(m+1)}(Dt)}{(2m)!}\, x^{2m} \;\overset{m \to m-1}{=}\; D \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g^{(m)}(Dt)}{(2m-2)!}\, x^{2m-2}$$

e que

$$D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,\ t) \;=\; D \sum_{\substack{m=0 \\ 2m \geq 2}}^{\infty} \frac{g^{(m)}(Dt)}{(2m-2)!}\, x^{2m-2} \;=\; D \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g^{(m)}(Dt)}{(2m-2)!}\, x^{2m-2} \,.$$

Comparando as duas expressões constatamos ter provado que $\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,\ t) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,\ t)$ para todos $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$. Isso prova que ϕ satisfaz a equação de difusão (45.69), satisfazendo também a condição inicial $\phi(x,\ 0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Logo, tomando u dado em (45.79) e a função ϕ acima, concluímos que a função $v = u + \phi$ também satisfaz (45.69) para todos $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$ e satisfaz $\lim\limits_{t \to 0_+} v(x,\ t) = u_0(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com o limite sendo uniforme, ou seja, $\lim\limits_{t \to 0_+} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left|v(x,\ t) - u_0(x)\right| = 0$. Assim, a solução de (45.69) satisfazendo também a condição inicial $u(x,\ 0) = 0$ não é única!

A solução ϕ de (45.82) é identicamente nula até $t = a/D$, então torna-se não-nula entre $t = a/D$ e $t = b/D$, tornando-se novamente identicamente nula para todo $t > b/D$. Se pensarmos no modelo de uma barra termicamente condutora infinita e isolada, essa solução é anti-intuitiva, pois não se espera de uma barra isolada a temperatura zero que esta espontaneamente adquira uma distribuição de temperaturas não-nula durante um intervalo finito e, depois do mesmo, retorne ao estado de temperatura nula. O que explica essa solução é o fato discutido acima de que, em problemas de difusão como o aqui tratado, o calor pode propagar-se com velocidade arbitrariamente grande. Soluções como a

solução ϕ de (45.82) representam situações nas quais existe uma fonte de calor no infinito que bombeia uma quantidade (eventualmente infinita) de calor que chega a qualquer ponto da barra em um tempo finito. Essa fonte é ligada em $t = a/D$ e desligada em $t = b/D$. Em um certo sentido, uma tal situação é não-física, mas não pode ser excluída sem maiores hipóteses, tais como aquelas apresentadas no Teorema 45.1, adiante.

* * *

E. 45.3 *Exercício.* Considere a função definida por

$$u(x,\ t) \;:=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{G^{(m)}(Dt)}{(2m)!}\, x^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H^{(m+1)}(Dt)}{(2m+1)!}\, x^{2m+1} \,, \tag{45.84}$$

onde G e H sejam funções real-analíticas ou, mais genericamente, tais que as séries acima convirjam, sendo para tal suficiente supor que existem $\kappa \in [0,\ 2)$ e $C > 0$ tais que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ valha $|G^{(n)}(z)| \leq C\lfloor \kappa n \rfloor !$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ valha $|H^{(n)}(z)| \leq C\lfloor \kappa n - 1 \rfloor !$, para todo $z \in \mathbb{R}$. Mostre que (45.84) é uma solução da equação de difusão (45.69). Essas soluções foram apresentadas por Tikhonov no trabalho supracitado.

Observe que (45.71) corresponde a uma solução desse tipo com $G(z) = z$ e $H(z) = 0$. ✣

• **Condições para a unicidade de solução**

Vale neste ponto mencionar um teorema contendo condições suficientes para garantir unicidade de solução do problema de difusão que discutimos acima:

Teorema 45.1 *Seja $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ duas vezes diferenciável satisfazendo as seguintes condições:*

1. *u satisfaz a equação de difusão (45.69) para todos $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}_+$.*
2. *$\lim_{t \to 0} u(x,\ t) = 0$ uniformemente para x em compactos de $\mathbb{R}$.*
3. *$\lim_{|x| \to 0} u(x,\ t) = 0$ uniformemente para t em qualquer intervalo compacto $[0,\ T]$.*

Então, $u(x,\ t) = 0$ para todos $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}_+$. □

Uma demonstração (simples) pode ser encontrada em [310]. Vide também e.g. [159].

45.3.3 A Evolução da Temperatura de uma Barra Semi-Infinita

Nesta seção estudaremos o uso da transformada de Laplace no estudo da equação de difusão em $\mathbb{R}_+$. Um problema protótipo que estudaremos é o seguinte. Considere uma barra metálica semi-infinita de constante de difusão térmica $D > 0$, constante, localizada ao longo do semi-eixo positivo $x \geq 0$. Consideraremos a idealização de tratar a barra como um objeto unidimensional e consideraremos que a barra está termicamente isolada, exceto na sua extremidade em $x = 0$, onde pode trocar calor com algum "banho térmico". Desejamos determinar em cada instante $t \geq 0$ a temperatura $u(t,\ x)$ do ponto da barra localizado na posição $x \geq 0$ supondo que a mesma esteja sujeita a certas condições de contorno no ponto $x = 0$ (extremidade da barra) e a certas condições iniciais que fixem sua temperatura no instante $t = 0$: $u(0,\ x) = u_0(x)$, onde u_0 é uma função dada.

Consideraremos aqui duas classes de problema, que diferem entre si pela natureza das condições de contorno. Na primeira classe de problemas, que chamaremos de classe I, consideraremos que haja um fluxo de calor $q(t)$ na extremidade $x = 0$ da barra. Em particular nos interessaremos pela situação na qual $q(t)$ é constante: $q(t) = q_0$.

Na segunda classe de problemas, que chamaremos de classe II, consideraremos que a extremidade da barra em $x = 0$ esteja em contacto térmico com um "banho térmico" à temperatura $T(t)$, $t \geq 0$. Em particular nos interessaremos pela situação na qual $T(t)$ é constante: $T(t) = T_0$.

Os problemas da classe I consistem em determinar as soluções da equação de difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; 0 \tag{45.85}$$

para $t \geq 0$ e $x \geq 0$ com $u(t,\ x)$ submetida à condição inicial

$$u(0,\ x)\ =\ u_0(x)\ , \tag{45.86}$$

e à condição de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,\ 0)\ =\ q(t)\ . \tag{45.87}$$

Os problemas da classe II consistem em determinar as soluções da equação de difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ =\ 0 \tag{45.88}$$

para $t \geq 0$ e $x \geq 0$ com $u(t,\ x)$ submetida à condição inicial

$$u(0,\ x)\ =\ u_0(x)\ , \tag{45.89}$$

e à condição de contorno

$$u(t,\ 0)\ =\ T(t)\ . \tag{45.90}$$

Notas. **1.** A relação (45.87) segue como consequência da observação que a derivada parcial $\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,\ x)$ representa o fluxo de calor que atravessa o ponto x da barra no instante de tempo t, ou seja, a quantidade de calor que cruza x por unidade de tempo no instante t. Vide, e.g. [170]. **2.** Em ambos os casos acima há uma condição de contorno adicional que deve ser imposta, a saber, uma "condição de contorno no infinito": que diz-nos que, para todo todo $t \geq 0$ a função $u(t,\ x)$ deve ser limitada como função de x. Tal condição reflete a expectativa física de que a temperatura da barra não pode crescer arbitrariamente quando nos afastamos da fonte de calor em $x = 0$. ♣

Como dissemos, vamos tratar desses dois problemas utilizando as chamadas transformadas de Laplace. Para isso recordemos algumas de suas propriedades.

• **A Transformada de Laplace**

Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ uma função. Definimos a *transformada de Laplace* de f, denotada por $\mathcal{L}[f]$ como sendo a função definida por

$$\mathcal{L}[f](s)\ =\ \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt\ , \tag{45.91}$$

com $s \in \mathbb{C}$. Esta definição obviamente não pode ser lançada sem algumas considerações prévias, pois é fundamental que a integral do lado direito faça sentido, ou seja, que seja finita. Isso implica restrições às funções f admissíveis e aos valores de s para as quais a definição possa ser aplicada. Consideraremos aqui as funções f com a seguinte propriedade: Existe um número real γ tal que

$$\int_0^\infty |f(t)| e^{-\gamma t} dt < \infty\ . \tag{45.92}$$

Para uma tal função é claro que a transformada de Laplace é bem definida desde que $\mathrm{Re}(s) \geq \gamma$. Note que as funções f com a propriedade acima não precisam ser limitadas, pois temos o exemplo da função $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $t > 0$, que diverge quando $t \to 0$ mas sem violar a condição (45.92).

E. 45.4 *Exercício*. Verifique! ✣

A condição (45.92) diz-nos essencialmente que f não pode crescer no infinito mais rápido que a função exponencial e não pode ter singularidades muito fortes em $t = 0$.

Seja então f satisfazendo (45.92) para algum $\gamma \in \mathbb{R}$ e seja sua $\mathcal{L}[f](s)$ definida como acima com $\mathrm{Re}\ (s) \geq \gamma$. Vamos estabelecer algumas das propriedades básicas da transformada de Laplace que nos interessarão.

1. *Linearidade.* Sejam f e g duas funções satisfazendo (45.92) para algum $\gamma \in \mathbb{R}$. A função $\alpha f + \beta g$, com $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$, constantes, também satisfaz (45.92) para o mesmo $\gamma \in \mathbb{R}$. Para verificar isso basta notar que

$$\int_0^\infty |\alpha f(t)+\beta g(t)| e^{-\gamma t}\, dt\ \leq\ \int_0^\infty \big(|\alpha||f(t)|+|\beta||g(t)|\big) e^{-\gamma t}\, dt\ \leq\ |\alpha| \int_0^\infty |f(t)| e^{-\gamma t}\, dt + |\beta| \int_0^\infty |g(t)| e^{-\gamma t}\, dt\ <\ \infty\ , \tag{45.93}$$

onde a última desigualdade segue da hipótese que f e g satisfazem (45.92). Com isso, segue que $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s)$ está bem definida para $\mathrm{Re}\ (s) \geq \gamma$ e vale

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s)\ =\ \alpha \mathcal{L}[f](s) + \beta \mathcal{L}[g](s)\ , \tag{45.94}$$

que expressa a linearidade da transformada de Laplace.

2. *Regra de derivação.* Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ uma função que satisfaz as seguintes hipóteses: *a)* f satisfaz (45.92) para algum $\gamma \in \mathbb{R}$; *b)* f é continua e diferenciável e sua derivada f' também satisfaz (45.92) para o mesmo $\gamma \in \mathbb{R}$. Com essa última condição $\mathcal{L}[f'](s)$ está bem definida para $\mathrm{Re}\ (s) \geq \gamma$ e vale, por integração por partes,

$$\mathcal{L}[f'](s)\ =\ f(t)e^{-st}\big|_0^\infty - \int_0^\infty dt f(t) \frac{d}{dt} e^{-st}\ . \tag{45.95}$$

Pela hipótese que f satisfaz (45.92) segue que $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$. Daí, segue imediatamente que

$$\mathcal{L}[f'](s)\ =\ -f(0) + s\int_0^\infty dt f(t) e^{-st}\ , \tag{45.96}$$

ou seja,

$$\mathcal{L}[f'](s)\ =\ s\mathcal{L}[f](s) - f(0)\ . \tag{45.97}$$

Esta relação é extremamente útil nas aplicações da transformada de Laplace à teoria das equações diferenciais. Diríamos que é a própria razão-de-ser das transformadas de Laplace. Veremos adiante como fazer uso dela.

Para finalizar esse rápido resumo sobre as transformadas de Laplace, citemos a propriedade, dita

3. *Propriedade de convolução*: se f e g possuem uma transformada de Laplace, então

$$\mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s)\ =\ \mathcal{L}[f * g](s)\ , \tag{45.98}$$

onde

$$(f * g)(t)\ :=\ \int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\ d\tau\ . \tag{45.99}$$

E. 45.5 *Exercício*. Demonstre isso. ✣

A expressão $f * g$ é denominada *produto de convolução* de f e g e valem as seguintes relações: comutatividade,

$$f * g\ =\ g * f \tag{45.100}$$

e associatividade,

$$f * (g * h)\ =\ (f * g) * h\ . \tag{45.101}$$

E. 45.6 *Exercício*. Verifique essas últimas relações. ✣

• **Resolução de problemas da classe I**

Retornemos agora aos problemas da classe I que discutimos acima e vamos tentar atacá-los fazendo uso da transformada de Laplace. Consideremos a temperatura $u(t,\ x)$, solução de (45.85) com as condições iniciais e de contorno correspondentes e vamos admitir, por ora sem justificativa, que $\mathcal{L}[u]$ e $\mathcal{L}[\frac{\partial u}{\partial t}]$ estejam bem definidas (para, digamos, $s > 0$). A justificativa pode ser apresentada *a posteriori*, quando nos confrontarmos com a solução assim obtida.

Como u é uma função de duas variáveis, temos que precisar o que entendemos por $\mathcal{L}[u]$. Aqui, $\mathcal{L}[u]$ representa a transformada de Laplace em relação à variável t:

$$\mathcal{L}[u](s,\ x)\ =\ \int_0^\infty dt\, u(t,\ x) e^{-st}\ . \tag{45.102}$$

(Note-se que podemos também definir uma transformada de Laplace em relação à variável x, mas não o faremos aqui).

Aplicando a transformada de Laplace à equação (45.85) obtemos

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right](s,\ x) - D\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](s,\ x) \ =\ 0\ . \tag{45.103}$$

Usando a regra de derivação da transformada de Laplace isso fica

$$s\mathcal{L}\left[u\right](s,\ x) - u(0,\ x) - D\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](s,\ x) \ =\ 0\ . \tag{45.104}$$

Tem-se também que

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](s,\ x) \ =\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}[u](s,\ x)\ . \tag{45.105}$$

E. 45.7 *Exercício*. Justifique essa última expressão. ✣

Assim, usando a condição inicial $u(0,\ x) = u_0(x)$, concluímos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}[u](s,\ x) - \frac{s}{D}\mathcal{L}\left[u\right](s,\ x) \ =\ -\ \frac{1}{D}u_0(x)\ . \tag{45.106}$$

Esta é em geral uma equação diferencial linear ordinária (pois só envolve derivadas em relação a x) não-homogênea (devido ao termo $-\frac{1}{D}u_0(x)$ do lado direito) para a função $\mathcal{L}[u](s,\ x)$. Sua solução é fundamental para o método. Não vamos resolvê-la aqui na sua forma mais geral mas, a título de ilustração, vamos fazê-lo no caso em que $u_0(x) \equiv 0$, ou seja, no caso em que a temperatura inicial da barra é zero em toda parte.

Com essa restrição, a equação acima torna-se simplesmente

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}[u](s,\ x) - \frac{s}{D}\mathcal{L}\left[u\right](s,\ x) \ =0\ , \tag{45.107}$$

cuja solução geral é

$$\mathcal{L}[u](s,\ x) \ =\ A(s)e^{-\frac{x}{\sqrt{D}}\sqrt{s}} + B(s)e^{+\frac{x}{\sqrt{D}}\sqrt{s}}, \qquad s>0\ , \tag{45.108}$$

onde $A(s)$ e $B(s)$ são funções limitadas arbitrárias a serem convenientemente escolhidas,

E. 45.8 *Exercício*. Justifique essa última expressão. ✣

Passemos agora à determinação das funções A e B. A primeira observação que fazemos é a seguinte: para uma solução $u(t,\ x)$ fisicamente razoável, ou seja, que satisfaça à "condição de contorno no infinito" $\lim\limits_{x\to\infty} u(t,\ x) < \infty$ para todo $t \geq 0$ mencionada acima, devemos ter $B(s) \equiv 0$. Com o dito acima, a relação (45.108) reduz-se a

$$\mathcal{L}[u](s,\ x) \ =\ A(s)e^{-\frac{x}{\sqrt{D}}\sqrt{s}}\ , \qquad s>0, \tag{45.109}$$

Resta-nos determinar a função $A(s)$, o que será feito impondo-se as condições de contorno. O que fazemos para a classe I é tomar a derivada em relação a x de ambos os lados de (45.109), obtendo

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](s,\ x) \ =\ \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial x}(t,\ x) \ =\ -\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{D}}A(s)e^{-\frac{x}{\sqrt{D}}\sqrt{s}}, \qquad s>0\ , \tag{45.110}$$

Tomando-se $x=0$, e lembrando que $\frac{\partial u}{\partial x}(t,\ x) = -q(t)$, ficamos com

$$A(s) \ =\ \sqrt{D}\frac{1}{\sqrt{s}}\mathcal{L}[q](s)\ . \tag{45.111}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}[u](s,\ x) \ =\ \sqrt{D}\ \mathcal{L}[q](s)\ \frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{D}}\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\ . \tag{45.112}$$

Notemos neste ponto que

$$\frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{D}}\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \ =\ \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{t}}\right](s)\ , \tag{45.113}$$

expressão essa que demonstramos no Apêndice 45.A, página 2730. Logo, usando a propriedade de convolução, segue que

$$u(t,\ x) \ =\ \sqrt{\frac{D}{\pi}}\int_0^t q(t-\tau)\frac{e^{-\frac{x^2}{4D\tau}}}{\sqrt{\tau}}\ d\tau\ . \tag{45.114}$$

Para cada função q dada a última relação expressa a solução $u(t,\ x)$ desejada. A tarefa de calcular a integral do lado direito nem sempre pode ser completada de modo fechado, mesmo para funções mais simples. Por exemplo, se $q(t) = q_0$, constante, o que expressa uma condição de contorno em que o fluxo de calor para dentro da barra é constante no tempo, temos

$$u(t,\ x) \ =\ q_0\sqrt{\frac{D}{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4D\tau}}}{\sqrt{\tau}}\ d\tau \tag{45.115}$$

e a integral a direita não pode ser expressa em termos de funções elementares.

E. 45.9 *Exercício*. A equação (45.114) expressa a solução dos problemas da classe I para o caso em que u_0 é identicamente nula. Tente obter a solução para o caso em que u_0 é não-nula. ✣

• **Resolução de problemas da classe II**

Trataremos agora dos problemas de tipo II, adotando novamente $u_0(x) \equiv 0$. Seguindo os mesmos passos do caso I chegamos novamente à relação (45.109) e determinamos agora $A(s)$ tomando $x=0$ em ambos os lados, o que fornece

$$A(s) \ =\ \mathcal{L}[T](s)\ . \tag{45.116}$$

Assim,

$$\mathcal{L}[u](s,\ x) \ =\ \mathcal{L}[T](s)\ e^{-\frac{x}{\sqrt{D}}\sqrt{s}}\ . \tag{45.117}$$

Notemos, então, que

$$e^{-\frac{x}{\sqrt{D}}\sqrt{s}} \ =\ \frac{x}{2\sqrt{D\pi}}\mathcal{L}\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{t^{3/2}}\right](s)\ , \tag{45.118}$$

igualdade essa que se encontra demonstrada no Apêndice 45.A, página 2730. Logo, usando a propriedade de convolução, segue que

$$u(t,\ x) \ =\ \frac{x}{2\sqrt{D\pi}}\int_0^t T(t-\tau)\frac{e^{-\frac{x^2}{4D\tau}}}{\tau^{3/2}}\ d\tau\ . \tag{45.119}$$

Novamente temos acima a solução para uma função $T(t)$ arbitrária.

Consideremos o caso particular em que $T(t) = T_0$, constante, que corresponde à condição inicial na qual o extremo da barra está em contacto com um reservatório à temperatura constante. Com a mudança de variável $y = \frac{x}{\sqrt{4D}}\tau^{-1/2}$ ficamos com

$$u(t,\ x) \ =\ T_0\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}}^\infty e^{-y^2}\ dy\ , \qquad \text{ou seja,} \qquad u(t,\ x) \ =\ T_0\left(1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)\right)\ , \tag{45.120}$$

onde erf é a chamada *função erro*, definida como

$$\operatorname{erf}\left(x\right) \ :=\ \frac{2}{\pi}\int_0^x e^{-y^2}\ dy, \qquad x\in\mathbb{R}\ . \tag{45.121}$$

E. 45.10 *Exercício*. Verifique essas últimas expressões. ✣

Note-se que $u(t,\ x)$ é constante para $x = \alpha\sqrt{t}$, α constante. Esse comportamento com a raiz quadrada é típico de processos difusivos em uma dimensão.

E. 45.11 *Exercício.* Usando a aproximação assintótica para a função erf expressa em $\mathrm{erf}(x) \approx 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}$, válida para x "grande", obtenha uma aproximação assintótica para (45.120) quando $x \gg \sqrt{4Dt}$. ✣

E. 45.12 *Exercício.* A equação (45.119) expressa a solução dos problemas da classe I para o caso em que u_0 é identicamente nula. Tente obter a solução para o caso em que u_0 é não-nula. ✣

45.4 A Equação de Ondas

Nesta seção estudaremos as soluções da equação de ondas homogênea em diversas dimensões espaciais. Para o tratamento de equações de onda não-homogêneas, vide Seção 45.11, página 2685, e Seção 45.12.3.1, página 2701.

Estudaremos diversas soluções de equações de ondas livres homogêneas em várias dimensões sob diversos tipos de condições de contorno. Comecemos falando algumas generalidades sobre as chamadas "ondas estacionárias", muito encontradas em problemas de interesse físico.

• **Ondas estacionárias**

Dentre as diversas soluções de equações de ondas, possuem particular interesse as chamadas *soluções de ondas estacionárias*. Trata-se, por definição, de soluções $u(\vec{x},\ t)$ que possuam a forma de um produto de uma função que depende apenas da variável temporal por uma função que depende apenas das variáveis espaciais, ou seja, da forma $u(\vec{x},\ t) = T(t)E(\vec{x})$. No caso da equação de ondas livres homogênea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u \ = \ 0 \,, \tag{45.122}$$

com $c > 0$, constante, definida em $\Omega \times \mathbb{R}$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, sendo uma região espacial aberta, o método de separação de variáveis (vide Seção 18.3, página 1005) ensina-nos que os fatores T e E de soluções de ondas estacionárias satisfazem as equações

$$\ddot{T}(t) + \lambda c^2 T(t) \ = \ 0 \,, \tag{45.123}$$

$$\Delta E(\vec{x}) \ = \ -\lambda E(\vec{x}) \,, \tag{45.124}$$

com λ sendo uma constante (dita de separação). A constante λ é determinada pelas condições de contorno (de Neumann, de Dirichet ou mistas, supondo-se também que essas condições sejam homogêneas e constantes) a serem fixadas na fonteira espacial $\partial\Omega$.

Fazemos notar que a equação (45.124) é uma equação de autovalores para o operador Laplaciano em Ω sob as condições de contorno desejadas em $\partial\Omega$. A constante λ é um autovalor e a função E um correspondente autovetor. Como tipicamente obtém-se autovalores λ positivos para tais problemas, a solução de (45.123) é uma função harmônica de frequência $c\sqrt{\lambda}$.

O interesse físico em soluções do tipo de ondas estacionárias reside no fato de que, devido à natureza de produto da solução, $u(\vec{x},\ t) = T(t)E(\vec{x})$, todos os pontos da onda oscilam harmonicamente com a mesma frequência $c\sqrt{\lambda}$, sendo que a amplitude de oscilação, $\left|E(\vec{x})\right|$, depende apenas da posição e não do tempo. Essa é a origem e razão da denominação "onda estacionária".

Soluções do tipo de ondas estacionária podem ocorrem em diversas outras situações físicas, descritas por equações que não (45.122). Elas ocorrem de forma importante na Equação de Schrödinger da Mecânica Quântica não-relativista. Lá também o fator espacial E é autovetor de um operador, o operador Hamiltoniano, e os autovalores λ são interpretados como possíveis níveis de energia do sistemas físico correspondente.

Ondas estacionárias são também por vezes denominadas *modos normais de oscilação*. Caso a solução T tenha um comportamento exponencialmente crescente ou decrescente, as soluções são denominadas "*modos quase-normais*". Tais modos tipicamente ocorrem caso o autovalor λ possua uma parte imaginária não-nula. Vide, porém, os Exercícios E. 45.55 e E. 45.56, páginas 2721 e 2722, respectivamente, para outras situações.

45.4.1 A Equação de Ondas em $1+1$ Dimensões

• **O exemplo da equação de ondas em uma dimensão e a solução de D'Alembert**

Um exemplo relevante de um problema de Cauchy[14] é o de determinar a solução da equação de ondas em uma dimensão espacial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ = \ 0 \,, \tag{45.125}$$

para $c > 0$ constante sendo a função u suposta satisfazer as condições iniciais (dados de Cauchy)

$$u(x,\ 0) \ = \ u_0(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\, u}{\partial t}(x,\ 0) \ = \ v_0(x) \tag{45.126}$$

que fixam posição e velocidade de u no instante $t = 0$, onde u_0 e v_0 são funções dadas sobre as quais exigiremos apenas que u_0 seja duas vezes diferenciável e que v_0 seja diferenciável[15]. O primeiro passo é passar a coordenadas características

$$\xi \ = \ x + ct \,, \quad \eta \ = \ x - ct \,, \quad \text{ com o que } \quad x \ = \ \frac{\xi + \eta}{2} \ \text{ e } t \ = \ \frac{\xi - \eta}{2c} \,.$$

Definindo v por $u(x,\ t) =: v(\xi,\ \eta) = v\left(x + ct,\ x - ct\right)$ a equação (45.125) assume, como facilmente se constata, a forma

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \ = \ 0 \,. \tag{45.127}$$

Essa equação pode ser facilmente resolvida. O fato de ela afirmar que a derivada parcial de $\frac{\partial\, v}{\partial \eta}$ em relação à variável ξ ser nula implica que $\frac{\partial\, v}{\partial \eta}$ não é uma função de ξ, ou seja, $\frac{\partial\, v}{\partial \eta} = A_0(\eta)$, para alguma função A_0 diferenciável. Essa equação, por sua vez, admite uma solução geral da forma $v(\xi,\ \eta) = A(\eta) + B(\xi)$, onde A é uma primitiva de A_0 (isto é, uma função tal que, $A' = A_0$) e B é diferenciável. Assim, temos que

$$u(x,\ t) \ = \ A(x - ct) + B(x + ct) \,. \tag{45.128}$$

Essa é a solução geral da equação de ondas (45.125). O termo $A(x - ct)$ representa uma onda que se propaga (sem se deformar!) da esquerda para a direita com velocidade c e o termo $B(x + ct)$ representa uma onda que se propaga (sem se deformar!) da direita para a esquerda com velocidade c. As soluções representadas pelas funções $A(x - ct)$ e $B(x + ct)$ são denominadas *ondas caminhantes* ou *ondas progressivas*.

Ainda que não tenhamos mencionado, pode-se constatar retrospectivamente que é necessário supor que A e B sejam funções duas vezes diferenciáveis para que (45.128) seja uma solução (forte, ou estrita) de (45.125). No caso de essa condição não ser cumprida, podemos eventualmente ter em (45.128) uma solução fraca.

Com (45.128), as condições iniciais implicam que para todo $z \in \mathbb{R}$

$$u_0(z) \ = \ A(z) + B(z) \qquad \text{e} \qquad v_0(z) \ = \ c\big(B'(z) - A'(z)\big) \,.$$

Assim, para todos $z,\ y \in \mathbb{R}$,

$$u_0(z) + u_0(y) \ = \ A(z) + A(y) + B(z) + B(y) \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{c}\int_y^z v_0(s)ds \ = \ B(z) - B(y) - A(z) + A(y) \,.$$

Somando ambas as expressões, obtemos

$$u_0(z) + u_0(y) + \frac{1}{c}\int_y^z v_0(s)ds \ = \ 2A(y) + 2B(z) \,,$$

o que implica, substituindo y por $x - ct$ e z por $x + ct$, $A(x - ct) + B(x + ct) = \frac{u_0(x-ct)+u_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)ds$ e obtemos disso, finalmente,

$$u(x,\ t) \ = \ \frac{u_0(x - ct) + u_0(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)\ ds \,, \tag{45.129}$$

[14] Para a caracterização geral de um problema de Cauchy, vide página 1011.

[15] Essas condições fornecem soluções clássicas, como veremos. Para soluções fracas as condições de diferenciabilidade podem ser enfraquecidas.

válida para todos $x,\ t \in \mathbb{R}$. A equação (45.129) expressa a solução de (45.125) diretamente em termos dos dados de Cauchy (45.126) e é denominada *solução de D'Alembert*[16] da equação de ondas (45.125) sob (45.126). A expressão (45.129) fornece uma solução clássica de (45.125), como facilmente se verifica, sob a condição que u_0 seja duas vezes diferenciável e v_0 seja diferenciável. Se essas condições forem enfraquecidas em pontos isolados teremos em (45.129) uma solução fraca.

A solução (45.129) será reobtida na Seção 45.11, página 2685, quando resolvermos uma equação mais geral que (45.125) usando métodos de resolução de equações integrais.

Uma outra conclusão que se pode tirar da solução de D'Alembert (45.129) é que o problema de resolver (45.125) sob as condições de Cauchy (45.126) depende continuamente dos dados de Cauchy u_0 e v_0, continuidade entendida aqui em uma topologia conveniente (por exemplo, aquela definida pela métrica do supremo das funções em $\mathbb{R}$). Assim, o problema (45.125)-(45.126) é um problema bem-posto.

• **A função de Green para as condições iniciais**

Para futura referência mencionamos que a solução de D'Alembert (45.129) pode ser reescrita na forma

$$u(x,\ t) \ = \ \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-ct}^{x+ct} u_0(x')\ dx' + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(x')\ dx' \ ,$$

com $t \geq 0$, ou seja,

$$u(x,\ t) \ = \ \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\ t,\ x')u_0(x')\ dx' + \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\ t,\ x')v_0(x')\ dx' \ , \tag{45.130}$$

onde, para $t \geq 0$,

$$G(x,\ t,\ x') \ := \ \begin{cases} \frac{1}{2c}\ , & \text{se } x - ct \leq x' \leq x + ct\ , \\ 0\ , & \text{de outra forma.} \end{cases} \tag{45.131}$$

Verifique! Note que G tem suporte na região $|x - x'| \leq c|t|$. As expressões acima são válidas para u_0 e v_0 localmente integráveis. A função G é denominada *função de Green*[17] do problema de valor inicial em questão. A função G contém em si a informação de como os valores das condições iniciais no ponto x' influenciam a solução no ponto x no instante de tempo t. Expressões semelhantes à (45.130) são válidas na solução da equação de ondas em duas e três dimensões espaciais. Vide exemplos adiante.

• **A equação de ondas e o princípio de propagação com velocidade finita**

Coloquemo-nos agora a seguinte questão. Se fizermos modificações nas condições iniciais u_0 e v_0 (em $t = 0$) em pequenas regiões, digamos, com um certo abuso, em um ponto, irão essas modificações afetar o valor de u na posição x no instante $t > 0$? Contemplando a solução de D'Alembert (45.129), vemos que só afetarão $u(x,\ t)$ as modificações feitas em u_0 nas posições $x \pm ct$ e as modificações feitas em v_0 em todo o intervalo $(x - ct,\ x + ct)$. Modificações fora dessas regiões não afetam u na posição x no instante $t > 0$. Assim, o valor de u na posição x no instante $t > 0$ é *causalmente*[18] afetado apenas pelo que ocorre no intervalo espacial $[x - ct,\ x + ct]$ do instante $t = 0$, sendo que no caso da condição f, apenas pelo que ocorre nos extremos desse intervalo. Esse intervalo da superfície inicial do qual $u(x,\ t)$ depende é denominado *domínio de dependência* de $u(x,\ t)$.

Se as condições iniciais tivessem sido fixadas em um instante $t' < t$ evidentemente concluiríamos que só afetariam o valor de $u(x,\ t)$ os valores de u_0 e v_0 contidos no intervalo $[x - c(t - t'),\ x + c(t - t')]$. Generalizando, concluímos que só poderão afetar o valor de $u(x,\ t)$ os valores de condições iniciais fixados dentro do fecho do *cone de luz passado* com vértice em $(x,\ t)$, $V^-_{(x,\ t)}$, definido por

$$V^-_{(x,\ t)} \ := \ \Big\{(x',\ t') \in \mathbb{R}^2,\ (t - t')^2 - c^2(x - x')^2 > 0\ ,\ t' < t\Big\}\ .$$

Vide Figura 45.5, página 2641.

[16] Jean Le Rond D'Alembert (1717–1783).
[17] George Green (1793–1841).
[18] De "causa", no sentido de "causa e efeito".

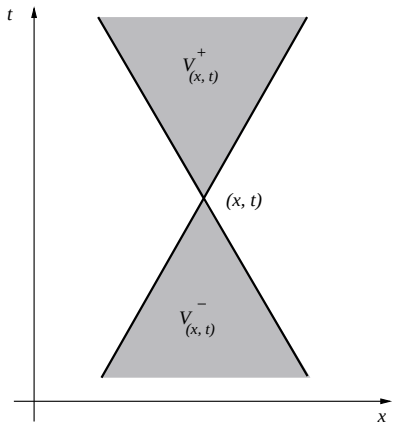

Figura 45.5: Os cones de luz futuro $V^+_{(x,\ t)}$ e passado $V^-_{(x,\ t)}$ com vértice em $(x,\ t)$. A figura também indica (linhas em negrito) as respectivas fronteiras: $\partial V^+_{(x,\ t)}$ e $\partial V^-_{(x,\ t)}$.

Essa característica da equação de ondas é comum a todas as equações de tipo hiperbólico (para a definição, vide adiante). Omitiremos a demonstração dessa afirmação aqui. Devido à natureza hiperbólica de todas as equações físicas fundamentais[19], a noção de que eventos em um ponto $(x,\ t)$ só podem ser afetados por eventos ocorridos no fecho de seu cone de luz passado $\overline{V^-_{(x,\ t)}}$ é denominado princípio de propagação com velocidade finita. No contexto do Eletromagnetismo e da Teoria de Campos esse é um princípio físico fundamental e é denominado *princípio de causalidade de Einstein*[20]. Trata-se de um princípio com consequências fundamentais no domínio da Teoria da Relatividade Geral e na Teoria Quântica de Campos.

Definimos analogamente o *cone de luz futuro* com vértice em $(x,\ t)$, $V^+_{(x,\ t)}$, por

$$V^+_{(x,\ t)} \ := \ \Big\{(x',\ t') \in \mathbb{R}^2,\ (t - t')^2 - c^2(x - x')^2 > 0\ ,\ t' > t\Big\}\ .$$

O mesmo princípio de causalidade afirma que eventos ocorridos em $(x,\ t)$ só podem afetar eventos contidos em $\overline{V^+_{(x,\ t)}}$, que é também denominado *domínio de influência* de $(x,\ t)$.

Igualmente importante é a fronteira dos cones $V^\pm_{(x,\ t)}$, denotadas por $\partial V^\pm_{(x,\ t)}$ e dadas por

$$\partial V^-_{(x,\ t)} \ = \ \Big\{(x',\ t') \in \mathbb{R}^2,\ (t-t')^2 - c^2(x-x')^2 = 0,\ t' \leq t\Big\} \ \text{ e } \ \partial V^+_{(x,\ t)} \ = \ \Big\{(x',\ t') \in \mathbb{R}^2,\ (t-t')^2 - c^2(x-x')^2 = 0,\ t' \geq t\Big\}\ .$$

• **O Princípio de Huygens em $1+1$ dimensões**

Existe mais um aspecto da solução de D'Alembert que merece comentário. Como facilmente se infere da mesma e da discussão acima, mudanças na condição inicial $u(x,\ 0)$ no ponto[21] $(x,\ 0)$ propagam-se para o futuro ao longo de $\partial V^+_{(x,\ 0)}$ enquanto que mudanças na condição inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)$ no ponto $(x,\ 0)$ propagam-se para o futuro ao longo de $\overline{V^+(x,\ 0)}$.

[19] A equação de Schrödinger, assim como a equação de difusão, não são hiperbólicas, pois são equações válidas apenas no domínio não-relativístico. Já as equações de Maxwell, de Dirac e de Klein-Gordon têm caráter hiperbólico.
[20] Albert Einstein (1879–1955).
[21] Isso é um abuso de linguagem, pois, estritamente falando, mudanças não podem ser feitas em um único ponto (isso violaria a continuidade das funções), mas em uma pequena vizinhança de um ponto.

E. 45.13 *Exercício*. Justifique as afirmativas do último parágrafo! ✣

Em espaços com dimensão espacial 3, 5, 7, ou qualquer número ímpar diferente de 1, ocorre que mudanças em ambas as condições inicial $u(\vec{x},\ 0)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},\ 0)$ no ponto $(\vec{x},\ 0)$ propagam-se para o futuro ao longo de $\partial V^+_{(\vec{x},\ 0)}$. Esse fenômeno é denominado *Princípio de Huygens*[22].

Em espaços com dimensão espacial 2, 4, 6, ou qualquer número par, ocorre que mudanças em ambas as condições inicial $u(\vec{x},\ 0)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},\ 0)$ no ponto $(\vec{x},\ 0)$ propagam-se para o futuro ao longo de $V^+_{(x,\ 0)}$. O caso de uma dimensão espacial, como comentamos acima, é especial, pois vale o princípio de Huygens para a condição inicial $u(x,\ 0)$ mas não para a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)$. Mais adiante veremos de forma explícita o que ocorre em $3+1$ e $2+1$ dimensões. Para uma discussão detalhada do princípio de Huygens em várias dimensões e mesmo para famílias mais gerais de equações que as equações de ondas, vide [115], Capítulo VI, [552] ou [159].

45.4.2 Interlúdio: Ondas Caminhantes e a Equação do Telégrafo

• **A equação do telégrafo**

Sob hipóteses adequadas, a equação diferencial que rege uma linha de transmissão elétrica é a chamada *equação do telégrafo*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} + \beta u \ = \ 0\,, \tag{45.132}$$

onde $u(x,\ t)$ pode representar o potencial (em relação à terra) no ponto x no instante t da linha (suposta idealmente unidimensional e homogênea) ou a corrente elétrica nesse mesmo ponto, e onde as constantes c, γ e β relacionam-se com parâmetros físicos da linha por meio das seguintes equações:

$$c \ = \ \frac{1}{\sqrt{\ell\kappa}}\,, \qquad \beta \ = \ \frac{\rho\sigma}{\ell\kappa} \quad \text{e} \quad \gamma \ = \ \frac{\rho\kappa + \ell\sigma}{\ell\kappa}\,, \tag{45.133}$$

sendo ρ a resistividade (resistência por unidade de comprimento) do fio condutor que compõe a linha, ℓ a indutância por unidade de comprimento da linha, κ a capacitância por unidade de comprimento da linha e σ sendo a condutividade (inverso da resistência) por unidade de comprimento associada às perdas de corrente da linha ao ambiente produzidas por imperfeições do isolamento elétrico do fio condutor que a compõe (perdas essas que não podem ser desprezadas em linhas de transmissão de longas distâncias). A equação (45.132)–(45.133), provavelmente obtida pela primeira vez por William Thomson[23], futuro Lord Kelvin, descreve bem tanto linhas de transmissão de potência (como aquelas que saem das grandes usinas de energia elétrica), quanto linhas de transmissão telegráfica e telefônica, como cabos continentais ou submarinos de comunicação, existentes desde meados do século XIX.

É de se observar que, segundo (45.133), as constantes c, β e γ são estritamente positivas em situações realistas, o que assumiremos no que segue.

A dedução de (45.132)–(45.133) não é difícil, sendo para tal empregados alguns dos princípios básicos do Eletromagnetismo, como a Lei de Indução de Faraday[24], a Lei de Kirchhoff[25] etc. Uma dedução de (45.132)–(45.133) pode ser acompanhada, por exemplo, em [170].

A solução do problema de Cauchy da equação (45.132) é discutida na Seção 45.11, página 2685, como caso particular da equação lá tratada. Aqui vamos considerar a equação (45.132) na semirreta $x > 0$, tendo por objetivo descrever uma situação na qual um sinal (de telégrafo, de telefone etc) é produzido em $x = 0$, propagando-se para a região $x > 0$. A equação (45.132) é uma equação hiperbólica mas, ao contrário da equação de ondas, equação (45.125), a equação do telégrafo não apresenta soluções na forma de *ondas caminhantes* do tipo $f(x - c_0 t)$ (que se propagam sem deformação da esquerda para direita com velocidade c_0, para algum parâmetro $c_0 > 0$) e que possuam características físicas "razoáveis". Isso é melhor entendido no exercício que segue.

[22] Christiaan Huygens (1629–1695).
[23] William Thomson (1824–1907).
[24] Michael Faraday (1791–1867).
[25] Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887).

E. 45.14 *Exercício-dirigido*. Considere que exista uma função f tal que $u(x,\ t) = f(x - c_0 t)$ seja solução de (45.132) (para $c > 0$, $\beta > 0$ e $\gamma > 0$) na região $x > 0$ para alguma constante $c_0 > 0$. Mostre que f satisfaz a equação diferencial ordinária linear a coeficientes constantes

$$\big(c_0^2 - c^2\big)f'' - c_0\gamma f' + \beta f \ = \ 0\,.$$

Há vários casos a considerar.

I. Caso $c_0 = c$ a solução dessa equação é (a menos de uma constante multiplicativa) $f(s) = e^{\frac{\beta}{c_0\gamma}s}$, fornecendo para (45.132) a solução

$$u(x,\ t) \ = \ e^{\frac{\beta}{c_0\gamma}(x - ct)}\,.$$

Para cada t essa solução diverge em $x \to \infty$, o que significa que uma tal solução requer energia infinita para ser produzida.

II. Caso $c_0 \neq c$, mostre que a solução dessa equação é da forma

$$f(s) \ = \ A_+ e^{\lambda_+ s} + A_- e^{\lambda_- s}\,,$$

para $s \in \mathbb{R}$, com $A_\pm$ sendo constantes arbitrárias e com

$$\lambda_\pm \ = \ \frac{c_0\gamma}{2\big(c_0^2 - c^2\big)}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\beta}{\gamma^2}\left(1 - \frac{c^2}{c_0^2}\right)}\right]\,.$$

Há dois casos a se considerar:

IIa. Caso $c_0 > c$. Nesse caso, ou $\lambda_\pm$ são ambas reais e positivas ou ambas têm parte real $\frac{c_0\gamma}{2\left(c_0^2 - c^2\right)}$, que é igualmente positiva. Justifique! Assim, a solução de (45.132) seria

$$u(x,\ t) \ = \ A_+ e^{\lambda_+(x - ct)} + A_- e^{\lambda_-(x - ct)}\,,$$

que também diverge em $x \to \infty$ para cada t, uma situação desinteressante pelas razões já expostas.

IIb. Caso $c_0 < c$. Nesse caso, $\lambda_\pm$ são ambas reais, com λ_+ sendo sempre negativa e λ_- sempre positiva. Justifique! Assim, escolhendo $A_- = 0$ teremos interesse pela solução

$$u(x,\ t) \ = \ A_+ e^{\lambda_+(x - ct)}$$

para (45.132), a qual decai a zero para $x \to \infty$. Porém, para cada $x \geq 0$ essa solução diverge quando $t \to \infty$, indicando que para que a mesma seja produzida uma energia ilimitada deve ser dispendida pela fonte (situada, digamos, em $x = 0$) ao longo do tempo.

Da análise dos casos acima constata-se que (45.132) não exibe soluções que se propagam sem se deformar com velocidade finita a partir de uma fonte localizada em $x = 0$ e que sejam produzidas com energia finita. É de se notar também que, ao contrário da equação de ondas (45.125), não há aqui soluções na forma $f(x - c_0 t)$ para funções f *arbitrárias*, apenas para certas funções f específicas. Assim, não há a possibilidade, mesmo com energia infinita à disposição, de se ter transmissão de sinais *arbitrários* e que se propaguem com velocidade definida e sem deformação. ✣

A situação descrita acima apresentava um obstáculo ao uso de linhas de transmissão para o envio de sinais a longas distâncias pois, em não havendo soluções na forma de ondas caminhantes do tipo $f(x - c_0 t)$, a transmissão de sinais seria realizada com perdas e, mais grave, com distorções que por vezes limitavam severamente o volume de informação que pode ser transmitidas por unidade de tempo (um sério problema prático e financeiro em telégrafos). De fato, um primeiro cabo telegráfico transatlântico conectando a Europa à América do Norte (mais especificamente, ligando a ilha de Valentia na Irlanda a Newfoundland no Canadá, uma distância de 4.500km) completado em 5 de agosto de 1858 fracassou em transmitir mensagens compreensíveis. Após quatro semanas frustradas, tentou-se o envio de sinais de alta tensão (da ordem de 2.000 Volts), o que conduziu à destruição do cabo, levando a uma perda de 2.500 toneladas de cobre e a um prejuízo de £ 350.000 em valores da época [310].

Importantes contribuições para a melhora da eficiência da transmissão e da recepção dos sinais por linhas telegráficas (incluindo o uso de cabos de cobre mais puro, com menor resistividade e dotados de melhor isolamento elétrico, para reduzir perdas) foram dadas nos anos seguintes, notadamente por William Thomson[26]. Entre 1865 e 1866 dois novos

[26] William Thomson (1824–1907). Em honra às suas contribuições científicas, notadamente àquelas relacionadas ao problema do cabo transatlântico, William Thomson foi erguido à nobreza britânica em 1866 com o título de primeiro Barão de Kelvin, ficando mais conhecido pela posteridade como Lord Kelvin. A palavra "Kelvin" por ele escolhida para sua titulação provém do Rio Kelvin, que passa pela Universidade de Glasgow, sua *Alma Mater* (junto com a Universidade de Cambridge).

cabos transatlânticos foram construídos conectando a Europa à América do Norte, implementando diversas melhorias. Seu sucesso inaugurou uma nova era de comunicações rápidas a longa distância, cuja importância dispensa comentários[27].

Dentre os aperfeiçoamentos que conduziram à melhora da transmissão de sinais elétricos em cabos de longa distância há um que particularmente concerne nossa temática presente. A existência de dissipação no sistema descrito por (45.132) (notadamente nos dois últimos termos daquela equação) tornam inevitável uma perda de sinal com a distância. Podemos então nos perguntar se não haveria soluções para (45.132) na forma

$$u(x,\ t)\ =\ e^{-\delta x} f(x - c_0 t)\ , \tag{45.134}$$

com δ e c_0 constantes e f arbitrária. Como se vê, trata-se de uma onda caminhante com velocidade c_0, exponencialmente amortecida com a distância. Como $u(0,\ t) = f(-c_0 t)$, podemos identificar a função f com o sinal a ser transmitido, produzido em $x = 0$. Uma solução como (45.134), se houver, seria ainda de interesse, pois permitiria ainda um reconhecimento do sinal original (codificado na função f), transmitido sem distorção (eventualmente após um processo de amplificação da parte do receptor para corrigir o efeito do fator de amortecimento $e^{-\delta x}$). Substituindo (45.134) em (45.132), obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u \ =\ \Big[\big(c_0^2 - c^2\big) f''(x - c_0 t) + \big(2c^2\delta - \gamma c_0\big) f'(x - c_0 t) + \big(\beta - \delta^2 c^2\big) f(x - c_0 t)\Big] e^{-\delta x}\ .$$

Verifique! A condição necessária e suficiente para que o lado direito seja identicamente nulo para uma função f arbitrária (duas vezes diferenciável) é que cada um dos fatores entre parênteses se anule (justifique!), ou seja, que valha

$$c_0\ =\ c\ , \qquad \delta\ =\ \frac{\gamma}{2c} \quad \text{e} \quad \beta\ =\ \frac{\gamma^2}{4}\ .$$

Note-se que a última igualdade relaciona apenas parâmetros de (45.132) e, portanto, não é toda e qualquer linha de transmissão que pode apresentar soluções como (45.134), na forma de ondas caminhantes exponencialmente amortecidas, apenas aquelas para as quais $\beta = \frac{\gamma^2}{4}$, em cujo caso (45.134) assume a forma

$$u(x,\ t)\ =\ e^{-\frac{\gamma}{2c}x} f(x - ct)\ ,$$

com f arbitrária (duas vezes diferenciável). Usando-se (45.133), é fácil constatar que a condição $\beta = \frac{\gamma^2}{4}$ equivale à seguinte condição entre os parâmetros físicos da linha de transmissão:

$$\rho\kappa\ =\ \ell\sigma\ . \tag{45.135}$$

Essa relação, obtida em 1887 por Heaviside[28], pode ser satisfeita por uma escolha conveniente do material que compõe o cabo de transmissão e seus parâmetros geométricos, ou por adição periódica de indutores à linha de transmissão.

45.4.3 Outro Interlúdio: Sólitons

É um fato notável que não apenas equações lineares, como a equação de ondas (45.125), apresentam soluções na forma de ondas caminhantes. Certas equações não-lineares de interesse físico também admitem soluções na forma $f(x \pm c_0 t)$ para certas funções f específicas e certas constantes c_0. A existência de soluções de equações não-lineares que apresentem essa forma de estabilidade é bastante surpreendente, pois é indicativa da existência de mecanismos de compensação de efeitos de dispersão e de dissipação em meios não-lineares. Soluções de equações diferenciais parciais não-lineares que sejam da forma de ondas caminhantes, estáveis e aproximadamente localizadas em regiões finitas são genericamente denominadas *sólitons* em Física[29], termo cunhado por Kruskal[30] e Zabusky[31] em um célebre trabalho de 1965[32]. A

[27] Lord Kelvin supervisionou pessoalmente o assentamento do cabo submarino conectando o Pará a Pernambuco, em 1873, parte de um sistema maior de comunicações entre a Europa e a América do Sul.

[28] Oliver Heaviside (1850–1925). O trabalho original é "Electromagnetic induction and its propagation", in Electrician, (1887).

[29] Há uma definição matematicamente precisa dessa noção, sobre a qual não elaboraremos aqui.

[30] Martin David Kruskal (1925–2006). Além de suas contribuições à teoria dos sólitons, Kruskal é também conhecido por uma importante solução das Equações de Einstein da Teoria da Relatividade Geral.

[31] Norman J. Zabusky (1929–).

[32] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *"Interaction of 'Solitons' in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States"*. Phys. Rev. Lett. **15**, 240 (1965).

primeira observação empírica desse fenômeno data aparentemente do ano de 1834 e foi feita pelo engenheiro naval John Scott Russell[33] enquanto o mesmo cavalgava ao longo de um canal na Escócia, denominado *Union Canal* (ou *Edinburgh and Glasgow Union Canal*), conduzindo testes. Em uma nota publicada dez anos mais tarde[34], Russell descreve sua observação com as seguintes palavras, repetidamente citadas desde então:

> *"I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped - not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation"*.

A explicação do fenômeno observado por Russell foi primeiramente apresentada por Boussinesq[35] em 1871[36] e por Lord Rayleigh[37] em 1876[38], o qual menciona em seu trabalho a antecedência de Boussinesq. Uma marcante contribuição posterior foi apresentada pelos matemáticos holandeses Korteweg[39] e de Vries[40] em um trabalho de 1895[41], os quais propuseram e analisaram uma equação diferencial parcial para descrever ondas não-lineares em canais rasos, a qual passou a ser conhecida como *equação de Korteweg-de Vries* ou, abreviadamente, *equação KdV*, a equação (18.14), página 996 (vide adiante).

Posteriormente, a existência de sólitons foi observada em diversos outros sistemas. Na segunda metade do século XX sólitons encontraram inúmeras aplicações em Física, como na Mecânica dos Fluidos, na Teoria Quântica de Campos, na Mecânica Quântica, na Física Estatística, na Óptica em meios não-lineares. Nesse último ramo, sólitons alcançaram aplicações de natureza tecnológica, sendo empregados no transporte de informação a grandes distâncias através de fibras ópticas, uma proposta surgida tão recentemente quanto nos anos de 1970 e implementada tão recentemente quanto no final dos anos 1980.

Nesta breve seção vamos ilustrar a existência de sólitons em alguns exemplos de interesse. Há uma extensa literatura sobre sólitons e dela destacamos para o leitor interessado as referências [137], [302], [319] e [579]. Para soluções com múltiplos sólitons, vide particularmente [1]. Para mais notas históricas sobre Scott Russell e a descoberta dos sólitons, vide [120].

45.4.3.1 Sólitons na Equação de Korteweg-de Vries

Vamos considerar a *equação de Korteweg-de Vries* (18.14) (também denominada *equação KdV*) na sua forma (18.15):

$$\frac{\partial\, u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial\, u}{\partial x}\ =\ 0 \tag{45.136}$$

e procuremos para (45.136) soluções na forma de ondas caminhantes $u(x,\ t) = f(x - c_0 t)$ para $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$, para alguma função f e alguma constante c_0. Inserindo o *Ansatz* $u(x,\ t) = f(x - c_0 t)$ em (45.136), obtém-se $f'''(x - c_0 t) + 6f(x - c_0 t) f'(x - c_0 t) - c_0 f'(x - c_0 t) = 0$. Verifique! Escrevendo $s := x - c_0 t$, procuramos, portanto, soluções f da equação diferencial ordinária

$$f'''(s) + 6f(s) f'(s) - c_0 f'(s)\ =\ 0 \tag{45.137}$$

[33] John Scott Russell (1808–1882). Coincidentemente, Russell foi o projetista principal de um famoso navio, o "*Great Eastern*", o maior navio de sua época, o qual, devido ao seu tamanho único, foi utilizado para o lançamento do supracitado cabo transatlântico de 1866, conectando a Europa à América do Norte.

[34] J. Scott Russell. *"Report on waves"*, Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1844.

[35] Joseph Valentin Boussinesq (1842–1929).

[36] Duas referências nesse contexto são: Joseph Boussinesq, *"Théorie de l'intumescence liquide, appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire"*, Comptes rendus de l'Académie des sciences, vol. **72**, 755–759 (1871) e Joseph Boussinesq, *"Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond"*, Journal de Mathématique Pures et Appliquées, Deuxième Série, vol. **17**, 55–108 (1872).

[37] John William Strutt, terceiro Barão de Rayleigh (1842–1919).

[38] O referido trabalho é: Lord Rayleigh, *"On waves"*. Philosophical Magazine, ser. 5, vol. **1**, no. 4: 257–279 (1876).

[39] Diederik Johannes Korteweg (1848–1941).

[40] Gustav de Vries (1866–1934).

[41] D. J. Korteweg and G. de Vries, *"On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves"*, Philosophical Magazine, 5th series, **36**, 422–443 (1895).

para todo $s \in \mathrm{R}$. Trata-se de uma equação de terceira ordem e não-linear. Para resolvermos (45.137) seguiremos um procedimento comummente usado na resolução de equações ordinárias, a saber, procuramos transformar (45.137) em uma equação de ordem menor.

Observe-se em primeiro lugar que (45.137) pode ser reescrita como $f'''(s) + 3\frac{d}{ds}\big(f(s)^2\big) - c_0 f'(s) = 0$ ou seja,

$$\frac{d}{ds}\Big(f''(s) + 3f(s)^2 - c_0 f(s)\Big) \;=\; 0\,,$$

o que implica

$$f''(s) + 3f(s)^2 - c_0 f(s) \;=\; a\,, \tag{45.138}$$

para alguma constante a. Multiplicando-se (45.138) por $f'(s)$, obtemos $f'(s)f''(s) + 3f(s)^2 f'(s) - c_0 f(s)f'(s) = af'(s)$, que equivale a

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\big(f'(s)\big)^2 + f(s)^3 - \frac{c_0}{2}f(s)^2 - af(s)\right) \;=\; 0\,,$$

o que, por sua vez, implica

$$\big(f'(s)\big)^2 + 2f(s)^3 - c_0 f(s)^2 - 2af(s) \;=\; b \tag{45.139}$$

para alguma constante b. Essa é uma equação de primeira ordem equivalente à equação de terceira ordem (45.137).

No que segue, obteremos não a solução geral de (45.139) (o que não é difícil, por integração, fornecendo a solução em termos de funções elípticas), mas nos interessaremos por soluções específicas que satisfaçam

$$\lim_{s\to\infty} f(s) \;=\; \lim_{s\to\infty} f'(s) \;=\; \lim_{s\to\infty} f''(s) \;=\; 0\,, \tag{45.140}$$

(ou, equivalentemente, a mesma condição com $s \to \infty$ substituída por $s \to -\infty$). Como veremos, essas condições (que representam condições de contorno em $+\infty$) correspondem a soluções essencialmente localizadas em uma região finita e que decaem rapidamente a zero em $\pm\infty$.

A imposição de (45.140) a (45.138) implica $a = 0$ e a (45.139) que $b = 0$. Ficamos assim restritos a resolver a equação

$$\big(f'(s)\big)^2 \;=\; c_0 f(s)^2 - 2f(s)^3\,,$$

que equivale ao par de equações $f'(s) \;=\; \pm\sqrt{c_0 f(s)^2 - 2f(s)^3}$. Como a troca de sinais $\pm$ equivale à troca $s \to \pm s$, é suficiente resolvermos uma das equações, por exemplo

$$f'(s) \;=\; -\sqrt{c_0 f(s)^2 - 2f(s)^3}\,, \tag{45.141}$$

o que pode ser feito por integração. Temos

$$\int \frac{df}{f\sqrt{c_0 - 2f}} \;=\; -\int ds \;=\; -(s - x_0)\,,$$

para alguma constante de integração x_0. A integral do lado esquerdo pode ser facilmente calculada com a mudança de variável $f = \frac{c_0}{2}\big(\cosh\theta\big)^{-2}$, com o que teremos $\int \frac{df}{f\sqrt{c_0 - 2f}} = -\frac{2}{\sqrt{c_0}}\int d\theta = -\frac{2}{\sqrt{c_0}}\theta$. Verifique! Assim, $\theta = \frac{\sqrt{c_0}}{2}(s - x_0)$, e obtemos

$$f(s) \;=\; \frac{c_0}{2}\frac{1}{\left[\cosh\left(\frac{\sqrt{c_0}}{2}(s - x_0)\right)\right]^2}$$

como solução de (45.141) satisfazendo (45.140). Portanto, a solução procurada para a equação de Korteweg-de Vries (45.136) é

$$u(x,\,t) \;=\; \frac{c_0}{2}\frac{1}{\left[\cosh\left(\frac{\sqrt{c_0}}{2}\big(x - c_0 t - x_0\big)\right)\right]^2}\,. \tag{45.142}$$

Essa solução é dita ser o *sóliton* da equação de Korteweg-de Vries. As constantes x_0 e c_0, acima, são arbitrárias. Alterar o valor de x_0 equivale apenas a uma translação espacial da solução ou do sistema de coordenadas. Já a constante c_0, além de representar a velocidade de fase da onda (45.142) aparece multiplicando a função do lado direito e seu argumento. Assim, aumentar c_0 aumenta a velocidade de fase da onda, aumenta sua amplitude e torna-a mais estreita. Vide Figura 45.6, página 2647. Esse sóliton é considerado uma excelente descrição teórica da onda observada por Scott Russell e pode ser produzido facilmente em laboratório usando-se canais rasos e estreitos.

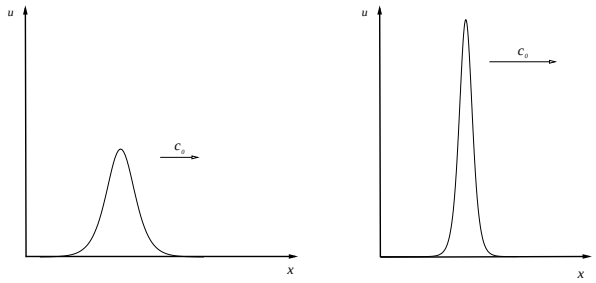

Figura 45.6: As duas figuras reproduzem o perfil de sólitons do tipo (45.142) da equação de Korteweg-de Vries em um dado instante de tempo para dois valores de c_0. O valor de c_0 na figura do lado esquerdo é menor que na do lado direito. Aumentando-se c_0 aumentam a velocidade de fase da onda e sua a amplitude, mas seu perfil torna-se mais estreito.

E. 45.15 *Exercício*. Procedendo de forma análoga àquela que empregamos no tratamento da equação de Korteweg-de Vries obtenha soluções solitônicas para a equação

$$\frac{\partial\, u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u^2\frac{\partial\, u}{\partial x} \;=\; 0\,, \tag{45.143}$$

denominada *equação de Korteweg-de Vries modificada*, ou *equação MKdV*. ✣

45.4.3.2 Sólitons na Equação de Sine-Gordon

Uma outra equação a derivadas parciais relevante que exibe soluções do tipo de sólitons é a chamada *equação de Sine-Gordon*, equação (18.13), página 996:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\,\mathrm{sen}(u) \;=\; 0\,, \tag{45.144}$$

com $c > 0$, $\beta > 0$. Essa equação ocorre em diversos sistemas físicos, entre eles, uma cadeia de pêndulos idênticos harmonicamente acoplados suspensos em um campo gravitacional constante.

Seguindo os passos do tratamento que demos logo acima à equação KdV, procuremos para (45.144) soluções da forma $u(x,\,t) = f(x - c_0 t)$ para alguma função f e alguma constante $c_0 > 0$. Da equação (45.144) obtemos para f a equação diferencial

$$\big(c^2 - c_0^2\big)f''(s) - \beta\,\mathrm{sen}\big(f(s)\big) \;=\; 0\,,$$

novamente com $s = x - c_0 t$. Para resolver essa equação vamos transformá-la em uma equação de primeira ordem. Multiplicando-a por $f'(s)$ e usando os fatos que $f'(s)f''(s) \;=\; \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\big(f'(s)\big)^2$ e que $f'(s)\,\mathrm{sen}\big(f(s)\big) \;=\; -\frac{d}{ds}\cos\big(f(s)\big)$, obtemos

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\big(c^2 - c_0^2\big)}{2}\big(f'(s)\big)^2 + \beta\cos\big(f(s)\big)\right) \;=\; 0\,,$$

o que implica

$$\frac{\big(c^2 - c_0^2\big)}{2}\big(f'(s)\big)^2 + \beta\cos\big(f(s)\big) \;=\; a \tag{45.145}$$

para alguma constante a. Não vamos no que segue procurar a solução geral dessa equação, mas apenas aquelas que satisfaçam as seguintes condições:

$$\lim_{s\to-\infty} f(s) \;=\; \lim_{s\to-\infty} f'(s) \;=\; 0\,.$$

Impondo essas condições a (45.145) obtemos $a = \beta$. Com isso (45.145) fica $\frac{c^2-c_0^2}{2}\big(f'(s)\big)^2 + \beta\Big(\cos\big(f(s)\big) - 1\Big) = 0$, que também pode ser escrita como

$$\frac{\big(c^2 - c_0^2\big)}{2}\big(f'(s)\big)^2 \;=\; 2\beta\left(\operatorname{sen}\left(\frac{f(s)}{2}\right)\right)^2 . \tag{45.146}$$

Observe-se que, como $\beta > 0$, essa equação só é possível para $|c_0| < c$, o que suporemos doravante.

A equação (45.146) equivale às equações $f'(s) = \pm 2\sqrt{\frac{\beta}{c^2-c_0^2}}\operatorname{sen}\left(\frac{f(s)}{2}\right)$. Como a troca de sinais corresponde à troca $s \to \pm s$, consideraremos apenas a equação

$$f'(s) \;=\; 2\sqrt{\frac{\beta}{c^2 - c_0^2}}\operatorname{sen}\left(\frac{f(s)}{2}\right) .$$

Dela obtemos

$$\int \frac{df}{\operatorname{sen}\left(\frac{f(s)}{2}\right)} \;=\; 2\sqrt{\frac{\beta}{c^2 - c_0^2}}\big(s - x_0\big) , \tag{45.147}$$

com x_0 sendo uma constante de integração. Com a mudança de variáveis $f = 4\arctan(e^y)$ teremos $df = \frac{4e^y}{1+e^{2y}}dy$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{2e^y}{1+e^{2y}}$. Verifique! Assim, $\int \frac{df}{\operatorname{sen}\left(\frac{f(s)}{2}\right)} = 2\int dy = 2y$ (verifique!) e obtemos de (45.147) que $y = \sqrt{\frac{\beta}{c^2-c_0^2}}\big(s - x_0\big)$. Logo,

$$f(s) \;=\; 4\arctan\left(e^{\sqrt{\frac{\beta}{c^2-c_0^2}}\left(s-x_0\right)}\right)$$

é a solução procurada de (45.146), do que se conclui que a solução procurada de (45.144) é

$$u(x,\, t) \;=\; 4\arctan\left(e^{\sqrt{\frac{\beta}{c^2-c_0^2}}\left(x-c_0t-x_0\right)}\right) , \tag{45.148}$$

com $|c_0| < c$. Essa solução é dita ser o *sóliton* da equação de Sine-Gordon. As constantes x_0 e c_0, acima, são arbitrárias, mas com $|c_0| < c$. Alterar o valor de x_0 equivale apenas a uma translação espacial da solução ou do sistema de coordenadas. Quando c_0 aproxima-se de c o perfil da função torna-se mais estreito. Vide Figura 45.7, página 2649. Da solução (45.148) é fácil de se provar que para cada t vale $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x,\, t) = 0$ mas $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x,\, t) = 2\pi$. Assim, a solução (45.148) interpola 0 a 2π quando x vai de $-\infty$ a $+\infty$ e isso para cada instante t.

45.4.3.3 Sólitons no Modelo de Poço-Duplo

O tratamento que demos acima à equação de Sine-Gordon pode ser estendido a uma classe de equações com características semelhantes àquela.

Seja $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função não-negativa (isto é, $V(u) \geq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$) diferenciável, com um mínimo em u_0 onde valha $V(u_0) = 0$. Dizemos que V é o *potencial* do problema tratado. Considere-se a equação a derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V'(u) \;=\; 0 , \tag{45.149}$$

onde V' é a derivada de V. Se procurarmos para essa equações soluções na forma de ondas caminhantes como $u(x,\, t) = f(x - c_0t)$ para alguma função f duas vezes diferenciável e algum $c_0 > 0$, obtemos para f a equação

$$\big(c^2 - c_0^2\big)f''(s) - V'\big(f(s)\big) \;=\; 0 ,$$

com $s = x - c_0t$. Multiplicando essa expressão por f' obtemos $\frac{d}{ds}\left(\frac{\left(c^2-c_0^2\right)}{2}\big(f'(s)\big)^2 - V(f(s))\right) = 0$, de onde se extrai

$$\frac{\big(c^2 - c_0^2\big)}{2}\big(f'(s)\big)^2 - V(f(s)) \;=\; a \tag{45.150}$$

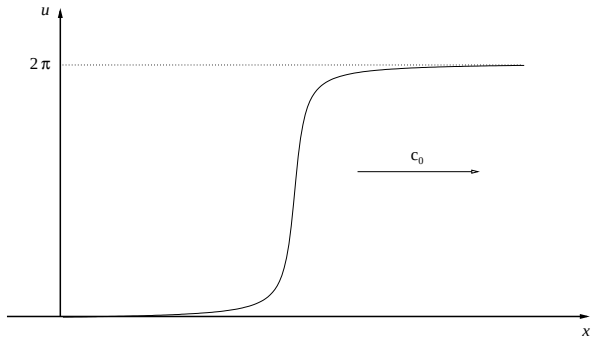

Figura 45.7: O perfil do sóliton (45.148) da equação de Sine-Gordon em um dado instante de tempo. A função interpola 0 a 2π quando x vai de $-\infty$ a $+\infty$. A velocidade de fase é $c_0 < c$. Fazendo c_0 aproximar-se de c aumenta a velocidade de fase da onda e seu perfil torna-se mais estreito.

para alguma constante a. Vamos agora considerar apenas as soluções que satisfazem as seguintes condições de contorno em $s \to -\infty$:

$$\lim_{s\to-\infty} f'(s) \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{s\to-\infty} f(s) \;=\; u_0 ,$$

onde, recordando, u_0 é tal que $V(u_0) = 0$, um mínimo do potencial. De (45.150) segue que $a = 0$ e, assim, concluímos que

$$\frac{\big(c^2 - c_0^2\big)}{2}\big(f'(s)\big)^2 \;=\; V\big(f(s)\big) . \tag{45.151}$$

Como V é não-negativo concluímos que $c_0 < c$. Disso obtemos

$$f'(s) \;=\; \pm\sqrt{\frac{2}{c^2 - c_0^2}}\sqrt{V\big(f(s)\big)} .$$

Dessa expressão obtemos (escolhendo o sinal $-$, por conveniência)

$$\int \frac{df}{\sqrt{V(f)}} \;=\; -\sqrt{\frac{2}{c^2 - c_0^2}}\,(s - x_0) , \tag{45.152}$$

com x_0 sendo uma constante de integração. Determinando a integral do lado esquerdo podemos eventualmente obter a solução $f(s)$ desejada. Foi o que foi feito no caso da equação de Klein-Gordon com $V(u) = 2\beta\left(\operatorname{sen}\left(\frac{f(s)}{2}\right)\right)^2$ (compare (45.151) com (45.146)) e é o que faremos no exemplo a seguir.

• **O caso do potencial de poço-duplo**

Vamos ilustrar isso no caso do chamado *potencial de poço-duplo*, de interesse na Física Quântica. Trata-se do caso em que

$$V(u) \;=\; \gamma\big(u^2 - \alpha^2\big)^2 , \tag{45.153}$$

onde $\gamma > 0$ e $\alpha > 0$. Vide Figura 45.8, página 2650. Aqui adotamos $u_0 = -\alpha$ como o ponto onde o potencial é mínimo. Como $V'(u) = 4\gamma u^3 - 4\gamma\alpha^2 u$ (verifique!), a esse potencial corresponde a equação a derivadas parciais não-linear

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\gamma u^3 - 4\gamma\alpha^2 u \;=\; 0 , \tag{45.154}$$

por vezes denominada *equação do potencial de poço-duplo*. Nesse caso (45.152) fica

$$\int \frac{df}{f^2-\alpha^2} \;=\; -\sqrt{\frac{2\gamma}{c^2-c_0^2}}(s-x_0)\;.$$

A integral do lado esquerdo vale $-\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{argtanh}\big(f/\alpha\big)$, do que obtemos $f(s)=\alpha\tanh\Big(\sqrt{\frac{2\gamma\alpha^2}{c^2-c_0^2}}\,(s-x_0)\Big)$, que corresponde à solução solitônica

$$u(x,\,t) \;=\; \alpha\tanh\left(\sqrt{\frac{2\gamma\alpha^2}{c^2-c_0^2}}\,\big(x-c_0t-x_0\big)\right)\;,$$

para a equação do potencial de poço-duplo (45.154). Essa solução interpola para cada t os valores $-\alpha$ e $+\alpha$, os dois mínimos absolutos de V, quando x vai de $-\infty$ a $+\infty$.

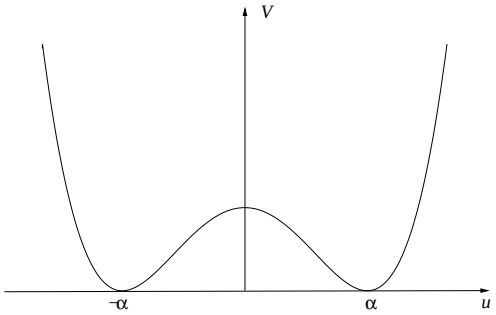

Figura 45.8: Gráfico do potencial de poço duplo (45.153), com mínimos absolutos em $\pm\alpha$.

45.4.3.4 Sólitons na Equação de Schrödinger Não-Linear

A equação de Schrödinger não-linear em uma dimensão

$$i\hbar\frac{\partial\,u}{\partial t} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\,u}{\partial x^2}+g|u|^2u\;, \tag{45.155}$$

com $g\in\mathrm{R}$, m e $\hbar$ positivos, admite soluções do tipo sóliton, as quais são de interesse em telecomunicações (especificamente, para a propagação de sinais eletromagnéticos em fibras ópticas) e no estudo dos chamados condensados de Bose-Einstein. No que segue vamos descrever como obter tais soluções solitônicas (há essencialmente apenas duas que têm interesse físico e tecnológico).

Escrevendo u na forma polar $u=\rho e^{i\phi}$, com ρ e ϕ reais, obtemos de (45.155) após separarmos as partes real e imaginária, o par de equações

$$\rho_t \;=\; -\frac{\hbar}{m}\rho_x\phi_x-\frac{\hbar}{2m}\rho\phi_{xx}\;, \tag{45.156}$$

$$\rho\phi_t \;=\; \frac{\hbar}{2m}\rho_{xx}-\frac{\hbar}{2m}\rho\big(\phi_x\big)^2-\frac{g}{\hbar}\rho^3\;. \tag{45.157}$$

Verifique! Adotemos agora ϕ na forma

$$\phi(x,\,t) \;=\; \lambda x+\omega t$$

com λ e ω constantes. Com essa escolha (45.156)–(45.157) ficam

$$\rho_t \;=\; -\frac{\hbar\lambda}{m}\rho_x\;, \tag{45.158}$$

$$\rho_{xx} \;=\; \frac{2mg}{\hbar^2}\rho^3+\left(\frac{2m}{\hbar}\omega+\lambda^2\right)\rho\;. \tag{45.159}$$

Verifique! A equação (45.158) implica que ρ é da forma

$$\rho(x,\,t) \;=\; f(x-c_0t) \tag{45.160}$$

para alguma função f a ser determinada por (45.159), sendo

$$c_0 \;=\; \frac{\hbar\lambda}{m}\;,$$

ou seja, ρ tem a forma de uma onda caminhante com velocidade de fase c_0. Com isso, vemos que estamos lidando com soluções u para (45.155) da forma

$$u(x,\,t) \;=\; f(x-c_0t)\,e^{i(\lambda x+\omega t)}\;. \tag{45.161}$$

Com (45.160) a equação (45.159) fica

$$f''(s) \;=\; \frac{2mg}{\hbar^2}f(s)^3+\left(\frac{2m}{\hbar}\omega+\lambda^2\right)f(s)\;, \tag{45.162}$$

com $s:=x-c_0t$. Multiplicando-se ambos os lados de (45.162) por $f'(s)$ obtemos

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{2}\big(f'(s)\big)^2-\frac{mg}{2\hbar^2}f(s)^4-\frac{1}{2}\left(\frac{2m}{\hbar}\omega+\lambda^2\right)f(s)^2\right] \;=\; 0\;,$$

do que se conclui que

$$\big(f'(s)\big)^2-\alpha f(s)^4-\beta f(s)^2 \;=\; a\;, \tag{45.163}$$

com a sendo uma constante e onde definimos

$$\alpha \;:=\; \frac{mg}{\hbar^2} \qquad \text{e} \qquad \beta \;:=\; \frac{2m}{\hbar}\omega+\lambda^2\;.$$

A partir deste ponto diversas condições distintas devem ser consideradas e iremos nos concentrar naquelas de conduzem aos resultados que nos interessam no presente contexto.

I. Caso $a=0$.

Se impusermos condições de contorno em $s\to-\infty$ do tipo

$$\lim_{s\to-\infty}f'(s) \;=\; 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s\to-\infty}\Big(\alpha f(s)^4+\beta f(s)^2\Big) \;=\; 0$$

então (45.163) implica $a=0$ e (45.163) torna-se

$$\big(f'(s)\big)^2 \;=\; \alpha f(s)^4+\beta f(s)^2\;. \tag{45.164}$$

Note-se que essa equação é impossível se $\alpha<0$ e $\beta<0$. Como nos interessamos pelo caso em que o termo não-linear de (45.155) está presente, ou seja, $g\neq0$, temos $\alpha\neq0$. Há, quatro casos a considerar.

I.a. Caso $\alpha<0$ e $\beta>0$.

Neste caso, (45.164) implica $f'(s)=\pm\sqrt{\beta}f(s)\sqrt{1-\gamma f(s)^2}$ com $\gamma:=\frac{|\alpha|}{\beta}$. O sinal $\pm$ pode ser absorvido com a troca $s\to\pm s$ e, escolhendo o sinal $-$, teremos $\int\frac{df}{f\sqrt{1-\gamma f(s)^2}}=-\sqrt{\beta}(s-x_0)$, com x_0 sendo uma

constante de integração. A mudança de variável $f = \frac{1}{\sqrt{\gamma}\cosh\theta}$ conduz a $\int \frac{df}{f\sqrt{\gamma f(s)^2-1}} = -\int d\theta = -\theta$. Assim, $\theta = \sqrt{\beta}(s-x_0)$ e obtemos

$$f(s) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\gamma}\cosh\Big(\sqrt{\beta}(s-x_0)\Big)}\,. \tag{45.165}$$

Essa expressão conduz a uma solução de tipo sóliton, a qual discutiremos logo adiante.

Os três casos seguintes também apresentam soluções de tipo sóliton, mas todas têm um interesse reduzido devido à presença de singularidades nas mesmas.

I.b. Caso $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Neste caso, (45.164) implica $f'(s) = \pm\sqrt{\beta}f(s)\sqrt{\gamma f(s)^2+1}$ com $\gamma := \frac{\alpha}{\beta}$. O sinal $\pm$ pode ser absorvido com a troca $s \to \pm s$ e, escolhendo o sinal $-$, teremos $\int \frac{df}{f\sqrt{\gamma f(s)^2+1}} = -\sqrt{\beta}(s-x_0)$, com x_0 sendo uma constante de integração. A mudança de variável $f = \frac{1}{\sqrt{\gamma}\,\mathrm{senh}\theta}$ conduz a $\int \frac{df}{f\sqrt{\gamma f(s)^2+1}} = -\int d\theta = -\theta$. Assim, $\theta = \sqrt{\beta}(s-x_0)$ e obtemos

$$f(s) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\gamma}\,\mathrm{senh}\Big(\sqrt{\beta}(s-x_0)\Big)}\,.$$

Essa solução é de interesse limitado, pois é singular em $s = x_0$.

I.c. Caso $\alpha > 0$ e $\beta < 0$.

Neste caso, (45.164) implica $f'(s) = \pm\sqrt{|\beta|}f(s)\sqrt{\gamma f(s)^2-1}$ com $\gamma := \frac{\alpha}{|\beta|}$. O sinal $\pm$ pode ser absorvido com a troca $s \to \pm s$ e, escolhendo o sinal $+$, teremos $\int \frac{df}{f\sqrt{\gamma f(s)^2-1}} = \sqrt{\beta}(s-x_0)$, com x_0 sendo uma constante de integração. A mudança de variável $f = \frac{1}{\sqrt{\gamma}\cos\theta}$ conduz a $\int \frac{df}{f\sqrt{\gamma f(s)^2-1}} = \int d\theta = \theta$. Assim, $\theta = \sqrt{|\beta|}(s-x_0)$ e obtemos

$$f(s) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\gamma}\cos\Big(\sqrt{|\beta|}(s-x_0)\Big)}\,.$$

Essa solução é de interesse limitado, pois é singular em $s = x_0 \pm \frac{\pi}{2}$.

I.d. Caso $\alpha > 0$ e $\beta = 0$.

Neste caso, (45.164) implica $f'(s) = \pm\sqrt{\alpha}f(s)^2$, cuja solução é

$$f(s) \;=\; \frac{\mp 1}{\sqrt{\alpha}(s-x_0)}\,.$$

Essa solução é de interesse limitado, pois é singular em $s = x_0$.

II. Caso $a \neq 0$.

Dentre todos os casos possíveis vamos nos interessar por um especificamente, a saber, aquele no qual $\alpha > 0$ e $\beta < 0$.

A relação (45.163) se escreve

$$\big(f'(s)\big)^2 \;=\; \alpha f(s)^4 - |\beta|f(s)^2 + a \;=\; \alpha\left(f(s)^2 - \frac{|\beta|}{2\alpha}\right)^2 + a - \frac{|\beta|^2}{4\alpha}\,. \tag{45.166}$$

Se impusermos condições de contorno em $s \to -\infty$ do tipo

$$\lim_{s\to-\infty} f'(s) \;=\; 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s\to-\infty} f(s) \;=\; -\sqrt{\frac{|\beta|}{2\alpha}}\,,$$

então (45.166) implica $a = \frac{|\beta|^2}{4\alpha}$ e ficamos com

$$\big(f'(s)\big)^2 \;=\; \alpha\left(f(s)^2 - \frac{|\beta|}{2\alpha}\right)^2\,, \tag{45.167}$$

Consideremos, portanto a equação $f'(s) = -\sqrt{\alpha}\left(f(s)^2 - \frac{|\beta|}{2\alpha}\right)$. Temos $\int \frac{df}{f^2-\frac{|\beta|}{2\alpha}} = -\sqrt{\alpha}(s-x_0)$. Com a mudança de variáveis $f = \sqrt{\frac{|\beta|}{2\alpha}}\,y$ obtemos $\int \frac{df}{f^2-\frac{|\beta|}{2\alpha}} = -\sqrt{\frac{2\alpha}{|\beta|}}\int \frac{dy}{1-y^2} = -\sqrt{\frac{2\alpha}{|\beta|}}\,\mathrm{argtanh}(y)$. Logo,

$$f(s) \;=\; \sqrt{\frac{|\beta|}{2\alpha}}\tanh\left(\sqrt{\frac{|\beta|}{2}}(s-x_0)\right)\,. \tag{45.168}$$

Essa expressão conduz a uma solução de tipo sóliton, a qual discutiremos logo adiante.

Podemos agora retornar a (45.161) com nossos resultados acima, mas iremos nos limitar às soluções (45.165) e (45.168).

• **O sóliton "claro" da equação de Schrödinger não-linear**

Para o caso $\alpha < 0$ (ou seja, $g < 0$) e $\beta > 0$ com $a = 0$ encontramos a solução (45.165) para f. Retornando a (45.161), isso corresponde a soluções da forma

$$u(x,\,t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\exp\big[i\big(\lambda x+\omega t\big)\big]}{\cosh\Big(\sqrt{\beta}\big(x-c_0t-x_0\big)\Big)}\,,$$

com $\gamma := \frac{|\alpha|}{\beta}$, $c_0 := \frac{\hbar\lambda}{m}$, $\alpha := \frac{mg}{\hbar^2}$ e $\beta := \frac{2m}{\hbar}\omega + \lambda^2$.

Como a amplitude dessa onda é $A := \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ e sua velocidade de fase é c_0, é conveniente escrevermos u em termos desses dois parâmetros (além de x_0 e dos parâmetros da equação de Schrödinger não-linear, g, m e $\hbar$). Após algumas contas elementares, obtemos a solução solitônica

$$u(x,\,t) \;=\; A\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Big[mc_0x - \frac{1}{2}\left(gA^2+mc_0^2\right)t\Big]\right\}\frac{1}{\cosh\Big(\frac{A\sqrt{-mg}}{\hbar}\big(x-c_0t-x_0\big)\Big)}\,. \tag{45.169}$$

(Recordar que $g < 0$ aqui). A equação de Schrödinger não-linear descreve a propagação de ondas eletromagnéticas em fibras ópticas, onde a quantidade $|u(x,\,t)|^2$ descreve a intensidade da radiação. Segundo (45.169),

$$|u(x,\,t)|^2 \;=\; A^2\frac{1}{\Big[\cosh\Big(\frac{A\sqrt{-mg}}{\hbar}\big(x-c_0t-x_0\big)\Big)\Big]^2}\,. \tag{45.170}$$

Nesse caso a intensidade luminosa $|u(x,\,t)|^2$ decai a zero para $x \to \pm\infty$ em cada instante t. Um esboço do gráfico dessa função para um dado instante é exibido na Figura, 45.9, página 2654, e, como se vê, descreve um pulso localizado de luz de amplitude A^2 que se propaga com velocidade c_0. Por essa razão a solução (45.169) é denominada *sóliton claro da equação de Schrödinger não-linear*.

O segundo sóliton que discutiremos é do tipo "escuro".

• **O sóliton "escuro" da equação de Schrödinger não-linear**

Para o caso $\alpha > 0$ (ou seja, $g > 0$) e $\beta < 0$, com a assumindo um valor específico não-nulo, encontramos a solução (45.168) para f. Retornando a (45.161) isso corresponde a soluções da forma

$$u(x,\,t) \;=\; \sqrt{\frac{|\beta|}{2\alpha}}\exp\big[i\big(\lambda x+\omega t\big)\big]\tanh\left(\sqrt{\frac{|\beta|}{2}}\big(x-c_0t-x_0\big)\right)\,,$$

com $c_0 := \frac{\hbar\lambda}{m}$, $\alpha := \frac{mg}{\hbar^2}$ e $\beta := \frac{2m}{\hbar}\omega + \lambda^2$.

Como a amplitude dessa onda é $A := \sqrt{\frac{|\beta|}{2\alpha}}$ e sua velocidade de fase é c_0, é conveniente escrevermos u em termos desses dois parâmetros (além de x_0 e dos parâmetros da equação de Schrödinger não-linear, g, m e $\hbar$). Após algumas contas elementares, obtemos

$$u(x,\,t) \;=\; A\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[mc_0x - \frac{1}{2}\left(gA^2+mc_0^2\right)t\right]\right\}\,\tanh\left(\frac{A\sqrt{mg}}{\hbar}\big(x-c_0t-x_0\big)\right)\,. \tag{45.171}$$

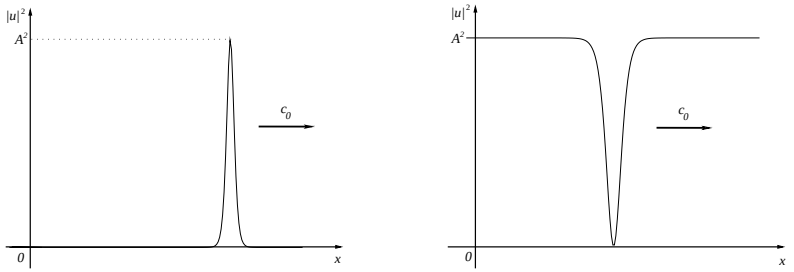

Figura 45.9: Do lado esquerdo, a intensidade $|u(x,\ t)|^2$ em um certo instante de tempo dada em (45.170) referente ao sóliton claro da equação de Schrödinger não-linear. Do lado direito, a intensidade $|u(x,\ t)|^2$ em um certo instante de tempo dada em (45.172) referente ao sóliton escuro da equação de Schrödinger não-linear. Em ambos os gráficos os mesmos valores da amplitude A foram utilizados. c_0 representa a velocidade de fase. Note-se que a função do gráfico do lado esquerdo converge a 0 para $x \to \pm\infty$, enquanto que a do lado direito converge a A^2.

(Recordar que $g > 0$ aqui). Essa solução é denominada *sóliton escuro da equação de Schrödinger não-linear*. A razão dessa nomenclatura tem a ver com o fato de que a equação de Schrödinger não-linear descreve a propagação de ondas eletromagnéticas em fibras ópticas, onde a quantidade $|u(x,\ t)|^2$ descreve a intensidade da radiação. Segundo (45.171),

$$|u(x,\ t)|^2 \ = \ A^2 \left[\tanh\left(\frac{A\sqrt{mg}}{\hbar}(x - c_0 t - x_0)\right)\right]^2 \ . \tag{45.172}$$

Um esboço do gráfico dessa função em um dado instante é exibido na Figura, 45.9, página 2654, e, como se vê, $|u(x,\ t)|^2$ converge a $A^2 \neq 0$ para $x \to \pm\infty$ em cada instante t, mas no ponto $x = x_0 + c_0 t$ essa intensidade é nula. Daí se chamar esse sóliton de escuro, pois corresponde à propagação estável com velocidade c_0 de uma mancha escura em uma fibra ótica inteiramente iluminada.

45.4.4 A Equação de Ondas e Transformadas de Fourier

Na presente seção mostraremos como podemos fazer uso da transformada de Fourier (cuja teoria é apresentada na Seção 39.2, página 2177) para encontrarmos a solução da equação de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u \ = \ 0 \tag{45.173}$$

para todos $x \equiv (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$ sob as condições iniciais

$$u(x,\ 0) \ = \ u_0(x) \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) \ = \ v_0(x) \ . \tag{45.174}$$

Acima, n representa o número de dimensões espaciais, $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$ são coordenadas Cartesianas e $\Delta \equiv \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_a^2}$. O problema descrito em (45.173)–(45.174) é um típico *problema de Cauchy* (vide Seção 18.4, página 1011) e as funções u_0 e v_0 são denominadas *dados de Cauchy* desse problema.

Por simplicidade e transparência, assumiremos no tratamento que faremos que as funções u_0 e v_0 que definem as condições iniciais em (45.174) são elementos do espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, introduzido na Seção 39.1, página 2163. Essa restrição simplifica bastante o desenvolvimento que faremos, mas é importante recordar que em problemas físicos estamos por vezes interessados em situações nas quais u_0 e v_0 não são elementos de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. No entanto, a solução que encontraremos ainda pode ser correta em tais casos, mas sua justificativa pode demandar um esforço maior, comprometendo a clareza da exposição.

Nossa estratégia para encontrar a solução de (45.173) sob as condições (45.174) seguirá os seguintes passos: **1.** Supondo que a solução u seja, para cada t, um elemento de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ enquanto função de x, usaremos a transformada de Fourier para resolvermos (45.173) sob as condições (45.174). **2.** Constataremos explicitamente que a expressão obtida realmente é solução de (45.173) sob as condições (45.174), justificando assim *a posteriori* a hipótese que fizemos de u ser um elemento de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ enquanto função de x. **3.** Evocamos um teorema de unicidade de solução para garantir que a solução que obtivemos é a única solução possível.

No que segue vamos por vezes denotar $u(x,\ t)$ por $u_t(x)$. A transformada de Fourier de $u(x,\ t)$ em relação às variáveis $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$ será denotada por $\widehat{u}(p,\ t)$ ou $\widehat{u_t}(p)$:

$$\widehat{u}(p,\ t) \ \equiv \ \mathcal{F}[u_t](p) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x,\ t)\, e^{-ip\cdot x}\, d^n x \ ,$$

com $p = (p_1,\ \ldots,\ p_n) \in \mathbb{R}^n$. Como supomos que para cada $t \in \mathbb{R}$ tenhamos $u_t \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, como função de x, segue que $\widehat{u_t} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ como função de p, para cada $t \in \mathbb{R}$ e, além disso, vale

$$u(x,\ t) \ = \ \mathcal{F}^{-1}[\widehat{u_t}](x) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(p,\ t)\, e^{ip\cdot x}\, d^n p \ . \tag{45.175}$$

Do fato que $\widehat{u_t} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ segue que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}(p,\ t)\, e^{ip\cdot x}\, d^n p \ = \ \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\partial^2 \widehat{u_t}}{\partial t^2}\right](x)$$

(para a troca de derivadas e integrais, confira Proposição 38.5, página 2097). Por (39.44), segue também que para cada $a = 1,\ \ldots,\ n$, vale

$$\frac{\partial u}{\partial x_a^2}(x,\ t) \ = \ \frac{\partial}{\partial x_a^2}\mathcal{F}^{-1}[\widehat{u_t}](x) \ = \ -\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^n} p_a^2 \widehat{u_t}(p)\, e^{ip\cdot x}\, d^n p$$

e, portanto,

$$\Delta u(x,\ t) \ = \ -\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \|p\|^2 \widehat{u}(p,\ t)\, e^{ip\cdot x}\, d^n p \ = \ \mathcal{F}^{-1}[\mathsf{v}_t](x) \ ,$$

onde $\|p\| = \sqrt{p_1^2 + \cdots + p_n^2}$ e onde $\mathsf{v}(p,\ t) \equiv \mathsf{v}_t(p) := -\|p\|^2 \widehat{u}(p,\ t)$. Note-se que para cada t vale $\mathsf{v}_t \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, pois $\widehat{u_t} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, (45.173) implica $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\partial^2 \widehat{u_t}}{\partial t^2} - c^2 \mathsf{v}_t\right] = 0$, o que implica $\frac{\partial^2 \widehat{u_t}}{\partial t^2} - c^2 \mathsf{v}_t = 0$, ou seja,

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}(p,\ t) + \big(c\|p\|\big)^2 \widehat{u}(p,\ t) \ = \ 0 \tag{45.176}$$

para todos $(p,\ t) \in \mathbb{R}^{d+1}$. A equação (45.176) é uma equação diferencial ordinária na variável t (equação do oscilador harmônico) de solução bem conhecida:

$$\widehat{u}(p,\ t) \ = \ A(p)\cos\big(c\|p\|t\big) + B(p)\,\mathrm{sen}\big(c\|p\|t\big) \ ,$$

onde A e B são funções de p que serão determinadas logo adiante pelas condições iniciais. Como $A(p) = \widehat{u}(p,\ 0)$ e $c\|p\|B(p) = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(p,\ 0)$, concluímos que as funções $p \mapsto A(p)$ e $p \mapsto \|p\|B(p)$ são elementos de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Assim, por (45.175), escrevemos

$$u(x,\ t) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(A(p)\cos\big(c\|p\|t\big) + B(p)\,\mathrm{sen}\big(c\|p\|t\big)\Big)\, e^{ip\cdot x}\, d^n p \tag{45.177}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(-c\|p\|A(p)\,\mathrm{sen}\big(c\|p\|t\big) + c\|p\|B(p)\cos\big(c\|p\|t\big)\Big)\, e^{ip\cdot x}\, d^n p \ , \tag{45.178}$$

relações essas que implicam, para $t = 0$,

$$u_0(x) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^n} A(p)\, e^{ip\cdot x}\, d^n p \ = \ \mathcal{F}^{-1}[A](x) \ ,$$

com $A \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e

$$v_0(x) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^n} c\|p\|B(p)\, e^{ip\cdot x}\, d^n p \ = \ \mathcal{F}^{-1}[C](x) \ ,$$

com $C(p) := c\|p\|B(p) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Assim, obtemos

$$A(p) \;=\; \mathcal{F}[u_0](p) \qquad \text{e} \qquad B(p) \;=\; \frac{1}{c\|p\|}\mathcal{F}[v_0](p)\;.$$

Com isso, (45.177) fica

$$u(x,\,t) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\mathcal{F}[u_0](p)\cos\big(c\|p\|t\big) + \mathcal{F}[v_0](p)\frac{\operatorname{sen}\big(c\|p\|t\big)}{c\|p\|}\right)e^{ip\cdot x}\,d^np\;. \tag{45.179}$$

• **Justificando a solução (45.179)**

A expressão (45.179) foi obtida sob a hipótese de a solução u do problema de Cauchy (45.173)–(45.174) (com u_0 e $v_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$) é um elemento de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ como função de x. Essa hipótese não foi previamente justificada, mas podemos justificá-la *a posteriori* estabelecendo por verificação direta que a função do lado direito de (45.179) é, de fato, uma solução do problema de Cauchy (45.173)–(45.174). Isso é o que faremos nas linhas que seguem.

Comecemos colocando três observações. A primeira é que as funções $\cos\big(c\|p\|t\big)$ e $\frac{\operatorname{sen}\big(c\|p\|t\big)}{c\|p\|}$ são ambas infinitamente diferenciáveis como funções de p. De fato, as expansões em série de Taylor das funções $\cos x$ e $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ são $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$ e $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}$, respectivamente e, como se vê, são expansões em série de potências em x^2 e convergentes para todo $x \in \mathbb{R}$. Daí, concluímos que $\cos\big(c\|p\|t\big)$ e $\frac{\operatorname{sen}\big(c\|p\|t\big)}{c\|p\|}$ podem ser expressas em termos de expansões em séries de potências de $p^2 = p_1^2 + \cdots + p_n^2$, o que faz de ambas funções infinitamente diferenciáveis de $(p_1,\,\ldots,\,p_n)$. A segunda observação é que as derivadas das funções $\cos\big(c\|p\|t\big)$ e $\frac{\operatorname{sen}\big(c\|p\|t\big)}{c\|p\|}$ são polinomialmente limitadas. No caso da função $\cos\big(c\|p\|t\big)$ isso é um tanto evidente (por quê?), mas no caso da função $\frac{\operatorname{sen}\big(c\|p\|t\big)}{c\|p\|}$ isso segue da observação que as derivadas da função $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ são compostas por combinações lineares finitas de monômios em $1/x$ multiplicados pela função $\operatorname{sen} x$ ou $\cos x$. A terceira observação é que as funções $\mathcal{F}[u_0](p)\cos\big(c\|p\|t\big)$ e $\mathcal{F}[v_0](p)\frac{\operatorname{sen}\big(c\|p\|t\big)}{c\|p\|}$ são elementos de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Isso decorre das duas observações anteriores e do fato que, por hipótese, $\mathcal{F}[u_0](p)$ e $\mathcal{F}[v_0](p)$ são elementos de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Conclui-se disso que o termo entre parênteses na integral em (45.179) é um elemento de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, o que faz dela uma integral bem-definida. Mais que isso, esse fato justifica diferenciar o lado direito sob o símbolo de integral (vide Proposição 38.5, página 2097) e obter

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\mathcal{F}[u_0](p)\cos\big(c\|p\|t\big) + \mathcal{F}[v_0](p)\frac{\operatorname{sen}\big(c\|p\|t\big)}{c\|p\|}\right)e^{ip\cdot x}\,d^np$$

$$=\; -c^2\int_{\mathbb{R}^n}\|p\|^2\left(\mathcal{F}[u_0](p)\cos\big(c\|p\|t\big) + \mathcal{F}[v_0](p)\frac{\operatorname{sen}\big(c\|p\|t\big)}{c\|p\|}\right)e^{ip\cdot x}\,d^np \tag{45.180}$$

e, analogamente,

$$c^2\Delta\int_{\mathbb{R}^n}\left(\mathcal{F}[u_0](p)\cos\big(c\|p\|t\big) + \mathcal{F}[v_0](p)\frac{\operatorname{sen}\big(c\|p\|t\big)}{c\|p\|}\right)e^{ip\cdot x}\,d^np$$

$$=\; -c^2\int_{\mathbb{R}^n}\|p\|^2\left(\mathcal{F}[u_0](p)\cos\big(c\|p\|t\big) + \mathcal{F}[v_0](p)\frac{\operatorname{sen}\big(c\|p\|t\big)}{c\|p\|}\right)e^{ip\cdot x}\,d^np\;. \tag{45.181}$$

A manifesta relação de igualdade entre o lado direito de (45.180) e o lado direito de (45.181) significa que o lado direito de (45.179) é, de fato, solução da equação diferencial (45.173). De forma totalmente análoga constata-se que a função do lado direito de (45.179) realmente satisfaz as condições iniciais (45.174) e, portanto, (45.179) é solução do problema de Cauchy (45.173)–(45.174) sob a hipótese que u_0 e v_0 são elementos de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

• **Dependência com os dados de Cauchy u_0 e v_0**

A relação (45.179) expressa u em termos das condições iniciais u_0 e v_0, mas a relação é um tanto indireta, pois em (45.179) ocorrem as transformadas de Fourier dessas funções. É de grande interesse tentarmos reescrever (45.179) de modo a expressarmos u diretamente em termos de u_0 e v_0, tal como, por exemplo, na solução dita de D'Alembert do caso $n = 1$, fornecida em (45.129), página 2639. Isso é possível, mas sua implementação depende fortemente, um tanto surpreendentemente, de se a dimensão espacial n é um número par ou um número ímpar.

* *** *

E. 45.16 *Exercício*. Reobtenha a solução de D'Alembert (45.129) para a equação de ondas em $1+1$ dimensões a partir da solução (45.179). ✣

45.4.4.1 A Equação de Ondas em $3+1$ Dimensões. A Solução de Kirchhoff

Vamos tratar de obter a solução da equação de ondas em $3+1$ dimensões (i.e., três dimensões espaciais e uma temporal) antes de obter a solução da equação de ondas em $2+1$ dimensões pois, curiosamente, como veremos, a solução da última pode ser mais facilmente obtida a partir da solução da primeira.

Para um melhor acompanhamento do que segue recomendamos ao leitor um estudo prévio da Seção 39.2.3.3, página 2207, pois dela usaremos definições, notações e resultados.

No caso $n = 3$, (45.179) fica

$$u(x,\,t) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}\big(\mathcal{F}[u_0](p)\cos\big(c\|p\|t\big)\big)\;e^{ip\cdot x}\,d^3p + \frac{t}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\mathcal{F}[v_0](p)\frac{\operatorname{sen}\big(\|p\|ct\big)}{\|p\|ct}\right)e^{ip\cdot x}\,d^3p$$

$$=\; \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\mathcal{F}[u_0](p)\frac{\operatorname{sen}\big(\|p\|ct\big)}{\|p\|c}\right)e^{ip\cdot x}\,d^3p\right] + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\mathcal{F}[v_0](p)\frac{\operatorname{sen}\big(\|p\|ct\big)}{\|p\|c}\right)e^{ip\cdot x}\,d^3p\;.$$

Observemos agora que, por (39.164), podemos para $n = 3$ escrever $\frac{\operatorname{sen}\big(\|p\|ct\big)}{\|p\|ct} = M[e_p](ct)$, com a média M definida em (39.161). Assim, se $y \in \mathbb{R}^3$ for um vetor com $\|y\| = ct$, teremos $\frac{\operatorname{sen}\big(\|p\|ct\big)}{\|p\|ct} = \int_{\mathbb{S}^2} e^{-ip\cdot y}d\Omega_y$. Com isso, $u(x,\,t)$ pode ser reescrita como

$$u(x,\,t) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\Big(t\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[u_0]M[e_p](ct)\big](x)\Big) + t\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[v_0]M[e_p](ct)\big](x)\;.$$

Evocando agora o Proposição 39.14, página 2212, concluímos que

$$u(x,\,t) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\Big(t\mathcal{K}[u_0](x,\,ct)\Big) + t\mathcal{K}[v_0](x,\,ct)\;, \tag{45.182}$$

onde, conforme definido na mesma Proposição 39.14, página 2212, $\mathcal{K}[v_0](x,\,ct)$ representa a média de v_0 na superfície da esfera de raio ct centrada em x. A expressão apresentada em (45.182) fornece a solução u em $3+1$ dimensões diretamente em termos das condições iniciais u_0 e v_0, como previamente prometemos. Sua interpretação será discutida logo adiante.

Para futura referência, resumimos nossos resultados na seguinte proposição:

Proposição 45.2 (Solução da equação de ondas em $3+1$-dimensões) *A solução da equação de ondas*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u \;=\; 0$$

em $3+1$ dimensões com as condições iniciais $u(x,\,0) = u_0(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,\,0) = v_0(x)$, com u_0 e v_0 sendo elementos de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, é dada para $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^3$ por

$$u(x,\,t) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\Big(t\mathcal{K}[u_0](x,\,ct)\Big) + t\mathcal{K}[v_0](x,\,ct)\;, \tag{45.183}$$

com $x = (x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbb{R}^3$*, onde, para* $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$*,*

$$\mathcal{K}[g](x,\ r)\ :=\ \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} g\big(x + rz(\theta,\ \varphi)\big)\ \mathrm{sen}\theta d\theta\, d\varphi\ ,$$

para $x \in \mathbb{R}^3$ *e* $r > 0$*, sendo* $z(\theta,\ \varphi) := \big(\mathrm{sen}\theta\cos\varphi,\ \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi,\ \cos\theta\big)$*.* $\mathcal{K}[g](x,\ r)$ *representa a média de* g *na superfície da esfera de raio* r *centrada em* x*.* □

A solução (45.183) do problema de Cauchy (45.173)–(45.174) (equação de ondas) em $3+1$ dimensões é denominada *solução de Kirchhoff*[42].

• **O princípio de Huygens em $3+1$ dimensões**

Um dos aspectos mais interessantes da solução obtida na Proposição 45.2, a qual fornece a solução da equação de ondas em três dimensões espaciais em termos dos dados de Cauchy (condições iniciais), está no fato de a mesma exibir que a solução no ponto $x \in \mathbb{R}^3$ no instante $t > 0$ depende apenas das condições iniciais u_0 e v_0 nos pontos $y \in \mathbb{R}^3$ situados exatamente a uma distância ct de x. Essa situação é ilustrada geometricamente na Figura 45.10, página 2660, e indica que no caso de ondas se propagando em $3+1$ dimensões a propagação de sinais se dá apenas dentro do cone de luz $\{y \in \mathbb{R}^3,\ \|y-x\| = ct\}$. É interessante comparar essa situação com o caso da propagação de ondas em $1+1$ dimensões, que discutimos anteriormente (página 2641). Lá vimos que a condição inicial u_0 propaga-se no cone de luz, o seja, em $\{y \in \mathbb{R},\ |y-x| = ct\}$, enquanto que a condição inicial v_0 propaga-se no interior do cone de luz, ou seja, em $\{y \in \mathbb{R},\ |y-x| \le ct\}$.

45.4.4.2 A Equação de Ondas em $2+1$ Dimensões

A solução geral da equação de ondas em $2+1$ dimensões pode ser obtida a partir da solução em $3+1$ dimensões fornecida em (45.182). A intuição por trás dessa afirmação é a seguinte. Se em $3+1$ dimensões tomarmos condições iniciais $u_0(x_1,\ x_2,\ x_3)$ e $v_0(x_1,\ x_2,\ x_3)$ que sejam independentes da coordenada x_3, não haverá propagação ao longo dessa direção e tudo se passa como se tratássemos de um problema em $2+1$ dimensões. O problema em implementar esse argumento reside no fato que uma função $u_0(x_1,\ x_2,\ x_3)$ que independe de x_3 não é uma função do espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ e, portanto, (45.182) não pode ser aplicada diretamente. O que se faz para remediar isso, porém, é algo bem simples. Consideramos no caso de $3+1$ dimensões condições iniciais $\tilde{u}_0$ e $\tilde{v}_0$ da forma $\tilde{u}_0(x_1,\ x_2,\ x_3) = u_0(x_1,\ x_2)f(x_3)$ e $\tilde{v}_0(x_1,\ x_2,\ x_3) = v_0(x_1,\ x_2)f(x_3)$, onde f é uma função de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ escolhida de forma que $f(x_3) = 1$ para todo x_3 no intervalo $[-cT,\ cT]$, para algum $T > 0$ é escolhido arbitrariamente. Para essas condições iniciais podemos aplicar (45.182) e teremos a solução

$$\tilde{u}(x,\ t)\ =\ \frac{\partial}{\partial t}\Big(t\mathcal{K}[\tilde{u}_0](x,\ ct)\Big) + t\mathcal{K}[\tilde{v}_0](x,\ ct)\ =\ \frac{\partial}{\partial t}\Big(t\mathcal{K}[u_0 f](x,\ ct)\Big) + t\mathcal{K}[v_0 f](x,\ ct)\ , \tag{45.184}$$

com $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)$.

Seja agora $|t| < T$. Afirmamos que para x_1 e x_2 fixos arbitrários a função $\tilde{u}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$ não varia na região $|x_3| < c(T-|t|)$. A argumentação é a seguinte. $\mathcal{K}[u_0 f]$ e $\mathcal{K}[v_0 f]$ representam a média das funções $u_0 f$ e $v_0 f$, respectivamente, na superfície da esfera de raio $c|t|$ centrada em $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)$. Se os pontos da superfície dessa esfera têm coordenadas $(x_1',\ x_2',\ x_3')$ temos $|x_3' - x_3| \le c|t|$. Logo, $|x_3'| < |x_3' - x_3| + |x_3| < c|t| + c(T-|t|) = cT$. Por definição, na região $|x_3'| < cT$ a função $f(x_3')$ é constante e igual a 1. Logo, na região em questão valem $\mathcal{K}[u_0 f] = \mathcal{K}[u_0]$ e $\mathcal{K}[v_0 f] = \mathcal{K}[v_0]$ e ambas não dependem de x_3 quando $|x_3| < c(T-|t|)$. Assim, para $|t| < T$ e $|x_3| < c(T-|t|)$ $\tilde{u}$ satisfaz

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_2^2}\right)\ =\ 0\ ,$$

ou seja, $\tilde{u}$ é uma solução da equação de ondas em duas dimensões para $|t| < T$ e $|x_3| < c(T-|t|)$, satisfazendo as condições iniciais dadas nessa região por $\tilde{u}_0(x_1,\ x_2,\ x_3) = u_0(x_1,\ x_2)$ e $\tilde{v}_0(x_1,\ x_2,\ x_3) = v_0(x_1,\ x_2)$.

Concluímos que a função $u(x_1,\ x_2)$ dada por

$$u(x_1,\ x_2,\ t)\ =\ \frac{\partial}{\partial t}\Big(t\mathcal{K}[u_0](x_1,\ x_2,\ 0,\ ct)\Big) + t\mathcal{K}[v_0](x_1,\ x_2,\ 0,\ ct)\ ,$$

[42] Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887).

é solução da equação de ondas em duas dimensões com as condições iniciais $u(x_1,\ x_2,\ 0) = u_0(x_1,\ x_2)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x_1,\ x_2,\ 0) = v_0(x_1,\ x_2)$.

Vamos agora expressar as médias $\mathcal{K}[u_0](x_1,\ x_2,\ 0,\ ct)$ e $\mathcal{K}[v_0](x_1,\ x_2,\ 0,\ ct)$ de forma mais adequada. Temos pela definição que

$$\mathcal{K}[u_0](x_1,\ x_2,\ 0,\ ct)\ =\ \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} u_0\big(x_1 + ct\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi,\ x_2 + ct\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi\big)\ \mathrm{sen}\theta d\theta d\varphi\ .$$

A integral em θ no lado direito pode ser re-expressa da seguinte forma. Primeiro quebramos a região de integração nas regiões $0 < \theta \le \pi/2$ e $\pi/2 < \theta < \pi$. Em seguida, fazemos em cada uma a mudança de variável $u = \mathrm{sen}\theta$. Obtemos,

$$\int_0^{\pi} u_0\big(x_1 + ct\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi,\ x_2 + ct\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi\big)\ \mathrm{sen}\theta d\theta\ =\ 2\int_0^1 u_0\big(x_1 + ctu\cos\varphi,\ x_2 + ctu\,\mathrm{sen}\varphi\big)\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du$$

(verifique!) e, com isso,

$$\mathcal{K}[u_0](x_1,\ x_2,\ 0,\ ct)\ =\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 u_0\big(x_1 + ctu\cos\varphi,\ x_2 + ctu\,\mathrm{sen}\varphi\big)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\ udu\,d\varphi\ .$$

Definindo $y = (y_1,\ y_2) = \big(u\,\mathrm{sen}\varphi,\ u\cos\varphi\big)$, podemos reescrever a última expressão como

$$\mathcal{K}[u_0](x,\ 0,\ ct)\ =\ \frac{1}{2\pi}\int_{\|y\|\le 1} u_0\big(x + cty\big)\frac{1}{\sqrt{1-\|y\|^2}}\ d^2y\ ,$$

com $x = (x_1,\ x_2)$. Definindo, para uma função $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\mathcal{R}[g](x,\ r)\ :=\ \frac{1}{2\pi}\int_{\|z\|\le r} g\big(x+z\big)\frac{1}{\sqrt{r^2-\|z\|^2}}\ d^2z\ ,$$

com $x = (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, temos que

$$\mathcal{K}[u_0](x,\ 0,\ ct)\ =\ \mathcal{R}[u_0](x,\ ct)\ ,$$

com $x = (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $t > 0$. Note-se que $\mathcal{R}[g](x,\ r)$ representa uma média da função g no disco centrado em $x \in \mathbb{R}^2$ de raio r, média essa tomada com um peso $\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2-\|z\|^2}}$.

Para futura referência, resumimos nossos resultados na seguinte proposição:

Proposição 45.3 (Solução da equação de ondas em $2+1$-dimensões) *A solução da equação de ondas*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u\ =\ 0$$

em $2+1$ *dimensões com as condições iniciais* $u(x,\ 0) = u_0(x)$ *e* $\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = v_0(x)$*, com* u_0 *e* v_0 *sendo elementos de* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$*, é dada para* $t > 0$ *e* $x \in \mathbb{R}^2$ *por*

$$u(x,\ t)\ =\ \frac{\partial}{\partial t}\Big(t\mathcal{R}[u_0](x,\ ct)\Big) + t\mathcal{R}[v_0](x,\ ct)\ , \tag{45.185}$$

onde, para $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$*,*

$$\mathcal{R}[g](x,\ r)\ :=\ \frac{1}{2\pi}\int_{\|z\|\le r} g\big(x+z\big)\frac{1}{\sqrt{r^2-\|z\|^2}}\ d^2z\ .$$

para $x \in \mathbb{R}^2$ *e* $r > 0$*.* □

• **O princípio de Huygens em $2+1$ dimensões**

A expressão que define $\mathcal{R}$, acima, mostra que $u(x,\ t)$ depende dos valores de u_0 e v_0 em todos os pontos do disco centrado em x e de raio ct. A Figura 45.10, página 2660, ilustra essa situação. Esse fato deve ser contrastado com a solução (45.183) do caso $3+1$-dimensional, onde se vê que a solução $u(x,\ t)$ da equação de ondas depende dos valores das condições iniciais apenas nos pontos da superfície esférica centrada em x e de raio ct e não dos pontos do interior dessa esfera.

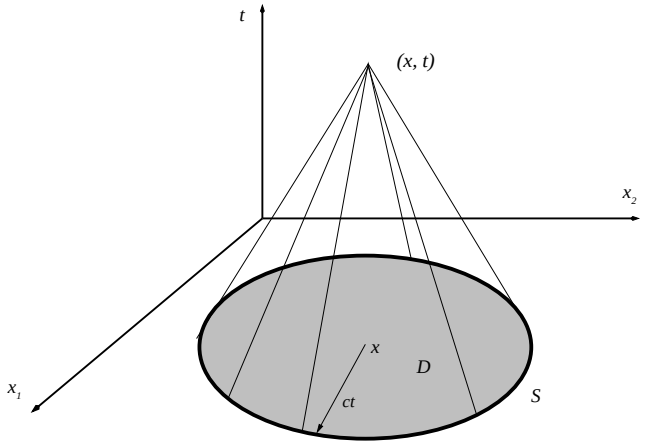

Figura 45.10: Ilustração do princípio de Huygens em $2+1$ dimensões. D representa o disco de raio ct centrado em $x \in \mathbb{R}^2$ situado no plano $t = 0$. A figura indica o ponto $(x,\ t)$ e o cone de luz passado com vértice em $(x,\ t)$. O valor de u em $(x,\ t)$ é determinado apenas pelos valores de u_0 e v_0 em D. No caso de $3+1$ dimensões, $u(x,\ t)$ depende apenas dos valores de u_0 e v_0 na borda de D, representada aqui pelo círculo S (em $3+1$ dimensões S é, em verdade, a superfície da esfera de raio ct centrada em x).

45.5 O Problema da Corda Vibrante

Se considerarmos o problema de determinar o movimento transversal, no regime de pequenas oscilações, de uma corda de comprimento L, de densidade linear de massa $\rho(x)$, com $0 \le x \le L$, submetida a uma tensão longitudinal $\tau(x)$, chegaremos à equação diferencial

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\tau(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \;=\; 0\,, \tag{45.186}$$

onde $u(x,\ t)$ representa o deslocamento transversal, no instante de tempo t, do ponto x da corda. A expressão acima é consequência, essencialmente, da segunda lei de Newton e sua dedução pode ser acompanhada na Seção 45.1.2, página 2611. Vide, por exemplo, equação (45.22).

O estudo das soluções de (45.186) é um clássico problema de Mecânica dos Meios Deformáveis e da Teoria das Equações Diferenciais, tendo suas origens nos trabalhos pioneiros de Euler[43] e Daniel Bernoulli[44] na primeira metade do século XVIII. O método de separação de variáveis, o método de expansão em modos normais, e outras ideias que tiveram sua aplicação estendida a outros campos, originaram-se daqueles estudos.

45.5.1 Corda Vibrante Homogênea

O caso mais simples da equação (45.186) é aquele no qual $\rho(x) \equiv \rho_0$ e $\tau(x) \equiv \tau_0$ são constantes, em cujo caso (45.186) assume a forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; 0\,, \qquad c \;=\; \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}}\,. \tag{45.187}$$

[43] Leonhard Euler (1707–1783).
[44] Daniel Bernoulli (1700–1782).

Uma corda com $\rho(x) \equiv \rho_0$ constante é dita ser uma *corda homogênea*.

Na situação em que a corda encontra-se presa em suas extremidades localizadas em $x = 0$ e $x = L$, as condições de contorno a serem impostas são $u(0,\ t) = 0$ para todo t e $u(L,\ t) = 0$ para todo t. Tipicamente considera-se também condições iniciais que fixam a posição e velocidade transversais da corda em $t = 0$: $u(x,\ 0) = u_0(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = v_0(x)$, sendo u_0 e v_0 duas funções dadas, dotadas de propriedades convenientes.

Para encontrar as soluções de (45.187) satisfazendo as condições iniciais e de contorno mencionadas acima, procede-se pelo método de separação de variáveis, procurando primeiramente soluções particulares que sejam da forma $u(x,\ t) = T(t)U(x)$. Inserindo em (45.187), obtém-se

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \;=\; \frac{U''(x)}{U(x)}\,.$$

Essa igualdade só é possível se ambos os lados forem iguais a uma constante de separação, que denotamos por $-\lambda^2$. Chegamos com isso a

$$\ddot{T}(t) + \lambda^2 c^2 T(t) \;=\; 0\,, \tag{45.188}$$

$$U''(x) + \lambda^2 U(x) \;=\; 0\,. \tag{45.189}$$

As soluções da primeira equação, naturalmente, são

$$T(t) \;=\; a_0 t + b_0\,, \qquad \text{caso } \lambda = 0\,, \tag{45.190}$$

$$T(t) \;=\; a_1\cos(\lambda c t) + b_1\,\mathrm{sen}(\lambda c t)\,, \qquad \text{caso } \lambda \neq 0\,. \tag{45.191}$$

Para $\lambda = 0$ a equação (45.189) reduz-se a $U''(x) = 0$, cuja solução é $U(x) = c_1 x + c_2$. Como desejamos que $U(0) = U(L) = 0$, de modo que $u(x,\ t) = T(t)U(x)$ satisfaça as condições de contorno, obtém-se $c_1 = c_2 = 0$, ou seja, obtém-se a solução trivial $U(x) \equiv 0$, o que corresponde a uma corda eternamente parada. O caso interessante, portanto, está em $\lambda \neq 0$.

No caso $\lambda \neq 0$, as soluções de (45.189) são, como é bem conhecido,

$$U(x) \;=\; \beta_1\cos(\lambda x) + \beta_2\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,.$$

A imposição que $U(0) = 0$ implica $\beta_1 = 0$, levando a $U(x) = \beta_2\,\mathrm{sen}(\lambda x)$. A imposição que $U(L) = 0$ implica $\lambda L = n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$ (tomar $\beta_2 = 0$ conduz novamente à solução trivial $U(x) \equiv 0$) e, assim, $U(x) = U_n(x) = \beta_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. Em verdade, podemos nos restringir a n's positivos não-nulos, i.e., $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, pois para $n = 0$ tem-se $U_0(x) \equiv 0$ (solução trivial) e $U_{-n}(x) = U_n(x)$, mostrando que as soluções com $U_n(x)$ e $U_{-n}(x)$ não são independentes.

Resumindo, para cada $n = 1,\ 2,\ ,3,\ \ldots$ temos $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ e $U_n(x) = \beta_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Para tais valores de λ a solução (45.191) fica $a_1\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_1\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$, e as soluções particulares para $u(x,\ t) = T(t)U(x)$ ficam

$$u_n(x,\ t) \;=\; \Big[a_n\cos(\omega_n t) + b_n\,\mathrm{sen}\,(\omega_n t)\Big]\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,,$$

$n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, onde

$$\omega_n \;:=\; \frac{n\pi c}{L} \;=\; n\omega_1\,, \qquad \text{com} \qquad \omega_1 \;=\; \frac{\pi c}{L} \tag{45.192}$$

(acima, absorvemos a constante β_2 dentro das constantes a_n e b_n, as quais ainda estão indeterminadas e podem depender de n).

Chegamos até aqui com o método de separação de variáveis. Evocando o princípio de sobreposição, obtemos uma solução mais geral de (45.187) somando as soluções acima:

$$u(x,\ t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\cos(\omega_n t) + b_n\,\mathrm{sen}\,(\omega_n t)\Big]\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,, \tag{45.193}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\Big[-a_n\omega_n\,\mathrm{sen}\,(\omega_n t) + b_n\omega_n\cos(\omega_n t)\Big]\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,. \tag{45.194}$$

A imposição das condições iniciais $u(x,\ 0) = u_0(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = v_0(x)$, que fixam posição e velocidade da corda em $t = 0$, conduz a

$$u_0(x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \ , \tag{45.195}$$

$$v_0(x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \ . \tag{45.196}$$

Em (45.195) e (45.196) as funções u_0 e v_0 são expressas em termos de séries de Fourier de senos e a justificativa para a validade dessa expansão, sobre hipóteses adequadas para as funções u_0 e v_0, é apresentada na Proposição 38.12, página 2135. A teoria geral das séries de Fourier encontra-se desenvolvida na Seção 38.4, página 2119. Para invertermos essas relações, expressando as constantes a_n em termos de u_0 e as constantes b_n em termos de v_0, fazemos uso das bem-conhecidas relações de ortogonalidade da função seno:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(my)\operatorname{sen}(ny)\,dy \ = \ \frac{\pi}{2}\,\delta_{m,\,n} \ , \qquad m,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \ . \tag{45.197}$$

Assim, multiplicando (45.195) por $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e integrando de 0 a L, obtemos

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) u_0(x)\,dx \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx$$

$$\stackrel{y=\pi x/L}{=} \ \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(my)\operatorname{sen}(ny)\,dy \ = \ \frac{L}{2}a_m \ ,$$

ou seja,

$$a_n \ = \ \frac{2}{L}\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) u_0(x')\,dx' \tag{45.198}$$

para todo $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. De forma totalmente análoga, obtém-se de (45.196)

$$b_n \ = \ \frac{2}{\omega_n L}\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) v_0(x')\,dx' \ = \ \frac{2}{n\pi c}\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) v_0(x')\,dx' \tag{45.199}$$

para todo $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

• **A teoria do som e sua percepção, de Pitágoras a Helmholtz**

Há um comentário relevante a se fazer sobre as frequências dos modos de oscilação apresentados em (45.192), página 2661. Como se vê naquela equação, as frequências dos modos de vibração são todas um múltiplo inteiro de uma mesma frequência, dita fundamental, ω_1. Isso faz do movimento da corda vibrante homogênea um movimento periódico, quaisquer que sejam as condições iniciais. É um fato empírico da Fisiologia da audição que sons harmônicos, ou seja, cujas várias frequências sejam um múltiplo racional umas das outras, sejam considerados agradáveis (uma observação que remonta à escola de Pitágoras[45]), enquanto que sons desprovidos dessa característica harmônica soem "duros" ou desagradáveis. Como veremos, isso é o que ocorre na membrana retangular homogênea e na membrana circular homogênea. Compare-se, por exemplo, os sons produzidos por um instrumento de corda (como um violino, um violão, um violoncelo, um piano, um cravo etc.) com o som produzido por um instrumento de percussão (como um tambor ou um tímpano).

Um dos pioneiros no estudo da Acústica e da Fisiologia da Música e sua base física foi Helmholtz[46], que organizou seus achados no livro [236], um dos grandes clássicos da Ciência, que foi, e ainda é, uma grande influência nessa área de pesquisa.

[45] Pitágoras de Samos (ci. 569 A.C. – ci. 475 A.C.).

[46] Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894).

• **A função de Green para as condições iniciais**

Usando (45.198)-(45.199) podemos reescrever (45.193) como

$$u(x,\ t) \ = \ \frac{\partial}{\partial t}\int_0^L G(x,\ t,\ x')u_0(x')\,dx' + \int_0^L G(x,\ t,\ x')v_0(x')\,dx' \ , \tag{45.200}$$

onde, formalmente,

$$G(x,\ t,\ x') \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi c}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) . \tag{45.201}$$

Comparar com (45.130)–(45.131). Essa expressão é denominada *função de Green* do problema de valor inicial em questão. As duas últimas expressões são formais e devem ser entendidas no sentido de distribuições[47]. Vide Capítulo 39, página 2162. A importância de (45.200) está em expressar a solução diretamente em termos das condições iniciais u_0 e v_0. A função G contém em si a informação de como os valores das condições iniciais no ponto x' influenciam a solução no ponto x no instante t.

45.5.2 O Problema da Corda Homogênea Pendurada

Nosso propósito aqui é o de aplicar a equação (45.186) para determinar o movimento de uma corda, ou barbante, homogênea (ou seja, de densidade constante) e de comprimento L que esteja pendurada por uma das suas extremidades em um campo gravitacional constante (por exemplo, o da superfície da Terra), a outra extremidade sendo mantida livre. Cada ponto da corda estará sujeito a uma tensão igual ao peso do trecho de corda abaixo de si. Segundo [590] (seção 1.2 daquela referência), esse problema foi inicialmente estudado por D. Bernoulli[48] em 1738.

Para fixar ideias, vamos denotar por z a coordenada vertical e supor que a corda, quando parada, localize-se no intervalo $0 \le z \le L$, estando presa no ponto $z = L$, apenas. A função $u(z,\ t)$ representará o deslocamento horizontal da corda, digamos, no plano xz[49], do ponto z no instante de tempo t. O ponto da corda situada à altura z sustenta o peso do trecho de corda situado abaixo de si, ou seja, entre 0 e z. Como a corda é homogênea, esse peso é $\rho g z$, onde g é a aceleração da gravidade. Assim, para a tensão $\tau(z)$ tem-se $\tau(z) = \rho g z$ e o problema que queremos resolver é o de determinar a solução da equação diferencial $\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho g z \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$, ou seja,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right) \ = \ 0 \ , \tag{45.202}$$

para $0 \le z \le L$, submetida à condição de contorno $u(L,\ t) = 0$ para todo t e a certas condições iniciais $u(z,\ 0) = u_0(z)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(z,\ 0) = v_0(z)$ que fixam posição e velocidade transversal de cada ponto da corda em $t = 0$.

Uma dedução geral da equação (45.202) é apresentada na Seção 45.1.2, página 2611 (vide particularmente a equação (45.34)).

Observemos que no presente problema, apesar de o extremo inferior da corda (o ponto $z = 0$) estar livre, não devemos impor a condição de contorno $\frac{\partial u}{\partial z}(0,\ t) = 0$ para todo t. Esse ponto foi discutido à página 2616 e decorre do fato de que a tensão longitudinal sobre a corda também anula-se em $z = 0$, o que torna a condição $\frac{\partial u}{\partial z}(0,\ t) = 0$ inválida. Como ficará claro ao encontrarmos a solução geral do problema, há sim uma condição a ser satisfeita em $z = 0$, a saber, a que $u(0,\ t)$ seja finita.

Comecemos seguindo o método de separação de variáveis e procuremos soluções particulares na forma de um produto $u(z,\ t) = T(t)U(z)$. Inserindo isso em (45.202), obtemos facilmente

$$\frac{1}{g}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \ = \ \frac{(zU'(z))'}{U(z)} \ .$$

Essa igualdade só é possível se ambos os lados forem iguais a uma constante de separação, que denotamos por $-\lambda^2$.

[47] Note-se, por exemplo, que a série de funções no lado direito de (45.201) não é uniformemente convergente, ao contrário do que ocorre, por exemplo, com a função de Green de (45.68). A convergência da série em (45.201) se dá no sentido de distribuições.

[48] Daniel Bernoulli (1700–1782).

[49] Movimentos no plano yz podem ser tratados também mas, por simplicidade, consideramos apenas esse caso mais simples.

Chegamos com isso a

$$\ddot{T}(t) + g\lambda^2 T(t) \;=\; 0\,, \tag{45.203}$$

$$zU''(z) + U'(z) + \lambda^2 U(z) \;=\; 0\,. \tag{45.204}$$

As soluções da primeira equação, naturalmente, são

$$T(t) \;=\; a_0 t + b_0\,, \qquad \text{caso } \lambda = 0\,,$$

$$T(t) \;=\; a_1 \cos(\lambda\sqrt{g}t) + b_1 \operatorname{sen}(\lambda\sqrt{g}t)\,, \qquad \text{caso } \lambda \neq 0\,.$$

Para $\lambda = 0$ a equação (45.204) reduz-se a $zU''(z) + U'(z) = 0$, cuja solução é $U(z) = c_1 \ln(z) + c_2$. Como desejamos que $U(0)$ seja finita (o deslocamento da corda não pode divergir em nenhum ponto), devemos impor $c_1 = 0$ e, portanto, $U(z) = c_2$. Porém, como $u(L,\, t) = 0$ para todo t, devemos impor $U(L) = 0$. Assim, $c_2 = 0$ também e obtemos apenas a solução trivial $U(z) = 0$, o que corresponde a uma corda eternamente parada. O caso interessante, portanto, está em $\lambda \neq 0$.

A equação (45.204) para $\lambda \neq 0$ pode ser transformada em uma equação conhecida por meio da mudança de variáveis

$$\zeta \;=\; \sqrt{4\lambda^2 z}\,, \qquad U(z) \;=\; y(\zeta) \;= y\left(\sqrt{4\lambda^2 z}\right),$$

com a qual obtemos

$$\zeta^2 y''(\zeta) + \zeta y'(\zeta) + \zeta^2 y(\zeta) \;=\; 0\,.$$

E. 45.17 *Exercício.* Mostre isso! ✣

Essa equação, como se constata, é a equação de Bessel de ordem zero: $\nu = 0$. Assim, suas soluções são

$$y(\zeta) \;=\; \beta_1 J_0(\zeta) + \beta_2 N_0(\zeta)\,,$$

J_0 sendo a função de Bessel de ordem 0 e N_0 sendo a função de Neumann de ordem 0. Isso significa, então, que

$$U(z) \;=\; \beta_1 J_0(2\lambda\sqrt{z}) + \beta_2 N_0(2\lambda\sqrt{z})\,.$$

A solução acima tem por particularidade que se $\beta_2 \neq 0$ o termo $N_0(2\lambda\sqrt{z})$ diverge em $z = 0$. Esse comportamento não é aceitável, obviamente, de modo que devemos impor[50] $\beta_2 = 0$.

Chegamos dessa forma à solução $U(z) = J_0(2\lambda\sqrt{z})$ (adotando aqui $\beta_1 = 1$), para a qual devemos impor a condição de contorno $u(L,\, t) = 0$, ou seja, $U(L) = 0$. Isso implica que $2\lambda\sqrt{L}$ deve ser um dos zeros α_k^0, $k \in \mathbb{N}$, da função de Bessel J_0 em $\mathbb{R}_+$. Assim, concluímos que

$$\lambda \;=\; \frac{\alpha_k^0}{2\sqrt{L}}\,,$$

e dessa forma, para $0 \leq z \leq L$,

$$U_k(z) \;=\; J_0\left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right), \quad k \;=\; 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \ldots\,,$$

representam soluções de (45.204) que satisfazem as condições de contorno requeridas. Tem-se, então, que

$$u_k(z,\, t) \;=\; \left[a_k \cos(\omega_k t) + b_k \operatorname{sen}(\omega_k t)\right] J_0\left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right), \quad k \;=\; 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \ldots\,,$$

com

$$\omega_k \;:=\; \frac{\alpha_k^0}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}\,,$$

[50] Podemos interpretar a condição de finitude da solução em $z = 0$ como uma outra condição de contorno a ser imposta, juntamente à condição $u(L,\, t) = 0$, para o outro extremo da corda.

são soluções particulares da equação de ondas (45.202) que satisfazem as condições de contorno requeridas. Acima, a_k e b_k são constantes a serem determinadas. Cada função $\cos(\omega_k t + \delta_0)\, J_0\left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right)$, $k = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \ldots$, representa um *modo de vibração* da corda pendurada.

A solução geral da equação de ondas (45.202) que satisfaz as condições de contorno requeridas é dada por

$$u(z,\, t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(\omega_k t) + b_k \operatorname{sen}(\omega_k t)\right] J_0\left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right), \tag{45.205}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(z,\, t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \left[-a_k \omega_k \operatorname{sen}(\omega_k t) + b_k \omega_k \cos(\omega_k t)\right] J_0\left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right).$$

Assim, a imposição das condições iniciais $u(z,\, 0) = u_0(z)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(z,\, 0) = v_0(z)$, que fixam posição e velocidade da corda em $t = 0$, conduz a

$$u_0(z) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, J_0\left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right), \tag{45.206}$$

$$v_0(z) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, \omega_k\, J_0\left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right). \tag{45.207}$$

Para determinarmos as constantes a_k em termos de u_0 e as constantes b_k em termos de v_0 faremos uso das relações de ortogonalidade (16.217), página 959, para as funções de Bessel J_0:

$$\int_0^1 J_0\big(\alpha_k^0 x\big)\, J_0\big(\alpha_l^0 x\big)\, x\, dx \;=\; \delta_{k,\,l}\, \frac{\big(J_1(\alpha_k^0)\big)^2}{2}\,. \tag{45.208}$$

Multiplicando ambos os lados de (45.206)-(45.207) por $J_0\left(\alpha_l^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right)$ e integrando-se em z entre 0 e L, obtém-se

$$\int_0^L J_0\left(\alpha_l^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right) u_0(z)\, dz \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^L J_0\left(\alpha_l^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right) J_0\left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right) dz\,,$$

$$\int_0^L J_0\left(\alpha_l^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right) v_0(z)\, dz \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{L}} \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, \alpha_k^0 \int_0^L J_0\left(\alpha_l^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right) J_0\left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right) dz\,.$$

Agora,

$$\int_0^L J_0\left(\alpha_l^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right) J_0\left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right) dz \;\overset{x=\sqrt{\frac{z}{L}}}{=}\; 2L \int_0^1 J_0\big(\alpha_k^0 x\big)\, J_0\big(\alpha_l^0 x\big)\, x\, dx \;\overset{(45.208)}{=}\; L\, \big(J_1(\alpha_k^0)\big)^2\, \delta_{k,\,l}\,.$$

Assim, concluímos que

$$a_l \;=\; \frac{1}{L\,(J_1(\alpha_k^0))^2} \int_0^L J_0\left(\alpha_l^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right) u_0(z)\, dz\,, \tag{45.209}$$

$$b_l \;=\; \frac{2}{\alpha_l^0 \sqrt{gL}\,(J_1(\alpha_l^0))^2} \int_0^L J_0\left(\alpha_l^0 \sqrt{\frac{z}{L}}\right) v_0(z)\, dz\,, \tag{45.210}$$

para todos $l \in \mathbb{N}$.

A solução obtida acima satisfaz as condições de contorno e as condições iniciais propostas. A Proposição 18.9, página 1058, garante que a solução assim obtida é a única solução do problema, o que *a posteriori*, justifica todo o nosso proceder. Note o leitor que as condições de contorno do problema tratado acima correspondem às condições de contorno do tipo **IV** da Proposição 18.9, pois a corda está fixa em $z = L$ e a tensão anula-se em $z = 0$. Com isso, o problema de determinar o

movimento da corda pendurada a partir de condições iniciais como acima está completamente resolvido. Esse problema foi um dos primeiros nos quais surgiram funções de Bessel como solução. Ele foi tratado pela primeira vez em 1732 por D. Bernoulli[51].

• **A função de Green para as condições iniciais**

Usando (45.209)-(45.210) podemos reescrever (45.205) como

$$u(z,\,t) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\int_0^L G(z,\,t,\,z')u_0(z')\,dz' + \int_0^L G(z,\,t,\,z')v_0(z')\,dz'\,, \tag{45.211}$$

onde

$$G(z,\,t,\,z') \;:=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_0\left(\alpha_k^0\sqrt{\frac{z}{L}}\right)\,J_0\left(\alpha_k^0\sqrt{\frac{z'}{L}}\right)}{\alpha_k^0\sqrt{gL}\left(J_1(\alpha_k^0)\right)^2}\;\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_k^0}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right)\,,$$

é a *função de Green* do problema de valor inicial em questão. Comparar com (45.130)–(45.131). As duas últimas expressões são formais e devem ser entendidas no sentido de distribuições. Vide Capítulo 39, página 2162. A importância de (45.211) está em expressar a solução diretamente em termos das condições iniciais u_0 e v_0. A função G contém em si a informação de como os valores das condições iniciais no ponto z' influenciam a solução no ponto z no instante de tempo t.

45.5.3 Corda Vibrante Não-Homogênea

Vamos agora aplicar a equação (45.186) para determinar o movimento de uma corda não-homogênea (ou seja, cuja densidade depende da posição) e de comprimento L que esteja fixa em suas extremidades, supondo também que a tensão τ seja constante ($\tau(x) \equiv \tau_0$). Sob essas hipóteses (45.186) assume a forma

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \tau_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; 0\,. \tag{45.212}$$

Para encontrar as soluções de (45.212) satisfazendo as condições iniciais e de contorno, procederemos novamente pelo método de separação de variáveis, procurando primeiramente soluções particulares que sejam da forma $u(x,\,t) = T(t)U(x)$. Inserindo em (45.187), obtém-se

$$\frac{1}{\tau_0}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \;=\; \frac{1}{\rho(x)}\frac{U''(x)}{U(x)}\,.$$

Essa igualdade só é possível se ambos os lados forem iguais a uma constante de separação, que denotamos por $-\lambda^2$. Chegamos com isso a

$$\ddot{T}(t) + \lambda^2\tau_0 T(t) \;=\; 0\,, \tag{45.213}$$

$$U''(x) + \lambda^2\rho(x)U(x) \;=\; 0\,. \tag{45.214}$$

As soluções da primeira equação, naturalmente, são

$$T(t) \;=\; a_0 t + b_0\,, \qquad \text{caso } \lambda = 0\,, \tag{45.215}$$

$$T(t) \;=\; a_1\cos(\lambda\sqrt{\tau_0}\,t) + b_1\operatorname{sen}(\lambda\sqrt{\tau_0}\,t)\,, \qquad \text{caso } \lambda \neq 0\,. \tag{45.216}$$

Para $\lambda = 0$ a equação (45.214) reduz-se a $U''(x) = 0$, cuja solução é $U(x) = c_1 x + c_2$. Como desejamos que $U(0) = U(L) = 0$, de modo que $u(x,\,t) = T(t)U(x)$ satisfaça as condições de contorno, obtém-se $c_1 = c_2 = 0$, ou seja, obtém-se a solução trivial $U(x) \equiv 0$, o que corresponde a uma corda eternamente parada. Novamente, o caso interessante, portanto, está em $\lambda \neq 0$.

[51] Daniel Bernoulli (1700–1782). Em verdade, de acordo com os comentários históricos de [244], D. Bernoulli não incluiu a dependência temporal na sua solução nem aplicou o princípio de sobreposição para somar os vários modos de vibração. Como comentamos à página 719, ainda que conhecido anteriormente, o princípio de sobreposição para a resolução de equações diferenciais lineares homogêneas só se tornou de uso corrente sob a influência de Helmholtz, no século XIX.

A resolução de (45.214) depende, obviamente, da função $\rho(x)$. No que segue suporemos que essa função é da forma $\rho(x) = \rho_0 + \eta x$, onde ρ_0 e η são constantes. Essa é uma primeira correção (linear) ao caso de ρ constante, que tratamos acima.

A equação (45.214) torna-se, portanto,

$$U''(x) + \lambda^2(\rho_0 + \eta x)U(x) \;=\; 0\,. \tag{45.217}$$

Com a mudança de variáveis $\xi = \rho_0 + \eta x$, $U(x) = V(\xi) = V(\rho_0 + \eta x)$, essa equação assume a forma

$$V''(\xi) + \mu^2\xi V(\xi) \;=\; 0\,,$$

onde $\mu = \lambda/\eta$. Trata-se de uma equação de Airy, cujas soluções podem ser escritas em termos de funções de Bessel $J_{\pm 1/3}$ (vide página 879):

$$V(\xi) \;=\; A\sqrt{\xi}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\mu^2\xi^3}\right) + B\sqrt{\xi}J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\mu^2\xi^3}\right)\,,$$

A e B sendo constantes. Assim,

$$U(x) \;=\; \sqrt{(\rho_0+\eta x)}\left[AJ_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\mu^2(\rho_0+\eta x)^3}\right) + BJ_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\mu^2(\rho_0+\eta x)^3}\right)\right]\,. \tag{45.218}$$

O caso mais simples é aquele no qual $\rho_0 = 0$ com $\eta > 0$. Ficamos com

$$U(x) \;=\; A\sqrt{x}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\lambda\sqrt{\eta x^3}\right) + B\sqrt{x}J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\lambda\sqrt{\eta x^3}\right)\,.$$

A e B sendo constantes. Pela expressão (15.125), página 878, que define as funções de Bessel, a função $\sqrt{x}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$ anula-se em $x = 0$, enquanto que a função $\sqrt{x}J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$ assume em $x = 0$ um valor não-nulo. Assim, a imposição da condição de contorno $U(x) = 0$ implica $B = 0$ e, portanto,

$$U(x) \;=\; A\sqrt{x}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\lambda\sqrt{\eta x^3}\right)\,.$$

A imposição da condição de contorno $U(L) = 0$ implica $\frac{2}{3}\lambda\sqrt{\eta L^3} = \alpha_k^{(1/3)}$, onde $\alpha_k^{(1/3)}$ é o k-ésimo zero de $J_{1/3}$ em $\mathbb{R}_+$. Assim,

$$\lambda \;\equiv\; \lambda_k \;:=\; \frac{3\alpha_k^{(1/3)}}{2\sqrt{\eta L^3}}$$

e

$$U(x) \;\equiv\; U_k(x) \;=\; A_k\,\sqrt{\frac{x}{L}}\,J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\lambda_k\sqrt{\eta x^3}\right) \;=\; A_k\,\sqrt{\frac{x}{L}}\,J_{1/3}\left(\alpha_k^{(1/3)}\sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^3}\right)\,,$$

ambas válidas para todo $k = 1,\,2,\,3,\,\ldots$, A_k sendo constantes.

Obtemos para $u(x,\,t)$ a solução geral expressa em termos de uma série de modos normais:

$$\begin{aligned} u(x,\,t) \;&=\; \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(\lambda_k\sqrt{\tau_0}\,t) + b_k\operatorname{sen}(\lambda_k\sqrt{\tau_0}\,t)\right)\sqrt{\frac{x}{L}}\,J_{1/3}\left(\alpha_k^{(1/3)}\sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^3}\right) \\ &=\; \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\omega_k\,t\right) + b_k\operatorname{sen}\left(\omega_k\,t\right)\right)\sqrt{\frac{x}{L}}\,J_{1/3}\left(\alpha_k^{(1/3)}\sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^3}\right)\,, \end{aligned}$$

sendo

$$\omega_k \;:=\; \frac{3}{2}\alpha_k^{(1/3)}\sqrt{\frac{\tau_0}{\eta L^3}}\,.$$

Naturalmente, segue disso que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)\ =\ \sum_{k=1}^{\infty}\Big(-\omega_k a_k\,\mathrm{sen}\,(\omega_k\,t)+\omega_k b_k\cos(\omega_k\,t)\Big)\sqrt{\frac{x}{L}}\,J_{1/3}\left(\alpha_k^{(1/3)}\sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^3}\right)\,. \tag{45.219}$$

Dessa forma, impondo condições iniciais $u(x,\ 0)=u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=v_0(x)$, tem-se

$$u_0(x)\ =\ \sum_{k=1}^{\infty}a_k\sqrt{\frac{x}{L}}\,J_{1/3}\left(\alpha_k^{(1/3)}\sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^3}\right)\,,$$

$$v_0(x)\ =\ \sum_{k=1}^{\infty}\omega_k b_k\sqrt{\frac{x}{L}}\,J_{1/3}\left(\alpha_k^{(1/3)}\sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^3}\right)\,.$$

Multiplicando a primeira das expressões acima por $\left(\frac{x}{L}\right)^{3/2}J_{1/3}\left(\alpha_l^{(1/3)}\sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^3}\right)$ e integrando de 0 a L, obtemos

$$\int_0^L u_0(x)\left(\frac{x}{L}\right)^{3/2}J_{1/3}\left(\alpha_l^{(1/3)}\sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^3}\right)\,dx$$

$$=\quad\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_0^L\left(\frac{x}{L}\right)^2J_{1/3}\left(\alpha_k^{(1/3)}\sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^3}\right)\,J_{1/3}\left(\alpha_l^{(1/3)}\sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^3}\right)\,dx$$

$$\overset{y=x/L}{=}\quad\sum_{k=1}^{\infty}a_k L\int_0^1 y^2\,J_{1/3}\left(\alpha_k^{(1/3)}\sqrt{y^3}\right)\,J_{1/3}\left(\alpha_l^{(1/3)}\sqrt{y^3}\right)\,dy$$

$$\overset{u=y^{3/2}}{=}\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2a_kL}{3}\int_0^1 u\,J_{1/3}\left(\alpha_k^{(1/3)}u\right)\,J_{1/3}\left(\alpha_l^{(1/3)}u\right)\,du$$

$$\overset{(16.217)}{=}\quad\frac{a_lL}{3}\left(J_{2/3}\left(\alpha_l^{(1/3)}\right)\right)^2\ =\ \frac{a_lL}{3}\left(J'_{1/3}\left(\alpha_l^{(1/3)}\right)\right)^2\,.$$

Disso, obtemos

$$a_l\ =\ \frac{3}{L\left(J_{2/3}\left(\alpha_l^{(1/3)}\right)\right)^2}\int_0^L u_0(x')\left(\frac{x'}{L}\right)^{3/2}J_{1/3}\left(\alpha_l^{(1/3)}\sqrt{\left(\frac{x'}{L}\right)^3}\right)\,dx'$$

e, analogamente,

$$b_l\ =\ \frac{3}{\omega_l L\left(J_{2/3}\left(\alpha_l^{(1/3)}\right)\right)^2}\int_0^L v_0(x')\left(\frac{x'}{L}\right)^{3/2}J_{1/3}\left(\alpha_l^{(1/3)}\sqrt{\left(\frac{x'}{L}\right)^3}\right)\,dx'$$

para todo $l=1,\,2,\,3,\,\ldots$.

• **A função de Green para as condições iniciais**

Reunindo os resultados acima, podemos escrever

$$u(x,\ t)\ =\ \frac{\partial}{\partial t}\int_0^L G(x,\ t,\ x')\,u_0(x')\,x'\,dx'+\int_0^L G(x,\ t,\ x')\,v_0(x')\,x'\,dx'\,, \tag{45.220}$$

com

$$G(x,\ t,\ x')\ :=\ 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\frac{x}{L}}\,J_{1/3}\left(\alpha_k^{(1/3)}\sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^3}\right)\sqrt{\frac{x'}{L}}\,J_{1/3}\left(\alpha_k^{(1/3)}\sqrt{\left(\frac{x'}{L}\right)^3}\right)}{\omega_k L^2\left(J_{2/3}\left(\alpha_k^{(1/3)}\right)\right)^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}\alpha_k^{(1/3)}\sqrt{\frac{\tau_0}{\eta L^3}}\,t\right)\,,$$

sendo a *função de Green* do problema de valor inicial em questão. Comparar com (45.130)–(45.131). As duas últimas expressões são formais e devem ser entendidas no sentido de distribuições. Vide Capítulo 39, página 2162. A importância de (45.220) está em expressar a solução diretamente em termos das condições iniciais u_0 e v_0. A função G contem em si a informação de como os valores das condições iniciais no ponto x' influenciam a solução no ponto x no instante de tempo t.

Nota. Há duas razões para usarmos a medida de integração $x'dx'$ em (45.220) e não apenas a medida dx'. Primeiro, obtém-se dessa forma uma funções G simétrica pela troca $x\leftrightarrow x'$ (como se vê explicitamente na expressão para G, acima). Segundo, como temos $\rho_0=0$, (45.214) é da forma $U''(x)+\eta\lambda^2xU(x)=0$ e estamos, portanto, lidando com um problema de Sturm-Liouville com $r(x)=x$ (para a teoria de Sturm-Liouville, vide Capítulo 19, página 1067). Ora, em problemas de Sturm-Liouville a medida natural de integração é $r(x')dx'$, para a qual valem as relações de ortogonalidade das autofunções, daí ser natural a escolha que fizemos. ♣

*

E. 45.18 *Exercício*. Retornando a (45.218) considere agora o caso $\rho_0\neq 0$, $\eta\neq 0$, e, segundo os passos acima, obtenha a solução do problema em termos de condições iniciais e as funções de Green. Para determinar as relações de ortogonalidade siga as ideias da demonstração do Teorema 16.8, página 962. Isso poderá ser trabalhoso. ✣

45.6 O Problema da Membrana Retangular Homogênea

Vamos aqui abordar o problema de determinar o movimento vibratório, a partir de condições iniciais, de uma membrana, ou tambor, retangular, plana, de lados L_1 e L_2, homogênea, cujas bordas são fixas. Esse problema é, como veremos, uma simples generalização do problema da corda vibrante tratado na Seção 45.5.1, página 2660. Matematicamente, o problema consiste em determinar as soluções da equação de ondas dentro do retângulo mencionado no plano bidimensional, ou seja, da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ y,\ t)-c^2\Delta u(x,\ y,\ t)\ =\ 0\,, \tag{45.221}$$

com $c>0$, sendo $(x,\ y)$ restrito ao retângulo $\{(x,\ y),\ 0\le x\le L_1,\ 0\le y\le L_2\}$. As condições iniciais são $u(x,\ y,\ 0)=u_0(x,\ y)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ y,\ 0)=v_0(x,\ y)$ para certas funções $u_0(x,\ y)$ e $v_0(x,\ y)$ convenientes e fixam a posição e velocidade, respectivamente, de cada ponto da membrana no instante $t=0$. Como a membrana deve estar fixa nas bordas, devemos também impor as condições de contorno de Dirichlet: $u(x,\ 0)=u(x,\ L_2)=0$ para todo $0\le x\le L_1$ e $u(0,\ y)=u(L_1,\ y)=0$ para todo $0\le y\le L_2$. Escrevendo o operador o Laplaciano em coordenadas Cartesianas como $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ a equação de ondas (45.221) fica

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ y,\ t)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ y,\ t)-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,\ y,\ t)\ =\ 0\,. \tag{45.222}$$

Aplicando o método de separação de variáveis, procuramos soluções dessa equação na forma $u(x,\ y,\ t)=X(x)Y(y)T(t)$. Inserindo isso na equação (45.222) e dividindo pelo produto $X(x)Y(y)T(t)$, obtemos

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}-\frac{X''(x)}{X(x)}-\frac{Y''(y)}{Y(y)}\ =\ 0\,.$$

Cada termo do lado esquerdo depende de uma variável distinta. Para que essa equação seja válida é preciso que cada termo seja igual a uma constante e que a soma dessas constantes se anule. Temos, então, as equações $\frac{X''(x)}{X(x)}=-\alpha^2$, $\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\beta^2$ e $\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}=-(\alpha^2+\beta^2)$, ou seja

$$X''(x)+\alpha^2X(x)\ =\ 0 \tag{45.223}$$

$$Y''(y)+\beta^2Y(y)\ =\ 0 \tag{45.224}$$

$$\ddot{T}(t)+c^2(\alpha^2+\beta^2)T(t)\ =\ 0 \tag{45.225}$$

A única solução de (45.223) que anula-se em $x = 0$ e $x = L_1$ ocorre para $\alpha = n\pi/L_1$ com n inteiro positivo não-nulo e é dada por $X(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L_1)$. Analogamente, a única solução de (45.224) que anula-se em $y = 0$ e $y = L_2$ ocorre para $\beta = m\pi/L_m$ com m inteiro positivo não-nulo e é dada por $Y(y) = \operatorname{sen}(m\pi y/L_2)$. As soluções para (45.225) são, portanto

$$T(t) \;=\; A_{mn}\cos(\omega_{mn}t) + B_{mn}\operatorname{sen}(\omega_{mn}t)\;,$$

com

$$\omega_{mn} \;=\; c\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2}\;, \tag{45.226}$$

para $m,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. A solução assim obtida para (45.222) é

$$u_{mn}(x,\ y,\ t) \;=\; \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)\left[A_{mn}\cos(\omega_{mn}t) + B_{mn}\operatorname{sen}(\omega_{mn}t)\right]$$

para todos $m,\ n$ como acima. Assim, a solução geral obtida aplicando o princípio de sobreposição é

$$u(x,\ y,\ t) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)\left[A_{mn}\cos(\omega_{mn}t) + B_{mn}\operatorname{sen}(\omega_{mn}t)\right].$$

Impondo as condições iniciais $u(x,\ y,\ 0) = u_0(x,\ y)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ y,\ 0) = v_0(x,\ y)$, tem-se

$$u_0(x,\ y) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)\;, \tag{45.227}$$

$$v_0(x,\ y) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{mn}B_{mn}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)\;. \tag{45.228}$$

Aplicamos agora as as bem-conhecidas relações de ortogonalidade da função seno (45.197), página 2662, multiplicando a expressão (45.227) por $\operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi x}{L_1}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m'\pi y}{L_2}\right)$ em integrando na variável x no intervalo $[0,\ L_1]$ e na variável y no intervalo $[0,\ L_2]$ para obter

$$\begin{aligned}
&\int_0^{L_2}\int_0^{L_1} u_0(x,\ y)\operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi x}{L_1}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m'\pi y}{L_2}\right)dxdy \\
&\quad= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\int_0^{L_1}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi x}{L_1}\right)dx\right)\left(\int_0^{L_2}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m'\pi y}{L_2}\right)dy\right) \\
&\quad\overset{\substack{x\to L_1 x/\pi\\ y\to L_2 y/\pi}}{=} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_1L_2A_{mn}}{\pi^2}\left(\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(n'x)\,dx\right)\left(\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(my)\operatorname{sen}(m'y)\,dy\right) \\
&\quad\overset{(45.197)}{=} \frac{L_1L_2}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\delta_{m,m'}\delta_{n,n'} \;=\; \frac{L_1L_2}{4}A_{m'n'}\;.
\end{aligned}$$

Procedendo analogamente para v_0, obtemos

$$A_{mn} \;=\; \frac{4}{L_1L_2}\int_0^{L_2}\int_0^{L_1}u_0(x,\ y)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)dxdy\;,$$

$$B_{mn} \;=\; \frac{4}{L_1L_2\omega_{mn}}\int_0^{L_2}\int_0^{L_1}v_0(x,\ y)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)dxdy\;.$$

Essas expressões determinam completamente os coeficientes A_{mn} e B_{mn} em temos das condições iniciais. A solução assim obtida satisfaz, então, as condições de contorno e iniciais. A Proposição 18.9, página 1058, garante que a solução assim obtida é a única solução do problema proposto (as condições de contorno que tratamos são do tipo de Dirichlet) o que, *a posteriori*, justifica todo o nosso proceder.

▷▷▷▷▷▷▷▷▷▷▷▷▷▷▷▷▷▷▷▷▷▷▷▷▷

As frequências dos modos de vibração dados em (45.226) não têm caráter harmônico, ou seja, não são múltiplos inteiros de uma frequência fundamental, como é no caso da corda vibrante homogênea (vide (45.192), página 2661). Assim, como comentamos à página 2662, os sons produzidos por uma membrana quadrada não soam de forma agradável aos nossos ouvidos.

45.7 O Problema da Membrana Circular Homogênea

Com o que obtivemos na Seção 45.2, página 2617, sobre a equação de Helmholtz em duas dimensões em coordenadas polares podemos abordar o problema de determinar o movimento vibratório, a partir de condições iniciais, de uma membrana, ou tambor, circular, plana, de raio R, homogênea, cujas bordas são fixas. Matematicamente, isso consiste em determinar as soluções da equação de ondas dentro de um disco de raio $R > 0$ no plano bidimensional, ou seja, da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x},\ t) - c^2\Delta u(\vec{x},\ t) \;=\; 0\;, \tag{45.229}$$

com $c > 0$, sendo $\vec{x}$ restrito à região $\|\vec{x}\| \le R$, com condições de contorno $u(\vec{x},\ t) = 0$ para todo t e para todo $\vec{x}$ satisfazendo $\|\vec{x}\| = R$ e com certas condições iniciais $u(\vec{x},\ 0) = u_0(\vec{x})$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},\ 0) = v_0(\vec{x})$ para certas funções $u_0(\vec{x})$ e $v_0(\vec{x})$ convenientes.

Pelo que apresentamos na Seção 45.2.1, página 2619, soluções particulares da equação de Helmholtz correspondente em coordenadas polares são (por simplicidade escolhemos a solução na forma complexa) da forma

$$\Big(a_mJ_m(\lambda\rho) + b_mN_m(\lambda\rho)\Big)e^{im\varphi}\;,$$

onde a_m e b_m são constantes[52]. Como esperamos que a solução não apresente divergências em $\rho = 0$, devemos ter $b_m = 0$. A condição de contorno que impõe que a solução deve anular-se em $\rho = R$ conduz a $J_m(\lambda R) = 0$, ou seja, $\lambda = \alpha_k^m/R$, onde α_k^m é o k-ésimo zero da função de Bessel $J_m(x)$ para $x > 0$. Isso fixa os valores da constante de separação λ. Para cada k a solução da equação temporal (45.37) fica

$$T(t) \;=\; \alpha_1\cos\left(\frac{\alpha_k^m c}{R}t\right) + \alpha_2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_k^m c}{R}t\right)\;.$$

Assim, uma solução particular da equação de ondas satisfazendo as condições de contorno é

$$\left[a_{k,\,m}\cos\left(\frac{\alpha_k^m ct}{R}\right) + b_{k,\,m}\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_k^m ct}{R}\right)\right]J_m\left(\frac{\alpha_k^m\rho}{R}\right)e^{im\varphi}\;,$$

$a_{k,\,m}$ e $b_{k,\,m}$ sendo constantes. Cada uma dessas funções, para $k \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$, representa um *modo de vibração* da membrana circular de raio R.

Pelo princípio de sobreposição (ou seja, pela linearidade e homogeneidade da equação (45.229) e das condições de contorno consideradas), a solução geral u da equação de ondas satisfazendo as condições de contorno e sua derivada temporal $\frac{\partial u}{\partial t}$ são dadas por

$$u(\rho,\ \varphi,\ t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[a_{k,\,m}\cos\left(\frac{\alpha_k^m ct}{R}\right) + b_{k,\,m}\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_k^m ct}{R}\right)\right]J_m\left(\frac{\alpha_k^m\rho}{R}\right)e^{im\varphi}\;, \tag{45.230}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\rho,\ \varphi,\ t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[-\frac{a_{k,\,m}\alpha_k^m c}{R}\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_k^m ct}{R}\right) + \frac{b_{k,\,m}\alpha_k^m c}{R}\cos\left(\frac{\alpha_k^m ct}{R}\right)\right]J_m\left(\frac{\alpha_k^m\rho}{R}\right)e^{im\varphi}\;.$$

[52] Caso $\lambda = 0$, a única solução da equação de Laplace que é não-singular em $\rho = 0$ e anula-se em $\rho = R$ é a solução identicamente nula. Vide solução da equação de Laplace em duas dimensões dada acima.

As constantes $a_{k,\,m}$ e $b_{k,\,m}$ devem ser determinadas pelas condições iniciais. É aqui que entram as relações de ortogonalidade das funções de Bessel e das funções $e^{im\varphi}$.

As condições iniciais impõem (tomando $t = 0$ nas duas equações acima) que

$$u_0(\rho,\,\varphi) \;=\; \sum_{k'=1}^{\infty}\sum_{m'=-\infty}^{\infty} a_{k',\,m'}\,J_{m'}\left(\frac{\alpha_{k'}^{m'}\rho}{R}\right)e^{im'\varphi}\,,$$

$$v_0(\rho,\,\varphi) \;=\; \sum_{k'=1}^{\infty}\sum_{m'=-\infty}^{\infty} \frac{b_{k',\,m'}\alpha_{k'}^{m'}c}{R}\,J_{m'}\left(\frac{\alpha_{k'}^{m'}\rho}{R}\right)e^{im'\varphi}\,.$$

Multiplicando ambos os lados de ambas as expressões por $e^{-im\varphi}$ e tomando-se a integral em φ no intervalo $-\pi \le \varphi \le \pi$, obtemos com o uso de $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-m')\varphi}d\varphi = 2\pi\delta_{m,\,m'}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_0(\rho,\,\varphi)e^{-im\varphi}d\varphi \;=\; 2\pi\sum_{k'=1}^{\infty} a_{k',\,m}\,J_m\left(\frac{\alpha_{k'}^{m}\rho}{R}\right)\,,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} v_0(\rho,\,\varphi)e^{-im\varphi}d\varphi \;=\; 2\pi\sum_{k'=1}^{\infty} \frac{b_{k',\,m}\,\alpha_{k'}^{m}c}{R}\,J_m\left(\frac{\alpha_{k'}^{m}\rho}{R}\right)\,.$$

Multiplicando ambos os lados de ambas as expressões por $J_m\left(\frac{\alpha_k^m\rho}{R}\right)\frac{\rho}{R}$ e integrando-se as expressões resultantes para ρ entre 0 e R, obtemos

$$\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} u_0(\rho,\,\varphi)e^{-im\varphi}J_m\left(\frac{\alpha_k^m\rho}{R}\right)\frac{\rho}{R}d\rho d\varphi \;=\; 2\pi\sum_{k'=1}^{\infty} a_{k',\,m}\int_0^R J_m\left(\frac{\alpha_k^m\rho}{R}\right)J_m\left(\frac{\alpha_{k'}^m\rho}{R}\right)\frac{\rho}{R}d\rho\,,$$

$$\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} v_0(\rho,\,\varphi)e^{-im\varphi}J_m\left(\frac{\alpha_k^m\rho}{R}\right)\frac{\rho}{R}d\rho d\varphi \;=\; 2\pi\sum_{k'=1}^{\infty} \frac{b_{k',\,m}\,\alpha_{k'}^{m}c}{R}\int_0^R J_m\left(\frac{\alpha_k^m\rho}{R}\right)J_m\left(\frac{\alpha_{k'}^m\rho}{R}\right)\frac{\rho}{R}d\rho\,.$$

Temos, porém, com a óbvia mudança de variáveis $x = \frac{\rho}{R}$,

$$\int_0^R J_m\left(\frac{\alpha_k^m\rho}{R}\right)J_m\left(\frac{\alpha_{k'}^m\rho}{R}\right)\frac{\rho}{R}d\rho \;=\; R\int_0^1 J_m\left(\alpha_k^m x\right)J_m\left(\alpha_{k'}^m x\right)\,x dx \;\overset{(16.217)}{=}\; \delta_{k,\,k'}\,R\frac{\left(J_{m+1}(\alpha_k^m)\right)^2}{2}$$

e, portanto,

$$a_{k,\,m} \;=\; \frac{1}{\pi\left(J_{m+1}(\alpha_k^m)\right)^2R^2}\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} u_0(\rho,\,\varphi)e^{-im\varphi}J_m\left(\frac{\alpha_k^m\rho}{R}\right)\,\rho d\rho d\varphi\,, \tag{45.231}$$

$$b_{k,\,m} \;=\; \frac{1}{\pi\alpha_k^m c\left(J_{m+1}(\alpha_k^m)\right)^2R}\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} v_0(\rho,\,\varphi)e^{-im\varphi}J_m\left(\frac{\alpha_k^m\rho}{R}\right)\,\rho d\rho d\varphi\,. \tag{45.232}$$

Essas expressões determinam completamente os coeficientes $a_{k,\,m}$ e $b_{k,\,m}$ para todos k e m em temos das condições iniciais. A solução assim obtida satisfaz, então, as condições de contorno e iniciais. A Proposição 18.9, página 1058, garante que a solução assim obtida é a única solução do problema proposto (as condições de contorno que tratamos são do tipo de Dirichlet) o que, *a posteriori*, justifica todo o nosso proceder.

Vemos em (45.230) que as frequências de oscilação dos modos de vibração da membrana circular homogênea são dadas por $\omega_{m,k} = \frac{\alpha_k^m c}{R}$ e, como no caso da membrana retangular homogênea (vide (45.226)), não têm caráter harmônico, ou seja, não são múltiplos inteiros de uma frequência fundamental (pois os zeros das funções de Bessel não possuem essa propriedade), como é no caso da corda vibrante homogênea (vide (45.192), página 2661). Assim, como comentamos à página 2662, os sons produzidos por uma membrana circular, como um tambor ou um tímpano, também não soam de forma agradável aos nossos ouvidos.

• **A função de Green para as condições iniciais**

Assim como no problema da corda pendurada, podemos expressar a solução diretamente em termos das condições iniciais com o uso de uma *função de Green*. Usando (45.231)-(45.232), podemos reescrever (45.230) como

$$u(\rho,\,\varphi,\,t) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} G(\rho,\,\varphi,\,t,\,\rho',\,\varphi')\,u_0(\rho',\,\varphi')\,\rho' d\rho' d\varphi' + \int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} G(\rho,\,\varphi,\,t,\,\rho',\,\varphi')\,v_0(\rho',\,\varphi')\,\rho' d\rho' d\varphi'\,, \tag{45.233}$$

onde

$$G(\rho,\,\varphi,\,t,\,\rho',\,\varphi') \;:=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m\left(\frac{\alpha_k^m\rho}{R}\right)J_m\left(\frac{\alpha_k^m\rho'}{R}\right)e^{im(\varphi-\varphi')}}{\pi\alpha_k^m c\Big(J_{m+1}(\alpha_k^m)\Big)^2R}\;\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_k^m ct}{R}\right)\,.$$

Essa é a *função de Green* para do problema de valor inicial em questão. Comparar com (45.130)–(45.131). Novamente comentamos que as duas últimas expressões são formais e devem ser entendidas no sentido de distribuições. Vide Capítulo 39, página 2162. Tal como nos problemas anteriores, a importância de (45.233) está em expressar a solução diretamente em termos das condições iniciais u_0 e v_0. A função G contem em si a informação de como os valores das condições iniciais no ponto $(\rho',\,\varphi')$ influenciam a solução no ponto $(\rho,\,\varphi)$ no instante de tempo t.

45.8 O Oscilador Harmônico na Mecânica Quântica e a Equação de Hermite

A equação de Schrödinger[53] independente do tempo para o oscilador harmônico unidimensional é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{k}{2}x^2\,\psi(x) \;=\; E\psi(x)\,, \tag{45.234}$$

onde E é um autovalor do operador de Hamilton[54], $\hbar$ é a constante de Planck[55], m a massa da partícula e k a constante de Hooke[56]. Definindo

$$\omega_0 \;:=\; \sqrt{\frac{k}{m}}\,,\qquad \alpha \;:=\; \left(\frac{\hbar^2}{mk}\right)^{1/4} \;=\; \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\,,\qquad \lambda \;:=\; \frac{2E}{\hbar\omega_0} - 1\,,\qquad z \;:=\; \frac{x}{\alpha},\qquad v(z) \;:=\; \psi(x) \;=\; v(x/\alpha)\,, \tag{45.235}$$

a equação (45.234) fica

$$v''(z) + (\lambda + 1 - z^2)v(z) \;=\; 0\,.$$

A experiência mostra que para melhor tratarmos dessa equação devemos definir uma nova função $u(z) := e^{z^2/2}v(z)$, ou seja, escrevemos $v(z) = e^{-z^2/2}u(z)$, obtendo para u a equação diferencial

$$u''(z) - 2zu'(z) + \lambda u(z) \;=\; 0\,, \tag{45.236}$$

a qual reconhecemos ser a *equação de Hermite*, cuja solução foi desenvolvida na Seção 15.1.3, página 847. Como discutimos na referida 15.1.3 e no Apêndice 15.C, página 898, essa equação só possui soluções que crescem mais lentamente que $e^{+z^2/2}$ para $|z| \to \infty$ se $\lambda = 2n$, sendo n um inteiro não-negativo. A condição que u cresça mais lentamente que $e^{+z^2/2}$ para $|z| \to \infty$ é necessária para que $v(z)$ e, portanto, $\psi(x)$, seja de quadrado integrável, uma condição fundamental para a Mecânica Quântica.

No caso em que $\lambda = 2n$, sendo n um inteiro não-negativo, a solução para (45.236) é $u(z) = H_n(z)$, sendo H_n o n-ésimo polinômio de Hermite. Propriedades desses polinômios, como relações de ortogonalidade, fórmulas de recorrência etc., são desenvolvidas na Seção 16.2.3, página 932. Se $\lambda = 2n$, então, por (45.235), o valor de E é dado por

$$E_n \;:=\; \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)\,, \tag{45.237}$$

[53] Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887–1961).
[54] Sir William Rowan Hamilton (1805–1865).
[55] Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947).
[56] Robert Hooke (1635–1703).

para $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots$. Essa equação expressa a quantização da energia do oscilador harmônico unidimensional na Mecânica Quântica. Ainda para $\lambda = 2n$, sendo n um inteiro não-negativo, a solução $\psi_n(x)$ da equação de Schrödinger (45.234) será

$$\psi_n(x) \ = \ c_n\, H_n(z) e^{-z^2/2} \ = \ c_n\, H_n\left(\frac{x}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) \ ,$$

c_n sendo uma constante de normalização a ser fixada. Na Mecânica Quântica adota-se a normalização $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = 1$. Isso implica,

$$1 \ = \ |c_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(H_n\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)^2 \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\, dx \ = \ \alpha |c_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(H_n\left(z\right)\right)^2 \exp\left(-z^2\right)\, dz \ \stackrel{(16.105)}{=} \ \alpha |c_n|^2 2^n n! \sqrt{\pi} \ ,$$

de onde se extrai, escolhendo-se c_n real e positivo, que $c_n = \sqrt{\frac{1}{\alpha 2^n n! \sqrt{\pi}}}$ e, portanto,

$$\psi_n(x) \ = \ \sqrt{\frac{1}{\alpha 2^n n! \sqrt{\pi}}}\ H_n\left(\frac{x}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) \tag{45.238}$$

são os autoestados normalizados de energia E_n para $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots$. Com o uso de (16.105), é trivial verificar ainda que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_n(x)} \psi_m(x)\, dx \ = \ \delta_{n,\,m} \ ,$$

a bem-conhecida relação de ortogonalidade das autofunções ψ_n.

É de se notar ainda que temos de (45.238) que

$$\psi_n(x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} h_n\left(\frac{x}{\alpha}\right) \ , \tag{45.239}$$

onde h_n são as chamadas *funções de Hermite*, introduzidas na Seção 16.2.3.1, página 935.

E. 45.19 *Exercício*. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left|\psi_n(x)\right|^2 dx \ = \ \frac{1}{\alpha 2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left(H_n\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)^2 \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\, dx \ = \ \alpha^2 \left(n + \frac{1}{2}\right) \ ,$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$, α sendo uma constante positiva. Na Mecânica Quântica a expressão do lado esquerdo, acima, representa o valor médio do quadrado do operador de posição, ou seja, de x^2, no autoestado normalizado ψ_n do operador Hamiltoniano do oscilador harmônico.

Sugestão. Use as relações de recorrência (16.111), página 935, e as relações de ortogonalidade (16.105), página 933, das funções H_n. ✣

• **O propagador do oscilador harmônico unidimensional**

A expressão formal

$$P(x,\ y;\ t) \ \coloneqq \ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iE_n t/\hbar}\, \psi_n(x)\, \psi_n(y) \tag{45.240}$$

para $x,\ y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, representa o chamado *propagador do oscilador harmônico unidimensional*[57]. Com o mesmo, podemos expressar a evolução temporal de qualquer estado puro ψ do oscilador harmônico simples unidimensional na foma

$$\psi(x,\ t) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} P(x,\ y;\ t)\, \psi(y,\ 0)\, dy \ . \tag{45.241}$$

[57] Na chamada "notação de Dirac" tem-se $P(x,\ y;\ t) = \langle x | e^{-iHt/\hbar} | y \rangle$. Matematicamente a expressão (45.240) é justificável em termos do Teorema Espectral ou em termos de distribuições.

Usando-se (45.239), (45.237), (45.235) e a identidade (16.128), da página 938, obtém-se

$$\begin{aligned} P(x,\ y;\ t) \ &= \ \frac{e^{-i\omega_0 t/2}}{\alpha\sqrt{\pi\left(1 - e^{-2i\omega_0 t}\right)}} \exp\left(-\frac{\left(1 + e^{-2i\omega_0 t}\right)\left(x^2 + y^2\right) - 4xy e^{-i\omega_0 t}}{2\alpha^2\left(1 - e^{-2i\omega_0 t}\right)}\right) \\ &= \ \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\pi i\hbar\,\mathrm{sen}\left(\omega_0 t\right)}} \exp\left(i\,\frac{m\omega_0}{\hbar}\,\frac{\cos\left(\omega_0 t\right)\left(x^2 + y^2\right) - 2xy}{2\,\mathrm{sen}\left(\omega_0 t\right)}\right) \ . \end{aligned} \tag{45.242}$$

E. 45.20 *Exercício*. Verifique! Sugestão: adote $z = e^{-i\omega_0 t}$ em (16.128) e multiplique-a ainda por $e^{-i\omega_0 t/2}$. A expressão (16.128) foi obtida sob a hipótese que $|z| < 1$. Por isso, a relação (45.242) deve ser entendida no sentido de distribuições. ✣

E. 45.21 *Exercício*. Seja ψ um estado Gaussiano normalizado dado em $t = 0$ por

$$\psi(x,\ 0) \ = \ \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \ \exp\left(-\frac{m\omega_0}{\hbar}\frac{\left(x - x_0\right)^2}{2}\right)$$

para o qual temos a distribuição de probabilidades

$$\left|\psi(x,\ 0)\right|^2 \ = \ \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \ \exp\left(-\frac{m\omega_0}{\hbar}\left(x - x_0\right)^2\right) \tag{45.243}$$

(uma Gaussiana centrada em x_0). Obtenha

$$\psi(x,\ t) \ = \ \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \ e^{-i\omega_0 t/2} \exp\left[-\frac{m\omega_0}{2\hbar}\left(x^2 - 2e^{-i\omega_0 t} x x_0 + \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega_0 t} x_0^2\right)\right] \ , \tag{45.244}$$

para o que tem-se

$$\left|\psi(x,\ t)\right|^2 \ = \ \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \ \exp\left(-\frac{m\omega_0}{\hbar}\left(x - x_0\cos(\omega_0 t)\right)^2\right) \tag{45.245}$$

(para cada t, trata-se de uma Gaussiana centrada em $x_0\cos(\omega_0 t)$). Compare com (45.243).

Sugestão: Para obter (45.244), use (45.241) e a fórmula explícita (45.242). Para as integrais de Gaussianas, use (39.75), página 2189. Boa sorte! ✣

45.9 O Átomo de Hidrogênio e a Equação de Laguerre Associada

A equação de Schrödinger independente do tempo que descreve uma partícula de massa m_0, em três dimensões, sob um potencial de Coulomb[58] atrativo $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$, é

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi - \frac{\alpha}{r}\psi \ = \ E\psi \ .$$

Expressando o operador Laplaciano em coordenadas esféricas, como em (45.44), essa equação fica

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left(\mathrm{sen}\theta\right)\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\left(\mathrm{sen}\theta\right)^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right] + \frac{2m_0}{\hbar^2}\left(\frac{\alpha}{r} + E\right)\psi \ = \ 0 \ .$$

Seguindo o procedimento de separação de variáveis, procuramos soluções na forma $\psi = R(r)Y(\theta,\ \varphi)$ e obtemos, inserindo na equação,

$$\frac{\left(r^2 R'(r)\right)'}{R(r)} + \frac{2m_0}{\hbar^2}\left(\alpha r + Er^2\right) \ = \ -\frac{1}{Y(\theta,\ \varphi)}\left[\frac{1}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left(\mathrm{sen}\theta\right)\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\left(\mathrm{sen}\theta\right)^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right] \ .$$

[58] Charles Augustin de Coulomb (1736–1806).

Novamente, ambos os lados devem ser igualados a uma constante λ, e obtemos o par de equações

$$(r^2R'(r))' + \left[\frac{2m_0}{\hbar^2}\left(\alpha r + Er^2\right) - \lambda\right] R(r) \;=\; 0\,,$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left((\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{(\operatorname{sen}\theta)^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y \;=\; 0\,.$$

Como já discutimos, a segunda equação só possui soluções finitas em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ se $\lambda = l(l+1)$ com $l \in \mathbb{N}_0$, em cujo caso as soluções para Y são dadas pelas funções harmônicas esféricas $Y_l^m(\theta,\ \varphi)$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $-l \leq m \leq l$. A equação radial fica então

$$r^2R''(r) + 2rR'(r) + \left[\frac{2m_0}{\hbar^2}\left(\alpha r + Er^2\right) - l(l+1)\right] R(r) \;=\; 0\,.$$

Para simplificar essa expressão, definamos as constantes

$$\beta \;:=\; \frac{2m_0}{\hbar^2}\alpha \qquad \text{e} \qquad \gamma \;:=\; \sqrt{-\frac{2m_0}{\hbar^2}E}$$

(tomamos aqui $E \leq 0$, o que corresponde aos chamados *estados ligados*), com o quê, escrevemos

$$r^2R''(r) + 2rR'(r) + \left(\beta r - \gamma^2 r^2 - l(l+1)\right) R(r) \;=\; 0\,.$$

Essa equação ainda não se encontra em uma forma reconhecível, mas definindo $S(r) := \frac{e^{\gamma r}}{r^l}R(r)$, ou seja, escrevendo R na forma $R(r) = r^l e^{-\gamma r}S(r)$, obtém-se para S a seguinte equação:

$$rS''(r) + \Big(2(l+1) - 2\gamma r\Big)S'(r) + \Big(\beta - 2\gamma(l+1)\Big)S(r) \;=\; 0\,.$$

E. 45.22 *Exercício*. Faça essa conta ao menos uma vez na vida. ✣

Definindo uma nova variável $z = 2\gamma r$ e $y(z) = S(r) = y(2\gamma r)$, obtemos para $y(z)$ a equação diferencial

$$zy''(z) + \Big(2(l+1) - z\Big)y'(z) - \left(\frac{\beta}{2\gamma} - (l+1)\right) y(z) \;=\; 0\,,$$

a qual, para fins de comparação, escrevemos como

$$zy''(z) + \Big((2l+1) + 1 - z\Big)y'(z) - \left[\left(\frac{\beta}{2\gamma} + l\right) - (2l+1)\right] y(z) \;=\; 0\,.$$

Comparando a (15.166), reconhecemos que se trata da **equação de Laguerre associada** com $n = \frac{\beta}{2\gamma} + l$. Pela nossa discussão de quando tratamos da equação de Laguerre, devemos ter n um inteiro positivo com $0 \leq 2l+1 \leq n$, de outra forma a solução da equação de Laguerre crescerá mais rápido que exponencial, destruindo a propriedade de ψ ser de quadrado integrável. Assim, n deve ser tomado um inteiro positivo e, portanto, $p := \frac{\beta}{2\gamma}$ deve ser também inteiro. Como $0 \leq 2l+1 \leq n$ e $n = p + l$, segue que $p \geq l+1$ e, portanto, p é igualmente um inteiro positivo.

Na situação descrita no último parágrafo, vimos na Seção 15.3.2, página 891, que as soluções da equação de Laguerre associada acima são dadas pelos polinômios de Laguerre associados $L_n^{(2l+1)}(z)$.

Retornando a $R(r)$, obtivemos a solução

$$R_{p,\,l}(r) \;=\; r^l \exp\left(-\frac{\beta r}{2p}\right) L_{p+l}^{(2l+1)}\left(\frac{\beta r}{p}\right)\,,$$

onde usamos $p := \frac{\beta}{2\gamma} \in \mathbb{N}$ e escrevemos $\gamma = \frac{\beta}{2p}$. Voltando às constantes originais, a relação $\gamma = \frac{\beta}{2p}$ expressa-se como

$$\sqrt{-\frac{2m_0}{\hbar^2}E} \;=\; \frac{\alpha m_0}{p\hbar^2}\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad E \;\equiv\; E_p \;=\; -\frac{\alpha^2 m_0}{2\hbar^2}\,\frac{1}{p^2}\,, \quad \text{com } p = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\,.$$

Essa é a bem-conhecida regra de quantização de energia do átomo de hidrogênio, obtida pela primeira vez, por outros meios, por Bohr[59] em 1912-1913 e reobtida posteriormente por Schrödinger em 1926 por meio do estudo das soluções da equação de Schrödinger para o potencial de Coulomb, como fizemos acima. O número inteiro não-negativo p é denominado *número quântico principal* no contexto da Mecânica Quântica.

Os autoestados de energia são

$$\psi_{p,\,l,\,m}(r,\ \theta,\ \varphi) \;=\; c_{p,\,l,\,m}\, r^l\, \exp\left(-\frac{\beta r}{2p}\right) L_{p+l}^{(2l+1)}\left(\frac{\beta r}{p}\right)\, Y_l^m(\theta,\ \varphi)\,,$$

$c_{p,\,l,\,m}$ sendo uma constante de normalização a ser fixada pela imposição

$$1 \;=\; \int_{\mathbb{R}^3} |\psi_{p,\,l,\,m}|^2\, d^3x \;=\; \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^2} |\psi_{p,\,l,\,m}(r,\ \theta,\ \varphi)|^2\, r^2 dr d\Omega\,,$$

onde $d\Omega = \operatorname{sen}(\theta)d\theta d\varphi$. Como por (16.88) tem-se $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} |Y_l^m(\theta,\ \varphi)|^2 d\Omega = 1$, segue que

$$\begin{aligned}
1 \quad &= \quad |c_{p,\,l,\,m}|^2 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\beta r}{p}\right)\left(L_{p+l}^{(2l+1)}\left(\frac{\beta r}{p}\right)\right)^2\, r^{2l+2}\, dr \\
&= \quad |c_{p,\,l,\,m}|^2 \left(\frac{p}{\beta}\right)^{2l+3} \int_0^\infty e^{-\rho}\left(L_{p+l}^{(2l+1)}(\rho)\right)^2\, \rho^{2l+2}\, d\rho \\
&\overset{(16.156)}{=} \quad |c_{p,\,l,\,m}|^2 \left(\frac{p}{\beta}\right)^{2l+3} \frac{((p+l)!)^3}{(p-l-1)!}(2p)\,.
\end{aligned}$$

Assim, tomando $c_{p,\,l,\,m}$ real, obtemos

$$c_{p,\,l,\,m} \;=\; \sqrt{\frac{\beta}{2p^2}}\left(\frac{\beta}{p}\right)^{l+1}\sqrt{\frac{(p-l-1)!}{((p+l)!)^3}}\,.$$

Finalmente, as autofunções de energia normalizadas são

$$\psi_{p,\,l,\,m}(r,\ \theta,\ \varphi) \;=\; \sqrt{\frac{\beta}{2p^2}}\left(\frac{\beta}{p}\right)^{l+1}\sqrt{\frac{(p-l-1)!}{((p+l)!)^3}}\; r^l\, \exp\left(-\frac{\beta r}{2p}\right)\, L_{p+l}^{(2l+1)}\left(\frac{\beta r}{p}\right)\, Y_l^m(\theta,\ \varphi)\,,$$

com $p \geq l+1$, $l \in \mathbb{N}_0$, e $m \in \mathbb{Z}$ com $-l \leq m \leq l$.

• **Um comentário sobre a ortonormalidade das funções $\psi_{p,\,l,\,m}$**

Nota para o leitor com conhecimento de Mecânica Quântica

Por serem autofunções normalizadas do operador Hamiltoniano, as funções $\psi_{p,\,l,\,m}$ devem satisfazer as relações de ortogonalidade $\langle \psi_{p',\,l,\,m},\ \psi_{p,\,l,\,m}\rangle = \delta_{p,\,p'}$. Integrando a parte angular, isso significa que

$$\int_0^\infty \left[\exp\left(-\frac{\beta r}{2p'}\right)\, L_{p'+l}^{(2l+1)}\left(\frac{\beta r}{p'}\right)\right]\left[\exp\left(-\frac{\beta r}{2p}\right)\, L_{p+l}^{(2l+1)}\left(\frac{\beta r}{p}\right)\right]\; r^{2l+2}\, dr \;=\; \delta_{p,\,p'}\,\frac{2\,p^{2l+4}((p+l)!)^3}{\beta^{2l+3}\,(p-l-1)!}\,.$$

O fator β pode ser absorvido com a mudança de variáveis $\rho = \beta r$ e obtém-se

$$\int_0^\infty \left[\rho^l e^{-\frac{\rho}{2p'}} L_{p'+l}^{(2l+1)}\left(\frac{\rho}{p'}\right)\right]\left[\rho^l e^{-\frac{\rho}{2p}} L_{p+l}^{(2l+1)}\left(\frac{\rho}{p}\right)\right]\; \rho^2\, d\rho \;=\; \delta_{p,\,p'}\,\frac{2\,p^{2l+4}((p+l)!)^3}{(p-l-1)!}\,, \tag{45.246}$$

para todo p, p' inteiros positivos (não-nulos). Essas são relações de ortogonalidade, não exatamente para os polinômio de Laguerre associados, mas para a família de funções $\rho^l e^{-\frac{\rho}{2p}} L_{p+l}^{(2l+1)}\left(\frac{\rho}{p}\right)$, $p \geq l+1$ (para cada $l \geq 0$, inteiro).

[59] Niels Henrik David Bohr (1885–1962).

Perceba-se que não podemos eliminar simultaneamente p e p' por uma mudança de variáveis na integral em (45.246). É de se notar que essa relação de ortogonalidade não tem muito a ver com a relação de ortogonalidade dos polinômios de Laguerre associados que obtivemos em (16.153). Infelizmente, poucos livros de Mecânica Quântica ou de Física-Matemática comentam esse ponto[60], uma exceção um tanto surpreendente sendo [21] e estas Notas.

Comentamos que toda a teoria do átomo de hidrogênio, incluindo as várias expressões complexas que derivamos acima envolvendo polinômios de Laguerre, e muito mais, já se encontrava nos primeiros trabalhos de Schrödinger sobre a Mecânica Quântica, de 1926.

45.10 Propagação de Ondas em Tanques Cilíndricos

A versão original desta seção é de autoria de

André M. Timpanaro, Fleury J. Oliveira e Paulo H. Reimberg[61]

A Mecânica de Fluidos, quando consideramos fluidos ideais, é baseada fundamentalmente na equação de Euler (vide, e.g., [325] ou [91])

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p \; - \vec{g} \;=\; 0\;, \tag{45.247}$$

onde $\vec{v}$ é o campo de velocidades, ρ a densidade do fluido, p a pressão e $\vec{g}$ a aceleração da gravidade. Esta equação, apesar de não-linear, pode, para certos limites, ser aproximada por equações lineares. Quando isto se dá, a dificuldade em encontrar soluções explícitas diminui consideravelmente. Será este o caso tratado neste trabalho: o estudo de soluções explícitas do problema de propagação de ondas na superfície de um líquido contido num tanque cilíndrico.

Consideraremos três casos limites com a característica comum de que o comprimento de onda é muito maior que sua amplitude. O primeiro caso tratado é o da propagação de tais ondas em um tanque cuja profundidade é muito grande, não havendo, desta forma, influência do fundo na solução das equações. O segundo caso tratado é um limite do anterior, fazendo com que o raio do tanque seja infinito. O terceiro, e último caso estudado é aquele no qual a profundidade do tanque é muito menor que o comprimento de onda, para o qual obtém-se uma solução bastante parecida com a do problema da membrana circular da Seção 45.7, página 2671 (mas com condições de contorno do tipo de Neumann).

• **Ondas de gravitação e a propagação de ondas em tanques profundos**

A superfície de um fluido em equilíbrio sob a influência de um campo gravitacional uniforme é plana. Se, por meio de uma ação exterior qualquer, a superfície do fluido sair de seu estado de equilíbrio em um ponto, um movimento inicia-se no fluido. Este movimento se propaga por todo o fluido sob a forma de ondas.

Admitamos, primeiramente, que as ondas têm comprimentos muito maiores que suas amplitudes. Assim, como será demonstrado, o termo não linear da equação de Euler, $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$, pode ser desprezado em comparação com $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$.

Seja τ o período de oscilações das partículas da onda, estas partículas percorrem uma distância da ordem da amplitude, a, da onda. A velocidade de seu movimento é , portanto, $v \sim \frac{a}{\tau}$.

A velocidade v varia de maneira notável para períodos de tempo da ordem de τ e para comprimentos de onda, λ, dependendo da direção de propagação da onda. Desta forma, a derivada da velocidade em relação ao tempo é aproximadamente $\frac{v}{\tau}$, e $\frac{v}{\lambda}$ é a diferença de velocidades entre dois pontos distintos do espaço percorridos pela partícula em um certo intervalo de tempo. Assim, se $\lambda \gg a$, que é nossa aproximação inicial, tem-se

$$\frac{1}{\tau}\frac{a}{\tau} \;\gg\; \frac{a}{\tau}^2\frac{1}{\lambda}\;, \qquad \frac{1}{\tau}v \;\gg\; \frac{v}{\lambda}v\;, \qquad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \;\gg\; (\vec{v}\cdot\nabla)\,v\;.$$

Vemos que $(\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v}$ é desprezível em relação a $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$. Assim, obtemos para a equação de Euler a simplificação

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \;=\; -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi\;, \tag{45.248}$$

[60] [323] e [462] ignoram o assunto e mesmo o excelente [189] atribui erroneamente a normalização de $\psi_{p,\,l,\,m}$ às relações de ortogonalidade (16.153).

[61] No ano de 2005, alunos de graduação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo. Título original da monografia: "Propagação de ondas na superfície de um líquido contido em tanques circulares - uma breve análise", apresentada no curso de Mecânica dos Fluidos ministrado pelo Prof. M. Cattani.

onde ϕ é o potencial gravitacional ($-\nabla\phi = \vec{g}$).

Para o caso isentrópico, ou seja, para entropia constante, temos:

$$\frac{1}{\rho}\nabla p \;=\; \nabla\,(h+\phi)\;, \tag{45.249}$$

onde h é a entalpia do sistema. Aplicando o rotacional em ambos os lados da equação (45.248) obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{v} \;=\; 0 \qquad \text{ou seja,} \qquad \nabla\times\vec{v} \;=\; \textit{constante}\;. \tag{45.250}$$

No entanto, para o movimento oscilatório, a média temporal de $\vec{v}$ é nula de forma que $\nabla\times\vec{v} = 0$, sendo o fluido potencial em primeira aproximação (ou seja, $\vec{v}$ é o gradiente de um "potencial", por ter rotacional nulo). Pode-se então definir uma função potencial, φ, como sendo:

$$\vec{v} \;=\; \nabla\varphi \tag{45.251}$$

Aplicando a definição (45.251) à equação de Euler (45.248) obtemos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \;=\; -\frac{p}{\rho} - gz\;. \tag{45.252}$$

Assim, temos

$$p \;=\; -\rho g z - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\;. \tag{45.253}$$

Suporemos o eixo z orientado verticalmente para cima e um sistema de coordenadas polares planas $r,\ \theta$ tendo como origem o centro do tanque cilíndrico.

Designaremos a coordenada z dos pontos da superfície do fluido por ζ; ζ é a função das coordenadas r, θ, e do tempo. Se na superfície a pressão for uma constante p_0, por exemplo, a pressão atmosférica, obteremos para a equação (45.253)

$$p_0 \;=\; -\rho g\zeta - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\;. \tag{45.254}$$

Como, para um fluido incompressível,

$$\nabla\left(\varphi + \frac{p_0}{\rho}t\right) \;=\; \nabla\varphi\;, \tag{45.255}$$

podemos definir um novo potencial φ' por:

$$\varphi' \;:=\; \varphi + \frac{p_0}{\rho}t\;. \tag{45.256}$$

Assim,

$$g\zeta + \frac{\partial\varphi'}{\partial t}\Big|_{z=\zeta} \;=\; 0\;. \tag{45.257}$$

Como ζ é pequeno, visto que as ondas também o são, podemos considerar que

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} \;=\; v_z \overset{(45.251)}{=} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \overset{(45.256)}{=} \frac{\partial\varphi'}{\partial z}\;, \tag{45.258}$$

de forma que a derivada temporal da equação (45.257) torna-se

$$\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}\right)\Big|_{z=\zeta} \;=\; 0\;. \tag{45.259}$$

Novamente, como as oscilações são pequenas, pode-se substituir na equação (45.259) $z = 0$ no lugar de $z = \zeta$ e φ' por φ. De tal maneira, obtemos o sistema de equações diferencias que determinam as ondas na superfície do fluido.

$$\nabla^2\varphi \;=\; 0\;, \tag{45.260}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\Big|_{z=0} \;=\; 0\;. \tag{45.261}$$

Seja (por separação de variáveis) $\varphi(r,\ \theta,\ z,\ t) = \Lambda(r)\,A(\theta)\,V(z)\,T(t)$. Obtém-se de (45.260) as seguintes equações para os fatores Λ, A e V:

$$r^2\Lambda'' + r\Lambda' + \left(\sigma^2 r^2 - \nu^2\right)\Lambda \;=\; 0\,, \tag{45.262}$$

$$A'' + \nu^2 A \;=\; 0\,, \tag{45.263}$$

$$V'' - \sigma^2 V \;=\; 0\,. \tag{45.264}$$

Para que a solução seja periódica em θ, de período 2π, devemos ter que $\nu = m$, onde $m \in \mathbb{Z}$. Para V, obtemos de (45.264) $V(z) = Ae^{\sigma z} + Be^{-\sigma z}$ caso $\sigma \neq 0$ e $V(z) = Az + B$ caso $\sigma = 0$, A e B sendo constantes. Como desejamos uma solução finita para $z \to -\infty$ (onde localiza-se o fundo do tanque), devemos ter $\mathrm{Re}\,(\sigma) \geq 0$ e $V(z) = Ae^{\sigma z}$. Disso obtém-se $V'(0)/V(0) = \sigma$ e, por (45.261), obtemos para o fator T a equação

$$\ddot{T} + g\sigma T \;=\; 0\,. \tag{45.265}$$

Para que essa equação tenha um caráter oscilatório e não divirja para $t \to \pm\infty$ devemos ter $\mathrm{Im}\,(\sigma) = 0$ e $\sigma > 0$.

Aplicando as condições de contorno (velocidade radial igual a zero em $r = R$) e admitindo que o tanque seja profundo o bastante para que o fundo não interfira, obtém-se:

$$\varphi(r,\ \theta,\ z,\ t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m\left(\frac{\beta_k^m r}{R}\right) e^{im\theta + \frac{\beta_k^m z}{R}}\left[a_{k,\,m}\cos\left(\sqrt{\frac{g\beta_k^m}{R}}\,t\right) + b_{k,\,m}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{g\beta_k^m}{R}}\,t\right)\right]\,, \tag{45.266}$$

onde $J_m(x)$ são as funções de Bessel e β_k^m é o k-ésimo zero da função $J'_m(x)$ em $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Para a parte radial, não consideramos as funções de Neumann como possíveis soluções da equação de Bessel (45.262), pois estas soluções não são compatíveis com a finitude da energia, devido à presença de uma singularidade na origem.

Seja v_0 a velocidade aplicada na superfície do fluido no instante $t = 0$ na direção de z, ou seja, $v_0 \equiv v_0\,(r,\ \theta,\ z = 0,\ t = 0)\,\hat{z}$. Então,

$$v_0(r,\ \theta) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{k,m} J_m\left(\frac{\beta_k^m r}{R}\right) e^{im\theta}\,. \tag{45.267}$$

A partir da equação (45.257) no caso em que $\zeta \approx 0$ e $t = 0$, temos

$$\zeta_0(r,\ \theta) \;=\; -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{k,m}\sqrt{\frac{\beta_k^m}{gR}} J_m\left(\frac{\beta_k^m r}{R}\right) e^{im\theta}\,, \tag{45.268}$$

onde ζ_0 é a forma da superfície no instante inicial.

Usando em (45.267) e (45.268) as relações de ortogonalidade (16.218), página 959, das funções de Bessel e as relações de ortogonalidade $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\theta}\,d\theta = 2\pi\delta_{mn}$ das funções $e^{im\theta}$, determina-se o valor das constantes $a_{k,\,m}$ e $b_{k,\,m}$, que seguem:

$$a_{k,\,m} \;=\; \frac{\beta_k^m}{\pi R\left(\left(\beta_k^m\right)^2 - m^2\right)\left(J_m\left(\beta_k^m\right)\right)^2}\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} v_0(r,\ \theta)\,e^{-im\theta} J_m\left(\frac{\beta_k^m r}{R}\right) r\,d\theta\,dr\,, \tag{45.269}$$

$$b_{k,\,m} \;=\; \frac{\left(\beta_k^m\right)^{3/2}\sqrt{g}}{\pi R^{3/2}\left(\left(\beta_k^m\right)^2 - m^2\right)\left(J_m\left(\beta_k^m\right)\right)^2}\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} \zeta_0(r,\ \theta)\,e^{-im\theta} J_m\left(\frac{\beta_k^m r}{R}\right) r\,d\theta\,dr\,. \tag{45.270}$$

Assim, determina-se completamente a solução para o potencial da velocidade do fluido.

Aplicando o gradiente pode-se obter as velocidades com que as ondas se propagam nas direções radial e vertical em termos das condições iniciais. Desta forma,

$$v_r \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_k^m}{R} J'_m\left(\frac{\beta_k^m r}{R}\right) e^{im\theta + \frac{\beta_k^m z}{R}}\left[a_{k,\,m}\cos\left(\sqrt{\frac{g\beta_k^m}{R}}\,t\right) + b_{k,\,m}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{g\beta_k^m}{R}}\,t\right)\right]\,,$$

$$v_z \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_k^m}{R} J_m\left(\frac{\beta_k^m r}{R}\right) e^{im\theta + \frac{\beta_k^m z}{R}}\left[a_{k,\,m}\cos\left(\sqrt{\frac{g\beta_k^m}{R}}\,t\right) + b_{k,\,m}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{g\beta_k^m}{R}}\,t\right)\right]\,.$$

Vemos dessas expressões que as velocidades decrescem exponencialmente com a profundidade. A forma final da superfície é dada pela equação (45.257) (no caso em que $\zeta \approx 0$) e fica

$$\zeta \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\beta_k^m}{gR}}\,J_m\left(\frac{\beta_k^m r}{R}\right) e^{im\theta}\left[a_{k,\,m}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{g\beta_k^m}{R}}\,t\right) - b_{k,\,m}\cos\left(\sqrt{\frac{g\beta_k^m}{R}}\,t\right)\right]\,. \tag{45.271}$$

As ondas cuja propagação é descrita pelas expressões acima são denominadas *ondas de gravitação* na literatura da Mecânica dos Fluidos. Vide e.g. [325].

• **Propagação de ondas em um tanque profundo de raio infinito**

Abordaremos agora o limite em que o raio e a profundidade do tanque são muito grandes (infinitos). Tal é o caso se considerarmos ondas de pequeno comprimento de onda se propagando no meio de um oceano. Nesse caso teremos novamente as equações (45.260)-(45.261)

$$\nabla^2\varphi \;=\; 0 \;\Rightarrow\; r^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + r^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \;=\; 0 \tag{45.272}$$

e

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0} \;=\; 0\,. \tag{45.273}$$

Para fazermos a separação de variáveis suporemos que φ pode ser escrita como

$$\varphi \;=\; \varphi(r,\ \theta,\ z,\ t) = A(r)B(\theta)C(z)D(t)\,. \tag{45.274}$$

Dessa forma, as equações (45.272) e (45.273) ficam respectivamente

$$r^2A''BCD + rA'BCD + AB''CD + r^2ABC''D \;=\; 0 \tag{45.275}$$

e

$$ABC(0)D'' + gABC'(0)D \;=\; 0\,. \tag{45.276}$$

Para resolver a equação (45.275) iremos dividi-la por $ABCD = \varphi$. Sempre poderemos fazer isso desde que a solução para φ não seja a solução trivial. Também iremos supor que as seguintes condições são obedecidas:

$$\frac{B''}{B} \;=\; cte. \;=\; -\nu^2\,. \tag{45.277}$$

e

$$\frac{C''}{C} \;=\; cte. \;=\; k^2\,. \tag{45.278}$$

Discutiremos se ν e k são ou não reais mais tarde. Levando em conta (45.277) e (45.278), (45.275) fica:

$$r^2\frac{A''}{A} + r\frac{A'}{A} \;=\; \nu^2 - k^2r^2 \qquad\Longrightarrow\qquad r^2A'' + rA' + (r^2k^2 - \nu^2)A \;=\; 0\,. \tag{45.279}$$

Se fizermos uma mudança de variável chegaremos na *equação de Bessel* para a função $J_\nu(x)$, de forma que a solução é

$$A(r) \;=\; KJ_\nu(kr)\,. \tag{45.280}$$

Se resolvermos (45.277) e (45.278) obteremos:

$$B(\theta) \;=\; \xi_\theta e^{i\nu\theta} + \zeta_\theta e^{-i\nu\theta}\,, \tag{45.281}$$

$$C(z) \;=\; \xi_z e^{kz} + \zeta_z e^{-kz}\,. \tag{45.282}$$

Note que para que φ seja contínua e diferenciável (precisaremos dessas condições se quisermos descrever a superfície de forma satisfatória), então devemos ter que ν é inteiro. Além disso, como vamos somar as soluções com ν variando de $-\infty$ até $+\infty$, podemos sem perda de generalidade considerar $\zeta_\theta = 0$.

Na equação (45.282), devemos manter em mente que como o tanque é sem fundo devemos ter a relação $z \to -\infty \Rightarrow \varphi \to 0$ satisfeita, de forma que k deve ser real (e sem perda de generalidade positivo) e $\zeta_z = 0$. Então a equação (45.276) fica

$$\frac{D''}{D} \;=\; -gk \quad\Longrightarrow\quad D(t) \;=\; \xi_{tk\nu}\cos\left(\sqrt{gk}\,t\right) + \zeta_{tk\nu}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{gk}\,t\right)\;. \tag{45.283}$$

Então o resultado para o potencial é

$$\varphi_{k\nu}(r,\;z,\;\theta,\;t) \;=\; J_\nu(rk)e^{i\nu\theta+kz}\Big[E_{k\nu}\cos\left(\sqrt{gk}\,t\right) + F_{k\nu}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{gk}\,t\right)\Big]\;, \tag{45.284}$$

onde as constantes $E_{k\nu}$ e $F_{k\nu}$ são definidas como

$$\begin{aligned} E_{k\nu} &= \xi_\theta\xi_{tk\nu}\;,\\ F_{k\nu} &= \xi_\theta\zeta_{tk\nu}\;. \end{aligned}$$

Para determinarmos essas constantes em termos de k e ν, precisamos escolher condições iniciais. Lembrando então as equações que foram deduzidas para as ondas pequenas (e que também valem nesse caso) para a coordenada z dos pontos do fluido na superfície, ζ. Então podemos escrever as condições em termos de $T(r,\;\theta,\;t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}|_{z=0}$ e de $Z(r,\;\theta,\;t) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{z=0}$ no instante $t = 0$

Para tanto usaremos a *transformada de Hankel*[62] (também conhecida como *transformada de Fourier-Bessel*) e a relação de ortogonalidade da função e^{inx}:

$$\mathfrak{F}(q) \;=\; \mathcal{H}_\nu(f)(q) \;=\; \int_0^\infty f(x)\sqrt{qx}J_\nu(qx)\,dx\;, \tag{45.285}$$

$$f(x) \;=\; \mathcal{H}_\nu^{-1}(\mathfrak{F})(x) \;=\; \int_0^\infty \mathfrak{F}(q)\sqrt{qx}J_\nu(qx)\,dq\;, \tag{45.286}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\,dx \;=\; 2\pi\delta_{mn}\;. \tag{45.287}$$

Então, se $S_{k\nu}(r,\;\theta) = Z(r,\;\theta,\;0)$, tem-se

$$S_{k\nu}(r,\;\theta) \;=\; kJ_\nu(rk)e^{i\nu\theta}E_{k\nu} \quad\Longrightarrow\quad \int_{-\pi}^{\pi} Se^{-i\lambda\theta}\,d\theta \;=\; \int_0^\infty \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} 2\pi kJ_\nu(rk)E_{k\nu}\delta_{\nu\lambda}\,dk$$

$$= \int_0^\infty 2\pi kJ_\lambda(rk)E_{k\lambda}\,dk \;=\; \mathcal{H}_\lambda^{-1}\left(2\pi\sqrt{\frac{k}{r}}E_{k\lambda}\right) \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{k}E_{k\lambda} \;=\; \mathcal{H}_\lambda\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sqrt{r}S(r,\theta)e^{-i\lambda\theta}}{2\pi}\,d\theta\right)\;,$$

o que nos leva a

$$E_{k\nu} \;=\; \int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}\frac{rZ(r,\theta,0)}{2\pi}e^{-i\nu\theta}J_\nu(rk)\,d\theta\,dr\;. \tag{45.288}$$

Se $R(r,\;\theta) = T(r,\;\theta,\;0)$, então

$$R_{k\nu}(r,\;\theta) \;=\; \sqrt{gk}J_\nu(rk)F_{k\nu} \quad\Longrightarrow\quad \int_{-\pi}^{\pi} Re^{-i\lambda\theta}\,d\theta \;=\; \int_0^\infty \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} 2\pi\sqrt{gk}J_\nu(rk)F_{k\nu}\delta_{\nu\lambda}\,dk \;=$$

$$= \int_0^\infty 2\pi\sqrt{gk}J_\lambda(rk)F_{k\lambda}\,dk \;=\; \mathcal{H}_\lambda^{-1}\left(2\pi\sqrt{\frac{g}{r}}F_{k\lambda}\right) \quad\Longrightarrow\quad F_{k\lambda} \;=\; \mathcal{H}_\lambda\left(\sqrt{\frac{r}{g}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Re^{-i\lambda\theta}\,d\theta\right)$$

[62] Hermann Hankel (1839–1873).

e, portanto,

$$F_{k\nu} \;=\; \sqrt{\frac{k}{g}}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}\frac{rT(r,\;\theta,\;0)}{2\pi}e^{-i\nu\theta}J_\nu(rk)\,d\theta\,dr\;. \tag{45.289}$$

As funções Z e T podem ser obtidas a partir de ζ e $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$, as condições iniciais, a partir das equações (45.256), (45.257) e (45.258) que também podem ser utilizadas para obter ζ. Por fim podemos obter o campo de velocidades tomando $\vec{v} = \nabla\varphi$. E e F determinam completamente φ:

$$\varphi(r,\;z,\;\theta,\;t) \;=\; \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty J_\nu(rk)e^{i\nu\theta+kz}\left[E_{k\nu}\cos\left(\sqrt{gk}\,t\right) + F_{k\nu}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{gk}\,t\right)\right]\,dk\;, \tag{45.290}$$

$$\vec{v}(r,\;z,\;\theta,\;t) \;=\; \nabla\varphi(r,\;z,\;\theta,\;t)\;, \tag{45.291}$$

$$\zeta(r,\;\theta,\;t) \;=\; -\frac{p_0}{\rho g} - \frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(r,\;\theta,\;0,\;t)\;. \tag{45.292}$$

• **Grandes ondas de gravitação e a propagação de ondas em tanques rasos**

Trataremos agora da propagação de ondas com um comprimento de onda grande relativamente à profundidade do meio onde se dá a propagação, mas amplitude pequena em relação ao comprimento de onda.

Suporemos tratar de tanque cilíndrico de raio R. Na situação de equilíbrio, sem movimento, o fluido atinge uma altura h_0 do tanque. Suporemos um sistema de coordenadas cilíndricas $r,\;\theta,\;z$, com o eixo z coincidente com o eixo de simetria do tanque, sendo a coordenada z medida a partir do fundo do tanque no sentido crescente para cima. Em havendo movimento do fluido, cada ponto da sua superfície terá altura $h(r,\;\theta)$, medida a partir do fundo do tanque. Definindo $\zeta(r,\;\theta) = h(r,\;\theta) - h_0$, podemos escrever $h = h_0 + \zeta$. A grandeza ζ descreve o afastamento da superfície do fluido em relação à superfície de equilíbrio.

Como justificado anteriormente, podemos novamente desconsiderar o termo não-linear da equação de Euler (45.247), que reduz-se a

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \;=\; -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} \tag{45.293}$$

Escrevendo esta equação para as componentes radial e tangencial, respectivamente, teremos

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} \;=\; -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\;, \tag{45.294}$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} \;=\; -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}\;, \tag{45.295}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} \;=\; -\frac{\partial p}{\partial z}\;. \tag{45.296}$$

Lembrando que a pressão num ponto interior a um fluido aproximadamente estático é dada por

$$p \;\cong\; p_0 + \rho g\,(h - z)$$

onde h é altura da superfície do fluido medida a partir do fundo, obteremos, substituindo esta em (45.294) e em (45.295), a aproximação

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} \;\cong\; -g\frac{\partial h}{\partial r}\;, \tag{45.297}$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} \;\cong\; -\frac{g}{r}\frac{\partial h}{\partial\theta}\;, \tag{45.298}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} \;\cong\; 0\;. \tag{45.299}$$

A equação de continuidade $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$ reduz-se, para fluidos incompressíveis (ou seja, com $\rho = \text{const.}$) a $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Em coordenadas cilíndricas isso significa

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \;=\; 0 \,.$$

Integrando-se essa equação em z entre $z = 0$ (fundo do tanque) e $z = h(r,\, \theta,\, t) := h_0 + \zeta(r,\, \theta,\, t)$ (superfície superior do fluido), obtemos

$$v_z(r,\, \theta,\, h(r,\, \theta,\, t),\, t) + \int_0^h \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r}\, dz + \int_0^h \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\, dz \;=\; 0 \,,$$

onde usamos a hipótese que $v_z(z = 0) = 0$ (ou seja, o fluido não se move verticalmente no fundo do tanque). Supondo agora que o tanque seja raso, e que v_r e v_θ não dependam da altura z, a última expressão pode ser aproximada por

$$v_z(r,\, \theta,\, h(r,\, \theta,\, t),\, t) + h(r,\, \theta,\, t)\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + h(r,\, \theta,\, t)\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \;=\; 0 \,,$$

Lembrando que $v_z(r,\, \theta,\, h,\, t) = \frac{\partial h}{\partial t}$, obtemos

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{h}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{h}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \;=\; 0 \,.$$

Derivando esta equação em relação ao tempo, teremos

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{h}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}\right)\right) + \frac{h}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}\right) + \frac{v_z}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{v_z}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \;=\; 0 \,.$$

Usando as expressões (45.297) e (45.298) a equação acima fica

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - g\frac{h}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)\right) - g\frac{h}{r^2}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}\right) + \frac{v_z}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{v_z}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \;=\; 0 \,.$$

Utilizando $h = h_0 + \zeta$, desprezando termos quadráticos em ζ e nas velocidades, obtém-se

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - g h_0\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2}\right) \;=\; 0 \,. \tag{45.300}$$

Podemos notar que a expressão entre parênteses é o Laplaciano bidimensional escrito em coordenadas polares. Com isso podemos escrever (45.300) mais sucintamente como:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - g h_0 \nabla^2 \zeta \;=\; 0 \,. \tag{45.301}$$

Vemos que esta é uma equação de ondas em duas dimensões, que corresponde a ondas com velocidade de propagação $\sqrt{g h_0}$ (Comentário *en passant*: o fato de a velocidade de propagação diminuir com a profundidade do tanque explica o por quê de uma onda "quebrar" ao se aproximar de uma praia). As ondas cuja propagação é descrita por (45.301) são denominadas *grandes ondas de gravitação* na literatura da Mecânica dos Fluidos. Vide e.g. [325]. Como desejamos conhecer a forma de ondas na superfície de um tanque cilíndrico devemos aplicar o método de separação de variáveis à equação (45.301).

Supondo ζ da forma $\Lambda(r)\, A(\theta)\, T(t)$ na equação (45.301), teremos:

$$\ddot{T} + \frac{\sigma^2}{g h_0} T \;=\; 0 \,, \tag{45.302}$$

$$r^2 \Lambda'' + r\Lambda' + \left(\sigma^2 r^2 - \nu^2\right)\Lambda \;=\; 0 \,, \tag{45.303}$$

$$A'' + \nu^2 A \;=\; 0 \,. \tag{45.304}$$

Devido à expressão (45.297), e ao fato de a velocidade radial v_r ser nula na borda do tanque (quando $r = R$) para todo tempo t, constatamos que devemos ter $\left.\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right|_{r=R} = \left.\frac{\partial h}{\partial r}\right|_{r=R} = 0$. Essa relação deve ser entendida como condição de contorno (do tipo de Neumann) a ser satisfeita pela função $\zeta(r,\, \theta)$.

Resolvendo sistema de equações diferenciais (45.302)-(45.304) sujeito à condição de contorno de que a derivada de ζ em relação ao raio deve anular-se em $r = R$ a solução para o perfil das ondas na superfície do líquido será:

$$\zeta(r,\, \theta,\, t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[a_{k,m}\cos\left(\frac{\beta_k^m \sqrt{g h_0}\, t}{R}\right) + b_{k,m}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\beta_k^m \sqrt{g h_0}\, t}{R}\right)\right] J_m\left(\frac{\beta_k^m r}{R}\right) e^{i m\theta} \,, \tag{45.305}$$

onde $\nu = m \in \mathbb{N}_0$ para que a solução seja periódica de período 2π em θ e onde, como anteriormente, β_k^m designa o k-ésimo zero de J_m' em $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Para a parte radial, não consideramos as funções de Neumann como possíveis soluções da equação de Bessel, pois estas não são compatíveis com a finitude da energia, devido à presença de uma singularidade na origem.

Supondo, como condições iniciais, que a superfície do líquido tenha uma forma descrita por uma função $\zeta_0(r,\, \theta)$ e uma distribuição de velocidades verticais dada por $v_0(r,\, \theta)$ em $t = 0$, teremos:

$$\zeta_0(r,\, \theta) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{k,\,m} J_m\left(\frac{\beta_k^m r}{R}\right) e^{i m\theta} \,, \tag{45.306}$$

$$v_0(r,\, \theta) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{k,\,m}\frac{\beta_k^m \sqrt{g h_0}}{R} J_m\left(\frac{\beta_k^m r}{R}\right) e^{i m\theta} \,. \tag{45.307}$$

Utilizando em (45.306) e (45.307) as relações de ortogonalidade (16.218), página 959, das funções de Bessel e as relações de ortogonalidade $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\theta}\, d\theta = 2\pi\delta_{mn}$ das funções $e^{i m\theta}$, teremos:

$$a_{k,\,m} \;=\; \frac{1}{\pi R^2\left(1 - \left(\frac{m}{\beta_k^m}\right)^2\right)\left(J_m(\beta_k^m)\right)^2}\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} \zeta_0(r,\, \theta)\, e^{-i m\theta} J_m\left(\frac{\beta_k^m r}{R}\right) r\, dr d\theta \,, \tag{45.308}$$

$$b_{k,\,m} \;=\; \frac{1}{\pi R\sqrt{g h_0}\beta_k^m\left(1 - \left(\frac{m}{\beta_k^m}\right)^2\right)\left(J_m(\beta_k^m)\right)^2}\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} v_0(r,\, \theta)\, e^{-i m\theta} J_m\left(\frac{\beta_k^m r}{R}\right) r\, dr d\theta \,. \tag{45.309}$$

Essas expressões determinam completamente os coeficientes $a_{k,\,m}$ e $b_{k,\,m}$ para todos k e m em termos das condições iniciais.

45.11 Equações Hiperbólicas Lineares em 1+1 Dimensões e Equações Integrais

Um método importante de resolução de equações diferenciais submetidas a condições iniciais ou de contorno consiste em transformá-las em equações integrais e resolvê-las, por exemplo, por um procedimento iterativo. Tal procedimento é familiar ao estudo das equações diferenciais ordinárias e, como naquele caso, pode fornecer em alguns casos garantias de unicidade e existência de soluções.

Aqui, seguindo proximamente o tratamento de [215], ilustraremos o uso de equações integrais no tratamento da equação hiperbólica linear de segunda ordem de coeficientes constantes e inomogênea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a u + b\frac{\partial u}{\partial t} + d\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; F(x,\, t) \,, \tag{45.310}$$

com $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$, onde $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias mas com $c > 0$. Essa equação (que é de tipo hiperbólico) generaliza a equação de ondas em uma dimensão e inclui alguns casos particulares de interesse, como a

equação do telégrafo (caso $d = 0$), a *equação de ondas amortecidas* (caso $a = d = 0$) (também conhecida como *equação de difusão relativística* para $b = c^2/D$, com $D > 0$ sendo a constante de difusão) e a *equação de Klein-Gordon* (caso $b = d = 0$, $a \neq 0$). A função F, sob a qual serão feitas algumas exigências adiante, não depende de u ou suas derivadas e representa uma força externa agindo em cada ponto x do sistema em cada instante t. Consideraremos o problema de Cauchy no qual são dadas as condições iniciais

$$u(x,\,0) \;=\; f(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\, u}{\partial t}(x,\,0) \;=\; g(x) \tag{45.311}$$

que fixam posição e velocidade de u no instante $t = 0$, f e g sendo funções dadas sobre as quais algumas (poucas) exigências serão feitas adiante.

O procedimento que seguiremos não só permitirá demonstrar existência e unicidade de solução para esse problema como permitirá obter fórmulas relativamente explícitas para a solução, o que nem sempre ocorre quando equações integrais são empregadas como método de resolução.

O primeiro passo é passar a coordenadas características

$$\xi \;=\; x + ct\,, \quad \eta \;=\; x - ct\,, \quad \text{com o que} \quad x \;=\; \frac{\xi+\eta}{2} \;\text{ e }\; t \;=\; \frac{\xi-\eta}{2c}\,.$$

Definindo v por $u(x,\,t) =: v(\xi,\,\eta) = v\,(x + ct,\,x - ct)$ a equação (45.310) fica

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \left(\frac{bc+d}{4c^2}\right)\frac{\partial\, v}{\partial\,\xi} + \left(\frac{bc-d}{4c^2}\right)\frac{\partial\, v}{\partial\,\eta} - \frac{a}{4c^2}v \;=\; \frac{1}{4c^2}F\left(\frac{\xi+\eta}{2},\,\frac{\xi-\eta}{2c}\right)\,. \tag{45.312}$$

E. 45.23 *Exercício*. Verifique! ✣

Essa equação sofre uma grande simplificação se definirmos uma nova função w multiplicando v por um fator conveniente:

$$\begin{aligned} w(\xi,\,\eta) \;&:=\; \exp\left[-\left(\frac{d-bc}{4c^2}\right)\xi - \left(\frac{d+bc}{4c^2}\right)\eta\right] v(\xi,\,\eta) \\ &=\; \exp\left[-\left(\frac{d-bc}{4c^2}\right)\xi - \left(\frac{d+bc}{4c^2}\right)\eta\right] u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\,\frac{\xi-\eta}{2c}\right)\,, \end{aligned} \tag{45.313}$$

ou seja, escrevendo

$$v(\xi,\,\eta) \;=:\; \exp\left[\left(\frac{d-bc}{4c^2}\right)\xi + \left(\frac{d+bc}{4c^2}\right)\eta\right] w(\xi,\,\eta)$$

com o que a equação (45.312) fica

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta} + \kappa w \;=\; G(\xi,\,\eta)\,, \tag{45.314}$$

onde

$$\kappa \;=\; -\left(\frac{4ac^2+d^2-b^2c^2}{16c^4}\right) \qquad \text{e} \qquad G(\xi,\,\eta) \;:=\; -\frac{1}{4c^2}\exp\left[-\left(\frac{d-bc}{4c^2}\right)\xi - \left(\frac{d+bc}{4c^2}\right)\eta\right] F\left(\frac{\xi+\eta}{2},\,\frac{\xi-\eta}{2c}\right)\,.$$

E. 45.24 *Exercício*. Verifique! ✣

A equação (45.314) é aquela com a qual trabalharemos. É importante, portanto, traduzir as condições iniciais para u em (45.311) em condições para w. A linha $t = 0$ corresponde no plano ξ-η à linha $\xi = \eta$. Além disso, o semi-plano $t > 0$ corresponde no plano ξ-η ao semi-plano $\xi > \eta$. Assim, a condição $u(x,\,0) = f(x)$ fica, segundo (45.313),

$$w(\xi,\,\xi) \;=\; \exp\left[-\left(\frac{d}{2c^2}\right)\xi\right] f(\xi) \;=:\; h(\xi)\,. \tag{45.315}$$

Já a condição $\frac{\partial\, u}{\partial t}(x,\,0) = g(x)$ fica

$$\frac{\partial\, w}{\partial\xi}(\xi,\,\xi) - \frac{\partial\, w}{\partial\eta}(\xi,\,\xi) \;=\; \left(\frac{b}{2c}f(\xi) + \frac{1}{c}g(\xi)\right)\exp\left[-\left(\frac{d}{2c^2}\right)\xi\right]\,. \tag{45.316}$$

E. 45.25 *Exercício*. Verifique! ✣

Essa última condição (45.316) pode ser escrita na forma de duas condições acopladas sobre a linha $\xi = \eta$. Calculando a derivada total de ambos os lados de (45.315) em relação a ξ (lembrar que $\frac{d}{d\xi}w(\xi,\,\xi) = \frac{\partial\, w}{\partial\xi}(\xi,\,\xi) + \frac{\partial\, w}{\partial\eta}(\xi,\,\xi)$) tem-se

$$\frac{\partial\, w}{\partial\xi}(\xi,\,\xi) + \frac{\partial\, w}{\partial\eta}(\xi,\,\xi) \;=\; \left(f'(\xi) - \left(\frac{d}{2c^2}\right)f(\xi)\right)\exp\left[-\left(\frac{d}{2c^2}\right)\xi\right]\,.$$

Dessa igualdade e de (45.316) obtém-se facilmente expressões para $\frac{\partial w}{\partial\xi}(\xi,\,\xi)$ e $\frac{\partial w}{\partial\eta}(\xi,\,\xi)$:

$$\frac{\partial\, w}{\partial\xi}(\xi,\,\xi) \;=\; \frac{1}{2}\left(f'(\xi) + \left(\frac{bc-d}{2c^2}\right)f(\xi) + \frac{1}{c}g(\xi)\right)\exp\left[-\left(\frac{d}{2c^2}\right)\xi\right] \;=:\; \phi(\xi)$$

$$\frac{\partial\, w}{\partial\eta}(\xi,\,\xi) \;=\; \frac{1}{2}\left(f'(\xi) - \left(\frac{bc+d}{2c^2}\right)f(\xi) - \frac{1}{c}g(\xi)\right)\exp\left[-\left(\frac{d}{2c^2}\right)\xi\right] \;=:\; \psi(\xi)$$

Assim, nosso problema consiste em resolver a equação

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta} + \kappa w \;=\; G(\xi,\,\eta)\,, \tag{45.317}$$

sob as condições

$$w(\xi,\,\xi) \;=\; h(\xi) \tag{45.318}$$

$$\frac{\partial\, w}{\partial\xi}(\xi,\,\xi) \;=\; \phi(\xi) \tag{45.319}$$

$$\frac{\partial\, w}{\partial\eta}(\xi,\,\xi) \;=\; \psi(\xi) \tag{45.320}$$

com a constante κ e as funções G, h, ϕ e ψ definidas acima.

Para o que segue é relevante notar que $h' = \phi + \psi$, o que implica

$$h(\alpha) - h(\beta) \;=\; \int_\beta^\alpha \phi(s)\,ds + \int_\beta^\alpha \psi(s)\,ds\,,$$

de onde se conclui que $h(\alpha) - \int_\beta^\alpha \phi(s)\,ds = h(\beta) + \int_\beta^\alpha \psi(s)\,ds$, o que implica

$$h(\alpha) - \int_\beta^\alpha \phi(s)\,ds \;=\; \frac{h(\alpha)+h(\beta)}{2} + \frac{1}{2}\int_\beta^\alpha \phi(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_\beta^\alpha \psi(s)\,ds\,. \tag{45.321}$$

O que faremos agora é transformar o problema (45.317)-(45.320) em uma equação integral e, para tal, tomamos um ponto $(\alpha,\,\beta)$ no semi-plano $\xi > \eta$ do plano ξ-η e integramos ambos os lados de (45.317) no triângulo fechado $\Delta(\alpha,\,\beta)$, indicado na Figura 45.11, página 2688, definido pelos pontos $(\alpha,\,\beta)$, $(\alpha,\,\alpha)$ e $(\beta,\,\beta)$.

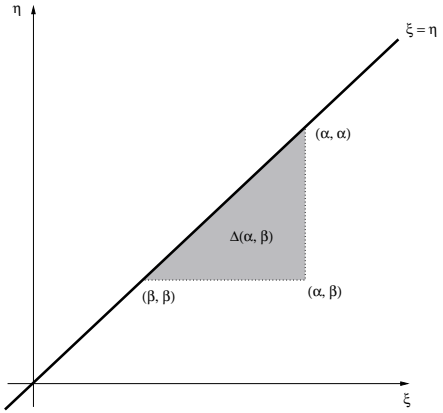

Figura 45.11: O triângulo fechado $\Delta(\alpha,\ \beta)$ definido pelos pontos $(\alpha,\ \beta)$, $(\alpha,\ \alpha)$ e $(\beta,\ \beta)$ com $\alpha > \beta$. A figura também indica a linha $\xi = \eta$ onde as condições iniciais estão definidas. Na Figura 45.12, página 2689, esse triângulo é representado no plano x–t.

Temos, integrando primeiramente em ξ, que

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\Delta(\alpha,\ \beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta}\, d\xi d\eta &= \int_\beta^\alpha \left(\int_\eta^\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta}(\xi,\ \eta)\, d\xi \right) d\eta \\
&= \int_\beta^\alpha \left(\frac{\partial\, w}{\partial\eta}(\alpha,\ \eta) - \frac{\partial\, w}{\partial\eta}(\eta,\ \eta) \right) d\eta \\
&= w(\alpha,\ \alpha) - w(\alpha,\ \beta) - \int_\beta^\alpha \frac{\partial\, w}{\partial\eta}(\eta,\ \eta)\, d\eta \\
&\overset{(45.318)\ \text{e}\ (45.320)}{=} h(\alpha) - w(\alpha,\ \beta) - \int_\beta^\alpha \psi(\eta)\, d\eta\,. \qquad (45.322) \\
&\overset{(45.321)}{=} -w(\alpha,\ \beta) + \frac{h(\alpha)+h(\beta)}{2} + \frac{1}{2}\int_\beta^\alpha \phi(\xi)\, d\xi - \frac{1}{2}\int_\beta^\alpha \psi(\eta)\, d\eta\,. \qquad (45.323)
\end{aligned}$$

que é simétrica em α e β (razão de usarmos (45.321) na última passagem). Assim, provamos que

$$w(\alpha,\ \beta) \;=\; \left(\frac{h(\alpha)+h(\beta)}{2} + \frac{1}{2}\int_\beta^\alpha \varphi(\xi)\, d\xi \right) - \iint\limits_{\Delta(\alpha,\ \beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta}\, d\xi d\eta\,,$$

onde $\varphi := \phi - \psi$, isto é,

$$\varphi(\xi) \;=\; \left(\left(\frac{bc-d}{2c^2} \right) f(\xi) + \frac{1}{c} g(\xi) \right) \exp\left[-\left(\frac{d}{2c^2} \right) \xi \right]\,.$$

Substituindo $\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta}$ do lado direito usando (45.317), obtemos

$$w(\alpha,\ \beta) \;=\; H(\alpha,\ \beta) + \kappa \iint\limits_{\Delta(\alpha,\ \beta)} w(\xi,\ \eta)\, d\xi d\eta \qquad (45.324)$$

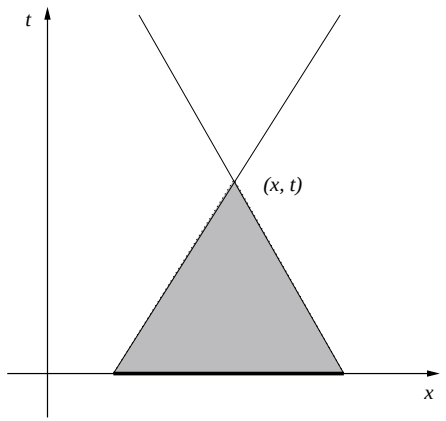

Figura 45.12: O triângulo fechado $\Delta(\alpha,\ \beta)$ representado no plano x–t. As linhas inclinadas representam o cone de luz passando pelo ponto $(x,\ t)$. O segmento em negrito no eixo x representa o domínio de dependência de $(x,\ t)$ em $t = 0$ (vide página 2640).

onde introduzimos

$$H(\alpha,\ \beta) \;:=\; \frac{h(\alpha)+h(\beta)}{2} + \frac{1}{2}\int_\beta^\alpha \varphi(\xi)\, d\xi - \iint\limits_{\Delta(\alpha,\ \beta)} G(\xi,\ \eta)\, d\xi d\eta\,. \qquad (45.325)$$

A equação (45.324) é a equação integral prometida que equivale (como pode ser facilmente constatado) ao problema (45.317)-(45.320). Ela pode ser resolvida iterativamente e para provar existência e unicidade da solução assim obtida faremos uso da Proposição 45.4, que passamos a tratar.

Para $A > B$ fixo seja $C(\Delta(A,\ B))$ o espaço das funções contínuas definidas no triângulo fechado $\Delta(A,\ B)$ do plano ξ-η. Como é bem sabido, $C(\Delta(A,\ B))$ é um espaço métrico completo para a métrica do supremo

$$d_\infty(r_1,\ r_2) \;=\; \sup\left\{ \left| r_1(\xi,\ \eta) - r_2(\xi,\ \eta) \right|,\ (\xi,\ \eta) \in \Delta(A,\ B) \right\}\,,$$

sendo $r_1,\ r_2 \in C(\Delta(A,\ B))$. Para cada $\chi \in C(\Delta(A,\ B))$ a expressão

$$T(\chi)(\alpha,\ \beta) \;=\; H(\alpha,\ \beta) + \kappa \iint\limits_{\Delta(\alpha,\ \beta)} \chi(\xi,\ \eta)\, d\xi d\eta\,, \qquad (\alpha,\ \beta) \subset \Delta(A,\ B)$$

define uma nova função de $C(\Delta(A,\ B))$ (verifique!). Notar que $\Delta(\alpha,\ \beta) \subset \Delta(A,\ B)$ se $(\alpha,\ \beta) \subset \Delta(A,\ B)$.

Proposição 45.4 *Existe $m \in \mathbb{N}$ grande o suficiente tal que T^m é uma contração, ou seja, existe q com $0 \le q < 1$ tal que para todo $\chi_1,\ \chi_2 \in C(\Delta(A,\ B))$ vale $d_\infty\left(T^m(\chi_1),\ T^m(\chi_2)\right) \le q d_\infty\left(\chi_1,\ \chi_2\right)$;* □

Prova. Primeiramente, temos que

$$T(\chi_1)(\alpha,\ \beta) - T(\chi_2)(\alpha,\ \beta) \;=\; \kappa \iint\limits_{\Delta(\alpha,\ \beta)} \left(\chi_1(\xi,\ \eta) - \chi_2(\xi,\ \eta) \right) d\xi d\eta\,.$$

Assim,

$$\left| T(\chi_1)(\alpha,\ \beta) - T(\chi_2)(\alpha,\ \beta) \right| \;\le\; |\kappa|\, d_\infty\left(\chi_1,\ \chi_2\right) \iint\limits_{\Delta(\alpha,\ \beta)} d\xi d\eta \;=\; |\kappa| \frac{(\alpha-\beta)^2}{2}\, d_\infty\left(\chi_1,\ \chi_2\right)\,. \qquad (45.326)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Big|T^2(\chi_1)(\alpha,\,\beta)-T^2(\chi_2)(\alpha,\,\beta)\Big| &= \left|\kappa\iint\limits_{\Delta(\alpha,\,\beta)}\big(T(\chi_1)(\xi,\,\eta)-T(\chi_2)(\xi,\,\eta)\big)\,d\xi d\eta\right| \\ &\overset{(45.326)}{\leq} |\kappa|^2 d_\infty(\chi_1,\,\chi_2)\iint\limits_{\Delta(\alpha,\,\beta)}\frac{(\xi-\eta)^2}{2}\,d\xi d\eta \\ &= |\kappa|^2\frac{(\alpha-\beta)^4}{4!}d_\infty(\chi_1,\,\chi_2)\ .\end{aligned}$$

Acima, usamos a identidade

$$\iint\limits_{\Delta(\alpha,\,\beta)}(\xi-\eta)^n\,d\xi d\eta \;=\; \frac{(\alpha-\beta)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\ ,$$

válida para todo $n\in\mathbb{N}$ e cuja demonstração deixamos como exercício (faça-o!). Daí, é fácil provar por indução que

$$\Big|T^n(\chi_1)(\alpha,\,\beta)-T^n(\chi_2)(\alpha,\,\beta)\Big| \;\leq\; |\kappa|^n\frac{(\alpha-\beta)^{2n}}{(2n)!}d_\infty(\chi_1,\,\chi_2)$$

para todo $n\in\mathbb{N}$.

E. 45.26 *Exercício*. Prove isso. ✣

Assim, como o máximo de $\alpha-\beta$ em $\Delta(A,\,B)$ é $A-B$, teremos

$$d_\infty\Big(T^n(\chi_1),\,T^n(\chi_2)\Big) \;\leq\; |\kappa|^n\frac{(A-B)^{2n}}{(2n)!}d_\infty(\chi_1,\,\chi_2)$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. O fator $|\kappa|^n\frac{(A-B)^{2n}}{(2n)!}$ vai a zero para $n\to\infty$ e, portanto, escolhendo n grande o suficiente esse fator será menor que 1, provando a proposição. ■

Pela generalização do Teorema do Ponto Fixo de Banach representado pela Proposição 26.1, página 1502, concluímos que T tem um e somente um ponto fixo, ou seja, existe uma e somente uma função contínua w em $\Delta(A,\,B)$ tal que $T(w)=w$, ou seja, que satisfaz (45.324). Pelo Teorema Ponto Fixo de Banach, Teorema (26.1), página 1500, essa aplicação pode ser obtida pelo limite $\lim\limits_{n\to\infty}T^n(w_0)$ a partir de qualquer $w_0\in C(\Delta(A,\,B))$.

Escolhendo w_0 como sendo a função identicamente nula $w_0\equiv 0$ teremos $T(w_0)(\xi,\,\eta)=H(\xi,\,\eta)$,

$$T^2(w_0)(\alpha,\,\beta) \;=\; H(\alpha,\,\beta)+\kappa\iint\limits_{\Delta(\alpha,\,\beta)}H(\xi,\,\eta)\,d\xi d\eta$$

e

$$T^3(w_0)(\alpha,\,\beta) \;=\; H(\alpha,\,\beta)+\kappa\iint\limits_{\Delta(\alpha,\,\beta)}H(\xi,\,\eta)\,d\xi d\eta+\kappa^2\iint\limits_{\Delta(\alpha,\,\beta)}\iint\limits_{\Delta(\xi,\,\eta)}H(\sigma,\,\tau)\,d\sigma d\tau\,d\xi d\eta\ .$$

O último termo é uma integral na região

$$\beta\leq\eta\leq\tau\leq\sigma\leq\xi\leq\alpha\ . \tag{45.327}$$

Vamos determiná-la calculando sucessivamente as integrais na seguinte ordem: ξ, η, σ e τ. Fazendo as integrais nessa

ordem e levando em conta os limites de integração fixados em (45.327), obtemos

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Delta(\alpha,\,\beta)}\iint\limits_{\Delta(\xi,\,\eta)}H(\sigma,\,\tau)\,d\sigma d\tau\,d\xi d\eta &= \int_\beta^\alpha\left\{\int_\tau^\alpha\left[\int_\beta^\tau\left(\int_\sigma^\alpha H(\sigma,\,\tau)\,d\xi\right)d\eta\right]d\sigma\right\}d\tau \\ &= \int_\beta^\alpha\left\{\int_\tau^\alpha\left[\int_\beta^\tau(\alpha-\sigma)H(\sigma,\,\tau)\,d\eta\right]d\sigma\right\}d\tau \\ &= \int_\beta^\alpha\left\{\int_\tau^\alpha(\tau-\beta)(\alpha-\sigma)H(\sigma,\,\tau)d\sigma\right\}d\tau \\ &= \iint\limits_{\Delta(\alpha,\,\beta)}(\tau-\beta)(\alpha-\sigma)H(\sigma,\,\tau)\,d\sigma d\tau\end{aligned}$$

Com isso,

$$T^3(w_0)(\xi,\,\eta) \;=\; H(\xi,\,\eta)+\iint\limits_{\Delta(\xi,\,\eta)}\Big[\kappa+\kappa^2(\tau-\eta)(\xi-\sigma)\Big]H(\sigma,\,\tau)\,d\sigma d\tau\ .$$

Vamos provar por indução que para todo n

$$T^n(w_0)(\xi,\,\eta) \;=\; H(\xi,\,\eta)+\iint\limits_{\Delta(\xi,\,\eta)}\left[\sum_{l=0}^{n-2}\kappa^{l+1}\frac{(\tau-\eta)^l(\xi-\sigma)^l}{(l!)^2}\right]H(\sigma,\,\tau)\,d\sigma d\tau\ . \tag{45.328}$$

Supondo isso, teremos

$$T^{n+1}(w_0)(\alpha,\,\beta) \;=\; H(\alpha,\,\eta)+\kappa\iint\limits_{\Delta(\alpha,\,\beta)}H(\xi,\,\eta)\,d\xi d\eta+\kappa\iint\limits_{\Delta(\alpha,\,\beta)}\iint\limits_{\Delta(\xi,\,\eta)}\left[\sum_{l=0}^{n-2}\kappa^{l+1}\frac{(\tau-\eta)^l(\xi-\sigma)^l}{(l!)^2}\right]H(\sigma,\,\tau)\,d\sigma d\tau\,d\xi d\eta\ .$$

Como antes,

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Delta(\alpha,\,\beta)}\iint\limits_{\Delta(\xi,\,\eta)}(\tau-\eta)^l(\xi-\sigma)^lH(\sigma,\,\tau)\,d\sigma d\tau\,d\xi d\eta &= \int_\beta^\alpha\left\{\int_\tau^\alpha\left[\int_\beta^\tau\left(\int_\sigma^\alpha(\tau-\eta)^l(\xi-\sigma)^lH(\sigma,\,\tau)\,d\xi\right)d\eta\right]d\sigma\right\}d\tau \\ &= \int_\beta^\alpha\left\{\int_\tau^\alpha\left[\int_\beta^\tau(\tau-\eta)^l\frac{(\alpha-\sigma)^{l+1}}{l+1}H(\sigma,\,\tau)\,d\eta\right]d\sigma\right\}d\tau \\ &= \int_\beta^\alpha\left\{\int_\tau^\alpha\frac{(\tau-\beta)^{l+1}(\alpha-\sigma)^{l+1}}{(l+1)^2}H(\sigma,\,\tau)\,d\sigma\right\}d\tau \\ &= \iint\limits_{\Delta(\alpha,\,\beta)}\frac{(\alpha-\sigma)^{l+1}(\tau-\beta)^{l+1}}{(l+1)^2}H(\sigma,\,\tau)\,d\sigma d\tau\ .\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}T^{n+1}(w_0)(\alpha,\,\beta) &= H(\alpha,\,\eta)+\kappa\iint\limits_{\Delta(\alpha,\,\beta)}H(\sigma,\,\tau)\,d\sigma d\tau+\iint\limits_{\Delta(\alpha,\,\beta)}\left[\sum_{l=0}^{n-2}\kappa^{l+2}\frac{(\alpha-\sigma)^{l+1}(\tau-\beta)^{l+1}}{((l+1)!)^2}\right]H(\sigma,\,\tau)\,d\sigma d\tau \\ &= H(\alpha,\,\eta)+\kappa\iint\limits_{\Delta(\alpha,\,\beta)}\left[\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\Big(\kappa(\alpha-\sigma)(\tau-\beta)\Big)^l}{(l!)^2}\right]H(\sigma,\,\tau)\,d\sigma d\tau\ ,\end{aligned}$$

provando (45.328).

Como a solução w é dada por $\lim_{n\to\infty} T^n(w_0)$, obtemos

$$w(\xi,\ \eta)\ =\ H(\xi,\ \eta)+\kappa\iint\limits_{\Delta(\xi,\ \eta)}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Big(\kappa(\xi-\sigma)(\tau-\eta)\Big)^l}{(l!)^2}\right]H(\sigma,\ \tau)\,d\sigma d\tau\ .$$

De acordo com a definição das funções de Bessel modificadas introduzidas em (15.139), página 881, a função de Bessel modificada de ordem 0 é dada por $I_0(z) := \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(l!)^2}\ \left(\frac{z}{2}\right)^{2l}$, série essa que converge absolutamente para todo $z\in\mathbb{C}$. Concluímos que

$$w(\xi,\ \eta)\ =\ H(\xi,\ \eta)+\kappa\iint\limits_{\Delta(\xi,\ \eta)} I_0\Big(2\sqrt{\kappa(\xi-\sigma)(\tau-\eta)}\Big)H(\sigma,\ \tau)\,d\sigma d\tau\ . \tag{45.329}$$

Esta é a solução procurada da equação integral (45.324) e, consequentemente, do problema (45.317)-(45.320).

A expressão para a solução u é

$$u(x,\ t)\ =\ \exp\left[\left(\frac{d-bc}{4c^2}\right)(x+ct)+\left(\frac{d+bc}{4c^2}\right)(x-ct)\right]H(x+ct,\ x-ct)$$
$$+\kappa\iint\limits_{\Delta(x+ct,\ x-ct)} I_0\Big(2\sqrt{\kappa(x+ct-\sigma)(\tau-x+ct)}\Big)H(\sigma,\ \tau)\,d\sigma d\tau \tag{45.330}$$

com H dado em (45.325). A esta solução pode-se chegar também por outros métodos, como o método da função de Green e ou o método da função de Riemann, que discutiremos adiante.

Para a equação de ondas, temos $a=b=d=0$ e, nesse caso $\kappa=0$. A solução u fica $u(x,\ t)=H(x-ct,\ x+ct)$, isto é,

$$u(x,\ t)\ =\ \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds+\frac{1}{4c^4}\iint\limits_{\Delta(x-ct,\ x+ct)} F\left(\frac{\xi+\eta}{2},\ \frac{\xi-\eta}{2c}\right)\,d\xi d\eta\ .$$

No caso homogêneo temos $F\equiv 0$ e, assim,

$$u(x,\ t)\ =\ \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds\ ,$$

que é a bem-conhecida solução de D'Alembert encontrada em (45.129), página 2639.

Como esperado, uma simples inspeção da solução geral (45.330), acima, comprova que a mesma respeita o princípio de causalidade de Einstein, típico de sistemas hiperbólicos: as influências que determinam a solução u no ponto $(x,\ t)$ posteriores ao instante $t'=0$ encontram-se no cone de luz passado a $(x,\ t)$ e posterior a $t'=0$ (onde as condições iniciais foram fixadas), ou seja, na região $\{(x',\ t')\in\mathbb{R}^2 | (t-t')^2-c^2(x-x')^2\geq 0,\ 0\leq t'\leq t\}$. Essa região é o triângulo indicado na Figura 45.12, página 2689, e coincide com a triângulo $\Delta(x-ct,\ x+ct)$, que surge na solução u, acima, quando este é representado no plano x–t.

45.12 Aplicações do Método da Função de Green

Um método importante para a solução de equações diferenciais lineares não-homogêneas, submetidas a certas condições de contorno, é o chamado *método da função de Green*[63]. Esse método é de relevância tanto teórica quanto prática em diversas áreas da Física, como no Eletromagnetismo, na Teoria de Transporte (como na Teoria da Difusão de Calor), na Teoria da Elasticidade, na Mecânica dos Fluidos etc. Nesta Seção vamos descrever operacionalmente como o método funciona e tratar de diversos exemplos de aplicação. Faremos uso de transformadas de Fourier e um certo conhecimento prévio da noção de *distribuição* será também suposto. Tais noções são desenvolvidas no Capítulo 39, página 2162.

[63] George Green (1793–1841).

Advertimos o leitor quando ao fato que, no espírito do presente capítulo, concentraremo-nos nos aspectos operacionais do método da função de Green, deixando sua discussão matematicamente precisa para o Capítulo 39, página 2162.

• **O método da função de Green**

Vamos brevemente, e de forma matematicamente informal, descrever o chamado *método da função de Green* para a resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e não-homogêneas em um aberto conexo Ω de $\mathbb{R}^n$ submetidas a condições de contorno lineares e homogêneas na fronteira de Ω, tais como condições de Dirichlet ou Neumann.

Seja $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_N$ um conjunto de n-multi-índices[64] não-nulos distintos com $|\alpha_1|\leq\cdots\leq|\alpha_N|$. Seja $\mathcal{L}$ um operador diferencial linear de ordem $|\alpha_N|$ com coeficientes constantes da forma

$$\mathcal{L}\ =\ \sum_{k=1}^{N} a_k\,D^{\alpha_k}\ =\ \sum_{k=1}^{N} a_k\,\frac{\partial^{|\alpha_k|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\ ,$$

onde $a_1,\ \ldots,\ a_N$ são constantes. Consideremos a equação diferencial linear com coeficientes constantes e não-homogênea

$$\mathcal{L}u\ =\ h\ , \tag{45.331}$$

definida em um aberto conexo $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. A função $h\equiv h(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ supostamente satisfaz certas condições, tais como como um rápido decaimento no infinito de algumas de suas derivadas (caso Ω não seja limitado) ou outras que garantam a existência de soluções. Em muitos problemas são também supostas condições de contorno lineares e homogênea sobre u, ou seja, condições que u deve satisfazer na fronteira $\partial\Omega$ da região Ω, tais como condições de Dirichlet, de Neumann ou condições mistas (sempre homogêneas).

Uma *solução fundamental* associada ao operador $\mathcal{L}$ é uma solução da equação

$$\mathcal{L}_x H(x,\ y)\ =\ \delta(x-y)\ .$$

De posse de uma solução fundamental para $\mathcal{L}$ podemos obter uma solução particular u_p de $\mathcal{L}u=h$ com

$$u_p(x)\ =\ \int_\Omega H(x,\ y)h(y)\,dy\ ,$$

pois, como se constata, $\mathcal{L}u_p(x)=\int_\Omega \mathcal{L}_x H(x,\ y)h(y)\,dy=\int_\Omega\delta(x-y)h(y)\,dy=h(x)$.

A uma solução fundamental podemos adicionar uma solução da equação homogênea $\mathcal{L}_x V(x,\ y)=0$, obtendo-se, assim, uma nova solução fundamental: $G(x,\ y)=H(x,\ y)+V(x,\ y)$. É evidente que $\mathcal{L}_x G(x,\ y)=\delta(x-y)$ e que $u:=\int_\Omega G(x,\ y)h(y)\,dy$ é também solução de (45.331).

Em muitos casos, a função V pode ser escolhida de forma a fornecer soluções u que satisfaçam as condições de contorno ou subsidiárias do problema do tipo mencionado. Uma solução fundamental G que forneça uma solução particular u satisfazendo tais condições é dita ser uma *função de Green* do problema em questão.

E. 45.27 *Exercício dirigido.* O método acima delineado pode ser ilustrado em um caso elementar. Considere o problema de resolver a equação diferencial unidimensional $u''(x)=f(x)$, com a variável x restrita ao intervalo $[0,\ 1]$, com a solução u sujeita às condições de contorno $u(0)=u(1)=0$, sendo $f:[0,\ 1]\to\mathbb{C}$ uma função contínua dada. Nesse caso, temos $\mathcal{L}=\frac{d^2}{dx^2}$ e a solução fundamental procurada $H(x,\ y)$, com $x,\ y\in[0,\ 1]$ deve satisfazer $\frac{\partial^2}{\partial x^2}H(x,\ y)=\delta(x-y)$. Sabemos (vide E. 39.48, página 2236) que uma solução particular dessa equação é $H(x,\ y)=\frac{1}{2}\big(x-y+|x-y|\big)$. Constate que a solução geral da equação homogênea $\frac{\partial^2}{\partial x^2}V(x,\ y)=0$ é $V(x,\ y)=A(y)x+B(y)$, com A e B sendo funções arbitrárias. Com isso, a solução fundamental mais geral do operador $\mathcal{L}=\frac{d^2}{dx^2}$ é $G(x,\ y)=\frac{1}{2}\big(x-y+|x-y|\big)+A(y)x+B(y)$. Impondo as condições de contorno $G(0,\ y)=0$ e $G(1,\ y)=0$, obtenha $A(y)=y-1$ e $B(y)=0$ e conclua que a função de Green procurada é $G(x,\ y)=\frac{1}{2}\big(|x-y|+2xy-x-y\big)$. Verifique que $u(x)=\int_0^1\frac{1}{2}\big(|x-y|+2xy-x-y\big)f(y)dy$ satisfaz $u''=f$ e as condições de contorno $u(0)=u(1)=0$.

O problema acima é um *problema de Sturm* (estudado na Seção 19.2, página 1072) e a função de Green associada a ele foi obtida com métodos distintos dos acima no Exercício E. 19.11, página 1080. ✣

No que segue vamos mostrar como obter soluções fundamentais e funções de Green de alguns problemas de interesse físico.

[64] A noção de multi-índice foi introduzida na Seção 18.1, página 991.

45.12.1 A Equação de Poisson em Três Dimensões

Consideremos a *equação de Poisson*[65] em $\mathbb{R}^3$: $\Delta u = h$, equação essa que surge naturalmente em problemas de Eletrostática. Uma solução fundamental para a equação de Poisson satisfaz

$$\Delta_x H(x,\ y) \ = \ \delta(x-y)\ , \tag{45.332}$$

$x,\ y \in \mathbb{R}^3$. Seja $\hat{H}(p,\ y)$, com $p \in \mathbb{R}^3$, a transformada de Fourier inversa (em relação à variável x) de $H(x,\ y)$:

$$\hat{H}(p,\ y) \ := \ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ip\cdot x} H(x,\ y)\ d^3x\ .$$

Como $H(x,\ y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ip\cdot x} \hat{H}(p,\ y)\ d^3p$ vemos que (45.332) fica

$$-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ip\cdot x} \|p\|^2 \hat{H}(p,\ y)\ d^3p \ = \ \delta(x-y)\ ,$$

pois $\Delta_x e^{-ip\cdot x} = -\|p\|^2 e^{-ip\cdot x}$. Tomando-se a transformada de Fourier inversa de ambos os lados dessa expressão, obtemos

$$-\|p\|^2 \hat{H}(p,\ y) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ip\cdot y}\ .$$

Logo,

$$H(x,\ y) \ = \ -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\|p\|^2} e^{-ip\cdot(x-y)}\ d^3p\ .$$

Para calcular esta integral, assumamos $x \neq y$ e adotemos um sistema de coordenadas esféricas $(r,\ \theta,\ \varphi)$ com $r \equiv \|p\|$ e com o eixo "z" coincidindo com a direção de $x-y$. Teremos,

$$\begin{aligned}
H(x,\ y) \quad &= \quad -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\|p\|^2} e^{-ip\cdot(x-y)}\ d^3p \\
&= \quad -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{r^2} e^{-ir\|x-y\|\cos\theta}\ r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr d\theta d\varphi \\
&= \quad -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\pi} e^{-ir\|x-y\|\cos\theta} \operatorname{sen}\theta d\theta \right) dr \\
&\overset{u=\cos\theta}{=} \quad -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \left(\int_{-1}^{1} e^{-ir\|x-y\|u} du \right) dr \\
&= \quad -\frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\big(r\|x-y\|\big)}{r\|x-y\|} dr \\
&= \quad -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|}\ .
\end{aligned}$$

Na última igualdade usamos que $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Assim, uma solução fundamental para a equação de Poisson em $\mathbb{R}^3$ é

$$H(x,\ y) \ = \ -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|}\ , \tag{45.333}$$

para $x \neq y$. Uma solução fundamental mais geral G é obtida adicionando-se a esta uma solução da equação de Laplace (a equação de Poisson homogênea) $\Delta_x V(x,\ y) = 0$:

$$G(x,\ y) \ = \ -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} + V(x,\ y)\ .$$

[65] Siméon Denis Poisson (1781–1840).

Do Teorema 46.1, página 2735, aprendemos, porém, que se exigirmos que V e seu gradiente em x decaiam rapidamente a zero no infinito, então V deverá ser identicamente nula. Assim, podemos afirmar que a função de Green para a equação de Poisson em $\mathbb{R}^3$ sob as condições $\lim_{\|y\|\to\infty} |u(y)| = 0$ e $\lim_{\|y\|\to\infty} \|y\| \left\| \vec{\nabla} u(y) \right\| = 0$ é aquela dada em (45.333). A solução procurada da equação de Poisson nesse caso será, portanto,

$$u(x) \ = \ -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{h(y)}{\|x-y\|}\ d^3y\ , \tag{45.334}$$

pressupondo, é claro, que a função h seja tal que a integral acima esteja bem definida e seja tal que as condições de contorno mencionadas sejam satisfeitas. Vide Teorema 46.2, página 2736.

Em muitos casos a função V pode ser escolhida dentre as soluções da equação de Laplace de sorte fornecer uma solução u que satisfaça condições de contorno na fronteira de uma região finita Ω. Esse tema não será desenvolvido aqui, sendo tratado no Capítulo 46, página 2732. Vide também [467] ou [277].

45.12.2 A Equação de Difusão Não-Homogênea

Consideremos a *equação de difusão não-homogênea* em n dimensões espaciais

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta \right) u(x,\ t) \ = \ h(x,\ t)\ , \tag{45.335}$$

com $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$ e com $D > 0$, constante. Para esse caso, interessamo-nos pela solução fundamental associada ao *operador de difusão* $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - D\Delta$, ou seja, pela solução G de

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta_x \right) G(x,\ t;\ x',\ t') \ = \ \delta(x-x')\delta(t-t')\ , \tag{45.336}$$

com $x,\ x' \in \mathbb{R}^n$ e $t,\ t' \in \mathbb{R}$. Seja $\widehat{G}(p,\ p_0;\ x',\ t')$ a transformada de Fourier inversa de G em relação às variáveis $(x,\ t)$:

$$\widehat{G}(p,\ p_0;\ x',\ t') \ := \ \frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{ip\cdot x + ip_0 t} G(x,\ t;\ x',\ t')\ d^nx dt\ ,$$

com $p \in \mathbb{R}^n$ e $p_0 \in \mathbb{R}$. Como

$$G(x,\ t;\ x',\ t') \ = \ \frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-ip\cdot x - ip_0 t} \widehat{G}(p,\ p_0;\ x',\ t')\ d^npdp_0\ , \tag{45.337}$$

temos por (45.336) que

$$\frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-ip\cdot x - ip_0 t} \big(-ip_0 + D\|p\|^2 \big) \widehat{G}(p,\ p_0;\ x',\ t')\ d^npdp_0 \ = \ \delta(x-x')\delta(t-t')\ ,$$

onde $\|p\|^2 = p_1^2 + \cdots + p_n^2$. Tomando a transformada inversa de ambos os lados em relação a $(x,\ t)$, teremos

$$\big(-ip_0 + D\|p\|^2 \big) \widehat{G}(p,\ p_0;\ x',\ t') \ = \ \frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}} e^{ip\cdot x' + ip_0 t'}\ . \tag{45.338}$$

Assim, temos de (45.337)

$$\begin{aligned}
G(x,\ t;\ x',\ t') \quad &= \quad \frac{i}{(2\pi)^{(n+1)}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{e^{-ip\cdot(x-x') - ip_0(t-t')}}{p_0 + iD\|p\|^2}\ d^npdp_0 \\
&= \quad \frac{i}{(2\pi)^{(n+1)}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ip\cdot(x-x')} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ip_0(t-t')}}{p_0 + iD\|p\|^2}\ dp_0 \right) d^np\ .
\end{aligned}$$

A integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ip_0(t-t')}}{p_0 + iD\|p\|^2} dp_0$ pode ser calculada pelo método de integração no plano complexo. Temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ip_0(t-t')}}{p_0 + iD\|p\|^2}\ dp_0 \ = \ \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-ip_0(t-t')}}{p_0 + iD\|p\|^2}\ dp_0 \ = \ \lim_{R\to\infty} \oint_{C_R} \frac{e^{-iz(t-t')}}{z + iD\|p\|^2}\ dz\ ,$$

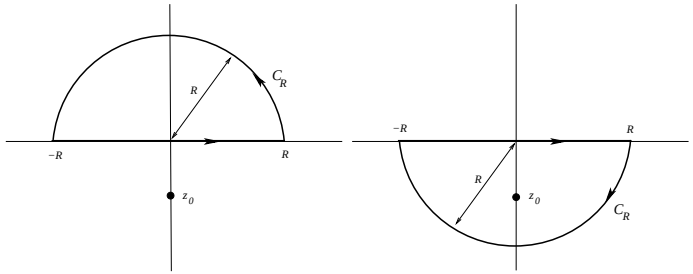

Figura 45.13: Os dois caminhos de integração C_R em $\mathbb{C}$. Em ambos $z_0 = -iD\|p\|^2$. O esquerdo é tomado caso $t - t' < 0$ e o direito caso $t - t' > 0$.

onde C_R é uma das duas curvas em $\mathbb{C}$ exibidas na Figura 45.13, página 2696, a escolha sendo feita de acordo com o sinal de $t - t'$.

A função de variável complexa $z \mapsto \frac{e^{-iz(t-t')}}{z+iD\|p\|^2}$ exibe uma única singularidade, de tipo polo simples, em $z_0 = -iD\|p\|^2 \equiv z_0$, número complexo esse que tem parte real nula e parte imaginária negativa (vide Figura 45.13).

No caso $t - t' < 0$ não há singularidades dentro da região limitada pela curva C_R e, portanto, $\oint_{C_R} \frac{e^{-iz(t-t')}}{z+iD\|p\|^2}\, dz = 0$. No caso $t - t' > 0$ o integrando possui um polo simples em $z_0 = -iD\|p\|^2$, como mencionamos. Assim, a fórmula integral de Cauchy diz-nos que nesse caso vale $\oint_{C_R} \frac{e^{-iz(t-t')}}{z+iD\|p\|^2}\, dz = -2\pi i e^{-D(t-t')\|p\|^2}$ (o sinal "-" em frente dessa expressão sendo devido ao fato de a integração ser, nesse caso, tomada no sentido horário). Temos, portanto, no caso geral

$$\oint_{C_R} \frac{e^{-iz(t-t')}}{z+iD\|p\|^2}\, dz \;=\; -H(t-t')2\pi i e^{-D(t-t')\|p\|^2}\;,$$

onde H é a função de Heaviside[66]: $H(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0\,, \\ 0, & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$ Vide (39.174). Temos, portanto,

$$\begin{aligned} G(x,\, t;\, x',\, t') &= H(t-t')\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ip\cdot(x-x')-D(t-t')\|p\|^2}\, d^n p \\ &= H(t-t')\frac{e^{-\frac{\|x-x'\|^2}{4D(t-t')}}}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-D(t-t')\left\|p+i\frac{(x-x')}{2D(t-t')}\right\|^2}\, d^n p \\ &= H(t-t')\frac{e^{-\frac{\|x-x'\|^2}{4D(t-t')}}}{\big(4\pi D(t-t')\big)^{n/2}}\,. \end{aligned}$$

A integral Gaussiana, acima, pode ser calculada de diversas formas (vide, por exemplo, (39.72) ou (39.77)). Assim, a solução fundamental do operador de difusão é

$$G(x,\, t;\, x',\, t') \;=\; H(t-t')\frac{e^{-\frac{\|x-x'\|^2}{4D(t-t')}}}{\big(4\pi D(t-t')\big)^{n/2}} \tag{45.339}$$

[66] Oliver Heaviside (1850–1925).

e temos para a equação de difusão não-homogênea (45.335) a solução

$$u(x,\, t) \;=\; \int_{\mathbb{R}^{n+1}} G(x,\, t;\, x',\, t')\, h(x',\, t')\, d^n x'\, dt' \;=\; \int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{\|x-x'\|^2}{4D(t-t')}}}{\big(4\pi D(t-t')\big)^{n/2}}\, h(x',\, t')\, d^n x'\, dt'\;.$$

É interessante observar que a solução acima obedece o *princípio de causalidade* ("causas precedem seus efeitos"), manifesto no fato que o valor de u no instante t depende dos valores de h em instantes t' com $t' \leq t$ e não dos valores futuros com $t' > t$.

45.12.3 A Equação de Ondas Não-Homogênea em $n+1$-Dimensões

Vamos agora considerar a equação de ondas não-homogênea em $n+1$ dimensões, i.e., n dimensões espaciais e uma temporal com $n \geq 1$. Vamos desenvolver algumas ideias para n arbitrário e depois iremos nos especializar nos casos $n = 3$, $n = 2$ e $n = 1$. A equação considerada é

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(x,\, t) \;=\; h(x,\, t)\;. \tag{45.340}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, com $c > 0$, constante. No caso $n = 3$, essa equação é de suma importância em Física, sobretudo na Eletrodinâmica. O operador diferencial a ser considerado é o *operador de onda* $\mathcal{L} = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ cuja solução fundamental a ser obtida satisfaz,

$$\left(\Delta_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(x,\, t;\, x',\, t') \;=\; \delta(x-x')\delta(t-t')\;. \tag{45.341}$$

Seja $\widehat{G}(p,\, p_0;\, x',\, t')$ a transformada de Fourier inversa de G em relação às variáveis $(x,\, t)$:

$$\widehat{G}(p,\, p_0;\, x',\, t') \;:=\; \frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{ip\cdot x + ip_0 t} G(x,\, t;\, x',\, t')\, d^n x dt\;,$$

com $p \in \mathbb{R}^n$ e $p_0 \in \mathbb{R}$. Como

$$G(x,\, t;\, x',\, t') \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-ip\cdot x - ip_0 t}\widehat{G}(p,\, p_0;\, x',\, t')\, d^n p dp_0\;, \tag{45.342}$$

temos por (45.341) que

$$\frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-ip\cdot x - ip_0 t}\big(c^{-2}p_0^2 - \|p\|^2\big)\widehat{G}(p,\, p_0;\, x',\, t')\, d^n p\, dp_0 \;=\; \delta(x-x')\delta(t-t')\;,$$

onde $\|p\|^2 = p_1^2 + \cdots + p_n^2$. Tomando a transformada inversa de ambos os lados em relação a $(x,\, t)$, teremos

$$\big(p_0^2 - c^2\|p\|^2\big)\widehat{G}(p,\, p_0;\, x',\, t') \;=\; \frac{c^2}{(2\pi)^{(n+1)/2}} e^{ip\cdot x' + ip_0 t'}\;. \tag{45.343}$$

Uma distinção importante entre essa relação e (45.338) é que o fator $\big(p_0^2 - c^2\|p\|^2\big)$ possui zeros reais (para p_0) em $p_0 = \pm c\|p\|$, enquanto que em (45.338) o fator $(ip_0 - D\|p\|^2)$ possui apenas o zero complexo em $p_0 = -iD\|p\|^2$. Esse fato se reflete na importante observação de que a solução $\widehat{G}$ de (45.343) é determinada a menos de uma combinação linear

$$\gamma_+(p,\, x',\, t')\frac{1}{\|p\|}\delta\left(p_0 - c\|p\|\right) + \gamma_-(p,\, x',\, t')\frac{1}{\|p\|}\delta\left(p_0 + c\|p\|\right)$$

pois, recordando o fato que $x\delta(x) = 0$, temos que

$$\gamma_+(p,\, x',\, t')\big(p_0 + c\|p\|\big)\big(p_0 - c\|p\|\big)\frac{1}{\|p\|}\delta\big(p_0 - c\|p\|\big) \;=\; \gamma_+(p,\, x',\, t')2c\|p\|\frac{1}{\|p\|}\big(p_0 - c\|p\|\big)\delta\big(p_0 - c\|p\|\big) \;=\; 0\;,$$

e analogamente com o termo com γ_-. Dessa forma, podemos escrever

$$\widehat{G}(p,\ p_0;\ x',\ t') \ =\ \frac{c^2}{(2\pi)^{(n+1)/2}}\,\frac{e^{ip\cdot x'+ip_0t'}}{\big(p_0-c\|p\|\big)\big(p_0+c\|p\|\big)}+\frac{\gamma_+(p,\ x',\ t')}{\|p\|}\delta\big(p_0-c\|p\|\big)+\frac{\gamma_-(p,\ x',\ t')}{\|p\|}\delta\big(p_0+c\|p\|\big)\ ,$$

e de (45.342) obtemos

$$G(x,\ t;\ x',\ t') \ =\ \frac{c^2}{(2\pi)^{n+1}}\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\frac{e^{-ip\cdot(x-x')-ip_0(t-t')}}{\big(p_0-c\|p\|\big)\big(p_0+c\|p\|\big)}\,d^np\,dp_0$$

$$+\ \frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\gamma_+(p,\ x',\ t')}{\|p\|}e^{-ip\cdot x-ic\|p\|t}\,d^np+\frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\gamma_-(p,\ x',\ t')}{\|p\|}e^{-ip\cdot x+ic\|p\|t}\,d^np\ , \quad (45.344)$$

com $\gamma_\pm$ estando por ora indeterminadas. É relevante observarmos que os dois últimos termos são soluções da equação de ondas homogênea $\left(\Delta_x-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u(x,\ t)=0$, pois as funções $e^{-ip\cdot x\mp ic\|p\|t}$ são soluções dessa equação. Assim, de acordo com nossas observações gerais, esses dois últimos termos podem ou não ser adicionados à solução conforme a conveniência. Vamos agora nos concentrar no primeiro termo da última expressão, que vamos denotar por $G_0(x,\ t;\ x',\ t')$. Temos

$$G_0(x,\ t;\ x',\ t') \ =\ \frac{c^2}{(2\pi)^{n+1}}\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\frac{e^{-ip\cdot(x-x')-ip_0(t-t')}}{\big(p_0-c\|p\|\big)\big(p_0+c\|p\|\big)}\,d^npdp_0$$

$$=\ \frac{c^2}{(2\pi)^{n+1}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ip_0(t-t')}}{\big(p_0-c\|p\|\big)\big(p_0+c\|p\|\big)}\,dp_0\right)e^{-ip\cdot(x-x')}\,d^np\ . \quad (45.345)$$

As integrais acima devem ser entendidas no sentido de valor principal e vamos passar agora a delicada tarefa de calculá-las e analisá-las. A integral em p_0, que denotamos por $I(t-t')$, é dada por[67]

$$I(t-t') \ =\ \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to0}I_{R,\,\epsilon}(t-t')\ ,\qquad\text{onde}\qquad I_{R,\,\epsilon}(t-t')\ :=\ \int_{L(R,\,\epsilon)}\frac{e^{-ip_0(t-t')}}{\big(p_0-c\|p\|\big)\big(p_0+c\|p\|\big)}\,dp_0\ , \quad (45.346)$$

com $L(R,\,\epsilon)$ sendo a união dos intervalos de $\mathbb{R}$ indicados na Figura 45.14, página 2699, isto é,

$$L(R,\,\epsilon)\ =\ \big(-R,\ -c\|p\|-\epsilon\big)\cup\big(-c\|p\|+\epsilon,\ c\|p\|-\epsilon\big)\cup\big(c\|p\|+\epsilon,\ R\big)\ ,$$

ou seja,

$$I_{R,\,\epsilon}(t-t') \ :=\ \int_{-R}^{-c\|p\|-\epsilon}\frac{e^{-ip_0(t-t')}}{\big(p_0-c\|p\|\big)\big(p_0+c\|p\|\big)}\,dp_0$$

$$+\int_{-c\|p\|+\epsilon}^{c\|p\|-\epsilon}\frac{e^{-ip_0(t-t')}}{\big(p_0-c\|p\|\big)\big(p_0+c\|p\|\big)}\,dp_0+\int_{c\|p\|+\epsilon}^{R}\frac{e^{-ip_0(t-t')}}{\big(p_0-c\|p\|\big)\big(p_0+c\|p\|\big)}\,dp_0\ .$$

$I(t-t')$ é melhor calculada encarando as integrais acima como integrais no plano complexo e escrevendo

$$I_{R,\,\epsilon}(t-t') \ =\ \int_{B_{R,\,\epsilon}}\frac{e^{-iz(t-t')}}{\big(z-c\|p\|\big)\big(z+c\|p\|\big)}\,dz-\int_{A_{1,\,\epsilon}}\frac{e^{-iz(t-t')}}{\big(z-c\|p\|\big)\big(z+c\|p\|\big)}\,dz-\int_{A_{2,\,\epsilon}}\frac{e^{-iz(t-t')}}{\big(z-c\|p\|\big)\big(z+c\|p\|\big)}\,dz\ ,$$

onde $B_{R,\,\epsilon}$, $A_{1,\,\epsilon}$ e $A_{2,\,\epsilon}$ são indicados na Figura 45.15, página 2699. $A_{1,\,\epsilon}$ é um semicírculo de raio ϵ centrado em $-c\|p\|$ e $A_{2,\,\epsilon}$ é um semicírculo de raio ϵ centrado em $c\|p\|$.

[67] A ordem dos limites em (45.346) não pode ser alterada.

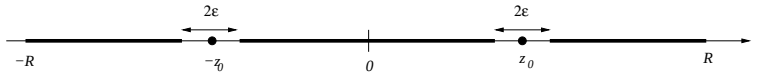

Figura 45.14: Os três segmentos com maior espessura representam o conjunto de segmentos de reta $L(R,\ \epsilon)$. Acima, $z_0=c\|p\|$.

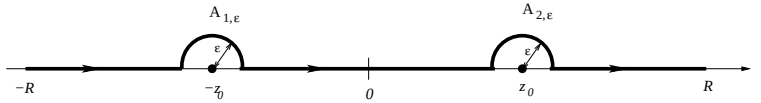

Figura 45.15: O caminho de integração $B_{R,\,\epsilon}$, conectando $-R$ a R com os semicírculos $A_{1,\,\epsilon}$ e $A_{2,\,\epsilon}$. Acima, $z_0=c\|p\|$. $A_{1,\,\epsilon}$ é um semicírculo de raio ϵ centrado em $-c\|p\|$ e $A_{2,\,\epsilon}$ é um semicírculo de raio ϵ centrado em $c\|p\|$.

Vamos agora estudar cada uma das integrais acima, começando pela integral em $A_{1,\,\epsilon}$. Os pontos em $A_{1,\,\epsilon}$ podem ser parametrizados por um ângulo $\theta\in[0,\ \pi]$ como $z=-c\|p\|+\epsilon e^{i\theta}$ com $dz=ie^{i\theta}d\theta$. Assim,

$$\int_{A_{1,\,\epsilon}}\frac{e^{-iz(t-t')}}{\big(z-c\|p\|\big)\big(z+c\|p\|\big)}\,dz\ =\ -e^{ic\|p\|(t-t')}\int_{-\pi}^{0}\frac{e^{-i\epsilon e^{i\theta}(t-t')}}{\big(-2c\|p\|+\epsilon e^{i\theta}\big)\big(\epsilon e^{i\theta}\big)}\,i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta\ ,$$

o sinal "-" antes do fator $e^{ic\|p\|(t-t')}$ do lado direito sendo devido ao fato de a integração se dar em sentido horário. É evidente que no limite $\epsilon\to0$ o lado direito converge a $\frac{\pi i}{2c}\frac{e^{ic\|p\|(t-t')}}{\|p\|}$. Analogamente, a integral em $A_{2,\,\epsilon}$ converge a $-\frac{\pi i}{2c}\frac{e^{-ic\|p\|(t-t')}}{\|p\|}$ no limite $\epsilon\to0$, e temos

$$I(t-t') \ =\ \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to0}J_{R,\,\epsilon}(t-t')+\frac{\pi i}{2c}\frac{e^{-ic\|p\|(t-t')}}{\|p\|}-\frac{\pi i}{2c}\frac{e^{ic\|p\|(t-t')}}{\|p\|}\ , \quad (45.347)$$

onde

$$J_{R,\,\epsilon}(t-t') \ :=\ \int_{B_{R,\,\epsilon}}\frac{e^{-iz(t-t')}}{\big(z-c\|p\|\big)\big(z+c\|p\|\big)}\,dz\ .$$

Antes de calcularmos $J_{R,\,\epsilon}(t-t')$, é importante observarmos que a contribuição dos dois últimos termos de (45.347) a $G_0(x,\ t;\ x',\ t')$ (vide (45.345)) é

$$\frac{ic\pi}{2(2\pi)^{n+1}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-ic\|p\|(t-t')}}{\|p\|}e^{-ip\cdot(x-x')}\,d^np-\frac{ic\pi}{(2\pi)^{n+1}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{ic\|p\|(t-t')}}{\|p\|}e^{-ip\cdot(x-x')}\,d^np$$

e a contribuição desses dois termos a $G(x,\ t;\ x',\ t')$ (vide (45.344)) pode ser absorvida nos dois últimos termos de (45.344) pela substituição

$$\gamma_\pm(p,\ x',\ t')\ \longrightarrow\ \gamma_\pm(p,\ x',\ t')\mp\frac{ic\pi}{2(2\pi)^{(n+1)/2}}e^{ip\cdot x'\pm ic\|p\|t'}\ .$$

Passemos agora à determinação de $J_{R,\epsilon}(t-t')$. Utilizando uma técnica bem-conhecida de integração complexa, podemos substituir a curva $B_{R,\epsilon}$ por uma das curvas fechadas $C_{R,\epsilon}$ indicadas na Figura 45.16, página 2700, dependendo de $t-t'$ ser positivo ou negativo, desde que a integral sobre o arco de círculo A_R (vide Figura 45.16) vá a zero quando o limite $R\to\infty$ for tomado.

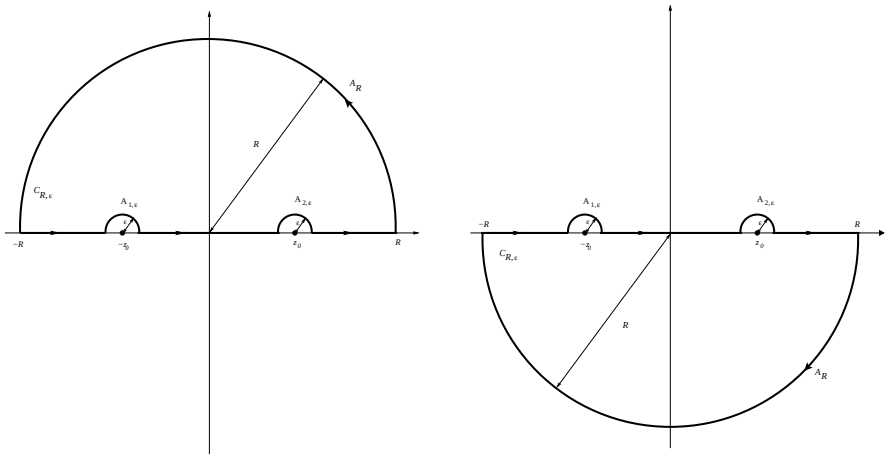

Figura 45.16: Os caminhos de integração $C_{R,\epsilon}$ (curvas fechadas) e os semicírculos $A_{1,\epsilon}$, $A_{2,\epsilon}$ e A_R. Acima, $z_0=c\|p\|$. $A_{1,\epsilon}$ é um semicírculo de raio ϵ centrado em $-c\|p\|$ e $A_{2,\epsilon}$ é um semicírculo de raio ϵ centrado em $c\|p\|$. Por sua vez, A_R é um semicírculo de raio R centrado em 0. Os eixos horizontal e vertical são os eixos real e imaginário, respectivamente. O caminho de integração $C_{R,\epsilon}$ à esquerda é tomado quando $t-t'<0$ e o caminho de integração $C_{R,\epsilon}$ à direita é tomado quando $t-t'>0$. No interior da região delimitada pela curva $C_{R,\epsilon}$ à esquerda não ocorrem polos do integrando, mas sim no interior da região delimitada pela curva $C_{R,\epsilon}$ à direita, a saber em $\pm z_0$.

Para $t-t'<0$ devemos fechar a curva por cima e para $t-t'>0$ devemos fechar a curva por baixo (vide Figura 45.16). No caso $t-t'<0$ a integral em $C_{R,\epsilon}$ anula-se, pois o integrando não possui singularidades no interior da região delimitada por $C_{R,\epsilon}$. No caso $t-t'>0$ a integral em $C_{R,\epsilon}$ é não-nula, pois o integrando tem dois polos simples no interior da região delimitada por $C_{R,\epsilon}$, a saber em $p_0=\pm c\|p\|$. De acordo com a fórmula integral de Cauchy o resultado da integral é $-2\pi i\left(\frac{e^{ic\|p\|(t-t')}}{-2c\|p\|}+\frac{e^{-ic\|p\|(t-t')}}{2c\|p\|}\right)$, o sinal "-" global sendo devido ao fato de a integral ser tomada em sentido horário. Assim, para todo $t-t'$ temos

$$J_{R,\epsilon}(t-t') \;=\; H(t-t')\frac{\pi i}{c}\left(\frac{e^{ic\|p\|(t-t')}}{\|p\|}-\frac{e^{-ic\|p\|(t-t')}}{\|p\|}\right) \;=\; -H(t-t')\frac{2\pi}{c}\frac{\operatorname{sen}\big(c\|p\|(t-t')\big)}{\|p\|}\,.$$

A contribuição dessa expressão a $G(x,\,t;\,x',\,t')$ define a chamada *função de Green retardada*, denotada por $G_{ret}(x,\,t;\,x',\,t')$ e dada por

$$\begin{aligned} G_{ret}(x,\,t;\,x',\,t') \;&:=\; H(t-t')\frac{ic}{2(2\pi)^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\|p\|}e^{ic\|p\|(t-t')-ip\cdot(x-x')}\,d^np-\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\|p\|}e^{-ic\|p\|(t-t')-ip\cdot(x-x')}\,d^np\right)\\ &=\; -H(t-t')\frac{c}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\operatorname{sen}\big(c\|p\|(t-t')\big)}{\|p\|}e^{-ip\cdot(x-x')}\,d^np\,. \end{aligned}\tag{45.348}$$

O cálculo das integrais em (45.348) depende fortemente da dimensão n e no que segue iremos nos especializar nos casos fisicamente mais relevantes, a saber $n=3$, $n=2$ e $n=1$.

45.12.3.1 A Equação de Ondas Não-Homogênea em $3+1$-Dimensões

Vamos agora calcular as integrais em (45.348) no caso $n=3$. Adotando um sistema de coordenadas esféricas $(r,\,\theta,\,\varphi)$ com $r\equiv\|p\|$ e com eixo "z" na direção de $x-x'$, teremos $p\cdot(x-x')=r\|x-x'\|\cos\theta$ e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\|p\|}e^{ic\|p\|(t-t')-ip\cdot(x-x')}\,d^3p \;&=\; \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{r}e^{icr(t-t')-ir\|x-x'\|\cos\theta}\,r^2\,\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\\ &=\; 2\pi\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}e^{icr(t-t')-ir\|x-x'\|\cos\theta}\,r\,\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta\\ &=\; 2\pi\int_0^{\infty}e^{icr(t-t')}\left(\int_0^{\pi}e^{-ir\|x-x'\|\cos\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta\right)r\,dr\\ &\overset{u=\cos\theta}{=}\; 2\pi\int_0^{\infty}e^{icr(t-t')}\left(\int_{-1}^{1}e^{-ir\|x-x'\|u}\,du\right)r\,dr\\ &=\; \frac{2\pi}{i\|x-x'\|}\int_0^{\infty}\left(e^{ir\left(c(t-t')+\|x-x'\|\right)}-e^{ir\left(c(t-t')-\|x-x'\|\right)}\right)dr \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\|p\|}e^{-ic\|p\|(t-t')-ip\cdot(x-x')}\,d^3p \;&=\; \frac{2\pi}{i\|x-x'\|}\int_0^{\infty}\left(e^{ir\left(-c(t-t')-\|x-x'\|\right)}-e^{ir\left(-c(t-t')+\|x-x'\|\right)}\right)dr\\ &\overset{r\to -r}{=}\; \frac{2\pi}{i\|x-x'\|}\int_{-\infty}^{0}\left(e^{ir\left(c(t-t')+\|x-x'\|\right)}-e^{ir\left(c(t-t')-\|x-x'\|\right)}\right)dr \end{aligned}$$

Com isso (45.348) fica

$$\begin{aligned} G_{ret}(x,\,t;\,x',\,t') \;&=\; \frac{c}{8\pi^2}\frac{H(t-t')}{\|x-x'\|}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{ir\left(c(t-t')+\|x-x'\|\right)}\,dr-\int_{-\infty}^{\infty}e^{ir\left(c(t-t')-\|x-x'\|\right)}\,dr\right)\\ &\overset{s:=cr}{=}\; \frac{1}{8\pi^2}\frac{H(t-t')}{\|x-x'\|}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{is\left((t-t')+\frac{\|x-x'\|}{c}\right)}\,ds-\int_{-\infty}^{\infty}e^{is\left((t-t')-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)}\,ds\right)\\ &\overset{(39.83)}{=}\; \frac{1}{4\pi}\frac{H(t-t')}{\|x-x'\|}\left[\delta\left((t-t')+\frac{\|x-x'\|}{c}\right)-\delta\left((t-t')-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)\right]\\ &=\; -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-x'\|}\delta\left((t-t')-\frac{\|x-x'\|}{c}\right), \end{aligned}$$

sendo que, na última igualdade, usamos o fato que

$$H(x)\delta(x-x_0) \;=\; \begin{cases}\delta(x-x_0)\,, & \text{se } x_0>0\,,\\ 0\,, & \text{se } x_0<0\,.\end{cases}$$

Reunindo nossos resultados e retornando a (45.344), obtemos que

$$\begin{aligned} G(x,\,t;\,x',\,t') \;&=\; -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-x'\|}\delta\left((t-t')-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)\\ &\quad+\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\gamma_+(p,\,x',\,t')}{\|p\|}e^{-ip\cdot x-ic\|p\|t}\,d^3p+\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\gamma_-(p,\,x',\,t')}{\|p\|}e^{-ip\cdot x+ic\|p\|t}\,d^3p\,. \end{aligned}$$

Até o presente as funções $\gamma_\pm$ estão indeterminadas, mas é o momento de fazermos certas escolhas baseadas em imposições de natureza física às soluções. Impondo o *princípio de causalidade*, devemos adotar $\gamma_\pm = 0$, o que nos leva à chamada *função de Green retardada*,

$$G_{ret}(x,\ t;\ x',\ t') \ :=\ -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-x'\|}\delta\left((t-t')-\frac{\|x-x'\|}{c}\right) \tag{45.349}$$

como uma solução fundamental do operador de onda $\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ em $3+1$-dimensões. De fato, a expressão do lado direito é nula caso $t < t'$ e conduz, como logo veremos, a soluções que satisfazem o princípio de causalidade. Com (45.349) obtemos para a equação (45.340) a importante solução

$$u_{ret}(x,\ t)\ =\ \int_{\mathbb{R}^4} G_{ret}(x,\ t;\ x',\ t')\,h(x',\ t')\,d^3x'dt'\ =\ -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{h\left(x',\ t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)}{\|x-x'\|}\,d^3x'\,, \tag{45.350}$$

denominada *solução retardada da equação de ondas não-homogênea* (45.340) em $3+1$-dimensões.

É evidente da expressão acima que o valor de u_{ret} no ponto x no instante t depende dos valores de h nos instantes $t-\frac{\|x-x'\|}{c}$, anteriores, portanto, a t. Isso pode ser interpretado como dizendo que a "informação" contida no valor de h em um certo ponto não chega simultaneamente a u_{ret}, mas sim com um certo <u>retardo</u> devido à finitude de propagação de informação. O parâmetro c pode, assim, ser interpretado como a velocidade de propagação de "informação" em um sistema físico obedecendo (45.340).

A solução (45.350) manifestamente satisfaz também o *princípio de Huygens*, ao exibir o fato que $u(x,\ t)$ depende somente dos valores de h na superfície do cone de luz passado centrado em $(x,\ t)$, ou seja, em $\left\{(x',\ t')\in\mathbb{R}^4\middle|\ (x-x')^2 - c^2(t-t')^2,\ t'\le t\right\}$.

É interessante notar também que se formalmente tomarmos $c\to\infty$ a equação (45.340) transforma-se na equação de Poisson $\Delta u = h$ em 3 dimensões espaciais e a solução (45.350) transforma-se na solução (45.334).

• **<u>A função de Green avançada</u>**

Durante o tratamento que nos levou a (45.349) e a (45.350) fizemos algumas escolhas que, sem que o disséssemos, visavam alcançar soluções que respeitassem o princípio de causalidade. A mais importante dessas escolhas foi a de escolher os arcos $A_{1,\,\epsilon}$ e $A_{2,\,\epsilon}$ passando por cima dos polos $\pm c\|p\|$. Se tivéssemos escolhido ambos os arcos passando por baixo desses polos, como na Figura 45.17, página 2703, teríamos chegado à chamada *função de Green avançada*,

$$G_{av}(x,\ t;\ x',\ t') \ :=\ -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-x'\|}\delta\left((t-t')+\frac{\|x-x'\|}{c}\right) \tag{45.351}$$

como uma solução fundamental do operador de onda $\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ em $3+1$-dimensões. Com (45.351) obtemos para a equação (45.340) a solução

$$u_{av}(x,\ t)\ =\ \int_{\mathbb{R}^4} G_{av}(x,\ t;\ x',\ t')\,h(x',\ t')\,d^3x'dt'\ =\ -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{h\left(x',\ t+\frac{\|x-x'\|}{c}\right)}{\|x-x'\|}\,d^3x'\,, \tag{45.352}$$

denominada *solução avançada da equação de ondas não-homogênea* (45.340) em $3+1$-dimensões. A solução expressa em (45.352), ainda que seja uma solução matematicamente legítima de (45.340), não respeita o princípio de causalidade pois, como se percebe, o valor de $u_{av}(x,\ t)$ depende dos valores de h em instantes de tempo <u>posteriores</u> a t.

À primeira vista pode surpreender o estudante que soluções desse tipo existam, mas é preciso recordar que o operador de onda $\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ é invariante pela reversão temporal $t\to -t$ (propriedade não satisfeita pelo operador de difusão $\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta$). Desse ponto de vista, é natural pensarmos que a toda solução causal como $u_{ret}(x,\ t)$ corresponde uma solução não-causal $u_{ret}(x,\ -t)$. O descarte de soluções avançadas na equação de ondas não-homogênea não tem origem matemática, mas deve-se a um requerimento de origem física: a crença de que causas precedem seus efeitos.

Nesse contexto é de se observar também que no caso da equação de difusão o princípio de causalidade surgiu naturalmente, não precisando ser imposto por uma restrição à solução. Tal se deve ao fato de que o operador de difusão não ser invariante por reversão temporal $t\to -t$. Isso se deve à natureza irreversível de processos difusivos, fato intimamente ligado à Segunda Lei da Termodinâmica.

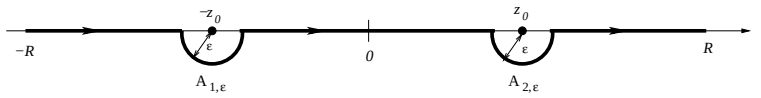

Figura 45.17: O caminho de integração $B_{R,\,\epsilon}$ e os semicírculos $A_{1,\,\epsilon}$ e $A_{2,\,\epsilon}$, agora passando ambos por baixo das singularidades em $\pm z_0 = \pm c\|p\|$.

45.12.3.2 Aplicações à Eletrodinâmica. Potenciais Retardados e Equações de Jefimenko

Nesta seção aplicaremos o método das funções de Green para encontrar as soluções gerais das equações de Maxwell da Eletrodinâmica, um resultado, obviamente, de grande importância na Física. Essas soluções são conhecidas como *Equações de Jefimenko*, ou *Soluções de Jefimenko*.

No chamado sistema internacional de unidades (SI) as equações de Maxwell[68] fora de meios materiais são

$$\nabla\cdot\mathbb{E}\ =\ \frac{\rho}{\epsilon_0}\,, \tag{45.353}$$

$$\nabla\cdot\mathbb{B}\ =\ 0\,, \tag{45.354}$$

$$\vec{\nabla}\times\mathbb{B}\ =\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\mathbb{E}}{\partial t}+\mu_0\mathbb{J}\,, \tag{45.355}$$

$$\vec{\nabla}\times\mathbb{E}\ =\ -\frac{\partial\,\mathbb{B}}{\partial t}\,, \tag{45.356}$$

onde $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$ são os campos elétrico e magnético, respectivamente, ρ sendo a densidade de carga elétrica e $\mathbb{J}$ sendo a densidade de corrente elétrica. As constantes ϵ_0 e μ_0 são denominadas *permissividade do vácuo* e *permeabilidade do vácuo*, respectivamente. A constante $c := (\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$ é a *velocidade da luz*. Seus valores numéricos aproximados atualmente aceitos (no sistema SI) são

$$\epsilon_0\ =\ 8,8541878188(14)\times 10^{-12}\ C^2\cdot kg^{-1}\cdot m^{-3}\cdot s^2\ ,\quad \mu_0\ =\ 1,25663706127(20)\times 10^{-6}\ C^{-2}\cdot kg\cdot m\quad\text{e}\quad c\ =\ 299.792.458\ m/s\ .$$

Como é bem sabido do Eletromagnetismo, uma consequência imediata das equações acima é a lei de conservação de carga elétrica, expressa na equação $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbb{J}=0$, dita *equação de continuidade*. Verifique-a, tomando a derivada temporal de (45.353), usando (45.355) e o fato de o divergente do rotacional de um campo suave ser nulo.

Para ρ e $\mathbb{J}$ dados, decaindo rapidamente a zero no infinito espacial, as equações de Maxwell podem ser resolvidas da seguinte forma. Das equações $\nabla\cdot\mathbb{B}=0$ e $\vec{\nabla}\times\mathbb{E}=-\frac{\partial\,\mathbb{B}}{\partial t}$ escrevemos

$$\mathbb{B}\ =\ \vec{\nabla}\times\mathbb{A}\ ,\qquad \mathbb{E}\ =\ -\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\,\mathbb{A}}{\partial t}\,. \tag{45.357}$$

Os campos ϕ e $\mathbb{A}$ são denominados *potencial escalar* (ou *potencial elétrico*) e *potencial vetor*, respectivamente. Com isso, as equações $\nabla\cdot\mathbb{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$ e $\vec{\nabla}\times\mathbb{B}\ =\ \mu_0\mathbb{J}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\mathbb{E}}{\partial t}$ ficam

$$-\Delta\phi-\frac{\partial\,\nabla\cdot\mathbb{A}}{\partial t}\ =\ \frac{\rho}{\epsilon_0}\qquad\text{e}\qquad \vec{\nabla}\left(\nabla\cdot\mathbb{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\phi}{\partial t}\right)-\Delta\mathbb{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\,\mathbb{A}}{\partial t^2}\ =\ \mu_0\mathbb{J}\,, \tag{45.358}$$

[68] James Clerk Maxwell (1831–1879).

onde usamos o fato que para qualquer campo vetorial $\mathbb{C}$ duas vezes diferenciável vale

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \mathbb{C}\right) \;=\; \vec{\nabla}\big(\nabla \cdot \mathbb{C}\big) - \Delta \mathbb{C}\,. \tag{45.359}$$

Vide (4.29), página 325. Vamos agora provar que podemos escolher os campos ϕ e $\mathbb{A}$ de sorte que valha (45.357) e de sorte que valha também a chamada *condição de Lorenz*[69]:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbb{A} \;=\; 0\,, \tag{45.360}$$

com o que as duas equações em (45.358) transformam-se em

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\,\phi}{\partial t^2} \;=\; -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{e} \qquad \Delta\mathbb{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\,\mathbb{A}}{\partial t^2} \;=\; -\mu_0 \mathbb{J}\,. \tag{45.361}$$

Seja $\lambda \equiv \lambda(x,\,t)$ um campo escalar e definamos

$$\mathbb{A}' \;:=\; \mathbb{A} + \vec{\nabla}\lambda \qquad \text{e} \qquad \phi' \;:=\; \phi - \frac{\partial\,\lambda}{\partial t}\,. \tag{45.362}$$

É fácil constatar que

$$\vec{\nabla} \times \mathbb{A}' \;=\; \vec{\nabla} \times \mathbb{A} \;=\; \mathbb{B} \qquad \text{e} \qquad -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial\,\mathbb{A}'}{\partial t} \;=\; -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\,\mathbb{A}}{\partial t} \;=\; \mathbb{E}\,.$$

Assim, $\mathbb{A}'$ e ϕ' poderiam ser usados em lugar de $\mathbb{A}$ e ϕ em (45.357), pois produzem os mesmos campos elétrico e magnético. Devido a essa propriedade de manterem invariantes as grandezas físicas $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$, as transformações (45.362) são entendidas como transformações de simetria do sistema que consideramos e são denominadas *transformações de calibre*, ou *transformações de "gauge"*. Vamos agora supor que ϕ e $\mathbb{A}$ não satisfaçam a condição (45.360). É fácil verificar que

$$\nabla \cdot \mathbb{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\phi'}{\partial t} \;=\; \nabla \cdot \mathbb{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\phi}{\partial t} + \left(\Delta\lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\,\lambda}{\partial t^2}\right)\,.$$

Logo, se λ for tal que

$$\Delta\lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\,\lambda}{\partial t^2} \;=\; -\left(\nabla \cdot \mathbb{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\phi}{\partial t}\right)\,, \tag{45.363}$$

teremos satisfeita

$$\nabla \cdot \mathbb{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\phi'}{\partial t} \;=\; 0\,,$$

que é a condição (45.360) para ϕ' e $\mathbb{A}'$. A equação (45.363) é uma equação de ondas não-homogênea para λ e uma possível solução é, como vimos, a solução retardada[70]

$$\lambda(x,\,t) \;=\; \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left(\nabla \cdot \mathbb{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\phi}{\partial t}\right)\left(x',\,t - \frac{\|x-x'\|}{c}\right)}{\|x-x'\|}\,d^3x'\,.$$

Assim, existe um campo escalar λ satisfazendo (45.363) e um par de campos ϕ' e $\mathbb{A}'$ satisfazendo (45.360) produzindo os mesmos campos $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$, como queríamos mostrar.

Concluímos que podemos supor ser (45.360) verdadeira e, retornando a (45.358), constatamos que se tratam novamente de duas equações de ondas não-homogêneas, possuindo as soluções retardadas

$$\phi_{ret}(x,\,t) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho\left(x',\,t - \frac{\|x-x'\|}{c}\right)}{\|x-x'\|}\,d^3x' \qquad \text{e} \qquad \mathbb{A}_{ret}(x,\,t) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbb{J}\left(x',\,t - \frac{\|x-x'\|}{c}\right)}{\|x-x'\|}\,d^3x'\,. \tag{45.364}$$

[69] Ludvig Valentin Lorenz (1829–1891). O nome de Lorenz é frequentemente confundido com o de Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928). Lorenz foi um físico dinamarquês enquanto que Lorentz foi um físico holandês, ambos tendo dado contribuições importantes à Eletrodinâmica. Curiosamente, muitos livros-texto denominam incorretamente a condição de Lorenz como "condição de Lorentz", talvez devido ao fato de a condição de Lorenz ser invariante por transformações de Lorentz. Vide também comentários da página 294 da terceira edição de [277]. Na Óptica existe uma importante equação denominada Equação de Lorentz–Lorenz, ou Relação de Clausius–Mossotti (Ottaviano-Fabrizio Mossotti (1791–1863), Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822–1888)).

[70] Neste caso, a solução avançada (ou uma combinação linear convexa das duas) também pode ser tomada, já que não há a necessidade de se impor a condição de causalidade para a o campo auxiliar λ, posto que o mesmo não representa uma grandeza física.

Esses são os chamados *potenciais retardados* (escalar e vetorial, respectivamente). Recordemos que essas não são as soluções mais gerais de (45.361), pois a elas ainda podemos adicionar soluções ϕ_h e $\mathbb{A}_h$ da equação de ondas homogênea. Com os potenciais $\phi_{ret} + \phi_h$ e $\mathbb{A}_{ret} + \mathbb{A}_h$ podemos calcular os campos elétrico e magnético $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$ usando (45.357). Esses potenciais $\phi_{ret} + \phi_h$ e $\mathbb{A}_{ret} + \mathbb{A}_h$ contêm as contribuições das fontes de cargas e correntes elétricas ρ e $\mathbb{J}$ (em ϕ_{ret} e $\mathbb{A}_{ret}$) e de ondas eletromagnéticas vindas do infinito (em ϕ_h e $\mathbb{A}_h$).

• **As equações de Jefimenko**

E. 45.28 *Exercício*. Usando (45.357) e (45.364) obtenha os campos elétrico e magnético retardados

$$\mathbb{E}_{ret}(x,\,t) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\left[\rho\left(x',\,t - \frac{\|x-x'\|}{c}\right)\frac{x-x'}{\|x-x'\|^3} + \frac{1}{c}\frac{x-x'}{\|x-x'\|^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\left(x',\,t - \frac{\|x-x'\|}{c}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{c^2}\frac{1}{\|x-x'\|}\left(\frac{\partial\mathbb{J}}{\partial t}\right)\left(x',\,t - \frac{\|x-x'\|}{c}\right)\right]d^3x' \tag{45.365}$$

e

$$\mathbb{B}_{ret}(x,\,t) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\left[\mathbb{J}\left(x',\,t - \frac{\|x-x'\|}{c}\right) + \frac{\|x-x'\|}{c}\left(\frac{\partial\mathbb{J}}{\partial t}\right)\left(x',\,t - \frac{\|x-x'\|}{c}\right)\right] \times \frac{x-x'}{\|x-x'\|^3}\,d^3x'\,. \tag{45.366}$$

As equações (45.365) e (45.366) são denominadas *equações de Jefimenko*[71]. É interessante, e recomendado ao estudante, comparar (45.364), (45.365) e (45.366) às soluções (46.33) e (46.34) da Eletrostática e da Magnetostática.

As equações de Jefimenko representam a soluções das equações de Maxwell para campos produzidos por uma dada distribuição de cargas e correntes localizadas em um passado finito, não incluindo campos eletromagnéticos provenientes de fontes localizadas no infinito passado.

É um tanto surpreendente e curioso que as equações de Jefimenko (45.365) e (45.366) aparentemente só foram apresentadas e discutidas em sua forma acima nos anos sessenta do Séc. XX. A referência do trabalho original de Jefimenko é o livro-texto listado em [282], de 1966. No entanto, as equações de Jefimenko parecem ter surgido pela primeira vez (em uma versão equivalente àquela acima) na edição de 1962 do livro de Eletromagnetismo de Panofsky e Phillips (ref. [420]). Para um texto mais recente, vide [277]. ✣

E. 45.29 *Exercício*. Tomando o rotacional de ambos os lados das equações de Maxwell $\vec{\nabla} \times \mathbb{E} = -\frac{\partial\,\mathbb{B}}{\partial t}$ e $\vec{\nabla} \times \mathbb{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\mathbb{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbb{J}$, usando essas mesmas equações e (45.359), obtenha

$$\vec{\nabla}\big(\nabla \cdot \mathbb{E}\big) - \Delta\mathbb{E} \;=\; -\mu_0\frac{\partial\,\mathbb{J}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\,\mathbb{E}}{\partial t^2} \qquad \text{e} \qquad \vec{\nabla}\big(\nabla \cdot \mathbb{B}\big) - \Delta\mathbb{B} \;=\; \mu_0\vec{\nabla} \times \mathbb{J} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\,\mathbb{B}}{\partial t^2}\,.$$

Usando as duas equações de Maxwell restantes $\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ e $\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$, obtenha disso

$$\Delta\mathbb{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\,\mathbb{E}}{\partial t^2} \;=\; \frac{1}{\epsilon_0}\left(\vec{\nabla}\rho + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\mathbb{J}}{\partial t}\right)\,, \tag{45.367}$$

$$\Delta\mathbb{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\,\mathbb{B}}{\partial t^2} \;=\; -\mu_0\vec{\nabla} \times \mathbb{J}\,. \tag{45.368}$$

Trata-se novamente de equações de ondas não-homogêneas e obtenha para as mesmas as soluções retardadas

$$\mathbb{E}_{ret}(x,\,t) \;=\; -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\|x-x'\|}\left(\vec{\nabla}\rho + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\mathbb{J}}{\partial t}\right)\left(x',\,t - \frac{\|x-x'\|}{c}\right)\,d^3x'\,, \tag{45.369}$$

$$\mathbb{B}_{ret}(x,\,t) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\|x-x'\|}\big(\vec{\nabla} \times \mathbb{J}\big)\left(x',\,t - \frac{\|x-x'\|}{c}\right)\,d^3x'\,. \tag{45.370}$$

Analogamente às equações de Jefimenko (45.365) e (45.366), as expressões (45.369) e (45.370) também fornecem os campos elétrico e magnético em termos das fontes de carga e de corrente retardadas. A relação de (45.369) e (45.370) com as equações de Jefimenko (45.365) e (45.366) é estabelecida no Exercício E. 45.30.

Note que nas expressões (45.369) e (45.370) comparecem nas integrais do lado direito derivadas espaciais das fontes ρ e $\mathbb{J}$, em contraste com as equações de Jefimenko (45.365) e (45.366). Uma vantagem das equações de Jefimenko sobre (45.369) e (45.370) está no fato que com aquelas é mais fácil obter o limite da Eletrostática e Magnetostática (quando ρ e $\mathbb{J}$ independem do tempo) e suas correções. ✣

[71] Oleg Dmitrovich Jefimenko (1922–2009).

E. 45.30 *Exercício*. Obtenha as equações de Jefimenko (45.365) e (45.366) a partir de (45.369) e (45.370). *Sugestão:* 1º Prove usando a regra da cadeia que

$$\vec{\nabla}'\left(\rho\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)\right) \;=\; (\vec{\nabla}\rho)\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)\frac{x-x'}{\|x-x'\|}\,, \tag{45.371}$$

onde $\vec{\nabla}'$ é o gradiente em relação a x' e por $(\vec{\nabla}\rho)$ entendemos a função gradiente de ρ. 2º Prove usando a regra da cadeia que

$$\vec{\nabla}'\times\left(\mathbb{J}\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)\right) \;=\; (\vec{\nabla}\times\mathbb{J})\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathbb{J}}{\partial t}\right)\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)\times\frac{x-x'}{\|x-x'\|}\,, \tag{45.372}$$

onde $\vec{\nabla}'\times$ é o rotacional em relação a x' etc. 3º Use integração por partes. ✣

• **As equações de Jefimenko na presença de monopolos magnéticos**

No caso de haverem fontes monopolares de campo magnético (não há presentemente evidência experimental de sua existência no mundo real[72]) as equações de Maxwell fora de meios materiais devem supostamente assumir a seguinte forma no chamado sistema internacional (SI) de unidades (com a convenção adicional de que a unidade de carga magnética é Ampère × metro):

$$\nabla\cdot\mathbb{E} \;=\; \frac{\rho_e}{\epsilon_0}\,, \tag{45.373}$$

$$\nabla\cdot\mathbb{B} \;=\; \mu_0\rho_m\,, \tag{45.374}$$

$$\vec{\nabla}\times\mathbb{B} \;=\; \frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\mathbb{E}}{\partial t}+\mu_0\mathbb{J}_e\,, \tag{45.375}$$

$$\vec{\nabla}\times\mathbb{E} \;=\; -\frac{\partial\,\mathbb{B}}{\partial t}-\mu_0 J_m\,, \tag{45.376}$$

com $c:=\frac{1}{\sqrt{\mu_o\epsilon_0}}$, onde $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$ são os campos elétrico e magnético, respectivamente, ρ_e sendo a densidade de carga elétrica, $\mathbb{J}_e$ sendo a densidade de corrente elétrica, ρ_m sendo a densidade de carga magnética e $\mathbb{J}_m$ sendo a densidade de corrente magnética.

E. 45.31 *Exercício*. Novamente, uma consequência imediata das equações acima é a lei de conservação de carga elétrica, expressa na equação de continuidade $\frac{\partial\,\rho_e}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbb{J}_e=0$ e da carga magnética, expressa na equação continuidade $\frac{\partial\,\rho_m}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbb{J}_m=0$. Verifique a primeira tomando a derivada temporal de (45.373) e usando (45.375) e a segunda tomando a derivada temporal de (45.374) e usando (45.376). Em ambos os casos, use também o fato de o divergente do rotacional de um campo suave ser nulo. ✣

No caso das equações (45.373)-(45.376) não é mais possível introduzir os potenciais $\mathbb{A}$ e ϕ e escrever $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$ na forma (45.357), mas para ρ_e e $\mathbb{J}_e$, ρ_m e $\mathbb{J}_m$ dados, suaves e decaindo rapidamente a zero no infinito espacial, as equações de Maxwell podem ser resolvidas de forma análoga ao caso anterior, sem monopolos magnéticos. Esse é o conteúdo do exercício que segue.

E. 45.32 *Exercício*. Tomando o rotacional de ambos os lados das equações de Maxwell (45.376) e (45.375), usando essas mesmas equações e (45.359), obtenha

$$\vec{\nabla}(\nabla\cdot\mathbb{E})-\Delta\mathbb{E} \;=\; -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbb{E}}{\partial t^2}-\mu_0\frac{\partial\,\mathbb{J}_e}{\partial t}-\mu_0\vec{\nabla}\times\mathbb{J}_m \qquad\text{e}\qquad \vec{\nabla}(\nabla\cdot\mathbb{B})-\Delta\mathbb{B} \;=\; -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbb{B}}{\partial t^2}+\mu_0\vec{\nabla}\times\mathbb{J}_e-\frac{\mu_0}{c^2}\frac{\partial\,\mathbb{J}_m}{\partial t}\,.$$

Usando as duas equações de Maxwell restantes $\nabla\cdot\mathbb{E}=\frac{\rho_e}{\epsilon_0}$ e $\nabla\cdot\mathbb{B}=\mu_0\rho_m$, obtenha disso

$$\Delta\mathbb{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbb{E}}{\partial t^2} \;=\; \frac{1}{\epsilon_0}\left(\vec{\nabla}\rho_e+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\mathbb{J}_e}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\times\mathbb{J}_m\right)\,, \tag{45.377}$$

$$\Delta\mathbb{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbb{B}}{\partial t^2} \;=\; \mu_0\left(\vec{\nabla}\rho_m+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\mathbb{J}_m}{\partial t}-\vec{\nabla}\times\mathbb{J}_e\right)\,. \tag{45.378}$$

[72] Para um artigo de revisão relativamente recente, vide, *e.g.*, Kimball A. Milton, *"Theoretical and experimental status of magnetic monopoles", Rep. Prog. Phys.* **69**, *1637–1711 (2006).*

Trata-se novamente de equações de ondas não-homogêneas e obtenha para as mesmas as soluções retardadas

$$\mathbb{E}_{ret}(x,\,t) \;=\; -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\|x-x'\|}\left(\vec{\nabla}\rho_e+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\mathbb{J}_e}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\times\mathbb{J}_m\right)\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)\,d^3x'\,, \tag{45.379}$$

$$\mathbb{B}_{ret}(x,\,t) \;=\; -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\|x-x'\|}\left(\vec{\nabla}\rho_m+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\mathbb{J}_m}{\partial t}-\vec{\nabla}\times\mathbb{J}_e\right)\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)\,d^3x'\,. \tag{45.380}$$

✣

Analogamente às equações (45.369) e (45.370), as expressões (45.379) e (45.380) fornecem os campos elétrico e magnético em termos das fontes de carga e de correntes elétricas e magnéticas retardadas, e envolvem derivadas espaciais das fontes. As equações de Jefimenko (sem dependências com as derivadas espaciais das fontes) para o caso correntemente tratado são obtidas de (45.379) e (45.380) como no Exercício E. 45.30. Isso é feito no Exercício que segue.

E. 45.33 *Exercício*. Usando (45.371) e (45.372) e integração por partes, obtenha de (45.379) e (45.380) as equações de Jefimenko na presença de cargas magnéticas:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{ret}(x,\,t) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\Bigg\{&\left[\rho_e\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)\frac{x-x'}{\|x-x'\|^3}+\frac{1}{c}\frac{x-x'}{\|x-x'\|^2}\left(\frac{\partial\rho_e}{\partial t}\right)\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)\right.\\&\left.-\frac{1}{c^2}\frac{1}{\|x-x'\|}\left(\frac{\partial\mathbb{J}_e}{\partial t}\right)\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)\right]\\&-\frac{1}{c^2}\left[\mathbb{J}_m\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)+\frac{\|x-x'\|}{c}\left(\frac{\partial\mathbb{J}_m}{\partial t}\right)\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)\right]\times\frac{x-x'}{\|x-x'\|^3}\Bigg\}\,d^3x'\end{aligned} \tag{45.381}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_{ret}(x,\,t) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\Bigg\{&\left[\rho_m\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)\frac{x-x'}{\|x-x'\|^3}+\frac{1}{c}\frac{x-x'}{\|x-x'\|^2}\left(\frac{\partial\rho_m}{\partial t}\right)\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)\right.\\&\left.-\frac{1}{c^2}\frac{1}{\|x-x'\|}\left(\frac{\partial\mathbb{J}_m}{\partial t}\right)\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)\right]\\&+\left[\mathbb{J}_e\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)+\frac{\|x-x'\|}{c}\left(\frac{\partial\mathbb{J}_e}{\partial t}\right)\left(x',\,t-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)\right]\times\frac{x-x'}{\|x-x'\|^3}\Bigg\}\,d^3x'\,.\end{aligned} \tag{45.382}$$

É interessante comparar essas relações às equações de Jefimenko originais (45.365) e (45.366). ✣

• **Transformações de dualidade nas equações de Maxwell com monopolos magnéticos**

Finalizamos com uma interessante, e possívelmente profunda, curiosidade sobre as equações de Maxwell com termos de monopolos magnéticos:

E. 45.34 *Exercício*. Mostre que as equações de Maxwell com termos de monopolos (45.373)-(45.376) são invariantes pelas

transformações lineares simultâneas

$$\begin{pmatrix}\mathbb{E}\\ c\mathbb{B}\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\mathbb{E}'\\ c\mathbb{B}'\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{E}\\ c\mathbb{B}\end{pmatrix}, \tag{45.383}$$

$$\begin{pmatrix}\rho_e\\ \rho_m/c\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\rho'_e\\ \rho'_m/c\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_e\\ \rho_m/c\end{pmatrix}, \tag{45.384}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbb{J}_e\\ \mathbb{J}_m/c\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\mathbb{J}'_e\\ \mathbb{J}'_m/c\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{J}_e\\ \mathbb{J}_m/c\end{pmatrix}, \tag{45.385}$$

para cada $\alpha\in(-\pi,\,\pi]$, sendo essse ângulo o mesmo nas três transformações. Essas transformações são denominadas *transformações de dualidade das equações de Maxwell com monopolos magnéticos*. **Sugestão:** observe que as equações (45.373)-(45.376) podem ser escritas na forma matricial

$$\nabla\cdot\begin{pmatrix}\mathbb{E}\\ c\mathbb{B}\end{pmatrix} = \frac{1}{\epsilon_0}\begin{pmatrix}\rho_e\\ \rho_m/c\end{pmatrix}, \tag{45.386}$$

$$\vec{\nabla}\times\begin{pmatrix}\mathbb{E}\\ c\mathbb{B}\end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\left[\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\mathbb{E}\\ c\mathbb{B}\end{pmatrix}+\frac{1}{\epsilon_0}\begin{pmatrix}\mathbb{J}_e\\ J_m/c\end{pmatrix}\right] \tag{45.387}$$

e use fato que as matrizes $\left(\begin{smallmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ comutam. Acima, usamos as notações simplificadoras

$$\nabla\cdot\begin{pmatrix}\mathbb{E}\\ c\mathbb{B}\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\nabla\cdot\mathbb{E}\\ \nabla\cdot(c\mathbb{B})\end{pmatrix} \quad\text{e}\quad \vec{\nabla}\times\begin{pmatrix}\mathbb{E}\\ c\mathbb{B}\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\vec{\nabla}\times\mathbb{E}\\ \vec{\nabla}\times(c\mathbb{B})\end{pmatrix}.$$

✣

Para mais discussões sobre as equações de Maxwell com monopolos magnéticos, vide, *e.g.*, [277].

45.12.3.3 A Equação de Ondas Não-Homogênea em $2+1$-Dimensões

Vamos agora nos dedicar à equação de ondas não-homogênea em $2+1$-dimensões e vamos calcular as integrais em (45.348) para $n=2$. Temos

$$G_{ret}(x,\,t;\,x',\,t') = -H(t-t')\frac{c}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\operatorname{sen}\big(c\|p\|(t-t')\big)}{\|p\|}e^{-ip\cdot(x-x')}\,d^2p\,. \tag{45.388}$$

Adotando um sistema de coordenadas polares $(\rho,\,\varphi)$ com $\rho\equiv\|p\|$ e com eixo "1" na direção de $x-x'$, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\operatorname{sen}\big(c\|p\|(t-t')\big)}{\|p\|}e^{-ip\cdot(x-x')}\,d^2p = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^\infty \operatorname{sen}\big(c\rho(t-t')\big)e^{-i\rho\|x-x'\|\cos\varphi}\,d\rho\,d\varphi\,.$$

De acordo com (16.195), página 953, temos $\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\rho\|x-x'\|\cos\varphi}\,d\varphi = 2\pi J_0\big(\rho\|x-x'\|\big)$, onde J_0 é a equação de Bessel de ordem 0. Com isso,

$$\begin{aligned}G_{ret}(x,\,t;\,x',\,t') &= -H(t-t')\frac{c}{2\pi}\int_0^\infty \operatorname{sen}\big(c\rho(t-t')\big)J_0\big(\rho\|x-x'\|\big)\,d\rho\\ &= -H(t-t')\frac{c}{2\pi\|x-x'\|}\int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{c(t-t')}{\|x-x'\|}\right)J_0(s)\,ds\,.\end{aligned}$$

Agora, denotando $y\equiv\frac{c(t-t')}{\|x-x'\|}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}G_{ret}(x,\,t;\,x',\,t') &= -H(t-t')\frac{c}{2\pi\|x-x'\|}\int_0^\infty \operatorname{sen}(ys)J_0\big(s\big)\,ds\\ &= -H(t-t')\frac{c}{2\pi\|x-x'\|}\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen}(ys)H(s)J_0\big(s\big)\,ds\\ &= -H(t-t')\frac{c}{2\pi\|x-x'\|}\operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^\infty e^{iys}H(s)J_0\big(s\big)\,ds\right)\\ &= -H(t-t')\frac{c}{\sqrt{2\pi}\|x-x'\|}\operatorname{Im}\Big(\mathcal{F}^{-1}[HJ_0](y)\Big)\,,\end{aligned} \tag{45.389}$$

onde $\mathcal{F}^{-1}$ é a transformada de Fourier inversa, tal como definida no Capítulo 39, página 2162 e H é a função de Heaviside, definida em (39.174).

Vamos agora calcular $\mathcal{F}^{-1}[HJ_0](y)$ tendo em mente que, devido ao fator $H(t-t')$ na expressão para G_{ret}, só nos interessa o caso $y>0$. Como estabelecemos em (16.206), página 955, temos que

$$\mathcal{F}^{-1}[J_0](p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\chi_{(-1,\,1)}(p)$$

e, assim, como $\mathcal{F}^{-1}[H](x)$ é a distribuição $\lim_{\epsilon\to0_+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{x+i\epsilon}$ (vide (39.247)), temos

$$\mathcal{F}^{-1}[HJ_0](y) \overset{(39.90)}{=} \Big(\mathcal{F}^{-1}[H]*\mathcal{F}^{-1}[J_0]\Big)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}^{-1}[H](y-w)\mathcal{F}^{-1}[J_0](w)\,dw$$

$$\overset{(39.247)}{=} \lim_{\epsilon\to0_+}\frac{2i}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-1}^1\frac{1}{(y-w)+i\epsilon}\,\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\,dw\,.$$

Agora temos que calcular $\int_{-1}^1\frac{1}{(y-w)+i\epsilon}\,\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\,dw$, o que é feito fazendo-se a mudança de variáveis $w=\cos\varphi$ seguida de integração complexa. Tem-se,

$$\int_{-1}^1\frac{1}{(y-w)+i\epsilon}\,\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\,dw = \int_0^\pi\frac{1}{y+i\epsilon-\cos\varphi}d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi\frac{1}{y+i\epsilon-\cos\varphi}d\varphi = i\oint_{\mathbb{S}^1}\frac{1}{z-2zz_0+1}\,dz\,,$$

onde $z_0:=y+i\epsilon$ e S_1 é o circulo unitário em $\mathbb{C}$ orientado no sentido anti-horário. Verifique! Podemos escrever $z-2zz_0+1=(z-z_+)(z-z_-)$, onde

$$z_\pm = z_0\pm\sqrt{z_0^2-1} = y+i\epsilon\pm\sqrt{y^2-1+2i\epsilon y-\epsilon^2}\,.$$

Assim, para aplicarmos a fórmula integral de Cauchy (ou, equivalentemente, resíduos), interessa-nos saber se $z_\pm$ então no interior da região delimitada por $\mathbb{S}^1$, ou seja, se têm módulo maior que 1 ou não. Para $0<y<1$ tem-se (desprezando termos de ordem ϵ^k com $k>2$)

$$|z_\pm|^1 = \left(1\pm\frac{\epsilon}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2$$

e para $y>1$ tem-se

$$|z_\pm|^1 = \left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right)^2+\epsilon^2\left(1\pm\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\right)^2\,.$$

Verifique! Assim, é fácil constatar que em ambos os casos valem $|z_-|<1$ e $|z_+|>1$. Logo,

$$i\oint_{\mathbb{S}^1}\frac{1}{z-2zz_0+1}\,dz = i\oint_{\mathbb{S}^1}\frac{1}{(z-z_+)(z-z_-)}\,dz = -2\pi\frac{1}{z_--z_+} = \frac{\pi}{\sqrt{z_0^2-1}} = \frac{\pi}{\sqrt{y^2-1+2i\epsilon y-\epsilon^2}}\,.$$

Consequentemente,

$$\mathcal{F}^{-1}[HJ_0](y) \;=\; \lim_{\epsilon\to 0_+}\frac{2\pi i}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{y^2-1+2i\epsilon y-\epsilon^2}} \;=\; \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

Com isso, retornando a (45.389), temos

$$G_{ret}(x,\,t;\,x',\,t') \;=\; -H(t-t')\frac{c}{2\pi\|x-x'\|}\mathrm{Im}\left(\frac{i}{\sqrt{y^2-1}}\right) \;=\; -H(t-t')\frac{c}{2\pi\|x-x'\|}\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\,, & \text{se } y>1\,,\\ 0\,, & \text{se } y<1\,.\end{cases}$$

$$=\; -\frac{c}{2\pi\|x-x'\|}\frac{H(t-t')H(y-1)}{\sqrt{y^2-1}}$$

Como $y=\frac{c(t-t')}{\|x-x'\|}$, condição $y>1$ equivale a $(t-t')>\frac{\|x-x'\|}{c}$ e, assim, podemos substituir $H(y-1)$ acima por $H\left((t-t')-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)$. Além disso, vale evidentemente $H(t-t')H\left((t-t')-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)=H\left((t-t')-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)$ e, com isso, podemos escrever

$$G_{ret}(x,\,t;\,x',\,t') \;=\; -\frac{1}{2\pi}\frac{H\left((t-t')-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)}{\sqrt{(t-t')^2-\frac{\|x-x'\|^2}{c^2}}}\,. \tag{45.390}$$

Essa é a função de Green retardada para o operador de ondas $\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ em $2+1$-dimensões.

Para a equação de onda não-homogênea (45.340) em $2+1$-dimensões temos, portanto, a solução retardada

$$u_{ret}(x,\,t) \;=\; \int_{\mathbb{R}^3} G_{ret}(x,\,t;\,x',\,t')\,h(x',\,t')\,d^2x'\,dt' \;=\; -\frac{1}{2\pi}\int_{V^-_{(x,\,t)}}\frac{h(x',\,t')}{\sqrt{(t-t')^2-\frac{\|x-x'\|^2}{c^2}}}\,d^2x'\,dt'\,, \tag{45.391}$$

onde $V^-(x,\,t)$ é o cone de luz passado centrado em $(x,\,t)$, ou seja,

$$V^-_{(x,\,t)} \;:=\; \Big\{(x',\,t')\in\mathbb{R}^3\big|\;\; c^2(t'-t)^2-\|x'-x\|^2\geq 0\,,\quad t'\leq t\Big\}\,.$$

Além disso, uma solução avançada também existe no caso presente, sendo a função de Green avançada dada por

$$G_{av}(x,\,t;\,x',\,t') \;=\; -\frac{1}{2\pi}\frac{H\left(-(t-t')-\frac{\|x-x'\|}{c}\right)}{\sqrt{(t-t')^2-\frac{\|x-x'\|^2}{c^2}}}\,. \tag{45.392}$$

Como no caso $3+1$-dimensional, podemos ainda acrescentar à solução (45.391) uma solução da equação homogênea $\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)=0$.

Em concordância com o que comentamos anteriormente (página 2659) as expressões (45.390) e (45.350) revelam novamente o fato que o princípio de Huygens <u>não</u> é válido em $2+1$-dimensões, ao contrário do que ocorre em $3+1$-dimensões. Compare-se (45.390) a (45.349).

45.12.3.4 A Equação de Ondas Não-Homogênea em $1+1$-Dimensões

Passemos agora ao caso de $1+1$-dimensões e calculemos a integral em (45.348) para $n=1$. Temos

$$G_{ret}(x,\,t;\,x',\,t') \;=\; -H(t-t')\frac{c}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{sen}\big(cp_1(t-t')\big)}{p_1}e^{-ip_1(x-x')}\,dp_1$$

$$=\; -H(t-t')\frac{c}{4\pi i}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\left(c(t-t')-(x-x')\right)p_1}}{p_1}\,dp_1-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\left(c(t-t')+(x-x')\right)p_1}}{p_1}\,dp_1\right)$$

$$\overset{(39.250)}{=}\; -H(t-t')\frac{c}{2}\Big(H\big(c(t-t')-(x-x')\big)+H\big(c(t-t')+(x-x')\big)-1\Big)\,.$$

Usando agora as identidades (demonstre-as!)

$$H(a)\Big(H(a-b)+H(a+b)-1\Big) \;=\; H(a)H\big(a^2-b^2\big) \;=\; H\big(a-|b|\big)\,,$$

válidas para $a,\;b\in\mathbb{R}$, obtemos, finalmente,

$$G_{ret}(x,\,t;\,x',\,t') \;=\; -\frac{c}{2}H(t-t')H\Big(c^2(t-t')^2-(x-x')^2\Big) \;=\; -\frac{c}{2}H\big(c(t-t')-|x-x'|\big) \tag{45.393}$$

Essa é a função de Green retardada para o operador de ondas $\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ em $1+1$-dimensões. Para a equação de ondas não-homogênea (45.340) em $1+1$-dimensões temos, portanto, a solução retardada

$$u_{ret}(x,\,t) \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} G_{ret}(x,\,t;\,x',\,t')\,h(x',\,t')\,d^2x'\,dt' \;=\; -\frac{c}{2}\int_{V^-_{(x,\,t)}} h(x',\,t')\,dx'\,dt'\,, \tag{45.394}$$

onde $V^-(x,\,t)$ é o cone de luz passado centrado em $(x,\,t)$, ou seja,

$$V^-_{(x,\,t)} \;:=\; \Big\{(x',\,t')\in\mathbb{R}^2\big|\;\; c^2(t'-t)^2-(x'-x)^2\geq 0\,,\quad t'\leq t\Big\}\,.$$

45.13 Exercícios Adicionais

45.13.1 Problemas Selecionados de Eletrostática

E. 45.35 *Exercício*. **[Potencial de um anel uniformemente carregado]** Determine o potencial elétrico $\phi(r,\,\theta)$ produzido no vácuo por um anel unidimensional de raio R, uniformemente carregado com carga elétrica total Q e densidade linear de carga $\lambda = Q/(2\pi R)$, nas seguintes regiões:

a) $r > R$.

b) $r < R$.

c) $r = R$, mas $\theta \neq \pi/2$.

As variáveis r e θ referem-se ao sistema de coordenadas esféricas cuja origem é o centro do anel e cujo eixo z, a partir de onde o ângulo θ é medido, coincide com o eixo de simetria do anel.

Sugestão 1. Calcule primeiramente o potencial ao longo do eixo de simetria. Para os demais pontos use a solução da equação de Laplace:

$$\phi(r,\,\theta) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos(\theta))\;.$$

Os coeficientes A_n e B_n são fixados pela solução ao longo do eixo de simetria (que correspondem a $\theta = 0$ e $\theta = \pi$).

Sugestão 2. Para $x \in \mathbb{C}$ com $|x| < 1$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, vale a expansão binomial (vide (15.169), página 893):

$$(1+x)^{\alpha} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1-k)_k}{k!}\, x^k\;,$$

onde, para $y \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$, $(y)_n$ são os símbolos de Pochhammer definidos em (15.150), página 885. Em particular, para $|t| < 1$, tem-se

$$(1+t)^{-1/2} \;=\; 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^k\;, \qquad \text{com} \qquad \alpha_k \;=\; (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\;.$$

✣

E. 45.36 *Exercício*. **[Potencial de um disco uniformemente carregado]** Determine o potencial elétrico $\phi(r,\,\theta)$ produzido no vácuo por um *disco* de raio R, uniformemente carregado com carga elétrica total Q e densidade superficial de carga $\sigma = Q/(\pi R^2)$, nas seguintes regiões:

a) $r > R$.

b) $r < R$, mas $0 \leq \theta < \pi/2$.

c) $r < R$, mas $\pi/2 < \theta \leq \pi$.

As variáveis r e θ referem-se ao sistema de coordenadas esféricas cuja origem é o centro do disco e cujo eixo z, a partir de onde o ângulo θ é medido, coincide com o eixo de simetria do disco.

d) Obtenha o potencial $\phi(z) = -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}|z| = -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} r|\cos\theta|$ de um plano infinito uniformemente carregado de densidade superficial de carga σ tomando o limite $R \to \infty$ da solução acima.

Sugestões. Calcule primeiramente o potencial ao longo do eixo de simetria. Para os demais pontos use a solução (45.52) da equação de Laplace :

$$\phi(r,\,\theta) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos(\theta))\;.$$

Use também a expansão binomial (15.169), citada no Exercício E. 45.35, página 2712.

Lembre-se também que sobre o semi-eixo $z > 0$, onde $\theta = 0$, tem-se $z^{2n} = r^{2n} P_{2n}(\cos(0))$ para todo $n \geq 0$ e $|z| = +rP_1(\cos(0))$. Porém, sobre o semi-eixo $z < 0$, onde $\theta = \pi$, tem-se $z^{2n} = r^{2n} P_{2n}(\cos(\pi))$ para todo $n \geq 0$ mas $|z| = -rP_1(\cos(\pi))$. Esse último sinal "-" é importante para distinguir as soluções dos itens b e c e obter o potencial correto no item d. ✣

E. 45.37 *Exercício*. **[Potencial de uma barra finita uniformemente carregada]** Considere uma barra unidimensional de comprimento L, uniformemente carregada e com carga elétrica total Q. Determine, em termos de uma expansão em série envolvendo polinômios de Legendre, o potencial elétrico $\phi(r,\,\theta)$ produzido por essa barra no vácuo na região $r > L/2$. As variáveis r e θ referem-se ao sistema de coordenadas esféricas cuja origem é ponto médio da barra e cujo eixo z, a partir do qual o ângulo θ é medido, coincide com o eixo da barra.

Para averiguar se o resultado obtido está correto, verifique a validade aproximada da lei de Coulomb para r grande.

Sugestão. Como no exercício anterior, determine primeiro o potencial ao longo do eixo z. ✣

E. 45.38 *Exercício*. **[Potencial de uma casca esférica carregada]** Este exercício generaliza um outro semelhante de [277]. Uma casca esférica de espessura desprezível e raio R é carregada com densidade superficial de carga $\sigma(\theta,\,\varphi)$. Aqui adotamos um sistema de coordenadas esféricas $(r,\,\theta,\,\varphi)$, com origem na centro da esfera, definido da forma usual. Como sabido da Eletrostática, o potencial elétrico satisfaz a equação de Laplace $\Delta\phi = 0$ no interior e no exterior da esfera e, portanto, é dado no interior da esfera $(0 \leq r < R)$ por

$$\phi_i(r,\,\theta,\,\varphi) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}\, r^l\, Y_l^m\big(\theta,\,\varphi\big) \tag{45.395}$$

e no exterior da esfera $(r > R)$ por

$$\phi_e(r,\,\theta,\,\varphi) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\, Y_l^m\big(\theta,\,\varphi\big)\;.$$

Vide (45.51). Acima, Y_l^m são as funções harmônicas esféricas.

a. Da imposição que o potencial é contínuo em $r = R$ mostre que $B_{lm} = R^{2l+1} A_{lm}$.

b. Da imposição que a densidade superficial de cargas $\sigma(\theta)$ é proporcional à descontinuidade da componente normal do campo elétrico, ou seja,

$$\sigma(\theta,\,\varphi) \;=\; -\epsilon_0\left(\frac{\partial\phi_e}{\partial r} - \frac{\partial\phi_i}{\partial r}\right)\Big|_{r=R}\;,$$

(ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo. No Sistema Internacional de unidades vale $\epsilon_0 \approx 8,8541878176\,10^{-12} F/m$.) mostre que

$$\sigma(\theta,\,\varphi) \;=\; \epsilon_0 \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)R^{l-1}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}\, Y_l^m\big(\theta,\,\varphi\big)\;.$$

c. Usando a última expressão, mostre que

$$A_{lm} \;=\; \frac{1}{\epsilon_0(2l+1)R^{l-1}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \overline{Y_l^m\big(\theta,\,\varphi\big)}\,\sigma(\theta,\,\varphi)\,\mathrm{sen}\,\theta\; d\theta\; d\varphi$$

e, portanto, que

$$B_{lm} \;=\; \frac{R^{l+2}}{\epsilon_0(2l+1)}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \overline{Y_l^m\big(\theta,\,\varphi\big)}\,\sigma(\theta,\,\varphi)\,\mathrm{sen}\,\theta\; d\theta\; d\varphi\;.$$

✣

E. 45.39 *Exercício*. **[Potencial de uma casca esférica carregada com simetria azimutal]** O problema aqui tratado é um caso particular daquele do Exercício E. 45.38 (e também generaliza um exercício de [277]). Uma casca esférica de espessura desprezível e raio R é carregada com densidade superficial de carga com simetria azimutal $\sigma(\theta)$. Novamente adotamos um sistema de coordenadas esféricas $(r,\,\theta,\,\varphi)$, com origem na centro da esfera, definido da forma usual. Como sabido da Eletrostática, o potencial elétrico satisfaz a equação de Laplace $\Delta\phi = 0$ no interior e no exterior da esfera. O potencial no interior da esfera $(0 \leq r < R)$ é, portanto, devido à simetria azimutal, dado por

$$\phi_i(r,\,\theta) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty} A_l\, r^l P_l\big(\cos\theta\big)$$

e no exterior da esfera $(r > R)$ por

$$\phi_e(r,\,\theta) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l\big(\cos\theta\big)\;.$$

Vide (45.52). Acima, P_l são os polinômios de Legendre.

a. Da imposição que o potencial é contínuo em $r = R$ mostre que $B_l = R^{2l+1} A_l$.

b. Da imposição que a densidade superficial de cargas $\sigma(\theta,\,\varphi)$ é proporcional à descontinuidade da componente normal do campo elétrico, ou seja,

$$\sigma(\theta) \,=\, -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \phi_e}{\partial r} - \frac{\partial \phi_i}{\partial r}\right)\Big|_{r=R} \,,$$

mostre que

$$\sigma(\theta) \,=\, \epsilon_0 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l R^{l-1} P_l\big(\cos\theta\big) \,.$$

c. Usando a última expressão, mostre que

$$A_l \,=\, \frac{1}{2\epsilon_0 R^{l-1}} \int_0^\pi P_l\big(\cos\theta\big)\, \sigma(\theta)\, \operatorname{sen}\theta \, d\theta \quad \text{e, portanto, que} \quad B_l \,=\, \frac{R^{l+2}}{2\epsilon_0} \int_0^\pi P_l\big(\cos\theta\big)\, \sigma(\theta)\, \operatorname{sen}\theta \, d\theta \,.$$

d. Para o caso em que

$$\sigma(\theta) \,=\, \begin{cases} 0 \,, & 0 \le \theta \le \alpha \text{ ou } \beta \le \theta \le \pi \,, \\ \sigma_0 \,, & \alpha < \theta < \beta \,, \end{cases} \tag{45.396}$$

(σ_0 sendo constante e $0 \le \alpha < \beta \le \pi$) mostre que o potencial elétrico na região $0 \le r < R$ é dado por

$$\phi_i(r,\,\theta) \,=\, \frac{\sigma_0 \big(\cos\alpha - \cos\beta\big) R}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 R}{2\epsilon_0} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{P_{l+1}\big(\cos(\alpha)\big) - P_{l-1}\big(\cos(\alpha)\big) - P_{l+1}\big(\cos(\beta)\big) + P_{l-1}\big(\cos(\beta)\big)}{2l+1}\right] \left(\frac{r}{R}\right)^l P_l\big(\cos(\theta)\big) \,.$$

Sugestão: use (16.46), página 918.

e. Determine o potencial elétrico $\phi_e(r,\,\theta)$ na região $r > R$ para a mesma distribuição $\sigma(\theta)$ de (45.396).

✣

E. 45.40 *Exercício.* **[Casca esférica sob um potencial dado]** O potencial elétrico em uma casca esférica de raio $R > 0$ é dado por uma função $V(\theta,\,\varphi)$. Na ausência de cargas fora da casca esférica, determine o potencial elétrico $\phi(r,\,\theta,\,\varphi)$ em todo o espaço supondo $\phi(r,\,\theta,\,\varphi) \to 0$ para $r \to \infty$. Acima, as coordenadas r, θ e φ referem-se a um sistema de coordenadas esféricas centradas na origem da casca esférica, como usual. Separe os casos $r < R$ e $r > R$.

Obtenha o potencial no caso particular em que $V(\theta,\,\varphi) = \begin{cases} V_0 \,, & 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \,, \\ -V_0 \,, & \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi \,, \end{cases}$ sendo V_0 uma constante. Novamente, separe os casos $r < R$ e $r > R$. ✣

E. 45.41 *Exercício.* **[Potencial no interior de uma esfera]** Considere a equação de Laplace $\Delta\phi = 0$, em três dimensões, no interior de uma esfera de raio $R > 0$, sendo a função $\phi(r,\,\theta,\,\varphi)$ submetida à condição de Dirichlet não-homogênea $\phi(R,\,\theta,\,\varphi) = V(\theta,\,\varphi)$, com V sendo uma função contínua. Aqui, adotamos um sistema de coordenadas esféricas $(r,\,\theta,\,\varphi)$, com origem no centro da esfera, definido da forma usual.

I. Forneça a solução em termos da função V.

II. Forneça a solução explícita (em termos de r, θ e φ) no caso em que

$$V(\theta,\,\varphi) \,=\, V_0 \Big((\operatorname{sen}\theta)^2 \cos(2\varphi) - 4\cos\theta + 3 \Big) \,,$$

com V_0 sendo uma constante.

Sugestão: Use a solução dada em (45.395) para a equação de Laplace e obtenha os coeficientes A_{lm} utilizando as relações de ortogonalidade. Para a parte II, escreva $V(\theta,\,\varphi)$ em termos de uma combinação linear de funções harmônicas esféricas (use para tal (16.84)–(16.86), página 927) e use as relações de ortogonalidade das funções harmônicas esféricas (16.88), página 928. ✣

45.13.2 Equação de Difusão em uma Dimensão

E. 45.42 *Exercício.* **[Resfriamento de uma barra condutora de comprimento L com um extremo isolado]** Considere a equação a derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, com $t \in \mathbb{R}$, $D > 0$, $0 \le x \le L$, $L > 0$, sendo $u(x,\,t)$ função real de duas variáveis $u : [0,\,L] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Utilizando o método de separação de variáveis e o princípio de superposição resolva essa equação com as condições de contorno

$$u(0,\,t) \,=\, 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,\,t) \,=\, 0 \,, \qquad \forall t \in \mathbb{R} \,,$$

e a condição inicial

$$u(x,\,0) \,=\, f(x) \,, \qquad x \in [0,\,L] \,,$$

onde f é a função

$$f(x) \,:=\, \begin{cases} 2Ax/L, & \text{para } x \in [0,\,L/2] \,, \\ 2A(L-x)/L, & \text{para } x \in [L/2,\,L] \,, \end{cases}$$

sendo $A \neq 0$ uma constante.

Um das possíveis situações físicas a que esse problema corresponde é o de uma barra metálica de comprimento L e constante de difusão térmica D cuja extremidade situada em $x = 0$ é posta em com contacto com um banho térmico de temperatura $T = 0$ e cuja extremidade situada em $x = L$ é termicamente isolada. Aqui $u(x,\,t)$ representa a temperatura do ponto x da barra no instante de tempo t. A condição inicial significa que a distribuição da temperatura na barra em $t = 0$ é descrita pela função f. ✣

E. 45.43 *Exercício.* **[Barra condutora de comprimento L com extremidades isoladas]** Considere a equação a derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, com $t \in \mathbb{R}$, $D > 0$, $0 \le x \le L$, $L > 0$, sendo $u(x,\,t)$ função real de duas variáveis $u : [0,\,L] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Utilizando o método de separação de variáveis e o princípio de superposição resolva essa equação com as condições de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\,t) \,=\, 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,\,t) \,=\, 0 \,, \qquad \forall t \in \mathbb{R} \,,$$

(condições de Neumann homogêneas) e a condição inicial

$$u(x,\,0) \,=\, u_0(x) \,, \qquad x \in [0,\,L] \,.$$

Para tal, demonstre e use as seguintes relações de ortogonalidade: para m, $n \in \mathbb{N}_0$ tem-se

$$\int_0^\pi \cos(my)\cos(ny)\, dy \,=\, \begin{cases} 0 \,, & \text{se } n \neq m \,, \\ \pi \,, & \text{se } n = m = 0 \,, \\ \frac{\pi}{2} \,, & \text{se } n = m \neq 0 \,. \end{cases}$$

Um das possíveis situações físicas a que esse problema corresponde é o de uma barra metálica de comprimento L e constante de difusão térmica D cujas extremidades (situadas em $x = 0$ e $x = L$) são termicamente isoladas. Aqui $u(x,\,t)$ representa a temperatura do ponto x da barra no instante de tempo t. A condição inicial significa que a distribuição da temperatura na barra em $t = 0$ é descrita pela função u_0.

Utilizando a solução obtida mostre que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) \,=\, \frac{1}{L}\int_0^L u_0(y)\, dy \,.$$

Justifique por que esse resultado é fisicamente esperado. Para tal, mostre que se u é uma solução de $\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sob condições de Neumann homogêneas, então $\int_0^L u(y,\,t)\, dy$ é constante como função de t. No caso de u representar uma temperatura, a constância dessa integral está associada à Primeira Lei da Termodinâmica. Justifique essa afirmação. ✣

E. 45.44 *Exercício.* **[Barra condutora de comprimento L entre dois banhos térmicos]** Considere a equação a derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, com $t \in \mathbb{R}$, $D > 0$, $0 \le x \le L$, $L > 0$, sendo $u(x,\,t)$ função real de duas variáveis $u : [0,\,L] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Utilizando o método de separação de variáveis e o princípio de superposição resolva essa equação com as condições de contorno

$$u(0,\,t) \,=\, T_0 \quad \text{e} \quad u(L,\,t) \,=\, T_L \,, \qquad \forall t \in \mathbb{R} \,,$$

e a condição inicial $u(x,\,0) = u_0(x)$.

Um das possíveis situações físicas a que esse problema corresponde é o de uma barra metálica de comprimento L e constante de difusão térmica D cujas extremidades (situadas em $x = 0$ e $x = L$) são postas em perfeito contacto térmico com banhos térmicos de temperatura T_0 e T_L, respectivamente. Aqui $u(x,\,t)$ representa a temperatura do ponto x da barra no instante de tempo t. A condição inicial fornece a distribuição da temperatura na barra em $t = 0$.

O resultado é

$$u(x,\,t) \;=\; u_e(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(n\pi\frac{x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t}\,, \quad \text{onde} \quad A_n \;=\; \frac{2}{L}\int_0^L \operatorname{sen}\left(n\pi\frac{y}{L}\right)\big(u_0(y) - u_e(y)\big)\,dy\,,$$

sendo que a função u_e é dada por

$$u_e(x) \;:=\; T_L + \big(T_0 - T_L\big)\frac{L-x}{L}\,.$$

Mostre que $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,\,t) = u_e(x)$ para todo $x \in [0,\,L]$. Constate também que se $u_0(x)$ for escolhida como a função $u_e(x)$, teremos $u(x,\,t) = u_e(x)$ para todo x e todo t. A função $u_e(x)$ representa, portanto, o regime estacionário do problema em questão.

Obtenha explicitamente os coeficientes A_n para o caso em que $u_0(x) = f(x)$, $x \in [0,\,L]$, onde f é a mesma função do Exercício E. 45.47, página 2717. ✣

E. 45.45 *Exercício*. **[Barra condutora isolada com termo de fonte]** (de [170]) Obtenha a solução da seguinte equação a derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Se^{-t/T}\,,$$

com $D > 0$, $S > 0$ e $T > 0$, constantes, sob as condições de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\,t) \;=\; \frac{\partial u}{\partial x}(L,\,t) \;=\; 0\,, \quad \forall t > 0\,,$$

e condição inicial

$$u(x,\,0) \;=\; 0\,.$$

Uma das possíveis situações físicas às quais o problema acima corresponde é o da difusão térmica de uma barra homogênea de comprimento L condutora de calor com suas extremidades termicamente isoladas e tendo uma temperatura inicial nula, sendo essa barra dotada de uma fonte (por exemplo, radioativa) que produz calor a uma taxa $Se^{-t/T}$ por unidade de comprimento, por unidade de tempo. ✣

E. 45.46 *Exercício*. **[Condução de calor em um anel unidimensional]** Considere a equação de difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{45.397}$$

com $D > 0$, constante, com $t > 0$ e $x \in [0,\,L]$, sendo u periódica em x de período L: $u(x + L,\,t) = u(x,\,t)$ para todo x e todo t. Uma situação física a que esse problema corresponde é o da difusão de calor em um anel unidimensional de perímetro L e raio $L/(2\pi)$.

1. Mostre que pelo método de separação de variáveis e pelo princípio de sobreposição obtém-se a solução

$$u(x,\,t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{L}} \exp\left(\frac{2\pi i n}{L}x - \frac{4\pi^2 D n^2}{L^2}t\right)\,.$$

2. Consideremos que u satisfaça a condição inicial $u(x,\,0) = u_0(x)$, onde u_0 é contínua, diferenciável e de período L. Obtenha

$$u_0(x) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{L}} e^{\frac{2\pi i n}{L}x}$$

e conclua disso que

$$A_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{L}}\int_0^L e^{-\frac{2\pi i n}{L}y}\,u_0(y)\,dy\,,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Mostre, com isso, que

$$u(x,\,t) \;=\; \int_0^L G(x,\,t;\,y)\,u_0(y)\,dy\,, \tag{45.398}$$

para $t > 0$, $x \in [0,\,L]$, com

$$G(x,\,t;\,y) \;:=\; \frac{1}{L}\theta\left(\frac{x-y}{L},\;\frac{4\pi D}{L^2}t\right) \tag{45.399}$$

para $t > 0$, $x,\,y \in [0,\,L]$. A função G é a função de Green do problema de valor inicial em questão. Acima, θ é a *Função θ de Jacobi*[73], definida por

$$\theta(z,\,t) \;:=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n z - \pi n^2 t}\,, \tag{45.400}$$

com $t > 0$ e $z \in \mathbb{C}$. Algumas propriedades dessa função são apresentadas no Exercício E. 39.42, página 2206. A relação (39.147), por exemplo, permite-nos reescrever (45.399) como

$$G(x,\,t;\,y) \;:=\; \frac{1}{L}\theta\left(\frac{x-y}{L},\;\frac{4\pi D}{L^2}t\right) \;=\; \frac{\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4Dt}\right)}{\sqrt{4\pi Dt}}\,\theta\left(-i\frac{(x-y)L}{4\pi Dt},\;\frac{L^2}{4\pi Dt}\right)\,, \tag{45.401}$$

para $t > 0$, $x,\,y \in [0,\,L]$. Usando (39.147), mostre também que

$$G(x,\,t;\,y) \;=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y-nL)^2}{4Dt}}\,, \tag{45.402}$$

para $t > 0$, $x,\,y \in [0,\,L]$.

3. No Exercício E. 39.42, página 2206, provamos que para $t \to 0$ a função $\theta(z,\,t)$ comporta-se como uma sequência delta de Dirac de período 1 centrada em $z = 0$. Use esse fato para provar que para a solução fornecida em (45.398) vale

$$\lim_{t\to 0} u(x,\,t) \;=\; u_0(x)\,,$$

para todo $x \in [0,\,L]$. Esse limite é uniforme?

4. Usando (45.398) e (45.399), mostre que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) \;=\; \frac{1}{L}\int_0^L u_0(y)\,dy\,.$$

5. Justifique por que o item anterior é fisicamente esperado. Para tal, mostre que se u é uma solução de (45.397) satisfazendo condições periódicas de contorno, então $\int_0^L u(y,\,t)\,dy$ é constante como função de t. No caso de u representar uma temperatura, a constância dessa integral está associada à Primeira Lei da Termodinâmica. Justifique essa afirmação.

6. Usando o lado direito de (45.401), ou (45.402), mostre que com x, y e t fixos, vale

$$\lim_{L\to\infty} G(x,\,t;\,y) \;=\; \frac{\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4Dt}\right)}{\sqrt{4\pi Dt}}\,,$$

que vem a ser a função de Green (*núcleo do calor*) da equação de difusão em $\mathbb{R}$ obtida em (45.74), página 2629. Justifique por que esse resultado é fisicamente esperado.

O estudante deve observar o papel importante desempenhado pela Fórmula de Soma de Poisson (vide Proposição 39.13, página 2204), manifesta nas propriedades de Função θ de Jacobi usadas na obtenção das propriedades da função de Green do problema acima. ✣

45.13.3 Equação de Ondas em uma Dimensão

E. 45.47 *Exercício*. **[Corda vibrante de comprimento L. Corda dedilhada]** Considere a equação a derivadas parciais $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, com $t \in \mathbb{R}$, $0 \le x \le L$, $L > 0$, $c > 0$, constante, sendo $u(x,\,t)$ função real de duas variáveis $u : [0,\,L] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Utilizando o método de separação de variáveis e o princípio de superposição resolva essa equação com as condições de contorno

$$u(0,\,t) \;=\; u(L,\,t) \;=\; 0\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

(ambas, portanto, sendo condições do tipo de Dirichlet) e as condições iniciais

$$u(x,\,0) \;=\; f(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\,0) \;=\; 0, \qquad x \in [0,\,L]\,,$$

[73] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851).

onde f é a função

$$f(x) := \begin{cases} 2Ax/L, & \text{para } x \in [0,\ L/2]\ , \\ 2A(L-x)/L, & \text{para } x \in [L/2,\ L]\ , \end{cases} \tag{45.403}$$

sendo $A \neq 0$, uma constante. A solução é dada por

$$u(x,\ t)\ =\ \frac{8A}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}\cos\left(\frac{(2m+1)\pi ct}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L}\right)\ .$$

Um das possíveis situações físicas a que esse problema corresponde é o de uma corda vibrante de comprimento L de densidade ρ constante sob uma tensão horizontal T nas suas extremidades (situadas em $x = 0$ e $x = L$), as quais estão fixas (condição de contorno). Nesse caso tem-se $c = \sqrt{T/\rho}$. A função $u(x,\ t)$ representa, então, o deslocamento transversal no instante de tempo t do ponto da corda cuja coordenada horizontal é x.

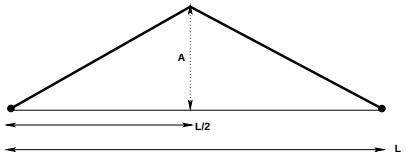

Figura 45.18: A corda vibrante pinçada em seu ponto médio no instante inicial $t = 0$, tal como descrito pela função f dada em (45.403).

A condição inicial significa que a corda está parada em $t = 0$ na posição descrita pela função f, indicando que trata-se de uma corda pinçada em seu ponto médio. A Figura 45.18, página 2718 mostra o perfil inicial da corda descrito pela função f. ✣

E. 45.48 *Exercício.* **[Corda vibrante de comprimento L. Corda dedilhada]** Considere a equação a derivadas parciais $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, com $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq L$, $L > 0$, $c > 0$, constante, sendo $u(x,\ t)$ função real de duas variáveis $u : [0,\ L] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Utilizando o método de separação de variáveis e o princípio de sobreposição resolva essa equação com as condições de contorno

$$u(0,\ t)\ =\ u(L,\ t)\ =\ 0\ , \qquad \forall t \in \mathbb{R}\ ,$$

(ambas, portanto, sendo condições do tipo de Dirichlet homogêneas) e as condições iniciais

$$u(x,\ 0)\ =\ f(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)\ =\ 0, \qquad x \in [0,\ L]\ ,$$

onde f é a função

$$f(x) := \begin{cases} Ax/x_0, & \text{para } x \in [0,\ x_0]\ , \\ A(L-x)/(L-x_0), & \text{para } x \in [x_0,\ L]\ , \end{cases} \tag{45.404}$$

com $x_0 \in (0,\ L)$ e $A \neq 0$, constantes. Esse problema é similar ao do Exercício E. 45.47, página 2717, sendo que agora a corda é inicialmente pinçada em um ponto genérico $x_0 \in (0,\ L)$. Vide Figura 45.19, página 2719. ✣

E. 45.49 *Exercício.* **[Corda vibrante de comprimento L. Corda percutida]** Considere a equação a derivadas parciais $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, com $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq L$, $L > 0$, $c > 0$, constante, sendo $u(x,\ t)$ função real de duas variáveis $u : [0,\ L] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Utilizando o método de separação de variáveis e o princípio de superposição resolva essa equação com as condições de contorno

$$u(0,\ t)\ =\ u(L,\ t)\ =\ 0\ , \qquad \forall t \in \mathbb{R}\ ,$$

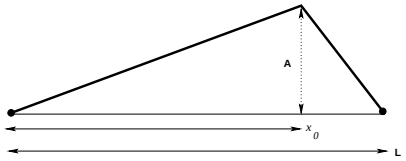

Figura 45.19: A corda vibrante pinçada no ponto x_0 no instante inicial $t = 0$, tal como descrito pela função f dada em (45.404).

(ambas, portanto, sendo condições do tipo de Dirichlet) e as condições iniciais

$$u(x,\ 0)\ =\ 0\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)\ =\ g(x)\ , \qquad x \in [0,\ L]\ ,$$

onde g é a função

$$g(x) := \begin{cases} v_0, & \text{para } x \in [a,\ b]\ , \\ 0, & \text{para } x \in [0,\ a) \text{ e } x \in (b,\ L]\ , \end{cases} \tag{45.405}$$

sendo que $v_0 \neq 0$ é uma constante e sendo $0 < a < b < L$.

Um das possíveis situações físicas a que esse problema corresponde é o de uma corda vibrante de comprimento L de densidade ρ constante sob uma tensão horizontal T nas suas extremidades (situadas em $x = 0$ e $x = L$), as quais estão fixas (condição de contorno). Nesse caso tem-se $c = \sqrt{T/\rho}$. A função $u(x,\ t)$ representa, então, o deslocamento transversal no instante de tempo t do ponto da corda cuja coordenada horizontal é x.

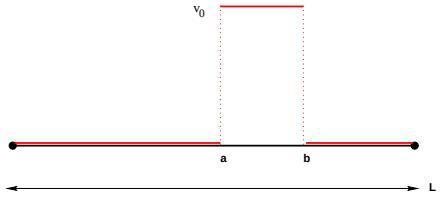

Figura 45.20: O perfil inicial de velocidades da corda percutida descrito pela função g dada em (45.405).

A solução é

$$u(x,\ t)\ =\ \frac{2Lv_0}{\pi^2 c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right)-\cos\left(\frac{n\pi b}{L}\right)\right]}{n^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ .$$

A condição inicial significa que a corda encontra-se em $t = 0$ na sua posição de equilíbrio ($u \equiv 0$) e nesse instante imprime-se (por exemplo por meio de uma martelada) uma velocidade v_0 a todos os pontos da corda situados no intervalo $a \leq x \leq b$. Vide Figura 45.20, página 2719. ✣

E. 45.50 *Exercício.* **[Corda vibrante de comprimento L com dois extremos soltos]** Considere a equação a derivadas parciais $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, com $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq L$, $L > 0$, $c > 0$, constante, sendo $u(x,\ t)$ função real de duas variáveis

$u : [0,\ L] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Utilizando o método de separação de variáveis e o princípio de superposição resolva essa equação com as condições de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) \ =\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,\ t) \ =\ 0\ , \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

(ambas, portanto, sendo condições do tipo de Neumann) e as condições iniciais

$$u(x,\ 0) \ =\ f(x)\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) \ =\ 0\ , \qquad x \in [0,\ L]\ ,$$

onde f é a mesma função do Exercício E. 45.47, página 2717.

Um das possíveis situações físicas a que esse problema corresponde é o de uma corda vibrante de comprimento L de densidade ρ constante sob uma tensão horizontal T nas suas extremidades (situadas em $x = 0$ e $x = L$), as quais estão soltas, podendo mover-se livremente na vertical (condição de contorno). $u(x,\ t)$ representa então o deslocamento transversal no instante de tempo t do ponto da corda cuja coordenada horizontal é x. A condição inicial significa que a corda está parada em $t = 0$ na posição descrita pela função f. ✣

E. 45.51 *Exercício*. **[Corda vibrante de comprimento L com dois extremos soltos]** Considere a equação a derivadas parciais $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ = 0$, com $t \in \mathbb{R}$, $0 \le x \le L$, $L > 0$, $c > 0$, constante, sendo $u(x,\ t)$ função real de duas variáveis $u : [0,\ L] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Utilizando o método de separação de variáveis e o princípio de superposição resolva essa equação com as condições de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) \ =\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,\ t) \ =\ 0\ , \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

(ambas, portanto, sendo condições do tipo de Neumann) e as condições iniciais

$$u(x,\ 0) \ =\ 0\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) \ =\ g(x)\ , \qquad x \in [0,\ L]\ ,$$

onde g é a mesma função do Exercício E. 45.49, página 2718.

Um das possíveis situações físicas a que esse problema corresponde é o de uma corda vibrante de comprimento L de densidade ρ constante sob uma tensão horizontal T nas suas extremidades (situadas em $x = 0$ e $x = L$), as quais estão soltas, podendo mover-se livremente na vertical (condição de contorno). $u(x,\ t)$ representa então o deslocamento transversal no instante de tempo t do ponto da corda cuja coordenada horizontal é x. A condição inicial significa que a corda em $t = 0$ encontra-se na sua posição de equilíbrio ($u \equiv 0$) e nesse instante imprime-se (por exemplo por meio de uma martelada) uma velocidade v_0 a todos os pontos da corda situados no intervalo $L/3 \le x \le 2L/3$. Faça um gráfico de g.

Atenção! O método de separação de variáveis procura soluções do tipo $u(x,\ t) = R(x)S(t)$, que levam a equações do tipo $R'' = \dfrac{\sigma}{c^2}R$ e $S'' = \sigma S$ para R e S. No caso aqui tratado, ao contrário dos Exercícios E. 45.47 e E. 45.49, as condições de contorno permitem soluções com $\sigma = 0$! Estas levam a uma solução do tipo $u(x,\ t) = \alpha t + \beta$, com α e β constantes e $\alpha \neq 0$. O que representa tal solução? Ela nos diz que a corda como um todo (ou seja, seu centro de massa) tem também um movimento vertical com uma velocidade constante. Lembre-se que as extremidades da corda estão soltas! Ao martelarmos a corda ela deve mover-se na vertical como um todo além de realizar movimentos vibratórios, que correspondem às soluções com $\sigma < 0$. Note que soluções com $\sigma = 0$ também aparecem nas condições do Exercício E. 45.50. Lá, porém, as condições iniciais levam a $\alpha = 0$. Explique fisicamente por que há essa diferença. ✣

E. 45.52 *Exercício*. Aqui apresentaremos como obter a solução da corda vibrante finita com extremos fixos sem uso do método de separação de variáveis. Sabemos que a solução geral da equação de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ =\ 0\ ,$$

com $x,\ t \in \mathbb{R}$, é da forma

$$u(x,\ t) \ =\ F(x - ct) + G(x + ct)\ ,$$

onde F e G são duas funções de uma variável, definidas em toda a reta real, e que, em princípio, são arbitrárias (e diferenciáveis pelo menos duas vezes).

Suponha que tenhamos de impor condições de contorno do tipo

$$u(0,\ t) \ =\ u(L,\ t) \ =\ 0\ , \qquad \forall t \in \mathbb{R}\ ,$$

com $L > 0$.

a) Mostre que a condição $u(0,\ t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, implica que

$$G(y) \ =\ -F(-y), \qquad \forall y \in \mathbb{R}\ , \tag{45.406}$$

e que, portanto,

$$u(x,\ t) \ =\ F(x - ct) - F(-x - ct)\ . \tag{45.407}$$

b) Mostre que a condição $u(L,\ t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, implica que F deve ser uma função periódica de período $2L$:

$$F(y) \ =\ F(y + 2L)\ , \qquad \forall y \in \mathbb{R}\ .$$

c) Usando o fato de F ser periódica de período $2L$ expresse-a em uma expansão em série de Fourier (vide Seção 38.4.2, página 2123):

$$F(y) \ =\ \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}\left[A_m \cos\left(\frac{m\pi}{L}y\right) + B_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}y\right)\right]\ . \tag{45.408}$$

Usando essa expansão de Fourier de F e (45.407), expresse $u(x,\ t)$ em uma série de senos e cossenos:

$$\begin{aligned} u(x,\ t) \ &=\ \sum_{m=1}^{n}\left\{A_m\left[\cos\left(\frac{m\pi}{L}(x - ct)\right) - \cos\left(\frac{m\pi}{L}(x + ct)\right)\right] + B_m\left[\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}(x - ct)\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}(x + ct)\right)\right]\right\} \\ &=\ 2\sum_{m=1}^{n}\left[A_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}ct\right) + B_m \cos\left(\frac{m\pi}{L}ct\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\ . \end{aligned}$$

Acima, na última igualdade, foram usadas as fórmulas de prostaférese (38.70) e (38.73), página 2124. Observe-se que esta é a mesma expressão obtida para a solução $u(x,\ t)$ pelo método de separação de variáveis.

d) Relacione F com as condições iniciais $u_0(x) \equiv u(x,\ 0)$ e $v_0(x) \equiv \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)$, com x limitada ao intervalo $[0,\ L]$, e obtenha os coeficientes de Fourier A_n e B_n da expansão (45.408) para F em termos de u_0 e v_0.

✣

E. 45.53 *Exercício*. Utilizando o método exposto no Exercício E. 45.52, página 2720, obtenha a solução da equação de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ =\ 0\ ,$$

com $x,\ t \in \mathbb{R}$, para condições de contorno do tipo

$$u(0,\ t) \ =\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,\ t) \ =\ 0\ , \qquad \forall t \in \mathbb{R}\ ,$$

com $L > 0$ (corda de comprimento L com um extremo fixo e o outro solto). Compare ao resultado do mesmo problema obtido pelo método de separação de variáveis. ✣

E. 45.54 *Exercício*. Escreva a solução encontrada para o Exercício E. 45.47, página 2717, na forma

$$u(x,\ t) \ =\ F(x - ct) + G(x + ct)\ ,$$

identifique as funções F e G e verifique se as mesmas satisfazem as propriedades descritas nos itens **a** e **b** do Exercício E. 45.52. ✣

E. 45.55 *Exercício* . **[Corda vibrante de comprimento L com amortecimento]** Considere a equação a derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} \ =\ 0\ ,$$

com $t \in \mathbb{R}$, $0 \le x \le L$, $L > 0$, $c > 0$, $\gamma > 0$, constantes, sendo $u(x,\ t)$ função real de duas variáveis $u : [0,\ L] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Utilizando o método de separação de variáveis e o princípio de superposição resolva essa equação com as condições de contorno

$$u(0,\ t) \ =\ u(L,\ t) \ =\ 0\ , \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

(ambas, portanto, sendo condições do tipo de Dirichlet) e a condição inicial

$$u(x,\ 0) \ =\ f(x)\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) \ =\ 0\ , \qquad x \in [0,\ L]\ ,$$

onde f é a mesma função do Exercício E. 45.47, página 2717.

Determine $\lim_{t\to\infty} u(x,\, t)$.

Um das possíveis situações físicas a que esse problema corresponde é o de uma corda vibrante de comprimento L de densidade ρ, constante, sob uma tensão horizontal T nas suas extremidades (situadas em $x = 0$ e $x = L$), as quais estão fixas (condição de contorno). $u(x,\, t)$ representa então o deslocamento transversal no instante de tempo t do ponto da corda cuja coordenada horizontal é x. A condição inicial significa que a corda está parada em $t = 0$ na posição descrita pela função f. A diferença em relação ao Exercício E. 45.47, página 2717, está no aparecimento na equação diferencial do termo dissipativo $\gamma \dfrac{\partial u}{\partial t}$ que pode ser devido ao atrito da corda com o ar e que (pode ter por consequência a produção de ondas sonoras).

Os modos de oscilação de problemas com amortecimento, como aqueles acima, são denominados *modos quase-normais*. ✣

E. 45.56 *Exercício*. **[Corda pendurada com amortecimento]** Determine a solução da equação da corda pendurada *com amortecimento*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - g \frac{\partial}{\partial z}\left(z \frac{\partial u}{\partial z}\right) \;=\; 0\,,$$

com $\gamma > 0$ e $g > 0$, que descreve o movimento de pequenas oscilações de uma corda de comprimento L localizada, quando em repouso, no intervalo $0 \le z \le L$ do eixo vertical, pendurada pelo seu extremo superior (o que corresponde à condição de contorno $u(L,\, t) = 0$ para todo t), solta no inferior e com condições iniciais $u(z,\, 0) = u_0(z)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(z,\, 0) = v_0(z)$, para certas funções u_0 e v_0 dadas.

Sugestão. Ao resolver a equação para a parte temporal (método de separação de variáveis), lembre-se que alguns modos de vibração podem ter amortecimento subcrítico e outros supercrítico. Para simplificar, ignore o caso de amortecimento crítico.

Os modos de oscilação de problemas com amortecimento, como aqueles acima, são denominados *modos quase-normais*. ✣

E. 45.57 *Exercício*. **[Conservação da energia da corda vibrante]** Considere o problema da corda vibrante unidimensional

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; 0\,,$$

com $x \in [0,\, L]$ para algum $L > 0$ e $t \in \mathbb{R}$ e onde $\tau > 0$ é constante e $\rho(x) > 0$ para todo $x \in [0,\, L]$.

1. Mostre que sob condições de Dirichlet homogêneas ou sob condições de Neumann homogêneas nos extremos $x = 0$ e $x = L$ a quantidade
$$E(t) \;:=\; \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx \tag{45.409}$$
é constante, ou seja, $\frac{dE}{dt}(0) = 0$.
2. Considere o caso em que $\rho(x) = \rho$, constante, sob condições de Dirichlet homogêneas nos dois extremos $x = 0$ e $x = L$. Sabidamente, $u(x,\, t)$ é dada nesse caso por
$$u(x,\, t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos(\omega_n t) + B_n \operatorname{sen}(\omega_n t)\Big) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\,, \tag{45.410}$$
com $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$, sendo $c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$. Mostre que
$$E(t) \;=\; E \;=\; \frac{\pi^2 \tau}{4L} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \big(A_n^2 + B_n^2\big)\,.$$
Conclua disso que a energia associada a cada modo de vibração $u_n(x,\, t) := \big(A_n \cos(\omega_n t) + B_n \operatorname{sen}(\omega_n t)\big) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$, $n \in \mathbb{N}$, é $E_n = \frac{\pi^2 \tau}{4L} n^2 \big(A_n^2 + B_n^2\big)$ e que a energia de cada modo é conservada separadamente, com a energia total sendo a soma da energia de cada modo individual. É importante observar também que os diferentes modos de vibração que compõem a solução (45.410) não trocam energia entre si.
3. Considere o caso da equação $\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \tau(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; 0$ com $x \in [0,\, L]$ para algum $L > 0$ e $t \in \mathbb{R}$ e onde $\tau(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\rho(x) > 0$ para todo $x \in [0,\, L]$. Mostre que sob condições de Dirichlet homogêneas ou sob condições de Neumann homogêneas nos extremos $x = 0$ e $x = L$ tem-se
$$\frac{dE}{dt}(t) \;=\; \frac{1}{2}\frac{d\tau}{dt}(t) \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\,,$$
com $E(t)$ dada em (45.409) com τ substituída por $\tau(t)$.

✣

45.13.4 Modos de Vibração de Membranas

E. 45.58 *Exercício dirigido*. **[Membrana em forma de um triângulo retângulo isósceles]**[74] Determine a solução da equação de ondas em duas dimensões para o movimento transversal de uma membrana bidimensional na forma de uma triângulo retângulo isósceles de lado $L > 0$ ou seja, contido na região $T_L \subset \mathbb{R}^2$ definida por (em coordenadas Cartesianas)

$$T_L \;:=\; \Big\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 |\;\; x \ge 0,\;\; y \ge 0,\;\; x + y \le L\Big\}\,.$$

Vide Figura 45.21, página 2723.

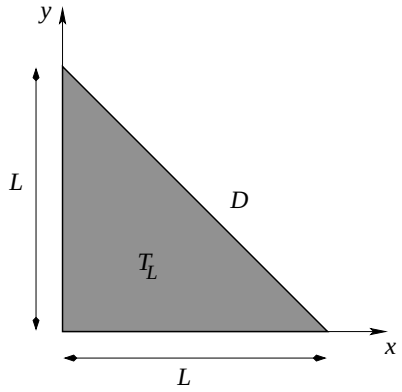

Figura 45.21: A membrana triangular T_L. A aresta D corresponde ao segmento de reta $x + y = L$ com $0 \le x \le L$ (e, portanto, $0 \le y \le L$).

Assuma que a membrana está fixa nas bordas, ou seja, assuma as condições de contorno de Dirichlet

$$u(x,\, 0) \;=\; 0 \;\text{ para todo } 0 \le x \le L\,, \tag{45.411}$$

$$u(0,\, y) \;=\; 0 \;\text{ para todo } 0 \le y \le L\,, \tag{45.412}$$

$$u(x,\, L - x) \;=\; 0 \;\text{ para todo } 0 \le x \le L\,. \tag{45.413}$$

A condição (45.413) impõe a nulidade de u na aresta D da Figura 45.21.

Mostre que a solução da equação de ondas que satisfaz as condições de contorno (45.411)-(45.413) é

$$u(x,\, y,\, t) \;=\; \sum_{m>n\ge 1}^{\infty} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) - (-1)^{m+n} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

$$\times \left[A_{mn} \cos\left(\omega_{mn} t\right) + B_{mn} \operatorname{sen}\left(\omega_{mn} t\right)\right]\,,$$

onde $\omega_{mn} = \frac{c\pi}{L}\sqrt{n^2 + m^2}$. Determine as constantes A_{mn} e B_{mn} a partir das condições iniciais $u(x,\, y,\, 0) = u_0(x,\, y)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,\, y,\, 0) = v_0(x,\, y)$, sendo u_0 e v_0 funções dadas em T_L e que representam a posição e velocidade, respectivamente, de cada ponto da membrana em $t = 0$.

[74] Este exercício contém um dos raros problemas com condições de contorno não-separáveis que, no entanto, podem ainda ser resolvidos pelo método de separação de variáveis. Para tal é essencial que o triângulo retângulo considerado seja isósceles. Para triângulos retângulos gerais o método não se aplica, infelizmente.

Sugestões. As condições de contorno (45.411)-(45.413) não são separáveis nas coordenadas Cartesianas x e y, mas a equação de Helmholtz $\Delta u + \lambda u = 0$ ainda o é. O método de separação de variáveis fornece soluções do tipo $\operatorname{sen}(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta y)$ as quais satisfazem as condições de contorno (45.411) e (45.412), mas não a condição (45.413). A ideia é considerar as funções

$$J_{\alpha,\,\beta}(x,\,y) \;:=\; \operatorname{sen}(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta y) + c\operatorname{sen}(\beta x)\operatorname{sen}(\alpha y)\;,$$

as quais satisfazem (45.411) e (45.412) e a equação de Helmholtz $\Delta u + \lambda u = 0$ com $\lambda = \alpha^2 + \beta^2$, e tentar determinar α, β e c de sorte que $J_{\alpha,\,\beta}(x,\,L-x) = 0$ seja satisfeita para todo $0 \le x \le L$ (condição (45.413)).

Notemos primeiramente que para $\beta = \pm\alpha$ tem-se $J_{\alpha,\,\pm\alpha}(x,\,y) = c_0\operatorname{sen}(\alpha x)\operatorname{sen}(\alpha y)$ (com $c_0 = \pm(1+c)$) e a condição $J_{\alpha,\,\alpha}(x,\,L-x) = 0$ fica $c_0\operatorname{sen}(\alpha x)\big(\operatorname{sen}(\alpha L)\cos(\alpha x) - \cos(\alpha L)\operatorname{sen}(\alpha x)\big) = 0$, que só pode ser satisfeita para todo x se $c_0 = 0$ ou se $\alpha = 0$, levando, em ambos os casos, à solução trivial identicamente nula. Para $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ temos também a solução trivial identicamente nula.

Para $|\alpha| \neq |\beta|$, ambos não-nulos, procedemos da seguinte forma. Verifique que

$$J_{\alpha,\,\beta}(x,\,L-x) \;=\; \operatorname{sen}(\beta L)\,\operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta x) + c\operatorname{sen}(\alpha L)\,\cos(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta x) - \big[\cos(\beta L) + c\cos(\alpha L)\big]\,\operatorname{sen}(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta x)\;. \quad (45.414)$$

Mostremos agora que as funções

$$f_1(x) \;:=\; \operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta x)\;, \qquad f_2(x) \;:=\; \cos(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta x) \quad \text{e} \quad f_3(x) \;:=\; \operatorname{sen}(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta x)$$

são linearmente independentes. Para tal, observemos que se existirem a_1, a_2 e a_3 tais que

$$a_1\operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta x) + a_2\cos(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta x) + a_3\operatorname{sen}(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta x) \;=\; 0 \quad (45.415)$$

para todo x, então em $x = \pi/\beta$ teríamos $a_1\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{\beta}\pi\right) = 0$ Há aqui duas possibilidades: *a)* vale $a_1 = 0$; *b)* vale $\alpha = m\beta$ com $m \in \mathbb{Z}$ mas com $m \neq 0$ e $m \neq \pm 1$ (pois já excluímos o caso $\alpha = 0$ e o caso $\alpha = \pm\beta$). No caso *b* teríamos de (45.415), no ponto $x = \pi/\alpha$, que $a_2\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{\alpha}\pi\right) = 0$, ou seja, $a_2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{m}\right) = 0$, o que só é possível se $a_2 = 0$. Com isso, (45.415) ficaria $a_1\cos(\beta x) + a_3\operatorname{sen}(\beta x) = 0$, o que só é possível se $a_1 = a_3 = 0$. Teríamos, portanto, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. No caso *a*, no qual $a_1 = 0$, (45.415) ficaria $a_2\cos(\alpha x) + a_3\operatorname{sen}(\alpha x) = 0$, o que só é possível se $a_2 = a_3 = 0$. Teríamos novamente, portanto, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Isso estabeleceu a independência linear das funções f_1, f_2 e f_3.

Isto posto, impor em (45.414) que $J_{\alpha,\,\beta}(x,\,L-x) = 0$ seja satisfeita para todo $0 \le x \le L$ equivale a impor

$$\operatorname{sen}(\beta L) \;=\; 0\;, \quad (45.416)$$

$$c\operatorname{sen}(\alpha L) \;=\; 0\;, \quad (45.417)$$

$$\cos(\beta L) + c\cos(\alpha L) \;=\; 0\;. \quad (45.418)$$

De (45.416) temos $\beta = n\pi/L$ com $n \in \mathbb{N}$, mas $n > 0$ para excluir a solução nula. Com isso, teremos por (45.418) que

$$c\cos(\alpha L) \;=\; (-1)^{n+1}\;. \quad (45.419)$$

Isso, em particular, implica que $c \neq 0$ e, por (45.417), concluímos que $\operatorname{sen}(\alpha L) = 0$, o que implica $\alpha = m\pi/L$ com $n \in \mathbb{N}_0$ e $m \in \mathbb{N}_0$. Dessa forma, (45.419) significa que $c = (-1)^{m+n+1}$.

Concluímos disso que as funções

$$M_{mn}(x,\,y) \;=\; \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) - (-1)^{m+n}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

com $m,\; n \in \mathbb{N}$, satisfazem a equação de Helmholtz com $\lambda = \frac{\pi^2}{L^2}(n^2+m^2)$ e satisfazem todas as condições de contorno (45.411)-(45.413) sendo, portanto, o modos de vibração do problema.

A função $M_{mn}(x,\,y)$ é identicamente nula caso $m = n$ e tem-se $M_{mn}(x,\,y) = -(-1)^{m+n}M_{nm}(x,\,y)$. Assim, apenas as funções $M_{mn}(x,\,y)$ com $m > n \ge 1$ são independentes.

Obtenha as relações de ortogonalidade na região T_L para as funções $M_{mn}(x,\,y)$, $m > n \ge 1$. ✣

E. 45.59 *Exercício.* **[Membrana circular com amortecimento]** Determine a solução da equação de ondas *com amortecimento*

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \;=\; 0\;,$$

$\gamma > 0$, em duas dimensões, no interior de um disco de raio $R > 0$, com $|u(\rho,\,\varphi,\,t)| < \infty$, com condições de contorno de Dirichlet $u(R,\,\varphi,\,t) = 0$ e com as condições iniciais

$$u(\rho,\,\varphi,\,0) \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(\rho,\,\varphi,\,0) \;=\; v_0(\rho)\;, \quad (45.420)$$

onde

$$v_0(\rho) \;=\; \begin{cases} V\;, & 0 \le \rho \le R_0\;, \\ 0\;, & R_0 < \rho \le R\;, \end{cases} \quad (45.421)$$

onde $0 < R_0 < R$. Acima, as coordenadas ρ e φ referem-se ao sistema de coordenadas polares cuja origem coincide com o centro do disco de raio R.

Sugestão 1. Ao resolver a equação para a parte temporal (método de separação de variáveis), lembre-se que os modos de vibração podem ter amortecimento subcrítico, crítico ou supercrítico. Para simplificar, considere que não haja amortecimento crítico. *Sugestão 2.* Para o cômputo explícito das integrais referentes às condições iniciais (45.420)–(45.421), use o fato que $xJ_0(x) = \frac{d}{dx}\big(xJ_1(x)\big)$ (vide (16.164), página 948).

Os modos de oscilação de problemas com amortecimento, como aqueles acima, são denominados *modos quase-normais*. ✣

E. 45.60 *Exercício.* **[Modos de vibração de um setor triangular de um disco]** Determine a solução da equação de ondas em duas dimensões para o movimento transversal de uma membrana bidimensional na forma de uma setor triangular de um disco de raio $R > 0$ e ângulo de abertura β, ou seja, contida na região (em coordenadas polares) $0 \le \rho \le R$ e $0 \le \varphi \le \beta$, com $0 < \beta \le 2\pi$. Vide Figura 45.22, página 2726. Assuma que a membrana está fixa nas bordas, ou seja, assuma as condições de contorno $u(R,\,\varphi,\,t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $0 \le \varphi \le \beta$ e $u(\rho,\,0,\,t) = u(\rho,\,\beta,\,t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $0 \le \rho \le R$ (condições de contorno de Dirichlet). Mostre que a solução da equação de ondas que satisfaz as condições de contorno é

$$u(\rho,\,\varphi,\,t) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_{\nu_m}\left(\frac{\alpha_n^{\nu_m}\rho}{R}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{\beta}\,\varphi\right)\left[A_{mn}\cos\left(\frac{\alpha_n^{\nu_m}ct}{R}\right) + B_{mn}\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n^{\nu_m}ct}{R}\right)\right]\;,$$

onde $\nu_m = \frac{m\pi}{\beta}$ e onde $\alpha_n^{\nu_m}$ é o n-ésimo zero de J_{ν_m} na semirreta $(0,\,\infty)$. Determine as constantes A_{mn} e B_{mn} a partir das condições iniciais $u(\rho,\,\varphi,\,0) = u_0(\rho,\,\varphi)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho,\,\varphi,\,0) = v_0(\rho,\,\varphi)$, sendo u_0 e v_0 funções dadas em $0 \le \rho \le R$ e $0 \le \varphi \le \beta$ e que representam a posição e velocidade, respectivamente, de cada ponto da membrana em $t = 0$. Será necessário usar as relações de ortogonalidade (16.217), página 959, para as funções de Bessel J_{ν_m} assim como as relações de ortogonalidade para as funções $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{\beta}\,\varphi\right)$. ✣

E. 45.61 *Exercício.* **[Membrana anelar]** Determine a solução da equação de ondas em duas dimensões para o movimento transversal de uma membrana anelar, de raio interno R_1 e raio externo R_2 com $0 < R_1 < R_2$, ou seja, contido na região (em coordenadas polares) $R_1 \le \rho \le R_2$ e $0 \le \varphi \le 2\pi$. Assuma que a membrana está fixa nas bordas (condições de contorno de Dirichlet), ou seja, assuma as condições de contorno $u(R_1,\,\varphi) = u(R_2,\,\varphi) = 0$ para todo $0 \le \varphi \le 2\pi$. Mostre que a solução da equação de ondas que satisfaz as condições de contorno é

$$u(\rho,\,\varphi,\,t) \;=\; \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} R_{mn}(\rho)\,e^{im\varphi}\left[A_{mn}\cos\left(\frac{\mu_{mn}ct}{R_2}\right) + B_{mn}\operatorname{sen}\left(\frac{\mu_{mn}ct}{R_2}\right)\right]\;,$$

com

$$R_{mn}(\rho) \;:=\; N_m\left(\frac{\mu_{mn}R_1}{R_2}\right)J_m\left(\frac{\mu_{mn}\rho}{R_2}\right) - J_m\left(\frac{\mu_{mn}R_1}{R_2}\right)N_m\left(\frac{\mu_{mn}\rho}{R_2}\right)\;,$$

sendo que μ_{mn} é o n-ésimo zero no intervalo $(0,\,\infty)$ da função

$$L_m(x) \;:=\; N_m\left(\frac{R_1}{R_2}x\right)J_m(x) - J_m\left(\frac{R_1}{R_2}x\right)N_m(x)\;.$$

A determinação das constantes A_{mn} e B_{mn} a partir das condições iniciais usuais pode ser feita com uso das relações de ortogonalidade descritas no Teorema 16.8, página 962. ✣

E. 45.62 *Exercício.* **[Membrana triangular-anelar]** Determine a solução da equação de ondas em duas dimensões para o movimento transversal de uma membrana na forma de um setor triangular-anelar, ou seja, contida na região (em coordenadas polares) $R_1 \le \rho \le R_2$ e $0 \le \varphi \le \beta$, com $0 < R_1 < R_2$ e $0 < \beta \le 2\pi$. Vide Figura 45.22, página 2726.

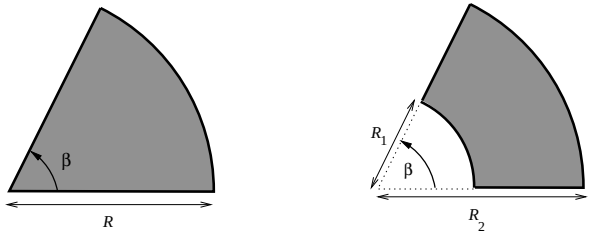

Figura 45.22: À esquerda: um setor triangular de um disco, com raio $R > 0$ e ângulo de abertura β, sendo $0 < \beta \leq 2\pi$. À direita: um setor triangular anelar de um disco, com raio interno R_1, raio externo R_2 e ângulo de abertura β, sendo $0 < R_1 < R_2$ e $0 < \beta \leq 2\pi$.

Assuma que a membrana está fixa nas bordas, ou seja, assuma as condições de contorno $u(R_1,\, \varphi,\, t) = u(R_2,\, \varphi,\, t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $0 \leq \varphi \leq \beta$ e $u(\rho,\, 0,\, t) = u(\rho,\, \beta,\, t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $R_1 \leq \rho \leq R_2$ (condições de contorno de Dirichlet). Mostre que a solução da equação de ondas que satisfaz as condições de contorno é

$$u(\rho,\, \varphi,\, t) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} R_{mn}(\rho)\, \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{\beta}\,\varphi\right)\, \left[A_{mn}\cos\left(\frac{\mu_{mn}ct}{R_2}\right) + B_{mn}\operatorname{sen}\left(\frac{\mu_{mn}ct}{R_2}\right)\right]\,,$$

com

$$R_{mn}(\rho) \;:=\; N_{\nu_m}\left(\frac{\mu_{mn}R_1}{R_2}\right) J_{\nu_m}\left(\frac{\mu_{mn}\rho}{R_2}\right) - J_{\nu_m}\left(\frac{\mu_{mn}R_1}{R_2}\right) N_{\nu_m}\left(\frac{\mu_{mn}\rho}{R_2}\right)\,,$$

onde $\nu_m := \frac{m\pi}{\beta}$, sendo que μ_{mn} é o n-ésimo zero no intervalo $(0,\, \infty)$ da função

$$L_m(x) \;:=\; N_{\nu_m}\left(\frac{R_1}{R_2}x\right) J_{\nu_m}(x) - J_{\nu_m}\left(\frac{R_1}{R_2}x\right) N_{\nu_m}(x)\;.$$

A determinação das constantes A_{mn} e B_{mn} a partir das condições iniciais usuais pode ser feita com uso das relações de ortogonalidade descritas no Teorema 16.8, página 962. ✣

45.13.5 Problemas sobre Ondas e Difusão em Três Dimensões Espaciais

E. 45.63 *Exercício.* **[Ondas amortecidas em uma esfera]** Determine (tão detalhada e explicitamente quanto possível) a solução da equação de ondas com amortecimento

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \;=\; 0,$$

$\gamma > 0$, em <u>três</u> dimensões, no interior da esfera de raio R, com $|u(r,\, \theta,\, \varphi,\, t)| < \infty$, com condições de contorno de Dirichlet $u(R,\, \theta,\, \varphi,\, t) = 0$ e com as condições iniciais

$$u(r,\, \theta,\, \varphi,\, 0) \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(r,\, \theta,\, \varphi,\, 0) \;=\; v_0(r),$$

onde

$$v_0(r) \;=\; \begin{cases} V, & 0 \leq r \leq R_0 < R\,, \\ 0, & R_0 < r \leq R\,. \end{cases}$$

Os modos de oscilação de problemas com amortecimento, como aqueles acima, são denominados *modos quase-normais*. ✣

E. 45.64 *Exercício.* **[Resfriamento de um paralelepípedo]** Resolva a equação a derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \;=\; 0\,,$$

com $D > 0$, constante, e com $0 \leq x \leq L_1$, $0 \leq y \leq L_2$ e $0 \leq z \leq L_3$. Os números L_1, L_2 e L_3 são positivos e arbitrários. A equação acima é a versão para três dimensões da equação de difusão.

A condição inicial é

$$u(x,\, y,\, z,\, 0) \;=\; u_0(x,\, y,\, z) \;:=\; f(x)\;[y(L_2 - y)]\;\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{L_3}\right)\,,$$

onde

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} x, & \text{para } 0 \leq x \leq \dfrac{L_1}{2}\,, \\ (L_1 - x), & \text{para } \dfrac{L_1}{2} \leq x \leq L_1\,. \end{cases}$$

As condições de contorno são tais que $u(x,\, y,\, z,\, t)$ se anula para $x = 0$, para $x = L_1$, para $y = 0$, para $y = L_2$, para $z = 0$ e para $z = L_3$. *Sugestão.* Use o método de separação de variáveis.

Esse problema corresponde ao da condução de calor em um paralelepípedo condutor térmico de lados L_1, L_2 e L_3 e constante de difusão D. A função f representa a temperatura como função da posição em $t = 0$. A condições de contorno correspondem ter-se as paredes do paralelepípedo mantidas a uma temperatura nula. ✣

E. 45.65 *Exercício.* **[Resfriamento de uma esfera]** Uma esfera homogênea de raio R, boa condutora de calor, com constante de difusão $D > 0$, encontra-se em contacto térmico com um banho térmico à temperatura $T = 0$. No instante de tempo $t = 0$ a temperatura inicial da esfera é descrita (em um sistema de coordenadas esféricas, cuja origem coincide com o centro da esfera) por uma função $u_0(r,\, \theta,\, \varphi)$, com $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

a. Determine a temperatura $u(r,\, \theta,\, \varphi,\, t)$ de um ponto do interior da esfera com coordenadas $(r,\, \theta,\, \varphi)$ no instante $t \geq 0$.

b. Determine explicitamente $u(r,\, \theta,\, \varphi,\, t)$ para o caso em que $u_0(r,\, \theta,\, \varphi) = T_0\dfrac{\operatorname{sen}(\xi)}{\xi}$, onde $\xi \equiv \pi r/R$.

Sugestão. Funções de Bessel esféricas. ✣

E. 45.66 *Exercício.* **[Resfriamento de um cano]** Um cano cilíndrico infinito, cujo raio interno é R_1 e cujo raio externo é R_2, é formado por um material M_c cuja constante de difusão térmica é D. O cano está em contacto por dentro com um material M_1 à temperatura T_1 e por fora com um material M_2 à temperatura T_2. As temperaturas dos materiais M_1 e M_2 são mantidas constantes e não mudam nem com o tempo nem com a posição.

Adotemos coordenadas cilíndricas $(r,\, \varphi,\, z)$, cujo eixo z coincide com o eixo do cilindro. Deseja-se determinar a temperatura $u(r,\, \varphi,\, z,\, t)$ no interior do cano, ou seja, para $R_1 \leq r \leq R_2$. Como o cano é infinito e as temperaturas dos meios M_1 e M_2 não variam, a temperatura u deve ser apenas uma função de r, φ e t.

Seguindo a Lei de Fourier, as condições de contorno a serem satisfeitas em $r = R_1$ e em $r = R_2$ devem impor que o fluxo de calor na superfície de contacto entre o cano um meio externo deve ser proporcional à diferença de temperatura entre ambos os meios na superfície de contacto, sendo que a constante de proporcionalidade σ depende de ambos os materiais em contacto térmico. Ou seja, devemos impor

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R_1,\, \varphi,\, t) \;=\; +\sigma_1\,[u(R_1,\, \varphi,\, t) - T_1]$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R_2,\, \varphi,\, t) \;=\; -\sigma_2\,[u(R_2,\, \varphi,\, t) - T_2]\;,$$

para todo t e todo φ.

Sabendo que a temperatura no interior do cano (ou seja, para $R_1 \leq r \leq R_2$) era $u_0(r,\, \varphi)$ no instante $t = 0$, determine a temperatura $u(r,\, \varphi,\, z,\, t)$ para todo $t > 0$. A temperatura u deve satisfazer a equação de difusão do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; D\Delta u\,.$$

Sugestão. As condições de contorno acima são não-homogêneas. Para passar para condições homogêneas, proceda da seguinte forma. Escreva

$$u(r,\, \varphi,\, t) \;=\; f(r,\, \varphi,\, t) + g(r)$$

e escolha g, que é uma função apenas de r, de modo que $\Delta g = 0$ e de modo que

$$g'(R_1) - \sigma_1 g(R_1) \;=\; -\sigma_1 T_1$$

e

$$g'(R_2) + \sigma_2 g(R_2) \;=\; +\sigma_2 T_2 \,.$$

Com isso, como $\Delta g = 0$, a função f deve satisfazer também a equação de difusão

$$\frac{\partial f}{\partial t} \;=\; D\Delta f$$

mas com condições de contorno homogêneas

$$\frac{\partial f}{\partial r}(R_1,\,\varphi,\,t) - \sigma_1 f(R_1,\,\varphi,\,t) \;=\; 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial r}(R_2,\,\varphi,\,t) + \sigma_2 f(R_2,\,\varphi,\,t) \;=\; 0\,,$$

para todo t e todo φ.

Comentários: 1º. A determinação dos autovalores não precisa ser feita completamente, caso envolva a solução de uma equação transcendente. É suficiente deixar indicado como proceder. 2º. A solução para f requer o uso de funções de Bessel e de Neumann, semelhantemente ao Exercício E. 45.61, página 2725, mas as condições de contorno daquele exercício eram de Dirichlet, enquanto que, no caso presente, são mistas. Tal como naquele exercício, é importante determinar as relações de ortogonalidade a serem usadas e para isso recomenda-se dar uma olhada no Teorema 16.8, página 962, e adaptar a demonstração para o presente contexto. Isso pode ser trabalhoso. 3º. Não esquecer que a condição inicial para f é $f(r,\,\varphi,\,0) = u_0(r,\,\varphi) - g(r)$. ✣

* *** *

45.13.6 Problemas Envolvendo Funções de Green

E. 45.67 *Exercício.* **[Função de Green para o oscilador harmônico amortecido]** Sejam $\rho > 0$ e $\omega_0 > 0$, constantes.

I. Usando transformadas de Fourier, obtenha uma solução fundamental associada ao operador diferencial $\frac{d^2}{dt^2} + \rho\frac{d}{dt} + \omega_0^2$, ou seja, uma solução G de

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \rho\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) G(t,\,t') \;=\; \delta(t-t')\,,$$

em cada um dos seguintes casos:

1. $\rho < 2\omega_0$ (caso subcrítico),
2. $\rho > 2\omega_0$ (caso supercrítico) e
3. $\rho = 2\omega_0$ (caso crítico).

II. Mostre que para $t > 0$ uma possível solução da equação do oscilador harmônico amortecido forçado

$$\ddot{x}(t) + \rho\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) \;=\; \frac{1}{m} f(t) \tag{45.422}$$

é

$$x_{nh}(t) \;=\; \frac{1}{m}\int_0^\infty G(t,\,t') f(t')\,dt'\,. \tag{45.423}$$

A solução geral da equação (45.422) é obtida adicionando-se a essa solução a solução geral da equação homogênea $\ddot{x}(t) + \rho\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$.

III. Fazendo uso da forma explícita da solução fundamental obtida acima, verifique que a solução dada em (45.423) satisfaz nos três casos (subcrítico, supercrítico e crítico) as condições $x_{nh}(0) = 0$ e $\dot{x}_{nh}(0) = 0$. Mostre com isso que a solução do problema de valor inicial

$$\ddot{x}(t) + \rho\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) \;=\; \frac{1}{m} f(t)\,, \quad \text{com } x(0) \;=\; x_0 \text{ e } \dot{x}(0) \;=\; v_0\,, \tag{45.424}$$

para $t \geq 0$ será dada por $x(t) = x_h(t) + x_{nh}(t)$, onde x_h é a solução do problema de valor inicial *homogêneo*

$$\ddot{x}(t) + \rho\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) \;=\; 0\,, \quad \text{com } x(0) \;=\; x_0 \text{ e } \dot{x}(0) \;=\; v_0\,. \tag{45.425}$$

IV. Usando os fatos acima, prove que para $t \geq 0$ a solução $x(t)$ da equação do oscilador harmônico amortecido forçado (45.422) com as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$ é dada por:

1. Caso $\rho < 2\omega_0$ (caso subcrítico):

$$x(t) \;=\; e^{-\rho t/2}\left(x_0\cos(\omega_1 t) + \frac{\rho x_0 + 2v_0}{2\omega_1}\operatorname{sen}(\omega_1 t)\right) + \frac{1}{m\omega_1}\int_0^t e^{-\rho(t-t')/2}\operatorname{sen}\big(\omega_1(t-t')\big) f(t')\,dt'\,,$$

onde $\omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\rho^2}{4}}$.

2. Caso $\rho > 2\omega_0$ (caso supercrítico):

$$x(t) \;=\; e^{-\rho t/2}\left(x_0\cosh(\omega_2 t) + \frac{\rho x_0 + 2v_0}{2\omega_2}\operatorname{senh}(\omega_2 t)\right) + \frac{1}{m\omega_2}\int_0^t e^{-\rho(t-t')/2}\operatorname{senh}\big(\omega_2(t-t')\big) f(t')\,dt'\,.$$

onde $\omega_2 := \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \omega_0^2}$.

3. Caso $\rho = 2\omega_0$ (caso crítico):

$$x(t) \;=\; e^{-\rho t/2}\left(\left(1 + \frac{\rho}{2}t\right)\,x_0 + t\,v_0\right) + \frac{1}{m}\int_0^t (t-t')e^{-\rho(t-t')/2} f(t')\,dt'\,.$$

✣

Apêndices

45.A Duas Transformadas de Laplace

Nesta seção vamos mostrar como calcular as transformadas de Laplace das seguintes funções:

$$f(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{a^2}{t}\right) \qquad \text{e} \qquad g(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{t^3}}\exp\left(-\frac{a^2}{t}\right)\,,$$

onde $t > 0$ e $a > 0$. Como vimos na Seção 45.3.3, página 2633, as transformadas de Laplace dessas funções são úteis na resolução da equação de difusão para uma barra metálica homogênea semi-infinita, ou seja para a resolução da equação de difusão em $(0,\,\infty)$.

Como veremos, a transformada de Laplace de g é facilmente obtida a partir da de f, de modo que começaremos com esta. Temos que, para $s \geq 0$,

$$\mathcal{L}[f](s) \;=\; \int_0^\infty \frac{\exp\left(-st-\dfrac{a^2}{t}\right)}{\sqrt{t}}\,dt\,.$$

Para calcular esta integral teremos que proceder uma série de mudanças de variável de modo a chegarmos (como veremos) à uma integral de Laplace, que sabemos calcular. Claro que poderíamos fazer toda a sequência de mudanças de variável de uma só vez, mas por razões pedagógicas vamos fazê-las separadamente.

Começamos escrevendo $-st - \frac{a^2}{t} = -\left(\sqrt{s}\sqrt{t} - \frac{a}{\sqrt{t}}\right)^2 - 2a\sqrt{s}$. Assim, ficamos com

$$\mathcal{L}[f](s) \;=\; e^{-2a\sqrt{s}}\int_0^\infty \frac{\exp\left(-\left[\sqrt{s}\sqrt{t}-\dfrac{a}{\sqrt{t}}\right]^2\right)}{\sqrt{t}}\,dt\,.$$

Agora façamos a mudança de variável $u = \sqrt{s}\sqrt{t}$, com $du = \frac{\sqrt{s}}{2}\frac{dt}{\sqrt{t}}$. Ficamos com

$$\mathcal{L}[f](s) \;=\; \frac{2e^{-2a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\int_0^\infty \exp\left(-\left[u-\frac{a\sqrt{s}}{u}\right]^2\right)\,du\,.$$

Definindo $b := a\sqrt{s}$, podemos escrever

$$\mathcal{L}[f](s) \;=\; \frac{2e^{-2a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\int_0^\infty \exp\left(-b\left[\frac{u}{\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{u}\right]^2\right)\,du\,.$$

É natural agora fazermos a mudança de variável $v = \frac{u}{\sqrt{b}}$, com $dv = \frac{du}{\sqrt{b}}$. Ficamos com

$$\mathcal{L}[f](s) \;=\; \frac{2\sqrt{b}\,e^{-2a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\int_0^\infty \exp\left(-b\left[v-\frac{1}{v}\right]^2\right)\,dv\,. \tag{45.A.1}$$

Seja agora a função $y(v) = v - \frac{1}{v}$, com $v \in (0,\,\infty)$. Afirmamos que essa função é uma bijeção de $(0,\,\infty)$ em $\mathbb{R}$. Isso segue do fato que $y'(v) = 1 + \frac{1}{v^2} > 0$, para $v \in (0,\,\infty)$, e das observações que $\lim_{v\to 0} y(v) = -\infty$ e $\lim_{v\to\infty} y(v) = \infty$.

E. 45.68 *Exercício.* Justifique por que y os argumentos acima implicam que y é bijetora. Faça um gráfico de $y(v)$. ✣

É fácil mostrar que a função inversa de y é

$$v(y) \;=\; \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}, \qquad y \in \mathbb{R}\,. \tag{45.A.2}$$

E. 45.69 *Exercício.* Verifique isso resolvendo a equação $y = v - \frac{1}{v}$ em v. Isso leva à equação de segundo grau $v^2 - yv - 1 = 0$, que tem por soluções $v = \frac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}$. É fácil constatar que a solução com o sinal "−" não interessa (pois é negativa). ✣

Retornando à equação (45.A.1), a mudança de variáveis a se fazer é justamente $y \;=\; v - \frac{1}{v}$, com

$$dv \;=\; \frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)\,dy\,.$$

E. 45.70 *Exercício.* Verifique isso a partir de (45.A.2). ✣

Ficamos então com o seguinte:

$$\mathcal{L}[f](s) \;=\; \frac{2\sqrt{b}e^{-2a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-by^2}\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)\,dy\,.$$

Note que os limites de integração mudaram, pois y vai de $-\infty$ a ∞ quando v varia de 0 a ∞. A integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-by^2}\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\,dy$$

vale zero, pois o integrando é uma função ímpar. Logo,

$$\mathcal{L}[f](s) \;=\; \frac{2\sqrt{b}\,e^{-2a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-by^2}\,dy\,.$$

Como anunciado, a integral que aparece do lado direito é uma integral de Laplace e, como é bem sabido,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-by^2}\,dy \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{b}}\,.$$

Logo,

$$\mathcal{L}[f](s) \;=\; \frac{2\sqrt{b}e^{-2a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\,,$$

e concluímos que

$$\mathcal{L}[f](s) \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-2a\sqrt{s}}\,.$$

Diferenciando ambos os lados dessa expressão em relação a a, concluímos também que

$$\mathcal{L}[g](s) \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-2a\sqrt{s}}\,.$$